



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Aproksymacja trygonometryczna
Zadanie 4b

Maciej Kmąk
Informatyka WI AGH, II rok

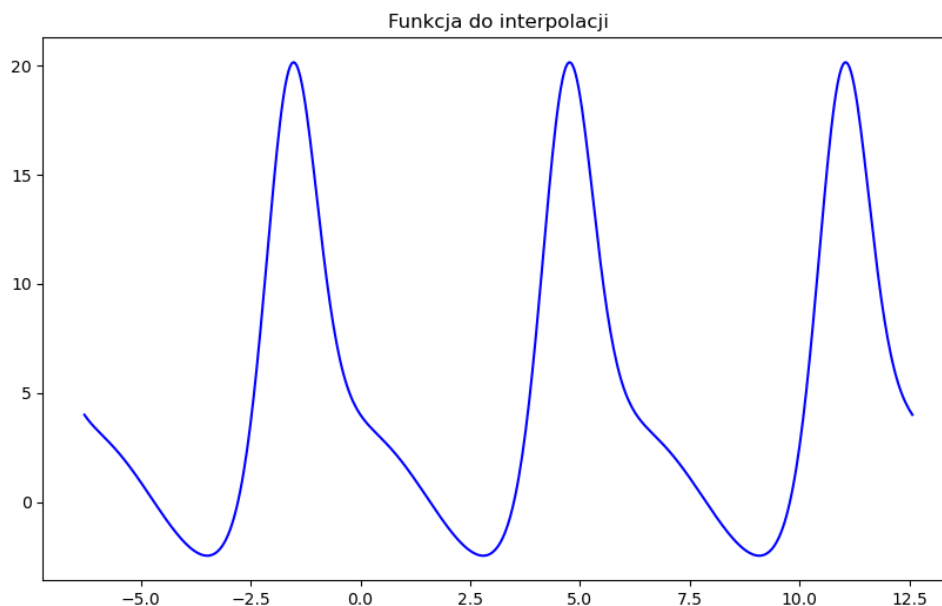
1 Treść Zadania

Celem ćwiczenia jest zbadanie efektywności aproksymacji funkcji $f(x)$ metodą najmniejszych kwadratów (LSM) z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych. Analizie poddano wpływ liczby węzłów aproksymacyjnych oraz liczby składników szeregu trygonometrycznego na dokładność dopasowania.

Rozpatrywana funkcja została zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x) \quad \text{dla } x \in [-2\pi, 4\pi]$$

Jej wykres przedstawiono na rysunku 1:



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze osobistym o następującej specyfikacji:

- System operacyjny:
 - Windows 11 Pro
- Procesor:
 - 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1235U, 1.3 GHz
- Środowisko programistyczne:
 - Python 3.12
 - Biblioteki:
 - * NumPy
 - * Pandas
 - * Matplotlib
 - * Seaborn

3 Przebieg Doświadczenia

Eksperyment polegał na aproksymacji średniokwadratowej funkcji

$$f(x) = e^{-3 \sin x} + 3 \cos x, \quad x \in [-2\pi, 4\pi]$$

za pomocą *wielomianów trygonometrycznych*.

1. Przyjęto równoodległe węzły aproksymacyjne $x_i \in [A, B]$ w liczbie n , gdzie $n \in \{5, 7, \dots, 99\}$ (same liczby nieparzyste, aby uwzględnić punkt środkowy).
2. Dla każdego n rozważano rzędy wielomianu trygonometrycznego $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
Warunek

$$2m < n \iff m < \frac{n}{2}$$

zapewnia, że w układzie normalnych równań występuje więcej równań niż niewiadomych.

3. Dla każdej pary (n, m) :
 - (a) obliczono współczynniki a_0, a_k, b_k ze wzorów dyskretnych,
 - (b) skonstruowano wielomian trygonometryczny $P_m(x)$,
 - (c) wyznaczono
 - błąd maksymalny
 - błąd średni

Wzory na błąd maksymalny i błąd średni

Maksymalny błąd:

$$e_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (|f(x_i) - p(x_i)|)$$

Średni błąd:

$$e_{\text{avg}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2}}{N}$$

Gdzie:

- $f(x_i)$ — wartość funkcji oryginalnej w punkcie x_i ,
- $p(x_i)$ — wartość wielomianu dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów w x_i .

Wizualizacja siatki błędów

- Dane przekształcono w macierze przestawne $E_{\max}(n, m)$ oraz $E_{\text{avg}}(n, m)$.
- Przy użyciu `seaborn.heatmap` wygenerowano *mapy cieplne*, ilustrujące zależność obydwu błędów od n i m . Dodatkowo wypreparowano podmacierze $n \leq 31$, $m \leq 15$ w celu bardziej szczegółowej analizy najniższych rzędów.

Najlepsze i najgorsze konfiguracje

1. Na podstawie **błędu średniego** wyłoniono:

- **najlepszą** parę (n_*, m_*) , dla której $E_{\text{avg}} = \min_{n,m} E_{\text{avg}}(n, m)$;
- **najgorszą** parę (n^\dagger, m^\dagger) , dla której $E_{\text{avg}} = \max_{n,m} E_{\text{avg}}(n, m)$.

2. Dla obu konfiguracji sporządzono wykresy porównawcze, przedstawiające:

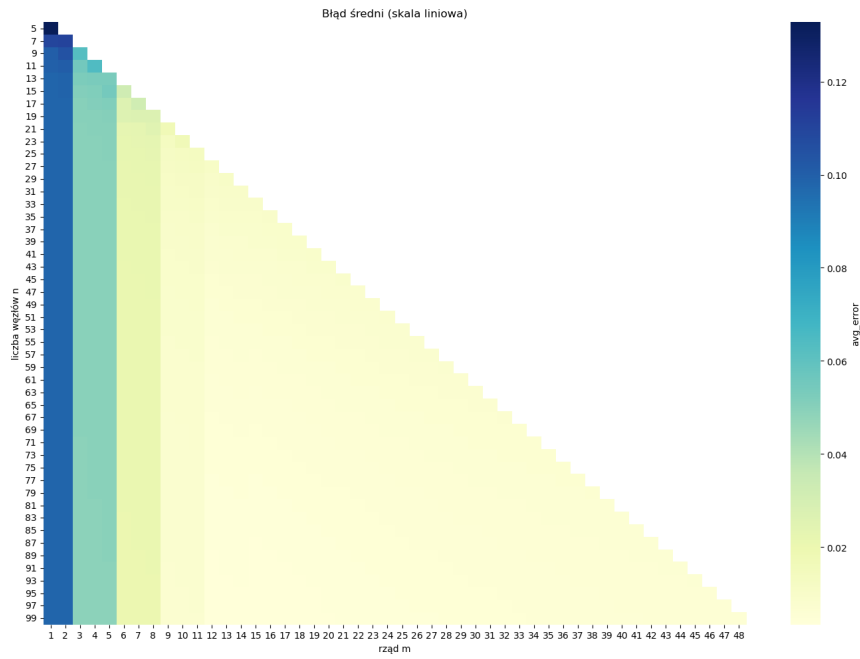
- przebieg funkcji $f(x)$,
- aproksymację $P_m(x)$,
- punktowy rozkład błędu $|f(x) - P_m(x)|$.

Przedstawiono także wybrane interesujące przypadki. Dla ustalonego rzędu m porównano jakość aproksymacji przy zwiększającej się liczbie węzłów n , natomiast dla ustalonej liczby węzłów n pokazano wpływ wzrostu rzędu m na dokładność dopasowania. Wizualizacje te umożliwiają ocenę wpływu obu parametrów niezależnie, co pozwala lepiej zrozumieć kompromis między złożonością a dokładnością aproksymacji trygonometrycznej.

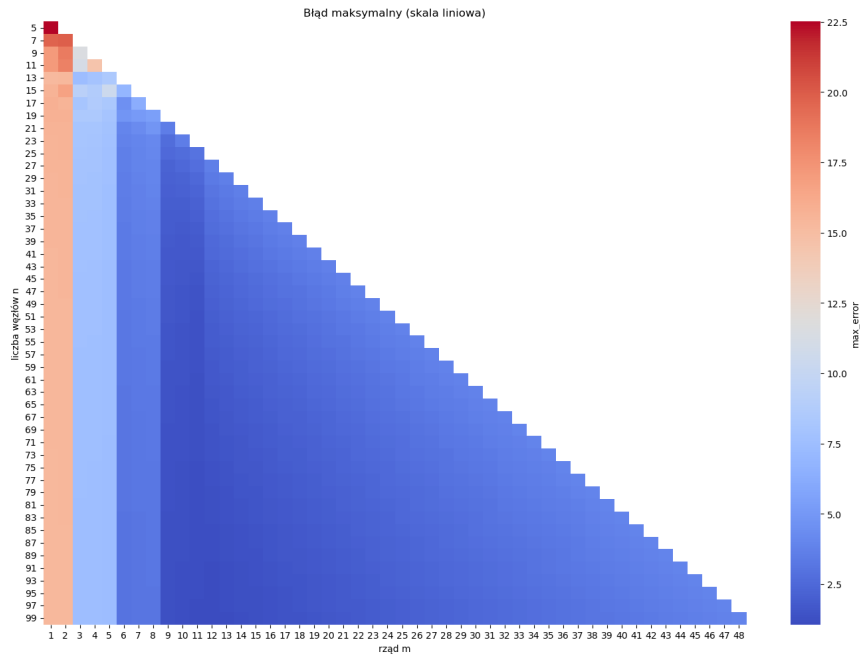
Dzięki temu procesowi uzyskano pełną charakterystykę jakości aproksymacji trygonometrycznej w zależności od liczby węzłów n oraz rzędu wielomianu m , przestrzegając konsekwentnie ograniczenia $m < \frac{n}{2}$, które zapewnia jednoznaczność i stabilność wyznaczanych współczynników. Analiza została przeprowadzona zarówno globalnie — przy pomocy map błędów na siatce (n, m) — jak i lokalnie, dla wybranych przekrojów z ustalonym n lub m , co pozwoliło na ocenę wpływu każdego z parametrów osobno. W rezultacie możliwe było nie tylko zidentyfikowanie konfiguracji ekstremalnych, ale także obserwacja tendencji zbieżności aproksymacji wraz ze wzrostem n lub m .

4 Wyniki doświadczenia

Mapy błędów na pełnej siatce (n, m)

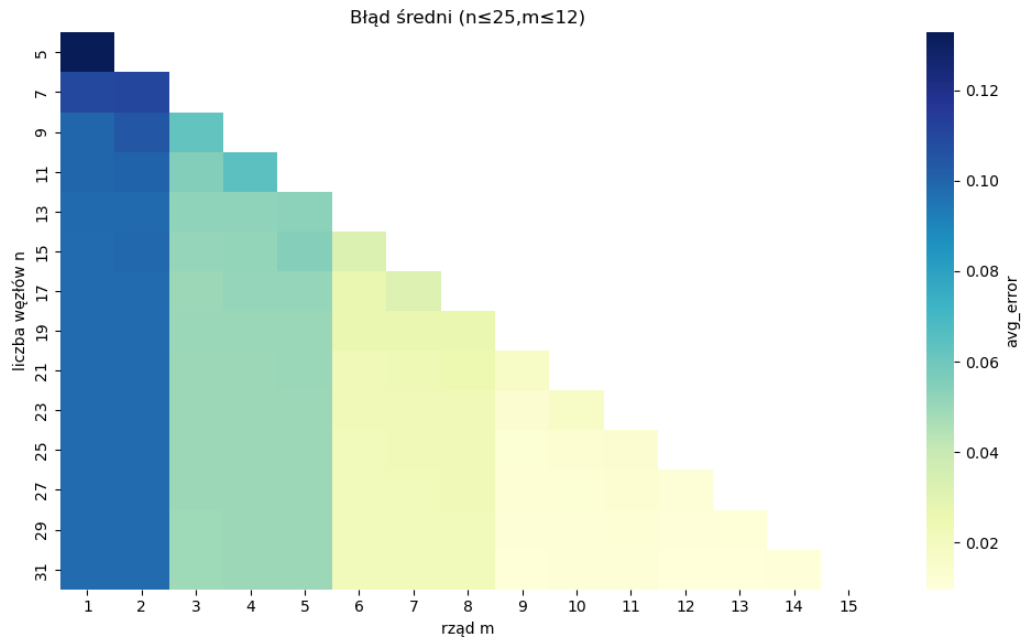


Rysunek 2: Średni błąd aproksymacji $E_{\text{avg}}(n, m)$.

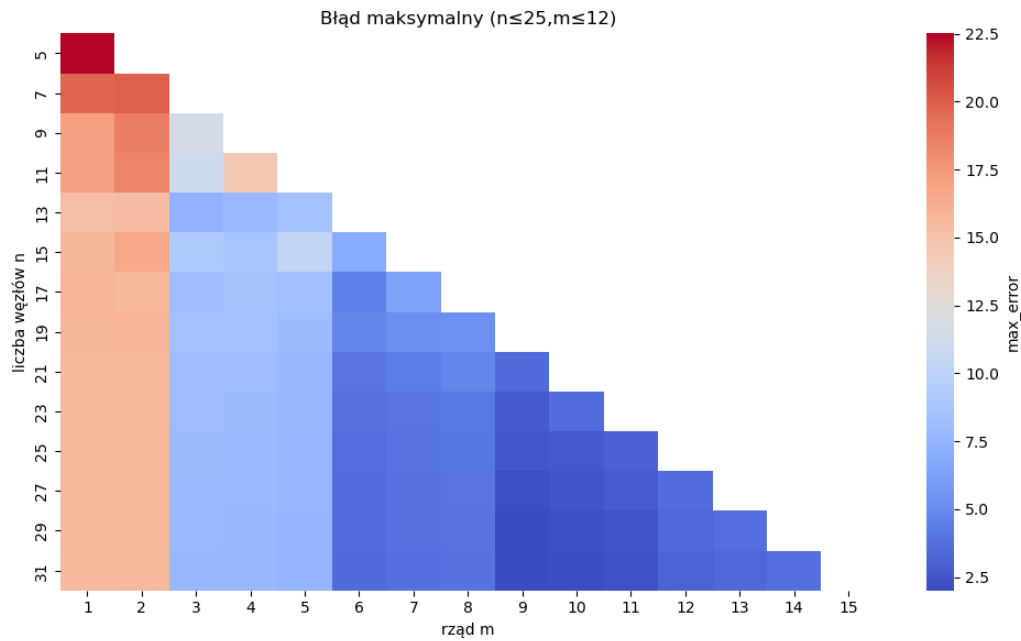


Rysunek 3: Maksymalny błąd aproksymacji $E_{\text{max}}(n, m)$.

Powiększenie obszaru małych rzędów

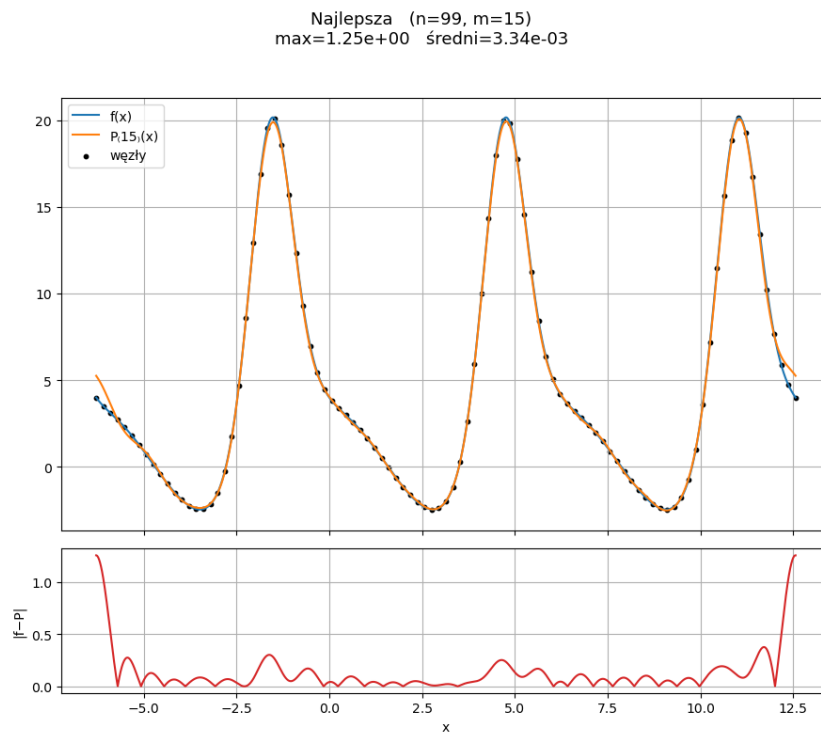


Rysunek 4: Średni błąd E_{avg} ograniczony do $n \leq 31$, $m \leq 15$.

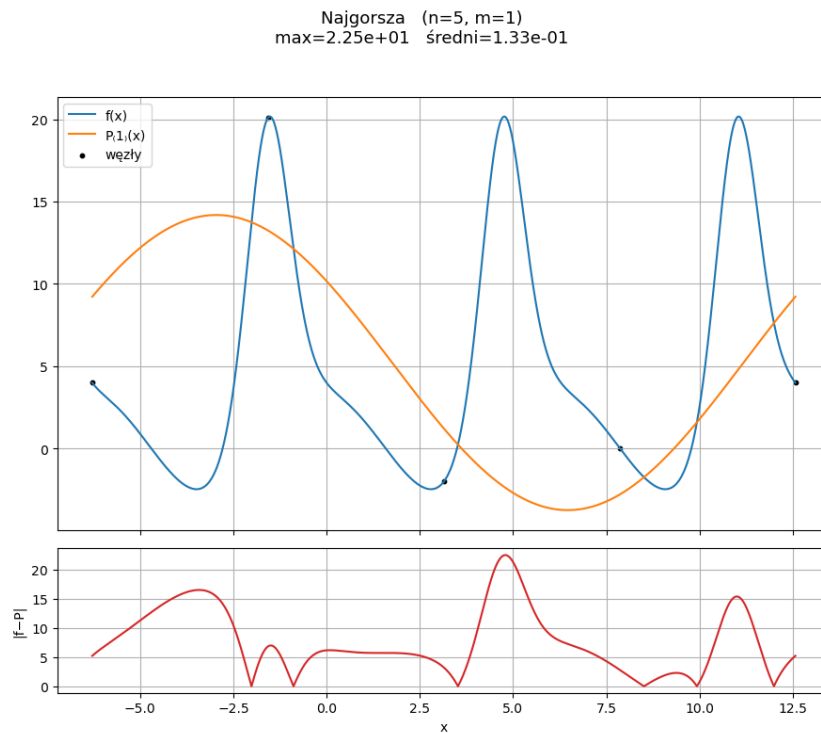


Rysunek 5: Maksymalny błąd E_{max} ograniczony do $n \leq 31$, $m \leq 15$.

Ekstremalne konfiguracje



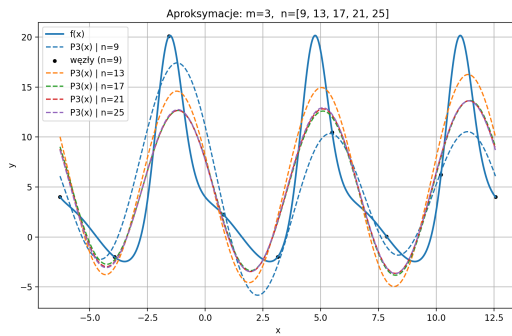
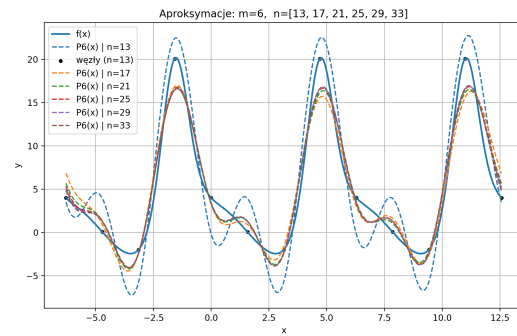
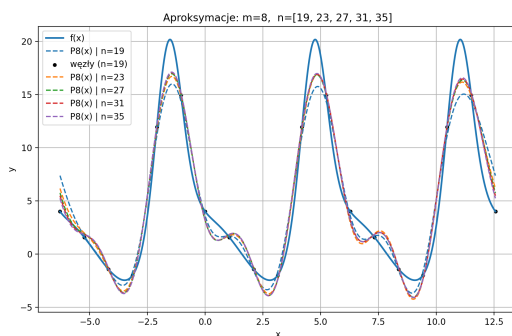
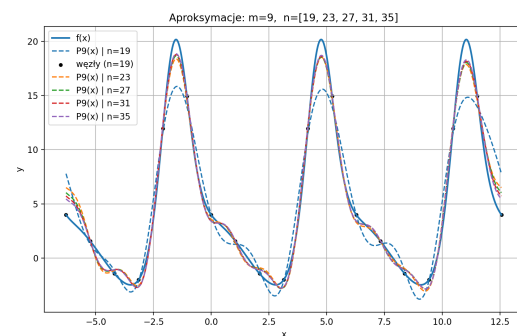
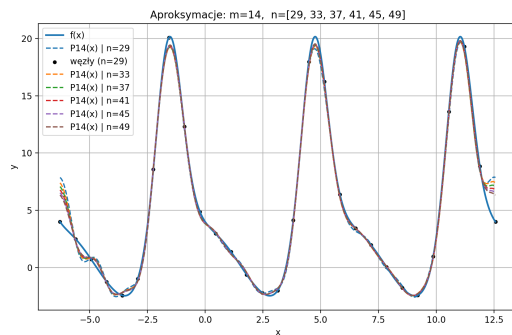
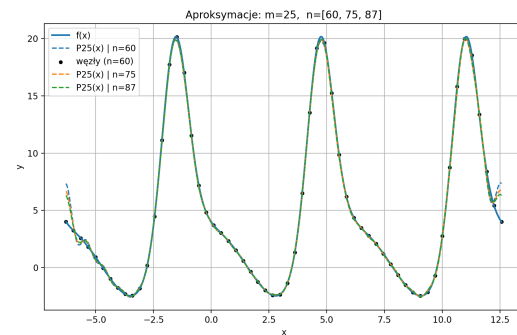
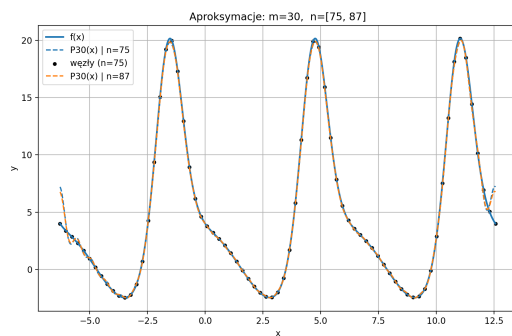
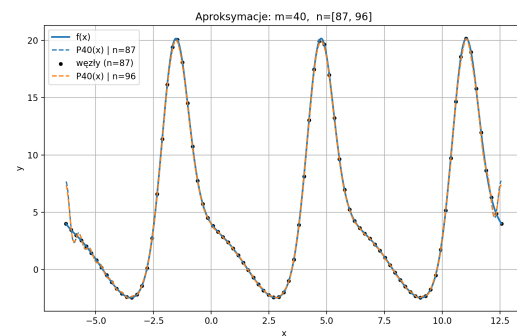
(a) Najlepsza para (n_*, m_*) pod względem średniego błędu E_{avg} .



(b) Najgorsza para (n^\dagger, m^\dagger) pod względem średniego błędu E_{avg} .

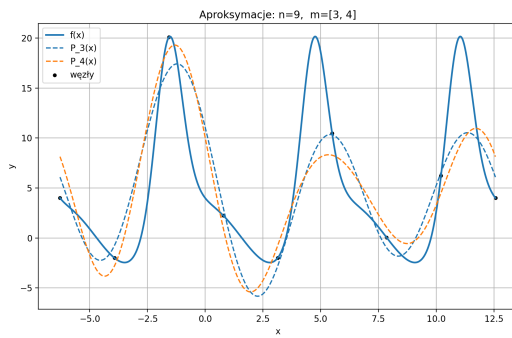
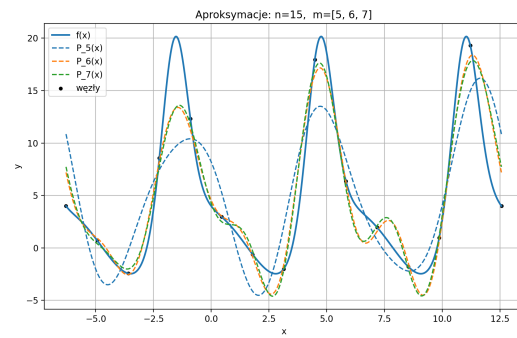
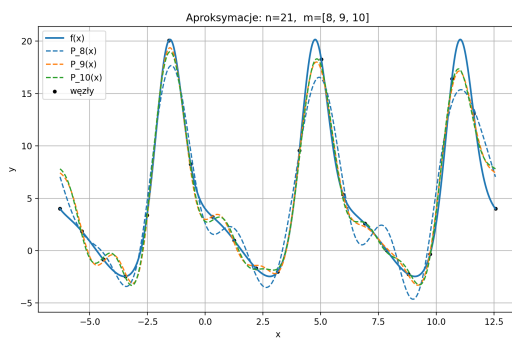
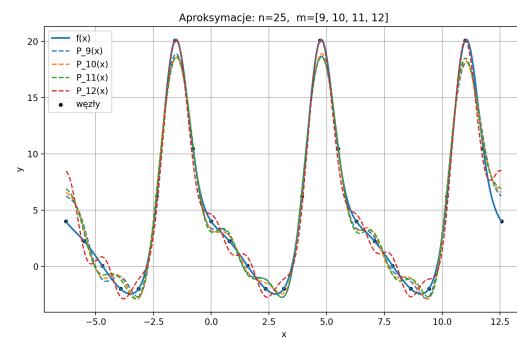
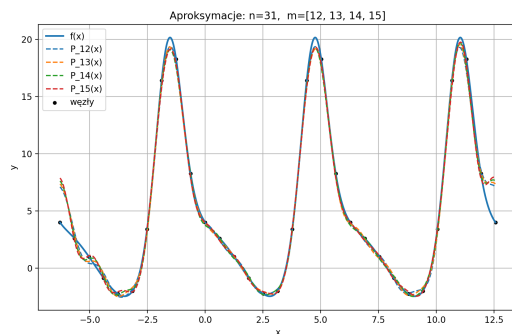
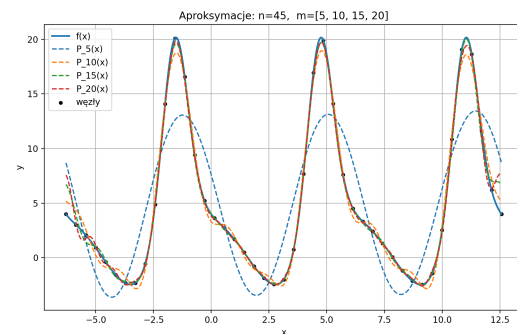
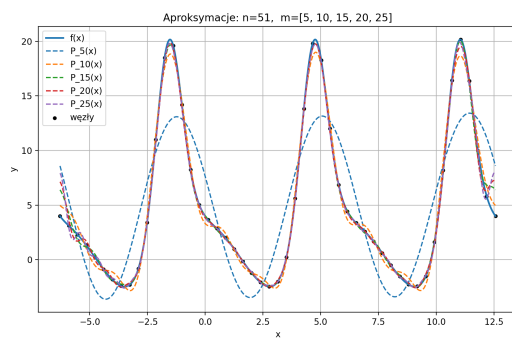
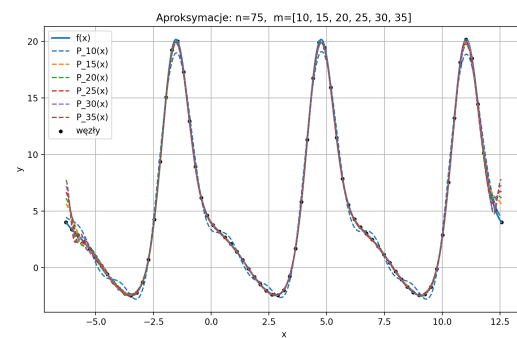
Rysunek 6: Porównanie dwóch skrajnych konfiguracji aproksymacji trygonometrycznej pod względem błędu średniego E_{avg} : (a) najlepsza konfiguracja (n_*, m_*) , (b) najgorsza konfiguracja (n^\dagger, m^\dagger) . W każdym przypadku górny panel przedstawia przebieg funkcji $f(x)$ oraz aproksymację $P_m(x)$, natomiast dolny panel ilustruje punktowy błąd $|f(x) - P_m(x)|$.

Wizualizacja aproksymacji dla stałego rzędu m

(a) $m = 3$; $n = 9, 13, 17, 21, 25$ (b) $m = 6$; $n = 13, 17, 21, 25, 29, 33$ (c) $m = 8$; $n = 19, 23, 27, 31, 35$ (d) $m = 9$; $n = 19, 23, 27, 31, 35$ (e) $m = 14$; $n = 29, 33, 37, 41, 45, 49$ (f) $m = 25$; $n = 60, 75, 87$ (g) $m = 30$; $n = 75, 87$ (h) $m = 40$; $n = 87, 96$

Rysunek 7: Porównanie aproksymacji trygonometrycznej przy stałym rzędzie m i różnych liczbach węzłów n : (a)–(h) odpowiadają kolejnym wartościom rzędu m .

Wizualizacja aproksymacji dla stałej liczby węzłów n

(a) $n = 9$; $m = 3, 4$ (b) $n = 15$; $m = 5, 6, 7$ (c) $n = 21$; $m = 8, 9, 10$ (d) $n = 25$; $m = 9, 10, 11, 12$ (e) $n = 31$; $m = 12, 13, 14, 15$ (f) $n = 45$; $m = 5, 10, 15, 20$ (g) $n = 51$; $m = 5, 10, 15, 20, 25$ (h) $n = 75$; $m = 10, 15, 20, 25, 30, 35$

Rysunek 8: Porównanie aproksymacji trygonometrycznej przy stałej liczbie węzłów n i różnych rzędach m : (a)–(h) odpowiadają kolejnym wartościom n .

5 Opracowanie Danych

Analiza danych zgromadzonych na podstawie obliczeń błędów aproksymacji pozwala szczegółowo ocenić wpływ parametrów n (liczba węzłów) oraz m (rzęd wielomianu trygonometrycznego) na jakość dopasowania.

Na mapach cieplnych błędów (rysunki 2–5) można wyróżnić kilka charakterystycznych zależności:

- Dla małych n i niskich rzędów m , błąd aproksymacji E_{avg} jest istotnie większy, ponieważ wielomian nie jest w stanie uchwycić struktury funkcji.
- Wraz ze wzrostem rzędu m przy stałym n , obserwuje się skokowe zmniejszanie błędu — jednak nie są to skoki na poziomie wartości $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, lecz przy konkretnych wartościach rzędu m .
- Skoki dokładności występują cyklicznie przy $m = 3, 6, 9, 12, 15, \dots$, czyli wielokrotnościach liczby lokalnych ekstremów funkcji $f(x)$, która ma **3 maksima i 3 minima** w analizowanym przedziale.

Wyjaśnienie analityczne „skoków co trzeci r .” Ponieważ badamy funkcję na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$ długości $L = 6\pi$, w kodzie przechodzimy do przeskalowanej zmiennej

$$x \mapsto x_t = \frac{2\pi}{L}(x - A) - \pi, \quad \text{tak że} \quad x = 3(x_t + \pi).$$

W tej zmiennej zachodzi

$$\sin x = \sin(3x_t + 3\pi) = -\sin(3x_t), \quad \cos x = \cos(3x_t + 3\pi) = -\cos(3x_t).$$

Stąd

$$f(x) = e^{-3\sin x} + 3\cos x = e^{3\sin(3x_t)} - 3\cos(3x_t).$$

Rozwinięcie Fouriera. Dla dowolnego z obowiązuje tożsamość

$$e^{z \sin \theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(z) e^{ik\theta},$$

gdzie I_k to *zmodyfikowana* funkcja Bessela I-go rzędu. Podstawiając $\theta = 3x_t$ oraz $z = 3$ dostajemy

$$e^{3\sin(3x_t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(3) e^{i3kx_t}.$$

Współczynniki Fouriera są więc różne od zera *wyłącznie* dla numerów k będących **wielokrotnościami trójki**. Drugi składnik, $-3\cos(3x_t)$, również zawiera jedynie harmoniczną $k = \pm 3$ w tej samej skali. Łącznie oznacza to, że

$$\widehat{f}(k) = 0 \quad \text{dla } k \notin 3\mathbb{Z}.$$

Konsekwencja dla aproksymacji. Wielomian trygonometryczny rzędu m w naszym algorytmie zawiera harmoniczne $k = 1, 2, \dots, m$ w zmiennej x_t . Dopiero gdy m osiąga kolejną wielokrotność 3 ($m = 3, 6, 9, \dots$), do bazy aproksymacyjnej „wpada” cała nowa paczka rzeczywistych składowych funkcji. Stąd widoczne na mapach i wykresach *skokowe* obniżenie błędu dokładnie przy $m = 3k$; pomiędzy tymi wartościami dodajemy jedynie „puste” harmoniczne, na które f nie ma rzeczywistej projekcji, więc dokładność poprawia się już tylko nieznacznie.

Zjawisko to wynika z faktu, że funkcja $f(x) = e^{-3\sin x} + 3\cos x$ zawiera istotne komponenty o określonej liczbie oscylacji. Przy rzędach m będących wielokrotnością liczby ekstremów, wielomian trygonometryczny ma wystarczającą liczbę harmonicznych, by odwzorować każdy „garb” funkcji. W tych punktach następuje gwałtowna poprawa jakości dopasowania, ponieważ struktura funkcji zaczyna być trafnie odwzorowywana przez składniki trygonometryczne.

Rysunek 6 przedstawia konfiguracje ekstremalne — najlepszą (z najmniejszym błędem średnim) oraz najgorszą (z największym błędem). Przypadek optymalny pokazuje, że możliwe jest bardzo dokładne odwzorowanie funkcji przy odpowiednio dobranych parametrach, podczas gdy konfiguracja nieoptymalna skutkuje znaczącymi rozbieżnościami.

Analiza przekrojów dla stałego m (rys. 7)

Zestaw ilustracji (a)–(h) w rysunku 7 pokazuje, jak zwiększająca się liczba węzłów n wpływa na jakość aproksymacji przy ustalonym rzędzie m :

- **(a)–(b):** Dla niskich rzędów $m = 3$ i $m = 6$ dokładność rośnie znacznie wraz z większym n ; dopasowanie staje się coraz bardziej precyzyjne. Skok jakości widać szczególnie wyraźnie na rys. 7(a) i (b).
- **(c)–(d):** Dla $m = 8$ i $m = 9$ pojawia się kolejny, bardzo wyraźny skok – rząd wielomianu pozwala odwzorować wszystkie trzy pary ekstremów funkcji, co doskonale widać na rys. 7(d).
- **(e)–(f):** Rzędy $m = 14$ i $m = 25$ są już wystarczające, by odwzorować większość szczegółów funkcji; dalsze zwiększanie n przynosi niewielkie korzyści.
- **(g)–(h):** Dla wysokich rzędów ($m = 30$, $m = 40$) pojawia się zjawisko nasycenia – uzyskana dokładność jest bliska maksymalnej możliwej przy danym n .

Skokowe zmniejszanie błędów w podrysunkach (a), (b) i (d) potwierdza obserwację, że kolejne wielokrotności liczby ekstremów ($m = 3, 6, 9$) dają największy „przyrost jakości”.

Analiza przekrojów dla stałego n (rys. 8)

Drugi zestaw ilustracji (a)–(h) w rysunku 8 prezentuje odwrotną zależność — jak wzrost rzędu m wpływa na jakość aproksymacji przy ustalonej liczbie węzłów n :

- **(a)–(b):** Dla małych $n = 9$ i $n = 15$, dodanie kolejnych składników znacząco redukuje błąd, szczególnie gdy m osiąga wielokrotność liczby ekstremów funkcji.
- **(c)–(d):** W przypadku $n = 21$ i $n = 25$, rosnący rząd pozwala już na bardzo precyzyjne dopasowanie — poprawa jakości jest szczególnie wyraźna przy $m = 9, 12$.
- **(e)–(f):** Dla $n = 31$ i $n = 45$ efekt ten jest bardziej subtelny, ale skoki w dokładności wciąż są widoczne przy kolejnych „harmonicznym”.
- **(g)–(h):** Wysokie $n = 51$ i $n = 75$ umożliwiają bezpieczne zwiększanie rzędu m , a wykresy pokazują już niemal idealne odwzorowanie funkcji.

Wnioski z powyższych obserwacji prowadzą do rekomendacji, by w praktycznych zastosowaniach dobierać pary (n, m) , w których rząd m pozwala odwzorować przynajmniej liczbę ekstremów funkcji — a najlepiej ich wielokrotność. Typowy kompromis między złożonością a dokładnością można osiągnąć przy:

$$m \in \{6, 9, 12, 15 \dots\}, \quad n \in [30, 60]$$

co zapewnia błędy średnie rzędu 10^{-2} lub niższe, przy akceptowalnym koszcie obliczeniowym.

6 Podsumowanie Zagadnienia

Przeprowadzone doświadczenie umożliwiło kompleksową ocenę skuteczności aproksymacji funkcji okresowej za pomocą wielomianów trygonometrycznych, konstruowanych metodą najmniejszych kwadratów. W szczególności zbadano wpływ dwóch kluczowych parametrów: liczby węzłów aproksymacyjnych n oraz rzędu m wielomianu na jakość dopasowania.

Analiza wykazała, że:

- efektywność aproksymacji wyraźnie rośnie wraz ze wzrostem rzędu m , szczególnie w momentach, gdy m osiąga wielokrotność liczby lokalnych ekstremów funkcji $f(x)$,
- większa liczba węzłów n poprawia stabilność i dokładność dopasowania, a także pozwala na stosowanie wyższych rzędów m bez pogorszenia jakości (np. oscylacji),
- **skokowe zmniejszanie błędów aproksymacji** występuje dla rzędów $m = 3, 6, 9, 12, \dots$, co w przypadku badanej funkcji jest bezpośrednio związane z jej strukturą — posiada ona 3 minima i 3 maksima w analizowanym przedziale.
- Zjawisko to ma charakter ogólny: dla innych funkcji o znanej liczbie cech charakterystycznych (np. „garbów”, oscylacji, ekstremów lokalnych), analogiczne skoki dokładności będą następować przy rzędach m będących wielokrotnością tej liczby,
- nieoptymalne konfiguracje, w których m nie jest dopasowany do charakteru funkcji (np. m zbyt małe lub niewspółmierne do liczby zmian kierunku), skutkują wysokimi błędami oraz niestabilnym przebiegiem wielomianu.

Prowadzi to do praktycznych rekomendacji:

- efektywność aproksymacji wyraźnie rośnie wraz ze wzrostem rzędu m , szczególnie w momentach, gdy m osiąga kolejne wielokrotności liczby lokalnych ekstremów (por. rys. 7(a), (b), (d));
- typowy kompromis między kosztem obliczeniowym a jakością — **dla naszej funkcji** — uzyskuje się przy: $m \in \{6, 9, 12, 15\}$, $n \in [30, 60]$
- należy zawsze przestrzegać warunku $m < \frac{n}{2}$, by zapewnić nadokreśloność układu równań normalnych i uzyskać stabilne współczynniki.

Podójście łączące analizę ilościową (mapy błędów, wartości numeryczne) z jakościową (wizualizacja dopasowań i błędów punktowych) umożliwiło głębokie zrozumienie mechanizmów stojących za efektywną aproksymacją funkcji nieliniowych i okresowych. Wyniki mogą mieć zastosowanie zarówno w dydaktyce, jak i w rzeczywistych problemach inżynierskich, takich jak analiza sygnałów, identyfikacja systemów czy kompresja danych.

Dodatkowo, na rys. 7(a), (b) oraz (d) widać wyraźne „schodki dokładności” odpowiadające rzędowi $m = 3, 6, 9$; potwierdza to tezę o kluczowej roli kolejnych harmonicznych w modelowaniu funkcji.

7 Wnioski

Aproksymacja trygonometryczna metodą najmniejszych kwadratów pozwala na efektywne odwzorowanie funkcji okresowych, szczególnie gdy rząd m jest zgodny z liczbą ich charakterystycznych cech. Dla badanej funkcji, najlepsze dopasowanie uzyskano przy wartościach m , które są wielokrotnością liczby jej ekstremów. Jakość aproksymacji znacząco poprawia się do pewnego momentu, po czym osiąga stan nasycenia. Dobór parametrów n i m powinien być świadomy, by zapewnić wysoką dokładność przy zachowaniu rozsądnego kosztu obliczeniowego.