Семинар 31

Общая информация

- На множестве матриц $\mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ можно ввести скалярное произведение по правилу $(A, B) = \mathrm{tr}(A^t B)$. Тогда определены понятия расстояния между матрицами и угла между ними. Длина матрицы в таком случае – это норма фробениуса.

Задачи:

1. Пусть пространство матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ снабжено скалярным произведением $\mathrm{tr}(A^t B)$. Найдите проекцию матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ на подпространство L и его ортогональное дополнение, где
$$L = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rangle$$

2. Пусть пространство матриц $\mathrm{M}_{3\,2}(\mathbb{R})$ снабжено скалярным произведением $\mathrm{tr}(A^t B)$. Найдите длины сторон и углы треугольника с вершинами
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Найти сингулярное разложение следующих матриц
   (a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Пусть пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ снабжены стандартным скалярным произведением и пусть $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ и $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^m$ – ортонормированные базисы. Докажите, что матрицы $x_i y_j^t$ образуют ортонормированный базис в $\mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ относительно скалярного произведения $\mathrm{tr}(A^t B)$.

5. Найдите сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, а также матрицу B ранга 1 наиболее близкую к A по норме Фробениуса.

В задачах ниже требуется привести уравнение кривой или поверхности к каноническому виду в прямоугольной декартовой системе координат и определить ее тип.

6. Задачник Ким-Крицков. §35, задача 35.24(1, 3, 5, 10).

7. Задачник Ким-Крицков. §35, задача 35.27(6, 11).

8. Задачник Ким-Крицков. §38, задача 38.10 (1, 2, 3).

9. Задачник Ким-Крицков. §38, задача 38.12 (6, 8).