Семинар 18

Общая информация:

- Пусть V и U – векторные пространства и $\beta\colon V\times U\to\mathbb{R}$ – билинейная форма.[1]
- Пусть $E\subseteq V$ – подмножество, определим *правое ортогональное дополнение* $E^\perp=\{u\in U\mid \beta(E,u)=0\}\subseteq U$. Аналогично, для $S\subseteq U$ определим *левое ортогональное дополнение* ${}^\perp S=\{v\in V\mid \beta(v,S)=0\}\subseteq V$.
- Заметим, что оба ортогональных дополнения всегда являются подпространствами, даже если E и S просто подмножества.
- Определим *правое ядро* формы $\ker^R\beta=V^\perp=\{u\in U\mid \beta(V,u)=0\}$. Аналогично, *левое ядро* формы $\ker^L\beta={}^\perp U=\{v\in V\mid\beta(v,U)=0\}$.
- Определим отображение $\Psi^L_\beta\colon V\to U^*$ по правилу $v\mapsto\beta(v,-)$, т.е. $\Psi^L_\beta(v)(u)=\beta(v,u)$ для $u\in U$. Аналогично определяется $\Psi^R_\beta\colon U\to V^*$ как $\Psi^R_\beta(u)=\beta(-,u)$.
- Если форма $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ симметричная, то нет разницы между Ψ^R_β и Ψ^L_β, которые бьют из V в V^*.
- Форма называется *невырожденной*, если оба ее ядра нулевые.
- Ранг формы $\operatorname{rk}\beta$ – это ранг ее матрицы в произвольном базисе. Это определение не зависит от базиса, так как матрица формы B меняется по формуле $B\mapsto C^tBC$, где C – матрица перехода от одного базиса к другому.

Задачи:

1. Задачник. §37, задача 37.6 (а).
2. Задачник. §37, задача 37.1 (а, б, в, г, д).
3. Привести пример формы $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ такой, что: (1) β симметрична, (2) β невырождена, (3) существует $0\neq W\subseteq V$, такое что $W^\perp=W$.
4. Пусть $\beta\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ задана матрицей $\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ и пусть $U\subseteq\mathbb{R}^3$ – подпространство натянутое на $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Найти $U^\perp$ и ${}^\perp U$.
5. Пусть $\beta\colon V\times U\to\mathbb{R}$ – билинейная форма и $\dim V=\dim U$. Покажите, что форма невырождена тогда и только тогда, когда одно из ядер равно нулю.
6. **Двойственность.** Пусть V – векторное пространство $\beta\colon V\times V^*\to\mathbb{R}$ – естественная билинейная форма, т.е. $\beta(v,\xi)=\xi(v)$. Покажите:
   (a) Форма β невырождена.
   (b) Для любого подпространства $U\subseteq V$ верно $\dim U+\dim U^\perp=\dim V$.
   (c) Для любого подпространства $U\subseteq V$ верно ${}^\perp(U^\perp)=U$.
   (d) Для любых подпространств $U,W\subseteq V$ верно $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$ и $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

   Аналогичные утверждения верны и для подпространств V^*, сформулируйте и проверьте их.
7. **Двойственность для линейных отображений.** Пусть $\phi\colon V\to U$ – линейное отображение векторных пространств. Определим двойственное линейное отображение $\phi^*\colon U^*\to V^*$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend left, dashed, "\xi\circ\phi"] & U \arrow[r, "\xi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$V^* \xleftarrow{\phi^*} U^*$$

$$\xi\circ\phi \longleftarrow\!\shortmid\ \xi$$

[1]Думать про билинейную форму надо как про «плохую версию» скалярного произведения.

Пусть $\beta\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$ – естественная билинейная форма, т.е. $\beta(v, \xi) = \xi(v)$. Ортогональные дополнения ниже берутся относительно этой формы.

(a) Показать, что отображение ϕ^* линейно.

(b) Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и U соответственно и отображение ϕ в этих базисах записывается матрицей $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Выберем в V^* и U^* двойственные базисы. Найдите матрицу отображения ϕ^*.

(c) Покажите, что $(\operatorname{Im}\phi)^\perp = \ker\phi^*$.

(d) Покажите, что $(\ker\phi)^\perp = \operatorname{Im}\phi^*$.

(e) Покажите, что если $U \subseteq V$ – подпространство такое, что $\phi(U) \subseteq U$, то $\phi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

8. **«Подъем индексов».** Пусть $\beta\colon V \times U \to \mathbb{R}$ – билинейная форма. Рассмотрим $\Psi_\beta^L\colon V \to U^*$.

(a) Проверьте, что Ψ_β^L – линейное отображение.

(b) Пусть в пространствах V и U выбраны базисы, а в U^* выбран двойственный базис. Пусть в этих базисах β задана матрицей B. Найти матрицу Ψ_β^L.

(c) Покажите $\ker\Psi_\beta^L = \ker^L\beta$

(d) Покажите $\operatorname{Im}\Psi_\beta^L = \{\xi \in U^* \mid \xi(\ker^R\beta) = 0\}$.

(e) $\operatorname{rk}\beta = \operatorname{rk}\Psi_\beta^L$.

9. Пусть $\beta\colon V \times U \to \mathbb{R}$ – билинейная форма и $W \subseteq V$. Докажите неравенство

$$\dim U - \min(\dim W, \operatorname{rk}\beta) \leqslant \dim W^\perp \leqslant \min(\dim U, \dim U + \dim V - \dim W - \operatorname{rk}\beta)$$