문. 집합 A가 주어졌을 때,

$$\mathcal{P}\left(\bigcup A\right) \subseteq A \leftrightarrow (\exists a \in A)\left[A = \mathcal{P}(a)\right]$$

인가? ⊣

답. 그렇다. ⊣

Lemma 1. 이항 관계 R에 대하여, R이 원순서일 때 그리고 그럴 때에만,

$$(\forall x)(\forall y)\left[xRy \leftrightarrow (\forall z)(zRx \to zRy)\right]$$

가 성립한다. ⊣

Lemma 2. 임의의 집합 X에 대하여 $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$이다. ⊣

Lemma 3. 임의의 집합 X에 대하여 $(\forall z \in X)\left[z \subseteq \bigcup X\right]$이다. ⊣

Proof. $\subseteq$는 부분순서이므로 보조정리 1로부터

$$\mathcal{P}\left(\bigcup A\right) \subseteq A \iff \forall x \left[x \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup A\right) \to x \subseteq A\right]$$

임을 알 수 있고, 임의의 집합 x에 대하여

$$\begin{aligned}
x \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup A\right) &\iff (\forall z \in x)\left(z \in \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)\right) \\
&\iff (\forall z \in x)\left(z \subseteq \bigcup A\right) \\
&\iff (\forall z \in x)(\forall y \in z)\left(y \in \bigcup A\right) \\
&\iff \left(\forall y \in \bigcup x\right)\left(y \in \bigcup A\right) \\
&\iff \bigcup x \subseteq \bigcup A
\end{aligned}$$

이므로,

$$\left(\forall x \left[\bigcup x \subseteq \bigcup A \to x \subseteq A\right]\right) \leftrightarrow (\exists a \in A)\left[A = \mathcal{P}(a)\right]$$

를 보이면 충분함을 알 수 있다.

($\Leftarrow$) 어떤 $a \in A$가 존재하여 $A = \mathcal{P}(a)$가 성립한다고 가정하자. 그러면, $\bigcup x \subseteq \bigcup A$를 만족시키는 집합 x가 주어졌다고 가정한 채로 $x \subseteq A$임을 보일 차례가 된다.

이제 $x \subseteq A$를 보이기 위하여 $z \in x$인 집합 z가 주어졌다고 가정하자. 그러면

$$z \in x \implies z \subseteq \bigcup x \implies z \subseteq a \implies z \in \mathcal{P}(a) \implies z \in A$$

이므로, ($\Leftarrow$)의 증명이 끝난다.

($\Rightarrow$) 먼저 (1)을 가정하자.

$$\forall x \left[\bigcup x \subseteq \bigcup A \to x \subseteq A\right] \tag{1}$$

이때 $a := \bigcup A$로 잡자. 이제 다음 명제들을 모두 보이면 된다.

(a) $a \in A$.

(b) $\mathcal{P}(a) \subseteq A$.

(c) $A \subseteq \mathcal{P}(a)$.

1. $\bigcup\{a\} = a \subseteq \bigcup A$이므로, 명제 (a)는 (1)에 $x := \{a\}$를 적용하여 얻을 수 있다.

2. $\bigcup \mathcal{P}(a) = a \subseteq \bigcup A$이므로, 명제 (b)는 (1)에 $x := \mathcal{P}(a)$를 적용하여 얻을 수 있다.

3. 마지막으로, 명제 (c)를 보이기 위하여, $z \in A$라고 하자. 그러면

$$z \subseteq \bigcup A = a$$

이므로, 원하던 대로 $z \in \mathcal{P}(a)$를 얻는다.

이로써 모든 증명이 끝났다. $\square$