Семинар 2

Общая информация:

- Множество векторов с n координатами из вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n$.
- Множество матриц с вещественными числами из m строк и n столбцов будем обозначать $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.
- Пусть A – матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

  Определим транспонированную матрицу $A^t = (a'_{ij})$ так: $a'_{ij} = a_{ji}$. Наглядно, транспонированная матрица для приведенных выше

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

- Для матриц A, $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и числа λ определим

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Задачи:

1. Задачник. §8, задача 8.1 (з).
2. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.
3. Для всех возможных $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$, решить систему линейных уравнений со следующей расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & a \\ \lambda & 2 & 2 & b \\ 2 & 1 & \lambda & c \end{array}\right)$$

4. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица, переменные $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Показать, что число главных неизвестных системы $Ax = 0$ совпадает с числом главных неизвестных системы $A^t y = 0$.
5. Пусть $A_i \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – матрицы. Какое наименьшее число k надо взять, чтобы обязательно существовало ненулевое решение для уравнения $x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k = 0$.
6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

   Показать, что что система $Ax = b$ имеет решение для любого b тогда и только тогда, когда количество главных переменных системы равно m.