

Задачи к лекции 3

1. Докажите, что группа $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ является прямым произведением двух своих подгрупп $\mathbb{R}_{>0}$ и $\{z \mid |z| = 1\}$.
2. Докажите, что группа $(\mathbb{Z}, +)$ не изоморфна прямому произведению никаких двух своих собственных подгрупп.
3. Приведите пример групп G_1, G_2 и подгруппы $H \subset G_1 \times G_2$, которая не совпадает с $H_1 \times H_2$ ни для каких подгрупп $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$.
4. Приведите пример нециклической примарной группы.
5. Найдите все с точностью до изоморфизма абелевы группы порядка (а) 100; (б) 200.
6. Изоморфны ли группы (а) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$? (б) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{10}$?
7. Сколько элементов порядков 2, 4 и 5 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?
8. Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?
9. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная (а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$? (б) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$?
10. Докажите, что примарная циклическая группа не может быть разложена в прямое произведение двух своих ненулевых подгрупп.
11. Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы A . Докажите, что порядок любого элемента A делит k .
12. *Разбиением* натурального числа n называется неубывающая последовательность натуральных чисел, сумма которых равна n . Докажите, что число попарно неизоморфных абелевых групп порядка p^n , где p — простое число, равно числу разбиений числа n .
13. Докажите, что всякая конечная абелева группа порядка, не делящегося на квадрат целого числа, является циклической.

Домашнее задание

При решении задач можно пользоваться без доказательства теоремой о существовании и единственности разложения конечной абелевой группы в прямое произведение примарных циклических групп.

1. Сколько элементов порядков 2, 3, 6 и 9 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$?
2. Сколько подгрупп порядков 5 и 10 в нециклической абелевой группе порядка 50?
3. При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ изоморфна прямому произведению n циклических групп?
4. Пусть порядок конечной абелевой группы A делится на m . Докажите, что в A есть подгруппа порядка m .