Студент: Хусаинов Айдарбек
Группа: 173-1
Дата: 9 апреля 2018 г.

Домашняя работа 1

Задача 1. *Докажите, что формула* $m \circ n = 2mn - 2n + 3$ *задает бинарную операцию на множестве* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *и что* $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ *является группой.*

Доказательство. Докажем от обратного, что бинарная операция замнута на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Пусть $n \neq 1, m \neq 1$ и бинарная операция незамкнута $\Rightarrow$ результат операции может быть равен 1.

$$\begin{gathered} m \circ n = 2mn - 2n + 3 = 1 \\ mn - m - n = -1 \\ m(n-1) = n - 1 \\ m = 1 \end{gathered}$$

Противоречие! Выходит, что бинарная операция замкнута на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Чтобы доказать, что $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой докажем все достаточные свойства для группы.

(1) Ассоциативность:

$$\begin{gathered} \forall a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \\ a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc - 2b - 2c + 3) = \\ = 2a(2bc - 2b - 2c + 3) - 2(2bc - 2b - 2c + 3) - 2a + 3 = \\ = 4abc - 4ab - 4ac - 4bc + 4a + 4b + 4c - 3. \\ (a \circ b) \circ c = (2ab - 2a - 2b + 3) \circ c = \\ = 2(2ab - 2a - 2b + 3)c - 2(2ab - 2a - 2b + 3) - 2c + 3 = \\ = 4abc - 4ab - 4ac - 4bc + 4a + 4b + 4c - 3. \end{gathered}$$

(2) Существование нейтрального элемента:

$$\begin{gathered} \exists e \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow m \circ e = e \circ m = m : \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ m \circ e = 2me - 2m - 2e + 3 = m \\ 2me - 2e = 3m - 3 \\ e = \frac{3m-3}{2m-2} \\ e = \frac{3(m-1)}{2(m-1)} \\ e = \frac{3}{2} \\ e \circ m = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot m - 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot m + 3 = \\ = 3m - 3 - 2m + 3 = m = m \circ e \end{gathered}$$

(3) Существование обратного элемента:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$
$$n \circ m = 2mn - 2m - 2n + 3 = e = \frac{3}{2}$$
$$n(m-1) = m - \frac{3}{4}$$
$$n = \frac{4m-3}{4(m-1)}$$

Проверка свойств обратного элемента:

$$a^{-1} \circ a = 2a \cdot \frac{4a-3}{4(a-1)} - 2 \cdot \frac{4a-3}{4(a-1)} - 2a + 3 =$$
$$= \frac{3a-3}{2(a-1)} = \frac{3}{2} = e$$

Формула вычисления обратного элемента

$$a^{-1} = \frac{4a-3}{4(a-1)}$$

Свойства группы выполняются $\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой. $\blacksquare$