Задачи к лекции 8

1. Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Докажите, что $(a+b)^p = a^p + b^p$ для любых $a, b \in K$.

Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей. Для каждого элемента $\alpha \in F$ обозначим через $K(\alpha)$ пересечение всех подполей в F, содержащих K и α.

2. Докажите, что $K(\alpha) = \{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \mid f(x), g(x) \in K[x] \text{ и } g(\alpha) \neq 0\}$.

3. Докажите, что если элемент $\alpha \in F$ алгебраичен над K и $h(x) \in K[x]$ — его минимальный многочлен, то $K(\alpha) \simeq K[x]/(h(x))$.

4. В зависимости от значения параметра $a \in \mathbb{Q}$ найдите степень расширения $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, где α — действительный корень уравнения $x^3 = a$.

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\dfrac{1 - \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}$.

6. Пусть α — комплексный корень многочлена $x^3 - 3x + 1$. Представьте элемент

$$\frac{3\alpha^2 + 4}{\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $\deg f(x) \leqslant 2$.

7. Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

8. Найдите степень поля разложения для следующих многочленов:
(а) $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$;
(б) $x^4 - 2$ над $\mathbb{Q}$.

9. Пусть $K(x)$ — поле рациональных дробей над полем K. Найдите степень расширения $[K(x) : K]$. Какие элементы из $K(x)$ алгебраичны над K?

10. Пусть $K \subseteq F$ — конечное расширение полей. Докажите, что все элементы поля F являются алгебраическими над K.

11. Пусть $K \subseteq F$ — конечное расширение полей. Какие значения может принимать его степень в случаях, когда $K = \mathbb{C}$ и $K = \mathbb{R}$?

12. Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей. Докажите, что все элементы в F, алгебраические над K, образуют подполе в F.

Домашнее задание

1. Пусть α — комплексный корень многочлена $x^3 - x^2 - 3x + 1$. Представьте элемент

$$\frac{4\alpha^2 - 3\alpha + 1}{2\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $\deg f(x) \leqslant 2$.

2. Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}$.

3. Найдите степень поля разложения многочлена $x^4 - x^2 + 1$ над $\mathbb{Q}$.

4. Пусть $F = \mathbb{C}(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x],\ g(x) \neq 0\}$ — поле рациональных дробей над $\mathbb{C}$ и $K = \mathbb{C}(y)$, где $y = x + 1/x$. Найдите степень расширения $[F : K]$.