Задачи к лекции 2

1. Найдите все подгруппы в группах S_3 и A_4.

2. Проверьте, что подгруппы $A_n \subset S_n$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ нормальны. Опишите факторгруппы S_n/A_n и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

3. Пусть G — группа и $H \subset G$ — подгруппа индекса 2. Докажите, что H нормальна в G.

4. Докажите, что подгруппа H группы G является нормальной тогда и только тогда, когда H является ядром некоторого гомоморфизма $\varphi\colon G \to F$.

5. Приведите пример гомоморфизма групп $\varphi\colon G \to F$, для которого подгруппа $\operatorname{Im}\varphi$ не является нормальной в F.

6. Докажите, что
(а) подгруппа $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ в группе S_4 является нормальной;
(б) $S_4/V_4 \simeq S_3$.

7. Приведите пример цепочки групп $H_1 \subset H_2 \subset G$, где H_1 нормальна в H_2, H_2 нормальна в G, но H_1 не нормальна в G.

8. Найдите все изоморфизмы между группами $(\mathbb{Z}_4, +)$ и $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \times)$.

9. Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{12}$ в группу $\mathbb{Z}_{15}$.

10. Изоморфны ли группы
(а) $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$?
(б) $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$?

11. Докажите, что группы $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{Q}, +)$ не допускают сюръективных гомоморфизмов в группу $(\mathbb{Z}, +)$.

12. Для каждой группы G определим множество $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \text{ для всех } g \in G\}$, называемое её *центром*.
(а) Докажите, что $Z(G)$ является нормальной подгруппой в G.
(б) Найдите центры групп S_n, A_n, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Домашнее задание

1. Пусть G — группа всех невырожденных верхнетреугольных (2×2)-матриц с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Докажите, что подмножество

$$\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq G$$

является нормальной подгруппой в G.

2. Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{16}$ в группу $\mathbb{Z}_{20}$.

3. Пусть H — подгруппа всех элементов конечного порядка в группе $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$. Докажите, что $H \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, где группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ рассматриваются с операцией сложения.

4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) m, n взаимно просты;

(2) для всякой группы G, всякой подгруппы $A \subseteq G$ порядка m и всякой погруппы $B \subseteq G$ порядка n выполняется условие $A \cap B = \{e\}$.