Семинар 6

Общая информация:

- Пусть $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, тогда определитель X будем обозначать $\det(X)$.
- Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Тогда через $(v_1 \mid \ldots \mid v_n)$ будем обозначать матрицу из $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ у которой v_i являются ее столбцами.

Задачи

1. Задачник. §9, задача 9.2 (ж, и).
2. Задачник. §10, задача 10.5.
3. Задачник. §11, задача 11.7.
4. Задачник. §12, задача 12.4.
5. Пусть $X(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица такая, что элементы $x_{ij}(t)$ являются гладкими функциями переменной t, при чем $x_{ij}(0) = 0$ и $x'_{ij}(0) = a_{ij} \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(t) = \det(\mathrm{I} + X(t))$, где I – единичная матрица, является гладкой функцией от t. Докажите, что $\varphi'(0) = \mathrm{tr}(A)$, где $A = (a_{ij})$.
6. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, найдите определитель матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
7. Пусть $x \in \mathbb{R}$, найдите определитель матрицы размера $2n$ на $2n$:
$$\begin{pmatrix} x & & & & & x \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & x & x & & \\ & & & x & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x \end{pmatrix}$$
Все пропущенные места заполнены единицами

   Например, при $n = 3$ получим
$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$
8. Пусть $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ такие, что $\det(v_1 \mid v_2) \neq 0$.
   (a) Покажите, что существует, и найдите такое β, что $u = v_2 - \beta v_3$ будет пропорционален v_1, т.е. $u = \lambda v_1$ для некоторого λ.
   (b) Найдите коэффициент λ из предыдущего пункта.