Семинар 1

Системы линейных уравнений

Наша задачи научиться решать Системы Линейных Уравнений (СЛУ), то есть находить все их решения или доказывать, что решений нет. Общий вид СЛУ и ее однородная версия (ОСЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты

Где живут коэффициенты a_{ij} и b_j? Варианты:

- Вещественные числа $\mathbb{R}$
- Комплексные числа $\mathbb{C}$
- Рациональные числа $\mathbb{Q}$
- Любое «подполе» в $\mathbb{C}$, то есть любое подмножество $F \subseteq \mathbb{C}$ замкнутое относительно $+, -, \cdot, /$. Например: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- Рациональные функции над $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{R}(x) = \{f(x)/g(x) \mid f, g$ – многочлены от x коэффициенты из $\mathbb{R}\}$
- Ряды Лорана $\mathbb{R}((x)) = \{\sum_{n\geqslant r} a_n x^n \mid r \in \mathbb{Z},\, a_n \in \mathbb{R}\}$
- Мероморфные функции в области $\mathcal{M}(U)$, где $U \subseteq \mathbb{C}$ – некоторое открытое подмножество, а $\mathcal{M}(U) = \{f/g\}$, где $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ гладкие в комплексном смысле функции.

Для решения СЛУ **НЕ** имеет значения откуда берутся коэффициенты, так как решения будут лежать там же. Потому мы будем работать с числами из $\mathbb{R}$.

Матрицы связанные со СЛУ

Для каждой СЛУ введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Названия:

- A – матрица системы
- b – вектор правой части
- $(A|b)$ – расширенная матрица системы
- x – вектор решений

Будем кратко записывать СЛУ и ее однородную версию так: $Ax = b$ и $Ax = 0$.

Количество решений

Случай одного уравнения и одной неизвестной

- $x = 0$ – одно решение
- $0x = 0$ – бесконечное число решений
- $0x = 1$ – нет решений

Задача. Пусть даны $Ax = 0$ и $Ax = b$. Показать, что если СЛУ или ОСЛУ имеет хотя бы 2 решения, то она имеет бесконечное число решений. (Указание: если $Ax = Ay = 0$, то $A(x + y) = 0$ и $A(\lambda x) = 0$; если $Ax = b$ и $Ay = 0$, то $A(x + y) = b$.)

Элементарные преобразования

$$\text{I тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i & b_i \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & \dots & a_{jn}+\lambda a_{in} & b_j+\lambda b_i & b_j+\lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m & b_m \end{array}\right) \quad i \neq j$$

$$\text{II тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\text{III тип:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} & \lambda b_i \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \lambda \neq 0$$

Приведение к ступенчатому виду (алгоритм Гаусса)

Основной способ решения СЛУ – привести ее элементарными преобразованиями к простому виду, где множество решений очевидно.[1]

Разберем типичный ход алгоритма Гаусса на примере 3 уравнений и 4 неизвестных.[2]

Прямой ход алгоритма Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{2-я строка } - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{3-я строка } - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{1-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{3-я строка } - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot \text{2-я строка}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right)$$

В результате данного хода какие-то коэффициенты, например a_{33}, могли занулиться, потому возможны следующие принципиально другие случаи[3]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{34}} & b_3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 0 & \underline{a_{23}} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{34}} & b_3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{b_3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Подчеркнутые элементы считаются не равными нулю. В ступенчатом виде все переменные (и соответственно коэффициенты перед ними) делятся на главные и неглавные. Главные коэффициенты – это первые ненулевые коэффициенты в строке (подчеркнутые). Переменные при них называются главными, остальные ненулевые коэффициенты и переменные – неглавные.

[1] Данный метод является самым быстрым возможным как для написания программ, так и для ручного вычисления. При вычислениях руками, однако, полезно местами пользоваться «локальными оптимизациями», то есть, если вы видите, что какая-то хитрая комбинация строк сильно упростит вид системы, то сделайте ее.

[2] При переходе от одной матрицы к другой я новым коэффициентам даю старые имена, чтобы не захламлять текст новыми обозначениями.

[3] Это не полный список всех случаев.

Обратный ход алгоритма Гаусса

Разберем типичный обратный ход алгоритма Гаусса. Подчеркнутые элементы считаются не равными нулю.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & \underline{a_{33}} & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{разделить } i\text{-ю строку на } a_{ii}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{2-я строка } - a_{23} \cdot \text{3-я строка}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{1-я строка } - a_{13} \cdot \text{3-я строка}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{1-я строка } - a_{12} \cdot \text{2-я строка}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right)
$$

В специальных случаях приведенных выше, получим

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \quad
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \quad
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Полученный в результате обратного хода вид расширенной матрицы называется улучшенным ступенчатым видом, т.е., это ступенчатый вид, где все коэффициенты при главных неизвестных – единицы, и все коэффициенты над ними равны нулю.

Получение решений

В системе ниже, выберем переменную x_4 как параметр

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \end{array}\right)
$$

Тогда решения имеют вид[4]

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}
$$

Специальные случаи:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \quad \text{Решения:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \quad \text{Решения:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Решения:} \quad \text{Нет решений, т.к. последнее уравнение } 0 = 1
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Решения:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}
$$

[4]Операция умножения матрицы на число покомпонентная (умножаем каждый элемент на число). Сумма и разность двух матриц покомпонентная (складываем или вычитаем числа на одних и тех же позициях).

Вычислительная практика

Найти решения СЛУ соответствующих следующим расширенным матрицам:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Замечание. Работая с целочисленными матрицами, старайтесь во время прямого хода алгоритма Гаусса не выходить за рамки целых чисел.

- Используйте элементарные преобразования I типа только с целым параметром.
- Полезно не злоупотреблять умножением на ненулевое целое, умножайте только на ± 1. Иначе придется работать с большими числами.

На этапе обратного хода алгоритма Гаусса избавиться от деления уже не возможно.