Задачи к лекции 9

1. Найдите все натуральные числа $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, для которых существует конечное поле из n элементов.

2. Составьте таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_4$.

3. Постройте явно поле из 9 элементов.

4. Проверьте, что многочлены $x^3 + x^2 + 1$ и $x^3 + x + 1$ неприводимы над $\mathbb{Z}_2$, и установите явно изоморфизм между полями $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ и $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

5. Постройте граф включений подполей поля $\mathbb{F}_{4096}$.

6. Чему равна сумма всех элементов поля $\mathbb{F}_q$? Чему равно произведение всех ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_q$?

7. Пусть $q = p^n$. Докажите, что в поле $\mathbb{F}_q$ каждый элемент имеет ровно один корень степени p.

8. Пусть K — конечное поле. Постройте явно многочлен сколь угодно высокой степени с коэффициентами в K, у которого в поле K нет корней.

9. Пусть $\psi\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ — произвольное отображение. Докажите, что найдётся такой многочлен $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ степени меньше q, что $f(a) = \psi(a)$ для каждого $a \in \mathbb{F}_q$.

10. Докажите, что группа автоморфизмов конечного поля $\mathbb{F}_q$ порождается автоморфизмом Фробениуса. Каков порядок этой группы?

Домашнее задание

1. Постройте явно поле $\mathbb{F}_8$ и составьте для него таблицы сложения и умножения.

2. Реализуем поле $\mathbb{F}_9$ в виде $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Перечислите в этой реализации все элементы данного поля, являющиеся порождающими циклической группы $\mathbb{F}_9^\times$.

3. Проверьте, что многочлены x^2+1 и y^2-y-1 неприводимы над $\mathbb{Z}_3$, и установите явно изоморфизм между полями $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ и $\mathbb{Z}_3[y]/(y^2 - y - 1)$.

4. Пусть p — простое число, $q = p^n$ и $\alpha \in \mathbb{F}_q$. Докажите, что если многочлен $x^p - x - \alpha \in \mathbb{F}_q[x]$ имеет корень, то он разлагается на линейные множители.