Семинар 16

Общая информация:

- Напомню, что $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ задает линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по правилу $x \mapsto Ax$. Тогда в стандартных базисах этих пространств A будет матрицей для отображения ϕ.
- Ранг матрицы A обозначается через $\operatorname{rk} A$.

Задачи:

1. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

   (a) Показать, что f_1, f_2, f_3 образуют базис в $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора x в этом базисе.

   (b) Показать, что g_1, g_2 образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора $\phi(x)$ в этом базисе.

   (c) Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

   Существует ли линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$, где

   (a) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

   (b) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

3. Задачник. §34, задача 34.11(а).

4. Задачник. §34, задача 34.3(д).

5. Задачник. §35, задача 35.14(б).

6. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n.

   (a) Показать, что системы

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

   являются базисами в $\mathbb{R}[x]_n$ и найти матрицы перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.

   (b) Найти координаты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ в этих базисах.

   (c) Пусть $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ – отображение дифференцирования многочлена по переменной x. Найти матрицы A и A_a этого отображения в базисах из пункта (6a).

   (d) Найти след и определитель матриц A и A_a.

7. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис векторного пространства V и пусть $x \in V$ – вектор с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Найти координаты x в новом базисе, если новый базис получен следующим образом:

   (a) Прибавили к e_j вектор e_i умноженный на $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Поменяли местами e_i и e_j.

   (c) Умножили e_i на $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

8. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ из того что $Ax = 0$ следует, что $Bx = 0$. Показать, что тогда $B = CA$ для некоторой $C \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

9. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

   (a) Пусть $m \geqslant n$ и $\operatorname{rk} A = n$. Показать, что существует $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ такая, что $BA = E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Пусть $m \leqslant n$ и $\operatorname{rk} A = m$. Показать, что существует $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ такая, что $AB = E \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

   (c) Показать, что всегда существует $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ такая, что $A = ABA$ и $B = BAB$.