

AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Funkcje sklejane 2. i 3. stopnia
Zadanie 3

Maciej Kmąk
Informatyka WI AGH, II rok

1 Treść Zadania

Dla funkcji $f(x)$ widocznej na rysunku 1.

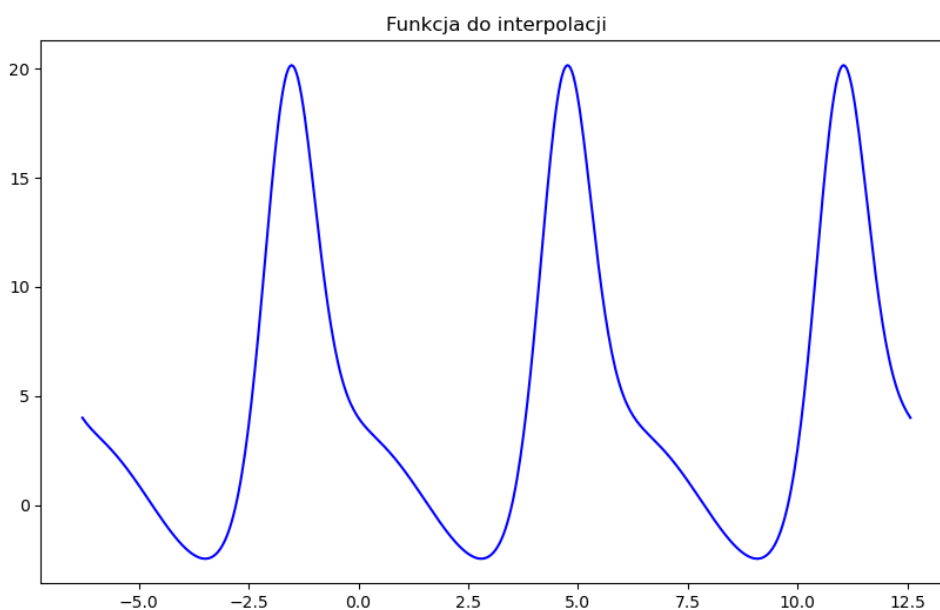
$$f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x) \quad \text{na przedziale } [-2\pi, 4\pi]$$

wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejającą trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Przyjęte warunki brzegowe to:

- natural cubic spline (**free boundary**)
- **clamped boundary**

Dla wyznaczonych wielomianów:

- Oceń dokładność interpolacji.
- Porównać interpolację funkcjami sklejonymi drugiego i trzeciego stopnia.
- Graficznie zilustrować interesujące przypadki.



Rysunek 1: Funkcja $f(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze osobistym o specyfikacji:

- System Operacyjny: Windows 11 Pro
- Procesor: 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1235U 1.3 GHz
- Język: Python 3.12

3 Funkcja sklejaną kwadratowa – Wstęp teoretyczny

Postać funkcji

Funkcję sklejaną drugiego stopnia na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ zapisujemy w postaci:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i$$

gdzie:

- $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,
- a_i, b_i, c_i — współczynniki funkcji na i -tym przedziale,
- x_i — współrzędna i -tego węzła.

Układ równań

Zatem dla $i = 0, 1, \dots, n-2$ mamy układ równań:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 = \frac{2(y_1 - y_0)}{h_0} \\ b_1 + b_2 = \frac{2(y_2 - y_1)}{h_1} \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \frac{2(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \end{cases}$$

Układ zawiera $n-1$ równań z n niewiadomymi — potrzebny jest jeden dodatkowy warunek brzegowy.

Warunki brzegowe

I. Free boundary:

$$S'_0(x_0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

Końcowy układ:

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_0 + b_1 = \frac{2(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \frac{2(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \end{cases}$$

II. Clamped boundary:

$$S'_0(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow b_0 = f'(x_0)$$

Końcowy układ:

$$\begin{cases} b_0 = f'(x_0) \\ b_0 + b_1 = \frac{2(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \frac{2(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \end{cases}$$

Wyznaczenie współczynników

Znając b_i , wyznaczamy a_i z:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2}$$

Stąd pełna postać funkcji sklejanego wielomianu na przedziale:

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2$$

Podejście obliczeniowe

W implementacji numerycznej zastosowano podejście rekurencyjne (iteracyjne), które pozwala na wydajne i stabilne wyznaczenie współczynników bez konieczności rozwiązywania pełnego układu równań liniowych. Rekurencyjne podstawianie warunków pochodnych pozwala efektywnie wyznaczać współczynniki b_i , a następnie obliczyć a_i dla każdego przedziału.

4 Funkcja sklejaną sześcienna – Wstęp teoretyczny

Postać funkcji

Funkcję sklejaną trzeciego stopnia na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ zapisujemy w postaci:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

gdzie:

- $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,
- a_i, b_i, c_i, d_i — współczynniki funkcji na i -tym przedziale,
- x_i — współrzędna i -tego węzła.

Warunki brzegowe

I. Free boundary:

$$S_0''(x_0) = 0, \quad S_{n-2}''(x_n) = 0$$

Układ równań zawiera wtedy w pierwszym i ostatnim wierszu:

$$m_0 = 0, \quad m_n = 0$$

II. Clamped boundary:

$$S_0'(x_0) = f'(x_0), \quad S_{n-2}'(x_n) = f'(x_n)$$

Po podstawieniu do wzoru pochodnej spline'u otrzymujemy warunki brzegowe w postaci równań liniowych na $\sigma_i = \frac{1}{6}m_i$:

$$2\sigma_0 + \sigma_1 = \frac{\Delta_0 - f'(x_0)}{h_0}, \quad 2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-2} - f'(x_n)}{h_{n-1}}$$

Rozwiązanie układu

Wartości drugich pochodnych (lub σ_i) obliczamy jako rozwiązanie układu równań liniowych:

$$A \cdot \mathbf{m} = \mathbf{d}$$

W implementacji wykorzystano funkcję `numpy.linalg.solve`, która wewnętrznie stosuje rozkład LU (ang. *LU decomposition*) z częściowym wyborem elementu głównego, oparty na procedurze LAPACK `GESV`.

Wyznaczenie współczynników

Po uzyskaniu m_i (czyli $S''(x_i)$), współczynniki wielomianu obliczamy:

$$a_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}, \quad b_i = \frac{m_i}{2}, \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(2m_i + m_{i+1})}{6}, \quad d_i = y_i$$

Różnice względem funkcji sklejaney 2. stopnia

- W przypadku splajnów trzeciego stopnia wymagamy ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w węzłach, co prowadzi do bardziej gładkiej interpolacji.
- Rozwiązanie opiera się na pełnym układzie równań liniowych, podczas gdy dla splajnów 2. stopnia wystarczała rekurencja.
- W spline'ach trzeciego stopnia brane są pod uwagę zarówno pierwsze, jak i drugie pochodne funkcji, co zwiększa dokładność dopasowania.

Porównanie warunków brzegowych: Free vs Clamped

Warunki brzegowe mają istotny wpływ na kształt funkcji sklejanego spline'u, zwłaszcza w okolicach końców przedziału.

- **Free boundary** zakłada, że druga pochodna (dla splajnu sześciennego) lub pierwsza pochodna (dla splajnu kwadratowego) jest równa zero na krańcach przedziału. Oznacza to, że funkcja przyjmuje tam „naturalne” wygładzenie — bez dodatkowych wymuszeń nachylenia czy krzywizny.
- **Clamped boundary** pozwala narzucić konkretne wartości pochodnych na końcach przedziału. Dzięki temu mamy większą kontrolę nad kształtem interpolowanej funkcji — możemy wymusić, by jej nachylenie zgadzało się z danymi analitycznymi lub przybliżeniami.
- Dla splajnów kwadratowych: warunek **Free** ustala $b_0 = 0$, natomiast **Clamped** ustala $b_0 = f'(x_0)$.
- Dla splajnów sześciennych: warunek **Free** ustala $m_0 = m_n = 0$, natomiast **Clamped** prowadzi do równań zależnych od $f'(x_0)$ i $f'(x_n)$, modyfikując pierwszy i ostatni wiersz macierzy układu.
- Warunek **Free** jest łatwiejszy w implementacji i wystarczający, jeśli nie dysponujemy informacją o pochodnej, natomiast **Clamped** pozwala osiągnąć znacznie większą dokładność przy znanych lub dobrze przybliżonych wartościach pochodnych.

5 Przebieg Doświadczenia

Wyznaczono wartości wielomianu interpolującego w $N = 500$ równomiernie rozłożonych punktach z przedziału $[-2\pi, 4\pi]$.

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości liczby węzłów n :

$$n \in \{3, 4, 5, 6, \dots, 99, 100\}$$

Liczba węzłów n wyznaczała punkty podziału przedziału interpolacji, co oznacza, że funkcja sklejana była budowana na $n - 1$ przedziałach. W przeprowadzonych analizach zastosowano wyłącznie równoodległe rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych. W przypadku funkcji sklejanych takie podejście jest uzasadnione, ponieważ lokalny charakter spline'ów umożliwia skuteczne odwzorowanie kształtu interpolowanej funkcji. W przeciwieństwie do interpolacji globalnej, w której preferowane jest rozmieszczenie węzłów zgodne z zerami wielomianów Czebyszewa w celu minimalizacji efektu Rungego, interpolacja funkcjami sklejanymi nie wykazuje takiej wrażliwości na rozmieszczenie punktów.

Dla każdego przypadku obliczono błąd maksymalny i błąd średni w $N=500$ równomiernie rozłożonych punktach z przedziału $[-2\pi, 4\pi]$.

5.1 Wzory na błąd maksymalny i błąd średni

Maksymalny błąd:

$$e_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (|f(x_i) - p(x_i)|)$$

Średni błąd:

$$e_{\text{avg}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2}}{N}$$

Gdzie:

$f(x_i)$ – wartość funkcji w punkcie x_i ; $p(x_i)$ – wartość wielomianu interpolującego w punkcie x_i

6 Wyniki doświadczenia

Poniżej, w tabelach **1** i **2**, zestawiono wyniki obliczeń błędów interpolacji funkcjami sklejanymi drugiego oraz trzeciego stopnia, uwzględniając oba rozważane typy warunków brzegowych: **Free Boundary** oraz **Clamped Boundary**.

W dalszej części dokumentu przedstawiono wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi (spline'ami) 2. i 3. stopnia. Na wykresach **2a-3c** umieszczono porównania błędów maksymalnych oraz średnich dla różnych wartości liczby węzłów n , osobno dla każdej z wersji warunków brzegowych: **Free Boundary** oraz **Clamped Boundary**.

Na kolejnych rysunkach **4a-12** zaprezentowano przykładowe wykresy funkcji interpolujących (spline'ów) dla różnych kombinacji liczby węzłów, stopnia wielomianu oraz typu warunków brzegowych. Na każdej ilustracji naniesiono również węzły interpolacyjne. Wykresy te umożliwiają ocenę lokalnej dokładności odwzorowania funkcji oraz wpływu doboru warunków brzegowych.

Tabela 1: Porównanie błędów interpolacji spline 2. stopnia dla warunków brzegowych:
Free Boundary i Clamped Boundary

n	e_{\max} (Free)	e_{avg} (Free)	e_{\max} (Clamped)	e_{avg} (Clamped)
3	2.2827e+01	3.896503e-01	2.4758e+01	4.046284e-01
4	1.6160e+01	3.117393e-01	1.9638e+01	3.493813e-01
5	3.5620e+01	6.386828e-01	4.2572e+01	7.940036e-01
6	3.9654e+01	6.131685e-01	4.2280e+01	6.515858e-01
7	3.4092e+01	5.888759e-01	3.3236e+01	5.657393e-01
8	3.2383e+01	6.279388e-01	3.1971e+01	6.167577e-01
9	2.2245e+01	4.265835e-01	2.1978e+01	4.198110e-01
10	1.3447e+01	2.297776e-01	1.3236e+01	2.263348e-01
11	1.7934e+01	3.331429e-01	1.7739e+01	3.303435e-01
12	1.9833e+01	3.640417e-01	2.0023e+01	3.688826e-01
13	5.3028e+01	9.233539e-01	5.3219e+01	9.284532e-01
14	1.2528e+01	2.459206e-01	1.2719e+01	2.501873e-01
15	1.3724e+01	2.284579e-01	1.3534e+01	2.246603e-01
16	1.0403e+01	2.058951e-01	1.0214e+01	2.016545e-01
17	1.3761e+01	2.796462e-01	1.3575e+01	2.748814e-01
18	2.4469e+01	4.875642e-01	2.4286e+01	4.827698e-01
19	1.0356e+00	1.222472e-02	1.2145e+00	1.654180e-02
20	1.9917e+01	3.988734e-01	2.0092e+01	4.035308e-01
21	9.3091e+00	1.888807e-01	9.4789e+00	1.933810e-01
22	5.8556e+00	1.139642e-01	6.0203e+00	1.178812e-01
23	6.1622e+00	1.059856e-01	6.3217e+00	1.094053e-01
24	4.2711e+00	8.783967e-02	4.1168e+00	8.453287e-02
25	1.5489e+01	2.605667e-01	1.5340e+01	2.566291e-01
26	3.6751e+00	7.661647e-02	3.5313e+00	7.323339e-02
27	3.4718e+00	6.381652e-02	3.6110e+00	6.648076e-02
28	2.5898e+00	4.534821e-02	2.7243e+00	4.820029e-02
29	2.7542e+00	5.428972e-02	2.8835e+00	5.771673e-02
30	4.1904e+00	8.156723e-02	4.3151e+00	8.495370e-02
31	9.4694e-01	1.342528e-02	1.0678e+00	1.575897e-02
32	3.6078e+00	6.243927e-02	3.4913e+00	5.953623e-02
33	1.7365e+00	2.905431e-02	1.6243e+00	2.655994e-02
34	1.0861e+00	1.844203e-02	9.8065e-01	1.645896e-02
35	8.6906e-01	1.490781e-02	7.6407e-01	1.325627e-02
36	6.2043e-01	1.107090e-02	6.4406e-01	1.268486e-02
37	1.7382e+00	2.631078e-02	1.8361e+00	2.883741e-02
38	7.1662e-01	9.288352e-03	8.1134e-01	1.124782e-02
39	5.6315e-01	8.412678e-03	5.2305e-01	7.379291e-03
40	5.0621e-01	6.456658e-03	4.1931e-01	5.552409e-03
41	4.4665e-01	6.580959e-03	3.6418e-01	5.084543e-03
42	4.5856e-01	7.739946e-03	3.7969e-01	5.875877e-03
43	3.4046e-01	3.881479e-03	2.6013e-01	3.387456e-03
44	4.0604e-01	4.418591e-03	4.8299e-01	5.971197e-03
45	2.5600e-01	2.954987e-03	3.2820e-01	3.849322e-03
46	2.2158e-01	2.603793e-03	2.5891e-01	3.111445e-03
47	1.9552e-01	2.401238e-03	2.3086e-01	2.721053e-03
48	1.6663e-01	2.501926e-03	1.8856e-01	2.183966e-03
49	2.2038e-01	3.016365e-03	1.5838e-01	1.983107e-03
50	1.9359e-01	2.273044e-03	1.3571e-01	1.783961e-03

Tabela 1 – kontynuacja z poprzedniej strony

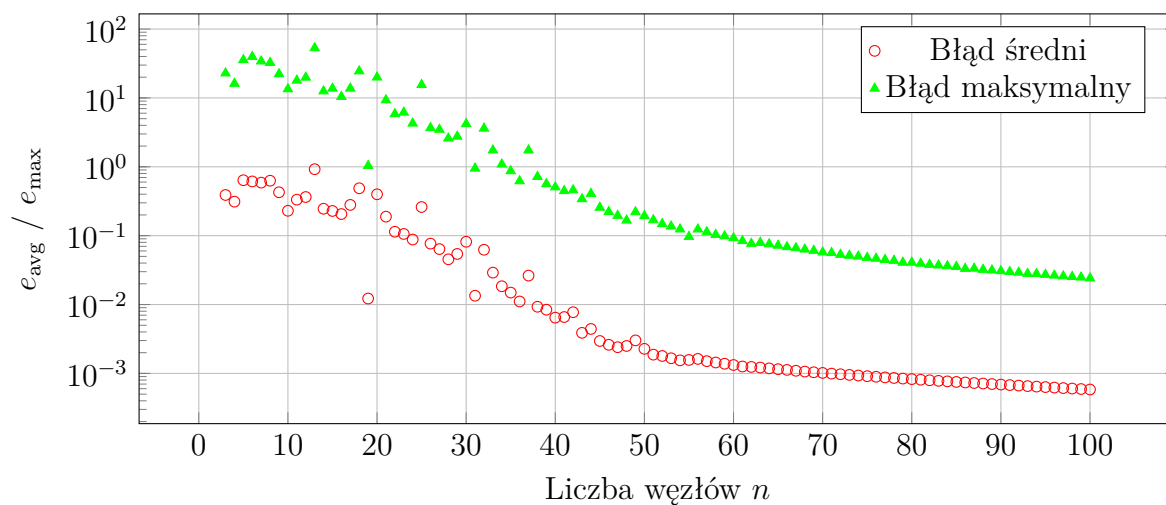
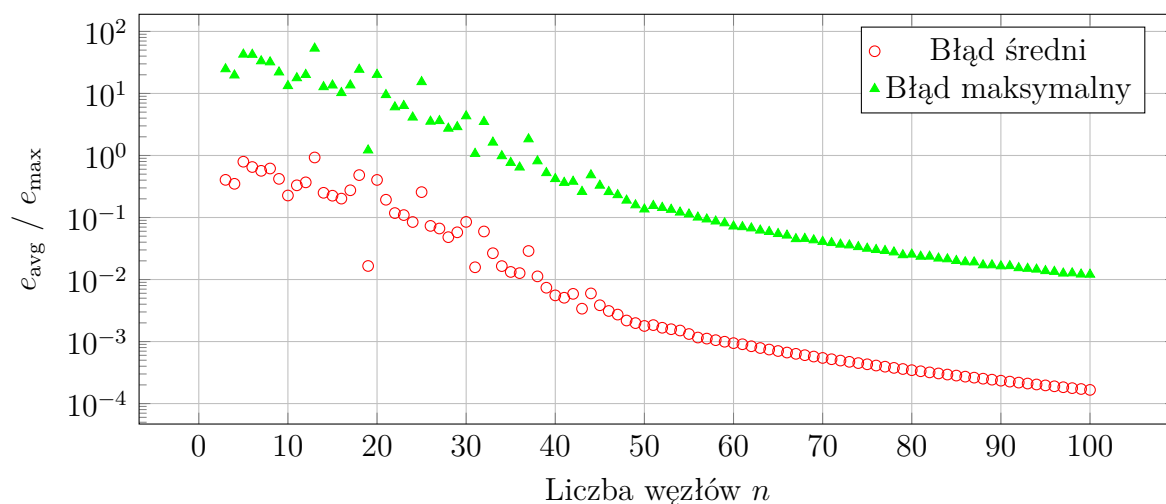
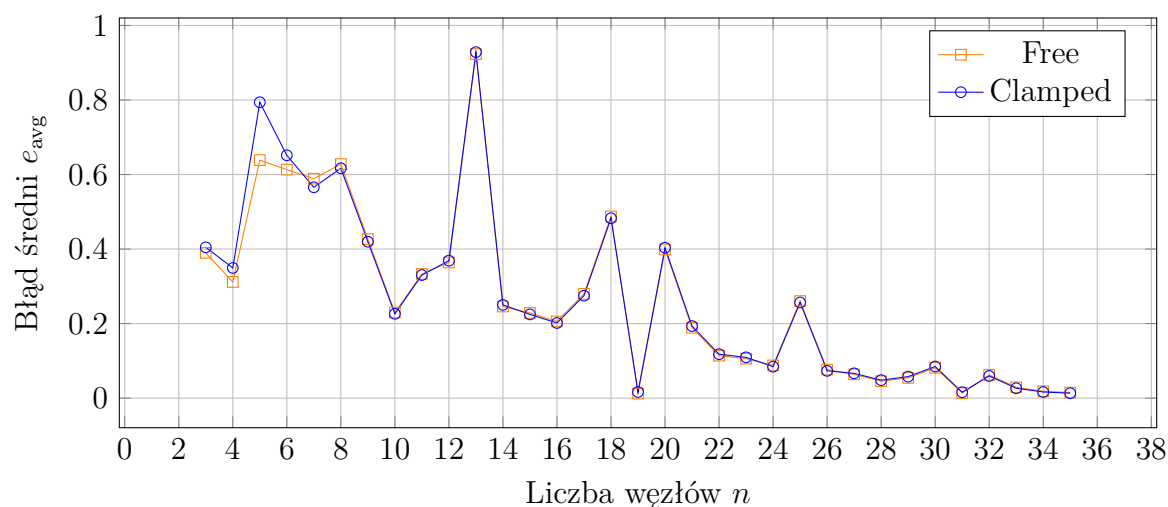
n	e_{\max} (Free)	e_{avg} (Free)	e_{\max} (Clamped)	e_{avg} (Clamped)
51	1.6859e-01	1.872558e-03	1.5453e-01	1.841410e-03
52	1.4828e-01	1.790216e-03	1.4377e-01	1.668717e-03
53	1.3657e-01	1.659756e-03	1.3404e-01	1.581229e-03
54	1.2395e-01	1.547745e-03	1.2098e-01	1.506200e-03
55	9.6485e-02	1.567766e-03	1.1258e-01	1.322345e-03
56	1.2379e-01	1.624063e-03	1.0046e-01	1.160744e-03
57	1.1291e-01	1.505914e-03	9.3698e-02	1.115625e-03
58	1.0324e-01	1.439852e-03	8.6808e-02	1.052297e-03
59	9.8490e-02	1.381966e-03	8.1230e-02	9.933576e-04
60	9.2639e-02	1.324115e-03	7.2102e-02	9.428075e-04
61	8.3886e-02	1.259940e-03	7.0353e-02	9.047488e-04
62	7.6681e-02	1.241653e-03	6.7201e-02	8.396024e-04
63	7.9184e-02	1.215558e-03	6.1984e-02	7.865460e-04
64	7.5312e-02	1.182718e-03	5.8806e-02	7.431779e-04
65	7.1911e-02	1.151061e-03	5.4507e-02	7.036323e-04
66	6.8468e-02	1.124348e-03	5.1480e-02	6.648695e-04
67	6.6140e-02	1.091864e-03	4.5108e-02	6.336823e-04
68	6.3200e-02	1.063460e-03	4.5479e-02	6.030009e-04
69	6.0577e-02	1.038833e-03	4.3173e-02	5.730685e-04
70	5.7323e-02	1.016602e-03	4.0707e-02	5.441812e-04
71	5.6200e-02	9.929296e-04	3.8999e-02	5.187630e-04
72	5.3042e-02	9.725542e-04	3.6776e-02	4.935663e-04
73	5.1402e-02	9.512324e-04	3.5723e-02	4.710854e-04
74	4.9999e-02	9.316887e-04	3.3543e-02	4.494374e-04
75	4.7918e-02	9.113526e-04	3.1621e-02	4.300439e-04
76	4.6534e-02	8.937388e-04	3.0127e-02	4.105456e-04
77	4.4637e-02	8.749817e-04	2.9036e-02	3.933805e-04
78	4.3352e-02	8.583729e-04	2.7546e-02	3.762166e-04
79	4.0665e-02	8.411214e-04	2.4842e-02	3.608294e-04
80	4.0756e-02	8.256202e-04	2.5400e-02	3.455163e-04
81	3.9380e-02	8.094209e-04	2.3492e-02	3.318482e-04
82	3.7956e-02	7.948219e-04	2.3541e-02	3.181917e-04
83	3.7081e-02	7.796557e-04	2.1941e-02	3.059462e-04
84	3.6206e-02	7.658779e-04	2.1345e-02	2.937205e-04
85	3.5353e-02	7.516138e-04	2.0037e-02	2.827285e-04
86	3.3154e-02	7.386045e-04	1.9128e-02	2.717318e-04
87	3.3394e-02	7.251527e-04	1.9011e-02	2.618362e-04
88	3.2080e-02	7.128473e-04	1.7092e-02	2.519100e-04
89	3.1433e-02	7.002873e-04	1.7079e-02	2.428707e-04
90	3.0689e-02	6.885125e-04	1.6441e-02	2.339792e-04
91	2.9816e-02	6.764576e-04	1.6544e-02	2.259079e-04
92	2.9184e-02	6.653432e-04	1.5351e-02	2.177971e-04
93	2.8053e-02	6.539701e-04	1.5001e-02	2.104294e-04
94	2.7966e-02	6.432448e-04	1.4552e-02	2.031611e-04
95	2.7154e-02	6.326044e-04	1.3764e-02	1.963534e-04
96	2.6483e-02	6.226434e-04	1.3364e-02	1.899526e-04
97	2.5782e-02	6.122726e-04	1.2566e-02	1.835212e-04
98	2.5286e-02	6.026860e-04	1.2665e-02	1.773831e-04
99	2.4801e-02	5.929001e-04	1.2110e-02	1.717366e-04
100	2.4108e-02	5.837629e-04	1.2052e-02	1.661833e-04

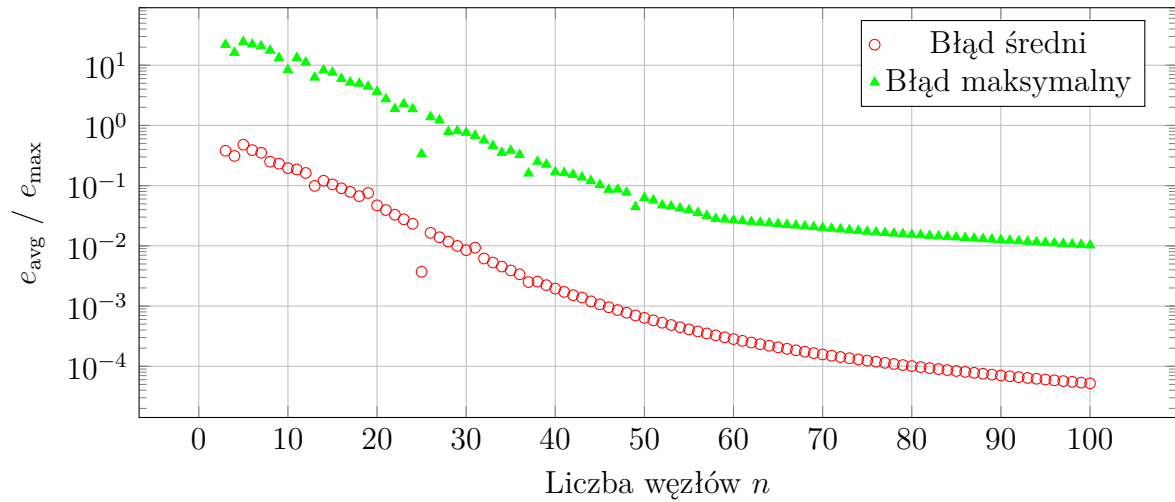
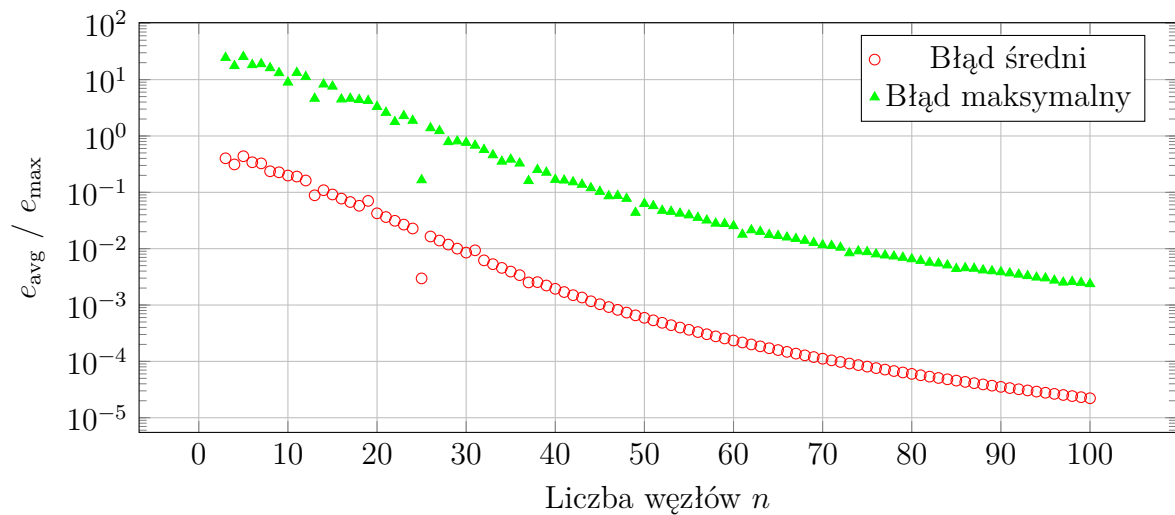
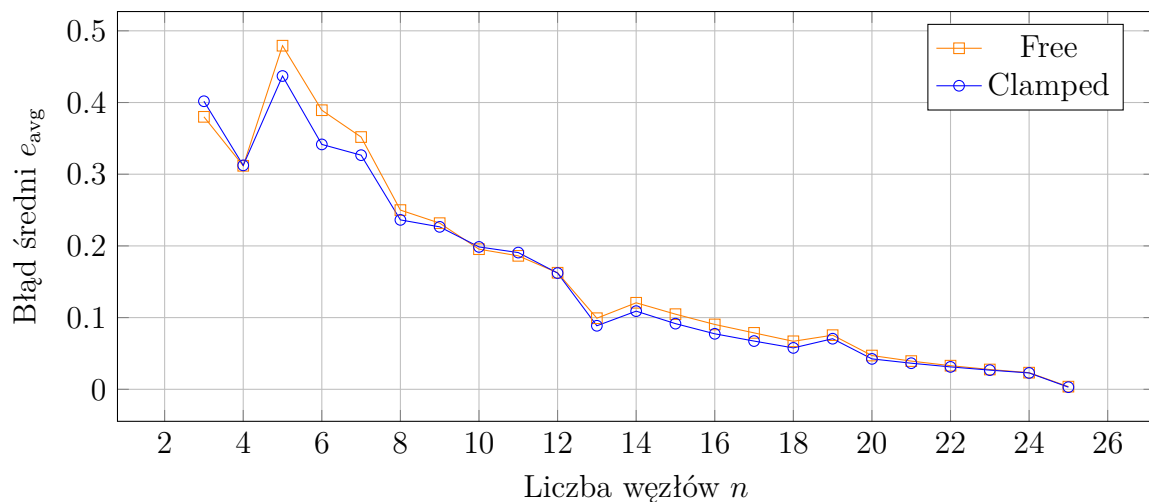
Tabela 2: Porównanie błędów interpolacji spline 3. stopnia dla warunków brzegowych:
Free Boundary i Clamped Boundary

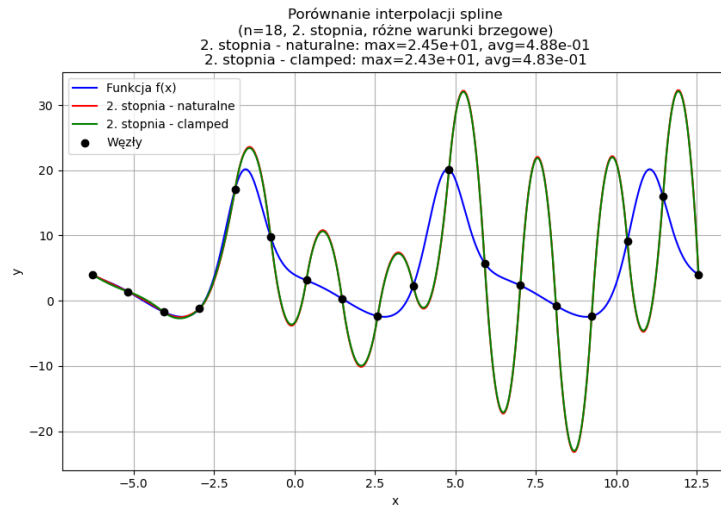
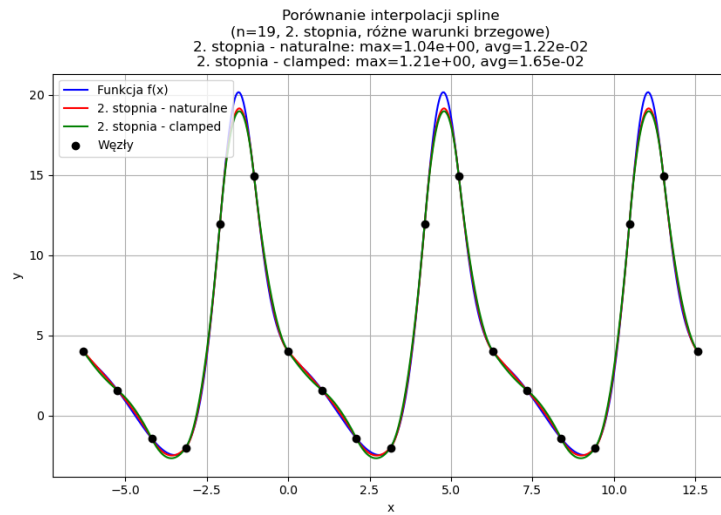
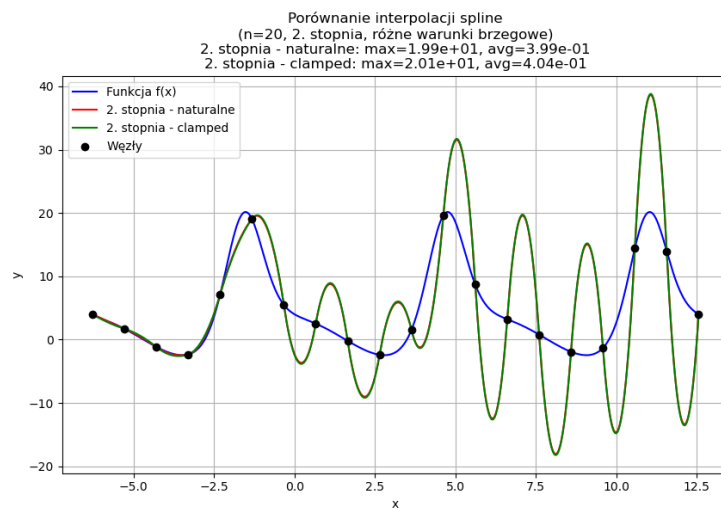
n	e_{\max} (Free)	e_{avg} (Free)	e_{\max} (Clamped)	e_{avg} (Clamped)
3	2.1907e+01	3.800504e-01	2.4488e+01	4.017767e-01
4	1.6160e+01	3.117393e-01	1.7524e+01	3.123369e-01
3	2.1907e+01	3.800504e-01	2.4488e+01	4.017767e-01
4	1.6160e+01	3.117393e-01	1.7524e+01	3.123369e-01
5	2.4420e+01	4.792514e-01	2.5427e+01	4.369735e-01
6	2.2222e+01	3.892843e-01	1.8230e+01	3.415748e-01
7	2.0731e+01	3.518476e-01	1.8949e+01	3.265601e-01
8	1.7543e+01	2.499800e-01	1.6094e+01	2.362853e-01
9	1.3250e+01	2.317305e-01	1.3138e+01	2.265653e-01
10	8.3432e+00	1.954377e-01	8.9293e+00	1.985967e-01
11	1.3251e+01	1.861676e-01	1.3235e+01	1.907200e-01
12	1.1180e+01	1.625608e-01	1.1196e+01	1.621036e-01
13	6.2738e+00	9.915483e-02	4.6164e+00	8.859670e-02
14	8.2613e+00	1.206698e-01	8.2561e+00	1.090102e-01
15	7.5792e+00	1.048035e-01	7.5738e+00	9.158726e-02
16	5.9812e+00	9.045404e-02	4.4784e+00	7.741987e-02
17	5.1828e+00	7.869632e-02	4.6182e+00	6.727970e-02
18	4.9700e+00	6.695635e-02	4.3915e+00	5.772988e-02
19	4.4394e+00	7.550585e-02	4.2061e+00	7.054988e-02
20	3.6366e+00	4.708713e-02	3.3021e+00	4.240528e-02
21	2.7422e+00	3.935035e-02	2.5965e+00	3.639398e-02
22	1.8841e+00	3.294218e-02	1.7806e+00	3.123346e-02
23	2.2704e+00	2.762716e-02	2.2703e+00	2.674202e-02
24	1.8764e+00	2.320817e-02	1.8764e+00	2.281696e-02
25	3.3510e-01	3.705729e-03	1.6538e-01	2.966329e-03
26	1.3828e+00	1.645723e-02	1.3828e+00	1.645223e-02
27	1.2304e+00	1.390018e-02	1.2304e+00	1.393869e-02
28	7.8389e-01	1.176649e-02	7.8428e-01	1.181222e-02
29	8.0810e-01	9.982598e-03	8.0810e-01	1.002299e-02
30	7.5924e-01	8.486721e-03	7.6220e-01	8.520345e-03
31	6.7824e-01	9.331793e-03	6.7824e-01	9.354266e-03
32	5.6708e-01	6.173551e-03	5.6964e-01	6.199906e-03
33	4.5787e-01	5.284732e-03	4.5849e-01	5.309159e-03
34	3.5314e-01	4.536843e-03	3.5314e-01	4.558817e-03
35	3.8339e-01	3.907137e-03	3.8339e-01	3.925466e-03
36	3.2688e-01	3.376333e-03	3.2688e-01	3.389728e-03
37	1.5999e-01	2.506740e-03	1.5977e-01	2.515436e-03
38	2.5134e-01	2.548708e-03	2.5134e-01	2.549641e-03
39	2.2471e-01	2.226717e-03	2.2471e-01	2.221018e-03
40	1.6866e-01	1.952623e-03	1.6782e-01	1.940547e-03
41	1.6394e-01	1.718570e-03	1.6311e-01	1.700622e-03
42	1.5252e-01	1.518070e-03	1.5170e-01	1.494895e-03
43	1.3729e-01	1.386201e-03	1.3729e-01	1.359319e-03
44	1.2008e-01	1.197228e-03	1.1930e-01	1.165670e-03
45	1.0278e-01	1.068786e-03	1.0278e-01	1.034002e-03
46	8.5938e-02	9.573874e-04	8.5842e-02	9.199298e-04
47	8.6903e-02	8.604890e-04	8.6903e-02	8.208284e-04
48	7.7338e-02	7.759603e-04	7.7338e-02	7.344906e-04
49	4.4361e-02	6.991137e-04	4.3627e-02	6.559701e-04
50	6.2779e-02	6.371532e-04	6.2779e-02	5.929821e-04

Tabela 2 – kontynuacja z poprzedniej strony

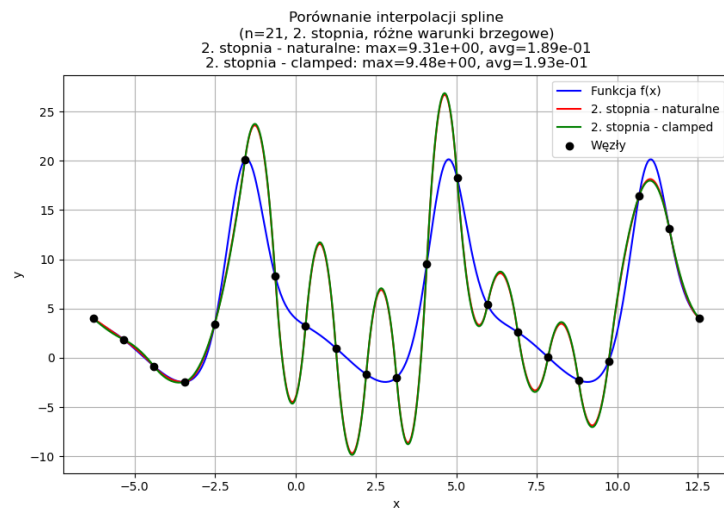
n	e_{\max} (Free)	e_{avg} (Free)	e_{\max} (Clamped)	e_{avg} (Clamped)
51	5.7305e-02	5.800937e-04	5.7305e-02	5.349237e-04
52	4.7345e-02	5.297621e-04	4.7345e-02	4.837737e-04
53	4.5396e-02	4.852423e-04	4.5396e-02	4.385866e-04
54	4.1989e-02	4.457543e-04	4.2157e-02	3.985598e-04
55	3.9318e-02	4.107768e-04	3.9318e-02	3.631733e-04
56	3.5352e-02	3.793093e-04	3.5500e-02	3.313568e-04
57	3.1682e-02	3.512960e-04	3.1831e-02	3.031009e-04
58	2.8307e-02	3.261748e-04	2.8031e-02	2.778167e-04
59	2.7619e-02	3.035864e-04	2.7619e-02	2.551379e-04
60	2.6723e-02	2.832210e-04	2.5320e-02	2.347495e-04
61	2.5965e-02	2.648068e-04	1.7850e-02	2.163729e-04
62	2.5228e-02	2.481284e-04	2.1369e-02	1.997918e-04
63	2.4513e-02	2.329703e-04	2.0036e-02	1.847829e-04
64	2.3817e-02	2.191642e-04	1.7608e-02	1.711749e-04
65	2.3142e-02	2.065589e-04	1.6909e-02	1.588131e-04
66	2.2485e-02	1.950230e-04	1.5897e-02	1.475623e-04
67	2.1847e-02	1.844418e-04	1.4994e-02	1.373041e-04
68	2.1226e-02	1.747152e-04	1.3898e-02	1.279354e-04
69	2.0623e-02	1.657529e-04	1.2692e-02	1.193613e-04
70	2.0037e-02	1.574800e-04	1.1624e-02	1.115050e-04
71	1.9467e-02	1.498271e-04	1.1312e-02	1.042937e-04
72	1.8912e-02	1.427342e-04	1.0501e-02	9.766449e-05
73	1.8373e-02	1.361477e-04	8.3565e-03	9.156130e-05
74	1.7848e-02	1.300213e-04	9.0382e-03	8.593607e-05
75	1.7338e-02	1.243097e-04	8.7521e-03	8.073936e-05
76	1.6842e-02	1.189788e-04	7.9846e-03	7.593673e-05
77	1.6442e-02	1.139940e-04	7.6267e-03	7.149104e-05
78	1.6098e-02	1.093256e-04	7.3169e-03	6.737062e-05
79	1.5762e-02	1.049469e-04	6.9495e-03	6.354704e-05
80	1.5434e-02	1.008341e-04	6.5429e-03	5.999472e-05
81	1.5114e-02	9.696544e-05	6.1127e-03	5.669067e-05
82	1.4801e-02	9.332155e-05	5.6776e-03	5.361413e-05
83	1.4496e-02	8.988498e-05	5.4911e-03	5.074637e-05
84	1.4198e-02	8.663984e-05	5.0871e-03	4.807043e-05
85	1.3906e-02	8.357166e-05	4.3924e-03	4.557095e-05
86	1.3622e-02	8.066731e-05	4.5424e-03	4.323402e-05
87	1.3344e-02	7.791490e-05	4.4367e-03	4.104697e-05
88	1.3072e-02	7.530369e-05	4.1450e-03	3.899830e-05
89	1.2806e-02	7.282394e-05	4.0088e-03	3.707756e-05
90	1.2547e-02	7.046659e-05	3.8489e-03	3.527507e-05
91	1.2293e-02	6.822348e-05	3.6738e-03	3.358222e-05
92	1.2044e-02	6.608711e-05	3.4856e-03	3.199099e-05
93	1.1801e-02	6.405067e-05	3.2863e-03	3.049407e-05
94	1.1564e-02	6.210784e-05	3.0941e-03	2.908477e-05
95	1.1331e-02	6.025277e-05	2.9929e-03	2.775697e-05
96	1.1104e-02	5.848033e-05	2.7343e-03	2.650562e-05
97	1.0881e-02	5.678473e-05	2.5212e-03	2.532356e-05
98	1.0664e-02	5.516236e-05	2.5898e-03	2.420806e-05
99	1.0451e-02	5.360867e-05	2.4932e-03	2.315404e-05
100	1.0242e-02	5.211967e-05	2.3669e-03	2.215738e-05

Rysunek 2: Błąd interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla różnych warunków brzegowych**(a)** Błąd interpolacji spline 2. stopnia dla **Free Boundary** na wykresie w skali logarytmicznej**(b)** Błąd interpolacji spline 2. stopnia dla **Clamped Boundary** na wykresie w skali logarytmicznej**(c)** Porównanie błędu średniego interpolacji spline 2. stopnia dla warunków **Free** i **Clamped** ograniczony do $n = 35$

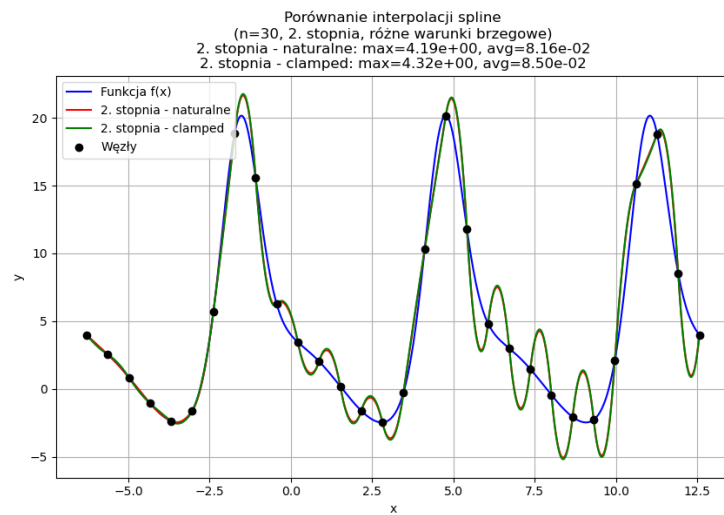
Rysunek 3: Błąd interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla różnych warunków brzegowych**(a)** Błąd interpolacji spline 3. stopnia dla **Free Boundary** na wykresie w skali logarytmicznej**(b)** Błąd interpolacji spline 3. stopnia dla **Clamped Boundary** na wykresie w skali logarytmicznej**(c)** Porównanie błędu średniego interpolacji spline 3. stopnia dla warunków **Free** i **Clamped** ograniczony do $n = 25$

(a) $n = 18$ (b) $n = 19$ (c) $n = 20$

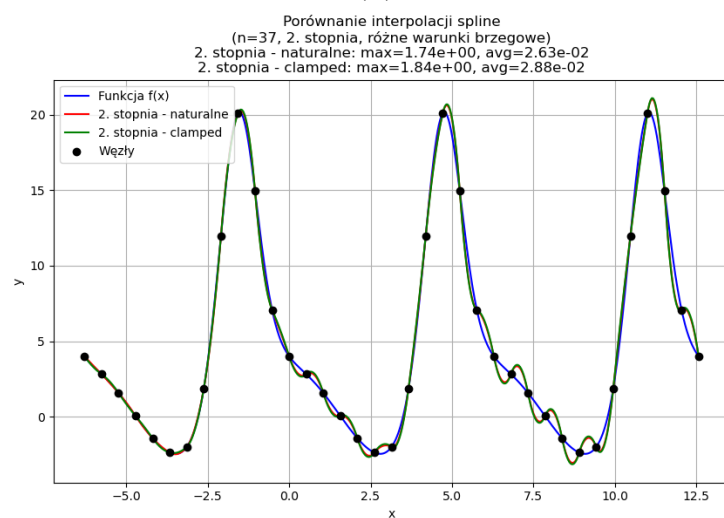
Rysunek 4: Wahanie się wartości błędów: maksymalnego i średniego, dla $n = 18, 19, 20$ spline 2. stopnia.



(a)

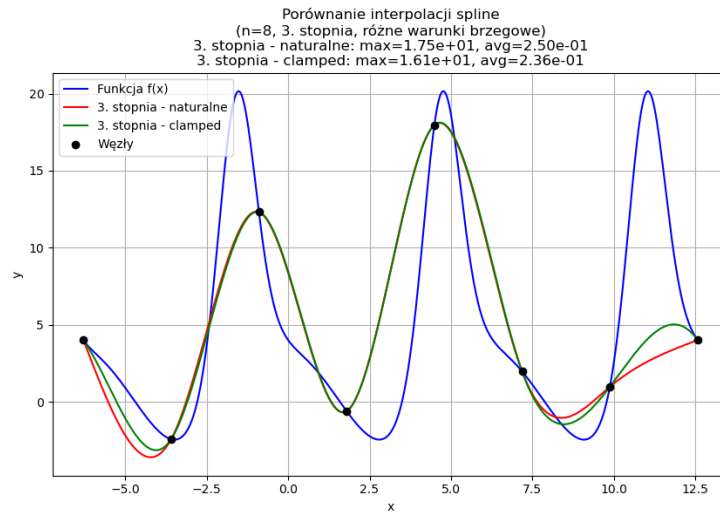


(b)

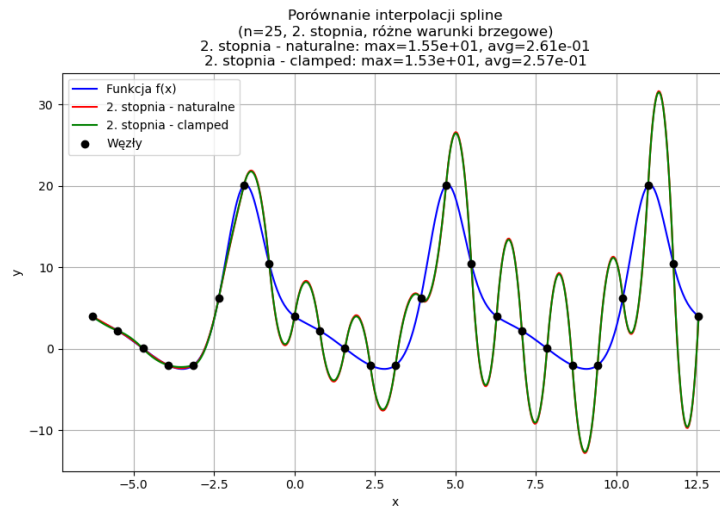


(c)

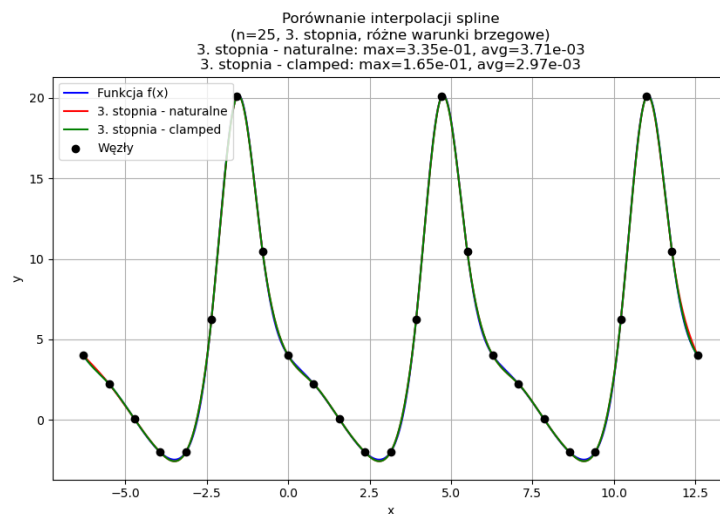
Rysunek 5: Zmniejszanie się oscylacji dla funkcji sklejanych 2. stopnia dla $n = 6, 11, 28$



Rysunek 6: Duża rozbieżność na krańcach przedziału w przypadku spline 3. stopnia dla $n = 8$

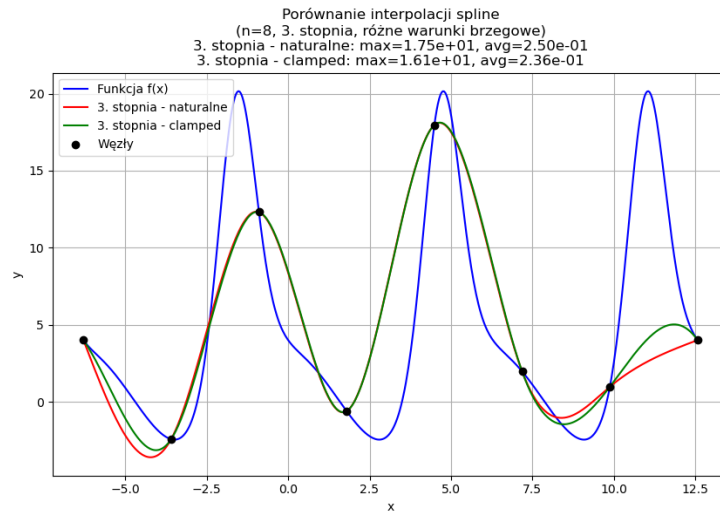
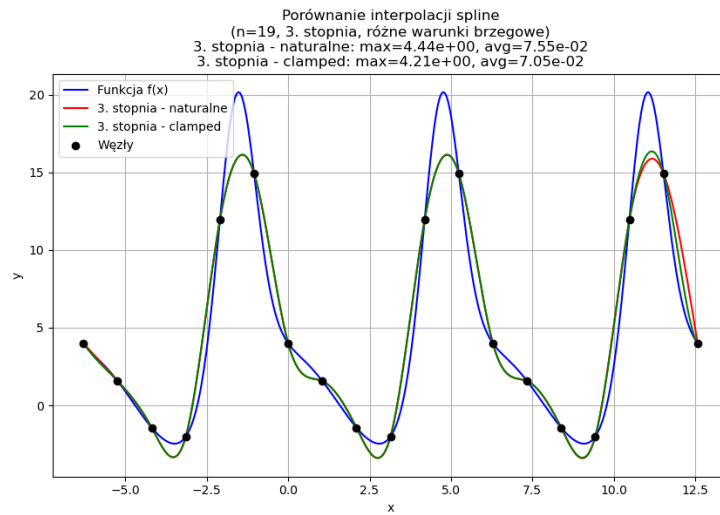
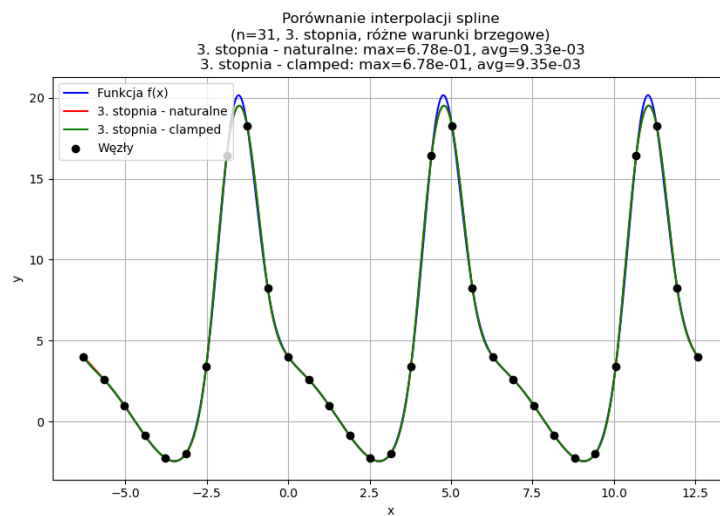


(a) Funkcja sklejana 2. stopnia dla $n = 25$ dla warunków **Free** i **Clamped**

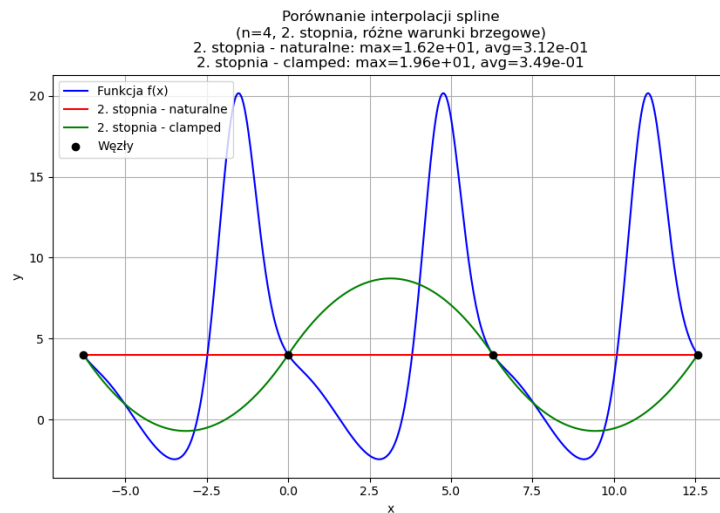


(b) Funkcja sklejana 3. stopnia dla $n = 25$ dla warunków **Free** i **Clamped**

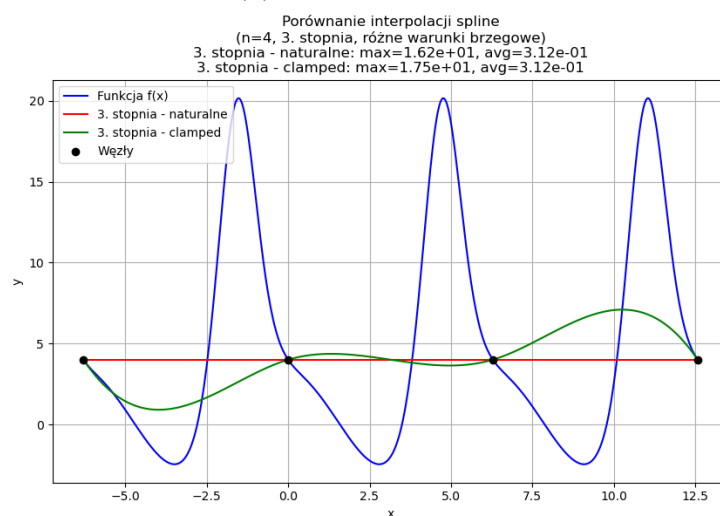
Rysunek 7: Porównanie wielomianów dla $n = 25$ dla funkcji sklejanych 2. i 3. stopnia

(a) $n = 8$ (b) $n = 19$ (c) $n = 31$

Rysunek 8: Zmniejszanie się różnic pomiędzy warunkami brzegowymi dla spline'ów 3. stopnia dla $n = 8, 19, 31$

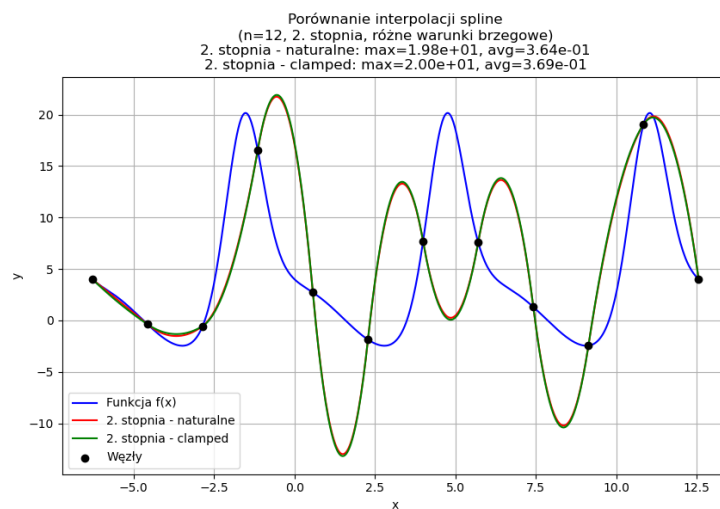


(a) Spline kwadratowy

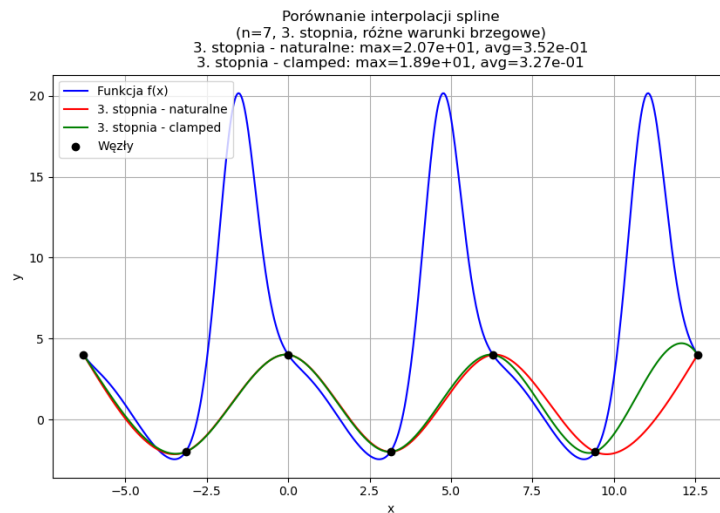
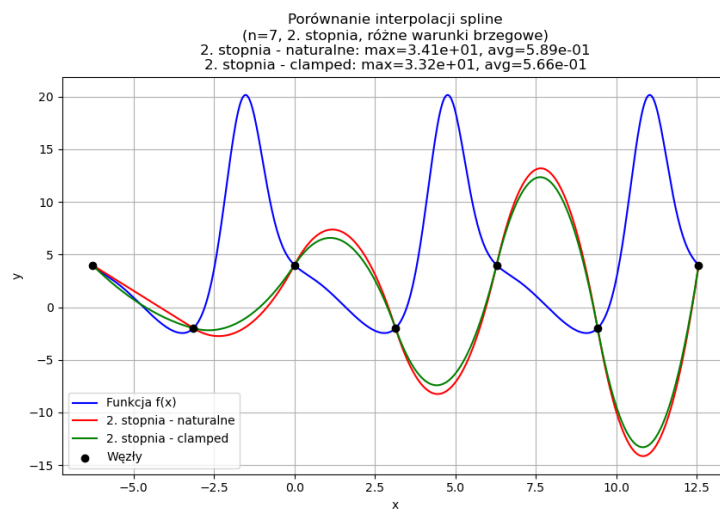


(b) Spline sześcienny

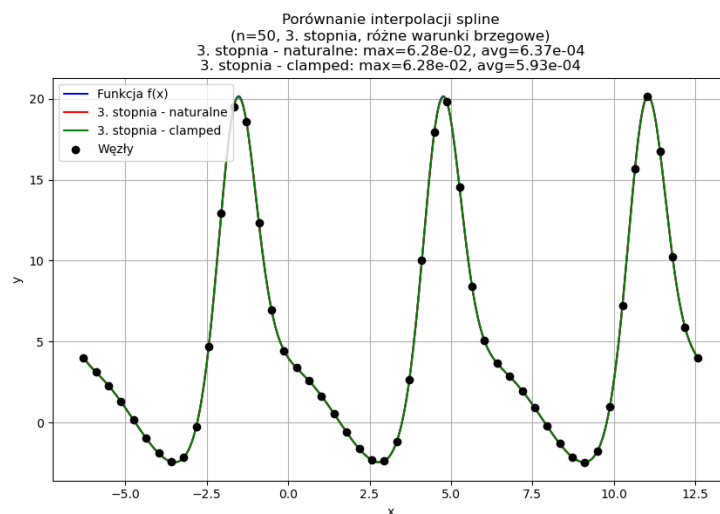
Rysunek 9: Dla funkcji sklejanej 2. i 3. stopnia, dla $n = 4$ wielomian stale równy 0 dla warunku **Free**, w porównaniu z funkcją uzyskaną warunkiem **Clamped**



Rysunek 10: Bardzo chaotyczne zachowanie wielomianu dla interpolacji spline 2. stopnia dla $n = 12$

(a) Spline sześcienny $n = 7$, bliskie okresowemu zachowanie funkcji(b) Spline kwadratowy $n = 7$, coraz większe odchylenia z każdym kolejnym przedziałem

Rysunek 11: Dla funkcji sklejanej 3. stopnia, dla $n = 7$ wielomian niemalże okresowy dla warunku **Free**, dla porównania z funkcją uzyskaną warunkiem **Clamped** oraz wielomiany uzyskane dla spline kwadratowego

**Rysunek 12:** Dobrze dopasowany wielomian dla $n = 50$

7 Opracowanie Danych

7.1 Funkcja stale równa $p(x) = 0$

Na rysunku **9a** oraz **9b** zaobserwowano, że przy małej liczbie węzłów ($n = 4$) i warunku brzegowym **Free**, funkcja sklejana drugiego oraz trzeciego stopnia przybliża się do funkcji stałej $p(x) = 0$. Wynika to z symetrii oraz lokalnie zbliżonych wartości funkcji $f(x)$ w wybranych węzłach. Dopiero zastosowanie warunku **Clamped**, pozwala na „wymuszenie” poprawnego kształtu funkcji interpolującej.

7.2 Lokalne zaburzenia i oscylacje

W okolicach niskich wartości n , szczególnie między $n = 6$ a $n = 20$, obserwujemy znaczne oscylacje błędów oraz nieliniowe zachowanie funkcji przy interpolacji spline’ami 2. stopnia (rysunki **5a**, **5b**, **5c**). Oscylacje te są wynikiem niedostatecznej liczby punktów kontrolnych, co prowadzi do lokalnych anomalii — wyraźnie widoczne są np. w rysunkach **5a–5c** oraz **10** dla obu warunków. Dodatkowo, zauważalne jest zmniejszanie się oscylacji funkcji sklepanych w miarę wzrostu liczby przedziałów — tendencja ta jest dobrze widoczna w rysunkach **5a–5c**.

Warto również zwrócić uwagę na ciekawą anomalię widoczną na rysunkach **4a–4c** — mianowicie, dla $n = 19$ (rys. **4b**) obserwujemy chwilowe, bardzo dobre dopasowanie funkcji interpolującej, co kontrastuje z wyraźnie większymi błędami dla $n = 18$ i $n = 20$.

7.3 Efekt brzegowy i warunki **Clamped** vs **Free**

Na rysunku **6** widoczny jest wyraźny wpływ warunków brzegowych na zachowanie funkcji interpolującej na krańcach przedziału. Zastosowanie warunku **Free** skutkuje „wygładzeniem” funkcji poprzez wymuszenie zerowej drugiej pochodnej na końcach przedziału (dla spline’ów 3. stopnia), co często prowadzi do znacznych odchyłeń od rzeczywistego przebiegu funkcji w tych obszarach. Dodatkowo, na rysunkach **8a–8c** można zauważyć stopniowe zmniejszanie się różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy użyciu warunków **Clamped** i **Free** dla spline’ów 3. stopnia. Wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacyjnych, wpływ warunków brzegowych staje się coraz mniej istotny, a oba warianty dają zbliżone rezultaty.

7.4 Stabilność i dopasowanie

Dla większych wartości n (np. $n > 40$), szczególnie przy spline’ach 3. stopnia, zauważalna jest bardzo dobra zgodność funkcji interpolującej z funkcją $f(x)$. Na rysunku **12** funkcja dla $n = 50$ niemal idealnie odwzorowuje przebieg oryginalnej funkcji. Dodatkowo, rysunki **7a** i **7b** dla $n = 25$ przedstawiają wyraźny kontrast między zachowaniem funkcji sklepanych 2. i 3. stopnia. Dla 3. stopnia obserwujemy bardzo dobre dopasowanie do funkcji $f(x)$. Natomiast dla 2. stopnia widoczne są znaczne oscylacje, szczególnie w środkowej części przedziału, co może prowadzić do większych błędów interpolacji.

7.5 Zachowanie funkcji a rodzaj splajnu

Porównanie wykresów na rysunkach **11a** i **11b** pokazuje różnice w zachowaniu interpolacji między spline’ami 2. i 3. stopnia: spline trzeciego stopnia daje bardziej płynny, niemal okresowy przebieg, podczas gdy spline drugiego stopnia wykazuje coraz większe odchylenia i zrywy w kolejnych przedziałach dla takich samych węzłów.

8 Podsumowanie Zagadnienia

Analiza interpolacji funkcji rzeczywistej przy użyciu funkcji sklepanych 2. i 3. stopnia pozwoliła na wyciągnięcie kilku istotnych wniosków dotyczących dokładności, stabilności oraz wpływu warunków brzegowych.

Interpolacja spline'ami 2. stopnia

- Metoda wrażliwa na liczbę węzłów — przy małych wartościach n pojawiają się znaczne oscylacje i niestabilności funkcji interpolujących.
- Funkcje mogą przyjmować postać niemal zerową ($p(x) = 0$) przy symetrycznych i zbliżonych danych (rys. 9).
- Stabilizacja błędów następuje dopiero przy większej liczbie węzłów, zwykle od $n > 30$, a dla warunku **Clamped** już od $n = 40$ obserwujemy błędy rzędu 10^{-3} .
- Efekt warunków brzegowych (**Free** vs **Clamped**) jest silnie widoczny, szczególnie dla mniejszych n (rys. 6, 7, 11).

Interpolacja spline'ami 3. stopnia

- Wyraźnie większa dokładność i stabilność, nawet przy niskich wartościach n .
- Różnice między **Clamped** a **Free** zanikają wraz ze wzrostem liczby węzłów (rys. 8), co czyni tę metodę odporniejszą na wybór warunku brzegowego.
- Przy $n = 100$ uzyskiwane są bardzo niskie błędy średnie — rzędu 10^{-5} — co stanowi znaczną poprawę względem spline'ów 2. stopnia.
- Metoda z warunkiem **Clamped** okazała się najbardziej precyzyjnym i stabilnym rozwiązaniem w badanym zakresie.

Podsumowując, zastosowanie spline'ów 3. stopnia, zwłaszcza z warunkami **Clamped**, zapewnia najlepszą jakość interpolacji. Spline'y 2. stopnia mogą być użyteczne, jednak wymagają większej liczby węzłów i starannego doboru warunków brzegowych, by uniknąć niestabilności i lokalnych zaburzeń.