

## Семинар 22

### Общая информация:

- Стандартным скалярным произведением в  $\mathbb{R}^n$  будем называть  $(x, y) = x^t y$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- Напомню, что через  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  обозначается множество многочленов степени не больше  $n$ .
- Квадратная матрица  $C \in M_n(\mathbb{R})$  называется *ортогональной*, если  $C^t C = E$  (и тогда автоматически  $CC^t = E$  и  $C^t = C^{-1}$ ). Это в точности те матрицы, у которых столбцы (и строки) образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ .
- Угол между вектором  $x \in V$  и подпространством  $U \subseteq V$  – это угол между  $x$  и его ортогональной проекцией на  $U$ .

### Задачи:

1. Пусть в  $\mathbb{R}^4$  задано стандартное скалярное произведение. Покажите, что вектора

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

являются ортогональными и дополните их до ортогонального базиса в  $\mathbb{R}^4$ .

2. Пусть в  $\mathbb{R}^4$  задано стандартное скалярное произведение. Найти векторы, дополняющие следующую систему векторов до ортонормированного базиса

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Пусть в  $\mathbb{R}^4$  задано стандартное скалярное произведение. Примените процесс ортогонализации Грамма-Шмидта для нахождения базиса пространства, натянутого на следующую систему векторов:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

4. Пусть в  $\mathbb{R}^4$  задано стандартное скалярное произведение. И пусть подпространства  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  задано системой

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Найти систему уравнений, задающие ортогональное дополнение  $U^\perp$ .

5. Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$  со скалярным произведением  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ .

- (а) При помощи метода ортогонализации постройте ортогональный базис в подпространстве  $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ .
- (б) Найдите расстояние от вектора  $x^4$  до этого подпространства.

6. Опишите все целочисленные ортогональные матрицы.
7. Опишите все ортогональные матрицы порядка  $n$ , состоящие из неотрицательных элементов.

8. Задачник. §43, задача 43.35.
9. Задачник. §43, задача 43.38 (а).
10. Задачник. §43, задача 43.46.