

Индивидуальная домашняя работа 2

Задача 1. Решите уравнение относительно неизвестной подстановки X :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{165} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{19} = [(1468237)(5)]^{19} = ((1468237)^7)^2 \cdot (1468237)^5 = (1384726)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right)^{165} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{165}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{165} = [(15)(23)(4)(67)(8)]^{165} = (15)(23)(4)(67)(8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 2. Определите четность подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 47 & \dots & 189 & 190 & \dots & 235 \\ 48 & 49 & \dots & 94 & \dots & 1 & 2 & \dots & 47 \end{pmatrix}$$

Решение. Четность подстановки вычисляется по формуле:

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\operatorname{inv} \sigma}$$

σ - подстановка

$\operatorname{inv} \sigma$ - количество инверсий в подстановки $\operatorname{inv} \sigma = (235 - 48 + 1) \cdot (47 - 1 + 1) = 8836$

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{8836} = 1$$

Ответ. Последовательность четная.

Задача 3. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение. Для вычисления определителя приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками матрицы.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -17 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 77 & 54 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 77 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -17 & -12 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 77 & \frac{80}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & -\frac{22}{3} \end{vmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 77 & \frac{80}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{334}{231} \end{vmatrix}$$

В итоге мы 4 раза поменяли строки местами, а значит знак определителя не изменился.

$$\det A = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 77 \cdot \left(-\frac{334}{231}\right) = 668$$

Ответ. $\det A = 668$

Задача 4. Найдите коэффициент при x^5 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & x & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \\ x & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ 5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 7 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение. Решил я эту задачу, с помощью написанной мной программы *main.cpp*. И с помощью нее вычислил необходимое.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & x & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \\ x & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ 5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 7 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot x^6 + 54 \cdot x^5 - 2835 \cdot x^4 + 5938 \cdot x^3 + 180891 \cdot x^2 - 859770 \cdot x + 808212$$

Ответ. 54