

## Семинар 20

### Общая информация:

- Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – билинейная форма, а  $U \subseteq V$  – подпространство. Тогда  $\beta$  задает билинейную форму на  $U$  (просто применяем  $\beta$  к векторам из  $U$ ). Такую билинейную форму будем называть *ограничением*  $\beta$  на  $U$  и обозначать  $\beta|_U$ .

### Задачи:

- Задачник. §37, задача 37.10 (а).
- Задачник. §37, задача 37.21.
- Задачник. §37, задача 37.22.
- Задачник. §37, задача 37.23.
- Задачник. §37, задача 37.30 (а).
- Определите, задают ли следующие матрицы одну и ту же билинейную форму в разных базисах:
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – билинейная форма и  $U \subseteq V$  – подпространство. Пусть либо  $\beta$  симметрическая либо кососимметрическая (в этом случае нет разницы между  $U^\perp$  и  ${}^\perp U$ ). Покажите, что следующие условия эквивалентны
  - $\beta|_U$  – невырождена
  - $U \cap U^\perp = 0$
- Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – билинейная форма (симметрическая или кососимметрическая). Пусть  $V = U \oplus W$  и  $U$  ортогонально  $W$  относительно  $\beta$ . Пусть матрица  $\beta|_U$  есть  $A$ , а матрица  $\beta|_W$  есть  $B$ , покажите, что матрица  $\beta$  есть  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .
- Пусть  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – кососимметрическая форма.
  - Если  $\beta$  не равна тождественно нулю, то найдется такая пара векторов  $v, u \in V$ , что  $\beta|_{\langle v, u \rangle}$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - Покажите, что найдется такой базис в  $V$ , что матрица  $\beta$  является блочно диагональной с блоками  $0$  или  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - Невырожденная кососимметрическая форма может существовать только в четномерном пространстве.
- Задачник. §37, задача 37.36.