

Семинар 5

Отображения множеств

Пусть X, Y – некоторые множества, а $\varphi: X \rightarrow Y$ – отображение. Тогда φ называется *инъективным*, если оно «не склеивает точки», т.е. для любых $x, y \in X$ из условия $x \neq y$ следует $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Отображение φ называется *сюръективным*, если в любой элемент что-то переходит, т.е. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $\varphi(x) = y$. Отображение φ называется *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Для любого множества X отображение $\text{Id}: X \rightarrow X$ заданное по правилу $\text{Id}(x) = x$ называется *тождественным*. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение. Тогда $\psi: Y \rightarrow X$ называется *левым обратным* (соответственно *правым обратным*) к φ , если $\psi\varphi = \text{Id}$ ($\varphi\psi = \text{Id}$).¹ Левых и правых обратных для φ может быть много. Однако, если есть оба обратных и ψ_1 – левый обратный, а ψ_2 – правый обратный, то они совпадают, так как $\psi_1 = \psi_1(\varphi\psi_2) = (\psi_1\varphi)\psi_2 = \psi_2$. А следовательно совпадают все левые обратные со всеми правыми и такой единственный элемент называют *обратным* и обозначают φ^{-1} , а φ называют *обратимым*.

Задача. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение. Покажите, что

1. φ инъективно тогда и только тогда, когда φ обладает левым обратным.
2. φ сюръективно тогда и только тогда, когда φ обладает правым обратным.
3. φ биективно тогда и только тогда, когда φ обратимо.

Перестановки

Пусть $X_n = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество из n занумерованных элементов.² *Перестановкой* называется биективное отображение $\sigma: X_n \rightarrow X_n$. Множество всех перестановок на n элементном множестве будем обозначать через S_n .

Любая перестановка σ отправляет элемент i в некоторый элемент $\sigma(i)$, потому перестановку можно задать таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Заметим, что, если записать элементы $1, \dots, n$ в другом порядке, скажем, i_1, \dots, i_n , то перестановка σ запишется в виде³

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$$

Обратная перестановка σ^{-1} записывается таблицей

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

На множестве перестановок естественным образом определена операция умножения, а именно, $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ для любых $\sigma, \tau \in S_n$ и $i \in X_n$. Тогда тождественная перестановка будет нейтральным элементом для этой операции, а обратная – обратным. Эта операция не коммутативна, т.е. порядок перемножения имеет значение.⁴

Циклические перестановки

Пусть $\sigma \in S_n$ действует следующим образом. Для некоторого множества i_1, \dots, i_k выполнено

$$\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1,$$

¹Легко проверить, что существование левого обратного никак не связано с существованием правого обратного и наоборот.

²Формально говоря, это множество из n элементов и фиксированный линейный порядок на нем.

³Заметим, что в этой записи можно произвольным образом перемешивать столбцы, это никак не изменит задаваемую перестановку.

⁴Пример будет в разделе «Циклические перестановки».

а все остальные элементы остаются на месте под действием σ . Тогда σ называется *циклом* длины k . Такая перестановка для краткости обозначается (i_1, \dots, i_k) . Заметим, что такая запись не единственная, например можно сказать $\sigma = (i_2, \dots, i_k, i_1)$.⁵ Таблицей такой цикл задается следующим образом

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k-1} & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \\ i_2 & \dots & i_k & i_1 & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}$$

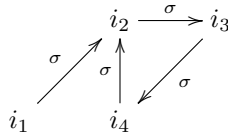
где $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$. Цикл длины 2 называется *транспозицией*, т.е. транспозиция – это перестановка каких-то двух элементов.

Два цикла (i_1, \dots, i_k) и (j_1, \dots, j_m) называются *независимыми*, если множества $\{i_1, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, \dots, j_m\}$ не пересекаются, т.е. множества действительно перемещаемых элементов не пересекаются. Заметим, что независимые циклы коммутируют друг с другом.

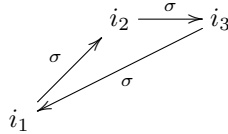
Задача. Покажите, что $(12)(23) = (123)$, а $(23)(12) = (321)$.

Структура перестановки

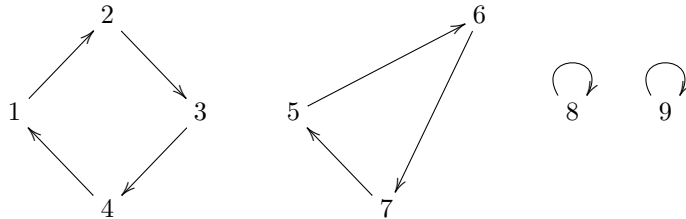
Пусть $\sigma \in S_n$ и пусть $i_1 \in X_n$. Подействуем на него σ , получим $i_2 = \sigma(i_1)$ и т.д. Так как X_n конечно, то мы в какой-то момент повторимся, например $i_5 = i_2$, как на рисунке ниже



На этой картинке видно, что $\sigma(i_1) = \sigma(i_4)$, но σ инъективно, потому $i_1 = i_4$. То есть правильная картинка следующая



Таким образом, для произвольной перестановки σ картинка, как она действует на X_n , будет выглядеть приблизительно следующим образом⁶



Таким образом, мы показали, что любая перестановка представляется в виде произведения независимых циклов. Например на рисунке выше $\sigma = (1234)(567)$.⁷

⁵Как легко видеть, другой неоднозначности в записи цикла нет.

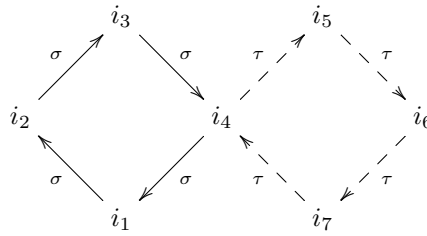
⁶На картинке $\sigma \in S_9$.

⁷Иногда для удобства в этой записи неподвижные элементы учитывают как циклы длины 1, т.е. $\sigma = (1234)(567)(8)(9)$. Это бывает удобно для некоторых комбинаторных задач.

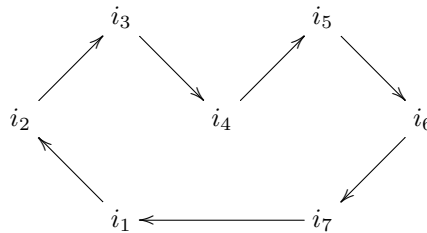
Произведение циклов

Два цикла

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$ циклы зацепляющиеся по одному элементу, как на рисунке ниже



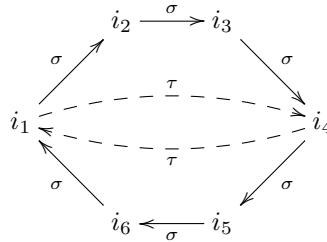
Надо найти произведение $\sigma\tau$. На рисунке ниже показано как выглядит произведение



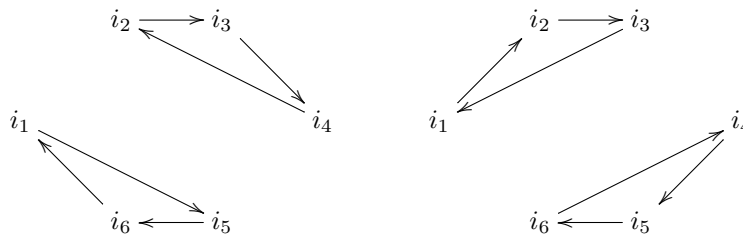
Таким образом, мы получили формулу $(i_1, \dots, i_k)(i_k, \dots, i_n) = (i_1, \dots, i_n)$.

Цикл и транспозиция

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, где σ – цикл, а τ – транспозиция, переставляющая два элемента цикла σ как на рисунке ниже.



Вот так выглядят композиции для $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ соответственно

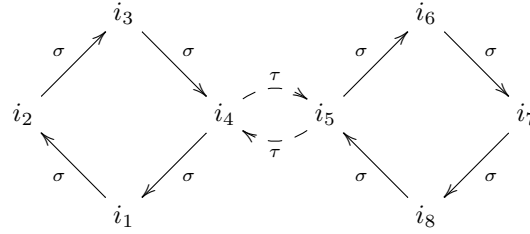


Таким образом общее правило выглядит так

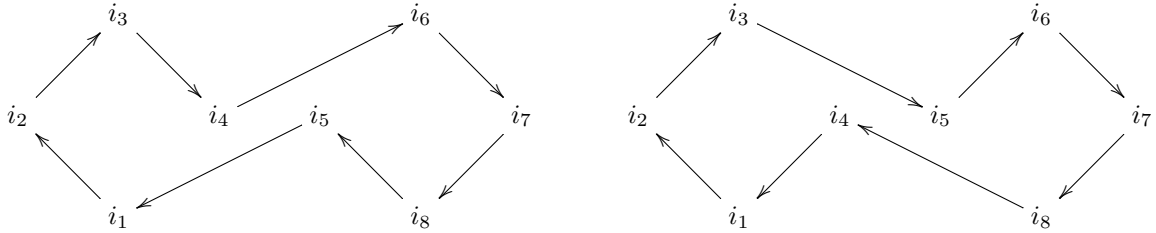
$$\begin{aligned}(i_1, \dots, i_n)(i_1, i_k) &= (i_1, i_{k+1}, \dots, i_n)(i_2, \dots, i_k) \\ (i_1, i_k)(i_1, \dots, i_n) &= (i_1, \dots, i_{k-1})(i_k, \dots, i_n)\end{aligned}$$

Пара циклов и транспозиция

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, причем, σ – произведение двух независимых циклов, а τ – транспозиция, переставляющая две вершины из разных циклов как на рисунке ниже.



Произведения $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ имеют вид



Таким образом общее правило выглядит так

$$\begin{aligned} (i_1, \dots, i_k)(i_{k+1}, \dots, i_n)(i_k, i_{k+1}) &= (i_1, \dots, i_k, i_{k+2}, \dots, i_n, i_k) \\ (i_k, i_{k+1})(i_1, \dots, i_k)(i_{k+1}, \dots, i_n) &= (i_k, i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n) \end{aligned}$$