Графы

Определение

$$G = (V, E),\ E \subseteq V \times V$$

V - вершины.
E - ребра.

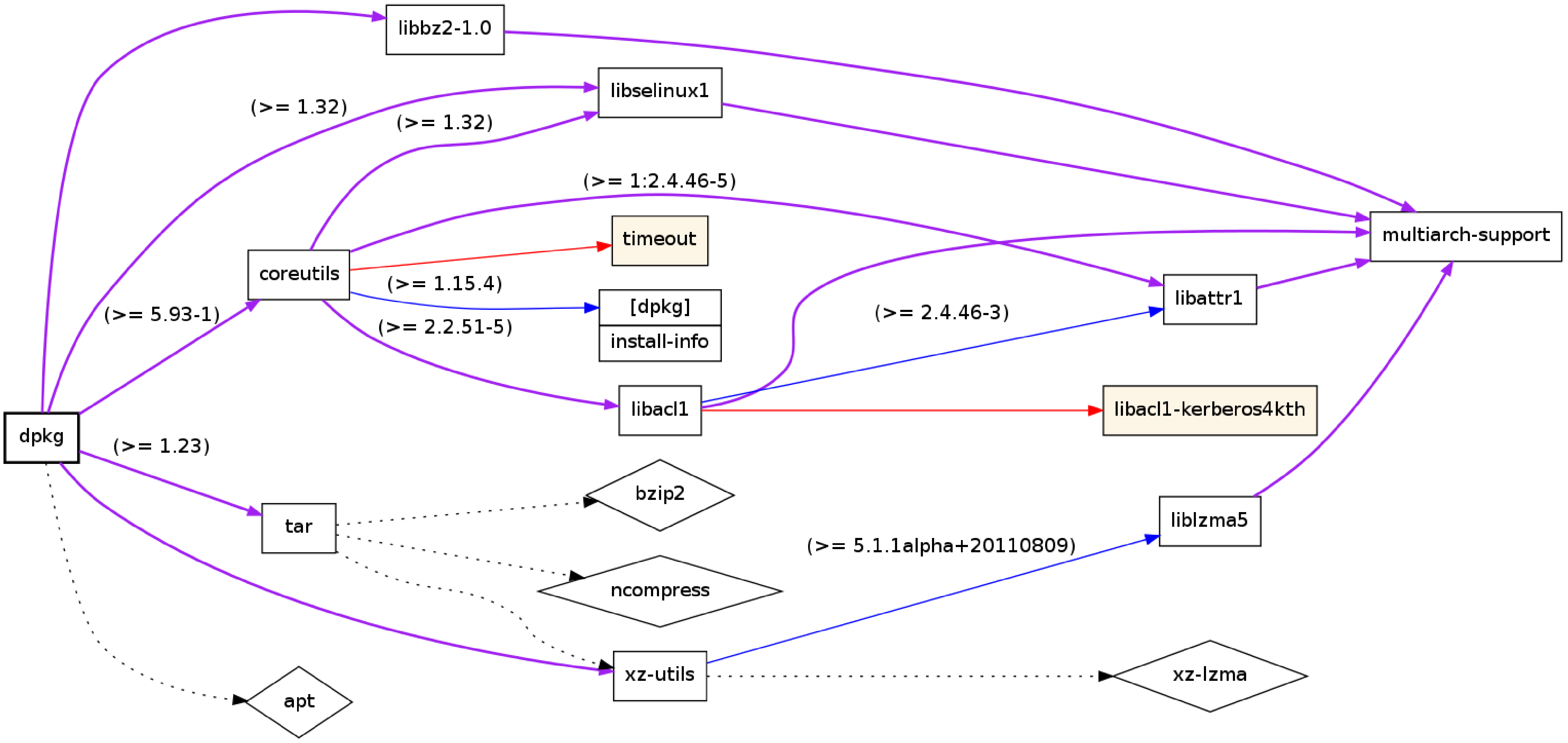
Ориентированность

- Неориентированный граф: если есть $v \to u$, то есть $u \to v$. Обычно ребра представлены как $v \iff u$.

Пример неориентированного графа: схема метро

Пример ориентированного графа: package dependency

© Студия Артемия Лебедева



libbz2-1.0
libselinux1
(>= 1.32)
(>= 1.32)
(>= 1:2.4.46-5)
timeout
multiarch-support
coreutils
(>= 1.15.4)
[dpkg]
install-info
libattr1
(>= 5.93-1)
(>= 2.2.51-5)
(>= 2.4.46-3)
libacl1
libacl1-kerberos4kth
dpkg
(>= 1.23)
bzip2
tar
liblzma5
(>= 5.1.1alpha+20110809)
ncompress
xz-utils
xz-lzma
apt

Взвешенность

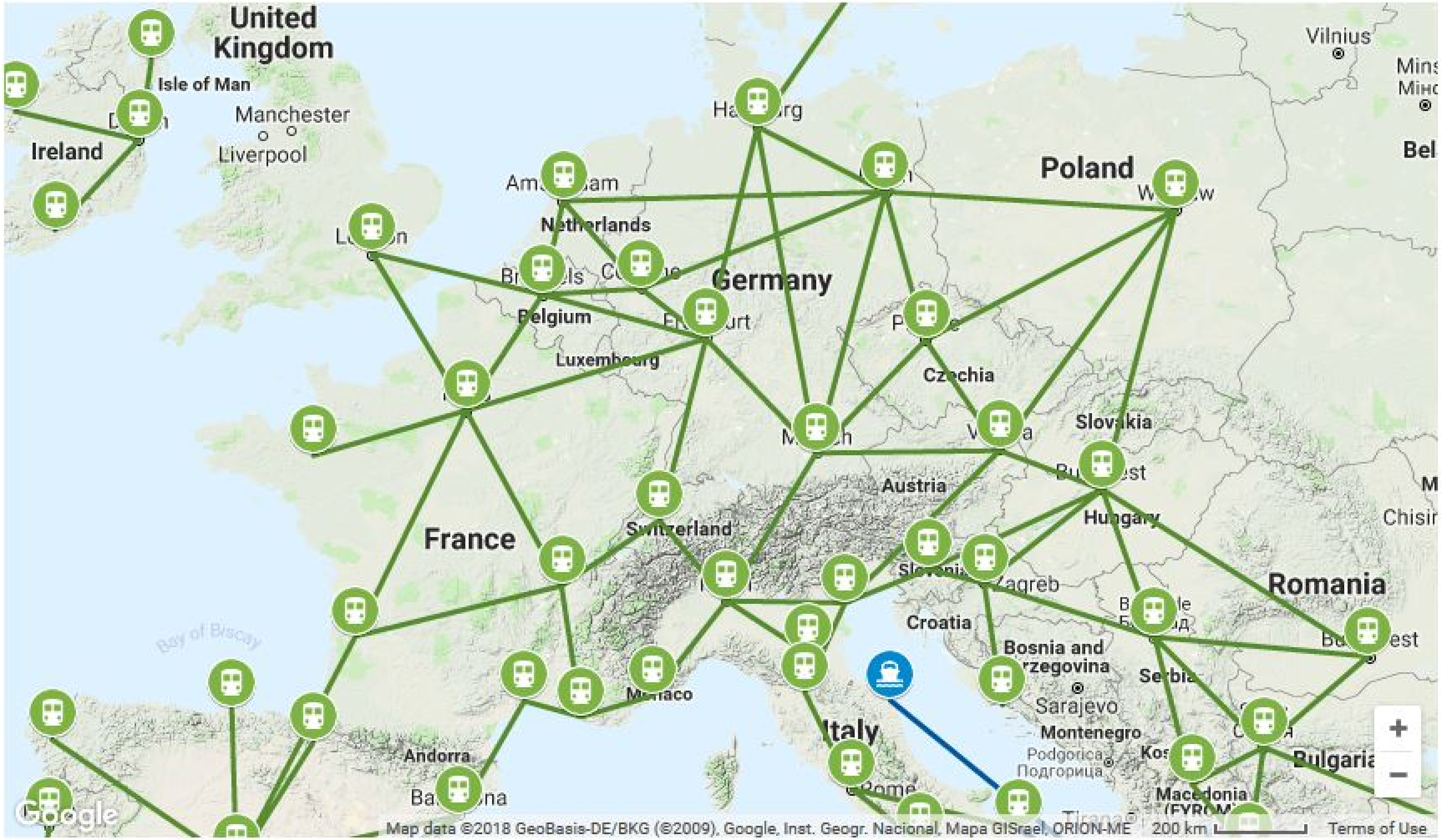
- Взвешенный граф: каждому ребру задан вес w.

Пример весов: длина дороги

Связность

- Связный граф: между двумя вершинами существует путь

Пример несвязного графа: граф железнодорожных путей



United Kingdom
Isle of Man
Manchester
Liverpool
Ireland
Netherlands
Germany
Poland
Vilnius
Belgium
Luxembourg
Czechia
Slovakia
Austria
Hungary
Switzerland
France
Zagreb
Croatia
Romania
Bosnia and
Sarajevo
Montenegro
Podgorica
Подгорица
Andorra
Bay of Biscay
Google
Map data ©2018 GeoBasis-DE/BKG (©2009), Google, Inst. Geogr. Nacional, Mapa GISrael, ORION-ME
200 km
Terms of Use

Дерево

Дерево удовлетворяет следующим свойствам:

- $|E| = |V| - 1$
- Связное
- Ациклическое
- Между любыми двумя вершинами существует ровно один простой путь.

Хранение графа

- Матрица смежности `g = [[0] * n for _ in range(n)]`
- Список смежности

```python
g = [[] for _ in range(n)]
def add_edge(fr, to):
    g[fr].append(to)
```

Задача: нахождение пути

$$s \to t$$

Хотим проверить, что из s можно добраться в t переходами по ребрам.

Подзадача: Обход графа

Хотим пометить все вершины, достижимые из s как $used$

Тогда для нахождения пути нужно проверить $t \in used$

Тогда множество достижимых вершин получается комбинацией объединений.

$$used_v = \{v\} \cup \bigcup_{v \to u} used_u$$

Проблема - множества зависят друг от друга, нельзя посчитать по определению.

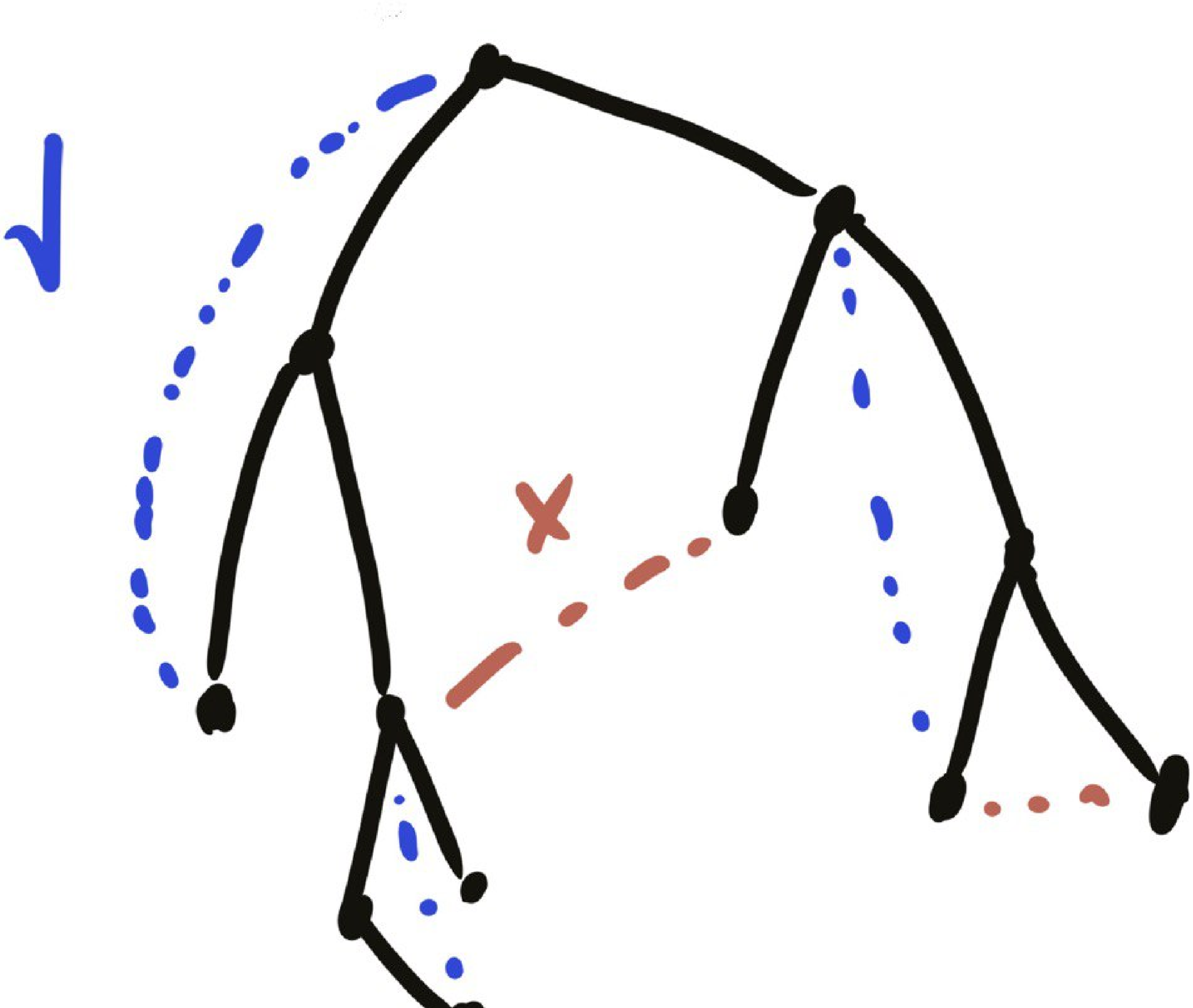
Обход в глубину

Множества $used$ одинаковы вне зависимости от стартовой вершины, поэтому можно просто помечать вершины как доступные

```
def dfs(v):
    used[v] = True
    for u in g[v]:
        if !used[u]:
            dfs(u)

dfs(0)
```

Вопрос: На каких графах `if` всегда срабатывает?



Выделение компонент связности

Если запуститься в каждой компоненте по отдельности, можно явно выделить все компоненты.

```
def dfs(v, c):
    color[v] = c
    for u in g[v]:
        if !color[u]:
            dfs(u, c)

c = 1
for i in range(n):
    if !color[i]:
        dfs(i, c)
        c += 1
```

DFS в дереве

DFS-ом удобно считать всякие размеры поддеревьев или глубины с помощью динамик $sz(v) = 1 + \sum_u sz(u),\ h(v) = 1 + \max_u h(u)$

```
def dfs(v, p=-1):
    sz[v] = 1
    for u in g[v]:
        if u != p:
            sz[v] += dfs(u, v)
    return sz[v]

dfs(0)
```

Асимптотика

Мы не запускаемся из одной вершины дважды, поэтому всего запусков $O(|V|)$.

Внутри каждого запуска мы перебираем deg_v ребер. Мы знаем, что $\sum deg_v = 2|E|$, поэтому общая сложность алгоритма $O(|V| + |E|)$.

Оптимальные расстояния

Хотим находить кратчайшие пути в графе.

$$dist_v = \min_{v \to u}(dist_u + w(v, u))$$

Опять же, все числа зависят друг от друга.

Задача: Поиск пути

Хотим найти путь от s до t, содержащий минимальное количество ребер.

Кратчайшие пути: идея

Давайте поддерживать множество оптимальных вершин. Для них мы будем знать финализированное кратчайшее расстояние.

Для остальных вершин мы можем *релаксировать* ответ по формуле.

Самый примитивный алгоритм - пока можно уменьшать какое-либо $dist_*$, релаксируем ответ. Когда ничего больше нельзя релаксировать, мы нашли кратчайшие пути.

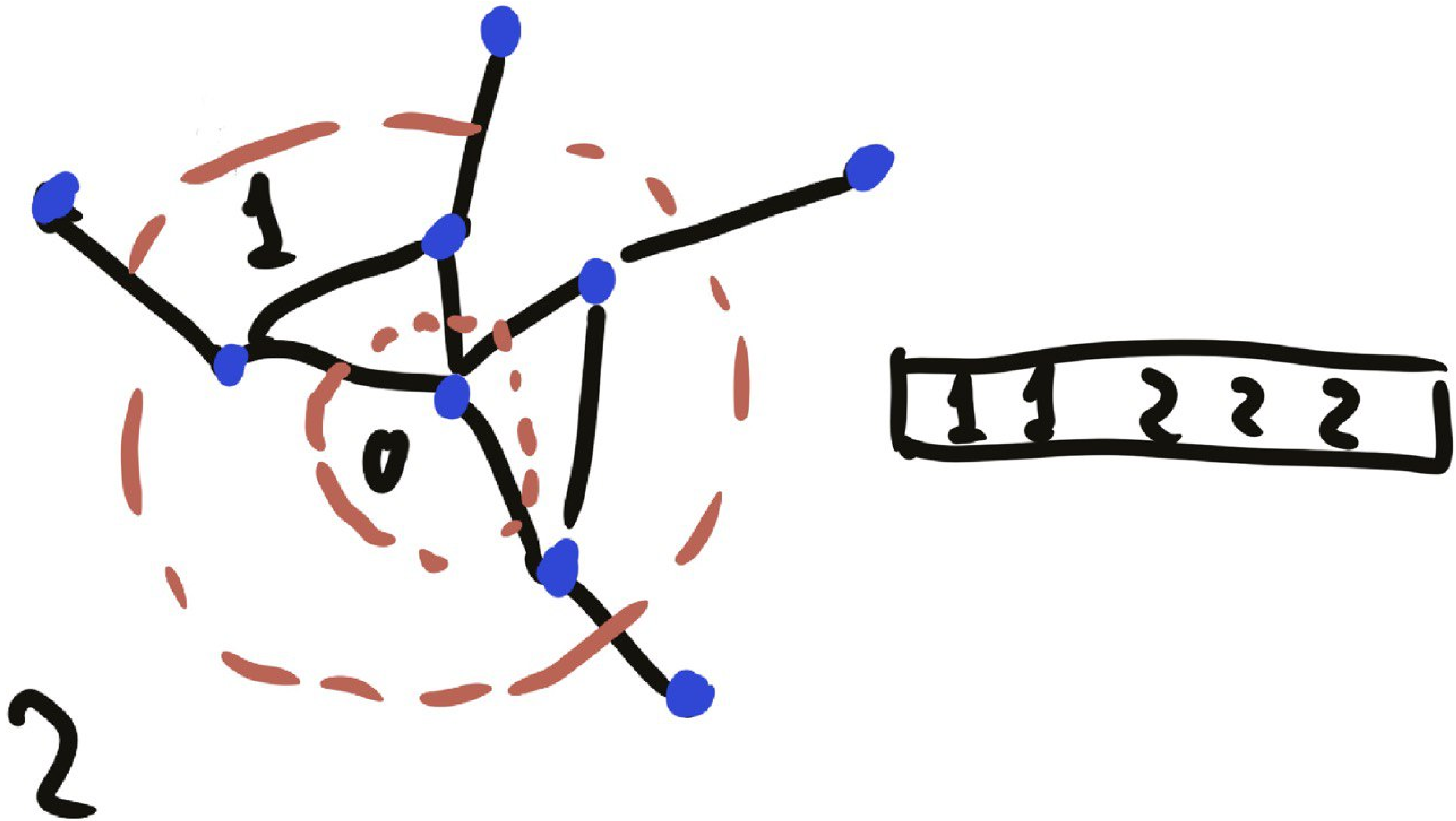
Обход в ширину

Для множества оптимальных вершин можно поддерживать уже посчитанные расстояния.

Для остальных вершин можно поддерживать промежуточные значения.

Переход вершины из промежуточного значения в финальное будем делать через очередь: вершина кладется в очередь тогда, когда мы знаем ее финальное состояние.

Таким образом, финальное множество постепенно расползается.


1
0
2
1 1 2 2 2

BFS

```
def bfs():
    dist = [INF] * n
    dist[s] = 0
    q = Queue([s])
    while len(q) > 0:
        v = q.pop()
        for u in g[v]:
            if dist[u] == INF:
                dist[u] = dist[v] + 1
                q.push(u)
```

Асимптотика $O(|V| + |E|)$

Алгоритм Дейкстры

Для поиска кратчайших расстояний во взвешенных графах существует алгоритм Дейкстры. На него можно смотреть, как на обобщение bfs с помощью очереди с приоритетами (кучи).

Мы храним финальные вершины, и по одной переносим вершины из множества промежуточных в множество финальных.

Асимптотика $O((|E| + |V|) \log n)$ - берем асимптотику BFS и добавляем работу с кучей.

Алгоритм Дейкстры: реализация

```
def bfs():
    dist = [INF] * n
    dist[s] = 0
    q = Heap(zip(dist, range(n)))

    while len(q) > 0:
        d, v = q.pop_min()
        for u, w in g[v]:
            if dist[u] > d + w:
                q.erase((dist[u], u))
                dist[u] = d + w
                q.push((dist[u], u))
```

Вопрос: сколько случится итераций внешнего цикла? Какая проверка нужна, чтобы их стало n?

Вопрос

Работает ли Дейкстра с отрицательными ребрами?

Отрицательные циклы

Отрицательные ребра рушат условие $dist(v, v) = 0$, потому что по отрицательному циклу можно уменьшать расстояние бесконечно.

Алгоритм Форда-Беллмана

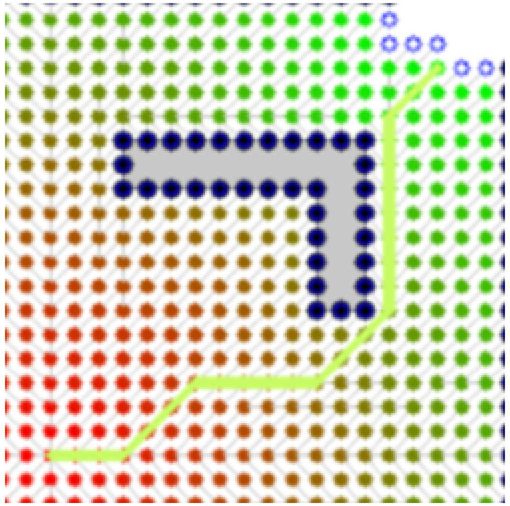
Просто всегда релаксирует ответ. Если на $n + 1$-м шаге есть что релаксировать - мы нашли отрицательный цикл.

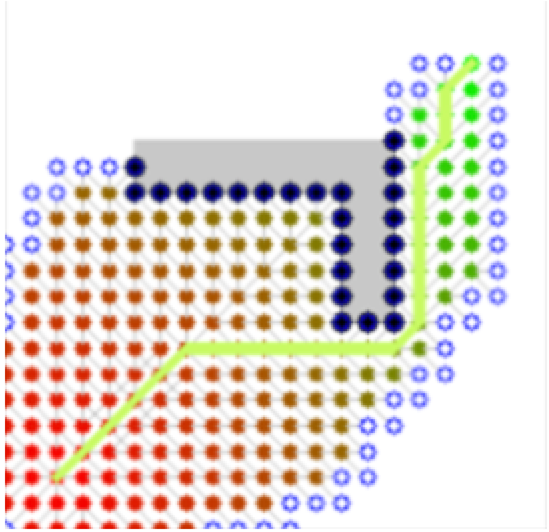
```
dist = [INF] * n
dist[s] = 0

for i in range(n + 1):
    for fr, to, w in edges:
        if dist[to] > dist[fr] + w:
            dist[to] = dist[fr] + w
```

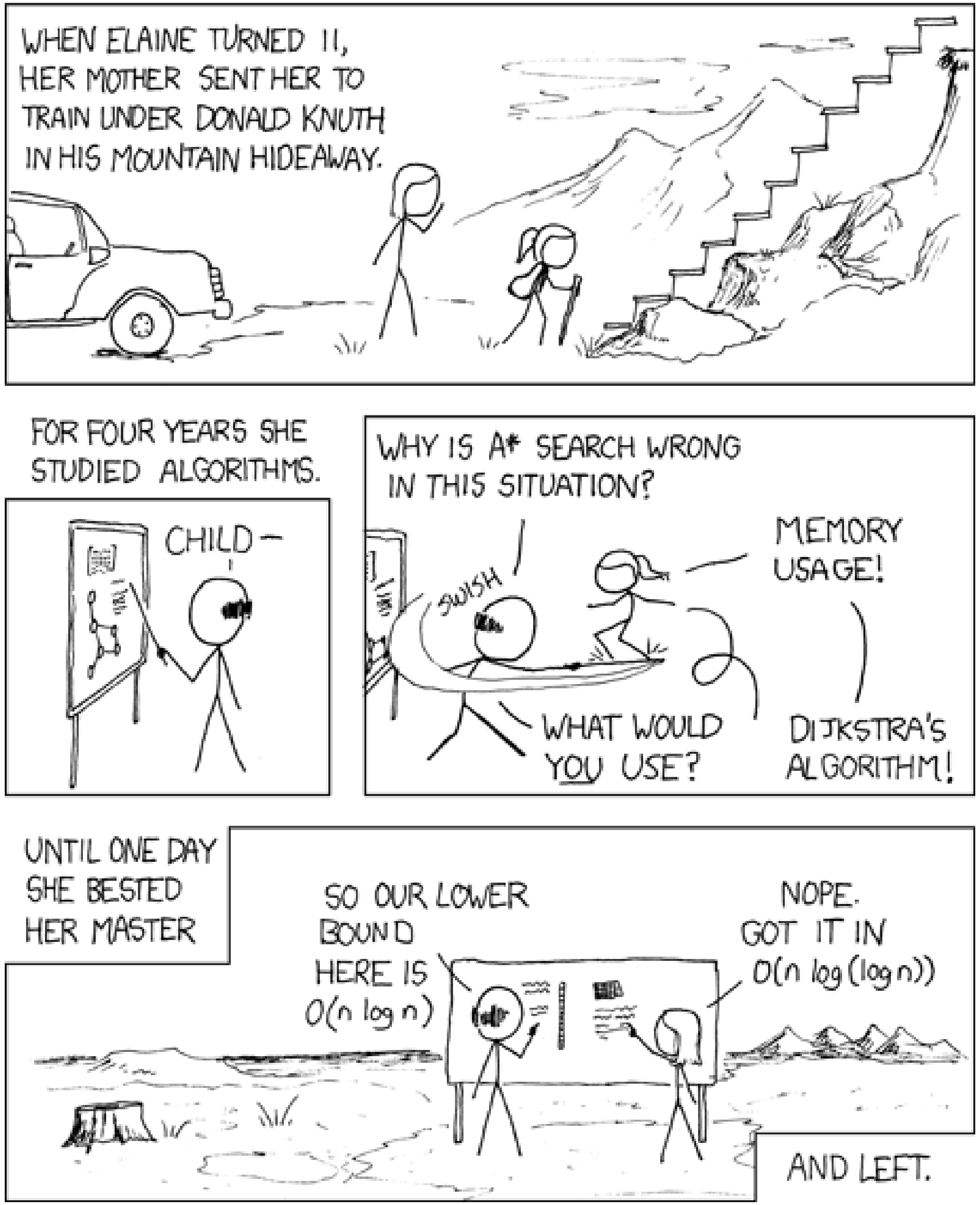
A*

Эвристический алгоритм для реальных графов, который вместе с расстоянием использует оценочную функцию (например, евклидово расстояние между вершиной и финишем). Вершины, имеющие меньшую сумму $dist(s, v) + expected\_dist(v, t)$ оцениваются раньше в очереди с приоритетами.





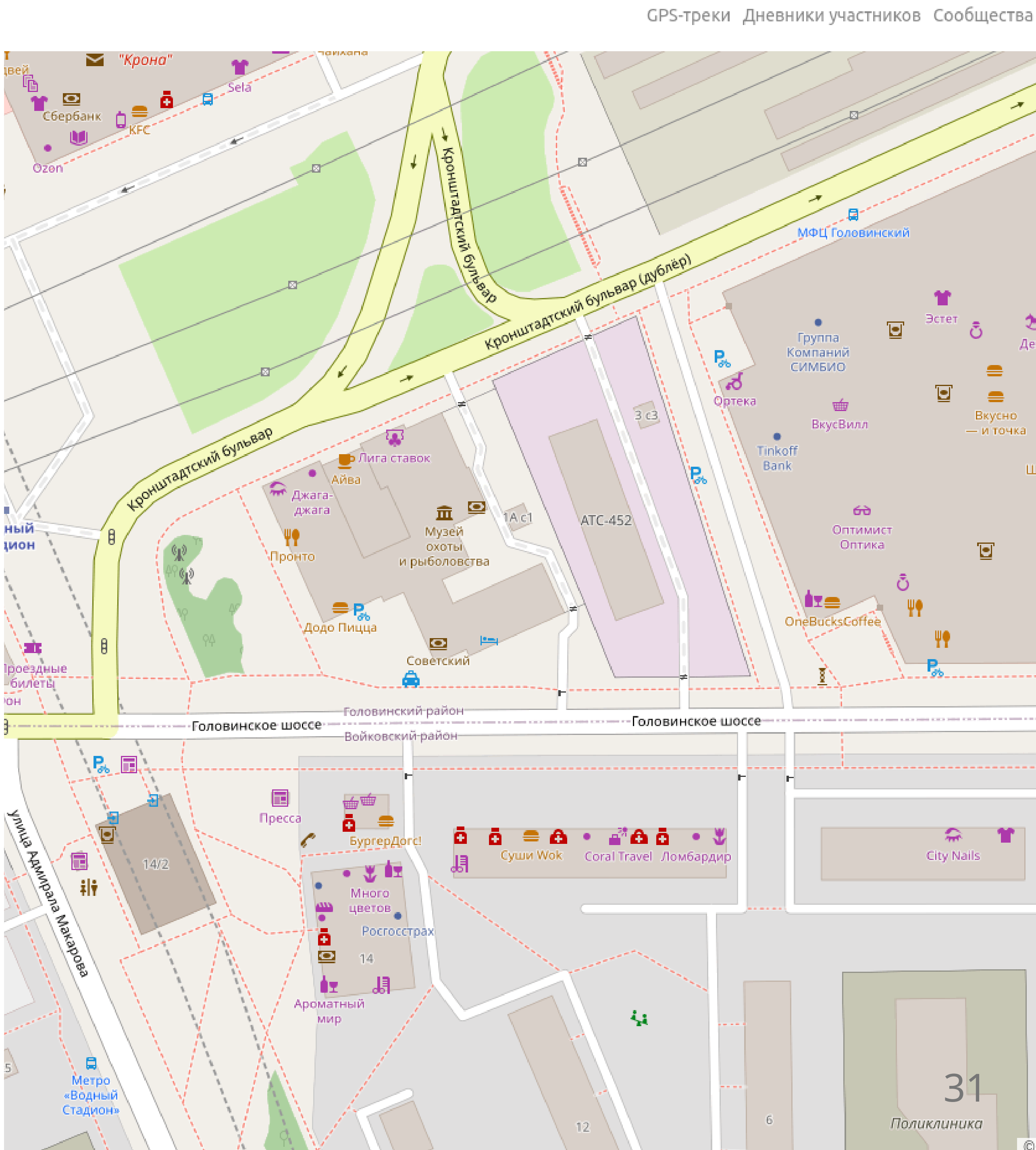
Мем



WHEN ELAINE TURNED 11, HER MOTHER SENT HER TO TRAIN UNDER DONALD KNUTH IN HIS MOUNTAIN HIDEAWAY.
FOR FOUR YEARS SHE STUDIED ALGORITHMS.
CHILD—
WHY IS A* SEARCH WRONG IN THIS SITUATION?
SWISH
MEMORY USAGE!
WHAT WOULD YOU USE?
DIJKSTRA'S ALGORITHM!
UNTIL ONE DAY SHE BESTED HER MASTER
SO OUR LOWER BOUND HERE IS O(n log n)
NOPE. GOT IT IN O(n log (log n))
AND LEFT.

Идея для пет-проекта

Экспортировать карту своего района (например, в OSM) и поискать в ней кратчайшие пути от дома до универа, магазина, поликлиники и прочего.



Для дальнейшего изучения

- Сходите на семинары!
- Дискретная математика
- Двудольные графы, паросочетания
- Ациклические графы, конденсация графа.