

№4. Решение

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + 2x^2y + 10x^2 + 6xy + 10y^2 - 6x + 4 = \\ &= (x^4 + 2x^2y + y^2) + (x^2 + 6xy + 9y^2) + (9x^2 - 6x + 1) + 3 = \\ &= (x^2 + y)^2 + (x + 3y)^2 + (3x - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Заметим, что $f_{min} \geq 3$, тк $a^2 \geq 0$

При этом значение 3 достигается на решениях системы

$$x^2 + y = 0 \tag{1}$$

$$x + 3y = 0 \tag{2}$$

$$3x - 1 = 0 \tag{3}$$

В данной системе, если решить (2) и (3), то (1) выполнится автоматически.

Получаем $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{9}, f(x, y) = 3$