Семинар 14

Общая информация:

- Напомним, что всякая матрица $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ ранга 1 имеет вид $A = xy^t$, где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ – ненулевые вектор-столбцы.
- Для произвольной матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ определим
$$\min\{k \mid A = \sum_{i=1}^{k} A_i,\text{ где } \operatorname{rk} A_i = 1\}$$
То есть, это самое маленькое число матриц ранга 1, сумма которых дает A. Это число называется *тензорным рангом* A.
- Для произвольной матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ определим
$$\min\{k \mid A = BC,\text{ где } B \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})\; C \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})\}$$
То есть, это минимальное k, такое, что A представляется в виде произведения матрицы B с k столбцами и матрицы C с k строками. Такое число называется *факториальным рангом* A.
- Запись $X = (x_1|\ldots|x_k) \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ означает, что $x_i \in \mathbb{R}^m$ являются столбцами матрицы X.

Задачи:

1. Даны векторы
$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$
   (a) Среди этих векторов найти базис их линейной оболочки.
   (b) Выразить все оставшиеся вектора через базисные.
2. Задачник. §6, задача 6.12 (в).
3. Задачник. §7, задача 7.2 (б, ж).
4. Задачник. §7, задача 7.10.
5. Задачник. §7, задача 7.11.
6. Задачник. §7, задача 7.14.
7. Дана матрица
$$A = \begin{pmatrix}2 & 6 & 1 & 3 & -1 & -4\\ -1 & -3 & 1 & -3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 0 & 6 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1\\ 4 & 12 & -1 & 9 & 0 & -9\end{pmatrix}$$
Разложить ее в самую короткую сумму матриц ранга 1.
8. Даны числа $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, разложить матрицу
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$
в самую короткую сумму матриц ранга 1.

9. Пусть $X = (x_1|\ldots|x_k) \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ и $Y = (y_1|\ldots|y_k) \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$. Показать, что $XY^t = x_1y_1^t + \ldots + x_ny_n^t$ и вывести отсюда, что факториальный ранг равен тензорному рангу.

10. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.

    (a) Пользуясь алгоритмом с семинара, показать, что факториальный ранг A не превосходит столбцового ранга A.

    (b) Пусть $A = BC$, где $B \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$ и k – факториальный ранг A. Покажите, что столбцы B линейно независимы.

    (c) Вывести из предыдущего пункта, что столбцовый ранг не превосходит факториальный ранг.

11. Привести пример матрицы $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ и матриц $B_i \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{rk} A = 3$, $\operatorname{rk} B_i = 2$ и $\operatorname{rk}(A+B_i) = i$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$.

12. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – матрица ранга r.

    (a) Показать, что любой минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от 0.

    (b) Пусть $1 \leqslant k < r$. Привести пример, когда минор, стоящий на пересечении k линейно независимых столбцов и k линейно независимых строк равен 0.