

# 현대대수1및실습

## 임기정

임복희 교수님께서 담당하시는 2021년 1학기 현대대수1및실습 1 분반 안의, Noether 조의 이름으로 작성된 노트 정리입니다.

### 1 1주차 노트 정리

전남대학교에서 현대대수1및실습을 수강하셨다면 마땅히 알아야 할 “군”이라는 낱말의 뜻에 대하여 논하기 위해서는, 이항 구조(binary structure)부터 알아야 합니다.

집합  $S$ 가 이항 구조가 되기 위해서는 이항 연산(binary operator)  $*$ 을 가져야 합니다. 이때  $*$ 이 이항 연산이라 함<sup>1</sup>은 그것이

(a)  $S \times S$ 를 정의역(domain)으로 가지면서

(b)  $S$ 를 공역(codomain)을 가져야 하며

(c) 잘 정의된(well defined)

함수이어야 함을 의미합니다. 각 조건에 대하여 설명하자면 다음과 같습니다:

1. 조건 (a)의 뜻은 아무  $a \in S$ 와 아무  $b \in S$ 에 대하여 순서쌍  $(a, b)$ 를  $*$ 에게 입력으로 줄 수 있어야 한다는 것이고;
2. 조건 (b)의 뜻은  $*$ 이 입력  $(a, b)$ 에 대한 출력을 뱉어낼 건데 그 출력이 항상  $S$ 의 원소이어야 한다는 것이며;
3. 조건 (c)의 뜻은 그 출력이 딱 하나로 결정되어야 한다는 것입니다.

이때  $*$ 이 조건 (a)를 어긴다면  $*$ 가  $S$  위의 모든 것들에서 정의되지 않는다(not everywhere defined)고 하고, 조건 (b)를 어긴다면  $S$ 는  $*$  아래에서 닫혀 있지 않다(not closed under  $*$ )고 하며, 조건 (c)를 어긴다면  $*$ 이 잘 정의되지 않았다(not well defined)고 합니다.

---

<sup>1</sup>[1] 20쪽, 정의 2.1 참고

만약  $*$ 이 이 모든 조건들을 지킨다면 이항 연산이 되는데, 이때 이항 연산이 된다는 사실을

$$\begin{aligned} S \times S &\xrightarrow{*} S \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

와 같이 적을 수 있습니다.

이때 집합  $S$ 가 이항 연산  $*$  :  $S \times S \rightarrow S$ 을 가지면 순서쌍  $(S, *)$ 을 이항 구조라고 부릅니다. 참고로 “이항 구조”의 동의어에는 “아군”(groupoid)와 “마그마”(magma)가 있습니다.

마그마  $(S, *)$ 가 군<sup>2</sup>(group)이 되기 위해서는 다음 세 조건을 만족시켜야 합니다:

1. 결합 법칙(associative law)<sup>3</sup>:

$$(\forall a \in S) (\forall b \in S) (\forall c \in S) [(a * b) * c = a * (b * c)] \quad (1)$$

이 논리식은 “모든  $a, b, c \in S$ 에 대하여  $(a * b) * c = a * (b * c)$ 이다”라는 뜻을 가지는데, 이 논리식이 성립할 때 그리고 그럴 때에만 “ $*$ 이  $S$  위에서 결합적이다”라고 말합니다.

2. 항등원<sup>4</sup>의 존재: 적당한  $e \in S$ 가 존재해서 논리식

$$(\forall a \in S) [e * a = a * e = a] \quad (2)$$

가 성립해야 합니다. 이때  $e$ 를  $*$ 에 대한 항등원(identity element for  $*$ )이라고 합니다.

한 가지 주목할 만한 점은 항등원은 많아야 한 개 밖에 존재하지 않는다는 사실입니다.<sup>5</sup> 이 사실을 증명하기 위해서는  $e_1 \in S$ 가

$$(\forall a \in S) [e_1 * a = a * e_1 = a] \quad (2-1)$$

를 만족한다고 가정한 상태에서  $e = e_1$ 을 이끌어내면 충분합니다.

이렇게만 해도 충분한 이유를 생각해 봅시다.  $e_1 \in S$ 이  $e$ 와 다르다면 항등원이어서는 안 된다는 걸 보이면, 자동적으로 항등원은  $e$  밖에 없게 됩니다. 그런데 “ $e_1 \in S$ 이  $e$ 와 다르다면 항등원이어서는 안 된다”의 대우 명제가 바로 “ $e_1 \in S$ 가 (2-1)을 만족시킨다면  $e = e_1$ 이다”이기 때문입니다. 이제 본격적으로 증명을 해보도록 하겠습니다.

<sup>2</sup>[1] 37쪽, 정의 4.1 참고

<sup>3</sup>[1] 23쪽, 정의 2.12 참고

<sup>4</sup>[1] 32쪽, 정의 3.12 참고

<sup>5</sup>[1] 32쪽, 정리 3.13 참고

*Proof.* 먼저,  $e_1 \in S$ 를 하나 잡은 뒤 그  $e_1$ 이 (2-1)을 만족시킨다고 가정하겠습니다. 그러면 (2)의  $a$  자리에  $e_1$ 을 넣음으로써

$$e * e_1 = e_1 * e = e_1$$

을 얻을 수 있고, (2-1)의  $a$  자리에  $e$ 를 넣음으로써

$$e_1 * e = e * e_1 = e$$

을 얻을 수 있습니다. 따라서  $e_1 * e = e_1$ 이고  $e_1 * e = e$ 임을 알 수 있습니다. 이것들로부터

$$e = e_1 * e = e_1$$

를 얻게 되는데, 이로써 ( $e = e_1$ 을 보였기 때문에) 증명을 마칠 수 있습니다.  $\square$

3. 역원(*inverse*)<sup>6</sup>의 존재: 각각의  $a \in S$ 마다, 어떤  $b \in S$ 가 존재해서

$$a * b = b * a = e \quad (3)$$

가 성립해야 합니다. 이때 각각의  $a \in S$ 에 대하여 (3)을 만족시키는  $b \in S$ 가 유일하게 존재합니다! 따라서 그  $b$ 를  $a^{-1}$ 과 같이 쓸 수 있고  $a$ 의 역원(*inverse of  $a$* )라고 부릅니다.

이를 증명하는 것은 꽤나 어려워 보이지만, 전과 비슷하게 임의의 역원 후보  $b_1$ 에 대하여  $b = b_1$ 일 수 밖에 없음을 보이면 됩니다.

*Proof.*  $a \in S$ 를 하나 뽑겠습니다. 그러면 가정에 의하여 어떤  $b \in S$ 가 존재하여 (3)을 만족시킵니다. 이때  $b_1 \in S$ 가

$$a * b_1 = b_1 * a = e \quad (3-1)$$

를 만족시킨다고 가정한다면,

$$b = b * e \quad (2)$$

$$= b * (a * b_1) \quad (3-1)$$

$$= (b * a) * b_1 \quad (1)$$

$$= e * b_1 \quad (3)$$

$$= b_1 \quad (2)$$

---

<sup>6</sup>[1] 37쪽, 정의 4.1 참고

를 얻게 되고, 증명을 마칠 수 있습니다.  $\square$

참고로 결합 법칙을 만족시키는 마그마를 반군(*semigroup*)이라고 하고, 항등원이 존재하는 반군을 모노이드(*monoid*)라고 합니다.<sup>7</sup>

또한 “아벨 군”(abelian group)의 개념을 소개할까 합니다. 이항 구조  $(S, *)$ 가 주어졌을 때,  $*$ 이 가환(commutative)<sup>8</sup>하다고 함은

$$(\forall a \in S) (\forall b \in S) [a * b = b * a] \quad (4)$$

가 성립한다는 뜻인데,  $*$ 이 가환한 군을 아벨 군이라고 부릅니다.<sup>9</sup>

이제 군의 몇 가지 예에 대하여 알아보겠습니다.

첫 번째로, 원군(circle group)에 대하여 알아보겠습니다. 집합  $S^1$ 을

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad (5)$$

와 같이 두고, 복소수의 곱셈으로부터 이항 연산  $*$  :  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ 을 유도(induce)<sup>10</sup>하면,

$$(S^1, *)$$

는 군이 됩니다! 이것이 사실임을 증명할 것인데, 그 전에 다뤄야 할 개념이 있습니다.

“ $*$ 은  $S^1$  위에서 복소수 곱셈의 유도된 연산(induced operation)이다”라고 하는데, 이는 이항 연산  $*$ 을 복소수의 곱셈의 정의역을  $S^1 \times S^1$ 으로 줄여서 얻었다는 뜻입니다. 그런데  $*$ 이 이항 연산이라는 보장이 없습니다. 그러면 우리는 무엇을 확인해 보아야 될까요?

이항 구조  $(S, *)$ 가 주어졌다고 합시다. 이제  $S$ 의 부분 집합  $S'$ 를 하나 잡고,  $*$ '을

$$\begin{aligned} S' \times S' &\xrightarrow{*'} S' \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

로 잡아볼게요. 그러면,  $*$ 이 이항 연산이라는 가정에 의하여,  $*$ '이 이항 연산이 되기 위한 조건들 중 (a)와 (c)는 이미 성립합니다.  $*$ '는 자신의 정의역 안에서  $*$ 으로 정의되었으니까요! 이제 남은 조건은 (b) 뿐인데, 안타깝게도, 이걸 성립하지 않을 수도 있습니다. 따라서  $(S', *)'$ 가 이항 구조임을 보이기 위해서는,  $S'$ 에서 (서로 같을 수도 있는) 두 원소  $a$ 와  $b$ 를 아무렇게나 뽑아서  $*$ 에 주더라도, 그 출력  $a * b$ 가  $S'$  밖으로 절대 못 나간다는 것을 보여야 합니다.

<sup>7</sup>[1] 42쪽 참고

<sup>8</sup>[1] 22쪽, 정의 2.11 참고

<sup>9</sup>[1] 38쪽, 정의 4.3 참고

<sup>10</sup>[1] 21쪽, 정의 2.4 참고

만약 그러하다면,  $S'$ 를  $*$ 에 대하여 닫혀 있다(*closed under  $*$* )고 합니다. 즉, 집합  $S' \subseteq S$ 가 연산  $* : S \times S \rightarrow S$ 에 대하여 닫혀 있을 필요충분조건은

$$(\forall a \in S') (\forall b \in S') [a * b \in S']$$

가 성립한다는 것입니다.

## References

- [1] J.B. FRALEIGH. *현대대수학(제7판)*. Pearson, 2009.