



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Zagadnienia interpolacji Lagrange'a i Hermite'a
Sprawozdanie – Ćwiczenie 2

Maciej Kmak
Informatyka WI AGH, II rok
15. Kwietnia 2025

1 Cel Ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest porównanie metod interpolacji wielomianowej Lagrange'a i Hermite'a w odniesieniu do funkcji $f(x)$, przedstawionej na rysunku 1, zadanej wzorem:

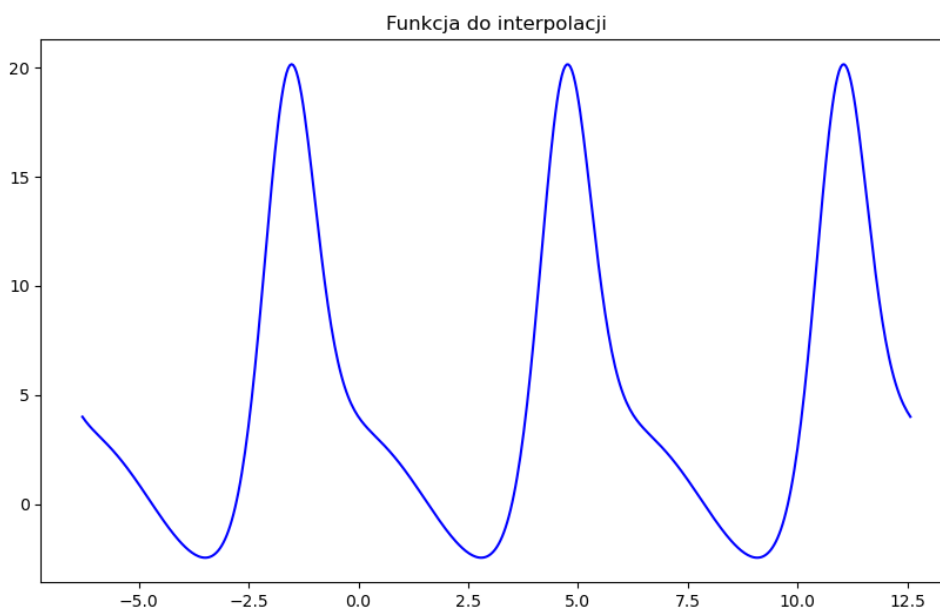
$$f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x) \quad \text{na przedziale } [-2\pi, 4\pi]$$

Podstawy teoretyczne obu metod zostały przywołane w **Sekcji 3 – Wstęp Teoretyczny**. Analiza eksperymentalna objęła:

- różną liczbę węzłów interpolacyjnych,
- dwa sposoby ich rozmieszczenia: równoodległe i węzły Czebyszewa.

Zbadano wpływ zarówno liczby węzłów, jak i sposobu ich rozmieszczenia na uzyskane wyniki interpolacyjne. Na podstawie przeprowadzonej analizy dokonano porównania obu metod, zwracając szczególną uwagę na:

- dokładność odwzorowania funkcji w całym przedziale,
- wielomian, który najlepiej przybliżyła zadaną funkcję,
- różnice w zachowaniu interpolacji przy węzłach równoodległych i węzłach Czebyszewa.



Rysunek 1: Funkcja $f(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze osobistym o specyfikacji:

- System Operacyjny: Windows 11 Pro
- Procesor: 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1235U 1.3 GHz
- Język: Python 3.12
- Wykorzystane moduły języka Python: NumPy, Pandas, Matplotlib, CSV, Math

3 Wstęp Teoretyczny

3.1 Interpolacja Lagrange'a

W ramach interpolacji Lagrange'a zastosowano zarówno klasyczny wzór Lagrange'a, jak i wzór Newtona, co umożliwia porównanie ich efektywności i stabilności numerycznej. Wzór Newtona ułatwia rozszerzanie wielomianu o nowe węzły, podczas gdy wzór Lagrange'a jest bardziej przejrzysty, lecz mniej efektywny obliczeniowo.

Zakłada się, że dysponujemy $n + 1$ węzłami x_0, x_1, \dots, x_n , na podstawie których wyznaczany jest wielomian interpolacyjny $P_n(x)$ stopnia n .

3.1.1 Wzór Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny $P_n(x)$ można przedstawić jako liniową kombinację funkcji bazowych Lagrange'a:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot L_k(x),$$

gdzie $L_k(x)$ to k -ta funkcja bazowa zdefiniowana wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Własność interpolacyjna tej bazy spełnia warunek:

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

Funkcja $P_n(x)$ spełnia więc warunek $P_n(x_i) = f(x_i)$ dla każdego węzła x_i , co oznacza, że dokładnie interpoluje funkcję w danych punktach.

3.1.2 Wzór Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona zapisuje się w postaci:

$$W(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot p_k(x),$$

gdzie: - b_k — współczynniki uzyskane z różnic dzielonych, - $p_0(x) = 1$, - $p_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$ dla $k \geq 1$.

Dla przykładowych pierwszych wartości mamy:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= (x - x_0), \\ &\vdots \\ p_n(x) &= \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \end{aligned}$$

Taka postać wielomianu Newtona jest szczególnie wygodna obliczeniowo, ponieważ pozwala na stopniowe rozbudowywanie wielomianu bez konieczności przekształcania wcześniej obliczonych wyrażeń.

3.2 Interpolacja Hermite'a

W przypadku interpolacji Hermite'a wykorzystuje się wzór Newtona rozszerzony o warunki dotyczące pochodnych. Oznacza to, że dla każdego węzła x_i znana jest nie tylko wartość funkcji $f(x_i)$, ale także jej pochodna $f'(x_i)$.

Dla n węzłów, z których każdy ma znaną wartość funkcji oraz pierwszą pochodną, stopień wielomianu Hermite'a wynosi $2n - 1$.

3.2.1 Postać Newtona dla interpolacji Hermite'a

Szukany wielomian interpolacyjny Hermite'a ma postać:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{s(i)+j} \cdot p_{s(i)+j}(x)$$

gdzie: - m_i — liczba warunków interpolacyjnych związanych z punktem x_i (np. $m_i = 2$, jeśli znana jest wartość i pochodna), - $s(i)$ — liczba wszystkich warunków przed punktem x_i , czyli $s(i) = \sum_{r=0}^{i-1} m_r$, - $b_{s(i)+j}$ — współczynniki wyznaczone z tablicy różnic dzielonych (lub obliczone bezpośrednio w przypadku pochodnych), - $p_{s(i)+j}(x)$ — funkcje bazowe Newtona z powtórzonymi węzłami.

W kontekście zastosowanej funkcji $f(x)$, pochodna została obliczona analitycznie:

$$f'(x) = -3 \cdot \cos(x) \cdot e^{-3 \cdot \sin(x)} - 3 \cdot \sin(x),$$

Taka postać umożliwia konstrukcję dokładnego wielomianu $H_n(x)$, który odwzorowuje zarówno wartości, jak i zachowanie funkcji w punktach węzłowych.

4 Przebieg Doświadczenia

Dla funkcji $f(x)$, zrealizowano interpolację metodami Lagrange'a i Hermite'a, zgodnie z następującym zakresem liczby węzłów:

- dla interpolacji Lagrange'a (zarówno wzorem Lagrange'a, jak i Newtona)
- dla interpolacji Hermite'a.

Dla każdej wartości $n \in \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 20, 25, 30, 40, 45, 50\}$ wykonano interpolację w dwóch wariantach rozmieszczenia węzłów:

- rozmieszczenie równoodległe,
- rozmieszczenie według zer wielomianu Czebyszewa.

Po skonstruowaniu wielomianu interpolacyjnego $P(x)$ dla danego przypadku, obliczono błędy względem funkcji $f(x)$ w $N = 500$ równomiernie rozłożonych punktach testowych na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$. Zastosowano dwa typy błędów:

- błąd maksymalny,
- błąd średni.

4.1 Wzory na błąd maksymalny i błąd średni

Maksymalny błąd:

$$e_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (|f(x_i) - p(x_i)|)$$

Średni błąd:

$$e_{\text{avg}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2}}{N}$$

Gdzie:

$f(x_i)$ – wartość funkcji w punkcie x_i ; $p(x_i)$ – wartość wielomianu interpolującego w punkcie x_i

5 Wyniki Doświadczenia

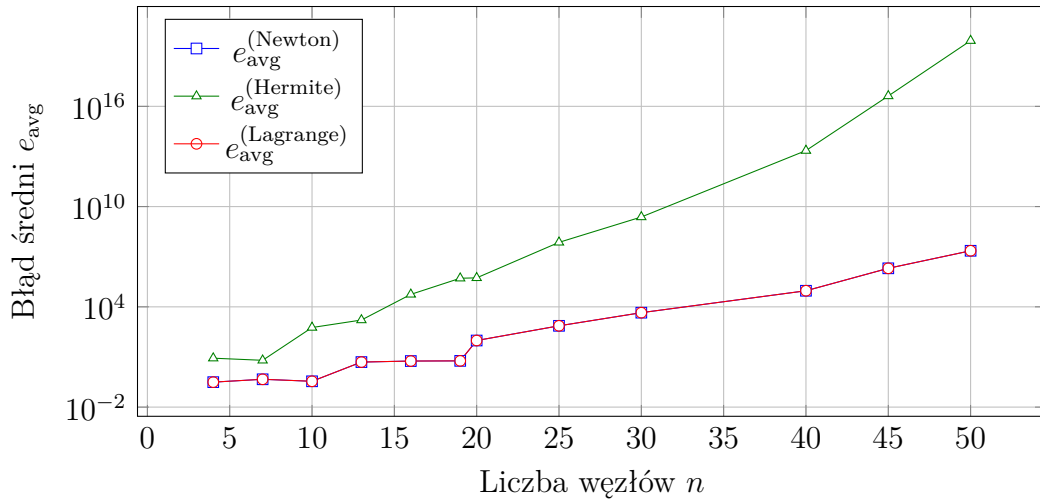
W tabelach 1 i 2 przedstawiono zestawienie błędów interpolacji dla różnych metod oraz sposobów rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych: równoodległych i według zer wielomianu Czebyszewa.

Na rysunkach 2a i 2b zaprezentowano wykresy przedstawiające odpowiednio błędy średnie oraz maksymalne dla interpolacji Lagrange’a dla wzorów Lagrange’a i Newtona oraz interpolacji Hermite’a dla wzoru Newtona, wykonane dla węzłów równoodległych. Analogicznie, na rysunkach 3a i 3b przedstawiono te same miary błędów (średni i maksymalny) obliczone dla węzłów Czebyszewa, umożliwiając bezpośrednie porównanie z wynikami uzyskanymi dla węzłów równoodległych.

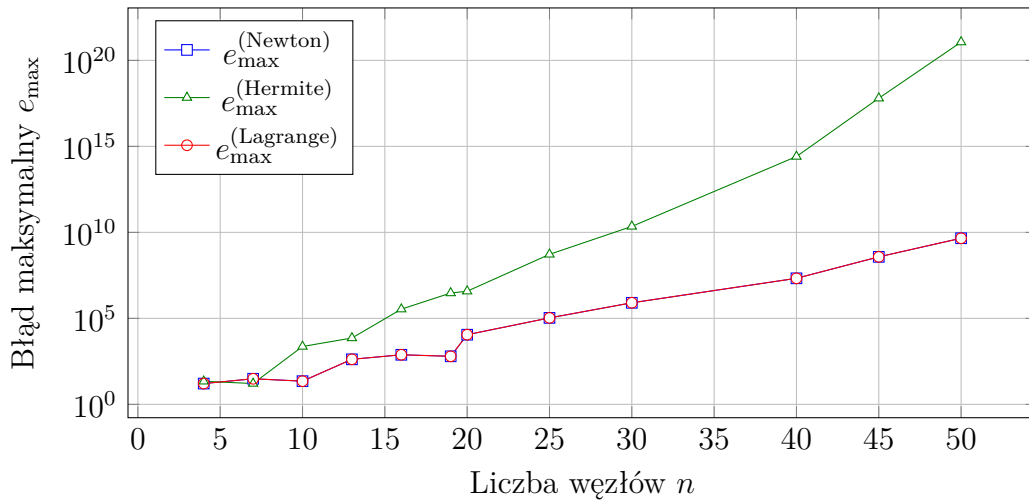
Na rysunkach 4a–9b przedstawiono wybrane wykresy wielomianów interpolowanych wraz z zaznaczonymi węzłami.

Tabela 1: Porównanie błędów (Węzły równoodległe): Interpolacja Lagrange’a (Wzory Lagrange’a jako $e^{(lagr)}$ i Newtona jako $e^{(newt)}$), Interpolacja Hermite’a (Wzór Newtona jako $e^{(herm)}$)

n	$e_{\max}^{(lagr)}$	$e_{\max}^{(newt)}$	$e_{\max}^{(herm)}$	$e_{\text{avg}}^{(lagr)}$	$e_{\text{avg}}^{(newt)}$	$e_{\text{avg}}^{(herm)}$
4	1.6160e+01	1.6160e+01	2.1892e+01	3.1174e-01	3.1174e-01	8.4605e+00
7	3.0708e+01	3.0708e+01	1.6249e+01	4.6279e-01	4.6279e-01	6.3213e+00
10	2.2276e+01	2.2276e+01	2.3129e+03	3.5093e-01	3.5093e-01	5.7893e+02
13	4.1580e+02	4.1580e+02	7.1865e+03	4.9570e+00	4.9570e+00	1.6271e+03
16	7.6144e+02	7.6144e+02	3.4174e+05	5.7103e+00	5.7103e+00	5.5677e+04
19	6.2195e+02	6.2195e+02	2.9704e+06	5.8461e+00	5.8461e+00	5.1485e+05
20	1.1195e+04	1.1195e+04	3.7797e+06	9.6694e+01	9.6694e+01	5.4313e+05
25	1.0627e+05	1.0627e+05	5.2564e+08	7.3160e+02	7.3160e+02	7.2353e+07
30	8.0294e+05	8.0294e+05	2.2136e+10	4.4750e+03	4.4750e+03	2.3843e+09
40	2.1319e+07	2.1319e+07	2.5688e+14	9.1720e+04	9.1720e+04	2.2468e+13
45	3.7669e+08	3.7669e+08	6.2928e+17	2.0265e+06	2.0265e+06	4.1670e+16
50	4.5561e+09	4.5561e+09	1.1571e+21	2.2665e+07	2.2666e+07	8.5150e+19



(a) Błąd średni w skali logarytmicznej

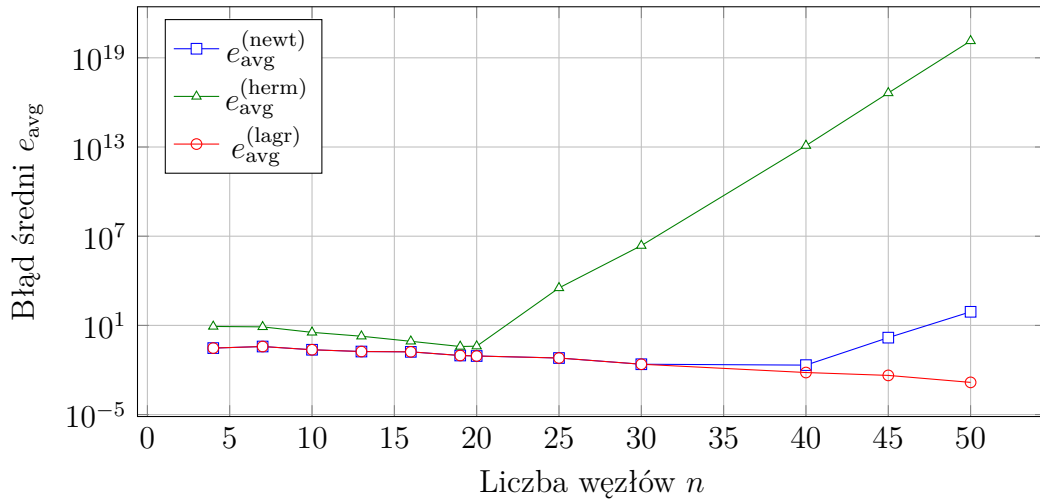


(b) Błąd maksymalny w skali logarytmicznej

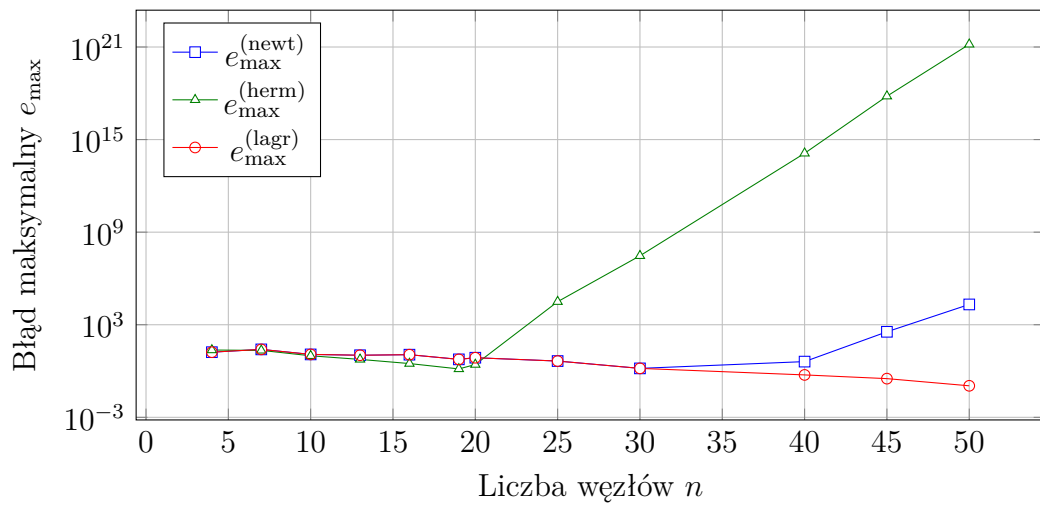
Rysunek 2: Porównanie błędów (Węzły równoodległe): Interpolacja Lagrange'a - wzór Lagrange'a ($e^{(lagr)}$) i wzór Newtona ($e^{(newt)}$), Interpolacja Hermite'a – wzór Newtona ($e^{(herm)}$).

Tabela 2: Porównanie błędów (Węzły Czebyszewa): Interpolacja Lagrange'a (Wzory Lagrange'a jako $e^{(lagr)}$ i Newtona jako $e^{(newt)}$), Interpolacja Hermite'a (Wzór Newtona jako $e^{(herm)}$)

n	$e_{\max}^{(lagr)}$	$e_{\max}^{(newt)}$	$e_{\max}^{(herm)}$	$e_{avg}^{(lagr)}$	$e_{avg}^{(newt)}$	$e_{avg}^{(herm)}$
4	1.6668e+01	1.6668e+01	2.2980e+01	2.9745e-01	2.9745e-01	8.4833e+00
7	2.5254e+01	2.5254e+01	2.1787e+01	3.7948e-01	3.7948e-01	7.9501e+00
10	1.1939e+01	1.1939e+01	9.7211e+00	2.2946e-01	2.2946e-01	3.3997e+00
13	1.0572e+01	1.0572e+01	5.6649e+00	1.7417e-01	1.7417e-01	1.8649e+00
16	1.1455e+01	1.1455e+01	3.0520e+00	1.6612e-01	1.6612e-01	8.5049e-01
19	5.7080e+00	5.7080e+00	1.3680e+00	9.4249e-02	9.4249e-02	3.8031e-01
20	7.2704e+00	7.2704e+00	2.6340e+00	8.7268e-02	8.7268e-02	3.9931e-01
25	4.4343e+00	4.4343e+00	3.1167e+04	6.3969e-02	6.3969e-02	3.3109e+03
30	1.4842e+00	1.4842e+00	2.9415e+07	2.4397e-02	2.4397e-02	2.3335e+06
40	5.5998e-01	4.0794e+00	1.2910e+14	6.7468e-03	2.1263e-02	1.2438e+13
45	3.2134e-01	3.4883e+02	6.4790e+17	4.3166e-03	1.4984e+00	4.3175e+16
50	1.1036e-01	2.0676e+04	1.4910e+21	1.4660e-03	8.2048e+01	1.3693e+20



(a) Błąd średni w skali logarytmicznej (węzły Czebyszewa)



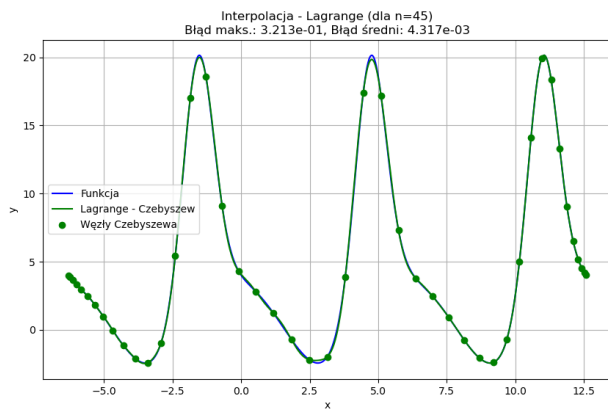
(b) Błąd maksymalny w skali logarytmicznej (węzły Czebyszewa)

Rysunek 3: Porównanie błędów (Węzły Czebyszewa): Interpolacja Lagrange'a – wzór Lagrange'a ($e^{(lagr)}$), Newtona ($e^{(newt)}$) oraz Hermite'a – wzór Newtona ($e^{(herm)}$).

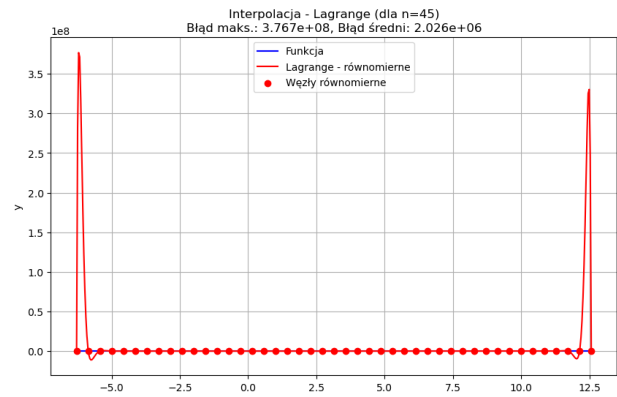
Analiza wykresów błędów interpolacji przedstawionych na rysunkach 2a, 2b, 3a i 3b pozwala wyciągnąć następujące wnioski:

- Dla węzłów **równoodległych** zauważalny jest wyraźny wzrost błędów (zarówno średniego, jak i maksymalnego) w miarę zwiększania liczby węzłów. Zjawisko to jest typowym objawem efektu Rungego, który nasila się szczególnie przy $n > 10$.
- W przypadku węzłów Czebyszewa wszystkie metody odznaczają się wyraźnie większą stabilnością i niższymi błędami. Szczególnie dobrze wypada tutaj interpolacja Lagrange'a, której błąd (dla wzoru Lagrange'a) maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów. Natomiast przy zastosowaniu wzoru Newtona przy $n = 40$ pojawia się zauważalny wzrost błędów spowodowany ograniczeniami arytmetyki zmiennoprzecinkowej. Z kolei w przypadku interpolacji Hermite'a przy $n > 19$ obserwuje się nagły wzrost błędu wynikający z niestabilności obliczeń zmiennoprzecinkowych.

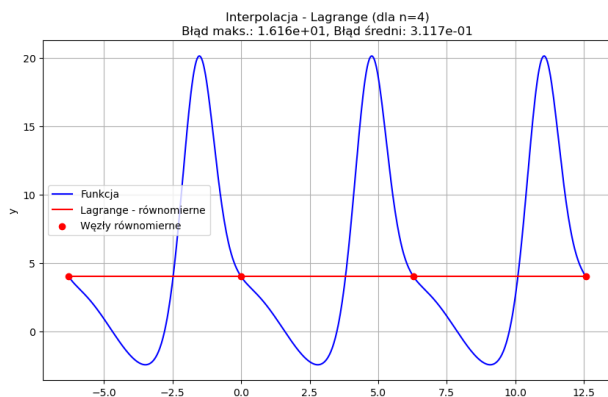
W celu lepszego zobrazowania zjawisk towarzyszących interpolacji, na kolejnych rysunkach zostaną przedstawione wybrane przebiegi funkcji interpolujących wraz z zaznaczonymi węzłami.



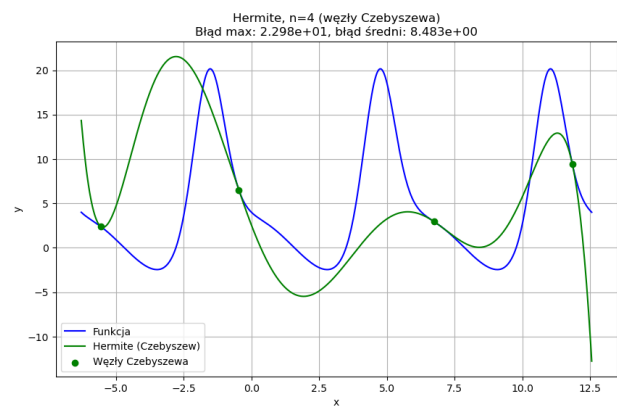
(a) Metoda Lagrange'a, Węzły Czebyszewa



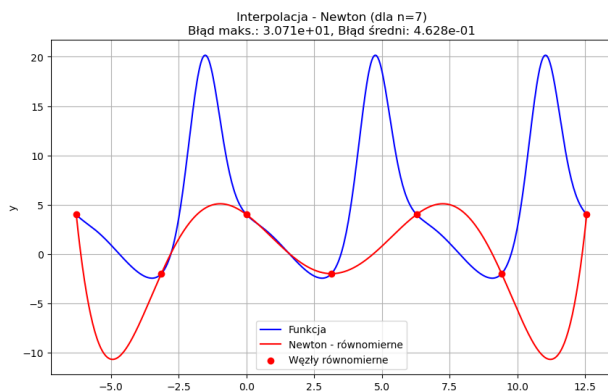
(b) Metoda Lagrange'a, Węzły równoodległe

Rysunek 4: Porównanie metod rozmieszczenia węzłów dla metody Lagrange'a dla $n = 45$ 

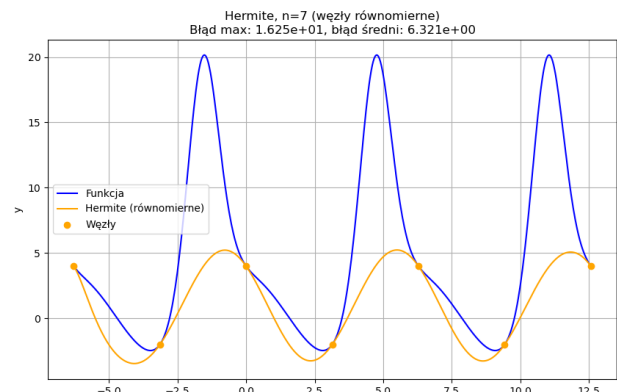
(a) Metoda Lagrange'a, Węzły równoodległe



(b) Metoda Hermite'a, Węzły Czebyszewa

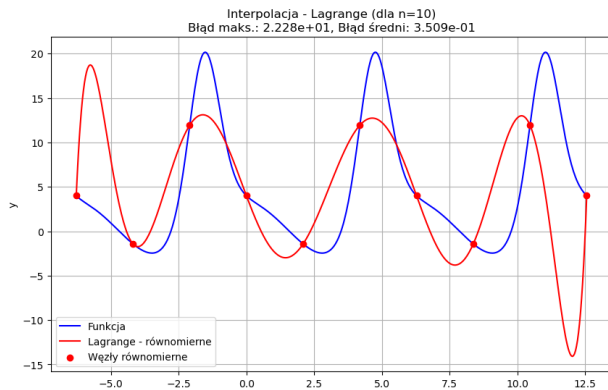
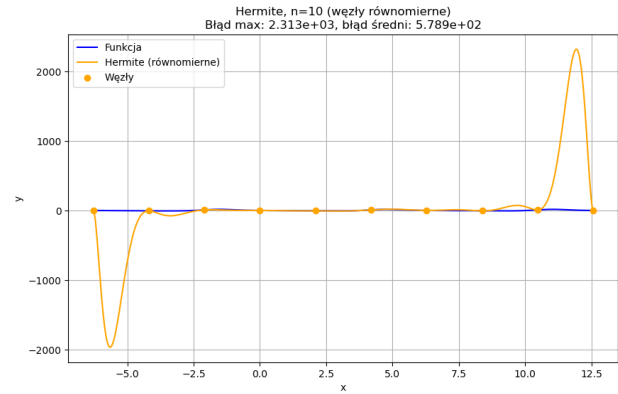
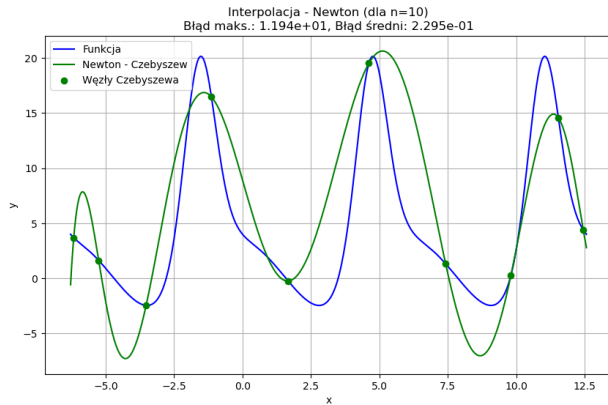
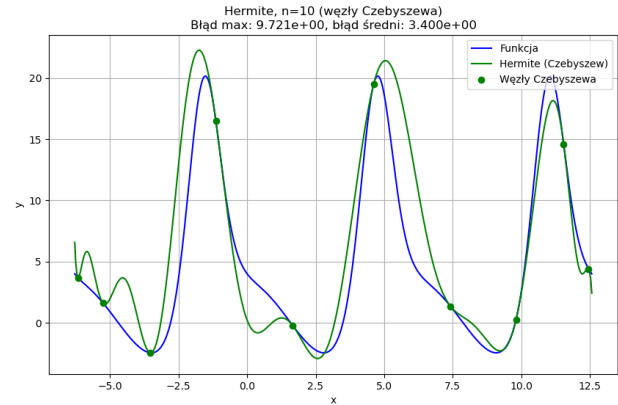
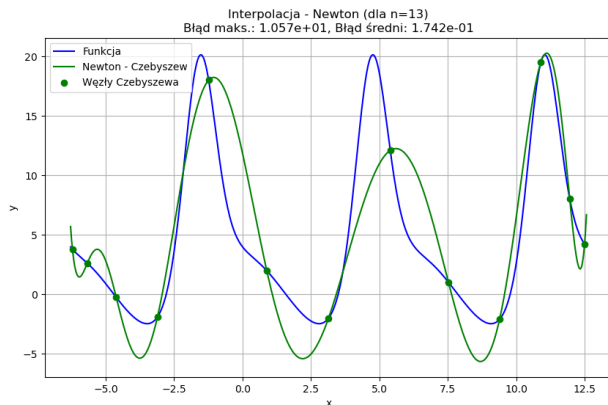
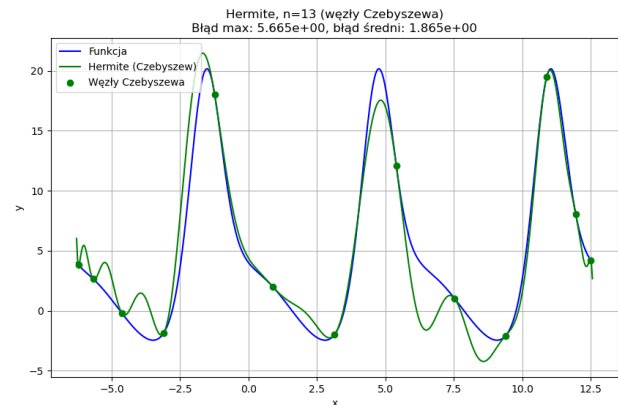
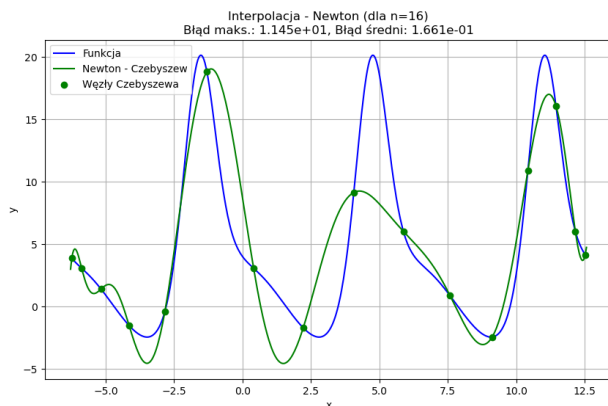
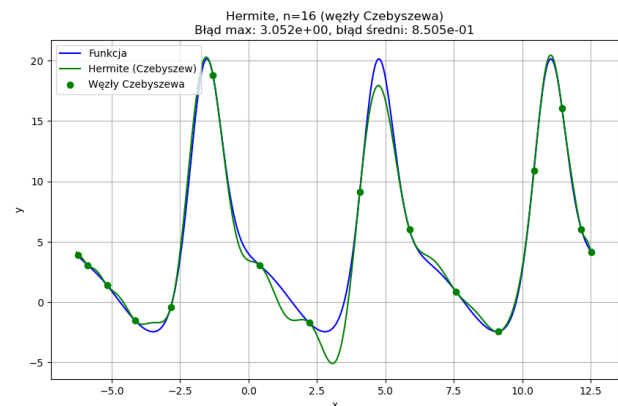
Rysunek 5: Wykresy dla $n = 4$ dla różnych metod interpolacji i rozmieszczenia węzłów.

(a) Metoda Lagrange'a, Węzły równoodległe

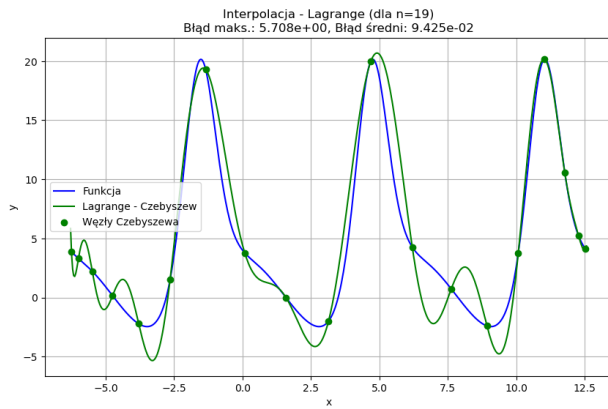
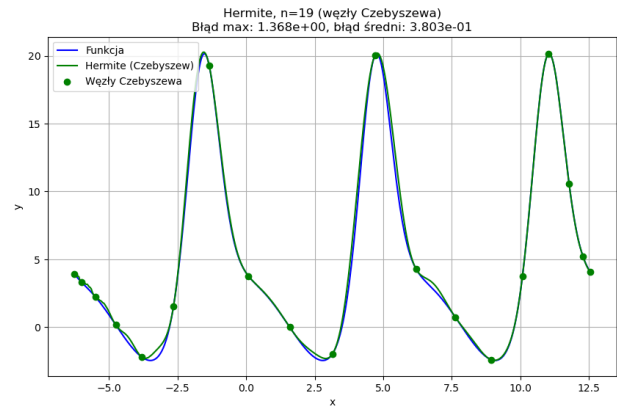
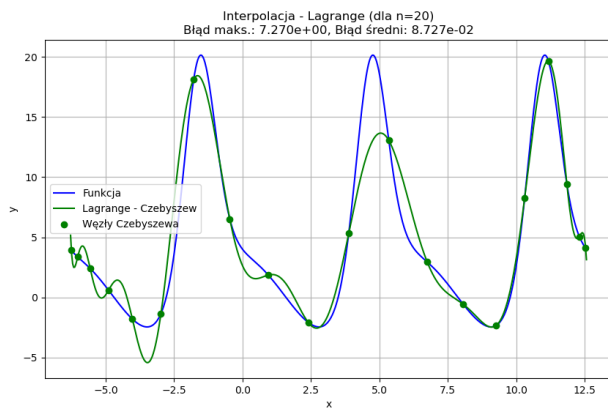
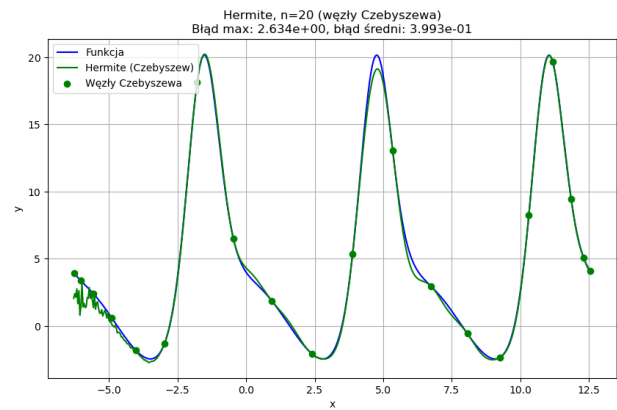
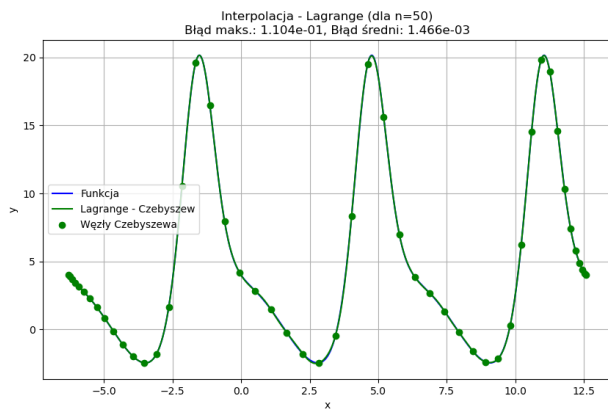
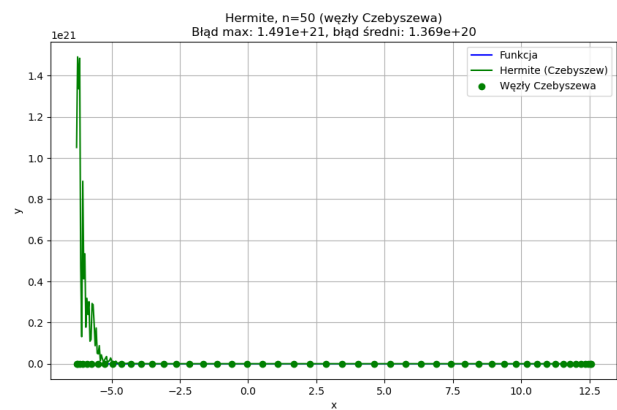


(b) Metoda Hermite'a, Węzły równoodległe

Rysunek 6: Porównanie dla $n = 7$ dla Metody Lagrange'a i Hermite'a, Węzły równoodległe

(a) Lagrange $n = 10$, Węzły równoodległe(b) Hermite $n = 10$, Węzły równoodległe(c) Lagrange $n = 10$, Węzły Czebyszewa(d) Hermite $n = 10$, Węzły Czebyszewa(e) Lagrange $n = 13$, Węzły Czebyszewa(f) Hermite $n = 13$, Węzły równoodległe(g) Lagrange $n = 16$, Węzły Czebyszewa(h) Hermite $n = 16$, Węzły równoodległe

Rysunek 7: Porównanie wybranych wyników interpolacji dla różnych metod i rozmieszczeń węzłów dla $n = 10, 13, 16$.

(a) Metoda Lagrange'a, $n = 19$ (b) Metoda Hermite'a, $n = 19$ (c) Metoda Lagrange'a, $n = 20$ (d) Metoda Hermite'a, $n = 20$ **Rysunek 8:** Wykresy dla $n = 19, 20$ dla różnych metod interpolacji, węzły Czebyszewa.(a) Najlepiej dopasowany wielomian: Metoda Lagrange'a, Węzły Czebyszewa $n = 50$ (b) Wielomian dla Metody Hermite'a, Węzły Czebyszewa $n = 50$ **Rysunek 9:** Najlepsze dopasowanie wielomianu oraz analogiczne warunki dla metody Hermite'a

6 Opracowanie Danych

6.1 Różnice w metodach interpolacji i rozmieszczenia węzłów

Na rysunkach 4a i 4b ukazano, jak **rozmieszczenie węzłów** wpływa na kształt wielomianu: węzły równoodległe (4b) prowadzą do silnych oscylacji na krańcach, natomiast węzły Czebyszewa (4a) znacząco je redukują. Rysunki 5a i 5b pokazują **różnice między metodami Lagrange’a i Hermite’a** przy małej liczbie węzłów. W metodzie Lagrange’a (5a) wielomian przyjął niemal stałą wartość, natomiast metoda Hermite’a (5b) poprawnie dopasowała nachylenie krzywej w węzłach. Efekt ten widać także na rysunkach 6a i 6b, gdzie wielomian z rys. 6b dzięki wykorzystaniu informacji o pochodnych zdecydowanie lepiej oddaje okresowość funkcji.

6.2 Efekt Rungego

Efekt Rungego pojawia się przy **równoodległych węzłach**, gdy wzrasta stopień wielomianu. Na rysunkach 7a i 7b (dla $n = 10$) widoczne są wyraźne oscylacje na krańcach przedziału, szczególnie w metodzie Hermite’a (rys. 7b), gdzie wyższy stopień ($2n - 1$) dodatkowo wzmacnia ten efekt.

6.3 Korzystny wpływ węzłów Czebyszewa

Na rysunkach 7c–7h pokazano, że **węzły Czebyszewa** znacząco poprawiają dokładność interpolacji, zwłaszcza w metodzie Hermite’a, gdzie dodatkowo wykorzystuje się informacje o pochodnych. Przy $n = 16$ (rys. 7h) błąd maksymalny jest rzędu jednościci, a przebieg interpolujący niemal pokrywa się z funkcją. Dla porównania, wielomian Lagrange’a o tej samej liczbie węzłów (rys. 7g) generuje błąd maksymalny sięgający rzędu 10 i wyraźniej odbiega od krzywej w obszarach między węzłami.

6.4 Wrażliwość obliczeń w interpolacji Hermite’a

Wzrost liczby węzłów wpływa także na wrażliwość obliczeniową, co dobrze widać na rysunkach 8a–8d. Dla $n = 19$ (rys. 8b) metoda Hermite’a daje najlepsze uzyskane dla tej metody dopasowanie. Jednak już dla $n = 20$ (rys. 8d) pojawiają się wyraźne odchylenia, wynikające przede wszystkim z wysokiego stopnia wielomianu ($2n - 1 = 39$), który potęguje wpływ błędów obliczeń zmiennoprzecinkowych. Dla porównania, metoda Lagrange’a (rys. 8a i 8c), mimo że bywa mniej precyzyjna, zachowuje większą stabilność obliczeniową.

6.5 Przypadek dużej liczby węzłów

Ostatecznie, przy $n = 50$ (rys. 9a i 9b) widać dwa skrajne przypadki. Najlepsze przybliżenie (zarówno względem błędu średniego, jak i maksymalnego) uzyskano na rys. 9a (Metoda Lagrange’a, wzór Lagrange’a). Natomiast w 9b (Metoda Hermite’a) obserwuje się błąd rzędu 10^{21} , co wskazuje na całkowite zaburzenie interpolacji.

7 Podsumowanie Zagadnienia

Przeprowadzone doświadczenia pokazują, że **interpolacja Lagrange’a**, tworzona według **wzoru Lagrange’a**, okazuje się wyjątkowo stabilna numerycznie, zwłaszcza przy zastosowaniu **węzłów Czebyszewa**, które istotnie ograniczają efekt Rungego i umożliwiają poprawne przybliżanie funkcji nawet przy dużej liczbie węzłów.

Natomiast **interpolacja Hermite’a**, dzięki wykorzystaniu informacji o pochodnych, może zapewnić wysoką dokładność przy relatywnie niewielkiej liczbie węzłów. Należy jednak pamiętać, że wysoki stopień wielomianu ($2n - 1$) sprzyja pojawieniu się błędów arytmetyki zmiennoprzecinkowej (przy dużej liczbie węzłów) oraz nasileniu efektu Rungego (przy węzłach równoodległych).

Metoda Lagrange’a, wymagająca jedynie wartości funkcji (bez informacji o pochodnych), bywa więc najlepszym wyborem tam, gdzie kluczowa jest stabilność obliczeń przy wysokich stopniach wielomianu oraz uzyskanie globalnie dobrego dopasowania. Z kolei **Interpolacja Hermite’a** jest szczególnie przydatna w sytuacjach, gdy dysponujemy analizą pochodnych i zależy nam na precyzyjnym odtworzeniu przebiegu funkcji, w przypadku niewielkiej liczby węzłów.