Семинар 29

Общая информация

- Оператор $\varphi\colon V \to V$ называется нильпотентным, если для некоторого n выполнено $\varphi^n = 0$.

Задачи:

1. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан матрицей $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Для каждый из матриц A ниже определить, является ли φ самосопряженным оператором для какого-нибудь скалярного произведения на $\mathbb{R}^2$ и если является, то найти матрицу этого скалярного произведения.

   (a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

   (b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

   (c) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Определите при каких параметрах t оператор $\varphi_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является самосопряженным для какого-нибудь скалярного произведения, где φ_t задан матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Пусть $\beta, \alpha\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – две билинейные формы заданные по формулам
$$\beta(x,y) = x^t \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) y \quad \text{и} \quad \alpha(x,y) = x^t \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$
   Для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ определить сигнатуру формы $\beta + c\alpha$.

4. Пусть заданы две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   Пусть операторы $\phi, \psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ заданы матрицами
$$\phi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ и } \psi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix}$$
   Сравните количество инвариантных подпространств для ϕ и ψ.

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ докажите, что существует базис, в котором A имеет следующий блочно верхне треугольный вид
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}, \text{ где либо } A_i \in \mathbb{R}, \text{ либо } A_i = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

6. Приведите пример операторов $\phi, \psi\colon V \to V$ в некотором вещественном векторном пространстве V таких, чтобы $\phi\psi$ диагонализировался, а $\psi\phi$ нет.

7. Пусть $\phi, \psi\colon V \to V$ – некоторые линейные операторы, причем один из них обратим. Покажите, что $\phi\psi$ диагонализируется тогда и только тогда, когда диагонализируется $\psi\phi$.

8. Покажите, что оператор $\phi\colon V \to V$ является нильпотентным тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.

9. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор в евклидовом пространстве. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

   - φ является оператором ортогонального проектирования на некоторое подпространство $U \subseteq V$.
   - φ самосопряжен и $\varphi^2 = \varphi$.