

Семинар 7

Общая информация:

- Напомню, что запись $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in M_n(\mathbb{R})$ означает, что матрица X состоит из столбцов $X_i \in \mathbb{R}^n$.

Задачи:

1. Задачник. §12, задача 12.2.
2. Задачник. §13, задача 13.2 (б).
3. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in M_n(\mathbb{R})$ и $Y = (Y_1 \mid \dots \mid Y_n) \in M_n(\mathbb{R})$ – некоторые матрицы. Показать, что $\sum_{i=1}^n X_i Y_i^t = X Y^t$.
5. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in M_n(\mathbb{R})$ и $A \in M_n(\mathbb{R})$. Показать, что $\sum_{i=1}^n X_i^t A X_i = \text{tr}(X^t A X)$.
6. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in M_n(\mathbb{R})$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
 - (а) Найти $\det(\lambda_1 X_1 X_1^t + \dots + \lambda_n X_n X_n^t)$.
 - (б) При каких λ_i определитель из предыдущего пункта не меньше нуля?
7. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Показать, что $\det(AA^t) \geq 0$ и если A невырожденная, то $\det(AA^t) > 0$.
8. Пусть $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами такой, что $a_0 \neq 0$. Пусть $A \in M_m(\mathbb{R})$ такая, что $f(A) = 0$.
 - (а) Показать, что A обратима.
 - (б) Доказать, что A^{-1} представляется в виде $p(A)$, где p – некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Найти явно этот многочлен p .
9. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, E – единичная матрица размера n и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $R(\lambda) = \widehat{A - \lambda E}$ – присоединенная матрица.
 - (а) Показать, что выполнено следующее равенство
$$(A - \lambda E)R(\lambda) = R(\lambda)(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)E.$$
 - (б) Показать, что $R(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + \dots + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1}$, где $A_i \in M_n(\mathbb{R})$ – некоторые матрицы
 - (с) Показать, что матрицы A_i коммутируют с A .
10. Пусть $X \in M_3(\mathbb{R})$. Найти все решения уравнения $X^t X = -E$, где E – единичная матрица размера 3.