

# Семинар 1

## Общая информация:

- Источник учебников: bookfi.net
- Задачник – Кострикин. Сборник задач по Алгебре. Третье издание. 2001г.
- СЛУ – система линейных уравнений
- ОСЛУ – однородная система линейных уравнений
- Матрица – это квадратная таблица заполненная числами
- Вектор – столбец из чисел, т.е. матрица с одним столбцом
- Пусть  $A = (a_{ij})$  – матрица коэффициентов СЛУ,  $x = (x_j)$  – вектор переменных,  $b = (b_i)$  – вектор чисел (где  $1 \leq i \leq n$  и  $1 \leq j \leq m$ ). Тогда соответствующую СЛУ будем для краткости записывать так  $Ax = b$ , а ее однородную версию  $Ax = 0$ ; то есть,  $Ax = b$  означает  $\sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij}x_j = b_i$  для любого  $1 \leq i \leq n$ .
- Пусть  $A$  и  $B$  – матрицы одной высоты, тогда через  $(A|B)$  будем обозначать матрицу полученную приписыванием  $B$  справа от  $A$ .

## Задачи:

1. Задачник. §8, задача 8.1 (а, в, ж).
2. Задачник. §8, задача 8.2 (е, з).
3. Задачник. §8, задача 8.7.
4. Задачник. §7, задача 7.15 (в терминологии принятой на лекциях надо использовать элементарные преобразования I типа). Матрица  $A$  называется «невырожденной» если: 1)  $A$  – квадратная, 2)  $Ax = 0$  имеет ровно одно решение.
5. Задачник. §8, задача 8.17 (в терминологии принятой на лекциях надо использовать элементарные преобразования I типа).
6. Усилить результат 8.17. Если в СЛУ с вещественными коэффициентами количество уравнений больше чем число главных неизвестных, то ее можно привести к улучшенному ступенчатому виду, пользуясь элементарными преобразованиями I типа. Какой «наилучший» ступенчатый вид получится, если количество уравнений равно числу главных неизвестных?
7. Задачник. §8, задача 8.25.
8. Задачник. §8, задача 8.13. Выражение  $a|b$  значит,  $a$  делит  $b$ .  $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$  означает,  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $a_{ii} = d_i$ . Элементарные преобразования I типа допускаются с целыми параметрами, элементарные преобразования III типа – только умножения на  $\pm 1$ .
9. Элементарные преобразования строк соответствуют действиям на уравнениях в системе, а чему соответствуют элементарные преобразования столбцов.
10. Пусть  $A$  – квадратная матрица такая, что ОСЛУ  $Ax = 0$  имеет ровно одно решение. Показать, что если  $B$  – не пустая матрица, а  $b$  – столбец чисел (оба той же высоты, что и  $A$ ), то система  $(A|B)x = b$  имеет бесконечное число решений. Опишите главные и свободные неизвестные.