Задачи к лекции 1

1. Найдите число бинарных операций на множестве из n элементов.

2. Пусть $n \geqslant 2$ и $N_n(\mathbb{R})$ — множество всех действительных квадратных матриц порядка n с нулевой суммой столбцов.

(а) Докажите, что $N_n(\mathbb{R})$ является полугруппой относительно операции умножения матриц.

(б) Является ли $N_n(\mathbb{R})$ моноидом?

3. Приведите пример счётной коммутативной нециклической группы.

4. Докажите, что во всякой группе элементы ab и ba имеют одинаковый порядок.

5. Пусть G — группа, $g \in G$ и $\mathrm{ord}(g) = m$. Найдите порядок элемента g^k.

6. Приведите пример бесконечной группы, в которой все элементы имеют конечный порядок.

7. Пусть G — группа и $H \subseteq G$ — непустое конечное множество, замкнутое относительно групповой операции (то есть $ab \in H$ для всех $a, b \in H$). Докажите, что H является подгруппой в G.

8. Найдите все левые и все правые смежные классы группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ по подгруппе

(а) всех ненулевых действительных чисел;

(б) всех положительных действительных чисел.

9. Найдите все левые и все правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $\langle \sigma \rangle$, где $\sigma = (12)$.

10. Пусть $G = S_n$ и $H \subseteq G$ — подмножество всех подстановок, которые оставляют элемент n на месте. Докажите, что H — подгруппа в G, и опишите все левые и правые смежные классы G по H.

11. Докажите, что во всякой конечной группе чётного порядка найдётся элемент порядка 2.

12. Докажите, что если в группе G выполняется тождество $x^2 = e$, то G коммутативна.

13. Докажите, что всякая бесконечная группа содержит бесконечное число подгрупп.

Домашнее задание

1. Докажите, что формула $m \circ n = 2mn - 2m - 2n + 3$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой.

2. Найдите порядки всех элементов группы $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

3. Найдите все левые и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $\langle \sigma \rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Докажите, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.