현대대수1및실습

임기정

임복희 교수님께서 담당하시는 2021년 1학기 현대대수1및실습 1 분반 안의, Noether 조의 이름으로 작성된 노트 정리입니다. 딱딱한 현대대수학을 최대한 쉽게 풀어 쓰고자 노력하였습니다.

1 1주차 노트 정리

전남대학교에서 현대대수1및실습을 수강하셨다면 마땅히 알아야 할 "군"이라는 낱말의 뜻에 대하여 논하기 위해서는, 이항 구조(*binary structure*)부터 알아야 합니다.

집합 S가 이항 구조가 되기 위해서는 이항 연산(*binary operator*) $*$을 가져야 합니다. 이때 $*$이 이항 연산이라 함[1]은 그것이

(a) $S \times S$를 정의역(*domain*)으로 가지면서

(b) S를 공역(*codomain*)를 가져야 하며

(c) 잘 정의된(*well defined*)

함수이어야 함을 의미합니다. 각 조건에 대하여 설명하자면 다음과 같습니다:

1. 조건 (a)의 뜻은 아무 $a \in S$와 아무 $b \in S$에 대하여 순서쌍 (a, b)를 $*$에게 입력으로 줄 수 있어야 한다는 것이고;

2. 조건 (b)의 뜻은 $*$이 입력 (a, b)에 대한 출력을 뱉어낼 건데 그 출력이 항상 S의 원소이어야 한다는 것이며;

3. 조건 (c)의 뜻은 그 출력이 딱 하나로 결정되어야 한다는 것입니다.

이때 $*$이 조건 (a)를 어긴다면 $*$가 S 위의 모든 것들에서 정의되지 않는다(*not everywhere defined*)고 하고, 조건 (b)를 어긴다면 S는 $*$ 아래에서 닫혀 있지 않다(*not closed under* $*$)고 하며, 조건 (c)를 어긴다면 $*$이 잘 정의되지 않았다(*not well defined*)고 합니다.

[1] [1] 20쪽, 정의 2.1 참고

만약 $*$이 이 모든 조건들을 지킨다면 이항 연산이 되는데, 이때 이항 연산이 된다는 사실을

$$S \times S \xrightarrow{*} S$$
$$(a, b) \mapsto a * b$$

와 같이 적을 수 있습니다.

이때 집합 S가 이항 연산 $* : S \times S \to S$을 가지면 순서쌍 $(S, *)$을 이항 구조라고 부릅니다. 참고로 "이항 구조"의 동의어에는 "아군"(*groupoid*)와 "마그마"(*magma*)가 있습니다.

마그마 $(S, *)$가 군[2](*group*)이 되기 위해서는 다음 세 조건을 만족시켜야 합니다:

1. 결합 법칙(*associative law*)[3]:

$$(\forall a \in S)\,(\forall b \in S)\,(\forall c \in S)\,[(a * b) * c = a * (b * c)] \tag{1}$$

이 논리식은 "모든 $a, b, c \in S$에 대하여 $(a * b) * c = a * (b * c)$이다"라는 뜻을 가지는데, 이 논리식이 성립할 때 그리고 그럴 때에만 "$*$이 S 위에서 결합적이다"라고 말합니다.

2. 항등원[4]의 존재: 적당한 $e \in S$가 존재해서 논리식

$$(\forall a \in S)\,[e * a = a * e = a] \tag{2}$$

가 성립해야 합니다. 이때 e를 $*$에 대한 항등원(*identity element for* $*$)이라고 합니다.

한 가지 주목할 만한 점은 항등원은 많아야 한 개 밖에 존재하지 않는다는 사실입니다.[5] 이 사실을 증명하기 위해서는 $e_1 \in S$가

$$(\forall a \in S)\,[e_1 * a = a * e_1 = a] \tag{2-1}$$

를 만족한다고 가정한 상태에서 $e = e_1$을 이끌어내면 충분합니다.

이렇게만 해도 충분한 이유를 생각해 봅시다. $e_1 \in S$이 e와 다르다면 항등원이어서는 안 된다는 걸 보이면, 자동적으로 항등원은 e 밖에 없게 됩니다. 그런데 "$e_1 \in S$이 e와 다르다면 항등원이서는 안 된다"의 대우 명제가 바로 "$e_1 \in S$가 (2-1)을 만족시킨다면 $e = e_1$이다"이기 때문입니다. 이제 본격적으로 증명을 해보도록 하겠습니다.

[2][1] 37쪽, 정의 4.1 참고
[3][1] 23쪽, 정의 2.12 참고
[4][1] 32쪽, 정의 3.12 참고
[5][1] 32쪽, 정리 3.13 참고

Proof. 먼저, $e_1 \in S$를 하나 잡은 뒤 그 e_1이 (2-1)을 만족시킨다고 가정하겠습니다. 그러면 (2)의 a 자리에 e_1을 넣음으로써

$$e * e_1 = e_1 * e = e_1$$

을 얻을 수 있고, (2-1)의 a 자리에 e를 넣음으로써

$$e_1 * e = e * e_1 = e$$

을 얻을 수 있습니다. 따라서 $e_1 * e = e_1$이고 $e_1 * e = e$임을 알 수 있습니다. 이것들로부터

$$e = e_1 * e = e_1$$

를 얻게 되는데, 이로써 ($e = e_1$을 보였기 때문에) 증명을 마칠 수 있습니다. □

3. 역원(*inverse*)[6]의 존재: 각각의 $a \in S$마다, 어떤 $b \in S$가 존재해서

$$a * b = b * a = e \tag{3}$$

가 성립해야 합니다. 이때 각각의 $a \in S$에 대하여 (3)을 만족시키는 $b \in S$가 유일하게 존재합니다! 따라서 그 b를 a^{-1}과 같이 쓸 수 있고 a의 역원(*inverse of a*)라고 부릅니다.

이를 증명하는 것은 꽤나 어려워 보이지만, 전과 비슷하게 임의의 역원 후보 b_1에 대하여 $b = b_1$일 수 밖에 없음을 보이면 됩니다.

Proof. $a \in S$를 하나 뽑겠습니다. 그러면 가정에 의하여 어떤 $b \in S$가 존재하여 (3)을 만족시킵니다. 이때 $b_1 \in S$가

$$a * b_1 = b_1 * a = e \tag{3-1}$$

를 만족시킨다고 가정한다면,

$$\begin{aligned}
b &= b * e && (2)\\
&= b * (a * b_1) && (3\text{-}1)\\
&= (b * a) * b_1 && (1)\\
&= e * b_1 && (3)\\
&= b_1 && (2)
\end{aligned}$$

[6] [1] 37쪽, 정의 4.1 참고

를 얻게 되고, 증명을 마칠 수 있습니다. □

참고로 결합 법칙을 만족시키는 마그마를 반군(*semigroup*)이라고 하고, 항등원이 존재하는 반군을 모노이드(*monoid*)라고 합니다.[7]

또한 "아벨 군"(*abelian group*)의 개념을 소개할까 합니다. 이항 구조 $(S, *)$가 주어졌을 때, $*$이 가환(*commutative*)[8]하다고 함은

$$(\forall a \in S)\,(\forall b \in S)\,[a * b = b * a] \tag{4}$$

가 성립한다는 뜻인데, $*$이 가환한 군을 아벨 군이라고 부릅니다.[9]

이제 군의 몇 가지 예에 대하여 알아보겠습니다.

첫 번째로, 원군(*circle group*)에 대하여 알아보겠습니다. 집합 S^1을

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \tag{5}$$

와 같이 두고, 복소수의 곱셈으로부터 이항 연산 $* : S^1 \times S^1 \to S^1$을 유도(*induce*)[10]하면,

$$\left(S^1, *\right)$$

는 군이 됩니다! 이것이 사실임을 증명할 것인데, 그 전에 다뤄야 할 개념이 있습니다.

"$*$은 S^1 위에서 복소수 곱셈의 유도된 연산(*induced operation*)이다"라고 하는데, 이는 이항 연산 $*$을 복소수의 곱셈의 정의역을 $S^1 \times S^1$으로 줄여서 얻었다는 뜻입니다. 그런데 $*$이 이항 연산이라는 보장이 없습니다. 그러면 우리는 무엇을 확인해 보아야 될까요?

이항 구조 $(S, *)$가 주어졌다고 합시다. 이제 S의 부분 집합 S'를 하나 잡고, $*'$을

$$\begin{aligned} S' \times S' &\xrightarrow{*'} S' \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

로 잡아볼게요. 그러면, $*$이 이항 연산이라는 가정에 의하여, $*'$이 이항 연산이 되기 위한 조건들 중 (a)와 (c)는 이미 성립합니다. $*'$는 자신의 정의역 안에서 $*$으로 정의되었으니까요! 이제 남은 조건은 (b) 뿐인데, 안타깝게도, 이건 성립하지 않을 수도 있습니다. 따라서 $(S', *')$가 이항 구조임을 보이기 위해서는, S'에서 (서로 같을 수도 있는) 두 원소 a와 b를 아무렇게나 뽑아서 $*$에 주더라도, 그 출력 $a * b$가 S' 밖으로 절대 못 나간다는 것을 보여야 합니다.

[7] [1] 42쪽 참고
[8] [1] 22쪽, 정의 2.11 참고
[9] [1] 38쪽, 정의 4.3 참고
[10] [1] 21쪽, 정의 2.4 참고

만약 그러하다면, S'를 $*$에 대하여 닫혀 있다(*closed under* $*$)고 합니다. 즉, 집합 $S' \subseteq S$가 연산 $* : S \times S \to S$에 대하여 닫혀 있을 필요충분조건은

$$(\forall a \in S')\,(\forall b \in S')\,[a * b \in S']$$

가 성립한다는 것입니다.

이상의 논의로부터 $(S^1, *)$가 마그마라는 걸 보이는 것부터 시작해야 되는 걸 알 수 있습니다. 그렇게 하기 위하여, 두 원소 $z_1 \in S^1$와 $z_2 \in S^1$를 아무렇게나 골라 봅시다. 그렇더라도, $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$이고 $|z_1| = |z_2| = 1$이어야 하기 때문에,

$$\begin{aligned} |z_1|\,|z_2| = 1 &\implies |z_1 z_2| = 1 \\ &\implies z_1 z_2 \in S^1 \end{aligned}$$

입니다. 따라서 다음 단계[11]로 넘어갈 수 있습니다.

이제 $(S^1, *)$이 반군임을 증명해 보겠습니다. 우리는 이미 복소수의 곱셈이 결합 법칙을 만족시키는 것을 알고 있습니다. 그런데 S^1은 $\mathbb{C}$의 부분 집합입니다. 그러니까 모든 $a, b, c \in S^1$에 대하여,

$$(a * b) * c = a * (b * c) \tag{6}$$

이 성립하겠죠? 왜냐하면, (6)을 만족시킨다는 것을 검증받아야 될 모든 삼중쌍

$$(a, b, c) \in S^1 \times S^1 \times S^1$$

은 다 $\mathbb{C}^3$의 원소이므로, 복소수의 곱셈의 결합 법칙이 보증 서주기 때문이죠. $*$가 복소수의 곱셈으로부터 유도되었다는 사실을 상기하신다면, 쉽게 이해가실 거에요.

References

[1] J.B. FRALEIGH. *현대대수학(제7판)*. Pearson, 2009.

[11] $(S^1, *)$이 반군임을 증명하기