

Семинар 8

Задачи:

1. Задачник. §12, задача 12.2.
2. Задачник. §13, задача 13.2 (б).
3. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $X \in M_n(\mathbb{R})$. Найти все решения уравнения $XX^t = -E$, где E – единичная матрица размера n .
5. Пусть $X \in M_n(\mathbb{R})$, E – единичная матрица размера n и для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $XX^t = \lambda E$. Верно ли, что $X^tX = \lambda E$?
6. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, E – единичная матрица размера n и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $R(\lambda) = \widehat{A - \lambda E}$ – присоединенная матрица.

(а) Показать, что выполнено следующее равенство

$$(A - \lambda E)R(\lambda) = R(\lambda)(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)E.$$

(б) Показать, что $R(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \dots + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$, где $A_i \in M_n(\mathbb{R})$ – некоторые матрицы

(с) Показать, что матрицы A_i коммутируют с A .

7. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix} \in M_{n_1 + \dots + n_k}(\mathbb{R})$$

где $I_{n_i} \in M_{n_i}(\mathbb{R})$ – единичные матрицы, а $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Найти $\{X \in M_{n_1 + \dots + n_k}(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.

8. Пусть m и n – некоторые натуральные числа и $(1, \dots, n)^m = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_s$ – разложение перестановки в произведение независимых циклов. Найти количество циклов τ_i и их длины.
9. Пусть $P, X \in M_n(\mathbb{R})$ такие, что $P^2 = P$ и $P^t = P$. Показать, что $\text{tr}(PXX^t) \leq \text{tr}(XX^t)$.