

Семинар 5

Общая информация:

1. Перестановка на множестве X – это биективное отображение $\sigma: X \rightarrow X$.
2. Обычно, $X = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество, с занумерованными элементами. Тогда через S_n будем обозначать множество всех перестановок на $\{1, \dots, n\}$.
3. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ и пусть $\sigma \in S_n$ такая, что $\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$. Тогда σ называется циклом и обозначается (i_1, \dots, i_k) . Число k называется длиной цикла.¹
4. Цикл длины 2 называется транспозицией, т.е. транспозиция – это перестановка, меняющая местами два элемента.
5. Точка $i \in \{1, \dots, n\}$ называется неподвижной для $\sigma \in S_n$, если $\sigma(i) = i$.
6. Циклы называются независимыми, если любой элемент $i \in \{1, \dots, n\}$ неподвижен хотя бы относительно одного из них.
7. Декремент перестановки $\sigma \in S_n$ это

$$\text{dec}(\sigma) = n - \text{количество циклов} - \text{количество неподвижных точек}$$

Задачи

1. Задачник. §3, задача 3.2 (в, е).
2. Задачник. §3, задача 3.3 (а, в).
3. Пусть $\tau \in S_n$. Тогда τ меняет имена элементов $1, \dots, n$ на $\tau(1), \dots, \tau(n)$. Пусть $\sigma \in S_n$ – другая перестановка, заданная таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Найдите какой таблицей будет задаваться σ после смены имен элементов с помощью τ .

4. Пусть $\sigma \in S_n$ и пусть $\sigma = \rho_1 \dots \rho_k$ – произведение независимых циклов ρ_i с длинами $l_i \geq 2$. Покажите, что $\text{dec}(\sigma) = \sum_{i=1}^k (l_i - 1)$.
5. Пусть $\rho \in S_n$ – цикл длины k . Покажите, что его можно представить в виде произведения $k - 1$ транспозиций.
6. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$ причем τ – транспозиция. Покажите, что $\text{dec}(\sigma\tau) = \text{dec}(\sigma) \pm 1$.
7. Пусть $\sigma \in S_n$ представлена в виде $\sigma = \tau_1 \dots \tau_d$, где τ_i – транспозиции (вообще говоря зависимые) и пусть d – наименьшее из возможных таких чисел. Покажите, что $d = \text{dec}(\sigma)$.
8. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, покажите
 - (а) $\text{dec}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \text{dec}(\sigma)$ (указание: пригодится задача 3)
 - (б) $\text{dec}(\sigma^{-1}) = \text{dec}(\sigma)$
 - (в) $\text{dec}(\sigma\tau) = \text{dec}(\tau\sigma)$
 - (г) $\text{dec}(\sigma\tau) \leq \text{dec}(\sigma) + \text{dec}(\tau)$
9. Для любых $\sigma, \tau \in S_n$ обозначим $d(\sigma, \tau) = \text{dec}(\sigma\tau^{-1})$. Покажите, что $d(\sigma, \tau)$ является метрикой, т.е.
 - (а) $d(\sigma, \tau) \geq 0$ для любых $\sigma, \tau \in S_n$
 - (б) $d(\sigma, \tau) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \tau$
 - (в) $d(\sigma, \tau) = d(\tau, \sigma)$ для любых $\sigma, \tau \in S_n$
 - (г) $d(\sigma, \tau) \leq d(\sigma, \rho) + d(\rho, \tau)$ для любых $\sigma, \tau, \rho \in S_n$

¹Мы считаем, что $k \geq 2$, так как при $k = 1$ получим (i_1) , что соответствует тождественной перестановке.