Семинар 6

Знак перестановки

Пусть $X_n = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество из n занумерованных элементов. Напомним, что перестановка σ на множестве X_n это биективное отображение $\sigma\colon X_n \to X_n$. Множество всех перестановок на n элементах обозначается S_n. Оказывается, можно построить единственное отображение

$$\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\} \quad \text{со свойством} \quad \operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

Такое отображение называется знаком перестановки. Есть два отдельных вопроса: какими свойствами обладает подобное отображение и как его построить. Я разберу эти вопросы отдельно.

Построение знака

Обычно знак перестановки σ определяют в виде $(-1)^{d(\sigma)}$, где $d(\sigma)$ – некоторая целочисленная характеристика перестановки σ. Классическим определением является *число беспорядков*.[1] Пара элементов (i, j), где $i < j$ $i, j \in X_n$, называется *инверсией* для σ, если $\sigma(i) > \sigma(j)$, то есть на паре i, j функция σ убывает. Тогда определим $d(\sigma)$ как количество инверсий в σ и $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)}$.

Другой способ определить знак – *декремент*. Декремент перестановки $\sigma \in S_n$ это

$$\operatorname{dec}(\sigma) = n - \text{«количество циклов»} - \text{«количество неподвижных точек»}$$

Декремент можно описать еще так: каждая перестановка σ определяет граф на множестве вершин X_n, где (i, j) – ребро, если $\sigma(i) = j$. Тогда

$$\operatorname{dec}(\sigma) = \text{«количество вершин»} - \text{«количество компонент графа»}$$

В этом случае знак определяется $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{dec}(\sigma)}$.

Теперь после определения знака, надо лишь показать, что он согласован с произведением. Это обычно делается руками в лоб. Помогает нам тот факт, что все числа из определения знака (число инверсий или декремент) нас интересуют по модулю 2, т.е. только их четность.

Важно При подсчета знака перестановки надо пользоваться декрементом. То есть, надо разложить перестановку в произведение независимых циклов и сложить их длины без единицы. Например:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Теперь видим, что

$$\begin{aligned} &1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 8 \to 9 \to 6 \to 1 \\ &5 \to 7 \to 5 \end{aligned}$$

Значит $\sigma = (1, 4, 3, 2, 8, 9, 6)(57)$, а значит $\operatorname{dec}(\sigma) = 6 + 1 = 7$ и $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Единственность знака

Это самый интересный вопрос во всей истории и рассказать почему есть только один знак на перестановках я вам сейчас не смогу, но я намекну как это делается и зачем нужна большая наука.

Дело в том, что перестановки образуют алгебраическую структуру под названием «группа», это множество с одной хорошей операцией (она ассоциативна, есть нейтральный элемент и есть обратный элемент для любого). Есть понятие подгруппы, подмножество $H \subseteq S_n$ является подгруппой, если оно замкнуто относительно произведения, в ней лежит тождественная перестановка, и для каждой перестановки из H в H лежит и обратная ей. Примером подгруппы является множество A_n – всех четных перестановок.

Как показывается единственность. Пусть есть какое-то отображение $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$. Тогда посмотрим на множество $K = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ всех «четных перестановок» относительно нашего знака (теперь это не обязательно A_n). Это множество является подгруппой (потому что sgn уважает умножение) и его

[1] Оно же *число инверсий*.

размер равен половине размера S_n. Более того, эта подгруппа удовлетворяет дополнительному свойству – нормальность, т.е. для любой перестановки $\sigma \in K$ и $\tau \in S_n$ верно, что $\tau\sigma\tau^{-1} \in K$. А теперь начинается самая интересная часть доказательства. Оказывается, что A_n является единственной нормальной подгруппой в S_n, размер которой $|S_n|/2$.[2] Это показывается так: берется произвольный элемент $\sigma \in S_n$ (мы смотрим на его цикловую структуру), начинаем его сопрягать $\tau\sigma\tau^{-1}$ специальным образом и потом перемножать полученные элементы до тех пор, пока не получим какой-нибудь цикл длины 3. После чего уже получаем любую четную перестановку.

Свойства знака

Кратко перечислим самое главное

1. $\operatorname{sgn}(1) = 1$, где $1 \in S_n$ обозначает тождественную перестановку.
2. $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1}$.
3. $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_k) = (-1)^{k-1}$
4. $\operatorname{sgn}(i, j) = -1$

Задача. Посчитайте $\prod_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Еще немного о знаке

Один из основных вопросов – зачем нужен знак перестановки? Если кратко, то это очень хорошая характеристика, которая отличает некоторые ситуации. Чтобы быть предельно ясным, давайте разберем игру в пятнашки: у вас есть поле размером 3 на 5 и 14 фишек с номерами от 1 до 14 расставленных как на рисунке

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & \end{vmatrix}$$

Теперь враг переставляет эти фишки, пользуясь свободной ячейкой, и вам надо вернуть картинку в исходное состояние. И сразу возник вопрос, а что если рассмотреть расположение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & \end{vmatrix}$$

Можно ли тогда вернуть фишки в исходное состояние? И оказывается ответ – нет. Но как доказывать подобные вещи? На самом деле надо рассмотреть инвариант похожий на знак перестановки и увидеть, что: (1) у этой позиции и начальной этот инвариант имеет разное значение, (2) при перестановке фишек, пользуясь свободной ячейкой, подобный инвариант не меняется.

Подробнее, рассмотрим произвольное расположение фишек на поле

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 12 \\ 11 & 9 & 2 \\ 3 & & 5 \\ 14 & 10 & 13 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

По этому расположение построим перестановку нарезкой по строкам:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 6 & 12 & 11 & 9 & 2 & 3 & 5 & 14 & 10 & 13 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

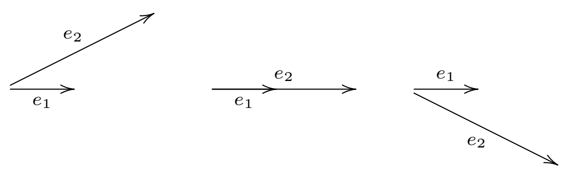
[2] На самом деле при $n \neq 4$ в S_n вообще нет других нормальных подгрупп.

После чего, берем знак этой перестановки. Заметим, что при перемещении фишек по горизонтали, перестановка σ не меняется, а при перемещении по вертикали, умножается на цикл длины 3. То есть четность не меняется при перемещении фишек.

Задача. Попробуйте модифицировать доказательство и покажите, что для поля размером 4 на 4 игра не выигрывается, если переставить местами фишки 14 и 15.

Определитель (немного философии)

В этом пункте мы хотим обсудить «ориентированный объем» соответствующий некоторой квадратной матрице. Основная идея такая: пусть мы хотим посчитать площадь между двумя векторами на плоскости, точнее площадь параллелограмма натянутого на вектора e_1 и e_2 как на первом рисунке ниже.



Давайте двигать вектор e_2 к вектору e_1. Тогда площадь будет уменьшаться и когда вектора совпадут она будет равна нулю. Однако, если мы продолжим двигать вектор e_2, то площадь между векторами опять начнет расти. Однако, эта ситуация отличается от предыдущей и вот как можно понять чем. Предположим, что между векторами была натянута хорошо сжимаемая ткань, одна сторона которой красная, другая зеленая. Тогда в самом начале на нас смотрит красная сторона этой ткани, но как только e_2 прошел через e_1 на нас уже смотрит зеленая сторона. Мы бы хотели научиться отличать эти две ситуации с помощью знака, если на нас смотрит красная сторона – знак положительный, если зеленая – отрицательный.

Ровно эта идея и лежит в основе определителя всех размерностей, мы хотим понять какие объемы считать положительными а какие отрицательными и ключевую роль в этом вопросе играет знак перестановки. В двумерном случае эффект знака очень легко увидеть: перестановка векторов местами меняет знак определителя.

Определитель (по-настоящему)

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ положим

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Это и есть определитель матрицы A. Думать про него надо так: пусть $A = (A_1 \mid \ldots \mid A_n)$ составлена из столбцов $A_i \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\det A$ – это ориентированный объем n-мерного параллелепипеда натянутого на вектора $A_1, \ldots, A_n$.

Свойства определителя

1. Линейность по столбцу

$$\det(A_1 \mid \ldots \mid A_i + A_i' \mid \ldots \mid A_n) = \det(A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_n) + \det(A_1 \mid \ldots \mid A_i' \mid \ldots \mid A_n)$$
$$\det(A_1 \mid \ldots \mid \lambda A_i \mid \ldots \mid A_n) = \lambda \det(A_1 \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_n)$$

2. Кососимметричность по столбцам

$$\det(\ldots \mid A_i \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots) = -\det(\ldots \mid A_j \mid \ldots \mid A_i \mid \ldots)$$

3. Кососимметричность по столбцам (другая форма)

$$\det(\ldots \mid A \mid \ldots \mid A \mid \ldots) = 0$$

4. Единственность. Пусть $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – функция на матрицах, которая кососимметрична и линейна по столбцам, тогда $\phi(X) = c\det(X)$, где константа $c = \phi(E)$ – значение в единичной матрице.

5. Согласованность с произведением. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Получается применением предыдущего пункта к $\phi(X) = \det(AX)$.

6. Согласованность с обращением. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, когда A обратима.

7. Согласованность с транспонированием. $\det(A) = \det(A^t)$. Следует из того, что $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ и явной формулы определителя.

8. Линейность и кососимметричность по строкам. Следует из предыдущего пункта и соответствующих свойств по столбцам.