Индивидуальное домашнее задание 4 по линейной алгебре и геометрии
Тяпкин Даниил, БПМИ173
Вариант 28

Язык используемой программы: $C++14$
Интерфейс используемой программы реализован через консольные команды:

- *help* – выводит окно помощи в самой программе.
- *exit* – выход из программы
- *gauss* – вывод ступенчатого и улучшенного ступенчатого вида для системы линейных уравнений с равным количество уравнений и переменных.

  Формат входных данных: количество уравнений, целочисленные коэффициенты перед переменными, столбец свободных членов.

  Формат выходных данных: СЛУ, приведенная к ступенчатому виду и к улучшенному ступенчатому в виде матриц.
- *mult* – вывод произведения двух целочисленных матриц.

  Формат входных данных: размерности первой матрицы и все элементы, размерности второй матрицы и все её элементы.

  Формат выходных данных: матрица, равная произведению входных матриц.
- *sum* – вывод суммы двух целочисленных матриц.

  Формат входных данных: размерности матрицы,элементы первой, элементы второй.

  Формат выходных данных: матрица, равная сумме двух входных матриц.
- *trans* – вывод транспонированной целочисленной матрицы.

  Формат входных данных: размерности матрицы и её элементы.

  Формат выходных данных: транспонированная матрица.

1 Задание 1

Задача: 1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ и $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, где

$$e_1 = (2, -2, 1),\ e_2 = (2, 2, 1),\ e_3 = (1, 2, -2),$$
$$e'_1 = (4, 6, -3),\ e'_2 = (-3, -2, -4),\ e'_3 = (5, 2, 0),$$

и вектор v, имеющий в базисе e координаты $(3, -2, 1)$. Найдите:
(а) матрицу перехода от базиса e к базису e';
(б) координаты вектора v в базисе e'.

Ответ:

Матрица смены базисов:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Координаты вектора v в базисе e':

$$v = e' \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>Решение</u>:

Матрица перехода между базисами выглядит так:

$$e \cdot C = e'.$$

Где C - исходная матрица.

Видно, что C – это решение матричного уравнения. Решим его:

$$(e_1|e_2|e_3) \cdot C = (e_1'|e_2'|e_3')$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему, сведя матрицу коэффициентов, соединенную с матрицей левых частей к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & -5 & 7 \\ 2 & 2 & -4 & -6 & -8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 2 & 8 & -6 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Значит матрица смены базиса C выглядит следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим, как выразить вектор v в базисе e'. Нам известно, что:

$$x = C \cdot x',\ x' = C^{-1} \cdot x$$

Где x' – кординаты вектора v в новом базисе, а C – матрица перехода от e к e'. Значит, чтобы найти x' нам нужно найти обратную к C.

Найдем её через явную формулу обратной матрицы. Алгебраические дополнения считаются очень легко по формулам, общий определитель – тоже. Получаем:

$$detC = 5.$$

$$C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь по явной формуле найдем координаты v в базисе e':

$$x' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 Задание 2

Задача: (а) Докажите, что существует единственное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы

$$a_1 = (3, 1, 0, -2, 2),\ a_2 = (0, 2, -2, 0, 0),\ a_3 = (0, -2, 4, 0, 0),\ a_4 = (-1, 1, 0, 1, 0),\ a_5 = (-4, 0, 0, 0, 1)$$

соответственно в векторы

$$b_1 = (21, -3, 12),\ b_2 = (-14, 6, 4),\ b_3 = (26, -10, -4),\ b_4 = (-11, 3, -2),\ b_5 = (-8, 0, -8).$$

(б) Найдите базис ядра и базис образа этого линейного отображения. Ответ запишите в стандартном базисе.

Ответ:
Базис ядра:

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$
$$(3, -2,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$(-2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0)$$

Базис образа:

$$(6, -2, 0)$$
$$(-8, 2, -2)$$

Решение:
(а) Известно, что линейное отображение однозначно задается образами базисных векторов. Поэтому нам достаточно и необходимо проверить, являются ли базисными векторы $a_1, \dots a_5$.

Для этого попытается найти среди них линейнозависимые, то есть поставим в столбцы и приведем к улучшенному ступенчатому виду (при помощи команды программы $Gauss$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что векторы линейно-независимы, а значит, образуют базис (их количество равно размерности пространства), то векторы b - образы базисных, а значит, отображение существует и единственно.

(б) Найдем матрица линейного отображение в стандартном базисе.

Для этого решим матричное уравнение:

$$A(a_1|a_2|a_3|a_4|a_5) = (b_1|b_2|b_3|b_4|b_5)$$

Транспонируем:

$$(a_1^t, a_2^t, a_3^t, a_4^t, a_5^t)A^t = (b_1^t|b_2^t|b_3^t|b_4^t|b_5^t)$$

Такие системы мы знаем как решать. Воспользуемся программой. Так как на вход она принимет только квадратные матрицы, то дополним недостающие строк нулями.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 3 & 1 & 0 & -2 & 2 & 21 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -14 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 26 & -10 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -11 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Значит, исходная матрица линейного отображения выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ядро этого отображения. По определению, это – решения ОСЛУ:

$$Ax = 0.$$

Приведем к улучшенному ступенчатому виду. Для удобства работы с программой нулевые столбцы можем отбросить.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 6 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выразим эту систему:

$$x_1 = -2x_3 + 3x_4$$
$$x_2 = 2x_3 - 2x_4$$

ФСР, которое является базисом ядра линейного отображения:

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$
$$(3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$(-2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0)$$

Теперь найдем базис образа. Для этого дополним базис ядра до базиса полного пространства, а затем найдем образ этих векторов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что до полного базиса нам не хватает стандартных базисных векторов e_3 и e_4. Найдем их образы. Это и будет базис нашего образа.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Значит, базис образа таков:

$$(6, -2, 0)$$
$$(-8, 2, -2)$$

3 Задание 3

Задача: Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ имеет в базисах $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 & -2 \\ -9 & -9 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите базисы пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, в которых матрица отображения φ имеет диагональный вид D с единицами и нулями на диагонали. Выпишите эту матрицу и соответствующее матричное разложение $A = C_1 \cdot D \cdot C_2^{-1}$, где C_1, C_2 - невырожденные матрицы.

Решение: Сначала найдем количество единиц на диагонали. Это будет в точности ранг матрицы. Для нахождения ранга приведем матрицу к улучшенному ступнчатому виду при помощи программы:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 & -2 \\ -9 & -9 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & -20 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что у нас 3 линейнонезависимые строки, а значит, ранг матрица равен 3. После приведения к новому базису ранг не изменится, так как приведение эквивалента домножению на невырожденные матрицы, что не изменяет ранг.

Таким образом мы можем определить, как выглядит наша матрица D:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Теперь вернемся к вопросам базисов. Мы знаем, что:

$$\begin{aligned}e' = e \cdot S_1,\ x = S_1 \cdot x'\\ f' = f \cdot S_2,\ y = S_2 \cdot y'\\ A(\varphi, e, f) \cdot x = A(\varphi, e, f) \cdot S_1 x' = y = S_2 \cdot y'\\ A(\varphi, e', f') \cdot x' = y' \Rightarrow\\ A(\varphi, e', f') = S_2^{-1} A(\varphi, e, f) S_1 \Rightarrow\\ S_2 A(\varphi, e', f') S_1^{-1} = S_2 D S_1^{-1} = A\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем связь между требуемым разложением и базисами, а именно:

$$C_1 = S_2,\ C_2 = S_1$$

Теперь, предъявив разложение, мы сразу получим и матрицы перехода между исходными и требуемыми базисами.

Покажем искомое разложение. $S_2 \in M_3(\mathbb{R}),\ S_1 \in M_4(\mathbb{R})$.

$$A = S_2 \cdot D \cdot S_1 = S_2 \cdot (E_3|0) \cdot S_1 = (S_2|0) \cdot S_1$$

(E_3 - единичная матрица размера 3×3)

Догадаемся рассмотреть S_1 такого вида (такая догадка следует из того, что последние 3 столбца матрицы A линейно-независимые):

$$\begin{pmatrix}s_1 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & 0 & 1 & 0\\ s_3 & 0 & 0 & 1\\ s_4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Тогда, продолжим наши манипуляции, переимновав S_2 как X, а также обозначив вектор $(s1,s2,s3,s4)^t$ как s:

$$A = (X|0) \cdot S_1 =$$

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}s_1 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & 0 & 1 & 0\\ s_3 & 0 & 0 & 1\\ s_4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_{(1)} \cdot s & x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ X_{(2)} \cdot s & x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ X_{(3)} \cdot s & x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$$

Где $X_{(i)}$ - i-я строка матрицы X.

По матрице A мы можем однозначно восстановить матрицу X:

$$\begin{pmatrix}X_{(1)} \cdot s & x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ X_{(2)} \cdot s & x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ X_{(3)} \cdot s & x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -3 & 8 & -2\\ -9 & -9 & 3 & 12\\ 4 & 4 & -20 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix}-3 & 8 & -2\\ -9 & 3 & 12\\ 4 & -20 & 0\end{pmatrix}$$

Покажем сначала, что $X = S_2$ – невырожденная. Для этого вспомним, что мы получили, когда искали ранг матрицы, мы получили выражение координат векторов-столбцов матрицы через предыдущие. И если мы рассмотрим три последние, то видно, что они - линейно-независимы, а значит, $rkX = 3 \Rightarrow detX \neq 0$.

Теперь восстановим вектор s, по которому уже однозначно восстановится матрица S_1. Заметим, что для невырожденности S_1 необходимо и достаточно, чтобы координата s_4 вектора s была не нулевой, это видно из явного выражения матрицы S_1.

Рассмотрим $s_1 = 1, s_4 = 1$. Получим:

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 & 0 \\ -9 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 & -2 \\ -9 & -9 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что s_4 ничего не изменяет, так как в левой матрице $(X|0)$ 4-я координата нулевая, а $s_1 = 1$ показывает, что мы должны оставлять лишь первые координаты соответствующих векторов-строк.

Итого, искомое разложение выглядит следующим образом:

$$A = C_1 D C_2^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 & -2 \\ -9 & -9 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & -20 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 \\ -9 & 3 & 12 \\ 4 & -20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную к последней матрице, чтобы получить разложение в требуемом виде.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$S_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Искомые базисы следующим образом:

$$e' = e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f' = f \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 \\ -9 & 3 & 12 \\ 4 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

Разложение:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 & -2 \\ -9 & -9 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & -20 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 \\ -9 & 3 & 12 \\ 4 & -20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

4 Задание 4

Задача: Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов степени не выше 2 от переменной x с действительными коэффициентами. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ – базис пространства V^*, двойственный к базису

$$-1 + x - 2x^2, \quad 3 - 4x^2, \quad 2 - 24x + 15x^2$$

пространства V, а (f_1, f_2, f_3) – базис пространства V, для которого двойственным является базис (ρ_1, ρ_2, ρ_3) пространства V^*, где

$$\rho_1(f) = f(1), \quad \rho_2(f) = f'(-1), \quad \rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)dx.$$

Рассмотрим линейную функцию $\alpha \in V^*$, имеющую в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ координаты $(3, 1, -2)$, и многочлен $h \in V$, имеющий в базисе (f_1, f_2, f_3) координаты $(-4, 4, 3)$. Найдите значение $\alpha(h)$

Ответ:

$$\frac{4511}{187}$$

Решение: Сначала запишем базис (e_1, e_2, e_3), двойственный $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ в координатном виде:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -24 \\ 15 \end{pmatrix}$$

В такой форме уже не составляет труда найти двойственный базис.

По определению:

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Представим двойственный базис как строки. Получаем:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

А значит, строки матрицы $(e_1\ e_2\ e_3)^{-1}$ представляют собой двойственный базис. Найдем эту обратную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -24 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -22 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -24 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -33 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -24 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -22 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -33 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -24 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -22 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -55 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -24 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -187 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 55 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 187 & 0 & -24 \cdot 187 & 0 & 187 & 0 \\ 0 & 17 & 17 \cdot 11 \cdot 5 & -17 & -51 & -17 \\ 0 & 0 & 17 \cdot 11 & -4 & -10 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 187 & 0 & 0 & -96 & -53 & -72 \\ 0 & 17 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 187 & -4 & -10 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 187 & 0 & 0 & -96 & -53 & -72 \\ 0 & 187 & 0 & 33 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 187 & -4 & -10 & -3 \end{array}\right)$$

Это значит, что

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{187} \cdot (-96, -53, -72)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{17} \cdot (3, -1, -2)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{187} \cdot (-4, -10, -3)$$

Теперь найдем (f_1, f_2, f_3). Для этого найдем (ρ_1, ρ_2, ρ_3) в векторном виде.
Обозначим произвольный многочлен как $a_1 + a_2x + a_3x^2$.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = f(1)$$

$f(1)$ - это ни что иное как $a_1 + a_2 + a_3$. Получаем:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot a_1 + v_2 \cdot a_2 + v_3 \cdot a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Отсюда однозначно восстанавливается ρ_1:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим ρ_2:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = f'(-1)$$

$f'(x) = a_2 + 2a_3x \Rightarrow$ f'(-1) $=$ a$_2 - 2a_3$. Получаем:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot a_1 + u_2 \cdot a_2 + u_3 \cdot a_3 = a_2 - 2a_3.$$

Отсюда однозначно восстанавливается ρ_2:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Осталось найти ρ_3.

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = y_1 \cdot a_1 + y_2 \cdot a_2 + y_3 \cdot a_3 = \frac{3}{2} \int_0^2 f(x)dx.$$

Найдем определенный интеграл при помощи формулы Ньютона-Лейбница и получим явный вид:

$$\frac{3}{2} \int_0^2 \left(a_1 + a_2x + a_3x^2\right) dx = \frac{3}{2} \left(a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{2} \left(2a_1 + 2a_2 + \frac{8a_3}{3}\right) = 3a_1+3a_2+4a_3$$

Отсюда найдем ρ_3:

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем двойственный базис. Для этого по уже найденному методу поставим двойственный базис в строки матрица и найдем обратную. Столбцы полученной матрицы - искомый базис.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\alpha(h)$. Для этого вычислим оба вектора в стандартном базисе.

$$\alpha = (3, 1, -2).$$
$$\alpha = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 =$$
$$\frac{3}{187}(-96, -53, -72) + \frac{11}{187}(3, -1, -2) - \frac{2}{187}(-4, -10, -3) =$$
$$\frac{1}{187}\left(3 \cdot (-96) + 33 + 8,\; 3 \cdot (-53) - 11 + 20,\; 3 \cdot (-72) - 22 + 6\ \right) =$$
$$\frac{1}{187}(-247, -150, -232)$$

Теперь найдем h.

$$h = (-4, 4, 3)$$
$$h = -4 \cdot f_1 + 4 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 =$$
$$-4 \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 - 4 - 9 \\ 24 + 4 + 6 \\ 12 + 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 \\ 34 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Теперь для того, чтобы найти $\alpha(h)$, достаточно перемножить эти два вектора, они теперь находятся в одном базисе.

$$\alpha(h) = \frac{1}{187} \begin{pmatrix} -247 & -150 & -232 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -53 \\ 34 \\ 15 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{187}(13091 - 5100 - 3480) = \frac{4511}{187}$$