
Индивидуальная домашняя работа 1

Задача 1. Решите приведённую ниже систему линейных уравнений методом Гаусса. Если система совместна, то выпишите её общее решение и укажите одно частное решение.

$$\begin{cases} 8x_1 + 38x_2 - 25x_3 - 148x_4 = 226, \\ 35x_1 + 30x_2 - 8x_3 - 169x_4 = 509, \\ 44x_1 + 53x_2 - 8x_3 - 293x_4 = 683, \\ 38x_1 + 25x_2 - 163x_4 = 504. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 38 & -25 & -148 & 226 \\ 35 & 30 & -8 & -169 & 509 \\ 44 & 53 & -8 & -293 & 683 \\ 38 & 25 & 0 & -163 & 504 \end{array} \right)$$

Поделим первую строку на 8

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4.75 & -3.125 & -18.5 & 28.25 \\ 35 & 30 & -8 & -169 & 509 \\ 44 & 53 & -8 & -293 & 683 \\ 38 & 25 & 0 & -163 & 504 \end{array} \right)$$

От второй строки отнимем первую строку, умноженную на 35; От третьей строки отнимем первую, умноженную на 44; От четвертой строки отнимем первую, умноженную на 38;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4.75 & -3.125 & -18.5 & 28.25 \\ 0 & -136.25 & 101.375 & 478.5 & -479.75 \\ 0 & -156 & 129.5 & 521 & -560 \\ 0 & -155.5 & 118.75 & 540 & -569.5 \end{array} \right)$$

Поделим вторую строку на -136.25

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4.75 & -3.125 & -18.5 & 28.25 \\ 0 & 1 & -\frac{811}{1090} & -\frac{1914}{545} & \frac{1919}{545} \\ 0 & -156 & 129.5 & 521 & -560 \\ 0 & -155.5 & 118.75 & 540 & -569.5 \end{array} \right)$$

От первой строки отнимем вторую, умноженную на 4.75; К третьей строке добавим вторую, умноженную на 156; К четвертой строке добавим вторую строку, умноженную на 155.5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{223}{545} & -\frac{991}{545} & \frac{6281}{545} \\ 0 & 1 & -\frac{811}{1090} & -\frac{1914}{545} & \frac{1919}{545} \\ 0 & 0 & \frac{14639}{1090} & -\frac{14639}{545} & -\frac{5836}{545} \\ 0 & 0 & \frac{3327}{1090} & -\frac{3327}{545} & -\frac{11973}{545} \end{array} \right)$$

Поделим третью строку на $\frac{14639}{1090}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{223}{545} & -\frac{991}{545} & \frac{6281}{545} \\ 0 & 1 & -\frac{811}{1090} & -\frac{1914}{545} & \frac{1919}{545} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{11672}{14639} \\ 0 & 0 & \frac{3327}{1090} & -\frac{3327}{545} & -\frac{11973}{545} \end{array} \right)$$

От первой строки отнимем третью, умноженную на $\frac{223}{545}$; К второй строке добавим третью, умноженную на $\frac{811}{1090}$; От четвертой строки отнимем третью, умноженную на $\frac{3327}{1090}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{173487}{14639} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{42861}{14639} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{11672}{14639} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{285975}{14639} \end{array} \right)$$

Ответ. Система уравнений не имеет решений так как: $0 \neq -285975/14639$

Задача 2. Тот же вопрос для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 38x_1 + 80x_2 + 210x_3 + 388x_4 = 122, \\ 98x_1 + 66x_2 - 160x_3 + 720x_4 = 34, \\ 137x_1 + 103x_2 - 170x_3 + 1028x_4 = 69, \\ 98x_1 + 61x_2 - 185x_3 + 710x_4 = 24. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 38 & 80 & 210 & 388 & 122 \\ 98 & 66 & -160 & 720 & 34 \\ 137 & 103 & -170 & 1028 & 69 \\ 98 & 61 & -185 & 710 & 24 \end{array} \right)$$

Поделим первую строку на 38

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{40}{19} & \frac{105}{19} & \frac{194}{19} & \frac{61}{19} \\ 98 & 66 & -160 & 720 & 34 \\ 137 & 103 & -170 & 1028 & 69 \\ 98 & 61 & -185 & 710 & 24 \end{array} \right)$$

От второй строки отнимем первую, умноженную на 98; От третьей строки отнимем первую, умноженную на 137; От четвертой отнимем первую, умноженную на 98

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{40}{19} & \frac{105}{19} & \frac{194}{19} & \frac{61}{19} \\ 0 & -\frac{2666}{19} & -\frac{13330}{19} & -\frac{5332}{19} & -\frac{5332}{19} \\ 0 & -\frac{3523}{19} & -\frac{17615}{19} & -\frac{7046}{19} & -\frac{7046}{19} \\ 0 & -\frac{2761}{19} & -\frac{13805}{19} & -\frac{5522}{19} & -\frac{5522}{19} \end{array} \right)$$

Поделим вторую строку на $-\frac{2666}{19}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{40}{19} & \frac{105}{19} & \frac{194}{19} & \frac{61}{19} \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{3523}{19} & -\frac{17615}{19} & -\frac{7046}{19} & -\frac{7046}{19} \\ 0 & -\frac{2761}{19} & -\frac{13805}{19} & -\frac{5522}{19} & -\frac{5522}{19} \end{array} \right)$$

От первой строки отнимем вторую, умноженную на $\frac{40}{19}$; К третьей строке добавим вторую, умноженную на $\frac{3523}{19}$; К четвертой строке добавим вторую, умноженную на $\frac{2761}{19}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ответ. Система имеет множество решений:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 + 6x_4 = -1, \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$x_3 = C, x_4 = D, x_1 = 5C - 6D - 1, x_2 = 2 - 5C - 2D$$

Задача 3. Вычислите:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 34 \\ 47 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 770 & 818 \\ 628 & 666 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 94 & 56 \\ 76 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 674 & 412 \\ 550 & 336 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 22 \\ 29 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 486 & 514 \\ 394 & 416 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 & 142 \\ 142 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2590 & 2634 \\ 2306 & 2330 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 82 \\ 76 & 71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 856 & 516 \\ 725 & 436 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 82 \\ 76 & 71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 716 & 634 \\ 593 & 522 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 770 & 818 \\ 628 & 666 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 674 & 412 \\ 550 & 336 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 486 & 514 \\ 394 & 416 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2590 & 2634 \\ 2306 & 2330 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 856 & 516 \\ 725 & 436 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 716 & 634 \\ 593 & 522 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 770 + 486 + 856 + 716 & 818 + 514 + 516 + 634 \\ 628 + 394 + 725 + 593 & 666 + 416 + 436 + 522 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 674 + 2590 & 412 + 2634 \\ 550 + 2306 & 336 + 2330 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 2828 & 2482 \\ 2340 & 2040 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3264 & 3046 \\ 2856 & 2666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2828 - 3264 & 2482 - 3046 \\ 2340 - 2856 & 2040 - 2666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -436 & -564 \\ -516 & -626 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -436 & -564 \\ -516 & -626 \end{pmatrix}$

Задача 4. Вычислите A^n , где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Предположим, что $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1}n & 4^n & 4^{n-1}n \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$. Докажем эту формулу по индукции.

База индукции при $n = 1$ это $A^1 = A$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4^1 & 0 & 0 \\ 4^0 \cdot 1 & 4^1 & 4^0 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 4^1 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Действительно, при $n = 1$ формула верна. Теперь, предполагая, что для любого натурального n формула верна, докажем ее справедливость для $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1}n & 4^n & 4^{n-1}n \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (4^n \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) & (4^n \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0) & (4^n \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4) \\ (4^{n-1}n \cdot 4 + 4^n \cdot 1 + 4^{n-1} \cdot 0) & (4^{n-1}n \cdot 0 + 4^n \cdot 4 + 4^{n-1}n \cdot 0) & (4^{n-1}n \cdot 0 + 4^n \cdot 1 + 4^{n-1}n \cdot 4) \\ (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 4^n \cdot 0) & (0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4^n \cdot 0) & (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4^n \cdot 4) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 0 & 0 \\ 4^n(n+1) & 4^{n+1} & 4^n(n+1) \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно, $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1}n & 4^n & 4^{n-1}n \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ для любого натурального n .