

## Семинар 25

### Задачи:

1. Опишите инвариантные подпространства следующих операторов:

(a)  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , где  $\phi(x) = Ax$  и  $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , где  $\phi(x) = Ax$  и  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ .

(c)  $d/dx: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ .

(d)  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\phi(x) = Ax$  и  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

(e)  $\phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , где  $\phi(x) = Ax$  и  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

2. Пусть линейный оператор  $\phi: V \rightarrow V$  обратим. Показать, что у  $\phi$  и  $\phi^{-1}$  одни и те же инвариантные подпространства.
3. Пусть  $\beta: V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  – билинейная форма вычисления на векторе, т.е.  $(v, \xi) \mapsto \xi(v)$ . Пусть  $\phi: V \rightarrow V$  – линейный оператор,  $\phi^*: V^* \rightarrow V^*$  – двойственный оператор, т.е.  $\phi^*(\xi) = \xi \circ \phi$ . Докажите, что если  $U \subseteq V$  – инвариантное подпространство для  $\phi$ , то  $U^\perp \subseteq V^*$  является инвариантным для  $\phi^*$ .
4. Описать операторы, для которых все подпространства являются инвариантными.
5. Задачник. §40, задача 40.12.
6. Задачник. §40, задача 40.11.
7. Задачник. §40, задача 40.32 (а).