Задачи к лекции 7

В этом листке используется обозначение $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, где K — некоторое поле. При сравнении одночленов от нескольких переменных всегда используется лексикографический порядок.

1. Докажите, что если старшие члены двух многочленов $f_1, f_2 \in R$ взаимно просты, то $\{f_1, f_2\}$ является системой Грёбнера. В частности, многочлен $S(f_1, f_2)$ редуцируем к нулю относительно f_1, f_2.

2. Постройте базис Грёбнера в следующих идеалах кольца $K[x, y, z]$:
(а) $(x^2 - 1, xy - y, xz + z)$;
(б) $(x^3 + xy, x^2 + y^2)$.

3. Выясните, принадлежит ли многочлен $2x^2y + y$ идеалу $(x^2 + xy + 1, xy - y^2)$.

4. Пусть многочлены $f_1, \ldots, f_m$ составляют базис Грёбнера идеала $I \subseteq R$. Предположим, что $L(f_1) \vdots L(f_i)$ для некоторого $i \geqslant 2$. Докажите, что тогда многочлены $f_2, \ldots, f_m$ по-прежнему составляют базис Грёбнера идеала I.

Базис Грёбнера F идеала $I \subseteq R$ называется *минимальным редуцированным*, если
(1) для любых двух различных многочленов $f_1, f_2 \in F$ никакой одночлен в f_1 не делится на $L(f_2)$;
(2) старшие коэффициенты всех многочленов из F равны 1.

5. Докажите, что всякий ненулевой идеал в R обладает минимальным редуцированным базисом Грёбнера, причём этот базис единствен с точностью до перестановки входящих в него многочленов.

6. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера для идеалов из задач 2 и 3.

7. Пусть $I = (f_1, \ldots, f_m)$ и $J = (g_1, \ldots, g_k)$ — два идеала в R. Как алгоритмически выяснить, совпадают I и J или нет?

8. Пусть $I \subseteq R$ — ненулевой идеал и F — его базис Грёбнера. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ и $R_k = K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Докажите, что множество $F \cap R_k$ является базисом Грёбнера идеала $I \cap R_k$ кольца R_k.

9. Пусть $I = (y^2 + 1, x^2 - y) \subseteq K[x, y]$. Найдите $I \cap K[x]$ и $I \cap K[y]$.

10. Пусть $I = (f_1, \ldots, f_m)$ и $J = (g_1, \ldots, g_k)$ — два идеала в R. Введём новую переменную t и рассмотрим в кольце $K[t, x_1, \ldots, x_n]$ идеал $H = (tf_1, \ldots, tf_m, (1 - t)g_1, \ldots, (1 - t)g_k)$. Докажите, что $I \cap J = H \cap R$. Опишите алгоритм нахождения порождающих идеала $I \cap J$.

11. Найдите порождающую систему для пересечения $(x^3 + y^3 - 1, x - y + 1) \cap (xy)$.

Домашнее задание

1. Выясните, принадлежит ли многочлен $x^4z - 4yz$ идеалу $(x^2z - yz + y, xy + 2y)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$.

2. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале

$$(xy + 2yz, x - y, yz - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$$

относительно стандартного лексикографического порядка (то есть задаваемого условием $x > y > z$).

3. Дан идеал $I = (x^2y + 2xz + z^2, yz - 1) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

4. Найдите конечный базис Грёбнера (относительно стандартного лексикографического порядка) для идеала $I \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$, определяемого условием

$$I = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid f(a, 1, a) = 0 \text{ для всех } a \in \mathbb{R}\}.$$