Семинар 3

Общая информация:

- Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. Введем следующе обозначение для множества решений системы $Ax = 0$:
$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$
- Для произвольных множеств X и Y обозначение $X \subseteq Y$ означает, что X – подмножество в Y, а $X \subsetneq Y$, что X – собственное подмножество в Y, то есть подмножество неравное Y.
- Если $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то можно определить $p(A)$ следующим образом
$$p(A) = a_0 \mathrm{I} + a_1 A + \ldots + a_n A^n$$
где $\mathrm{I} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица (внедиагональные элементы равны нулю, а на диагонали – единицы).

Задачи:

1. Задачник. §17, задача 17.1 (а, б, г).
2. Найти многочлен второй степени с вещественными коэффициентами такое, что
$$f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right), \quad f\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{и} \quad f\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$$
3. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$. Показать, что
   (a) Условие $\ker A \subseteq \ker B$ влечет, что количество главных неизвестных $Bx = 0$ меньше или равно количества главных неизвестных $Ax = 0$.
   (b) Условие $\ker A \subsetneq \ker B$ влечет, что количество главных неизвестных $Bx = 0$ строго меньше количества главных неизвестных $Ax = 0$.
   (c) Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ матрица такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Покажите, что тогда $A^n = 0$.
4. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого многочлена $p(x)$ с вещественными коэффициентами верна формула
$$p(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} & \frac{p^{(2)}(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{p^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & p(\lambda) & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{p^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & p(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}$$
   где $p^{(k)}(\lambda)$ – значение k-ой производной $p(x)$ в точке λ, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.