Семинар 9

Общая информация:

- Напомню, комплексные числа $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ можно отождествить с $\mathbb{R}^2$ посредством $x+yi \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

- При таком отождествлении операция умножения на $a+bi$ совпадает с операцией умножения на матрицу $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, то есть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "(a+bi)\cdot"] \arrow[d, equal] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \quad \text{где} \quad \begin{tikzcd} x+yi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (a+bi)(x+yi) \arrow[d, mapsto] \\ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \arrow[r, mapsto] & \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \end{tikzcd}$$

  Таким образом, комплексные числа $\mathbb{C}$ можно отождествить с матрицами вида $\{\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})\}$.

- При отождествлении $\mathbb{C}$ с подмножеством матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ как выше, мы можем отождествить матрицы $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ с подмножеством матриц $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$, заменяя каждое комплексное число на матрицу размера 2.

- **Кватернионы**. По аналогии с комплексными числами $\mathbb{C}$ можно построить еще один объект $\mathbb{H}$ – кватернионы следующим образом. Определим $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, где i, j, k – буквы (про них надо думать, как про мнимую единицу в $\mathbb{C}$, это какие-то новые числа, которые непонятно как устроены, но мы скажем как их складывать и умножать).

- Складываются такие товарищи покомпонентно, т.е.

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

- Умножение должно быть дистрибутивно (то есть скобки раскрывать можно как обычно). Потому достаточно определить как перемножаются буквы i, j, k между собой. Они подчинены следующим правилам: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $k = ij$, $ij = -ji$, $ik = -ki$, $jk = -kj$.[1]

- Заметим, что в отличие от умножения комплексных чисел, умножение кватернионов не коммутативно!

- Для элемента $h \in \mathbb{H}$ определим сопряженный элемент $\bar{h} \in \mathbb{H}$ следующим образом. Пусть $h = a + bi + cj + dk$, тогда $\bar{h} = a - bi - cj - dk$.

Задачи:

1. Задачник. §20, задача 20.4 (а, д).
2. Задачник. §20, задача 20.8 (а,б).
3. Задачник. §20, задача 20.10.
4. Задачник. §20, задача 20.11 (д).
5. Задачник. §21, задача 21.1 (х, ц).
6. Задачник. §21, задача 21.11 (а, б).
7. Вычислить для любого $n \in \mathbb{Z}$
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$
   (b) $\begin{pmatrix} 1+\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & 1+\cos\phi \end{pmatrix}^n$

[1] Очевидно, что это избыточный набор, но я выписал все необходимые для использования свойства.

8. Пусть $z_k \in \mathbb{C}$ – комплексные числа, где $1 \leqslant k \leqslant 4$ такие, что $z_k = a_k + b_k i$. И пусть $Z_k = \left(\begin{smallmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ – соответствующая матрица размера 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

Найти $\det A$.

9. Пусть $\mathbb{H}$ – кватернионы.[2] Показать:

   (a) Для любого $h \in \mathbb{H}$, верно $h\bar{h} \in \mathbb{R}$.

   (b) Если $h \in \mathbb{H}$ и $h \neq 0$, то h обратим.

[2]Суть этого упражнения показать, что кватернионы обладают всеми аксиомами поля кроме коммутативности умножения. Такой объект называется «Тело».