Matematiikkaa OpenGL-kurssille

Janne Koponen

September 24, 2018

Materiaali

`https://tinyurl.com/KAMK-OpenGL18`

Taustaa

Esimerkki 1

Pelihahmo istuu autossa joka liikkuu. Kuinka pelihahmo saadaan piirrettyä näytölle?

- *Käytetään erilaisia koordinaatistoja apuna.*
- *Tehdään koordinaatistomuunnokset hierarkisesti:*
  - *Hahmon koordinaatisto* $\rightarrow$ *auton koordinaatisto* $\rightarrow$ *maailman koordinaatisto* $\rightarrow$ *kameran koordinaatisto* $\rightarrow$ *näytön koordinaatisto*

Toteutus

Esimerkki 1

- *Ideana on laskea kaikille hahmon piirtämiseen tarvittaville pisteille yksi kuvaus, jolla kaikki hahmon pisteet voidaan muuntaa maailman koordinaatistoon.*
- *Voidaan luoda puumainen esitys eri koordinaatistoista.*
  - *Puun solmuun on tallennettu muunnos kyseisestä koordinaatistosta johonkin puun juurta lähempänä olevaan koordinaatistoon (yleensä kameran koordinaatistoon).*
  - *Muunnos koordinaatistosta toiseen sisältää yleensä kierron, siirroksen ja skaalauksen tai vain joitakin näistä.*
- *Koordinaatistomuunnosten käsittelyyn tarvitsemme lisää työkaluja:*
  - *Matriisit ja vektorit*

Yhteenlasku

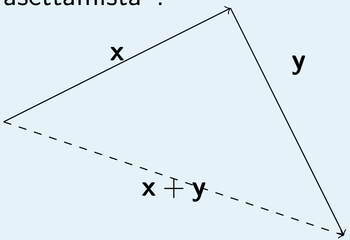
Määritelmä

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ ja} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_n - y_n \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Huomautus

Geometrisesti yhteenlasku tarkoittaa "kahden vektorin peräkkäin asettamista".



Esimerkkejä

Esimerkki 2

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \pi & \ln 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \ln 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi + \sqrt{2} & \ln 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \quad \textit{Ei määritelty!} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Skalaarilla kertominen

Huomautus

Skalaarilla tarkoitetaan $\mathbb{R}$:n lukua.

Määritelmä

Skalaarin $a \in \mathbb{R}$ ja vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tulo

$$a\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_n \end{pmatrix}.$$

Huomautus

Geometrisesti tämä tarkoittaa vektorin pituuden kertomista sen suunnan säilyttäen.

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vastavektori $-\mathbf{x} = -1\mathbf{x}$.

Interpolointi

Esimerkki 3

Olkoon $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. *Tällöin kuvaus*

$$\mathbf{c}(t) = t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}, \text{ kun } t \in [0, 1] ,$$

interpoloi lineaarisesti vektorin $\mathbf{a}$ *vektoriksi* $\mathbf{b}$.

Normi

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{x}$ *pituus, eli normi*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden välinen etäisyys

Esimerkki 4

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahden pisteen $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ etäisyys voidaan laskea normin avulla.

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tällöin pisteiden välinen etäisyys

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \left\|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 0 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{17} \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \,. \end{aligned}$$

Yksikkövektori ja samansuuntaisuus

Määritelmä

Yksikkövektori on vektori jonka pituus on 1.

Määritelmä

1. *Olkoon* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin* $\mathbf{x}$ *on samansuuntainen kuin* $\mathbf{y}$ *jos on olemassa* $a \in \mathbb{R}$ *s.e* $\mathbf{x} = a\mathbf{y}$ *ja* $a > 0$.
2. *Jos* $-\mathbf{x}$ *on samansuuntainen kuin* $\mathbf{y}$, *niin tällöin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.*
3. *Jos vektorit ovat samansuuntaisia tai vastakkaissuuntaisia, niin tällöin vektorit ovat yhdensuuntaiset.*

Yksikkövektori

Lause 1

Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| \neq 0$. *Tällöin* $\mathbf{x}$*:n kanssa samansuuntainen yksikkövektori* $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$.

Huomautus

1. Usein käytetään termiä $\mathbf{x}$:n suuntainen yksikkövektori.
2. Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, niin jatkossa $\hat{\mathbf{x}}$ on $\mathbf{x}$:n suuntainen yksikkövektori.

Esimerkki

Esimerkki 5

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{16465} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{\sqrt{16465}}\mathbf{x} . \end{aligned}$$

Esimerkki

Esimerkki 6

Tiedetään, että $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ *ja* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{8}$, *lasketaan* $\mathbf{x}$.

1. *Tiedetään, että* $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$.
2. *Siten*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \|\mathbf{x}\|\hat{\mathbf{x}} \\
&= \sqrt{8}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{8}\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{8}\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{4} & -\sqrt{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Suuntavektori avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteestä toiseen

Esimerkki 7

Monesti peleissä/simulaatioissa tarvitaan tieto kahta avaruuden pistettä yhdistävän suuntajanan suunnasta. Tämä tieto voidaan laskea käyttämällä yksikkövektoria.

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$. *Tällöin suunta* $\mathbf{x}$*:stä* $\mathbf{y}$*:hyn*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{37}}\begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Harjoituksia

(1) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$. Mikäli laskutoimitukset on määritelty, niin laske

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + \mathbf{w}$, $\mathbf{z} + \mathbf{w}$, $\mathbf{x} + \mathbf{w}$ ja $\mathbf{y} - \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{w}\|$, $\|\mathbf{z}\| + \mathbf{w}$, $\|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{w}\|$ ja $\|\mathbf{y}\|\mathbf{y}$.

(2) Olkoon vektorit kuten edellä. Laske kunkin vektorin kanssa samansuuntainen yksikkövektori.

(3) Olkoon vektorit kuten edellä. Tutki niiden avulla päteekö $\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{q}}$, jossa $\mathbf{q} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(4) Jos $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$, niin ovatko $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ samansuuntaiset?

(5) Jos $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$ ja $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, niin onko $\mathbf{x} = \mathbf{y}$?

(6) Onko olemassa $\mathbb{R}^2$:n vektoreita $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ s.e $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3$ ja $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$?

Pistetulo

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*. Tällöin pistetulo (sisätulo)*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Lause 2

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *ja* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *sekä* $a \in \mathbb{R}$*. Tällöin*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \ , \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \ , \\ (a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \ \textit{ja} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \gamma \ , \end{aligned}$$

jossa γ *on vektoreiden* $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y}$ *välinen kulma.*

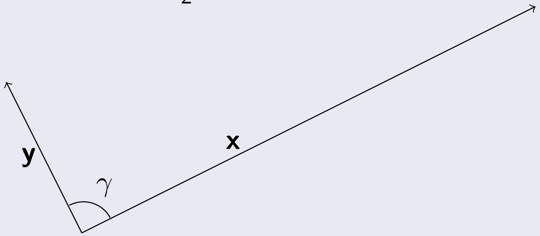
Vektoreiden kohtisuoruus

Lause 3

Olkoon $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$. *Jos* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, *niin tällöin* $\cos\gamma = 0$.

Seuraus 4

Tällöin $\gamma = \pm\frac{1}{2}\pi$, *eli vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.*



Vektoreiden välisen kulman laskeminen

Lause 5

Olkoon $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$. *Tällöin*

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \ .$$

Huomautus

Edellisestä saadaan vektoreiden välinen kulma ottamalla puolittain arccos.

Seuraus 6

Yksikkövektoreille $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$

$$\cos\gamma = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} \ .$$

Esimerkkejä

Esimerkki 8

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 \\
\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{15} \\
\|\mathbf{y}\| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\
\cos \gamma &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \\
&= \frac{2}{\sqrt{150}} \\
\Rightarrow \gamma &= \arccos \frac{2}{\sqrt{150}} \approx 1.407 \,.
\end{aligned}$$

Harjoituksia

(7) Laske vektorien $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ ja $\mathbf{y} = (0, 0, 1)$ pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ja sen avulla vektoreiden välinen kulma.

(8) Laske vektorien $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$ ja $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$ pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ja sen avulla vektoreiden välinen kulma.

(9) Osoita, että $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

(10) Osoita, että $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\hat{\mathbf{x}}$.

Pistetulon sovellus – projektio

Lause 7

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin* $\mathbf{x}$ *voidaan jakaa* $\mathbf{y}$*:n kanssa samansuuntaiseen komponenttiin* $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ *ja tätä vastaan kohtisuoraan komponenttiin* $P_{\perp\mathbf{y}}\mathbf{x}$.

1. *Jako on yksikäsitteinen,*
2. $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$ *ja*
3. $P_{\perp\mathbf{y}}\mathbf{x} = \mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$.

Vektoria $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ *kutsutaan* $\mathbf{x}$*:n projektioksi* $\mathbf{y}$*:lle.*

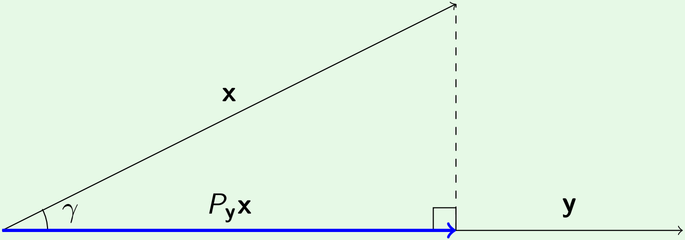
Huomautus

Edellä siis pätee

1. $\mathbf{y} \cdot P_{\perp\mathbf{y}}\mathbf{x} = 0$,
2. $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{x}$ kanssa.
3. $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + P_{\perp\mathbf{y}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Pistetulon sovellus – projektio

Esimerkki 8



Projektion laskenta käytännössä

Huomautus

Projektio voidaan laske ilman neliöjuurta käyttäen identiteettiä

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \ ,$$

jolloin

$$P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}\mathbf{y} \ .$$

Harjoituksia

(11) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Laske $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ ja $P_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$.

(12) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Laske $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ ja $P_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$.

(13) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$. Etsi jokin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ s.e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

(14) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. Etsi jokin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ s.e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Valon peiliheijastus

Esimerkki 9

Olkoon pinnan normaalivektori $\hat{\mathbf{n}}$ *ja suuntavektori pinnan pisteestä valonlähteeseen* $\hat{\mathbf{l}}$*. Tällöin valon peiliheijastus lähtee suuntaan*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \hat{\mathbf{l}} - \underbrace{2(\hat{\mathbf{l}} - P_{\hat{\mathbf{n}}}\hat{\mathbf{l}})}_{\text{Pinnan suuntainen}} \\ &= 2P_{\hat{\mathbf{n}}}\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}} \\ &= 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{l}})\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{l}}\ .\end{aligned}$$

Ristitulo

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. *Tällöin ristitulo*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} .$$

Huomautus

- Ristitulo määritellään ainoastaan $\mathbb{R}^3$:n vektoreille.
- Huomaa, että myös $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ on myös vektori.
- Ristitulon avulla saadaan selville kahden vektorin määräämän tason kanssa kohtisuora suunta.

Ristitulon ominaisuuksia

Lause 8

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *ja* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *ja* γ *vektoreiden* $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y}$ *välinen kulma. Tällöin*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin \gamma \ , \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = 0 \ , \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= -(\mathbf{y} \times \mathbf{x}) \ , \\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} &= \mathbf{0} \ , \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \ , \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \quad \textit{ja} \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \ . \end{aligned}$$

Suunnikkaan pinta-ala

Lause 9

Olkoon $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y}$ *suunnikkaan sivut. Tällöin suunnikkaan pinta-ala*

$$A = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| \ .$$

Seuraus 10

Jos kolmion kaksi sivua ovat $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y}$*, niin tällöin kolmion pinta-ala*

$$A = \frac{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|}{2} \ .$$

Pinnan normaalin laskenta

Esimerkki 10

- *Tieto pinnan normaalista tarvitaan esimerkiksi valaistuslaskennassa ja kappaleiden törmäyksiä mallinnettaessa.*
- *Pinta on usein tallennettu kolmioiden avulla ja kolmion kiinnittää kolme avaruuden pistettä* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *ja* $\mathbf{x}_3$
- *Oletetaan, että kulmapisteet kiertävät vastapäivään katsottaessa pinnan normaalin suunnasta.*
- *Sovelletaan ristituloa normaalin laskentaan. Saadaan*

$$\mathbf{n} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \; .$$

Harjoituksia

(15) Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Laske $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ja $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$

(16) Kolmion kulmat ovat pisteissä $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Laske pinnan normaali $\mathbf{n}$ ja sitä vastaava yksikkövektori $\hat{\mathbf{n}}$. Laske lisäksi kolmion pinta-ala.

(17) Osoita, että $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$.

(18) Osoita, että $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vektorien merkintä

Merkintä

Edellä vektorit kirjoitettiin aina vaakavektoreina ladontateknisistä syistä johtuen. Jatkossa vektori on kuitenkin aina pystyvektori, jos ei toisin mainita. Vektorien laskusäännöt pysyvät kuitenkin samoina.

Esimerkki 11

Aikaisemmin $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, *jatkossa* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Lineaarikuvaukset

Määritelmä

Kuvaus $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *on lineaarikuvaus jos:*

1. $c\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x})$ *ja*
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$,

jossa $c \in \mathbb{R}$ *ja* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Esimerkki 12

Lineaarikuvauksia ovat esimerkiksi skaalaus, peilaus, kierto ja "pienellä temppuilulla" myös siirrot.

Lause 11

Matriisien avulla voidaan esittää kaikki lineaarikuvaukset avaruudesta $\mathbb{R}^n$ *avaruuteen* $\mathbb{R}^m$. *Toisaalta kaikki matriisit määrittelevät lineaarikuvauksen, joten matriisit ja lineaarikuvaukset voidaan samaistaa.*

Matriisi

Määritelmä

Matriisi on $m \times n$ lukutaulukko, jossa on m riviä ja n saraketta. Tällä kurssilla matriisien alkiot ovat reaalilukuja.

Merkintä

Merkitään jatkossa matriiseja isoilla lihavoiduilla kirjaimilla. Olkoon $\mathbf{A}$ $m \times n$-matriisi. Tällöin merkitään $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Esimerkki 13

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tällöin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

Matriisin alkiot

Merkintä

Merkitään matriisin $\mathbf{A}$ *yksittäistä alkiota* a_{ij}*:llä (tai* $a_{i,j}$*:llä jos pilkku on tarpeen).* a_{ij} *on matriisin* i*:nnen rivin* j*:s alkio.*

Esimerkki 14

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$*. Tällöin*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} .$$

Matriisin transpoosi

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Tällöin matriisin* $\mathbf{A}$ *transpoosi*

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

muodostetaan "vaihtamalla matriisin rivit ja sarakkeet keskenään".

Huomautus

Pystyvektori $\mathbf{x}$ voidaan kirjoittaa muodossa
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$.

Matriisityyppejä

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- *Jos* $m = n$, *niin* $\mathbf{A}$*:n sanotaan olevan neliömatriisi.*
- *Jos* $n = 1$ *sanotaan matriisia pystyvektoriksi.*
    - *Samaistetaan jatkossa* $\mathbf{R}^m$*:n vektorit ja* $\mathbb{R}^{m \times 1}$ *matriisit.*
- *Jos* $m = 1$ *sanotaan matriisia vaakavektoriksi.*
- *Jos* $n = m = 1$, *niin samaistetaan* $\mathbf{A}$ *skalaarin* $a_{1,1} \in \mathbb{R}$ *kanssa.*

Neliömatriisi

Huomautus

Neliömatriisi:

- Yhtä monta saraketta ja riviä.
- Merkitään usein $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Samaistetaan lineaarikuvaukseen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Matriisit $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ja $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ ovat keskeisessä asemassa tietokonegrafiikassa.

Diagonaalimatriisi

Määritelmä

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *alkioita* a_{ij}*, joissa* $i = j$ *kutsutaan* $\mathbf{A}$*:n diagonaalialkioiksi. Mikäli matriisin kaikki alkiot lukuunottamatta diagonaalialkioita ovat* 0*, sanotaan matriisia diagonaalimatriisiksi.*

Merkintä

Diagonaalimatriisia, joka on myös neliömatriisi, voidaan merkitä lyhyemmin

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = diag(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Nollamatriisi

Määritelmä

Nollamatriisi

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Huomautus

- $\mathbf{0}$ on matriisiyhteenlaskun nolla-alkio, eli pätee $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- Merkintää $\mathbf{0}$ käytetään sekä matriisille, että vektorille. Mikäli sekaannuksen vaaraa on, käytetään nollavektorille jatkossa merkintää $\overline{\mathbf{0}}$.
- Nollamatriisin ei tarvitse olla neliömatriisi.

Matriisin kertominen skalaarilla

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$c\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \dots & ca_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Matriisin ja vektorin välinen kertolasku

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ja* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Määritellään tällöin tulo*

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Huomautus

Tulosvektorin alkio paikassa i on $(\mathbf{Ax})_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Esimerkki

Esimerkki 15

Olkoon $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Matriisien kertolasku (1/2)

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ja* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. *Määritellään tulo*

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,p} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}.
\end{aligned}$$

Matriisien kertolasku (2/2)

Huomautus

Määritelmästä seuraa suoraan, että tulomatriisin rivien lukumäärän määrää **A**:n rivien lukumäärä ja sarakkeiden lukumäärän määrää **B**:n sarakkeiden lukumäärä. Lisäksi on huomioitava, että **A**:ssa on oltava yhtä monta saraketta kuin **B**:ssä on rivejä.

Huomautus

Tulomatriisin riville i, sarakkeeseen j tulee kertolaskussa arvo

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \ .$$

Matriisin ja vektorin välinen kertolasku ja pistetulo

Huomautus

Matriisin ja vektorin kertolasku saadaan näin erikoistapauksena matriisien kertolaskusta. Lisäksi pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

Esimerkki

Esimerkki 16

Olkoon $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Identiteettimatriisi

Määritelmä

Identiteetti- eli yksikkömatriisi

$$\mathbf{I} = diag(1, 1, \ldots 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

Huomautus

Identiteettimatriisi on matriisikertolaskun ykkösalkio, eli sille pätee $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$. Vastaavasti pätee myös $\mathbf{BI} = \mathbf{B}$.

Matriisilaskujen ominaisuuksia

Lause 12

Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *ja* $\mathbf{C}$ *matriiseja ja* c *skalaari. Mikäli laskutoimitukset ovat määriteltyjä, niin*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} \,, \\
\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \,, \\
\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \,, \\
c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \,, \\
(c\mathbf{A})\mathbf{B} &= c(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B}) \,, \\
\mathbf{A}\mathbf{0} &= \mathbf{0} \textit{ ja } \mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0} \,, \\
\mathbf{A}\mathbf{I} &= \mathbf{A} \textit{ ja } \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} \,, \\
\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} \,, \\
\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\mathbf{C}) \,, \\
\mathbf{A} &= (\mathbf{A}^T)^T \text{ ja} \\
(\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \,.
\end{aligned}
$$

Käänteismatriisi

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, siis neliömatriisi. Mikäli on olemassa matriisi* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *siten, että*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \ ,$$

niin $\mathbf{A}^{-1}$ *on tällöin* $\mathbf{A}$*:n käänteismatriisi ja matriisin* $\mathbf{A}$ *sanotaan olevan kääntyvä (tai säännöllinen).*

Lause 13

Mikäli käänteismatriisi on olemassa, niin

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}^{-1}$ *on yksikäsitteinen ja*
- $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.

Huomautus

Käänteismatriisi voidaan määritellä myös matriisille, joka ei ole

Diagonaalimatriisin käänteismatriisi

Esimerkki 17

Olkoon $\mathbf{A} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \neq 0$ *kaikilla* i. *Etsitään, jos on olemassa,* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *s.e* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

Lasketaan

$$\mathbf{I} = \mathbf{AB} \quad = \begin{pmatrix} a_1 b_{1,1} & a_1 b_{1,2} & \ldots & a_1 b_{1,n} \\ a_2 b_{2,1} & a_2 b_{2,2} & \ldots & a_2 b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n,1} & a_n b_{n,2} & \ldots & a_n b_{n,n} \ , \end{pmatrix}$$

joten on oltava $b_{i,j} = 0$ *kun* $i \neq j$ *ja* $b_{i,i} = \frac{1}{a_i}$.
Siis $\mathbf{A}^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n})$.

Kiertomatriisin käänteismatriisi

Esimerkki 18

Matriisi $\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ *kiertää tason pisteitä kulman* α *verran. Etsitään, jos on olemassa,* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *s.e* $\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{B} = \mathbf{I}$*.*

Lasketaan

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{B} = \begin{pmatrix} cb_{1,1} - sb_{2,1} & cb_{1,2} - sb_{2,2} \\ sb_{1,1} + cb_{2,1} & sb_{1,2} + cb_{2,2} \end{pmatrix},$$

joka toteutuu kun $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\alpha)$*.*

Siis $\mathbf{R}(\alpha)^{-1} = \mathbf{R}(-\alpha)$*.*

Ortogonaalinen matriisi

Määritelmä

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ *sanotaan olevan ortogonaalinen jos*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \ .$$

Seuraus 14

Mikäli matriisi $\mathbf{A}$ *on ortogonaalinen, niin sen käänteismatriisi*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \ .$$

Origo lineaarikuvauksessa

Lause 15

Lineaarikuvaus $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *kuvaa origon* $\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$ *origoksi* $\mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$.

Todistus

Lasketaan

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}_n) \quad = \quad \mathbf{A}(0\mathbf{0}_n) = 0\,\underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{0}_n)}_{=\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_1 \\ 0 \cdot a_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_m \ .$$

Huomautus

Edellisen lauseen mukaan origoa ei voi siirtää lineaarikuvauksella, joten siirron toteuttaminen näyttää mahdottomalta.

Homogeeninen koordinaatisto

Määritelmä

Homogeeninen koordinaatisto saadaan upottamalla $\mathbb{R}^n$ avaruuteen $\mathbb{R}^{n+1}$ s.e avaruuden viimeinen koordinaatti asetetaan 1:ksi. Usein $n = 2$ tai $n = 3$.

Esimerkki 19

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Huomautus

Huomaa, että origo ei kuulu tähän avaruuteen.

Siirto $\mathbb{R}^2$:ssa

Määritelmä

Määritellään siirtomatriisi

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Matriisi riippuu siis kahdesta parametrista $\Delta x_i \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 20

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix}^T$. *Lasketaan*

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Skaalaus $\mathbb{R}^2$:ssa

Määritelmä

Määritellään skaalausmatriisi

$$\mathbf{S}(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jossa $k_i \in \mathbb{R}$ on skaalauskerroin i:nnen akselin suunnassa.

Huomautus

- Mikäli skaalaus on 0 jonkin akselin suuntaan, saadaan kaikki pisteet projisoitua vastaavalle koordinaattiakselille. Tällöin skaalausmatriisi ei ole kääntyvä.
- Mikäli skaalauskerroin on negatiivinen, saadaan aikaan peilaus koordinaattiakselin suhteen.

Esimerkki

Esimerkki 21

Olkoon $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix}^T$. *Lasketaan*

$$\mathbf{S}(k_1, k_2)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x_1 \\ k_2 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Yleistys $\mathbb{R}^3$:een

Huomautus

Siirto- ja skaalausmatriisit yleistyvät helposti myös korkeampiin ulottuvuuksiin. Jos $\mathbb{R}^3$ on upotettuna homogeenisiin koordinaatteihin, niin tällöin siirto- ja skaalausmatriisit saavat muodon

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$\mathbf{S}(k_1, k_2, k_3) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kierto $\mathbb{R}^2$:ssa

Määritelmä

Kiertomatriisi

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kiertää vektoria origon ympäri kulman θ verran.

Huomautus

Kiertomatriisi $\mathbf{R}(\theta)$ on ortogonaalinen, joten sen käänteismatriisi on $\mathbf{R}(\theta)^T$.

Huomautus

$\mathbb{R}^3$:ssa mahdollisia kiertoakseleita on äärettömän paljon. Muut kuin koordinaattiakseleiden suuntaisen kierron toteuttavat kiertomatriisit ovat monimutkaisia.

Käänteismatriisit

(19) Laske siirtomatriisin käänteismatriisi.

(20) Laske skaalausmatriisin käänteismatriisi, kun oletetaan että kaikki $k_i \neq 0$.

Esimerkki

Esimerkki 22

Karusellin kyydissä istuu henkilö, jonka koordinaatit karusellin koordinaatistossa ovat $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. *Karuselli sijaitsee maailman koordinaatistossa kohdassa* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Lisäksi karuselli on pyörähtänyt oman origonsa ympäri myötäpäivään kulman* α *verran. Laske* $\mathbf{p}$ =*henkilön sijainti maailmankoordinaatistossa.*

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{T}(x,y)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{p}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki

Esimerkki 23

Karusellin kyydissä istuu henkilö, jonka koordinaatit maailman koordinaatistossa ovat $\mathbf{p}$. *Karuselli sijaitsee maailman koordinaatistossa kohdassa* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Lisäksi karuselli on pyörähtänyt oman origonsa ympäri myötäpäivään kulman* α *verran. Laske* $\mathbf{p}_0 =$*henkilön sijainti karusellin koordinaatistossa.*

Edellisestä harjoituksesta tiedetään, että

$$\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{T}(x,y)\mathbf{R}(\alpha)}_{=\mathbf{M}}\mathbf{p}_0 \ .$$

Lisäksi tiedetään, että $\mathbf{M}$*:n tekijät ovat kääntyviä, joten*

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}(\alpha)\mathbf{T}^{-1}(x,y) = \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{T}(-x,-y) \ .$$

Kerrotaan aiempi yhtälö tällä (vasemmalta), jolloin

Harjoituksia

(21) Piirtoprimitiivinä on neliö, jonka kulmapisteet ovat $(\pm 1, \pm 1)$. Tästä piirretään ruudulle suorakaide jonka paksuus on 10 ja pituus 300. Suorakaiteen keskipiste on pisteessä (100, 200) ja tasoa on kierretty $\pi/4$ rad. Muodosta muunnosmatriisi jonka avulla kulmapisteet muunnetaan piirtoa varten ruudun koordinaatteihin.

(22) Käyttäjä klikkaa edellisen tehtävän ruutua pisteessä (110, 220). Osuuko klikkaus suorakaiteeseen. VIHJE: Muunna ruudun koordinaatit takaisin neliön koordinaatteihin ja tarkasta ovatko saadut x- ja y-koordinaatit välillä $[-1, 1]$.

Napakoordinaattiesitys

Määritelmä

Olkoon $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$ *sekä* $r = |z|$, $\hat{a} = \frac{a}{r}$ *ja* $\hat{b} = \frac{b}{r}$. *Tällöin on olemassa* $\alpha \in \mathbb{R}$ *s.e* $\hat{a} = \cos\alpha$ *ja* $\hat{b} = \sin\alpha$.

Nyt $z = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, *jota kutsutaan kompleksiluvun* z *napakoordinaattiesitykseksi ja kulmaa* α *kutsutaan* z*:n vaihekulmaksi tai argumentiksi ja pituutta* r *moduuliksi.*

Huomautus

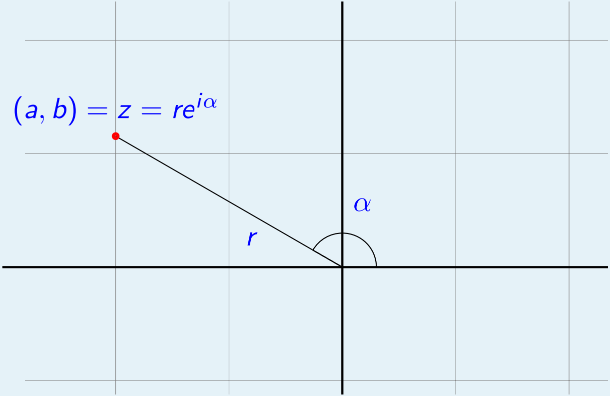
Edellisen määritelmän α voidaan laskea esimerkiksi kaavalla

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{jos } a > 0 & \text{(1. ja 4. neljännes)} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{jos } a < 0 \text{ ja } b \geq 0 & \text{(2. neljännes)} \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{jos } a < 0 \text{ ja } b < 0 & \text{(3. neljännes)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{jos } a = 0 \text{ ja } b > 0 & \\ -\frac{\pi}{2} & \text{jos } a = 0 \text{ ja } b < 0 & \end{cases} .$$

Napakoordinaattimuodon geometrinen tulkinta

Huomautus

Kun kompleksiluku $z = a + bi$ samaistetaan tason pisteen (a, b) kanssa, saadaan myös napakoordinaattimuodolle $z = re^{i\alpha}$ geometrinen tulkinta.



Luvun muuttaminen napakoordinaattimuotoon

Esimerkki 24

Olkoon $z = 3 + 4i$. *Tällöin*

1. $r = |z| = \sqrt{25} = 5$.
2. $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ *ja* $a > 0$, *joten* $\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 0.9273$.
3. *Napakoordinaattimuodossa* $z = re^{i\alpha} = 5e^{i \arctan \frac{4}{3}}$.

Esimerkki 25

Olkoon $z = -2 + i$. *Tällöin*

1. $r = |z| = \sqrt{5} = \sqrt{5}$.
2. $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$, $a < 0$ *ja* $b \geq 0$, *joten* $\alpha = \arctan(-\frac{1}{2}) + \pi \approx 2.6779$.
3. *Napakoordinaattimuodossa* $z = re^{i\alpha} = \sqrt{5}e^{i(\arctan(-\frac{1}{2})+\pi)}$.

Kertolasku napakoordinaattimuodossa

Lause 16

Olkoon $z = r_z e^{i\alpha_z}$ *ja* $w = r_w e^{i\alpha_w}$*. Tällöin* $zw = r_z r_w e^{i(\alpha_z+\alpha_w)}$*.*

Todistus

$$
\begin{aligned}
zw &= r_z e^{i\alpha_z} r_w e^{i\alpha_w} \\
&= r_z r_w e^{i\alpha_z} e^{i\alpha_w} \\
&= r_z r_w e^{i\alpha_z + i\alpha_w} \\
&= r_z r_w e^{i(\alpha_z+\alpha_w)} \; .
\end{aligned}
$$

Seuraus 17

Kompleksiluku, jonka itseisarvo on 1 kiertää kertolaskun toista komponenttia vaihekulmansa vierran. Siis, jos $z = r_z e^{i\alpha_z}$ *ja* $w = e^{i\alpha_w}$*, niin* $zw = r_z e^{i(\alpha_z+\alpha_w)}$*.*

Esimerkkejä

Esimerkki 26

Olkoon $z = 2e^{0.1i}$ *ja* $w = e^{i\frac{\pi}{2}}$. *Tällöin*

$$
\begin{aligned}
zw &= 2e^{0.1i}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+0.1)} \\
\frac{z}{w} &= \frac{2e^{0.1i}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i(0.1-\frac{\pi}{2})} \\
z^3 &= (2e^{0.1i})^2 = 2^3e^{3\cdot 0.1i} = 8e^{0.3i} \\
z + w &= 2e^{0.1i} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos 0.1 + i\sin 0.1) + (\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}) \\
&= 2\cos 0.1 + 2i\sin 0.1 + i = 2\cos 0.1 + i2(\sin 0.1 + 1)
\end{aligned}
$$

Harjoituksia

(23) Kierrä pistettä $(1, 3)$ origon ympäri kulman $\pi/2$ verran.

(24) Kierrä pistettä $(-1, -3)$ origon ympäri kulman $3\pi/2$ verran.