Семинар 3

Матрицы

Напомню, что матрица – это прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Множество всех матриц с m строками и n столбцами обозначается $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Множество квадратных матриц размера n будем обозначать $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Матрицы с одним столбцом или одной строкой называются векторами (вектор-столбцами и вектор-строками соответственно). Множество всех векторов с n координатами обозначается через $\mathbb{R}^n$. Мы по умолчанию считаем, что наши вектора – вектор-столбцы.[1]

Операции над матрицами

Сложение Пусть $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Тогда сумма $A + B$ определяется покомпонентно, т.е. $C = A + B$, то $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Складывать можно только матрицы одинакового размера.

Умножение на скаляр Если $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, то λA определяется так: $\lambda A = C$, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ или

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$, то произведение $AB \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ определяется так: $AB = C$, где $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} a_{1t} b_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^{n} a_{1t} b_{tk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} a_{mt} b_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^{n} a_{mt} b_{tk} \end{pmatrix}$$

На умножение матриц можно смотреть следующим образом. Чтобы получить коэффициент c_{ij} надо, из матрицы A взять i-ю строку (она имеет длину n), а из матрицы B взять j-ый столбец (он тоже имеет длину n). Тогда их надо скалярно перемножить и результат подставить в c_{ij}.

Свойства операций

Все три операции на матрицах обладают «естественными свойствами» и согласованы друг с другом. Вот перечень базовых свойств операций над матрицами:[2]

1. **Ассоциативность сложения** $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых $A, B, C \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$
2. **Существование нейтрального элемента для сложения** Существует единственная матрица 0 обладающая следующим свойством $A + 0 = 0 + A = A$ для всех $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Такая матрица целиком заполнена нулями.

[1]Важно, directX и openGL используют вектор-строки! Потому часть инженерной литературы на английском связанной с трехмерной графикой оперирует со строками.

[2]Все эти свойства объединяет то, что они являются аксиомами в различных определениях для алгебраических структур. Позже мы столкнемся с такими структурами.

3. **Коммутативность сложения** $A + B = B + A$ для любых $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

4. **Наличие обратного по сложению** Для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ существует матрица $-A$ такая, что $A + (-A) = (-A) + A = 0$. Такая матрица единственная и состоит из элементов $-a_{ij}$.

5. **Ассоциативность умножения** Для любых матриц $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{M}_{k\,t}(\mathbb{R})$ верно $(AB)C = A(BC)$.

6. **Существование нейтрального элемента для умножения** Для каждого k существует единственная матрица $1 \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ такая, что для любой $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ верно $1A = A1 = A$.

7. **Дистрибутивность умножения относительно сложения** Для любых матриц $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ верно $(A + B)C = AC + BC$. Аналогично, для любых $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B, C \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ верно $A(B + C) = AB + AC$.

8. **Умножение на числа ассоциативно** Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$. Аналогично для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

9. **Умножение на числа дистрибутивно относительно сложения матриц и сложения чисел** Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ верно $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$. Аналогично, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

10. **Умножение на скаляр нетривиально** Если $1 \in \mathbb{R}$, то для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ верно $1A = A$.

11. **Умножение на скаляр согласовано с умножением матриц** Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$ верно $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

К этим свойствам надо относиться так. Доказывая что-то про матрицы, можно лезть внутрь определений операций над ними, а можно пользоваться свойствами операций. Так вот, список выше – это минимальный набор свойств операций, из которых можно вытащить базовую информацию про эти операции и при этом не лезть внутрь определений.

Нехорошие свойства операций

Матричные операции обладают несколькими аномалиями по сравнению со свойствами операций над обычными числами.

1. Существование вычитания следует из «хорошести» операции сложения. Она позволяет определить вычитание без проблем. Однако, операция умножения уже хуже, чем на обычных числах, потому не получится определить на матрицах операцию деления.

2. Умножение матриц НЕ коммутативно. Действительно
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{но} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3. В матрицах есть «делители нуля», т.е. существуют две ненулевые матрицы A и B такие, что $AB = 0$. Пример:
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0$$

4. В матрицах есть «нильпотенты», то есть можно найти такую ненулевую матрицу A, что $A^n = 0$. Пример,
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0$$

Блочное умножение матриц

Пусть даны две матрицы, которые разбиты на блоки как показано ниже:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ k \\ s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} X & Y \\ W & Z \end{pmatrix} \end{array}$$

Числа m, n, k, s, u, v – размеры соответствующих блоков. Наша цель понять, что эти матрицы можно перемножать блочно. А именно, увидеть, что результат умножения этих матриц имеет вид

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & \qquad\qquad v \end{array} \\ \begin{pmatrix} AX+BW & AY+BZ \\ CX+DW & CY+DZ \end{pmatrix} \end{array}$$

Делается это таким трюком. В начале заметим, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

После чего методом «пристального взгляда» перемножаем матрицы с большим количеством нулей.

На этот факт можно смотреть вот как. Матрица – это прямоугольная таблица заполненная числами. А можно составлять прямоугольные таблица заполненные другими объектами, например матрицами. Тогда они складываются и перемножаются так же как и обычные матрицы из чисел. Единственное надо учесть, что в блочном умножении есть разница между $AX + BW$ и $XA + BW$, так как A, B, X и W не числа, а матрицы, то их нельзя переставлять местами, порядок теперь важен.

Вот полезный пример. Пусть дана матрица из $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ вида

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & Av + v\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & Av + \lambda v \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & (A+\lambda)v \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Предпоследнее равенство верно, так как не важно с какой стороны умножать v на скаляр λ.

Элементарные преобразования

Тип I Пусть $S_{ij}(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной вписыванием в ячейку $i\ j$ числа λ. Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ слева прибавляет j строку умноженную на λ к i строке матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ справа прибавляет i столбец умноженный на λ к j столбцу матрицы B.

Тип II Пусть $T_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной перестановкой i и j столбцов (или что то же самое – строк). Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на T_{ij} слева переставляет i и j строки матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на T_{ij} справа переставляет i и j столбцы матрицы B.

Тип III Пусть $D_i(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной умножением i строки на $\lambda \in \mathbb{R}$ (или что то же самое – столбца). Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ слева умножает i строку A на λ, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ справа умножает i столбец матрицы B на λ.

Внимание магия! Пусть есть матрицы U и V соответствующие элементарным преобразованиям и A – произвольная матрица. Тогда сделать преобразование U над строками, а потом V над столбцами это $(UA)V$, а сделать их в обратном порядке это $U(AV)$. Так как умножение матриц ассоциативно, то это одно и то же. Значит действия над строками коммутируют с действиями над столбцами.

Квадратные матрицы

Заметим, что множество квадратных матриц $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ замкнуто относительно сложения, умножения, содержит 0 и 1. На это множество можно смотреть как на обобщение обычных чисел. Однако, надо не забывать, что произведение ненулевых матриц может стать нулем или даже степень ненулевой матрицы может оказаться нулем.

Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ матрица C называется обратной, если выполняется равенство $AC = 1 = CA$. Такая матрица C не обязательно существует, но если существует, то единственна.

Задача. Покажите, что

1. Если матрица A такая, что существует $B \neq 0$ и $AB = 0$, то для A не существует обратной.
2. Если A такая, что $A^k = 0$, то для A не существует обратной.
3. Если обратная матрица существует, то она единственная.
4. Если U – матрица элементарного преобразования, то она обратима. Найдите ее обратную для каждого вида преобразований.
5. Если U – обратимая матрица, то A обратима тогда и только тогда, когда UA обратима.
6. Обратная матрица для A существует тогда и только тогда, когда A невырожденная.

Подстановка матриц в многочлен

Пусть $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда можно определить $p(A) = a_0 A^0 + a_1 A^1 + \ldots + a_n A^n$, где A^0 – единичная матрица.

Заметим, что, если два многочлена равны, то и их значения на матрице A тоже равны. Для любых многочленов $p(x)$ и $q(x)$, матрицы $p(A)$ и $q(A)$ коммутируют между собой.

Задача. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найдется многочлен $p(x)$ степени n^2+1 такой, что $p(A) = 0$. [3]

Подстановка матрицы в многочлены помогает построить из исходной матрицы другие с заданным свойством, а многочлен зануляющий нашу матрицу может стать неплохой исходной точкой для подобных манипуляций.

Транспонирование

Пусть A – матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Определим транспонированную матрицу $A^t = (a'_{ij})$ так: $a'_{ij} = a_{ji}$. Наглядно, транспонированная матрица для приведенных выше

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Задача. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$. Покажите, что

1. $(AB)^t = B^t A^t$.
2. Если A – блочная матрица следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad A^t = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{pmatrix}$$

[3] На самом деле можно показать, что найдется многочлен степени n!