Студент: Хусаинов Айдарбек
Группа: 173-1
Дата: 1 марта 2018 г.

ИДЗ-4

Задача 1. *В пространстве* $\mathbb{R}^3$ *заданы два базиса* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *и* $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, *где*

$$e_1 = (2, 1, -1), e_2 = (1, -2, 0), e_3 = (1, 2, 1), e'_1 = (2, 5, 0), e'_2 = (0, -1, 2), e'_3 = (0, -3, -3),$$

и вектор v, *имеющий в базисе* e *координаты* $(1, 4, 3)$. *Найдите:*
(а) матрицу перехода от базиса e *к базису* e';
(б) координаты вектора v *в базисе* e'.

Решение. (а) Матрица перехода между базисами $e \cdot \; = e'$
– это решение матричного уравнения $(e_1|e_2|e_3) \cdot \; = (e'_1|e'_2|e'_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \; = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Решим систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 10 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 8 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 20 & -30 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 8 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Матрица перехода $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(б) Чтобы выразить вектор v в базисе e' нам нужно найти $^{-1}$, так как $x = \; \cdot x', x' = \; ^{-1} \cdot x$, где x – координаты вектора v в базисе e, а x' – координаты вектора v в базисе e'.

Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица $^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Теперь найдем координаты v в базисе e' :

$$x' = A^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Задача 2. *(а) Докажите, что существует единственное линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы*

$$a_1 = (1, 0, -2, 0, 0), a_2 = (-2, 1, 0, 2, 0), a_3 = (-2, 0, 1, 0, 2), a_4 = (0, 0, 0, 1, 2), a_5 = (0, 2, -2, 0, 1)$$

соответственно в векторы

$$b_1 = (1, -2, 4), b_2 = (-4, 8, 7), b_3 = (0, 0, -6), b_4 = (1, -2, -1), b_5 = (1, -2, 4).$$

(б) Найдите базис ядра и базис образа этого линейного отображения. Ответ запишите в стандартном базисе.

Решение. (а)

Доказательство. Линейное отображение однозначно задается образами базисных векторов, а значит достаточным условием будет проверить, что векторы $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ являются базисом. Докажем, что они линейнонезависимые, а для этого поставим их в столбцы и приведем к улучшенному ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Все векторы линейнонезависимы и образуют базис, а значит векторы b являются образами. Итого, линейное отображение существует и единственно.

(б) Найдем матрицу линейного отображения в стандартном базисе.

$$A \cdot (a_1|a_2|a_3|a_4|a_5) = (b_1|b_2|b_3|b_4|b_5) \Rightarrow (a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T, a_5^T) \cdot A^T = (b_1^T|b_2^T|b_3^T|b_4^T|b_5^T)$$

Теперь найдем матрицу A:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & -4 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 & 5 & -10 & -26 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ядром этого отображения является решение ОСЛУ: $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = x_4 - x_5$$
$$x_2 = 2x_3 - 3x_4 + 2x_5$$

ФСР:

$$(0, 2, 1, 0, 0)$$
$$(1, -3, 0, 1, 0)$$
$$(-1, 2, 0, 0, 1)$$

Данная ФСР является базисом ядра линейного отображения. Для того, чтобы найти базис образа дополним базис ядра до базиса полного пространства и найдем образ этих векторов.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Теперь можно заметить, что до полного базиса необходимы базисные векторы e_4 и e_5. Их образы и будут базисом нашего образа.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Базис образа:

$$(-1, 2, 3)$$
$$(1, -2, -2)$$

Задача 3. *Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ имеет в базисах $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$ матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 \\ -10 & 12 & -10 & -12 \\ 13 & -24 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

Найдите базисы пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, в которых матрица отображения ϕ имеет диагональный вид D с единицами и нулями на диагонали. Выпишите эту матрицу и соответствующее матричное разложение $A = C_1 D C_2^{-1}$, где $C_1, C_2 -$ невырожденные матрицы.

Решение.

Задача 4.

Решение.