

AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Aproksymacja wielomianami algebraicznymi
Zadanie 4

Maciej Kmąk
Informatyka WI AGH, II rok

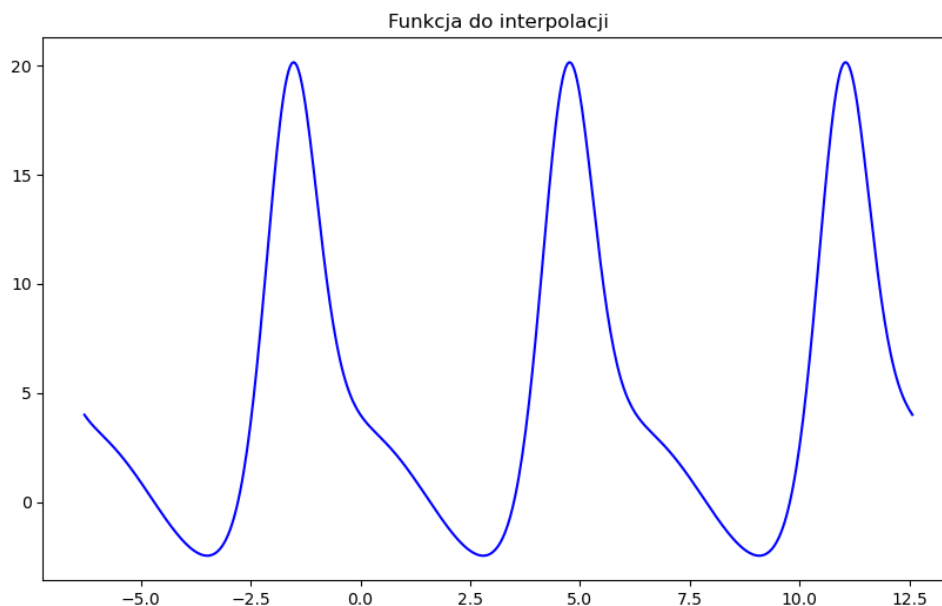
1 Treść Zadania

Celem ćwiczenia jest zbadanie efektywności aproksymacji funkcji $f(x)$ metodą najmniejszych kwadratów (LSM) z wykorzystaniem wielomianów algebraicznych różnego stopnia. Analizie poddano wpływ liczby węzłów aproksymacyjnych oraz stopnia wielomianu na dokładność dopasowania.

Rozpatrywana funkcja została zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x) \quad \text{dla } x \in [-2\pi, 4\pi]$$

Jej wykres przedstawiono na rysunku 1:



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$

2 Dane techniczne

Doświadczenie zostało przeprowadzone na komputerze osobistym o następującej specyfikacji:

- System operacyjny:
 - Windows 11 Pro
- Procesor:
 - 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1235U, 1.3 GHz
- Środowisko programistyczne:
 - Python 3.12
 - Biblioteki:
 - * NumPy
 - * Pandas
 - * Matplotlib
 - * Seaborn

3 Przebieg Doświadczenia

Doświadczenie polegało na przybliżeniu funkcji $f(x) = e^{-3 \cdot \sin(x)} + 3 \cdot \cos(x)$ na przedziale $[-2\pi, 4\pi]$ za pomocą wielomianów algebraicznych wyznaczonych metodą najmniejszych kwadratów (LSM).

W pierwszym etapie:

- wybrano równoodległe węzły aproksymacyjne x_i w liczbie n , gdzie $n \in \{3, 6, 9, \dots, 51\}$,
- wyznaczono wartości funkcji $f(x_i)$ w tych punktach,
- dla każdej liczby węzłów rozważano różne stopnie wielomianu d , przy czym $d < n$ oraz $d \in \{2, 5, 8, \dots, 50\}$,
- skonstruowano macierz Vandermonde'a A odpowiednią dla danego d ,
- rozwiązano układ równań normalnych $A^T A \vec{c} = A^T \vec{y}$, gdzie \vec{c} to wektor współczynników aproksymującego wielomianu, z wykorzystaniem funkcji `np.linalg.solve`.

W drugim etapie:

- obliczono błędy aproksymacji (błąd maksymalny oraz średni) w $N = 5000$ równoodległych punktach kontrolnych z przedziału $[-2\pi, 4\pi]$,
- wygenerowano mapy ciepłe (heatmaps) przedstawiające zależność błędów od liczby węzłów n oraz stopnia wielomianu d ,
- określono najlepszą i najgorszą konfigurację (pod względem błędu średniego), dla których wygenerowano osobne wykresy porównawcze.

3.1 Wzory na błąd maksymalny i błąd średni

Maksymalny błąd:

$$e_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (|f(x_i) - p(x_i)|)$$

Średni błąd:

$$e_{\text{avg}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2}}{N}$$

Gdzie:

- $f(x_i)$ — wartość funkcji oryginalnej w punkcie x_i ,
- $p(x_i)$ — wartość wielomianu dopasowanego metodą najmniejszych kwadratów w x_i .

4 Wyniki doświadczenia

Wyniki przeprowadzonych obliczeń zostały zebrane w postaci zestawu: liczba węzłów n , stopień wielomianu d , błąd maksymalny e_{\max} oraz błąd średni e_{avg} .

Analiza map błędów

W celu analizy jakości aproksymacji, wygenerowano dwie mapy cieplne (heatmapy):

- **Rysunek 2:** przedstawia wartości błędu maksymalnego e_{\max} w zależności od liczby węzłów n (oś pionowa) i stopnia wielomianu d (oś pozioma). Użycie skali barwnej umożliwia łatwe wskazanie obszarów, w których aproksymacja jest szczególnie niedokładna.
- **Rysunek 3:** przedstawia wartości błędu średniego e_{avg} , stanowiącego bardziej stabilną miarę jakości aproksymacji. Jasne obszary wskazują konfiguracje o najlepszym dopasowaniu.

Przegląd zaprezentowanych wykresów pokazuje, że skuteczność aproksymacji silnie zależy od właściwego doboru liczby węzłów oraz stopnia wielomianu. Już na podstawie wizualnej analizy można wyróżnić charakterystyczne zjawiska, takie jak niedostateczne dopasowanie przy zbyt prostych modelach, lokalne oscylacje przy wyższych stopniach czy ekstremalne odchylenia wynikające z efektu Rungego. Różnice między wykresami jednoznacznie wskazują, że nie istnieje jeden uniwersalny zestaw parametrów — skuteczność metody najmniejszych kwadratów zależy od właściwego ich zbalansowania.

Dokładniejsze omówienie zaobserwowanych zjawisk oraz interpretacja ich przyczyn przedstawione zostały w następnej części — **Opracowanie Danych**.

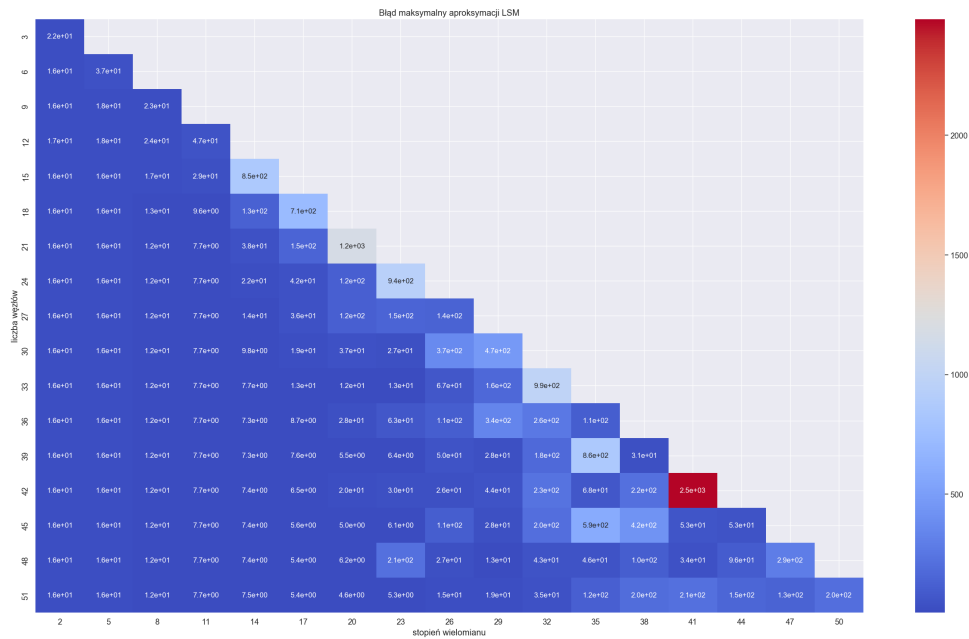
Skrajne przypadki aproksymacji

Zidentyfikowano również konfiguracje dające **najlepszą** oraz **najgorszą** aproksymację pod względem błędu średniokwadratowego. Dla obu przypadków wygenerowano wykresy porównujące funkcję oryginalną $f(x)$ z jej przybliżeniem oraz zaznaczono węzły użyte do obliczeń. Przedstawiono je odpowiednio na:

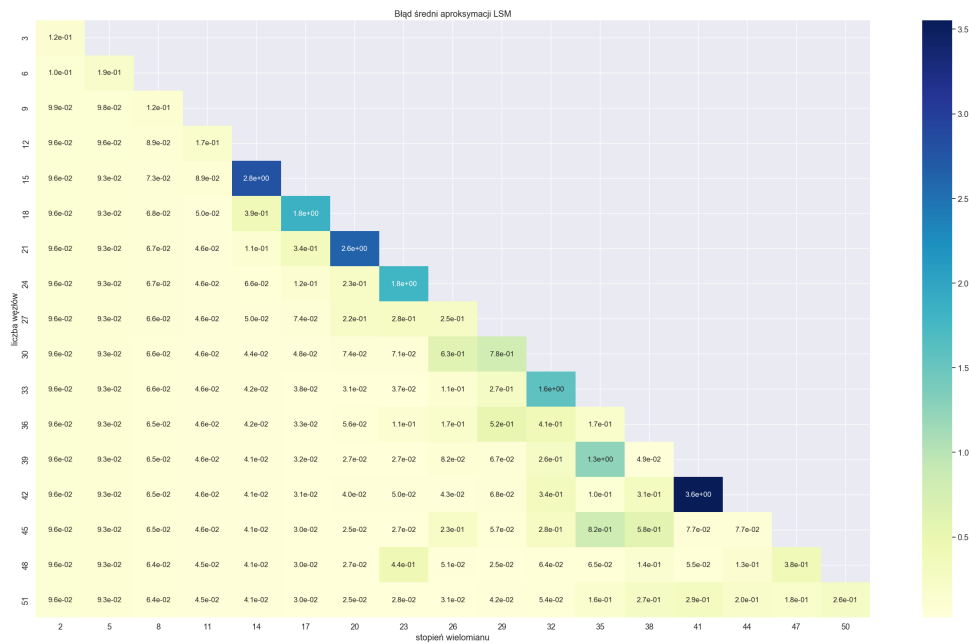
- **Rysunek 4a:** Najlepsza aproksymacja (najmniejszy błąd średniokwadratowy),
- **Rysunek 4b:** Najgorsza aproksymacja (największy błąd średniokwadratowy).

Analiza wybranych przypadków aproksymacji

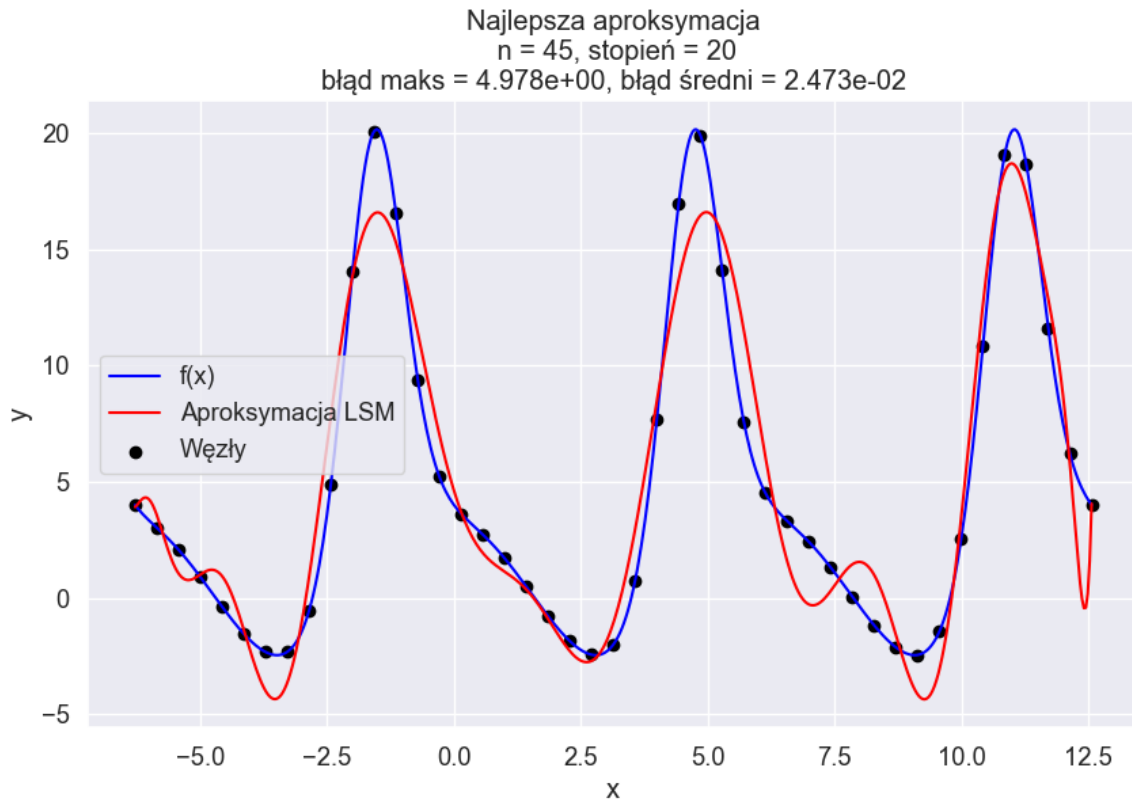
Na kolejnych rysunkach (rys. 5–10) przedstawiono pozostałe przypadki aproksymacji, generowane automatycznie dla różnych par (n, d) . Wykresy te umożliwiają ocenę wpływu liczby węzłów oraz stopnia wielomianu na jakość dopasowania funkcji aproksymującej.



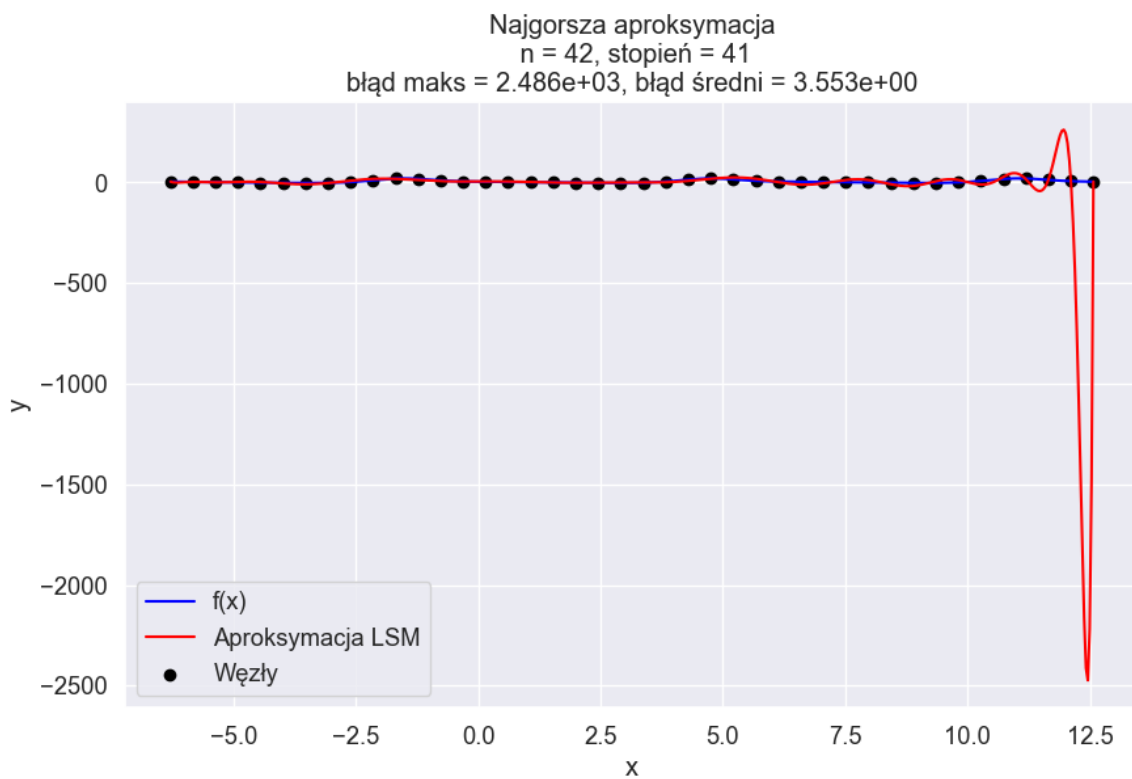
Rysunek 2: Mapa cieplna błędu maksymalnego aproksymacji funkcji $f(x)$ metodą najmniejszych kwadratów w zależności od liczby węzłów n (oś pionowa) i stopnia wielomianu d (oś pozioma).



Rysunek 3: Mapa cieplna średniego błędu aproksymacji funkcji $f(x)$ metodą najmniejszych kwadratów w zależności od liczby węzłów n (oś pionowa) i stopnia wielomianu d (oś pozioma).

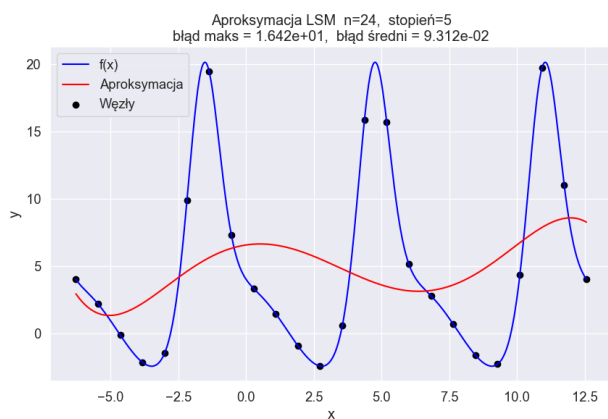


(a) Najlepsza aproksymacja: najmniejszy błąd średni (e_{avg}).

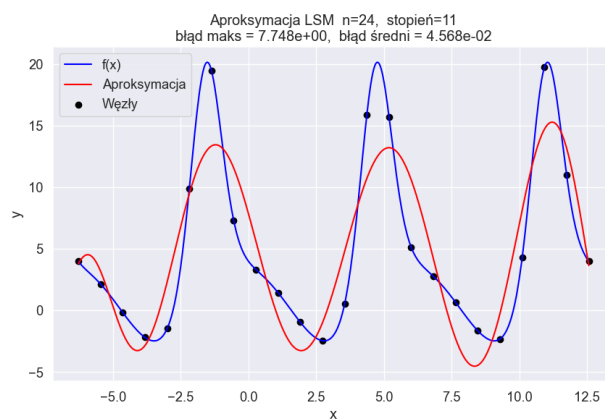


(b) Najgorsza aproksymacja: największy błąd średni (e_{avg}). Spowodowane efektem Rungego.

Rysunek 4: Porównanie najlepszej i najgorszej aproksymacji funkcji $f(x)$ uzyskanej metodą najmniejszych kwadratów.

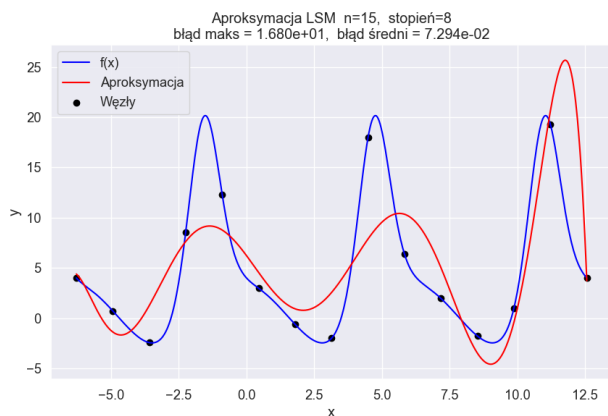


(a) $n = 24, d = 5$ Aproksymacja wyraźnie odbiega od rzeczywistego przebiegu funkcji – model jest zbyt prosty, by uchwycić jej charakterystyczne cechy

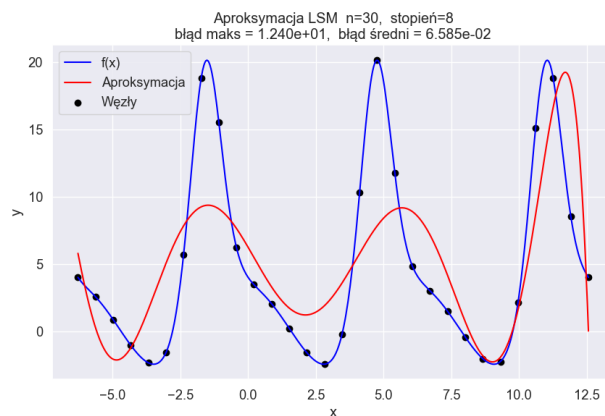


(b) $n = 24, d = 11$ Aproksymacja bardzo dokładna – przebieg wielomianu wiernie oddaje kształt funkcji, a wartości błędów są jednymi z najniższych

Rysunek 5: Porównanie jakości aproksymacji dla tej samej liczby węzłów ($n = 24$) i dwóch różnych stopni wielomianu. Dobór odpowiedniego stopnia d ma istotny wpływ na precyzję przybliżenia funkcji.

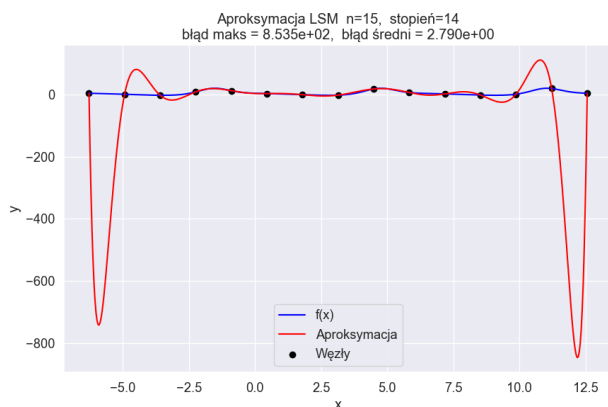


(a) $n = 15, d = 8$ Ekstrema funkcji odwzorowane, choć dopasowanie jest umiarkowane i widoczna jest pewna sztywność modelu

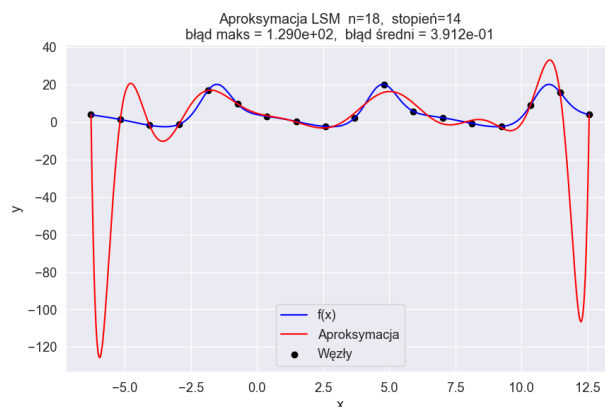


(b) $n = 30, d = 8$ Ekstrema są lepiej odwzorowane, a dopasowanie jest wyraźnie dokładniejsze pod względem błędu maksymalnego, jak i średniego

Rysunek 6: Przykłady wpływu liczby węzłów n przy stałym stopniu wielomianu $d = 8$

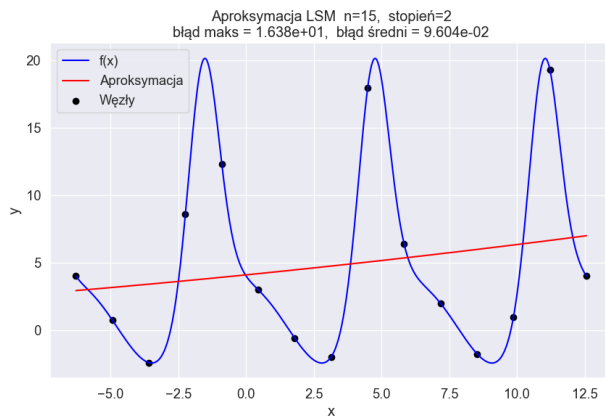


(a) $n = 15, d = 14$

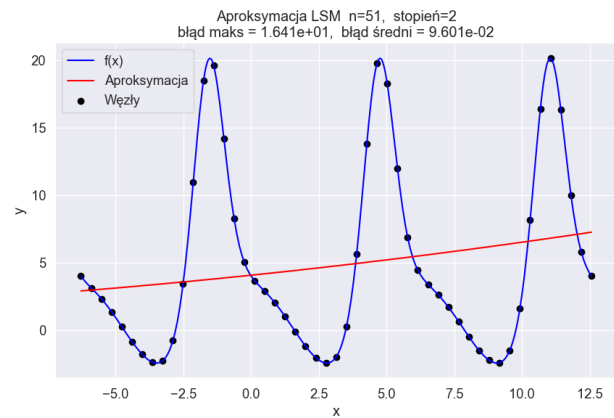


(b) $n = 18, d = 14$

Rysunek 7: Znaczny efekt Rungego dla $d = 14, n \approx d$

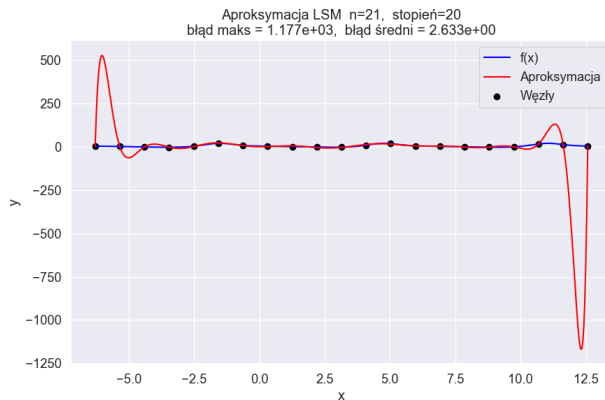


(a) $n = 15, d = 2$ Wielomian jest zbyt prosty, by uchwycić złożoność funkcji

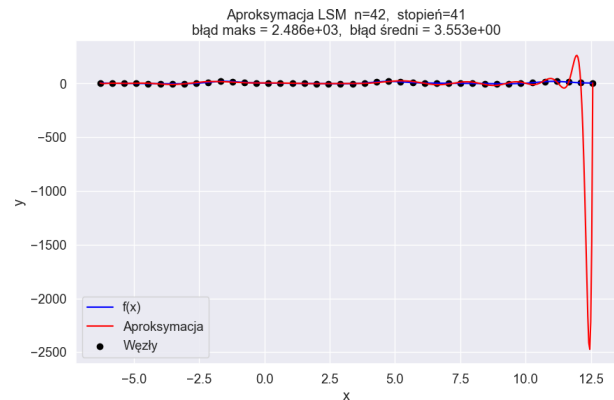


(b) $n = 51, d = 2$ Więcej węzłów nie poprawia dopasowania przy tak niskim stopniu

Rysunek 8: Efekt użycia niskiego ($d = 2$) stopnia wielomianu w metodzie najmniejszych kwadratów

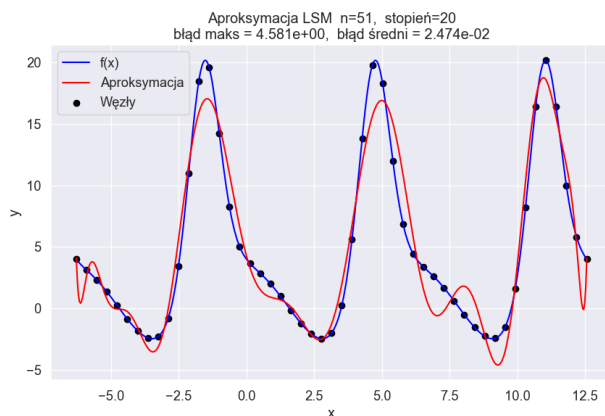


(a) $n = 21, d = 20$ Druga największa zaobserwowana wartość błędu maksymalnego.

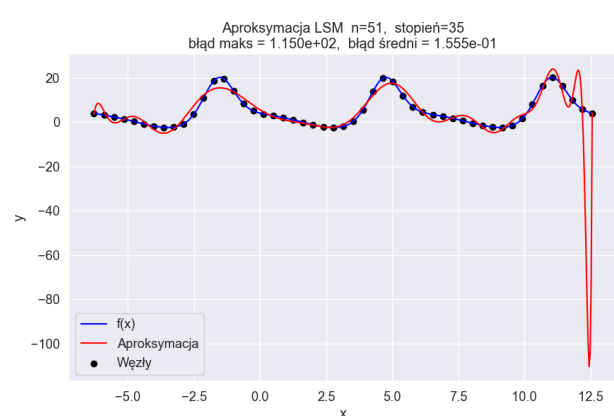


(b) $n = 42, d = 41$ Największe zaobserwowane wartości błędów maksymalnego i średniego.

Rysunek 9: Przypadki największych błędów aproksymacji – efekt Rungego



(a) $n = 51, d = 20$, Dobre dopasowanie funkcji



(b) $n = 51, d = 35$ Znaczny efekt Rungego

Rysunek 10: Porównanie aproksymacji: $n = 51$

5 Opracowanie Danych

Na podstawie wygenerowanych wykresów i map cieplnych można sformułować kilka istotnych wniosków dotyczących jakości aproksymacji funkcji $f(x)$ metodą najmniejszych kwadratów przy użyciu wielomianów algebraicznych.

5.1 Wpływ stopnia wielomianu przy stałej liczbie węzłów

Rysunek 5 ilustruje znaczenie właściwego doboru stopnia d przy ustalonej liczbie węzłów $n = 24$. Dla $d = 5$ model jest zbyt uproszczony i nie oddaje charakterystycznych cech funkcji. Natomiast zwiększenie stopnia do $d = 11$ prowadzi do znacznie lepszego dopasowania — funkcja aproksymująca odwzorowuje przebieg oryginału z wysoką dokładnością, co potwierdzają także wartości błędów.

5.2 Wpływ liczby węzłów przy stałym stopniu wielomianu

Rysunek 6 pokazuje, jak zmiana liczby węzłów wpływa na jakość dopasowania przy stałym stopniu wielomianu ($d = 8$). Dla mniejszej liczby węzłów ($n = 15$) aproksymacja zachowuje podstawowy kształt funkcji — ekstrema są odwzorowane, ale model jest wyraźnie uproszczony. Przy $n = 30$ dopasowanie staje się znacznie lepsze: zarówno błąd maksymalny, jak i średni maleją, a funkcja aproksymująca wierniej odwzorowuje szczegóły oryginału.

Jednak gdy stopień d zbliża się do liczby węzłów, jak w przypadku $d = 14$ i $n = 15$ lub $n = 18$, widocznym na rysunku 7, dochodzi do zjawiska charakterystycznego dla interpolacji — pojawia się znaczny efekt Rungego.

5.3 Wpływ zbyt niskiego stopnia wielomianu

Rysunek 8 prezentuje przypadki, w których zastosowano bardzo niski stopień wielomianu ($d = 2$) przy dwóch różnych liczbach węzłów: $n = 15$ oraz $n = 51$. Oba wykresy jednoznacznie wskazują, że tak prosty model matematyczny jest niewystarczający do uchwycenia złożonego charakteru funkcji $f(x)$. Nawet znaczące zwiększenie liczby węzłów (z 15 do 51) nie poprawia dopasowania — aproksymacja pozostaje niedokładna, a błąd średni i maksymalny pozostają wysokie.

5.4 Krytyczne przypadki

Na rysunku 9 przedstawiono przypadki największych błędów maksymalnych i średnich. Oba wykresy wskazują, że przy zbyt wysokim stopniu dopasowania (np. $d = n - 1$) i niedostatecznej liczbie węzłów, wielomian może wykazywać silne zaburzenia.

5.5 Wpływ liczby węzłów i stopnia wielomianu

Z rysunków 2 i 3 wynika, że jakość aproksymacji jest silnie zależna zarówno od liczby węzłów n , jak i od stopnia wielomianu d . Niskie wartości d prowadzą do niedoszacowania kształtu funkcji, nawet przy dużej liczbie węzłów (rys. 8). Z kolei wysokie stopnie d , szczególnie przy dużym n , mogą powodować efekt Rungego (rys. 10).

6 Podsumowanie Zagadnienia

Dokładność aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów silnie zależy od właściwego doboru liczby węzłów n i stopnia wielomianu d . Zbyt niski stopień prowadzi do niedopasowania modelu do danych, przez co aproksymacja nie oddaje kluczowych cech funkcji. Z kolei zbyt wysoki stopień, szczególnie przy nieodpowiednio dobranej liczbie węzłów, skutkuje niestabilnością. Wyniki doświadczenia pokazują, że nie istnieje uniwersalna konfiguracja parametrów gwarantująca wysoką jakość aproksymacji. Wybór wartości n i d powinien być dostosowany do konkretnej funkcji oraz kontekstu obliczeń.