Równania Różniczkowe i Różnicowe
Zadanie domowe

Maciej Kmąk

Sformułowanie słabe zagadnienia

Mamy równanie różniczkowe postaci:

$$-\frac{d}{dx}\Big(k(x)\frac{du(x)}{dx}\Big) = 100x^2, \quad x \in (0,2).$$

Sprowadza się to do postaci

$$k'(x)\,u'(x) \;+\; k(x)\,u''(x) \;=\; -\,100\,x^2, \quad x \in (0,2),$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} u(2) \;=\; -20, \\ u'(0) \;+\; u(0) \;=\; 20, \end{cases}$$

gdzie

$$k(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 2x, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Krok 1. Pomnożenie przez funkcję testową i scałkowanie.
Niech $v(x)$ będzie *funkcją testową*, tzn. $v \in H^1(0,2)$ oraz spełnia warunek brzegowy $v(2) = 0$ (ponieważ $u(2)$ jest zadane „na sztywno"). Pomnóżmy równanie przez $v(x)$ i scałkujmy w przedziale $(0,2)$:

$$\int_0^2 \big[k'(x)\,u'(x) \;+\; k(x)\,u''(x)\big]\,v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 -\,100\,x^2\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Krok 2. Rozdzielenie na dwie całki.

$$\int_0^2 \big[k'(x)\,u'(x)+k(x)\,u''(x)\big]\,v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{\int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1} \;+\; \underbrace{\int_0^2 k(x)\,u''(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

Krok 3. Całkowanie przez części dla I_2.
Rozważmy

$$I_2 \;=\; \int_0^2 k(x)\,u''(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wykorzystujemy fakt, że $\dfrac{d}{dx}\big[k(x)\,u'(x)\big] = k'(x)\,u'(x) \;+\; k(x)\,u''(x)$. Możemy więc zapisać:

$$k(x)\,u''(x) \;=\; \frac{d}{dx}\big[k(x)\,u'(x)\big] \;-\; k'(x)\,u'(x).$$

Zatem

$$I_2 = \int_0^2 \frac{d}{dx}\big[k(x)\,u'(x)\big]\,v(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pierwszą całkę całkujemy przez części:

$$\int_0^2 \frac{d}{dx}\big[k(x)\,u'(x)\big]\,v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\Big]_{x=0}^{x=2} \;-\; \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

W efekcie:

$$I_2 = \Big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\Big]_0^2 \;-\; \int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Krok 4. Sumowanie $I_1 + I_2$.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 = \int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \Big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\Big]_0^2 + \\ - \int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1}$$

Widzimy, że wyrazy $\int_0^2 k'(x)\,u'(x)\,v(x)\,dx$ się znoszą. Pozostaje:

$$I_1 + I_2 = \Big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\Big]_0^2 \;-\; \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zatem całe wyrażenie (lewa strona) staje się:

$$\int_0^2 \big[k'(x)\,u'(x) + k(x)\,u''(x)\big]\,v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\Big]_0^2 - \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Krok 5. Uwzględnienie warunków brzegowych.

- Warunek Dirichlet przy $x = 2$: $\quad u(2) = -20.$

  W sformułowaniu słabym zakładamy od razu $u(2) = -20$ (tzn. szukamy u spełniającego ten warunek w sposób *mocny*), a dla funkcji testowych $v(2) = 0$. Dlatego w wyrażeniu brzegowym $\big[k(x)\,u'(x)\,v(x)\big]_0^2$ składnik przy $x = 2$ znika, gdyż $v(2) = 0$.

- Warunek $u'(0) + u(0) = 20.$

  W wyrazie brzegowym przy $x = 0$ pozostaje $-\,k(0)\,u'(0)\,v(0)$. Ponieważ $k(0) = 1$, mamy $-\,u'(0)\,v(0)$. Czasem pozostawia się to w tej postaci, a warunek $u'(0) = 20 - u(0)$

Ostatecznie równanie w postaci słabej przyjmuje postać:

$$-\,\big[u'(0)\,v(0)\big] \;-\; \int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 -\,100\,x^2\,v(x)\,\mathrm{d}x,$$

co zwykle pisze się po przeniesieniu znaku „minus”:

$$\int_0^2 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \;+\; u'(0)\,v(0) \;=\; \int_0^2 100\,x^2\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Przy tym $v(2) = 0$ i $u'(0) + u(0) = 20.$

Sformułowanie słabe

Znajdź $u \in H^1(0,2)$ spełniające $u(2) = -20$,
tak aby dla każdej $v \in H^1(0,2)$ z $v(2) = 0$ zachodziło:

$$\int_0^2 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x \;+\; u'(0)\, v(0) \;=\; \int_0^2 100\, x^2\, v(x)\, \mathrm{d}x,$$

przy czym warunek brzegowy $u'(0) + u(0) = 20$ daje $u'(0) = 20 - u(0)$.

Po rozbiciu członu $(20 - u(0))v(0)$ na dwa składniki:

$$\int_0^2 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x \;+\; 20\, v(0) - u(0)\, v(0) \;=\; \int_0^2 100\, x^2\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^2 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x \;-\; u(0)\, v(0) \;=\; \int_0^2 100\, x^2\, v(x)\, \mathrm{d}x \;-\; 20\, v(0)$$

Ostateczne sformułowanie słabe:

Znajdź $u \in H^1(0,2)$ spełniające $u(2) = -20$,
tak aby dla każdej $v \in H^1(0,2)$ z $v(2) = 0$ zachodziło:

$$\int_0^2 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x \;-\; u(0)\, v(0) \;=\; \int_0^2 100\, x^2\, v(x)\, \mathrm{d}x \;-\; 20\, v(0)$$

Sformułowanie wariacyjne

Definiujemy *formę dwuliniową* $B(u,v)$ oraz *formę liniową* $L(v)$ jako:

$$B(u,v) = \int_0^2 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x \;-\; u(0)\, v(0).$$

$$L(v) = \int_0^2 100\, x^2\, v(x)\, \mathrm{d}x \;-\; 20\, v(0).$$

Zatem równanie słabe można zapisać w postaci wariacyjnej jako:

$$\boxed{B(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(0,2), \quad v(2) = 0.}$$