Семинар 10

Общая информация:

- Напомню, что если $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень многочлена $f(x)$ с комплексными коэффициентами, то $f(x) = (x-\lambda)g(x)$.
- Если $p(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, то он называется неприводимым над полем вещественных чисел, если он положительной степени и его нельзя разложить в произведение многочленов с вещественными коэффициентами положительной степени, т.е. если $p(x) = h(x)g(x)$, где $h(x)$ и $g(x)$ – многочлены с вещественными коэффициентами, то либо $h(x)$ либо $g(x)$ является константой из $\mathbb{R}$. (Аналогично определяется неприводимость над любым другим полем.)
- Над полем комплексных чисел любой неприводимый многочлен линеен.
- Над полем вещественных чисел любой неприводимый многочлен имеет степень 1 или 2.
- Над полем рациональных чисел неприводимые многочлены бывают любой степени.

Задачи:

1. Задачник. §27, задача 27.8 (а, в).
2. Задачник. §27, задача 27.9.
3. Задачник. §25, задача 25.6.
4. Задачник. §26, задача 26.8.
5. Пусть $\gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ отображение заданное по правилу $\gamma(z) = \bar{z}$. Тогда геометрически это отражение относительно вещественной оси. Опишите геометрически следующие отображения
   (a) $\gamma(z) = -\bar{z}$.
   (b) $\gamma(z) = z^n$.
   (c) $\gamma(z) = |z|$.
   (d) $\gamma(z) = \mathrm{Re}(z^2)$.
6. Найти многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами минимальной степени такой, что $f(1) = 1$ и $f(i) = i$.
7. Найти многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами минимальной степени такой, что числа 2, $1+i$, $3i$ являются его корнями.
8. Пусть $f(x) = x^n - 1$.
   (a) Найти все комплексные корни многочлена $f(x)$.
   (b) Разложить $f(x)$ на неприводимые множители над полем вещественных чисел.