Семинар 17

Задачи:

1. Задачник. §39, задача 39.16.

2. Задачник. §39, задача 39.15 (и).

3. Пусть $V = \mathbb{R}^3$ и $\phi\colon V \to V$ – линейное отображение.

   (a) Пусть в стандартном базисе ϕ задано матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -6 \\ 11 & 17 & -8 \end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного отображения $\psi\colon V \to V$ такого, что $\ker\phi = \operatorname{Im}\psi$.

   (b) Пусть в стандартном базисе ϕ задано матрицей $\left(\begin{smallmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного отображения $\psi\colon V \to V$ такого, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\psi$.

4. Пусть $\phi\colon V \to V$ – линейное отображение векторного пространства V в себя.

   (a) Докажите, эквивалентность следующих условий:

      i. $\operatorname{Im}\phi \cap \ker\phi = 0$

      ii. $\operatorname{Im}\phi + \ker\phi = V$

      iii. В некотором базисе пространства V отображение ϕ имеет блочный вид $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где A – невырожденная матрица

   (b) Докажите, эквивалентность следующих условий:

      i. $\operatorname{Im}\phi \subseteq \ker\phi$

      ii. $\phi^2 = 0$

5. Привести пример или доказать, что такого примера не существует:

   (a) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$

   (b) $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$

6. Найти матрицу линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ со следующими условиями:

   (a) $n = 3$, $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

   (b) $n = 4$, $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

7. Докажите, что для любых подпространств $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ таких, что $\dim U + \dim V = n$ существует $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с условиями $\ker\phi = U$ и $\operatorname{Im}\phi = V$.

8. Пусть $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – подпространства.

   (a) Покажите, что множество
   $$\{\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid U \subseteq \ker\phi,\ \operatorname{Im}\phi \subseteq V\}$$
   является векторным подпространством в пространстве всех линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в себя.

   (b) Найдите размерность этого подпространства.

9. Пусть $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ такие, что $AB = 0$. Докажите, что $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \leqslant n$.

10. Пусть
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Найдите базисы подпространств $\operatorname{Im} A^{10^{10^{10}}}$ и $\ker A^{10^{10^{10}}}$.

11. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Найдутся ли такие числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\lambda A + \mu B$ – невырожденная матрица?