Семинар 15

Общая информация:

Пусть $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – подпространства. Напомню, что

- $U \cap V$ – теоретико-множественное пересечение, тоже является подпространством.
- $U \cup V$ – теоретико-множественное объединение, НЕ является подпространством. Потому рассматривают сумму подпространств $U + V = \{u + v \in \mathbb{R}^n \mid u \in U, v \in V\}$. Это наименьшее подпространство, содержащее объединение.
- Если $U \cap V = 0$, то сумма $U + V$ называется прямой и обозначается $U \oplus V$.
- Если $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, тогда любой вектор $z \in \mathbb{R}^n$ представляется единственным образом в виде $z = u + v$, где $u \in U$ и $v \in V$. Тогда вектор u называется *проекцией z на U вдоль V*.[1] (аналогично для v).
- Напомню, что матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называется *симметрической*, если $A^t = A$, *кососимметрической*, если $A^t = -A$, *верхнетреугольной*, если под главной диагональю все элементы нули, *верхненильтреульной*, если на главной диагонали и под ней все элементы нули. E_{ij} – матричная единица, то есть матрица состоящая из нулей, а на i-ой строке, j-ом столбце стоит 1.

Задачи:

1. Задачник. §35, задача 35.14 (a).
2. Задачник. §35, задача 35.18.
3. Задачник. §35, задача 35.19.
4. Пусть $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ – подпространства. Верно ли, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?
5. Привести пример подпространств $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ таких, что $U \cap V = U \cap W = V \cap W = 0$, но при этом U, V и W линейно зависимы.
6. Задачник. §35, задача 35.20.
7. Задачник. §35, задача 35.21.
8. Задачник. §35, задача 35.22.
9. Задачник. §35, задача 35.23.
10. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Определим, двойственное подпространство следующим образом:

$$V^\vee = \{z \in \mathbb{R}^n \mid v^t z = 0 \, \forall v \in V\}$$

   (a) Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – базис V и $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$ – матрица, где v_i уложены в виде строк, т.е. $A^t = (v_1 | \ldots | v_k)$. Показать, что $V^\vee = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = 0\}$.

   (b) Показать, что $\dim V + \dim V^\vee = n$.

   (c) Если $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ такие, что $U \subseteq V$, то $U^\vee \supseteq V^\vee$.

   (d) $V^{\vee\vee} = V$. И как следствие, для любых $U, V \in \mathbb{R}^n$ справедливо: $U = V$ тогда и только тогда, когда $U^\vee = V^\vee$.

   (e) Для любых $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ верно $(U + V)^\vee = U^\vee \cap V^\vee$.

   (f) Для любых $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ верно $(U \cap V)^\vee = U^\vee + V^\vee$.

[1] Еще говорят *параллельно V*