



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Zagadnienie Hermite'a
Zadanie 2b

Maciej Kmąk
Informatyka WI AGH, II rok

1 Treść Zadania

Dla funkcji $f(x)$ widocznej na rysunku 1.

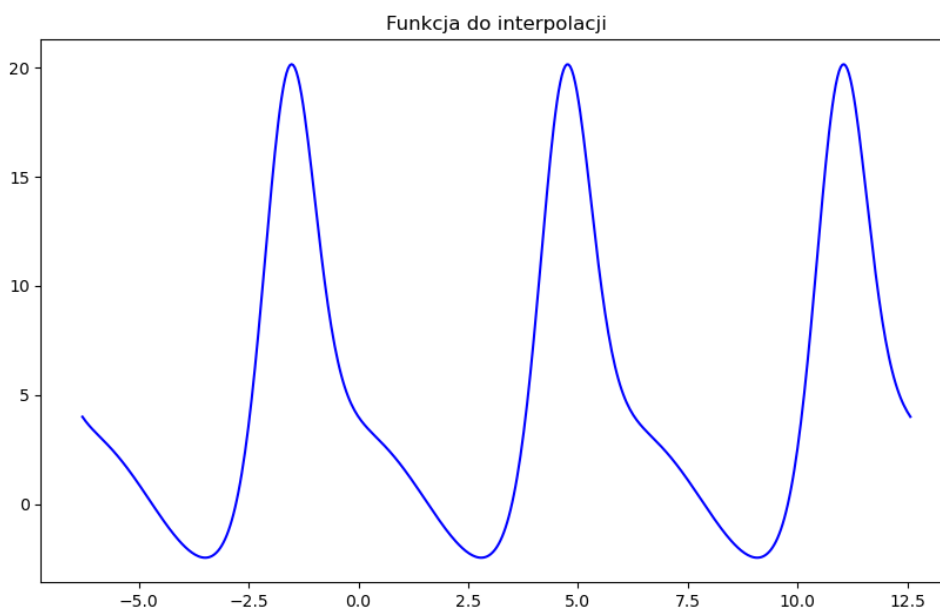
$$f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x) \quad \text{na przedziale } [-2\pi, 4\pi]$$

wyznacz dla zagadnienia Hermite’a wielomian interpolujący. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów. Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów:

- równoodległe
- zera wielomianu Czebyszewa

Dla wyznaczonych wielomianów:

- Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.
- Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.
- Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge’go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.



Rysunek 1: Funkcja $f(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze osobistym o specyfikacji:

- System Operacyjny: Windows 11 Pro
- Procesor: 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1235U 1.3 GHz
- Język: Python 3.12

3 Przebieg Doświadczenia

Wyznaczono wartości wielomianu interpolującego w $N = 500$ równomiernie rozłożonych punktach z przedziału $[-2\pi, 4\pi]$.

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości liczby węzłów n :

$$n \in \{3, 4, 5, 6, \dots, 49, 50\}$$

Dla każdej liczby węzłów wykonano interpolację Hermite’a, wykorzystując wzór Newtona oraz zastosowano dwa sposoby rozmieszczenia węzłów: równomierny oraz zgodny z zerami wielomianu Czebyszewa.

Dla każdego przypadku obliczono błąd maksymalny i błąd średni w $N=500$ równomiernie rozłożonych punktach z przedziału $[-2\pi, 4\pi]$.

3.1 Wzory na błąd maksymalny i błąd średni

Maksymalny błąd:

$$e_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (|f(x_i) - p(x_i)|)$$

Średni błąd:

$$e_{\text{avg}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2}}{N}$$

Gdzie:

$f(x_i)$ – wartość funkcji w punkcie x_i ; $p(x_i)$ – wartość wielomianu interpolującego w punkcie x_i

4 Wyniki doświadczenia

Poniżej w tabelach 1 i 2 przedstawiono wyniki obliczeń błędów dla różnych sposobów rozmieszczenia węzłów.

Na następnych stronach na wykresach 2a i 2b przedstawiono wykresy porównania błędów maksymalnych i średnich dla wybranego rodzaju rozmieszczenia węzłów. Przygotowano także wykresy – 3a i 3b ograniczone do $n = 25$. Pozwalają na lepszą obserwację błędów wynikającą z efektu Rungego i błędów arytmetyki liczb zmiennoprzecinkowych.

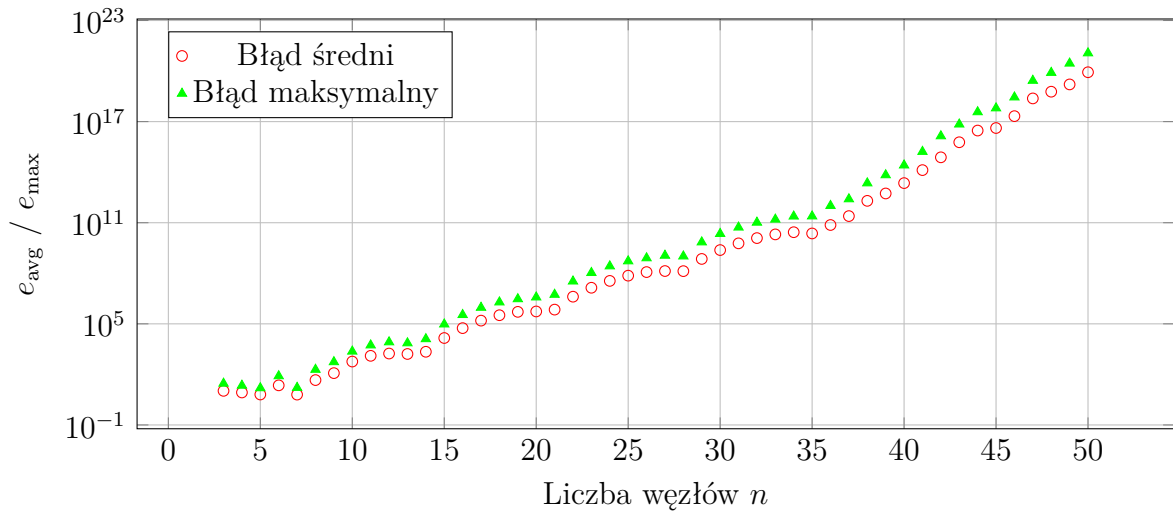
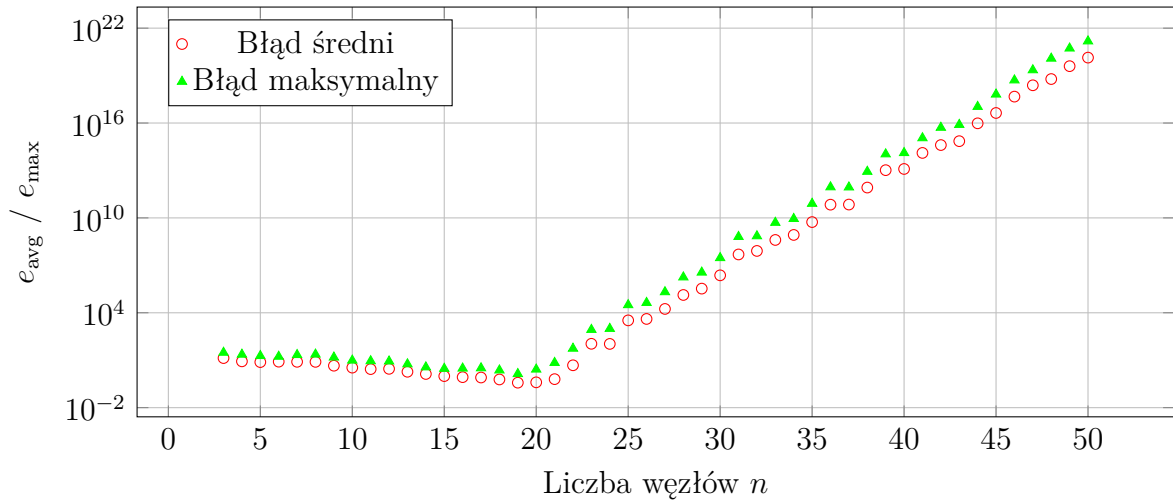
Na rysunkach 4a – 9 przedstawiono wybrane wykresy wielomianów interpolowanych wraz z zaznaczonymi węzłami.

Tabela 1: Tabela wartości błędów dla interpolacji Hermite’a z węzłami równomiernymi

n	e_{\max}	e_{avg}
3	28.85204	10.56944
4	21.89162	8.46054
5	15.48693	6.413069
6	79.90326	22.39861
7	16.24899	6.321256
8	192.8464	45.97154
9	544.7366	118.8487
10	2312.914	578.9348
11	5382.852	1264.311
12	8218.87	1729.789
13	7186.53	1627.078
14	12616.9	2202.159
15	94318.02	14406.08
16	341740.0	55676.75
17	920969.5	155139.8
18	1916024.0	324835.3
19	2970402.0	514847.0
20	3779749.0	543128.2
21	5439797.0	698968.4
22	33334990.0	4087071.0
23	106560200.0	13866120.0
24	264356800.0	35336610.0
25	525635400.0	72352930.0
26	798035900.0	117906300.0
27	1131246000.0	135898200.0
28	1023553000.0	134086700.0
29	6994494000.0	710581500.0
30	22136400000.0	2384335000.0
31	53067670000.0	5975122000.0
32	103316700000.0	12241150000.0
33	157116100000.0	20301530000.0
34	239268200000.0	27391980000.0
35	242954800000.0	23099490000.0
36	1015271000000.0	73332860000.0
37	2528148000000.0	247763100000.0
38	22254640000000.0	1989627000000.0
39	67496620000000.0	5446766000000.0
40	256875500000000.0	22467970000000.0
41	1639232000000000.0	132564300000000.0
42	1.383448e+16	760966100000000.0
43	6.908126e+16	5961389000000000.0
44	3.705939e+17	2.952425e+16
45	6.292775e+17	4.166973e+16
46	2.789033e+18	2.113363e+17
47	2.714774e+19	2.378662e+18
48	7.982341e+19	5.964506e+18
49	2.849644e+20	1.611755e+19
50	1.157134e+21	8.515042e+19

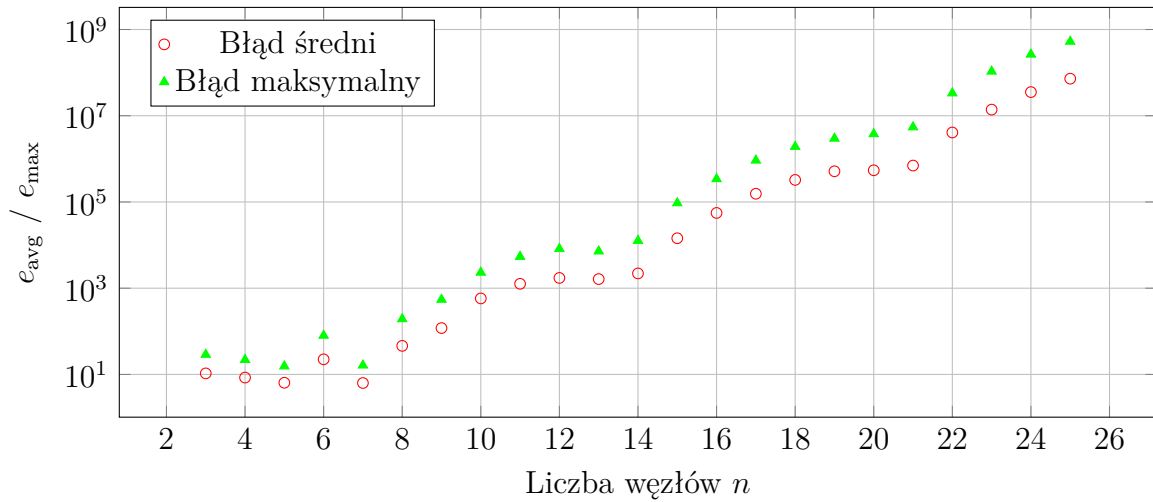
Tabela 2: Tabela wartości błędów dla interpolacji Hermite’a z węzłami Czebyszewa

n	e_{\max}	e_{avg}
3	30.42252	13.66006
4	22.98044	8.483339
5	18.86694	7.606524
6	17.03004	8.102802
7	21.78739	7.950123
8	23.36295	7.896287
9	15.19489	4.501073
10	9.72115	3.399672
11	8.888931	2.744508
12	8.546502	2.858595
13	5.664915	1.864891
14	3.628152	1.348219
15	2.936271	0.9881942
16	3.052019	0.850489
17	3.176504	0.8069854
18	2.31754	0.6069626
19	1.368014	0.3803096
20	2.634045	0.3993102
21	6.912625	0.6361925
22	54.92461	4.785671
23	848.5963	109.4798
24	984.257	107.596
25	31166.95	3310.931
26	42952.92	4080.734
27	205411.0	17503.6
28	1768690.0	133714.1
29	3571133.0	337421.7
30	29414530.0	2333537.0
31	640153000.0	48823320.0
32	708219300.0	81532790.0
33	5016702000.0	403051400.0
34	8794343000.0	837643800.0
35	79943150000.0	5443765000.0
36	884302200000.0	68676380000.0
37	866836100000.0	69854340000.0
38	8447069000000.0	829873400000.0
39	107473700000000.0	10442460000000.0
40	129096500000000.0	12437670000000.0
41	1121381000000000.0	128605200000000.0
42	5137198000000000.0	403966900000000.0
43	7772956000000000.0	7117869000000000.0
44	1.072288e+17	9569356000000000.0
45	6.478972e+17	4.317468e+16
46	5.085139e+18	4.675169e+17
47	2.231442e+19	2.432805e+18
48	1.207746e+20	6.035584e+18
49	5.280303e+20	3.938448e+19
50	1.491005e+21	1.369317e+20

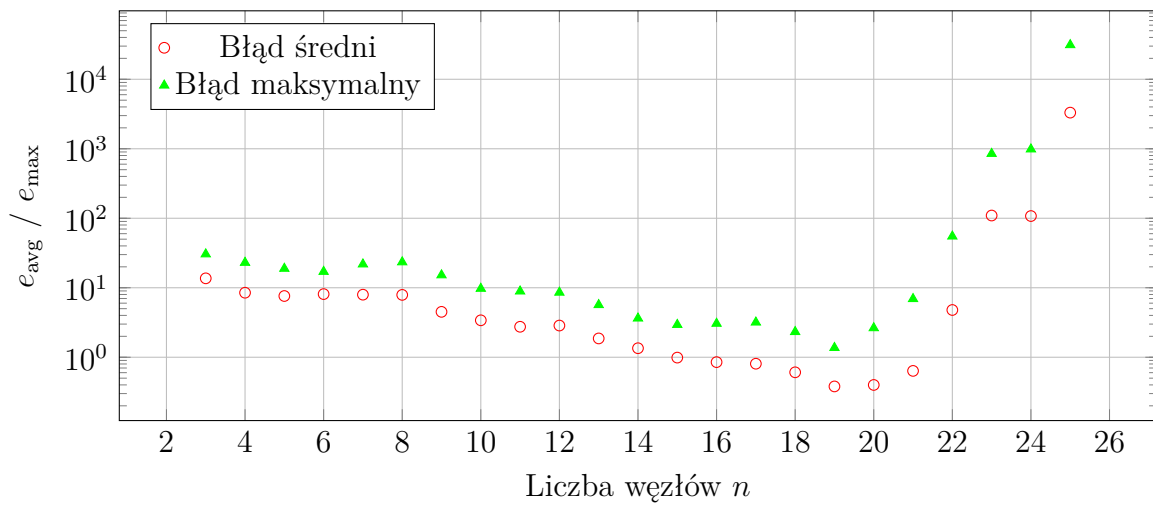
(a) Błąd interpolacji Hermite'a dla **węzłów równomiernych**(b) Błąd interpolacji Hermite'a dla **węzłów Czebyszewa****Rysunek 2:** Porównanie błędu *średniego* (e_{avg}) i *maksymalnego* (e_{max}) w skali logarytmicznej dla różnych metod rozmieszczenia węzłów dla interpolacji **Hermite'a**

Na wykresie 2a dotyczącym równomiernego rozmieszczenia węzłów widzimy, że zarówno błąd maksymalny, jak i średni rosną wraz ze wzrostem n . Efekt Rungego pojawia się już przy stosunkowo niewielkiej liczbie węzłów (około $n = 6$), objawiając się wzrastającą oscylacyjnością wielomianu interpolacyjnego na brzegach przedziału. Dla $n \geq 34$ coraz większą rolę odgrywają też błędy arytmetyki komputerowej, które powodują niestabilność obliczeń i dalszy gwałtowny wzrost błędu.

Na wykresie 2b widzimy, że błąd interpolacji znacznie się zmniejsza, osiągając minimum w okolicach $n = 19$. W tym punkcie wielomian jest najlepiej dopasowany do funkcji, a oscylacje są silnie zredukowane. Zauważmy, że już od $n = 20$ zaczynają być widoczne błędy arytmetyki liczb zmiennoprzecinkowych, które przy wysokich stopniach wielomianu kumulują się i prowadzą do gwałtownego wzrostu błędu, wraz ze wzrostem liczby n .



(a) Błąd interpolacji Hermite'a dla węzłów równomiernych



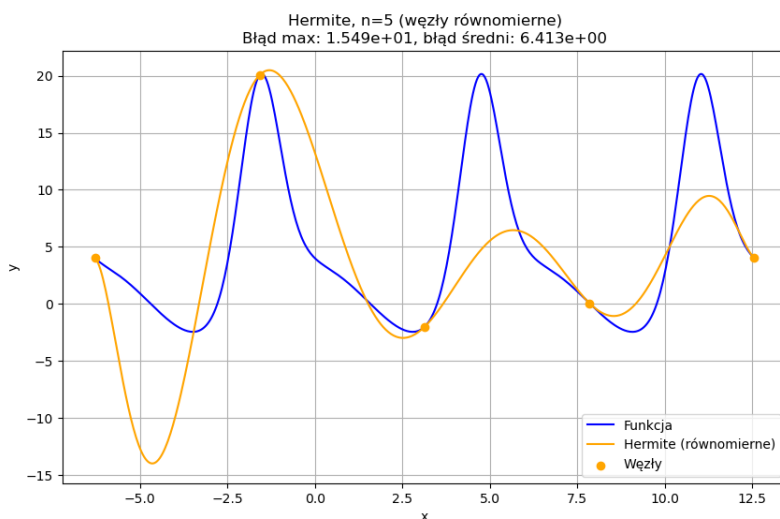
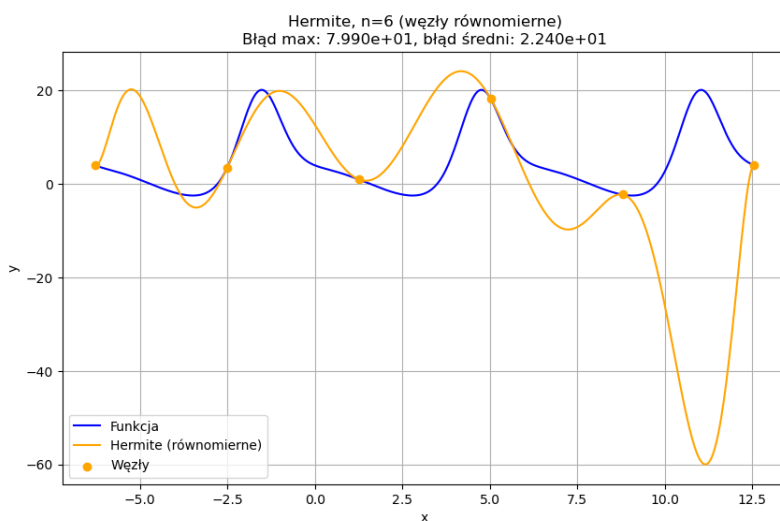
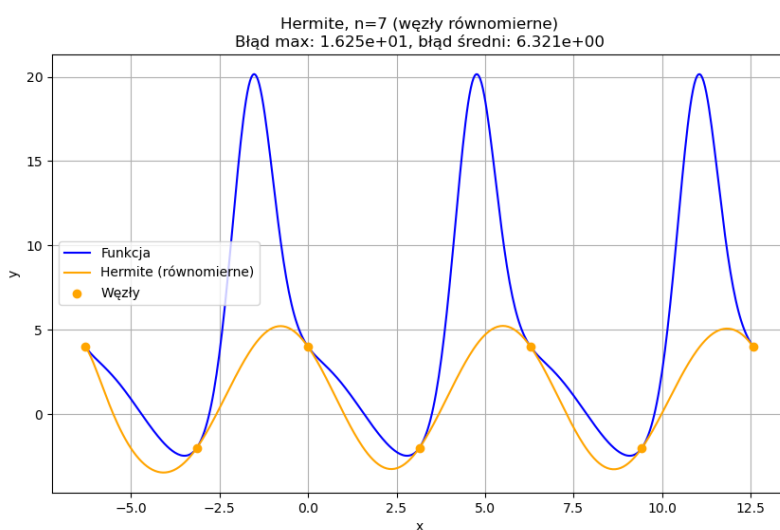
(b) Błąd interpolacji Hermite'a dla węzłów Czebyszewa

Rysunek 3: Porównanie błędu *średniego* (e_{avg}) i *maksymalnego* (e_{max}) w skali logarytmicznej dla różnych metod rozmieszczenia węzłów dla interpolacji **Hermite'a** (do $n = 25$).

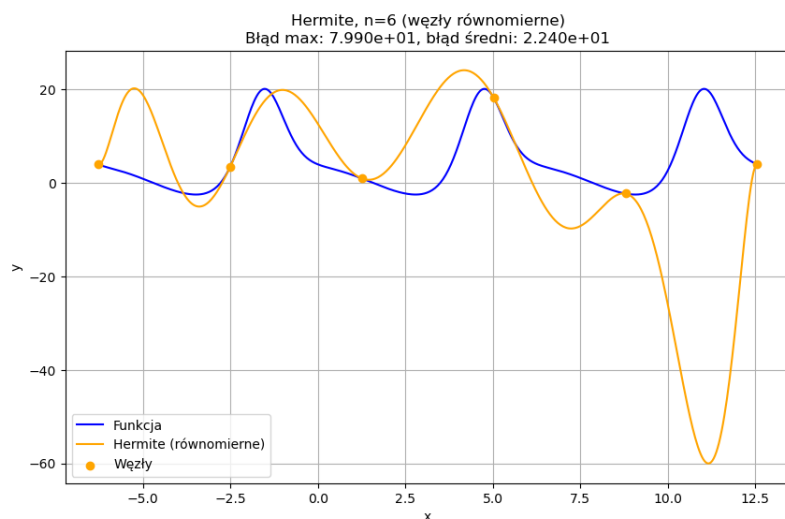
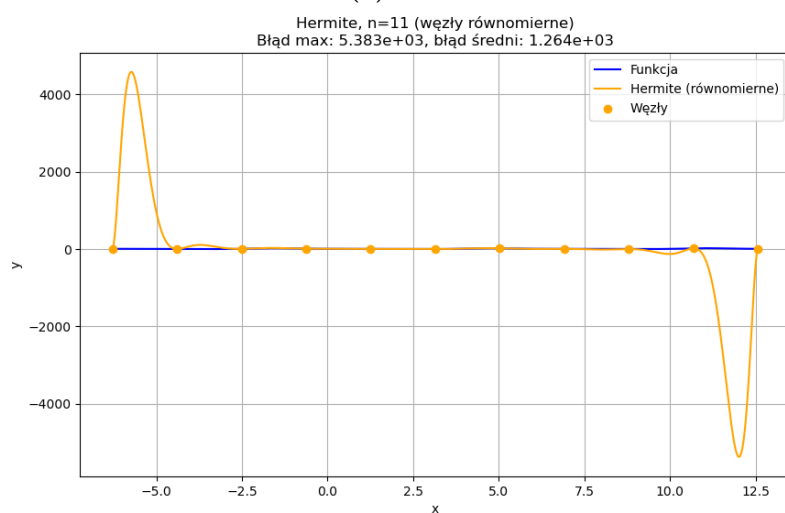
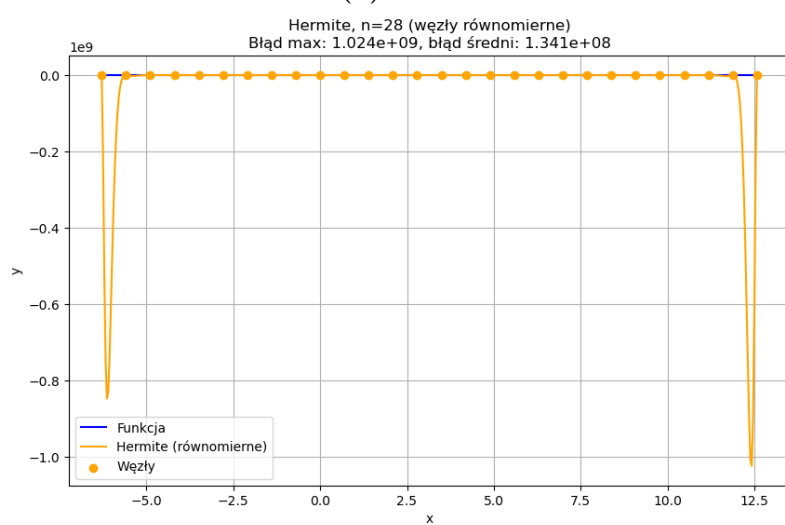
Obcięcie zakresu liczby węzłów do $n = 25$ pozwoliło na bardziej szczegółowe uwidocznienie zachowania interpolowanej funkcji. Dzięki temu można lepiej zauważyć, że:

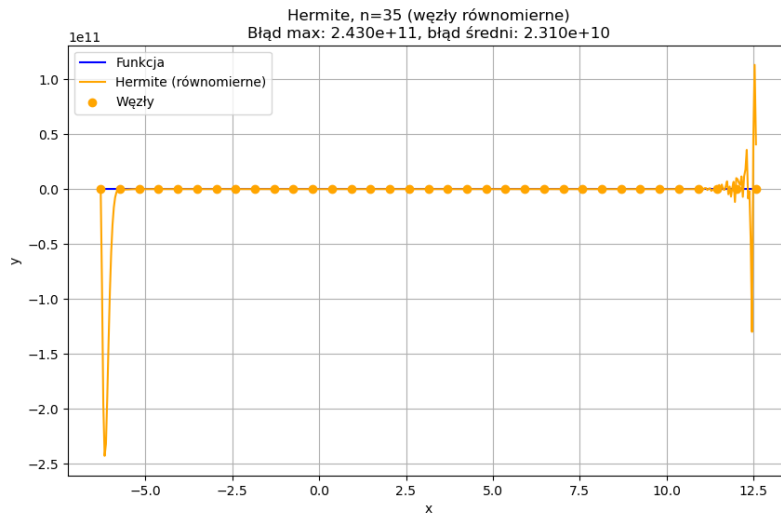
- W przypadku węzłów równomiernych efekt Rungego jest wyraźnie widoczny – błędy (zarówno średni, jak i maksymalny) rosną wraz ze wzrostem liczby węzłów, co jest szczególnie zauważalne przy $n \geq 14$.
- Dla węzłów Czebyszewa obserwujemy znaczące zmniejszenie błędu interpolacji, osiągające minimum w okolicach $n = 19$. Jednak już od $n = 20$ zaczynają dominować błędy arytmetyki komputerowej, co skutkuje nagłym wzrostem błędów.

Podsumowując, ograniczenie zakresu do $n = 25$ umożliwiło lepszą analizę zachowania funkcji interpolacyjnej oraz wyraźne uwidocznienie wpływu ograniczeń precyzji obliczeń zmiennoprzecinkowych na stabilność interpolacji Hermite'a, zwłaszcza dla węzłów Czebyszewa.

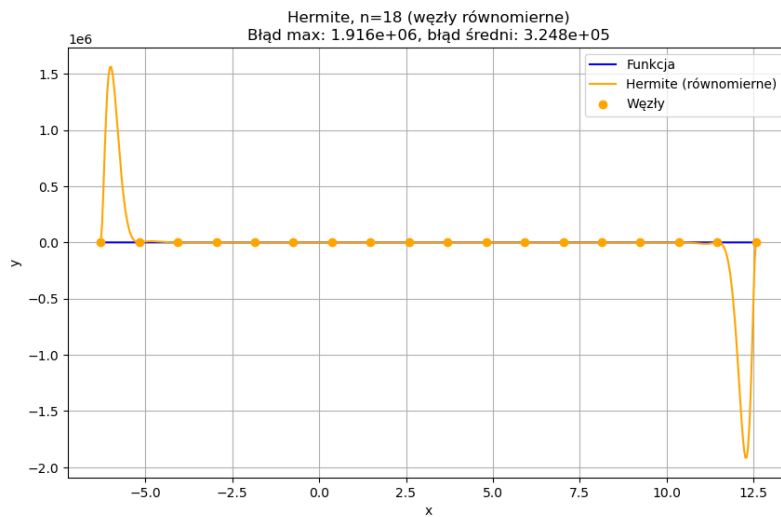
(a) Wykres funkcji dla $n = 5$ – złe dopasowanie wielomianu.(b) Wykres funkcji dla $n = 6$ – Uwidacznianie się efektu Rungego.(c) Wykres funkcji dla $n = 7$ – Nietypowe zachowanie funkcji spowodowane okresowością funkcji.

Rysunek 4: Wahanie się wartości błędów: maksymalnego i średniego, dla $n = 5, 6, 7$ dla węzłów równoodległych.

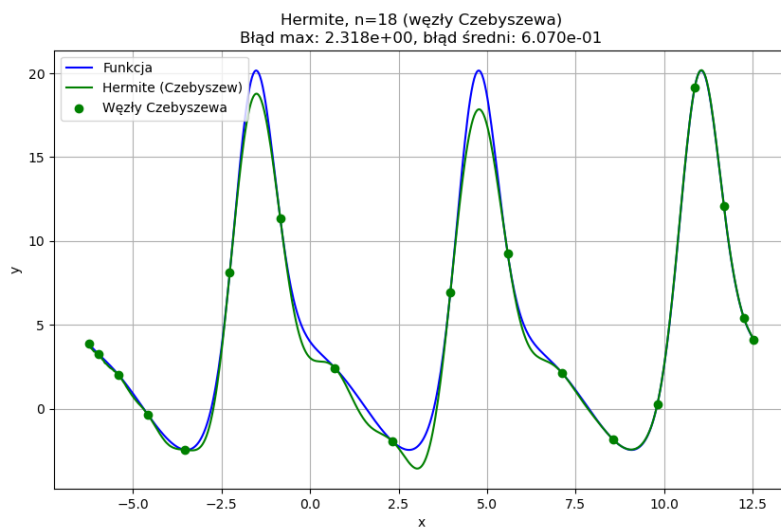
(a) $n = 6$ (b) $n = 11$ (c) $n = 28$ **Rysunek 5:** Uwidacznianie się efektu Rungego dla $n = 6, 11, 28$



Rysunek 6: Niewidoczny efekt Rungego, chaotyczne zachowanie funkcji na prawym krańcu przedziału, $n = 35$

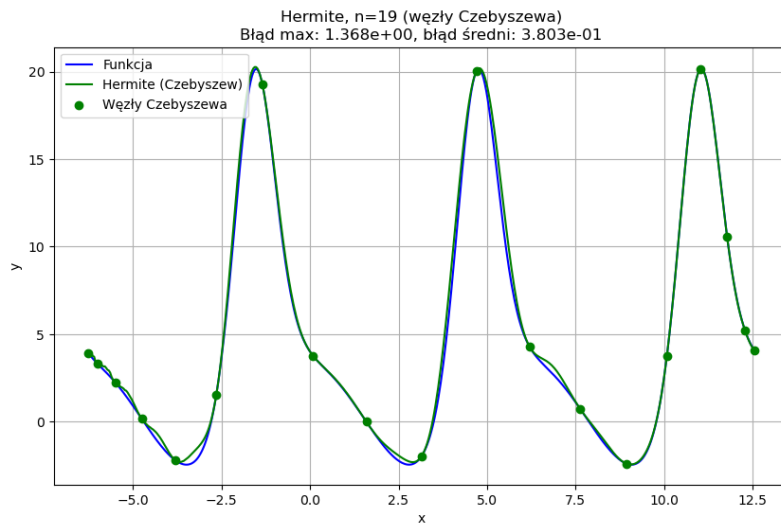
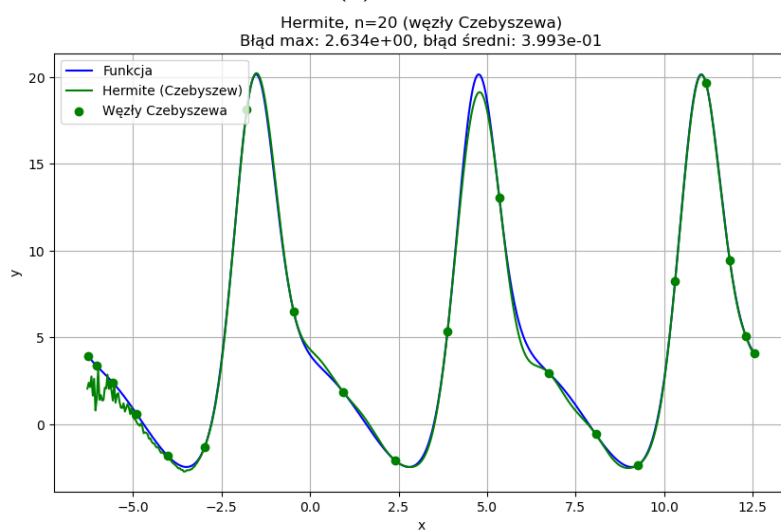


(a) Węzły równomierne

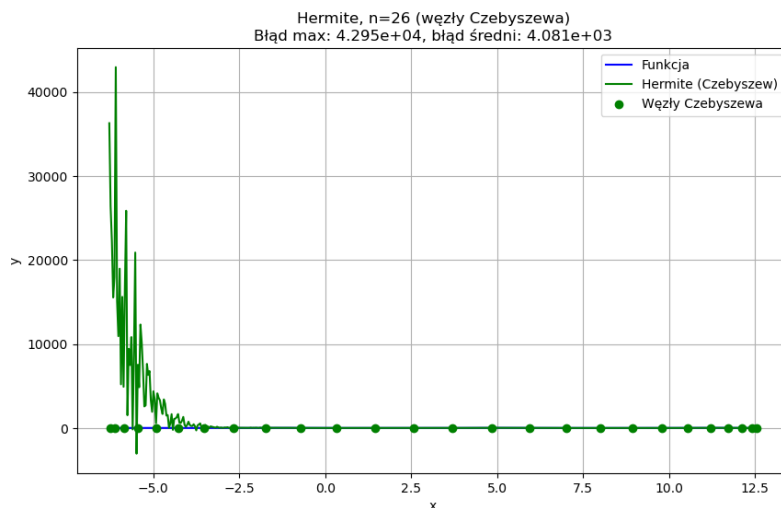


(b) Węzły Czebyszewa

Rysunek 7: Porównanie wielomianów dla $n = 18$ w zależności od rozmieszczenia węzłów

(a) $n = 19$ (b) $n = 20$

Rysunek 8: Wielomian najlepiej dopasowany (zarówno pod względem błędu maksymalnego jak i średniego) przy użyciu węzłów Czebyszewa dla $n = 19$ oraz wielomian dla $n = 20$, dla którego na lewym krańcu przedziału widoczne są już błędy arytmetyki



Rysunek 9: Niestabilny wielomian dla $n = 26$ – węzły Czebyszewa

5 Opracowanie Danych

5.1 Wahanie się wartości błędów dla $n = 5, 6, 7$

Na rysunkach 4a–4c możemy zaobserwować interesujące wahanie się wartości dla $n = 5, 6, 7$ widoczne na wykresach 2a i 3a. Dla $n = 5$ obserwujemy, że wielomian interpolacyjny jest słabo dopasowany do zadanej funkcji. Wynika to z niewystarczającej liczby węzłów. Dla $n = 6$ pojawia się pierwszy wyraźny efekt Rungego. Już przy tej liczbie węzłów oscylacje wielomianu, szczególnie na prawym brzegu przedziału, stają się zauważalne. Natomiast dla $n = 7$ kształt funkcji interpolującej nabiera bardzo interesującego charakteru. Ze względu na okresowość zadanej funkcji, trafiamy w punkty, gdzie wartości funkcji i jej pochodnej powtarzają się cyklicznie. W efekcie interpolacja oddaje funkcję okresową, która jednak różni się od badanej funkcji.

5.2 Efekt Rungego

Efekt Rungego, wyraźnie obserwowany na brzegach przedziału przy rosnącym stopniu wielomianu, pojawia się w badanym zagadnieniu Hermite’a już od $n = 6$ i staje się silny około $n = 11$ (rys. 5a–5c). Przypomnijmy, że przy liczbie węzłów n dla interpolacji Hermite’a wielomian ma stopień $(2n - 1)$, co dodatkowo sprzyja szybkiemu narastaniu oscylacji, jak i problemów numerycznych w miarę zwiększania liczby węzłów (rys. 6).

5.3 Rozmieszczenie węzłów

Na rysunku 7a ($n = 18$) widać już wyraźny wpływ efektu Rungego – wielomian Hermite’a zaczyna oscylować na krańcach przedziału, generując spory błąd przybliżenia. Dalsze zwiększanie liczby węzłów (jak w rys. 6, $n = 35$) uwidacznia ponadto rolę błędów arytmetyki liczb zmiennoprzecinkowych, które przy tak wysokim stopniu wielomianu mogą dominować nad błędami czysto interpolacyjnymi.

Z kolei na rysunku 7b (również $n = 18$) ukazano, że węzły Czebyszewa wyraźnie łagodzą efekt Rungego – oscylacje na brzegach nie występują. Dzięki temu wielomian Hermite’a daje tu zdecydowanie mniejszy błąd maksymalny i średni w porównaniu z węzłami równomiernymi.

5.4 Arytmetyka komputerowa

Interpolacja Hermite’a jest wrażliwa na błędy liczb zmiennoprzecinkowych, głównie dlatego, że stopień wielomianu $(2n - 1)$ bardzo szybko rośnie z n . Na rysunku 8a ($n = 19$) można dostrzec najlepsze uzyskane przybliżenie wielomianu, ale już na rysunkach 8b ($n = 20$) i 9 ($n = 26$) widać narastające rozbieżności wynikające z błędów obliczeń zmiennoprzecinkowych (m.in. odejmowania liczb bliskich sobie, zaokrągleń itp.).

6 Podsumowanie Zagadnienia

Zarówno węzły równmierne, jak i Czebyszewa przy dużym n mogą więc dawać rozbieżne wyniki z powodu ograniczonej precyzji obliczeń. Mimo to, w obecnym eksperymencie węzły Czebyszewa wypadają lepiej, ponieważ eliminują efekt Rungego, a dla umiarkowanego n niewidoczne są jeszcze błędy obliczeń na liczbach zmiennoprzecinkowych. Przy jeszcze większych n błędy arytmetyczne stają się jednak porównywalnie istotne, co przekłada się na gwałtowny wzrost błędu.