# Семинар 30

## Задачи:

1. Задачник. §46, задача 46.6 (б, г, е, и).

2. Пусть оператор в $\mathbb{R}^n$ задан матрицей $A$. Определить, найдется ли в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение, относительно которого данный оператор становится ортогональным для следующих матриц:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & -1 & -2 & -3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

3. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор в евклидовом пространстве и $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис. Покажите, что $\operatorname{tr}\varphi = \sum_{i=1}^n (e_i, \varphi e_i)$.

4. Пусть $V$ – евклидово пространство, $U \subseteq V$ – подпространство и $P\colon V \to V$ – оператор ортогонального проектирования на $U$, т.е. $V = U \oplus U^\perp$ и $v = u + u'$, то $Pv = u$.

   (a) Найдите $\operatorname{tr} P$.

   (b) Найдите $\sum_{i=1}^n |Pe_i|^2$, где $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый ортонормированный базис.

5. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – ортогональный оператор (скалярное произведение считается стандартным), причем $\operatorname{tr}\phi \notin 2\mathbb{Z}$. Пусть $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – другой оператор, коммутирующий с $\phi$, т.е. $\phi\psi = \psi\phi$. Покажите, что $\psi = \lambda\rho$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ – положительное число, а $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – оператор поворота.

6. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – ортогональный оператор (скалярное произведение считается стандартным), причем у $\phi$ существует только одно вещественное собственное значение. Опишите множество $Z_\phi = \{\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid \psi\phi = \phi\psi\}$.

7. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор в векторном пространстве. Предположим, что существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица $\varphi$ является симметричной и существует базис $f_1, \ldots, f_n$, в котором матрица $\varphi$ ортогональна. Докажите, что существует базис, в котором матрица $\varphi$ одновременно и симметрическая и ортогональная. Опишите действие $\varphi$ геометрически.

8. Пусть $V$ – евклидово пространство, $\mathcal{O}(V)$ – множество ортогональных операторов на $V$. Опишите множество $\operatorname{tr}(\mathcal{O}(V)) \subseteq \mathbb{R}$, т.е. опишите, какие значения может принимать след ортогонального оператора на $V$.