Студент: Хусаинов Айдарбек
Группа: 173-1
Дата: 8 февраля 2018 г.

Индивидуальное домашнее задание.
Вариант 71

Задача 1. *Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы*

$$u_1 = (15, 10, -30, 20), \quad u_2 = (19, 2, -70, -28), \quad u_3 = (-28, -5, 97, 31), \quad u_4 = (5, 1, -17, -5)$$

Составьте однородную систему линейных уравнений, у которой множество решений совпадает с U

Решение. Нужно найти такую матрицу A, что $\forall u \in U \; Au = 0$.

Необходимым и достаточным условием будет то, что эта матрица должна обращать все векторы базиса в нуль $A(u_1|u_2|u_3|u_4) = 0$.

Транспонируем систему $\Rightarrow (u_1^T, u_2^T, u_3^T, u_4^T) \cdot A^T = 0$.

Составим вспомогательную матрицу $B = (u_1^T, u_2^T, u_3^T, u_4^T)$:

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -30 & 20 \\ 19 & 2 & -70 & -28 \\ -28 & -5 & 97 & 31 \\ 5 & 1 & -17 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A^T = 0$$

Пусть A^T – это множество n линейнозависимых столбцов:

$$B(a_1|a_2|...|a_n) = 0 \Rightarrow B \cdot a_i = 0 \;, i = \{1, 2, \; ... \;, n\}$$

Можно сделать вывод, что строки матрицы A – это базисные векторы ФСР $Bx = 0$

Найдем ФСР, приведя матрицу $(B|0)$ к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & -30 & 20 \\ 19 & 2 & -70 & -28 \\ -28 & -5 & 97 & 31 \\ 5 & 1 & -17 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 + 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

ФСР:

$$\begin{matrix} a_1 = (4, -3, 1, 0) \\ a_2 = (2, -5, 0, 1) \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2. *Найдите базис и размерность каждого из подпространств $L_1,\ L_2,\ U = L_1 + L_2,\ W = L_1 \cap L_2$ пространства $\mathbb{R}^4$, если L_1 – линейная оболочка векторов*

$$a_1 = (4,\ 1,\ 7,\ 0),\quad a_2 = (0,\ 2,\ 3,\ 4),\quad a_3 = (8,\ 0,\ 11,\ -4),\quad a_4 = (4,\ -3,\ 1,\ -8),$$

а L_2 – линейная оболочка векторов

$$b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 4),\quad b_2 = (4,\ 3,\ 10,\ 4),\quad b_3 = (-2,\ -3,\ -8,\ 4),\quad b_4 = (-7,\ -6,\ -19,\ -4).$$

Решение. Найдем базис L_1 и базис L_2. Выпишем их вектора в столбцы и приведем к улучшенному ступенчатому виду:

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что векторы $a_1,\ a_2$ линейно независимые. Они и составляют базис L_1.

$$(b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 1 & 10 & -8 & -19 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что векторы $b_1,\ b_2$ линейно независимые. Они и составляют базис L_2. $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$
Найдем теперь базис суммы $L_1 + L_2$ и ее размерность.

$$L_1 + L_2 =< a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 >= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисами являются векторы $a_1,\ a_2,\ b_1$, а $\dim(L_1 + L_2) = 3$.
Теперь найдем матрицы ОСЛУ, решениями которых являются наши подпространства.
Для L_1:

$$(a_1^T, a_2^T) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.375 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$C = \begin{pmatrix} -1.375 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для L_2:

$$(b_1^T, b_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицей $L_1 \cap L_2$ будет являться данная матрица $\dfrac{C}{D}$. ФСР$\dfrac{C}{D} \cdot x = 0$ задает $L_1 \cap L_2$.

$$\frac{C}{D} = \begin{pmatrix} -1.375 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.75 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $x_1 = (1,\ 0.75,\ 2.5,\ 1)$. Этот вектор является базисным для $L_1 \cap L_2$, а $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

Задача 3. *В пространстве* $\mathbb{R}^4$ *рассмотрим подпространства* $U = \langle v_1,\ v_2\rangle$ *и* $W = \langle v_3,\ v_4\rangle$, *где*

$$v_1 = (15,\ 5,\ 10,\ 10),\quad v_2 = (-5,\ 2,\ -10,\ -18),\quad v_3 = (-2,\ 9,\ -3,\ 12),\quad v_4 = (10,\ -2,\ 10,\ 13).$$

(а) Докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(б) Найдите проекцию вектора $x = (-39,\ 10,\ -36,\ -14)$ *на подпространство* W *вдоль подпространства* U.

Решение. (а) Покажем, что $U + W = \mathbb{R}^4$. Этого достаточно, чтобы так же показать их линейную независимость ($\dim U + \dim W \leqslant 4$).

Поставим все векторы как столбцы матрицы и найдем среди них линейно-независимые. Для этого нужно привести матрицу к улучшенному ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -2 & 10 \\ 5 & 2 & 9 & -2 \\ 10 & -10 & -3 & 10 \\ 10 & -18 & 12 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Все вектора линейно независимы $\Rightarrow$ ($\dim(U+W) = 4$) и ($\dim U + \dim W \leqslant 4$) $\Rightarrow \dim(U \cap W) = 0$, так как $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$. Из условий ($\dim(U \cap W) = 0$) и линейной независимости U и $W \Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Что и требовалось доказать.

(б) Рассмотрим матрицу вида $(A|x)$ и приведем ее к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 15 & -5 & -2 & 10 & | & -39 \\ 5 & 2 & 9 & -2 & | & 10 \\ 10 & -10 & -3 & 10 & | & -36 \\ 10 & -18 & 12 & 13 & | & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили координаты x в базисе $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$. Чтобы получить его в проекции на W, нужно взять коэффициенты при v_3 и v_4, умножить на соответствующие векторы и сложить.

$$x_W = 2 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = \begin{pmatrix} 2 \cdot -2 \\ 2 \cdot 9 \\ 2 \cdot -3 \\ 2 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$

Задача 4. *Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^5$, порожденное векторами:*

$v_1 = (42,\ -3,\ 5,\ 31,\ 6)$, $\quad v_2 = (0,\ 2,\ 6,\ 26,\ -4)$, $\quad v_3 = (-47,\ 7,\ -6,\ 7,\ 3)$, $\quad v_4 = (45,\ -2,\ 7,\ 48,\ 7)$.

Укажите базис какого-нибудь подпространства $W \subset \mathbb{R}^5$, для которого $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$. Ответ обоснуйте.

Решение. Для начала построим матрицу A, где столбцы будут нашими порождающими векторами.

$$A = \begin{pmatrix} 42 & 0 & -47 & 45 \\ -3 & 2 & 7 & -2 \\ 5 & 6 & -6 & 7 \\ 31 & 26 & 7 & 48 \\ 6 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти среди этих векторов линейно независимые приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 42 & 0 & -47 & 45 \\ -3 & 2 & 7 & -2 \\ 5 & 6 & -6 & 7 \\ 31 & 26 & 7 & 48 \\ 6 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1711}{1904} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что линейно независимыми являются только векторы $v_1,\ v_2,\ v_3$.

Дополним до базиса всего подпространства.

Утверждается, что линейная оболочка дополняющих векторов является подпространством W, которое в прямой сумме дает $\mathbb{R}^5$.

Докажем это.

Во-первых, линейная независимость, ведь по построению мы добавили только те векторы, которые не можем получить линейными комбинациями изначальных векторов.

Во-вторых, прямая сумма равна $\mathbb{R}^5$. По определению дополнения до базиса, если мы добавим эти векторы, то можно будет выразить любой.

Чтобы дополнить до базиса, выразим базис в виде строк в матрицу и приведем к улучшенному ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 42 & -3 & 5 & 31 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 26 & -4 \\ -47 & 7 & -6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 11.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Для полного базиса нам не хватает двух векторов из стандартого базиса: e_4 и e_5.

Ответ. $W = \langle e_4,\ e_5 \rangle$