Задачи к лекции 4

1. Найдите все обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты в кольце (а) $\mathbb{Z}$; (б) $\mathbb{Z}_n$.

2. Докажите, что все обратимые элементы кольца образуют группу относительно умножения.

3. Пусть R — кольцо без делителей нуля и элементы $a, b \in R$ таковы, что $ab = 1$. Докажите, что $ba = 1$, то есть оба элемента a, b обратимы.

4. Докажите, что в поле нет собственных идеалов.

5. Докажите, что идеал (x, y) в кольце $\mathbb{R}[x, y]$ не является главным.

6. Найдите все гомоморфизмы: (а) группы $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Q}$; (б) кольца $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}$.

7. Пусть K — поле и $\alpha \in K$ — произвольный элемент. Докажите, что факторкольцо $K[x]/(x - \alpha)$ изоморфно K.

8. Пусть I — идеал в алгебре A над полем K. Докажите, что:
(а) I — подпространство в A; (б) факторкольцо A/I является алгеброй над K.

9. Пусть $f = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$.
(а) Докажите, что факторкольцо $\mathbb{R}[x]/(f)$ изоморфно полю $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда дискриминант многочлена f отрицателен.
(б) В каком случае в этом факторкольце есть нильпотенты?

10. Докажите, что в конечномерной алгебре всякий элемент, не являющийся делителем нуля, обратим.

11. Докажите, что факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда $I \neq R$ и I не содержится ни в каком собственном идеале кольца R.

12. Приведите пример идеала в каком-либо коммутативном кольце, который не порождается никаким конечным множеством.

Домашнее задание

1. Найдите все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольце $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения.

2. Докажите, что идеал $(x + 1, y)$ в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ не является главным.

3. При помощи теоремы о гомоморфизме для колец установите изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 2x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ — кольцо с покомпонентными операциями сложения и умножения.

4. Пусть $R \neq \{0\}$ — коммутативное кольцо, в котором нет собственных идеалов. Докажите, что R является полем.