Семинар 21

Общая информация:

- Пусть $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ – билинейная форма, а $U\subseteq V$ – подпространство. Тогда β задает билинейную форму на U (просто применяем β к векторам из U). Такую билинейную форму будем называть *ограничением* β на U и обозначать $\beta|_U$.
- Напомню, что *евклидово пространство*, это векторное пространство V с «хорошей» билинейной формой $V\times V\to\mathbb{R}$ (ее значение на векторах $v,u\in V$ обозначается (v,u)), т.е. (1) симметричной $(v,u)=(u,v)$, (2) невырожденной $(v,V)=0$ влечет $v=0$, (3) неотрицательная определенной $(v,v)\geqslant 0$ для любого $v\in V$ (из-за (2) равенство нулю достигается только на нулевом векторе)[1].
- В евклидовом пространстве определены длины и углы. Для вектора $v\in V$ его длина $|v|$ это $\sqrt{(v,v)}$. Если $v,u\in V$ – два вектора и α – угол между ними, то $\cos\alpha=\frac{(v,u)}{|v||u|}$.
- В задачах ниже, найти угол, значит найти его косинус.
- Расстояние от вектора $v\in V$ до вектора $u\in V$, это $|v-u|$. Расстояние от вектора v до какого-то подмножества $X\subseteq V$ – это $\inf_{x\in X}|v-x|$ – нижняя грань расстояний до всех возможных точек из X.

Задачи:

1. Задачник. §37, задача 37.10 (a).
2. Задачник. §37, задача 37.21.
3. Задачник. §37, задача 37.22.
4. Задачник. §37, задача 37.23.
5. Задачник. §37, задача 37.30 (a).
6. Определите, задают ли следующие матрицы одну и ту же билинейную форму в разных базисах:
   (a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-3\\2&-3&7\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$
7. Пусть $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ – билинейная форма и $U\subseteq V$ – подпространство. Пусть либо β симметрическая либо кососимметрическая (в этом случае нет разницы между $U^\perp$ и ${}^\perp U$). Покажите, что следующие условия эквивалентны
   (a) $\beta|_U$ – невырождена
   (b) $U\cap U^\perp=0$
8. Пусть $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ – билинейная форма (симметрическая или кососимметрическая). Пусть $V=U\oplus W$ и U ортогонально W относительно β. Пусть матрица $\beta|_U$ есть A, а матрица $\beta|_W$ есть B, покажите, что матрица β есть $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$.
9. Пусть $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ – кососимметрическая форма.
   (a) Если β не равна тождественно нулю, то найдется такая пара векторов $v,u\in V$, что $\beta|_{\langle v,u\rangle}$ имеет матрицу $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$.
   (b) Покажите, что найдется такой базис в V, что матрица β является блочно диагональной с блоками 0 или $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$.

[1] Вместе (2) и (3) называются положительно определенностью и равносильно $(v,v)>0$ при $v\neq 0$ (это легко следует из рассмотрения сигнатуры формы).

(c) Невырожденная кососимметрическая форма может существовать только в четномерном пространстве.

10. Задачник. §37, задача 37.36.

11. Пусть V – векторное пространство, $\phi\colon V \to V$ – линейный оператор и $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ – невырожденная билинейная форма. И пусть для любых векторов $v, u \in V$ выполнено равенство $\beta(\phi(v), \phi(u)) = (v, u)$. Найдите $\det \phi$.

12. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задано стандартное скалярное произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ по правилу $(x, y) = x^t y$. Опишите все матрицы $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ такие, что $(Ax, Ay) = (x, y)$.

13. Задачник. §43, задача 43.15 (a).

14. Задачник. §43, задача 43.19 (a).

15. Задачник. §43, задача 43.21 (a).

16. Задачник. §43, задача 43.24.

17. Задачник. §43, задача 43.28 (a).