Задачи к лекции 5

1. Пусть R — кольцо главных идеалов и $a, b, c \in R$. Докажите, что

(а) если c делит ab и $(b, c) = 1$, то c делит a;

(б) если b делит a, c делит a и $(b, c) = 1$, то bc делит a.

2. Пусть $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ — подкольцо в $\mathbb{C}$, состоящее из всех элементов вида $a + b\sqrt{-5}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

(а) Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(б) Докажите, что всякий ненулевой необратимый элемент в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ разлагается в произведение конечного числа простых.

(в) Докажите, что все элементы, участвующие в равенстве $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, просты и попарно не ассоциированы. Таким образом, кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не факториально.

3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ (над $\mathbb{R}$), а также его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:

(а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

(б) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$.

4. Разложите в произведение неприводимых над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$ следующие многочлены:

(а) $x^4 - 4$;   (б) $x^4 + 4$.

5. Разложите в произведение неприводимых следующие многочлены:

(а) $x^4 + x^3 + x + 1$ в $\mathbb{Z}_2[x]$;

(б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ в $\mathbb{Z}_3[x]$.

6. Перечислите все неприводимые многочлены степеней не выше 4 над полем $\mathbb{Z}_2$ и докажите, что существует ровно 6 неприводимых многочленов степени 5.

7. Пусть R — коммутативное кольцо без делителей нуля. Докажите, что

(а) в кольце $R[x]$ нет делителей нуля;

(б) в кольце $R[x_1, \ldots, x_n]$ нет делителей нуля.

8. Предположим, что многочлен с целыми коэффициентами имеет кратный комплексный корень. Может ли такой многочлен быть неприводимым над полем $\mathbb{Q}$?

9. Найдите все делители нуля и нильпотенты в кольце $\mathbb{Z}_4[x]$.

Домашнее задание

1. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, а также его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$, где

$$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1, \quad g(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2.$$

2. Выясните, является ли число $4 + \sqrt{-5}$ простым элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

3. Разложите многочлен $x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3$ в произведение неприводимых в кольце $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Пусть R — факториальное кольцо и $p \in R$ — ненулевой необратимый элемент. Докажите, что p является простым тогда и только тогда, когда в факторкольце $R/(p)$ нет делителей нуля.