Mathematik für Informatiker I

WS 2015/16 Tübingen

DR. DORN

Kirsten Knott

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Logik

Aussagenlogik 12.10.15

Eine logische Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Wahre Aussagen haben den Wahrheitswert 1 (auch “wahr“, “w“, “true“, “t“), falsche den Wert 0 (auch “falsch“, “f“, “false“)

Notation: Aussagenvariablen $A, B, C, \dots \quad A_1, A_2, \dots$

Bsp.:

- 2 ist eine gerade Zahl (1)
- Heute ist Montag (1)
- 2 ist eine Primzahl (1)
- 12 ist eine Primzahl (0)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen (1)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Aussage, aber unbekannter WHW)
- 7 (keine Aussage)
- Ist 172 eine Primzahl (keine Aussage)

Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen (Junktoren, z.B. “und“, “oder“) kompli- 14.10.15 zierte bilden. Diese werden Ausdrücke genannt. (auch Aussagen sind Ausdrücke) Durch sog. Wahrheitstafeln gibt man an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bedingt ist.

Im Folgenden seien A, B Aussagen

Die wichtigsten Junktoren:

1.1 Negation

Verneinung von A: $\boxed{\neg A}$ (auch $\overline{A}$), “nicht A“

ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele:

A: 6 ist durch 3 teilbar (1)

$\neg A$: 6 ist nicht durch 3 teilbar (0)

B: 4,5 ist eine gerade Zahl (0)

$\neg B$: 4,5 ist keine gerade Zahl (1)

1.2 Konjunktion

Verknüpfung von A und B durch "und" $\boxed{A \wedge B}$
ist genau dann wahr, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.3 Disjunktion

"oder" : $\boxed{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.4 XOR

"entweder oder" A XOR B, $\boxed{A \oplus B}$
(ausschließendes oder)

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.5 Implikation

"wenn ... dann" $\boxed{A \Rightarrow B}$
(wenn A gilt, dann auch B
A impliziert B
A ist hinreichend für B)
"ex falso quodlibet "

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.6 Äquivalenz

"genau dann wenn" $\boxed{A \Leftrightarrow B}$
(dann und nur dann wenn,
äqivalent,
if and only if, iff)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

<u>Festlegung:</u> $\underline{\neg}$ bindet stärker als alle anderen Junktoren ($\neg A \wedge B$ heißt $(\neg A) \wedge B$)

1.7 Beispiele

a) Wann ist der Ausdruck $(A \lor B) \land \neg(A \land B)$ wahr?

$\rightarrow$ exklusives oder

b) $(A \land B) \Rightarrow \neg(C \lor A)$

$\rightarrow$ 0 0 1 1 1 1 1 1

1.8 Definition "$\equiv$"

19.10.15

Haben zwei Ausdrücke α und β bei jeder Kombination von Wahrheitswerten ihrer Aussagenvariablen den gleichen Wahrheitswert, so heißen sie logisch äquivalent, man schreibt $\boxed{\alpha \equiv \beta}$ ("$\equiv$" ist kein Junktor, entspricht "=") [Es gilt: Falls $\alpha \equiv \beta$ gilt, hat der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ immer den WHW 1]

1.9 Sätze

a) Doppelte Negation $A \equiv \neg(\neg A)$

b) Kommutativität von $\land, \lor, \mathsf{XOR}, \Leftrightarrow$

⚠ gilt nicht für "$\Rightarrow$"

c) Assoziativität von $\land, \lor, \mathsf{XOR}, \Leftrightarrow$

d) Distributivität von $\land, \lor$

e) Regeln von DeMorgan

$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$

$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

f) Kontraposition $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

g) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \lor B$

h) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$

(Alle Äquivalenzen gelten auch wenn die Aussagenvariablen durch Ausdrücke ersetzt werden.)

BEWEIS: Jeweils mittels Wahrheitstafel,

z.B.: a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
0	1	0
1	0	1

1.10 Bemerkung zur Kontraposition

(1.9f): $A \Rightarrow B \equiv \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{wird Kontraposition genannt, wichtig für Beweis. Wird im Sprachgebrauch oft falsch verwendet.}}$

BEISPIEL: $\underbrace{\text{Pit ist ein Dackel.}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{Pit ist ein Hund.}}_{B}$

äquivalent zu: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Pit ist kein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist kein Dackel.

aber nicht zu: $B \Rightarrow A$

Pit ist ein Hund. $\Rightarrow$ Pit ist ein Dackel.

aber nicht zu: $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$

Pit ist kein Dackel. $\Rightarrow$ Pit ist kein Hund.

BEISPIEL: Sohn des Logikers / bellende Hunde ($\rightarrow$ Folien)

1.11 Bemerkung (Logisches Umformen)

Sei α ein Ausdruck, Ersetzen von Teilausdrücken von α durch logisch äquivalente Ausdrücke liefert einen zu α äquivalenten Ausdruck. So erhält man eventuell kürzere/einfachere Ausdrücke, zum Beispiel:

$$\neg(A \Rightarrow B) \underset{1.9\,g)}{=} \neg(\neg A \vee B) \underset{1.9\,e)}{=} \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \underset{1.9\,a)}{=} A \wedge \neg B$$

1.12 Definition Tautologie, Kontradiktion, erfüllbar

Ein Ausdruck heißt Tautologie, wenn er für jede Belegung einer Aussagevariablen immer den Wert 1 annimmt. 21.10.15

Hat er immer den Wert 0, heißt er Kontradiktion.

Gibt es mindestens eine Belegung der Aussagenvariablen, sodass der Ausdruck den Wert 1 hat, heißt er erfüllbar.

1.13 Beispiele

a) $A \vee \neg A$ Tautologie

$A \wedge \neg A$ Kontradiktion

b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ Tautologie (vgl. 1.11)

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$ Tautologie (vgl. 1.9 g))

c) $A \wedge \neg B$ ist erfüllbar (durch $A = 1,\ B = 0$

PRÄDIKATENLOGIK

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, das formal wie eine Aussage aussieht, aber nie eine oder mehrere Variablen enthält.

Beispiel: $P(x)\ :\ \underbrace{x}_{\text{Variable}} \quad \overbrace{< 10}^{\text{Prädikat(Eigenschaft)}}$

$Q(x)\ :\ x$ studiert Informatik

$R(y)\ :\ y$ ist Primzahl und $y^2 + 2$ ist Primzahl

Eine Aussageform wird zur Aussage, wenn man die Variable durch ein konkretes Objekt ersetzt.

Dies ist nur dann sinnvoll, wenn klar ist, welche Werte für x erlaubt sind, daher wird oft die zugelassene Wertemenge mit angegeben. (hier Vorgriff auf Kapitel "Mengen").

Im Beispiel: $P(3)$ ist wahr, $P(42)$ falsch.

$R(2)$ ist falsch, $R(3)$ wahr.

Oft ist die Frage interessant, ob es wenigstens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist, oder ob $P(x)$ sogar für alle zugelassenen x wahr ist.

1.14 Definition Quantoren

Sei $P(x)$ eine Aussageform.

a) Die Aussage "Für alle x (aus einer bestimmten Menge M) gilt $P(x)$ ist genau dann wahr, wenn $P(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\forall}_{\text{für alle, für jedes}} \quad x \quad \underbrace{\in M}_{\text{aus der Menge } M} \quad \underset{\text{gilt}}{\overset{:}{\downarrow}} \quad \underset{\text{Eigenschaft}}{\overset{P(x)}{\downarrow}}$

auch $\underset{x \in M}{\forall} P(X)$ Das Symbol '$\forall$' heißt All-Quantor, die Aussage All-Aussage.

b) Die Aussage "Es gibt (mindestens) ein x aus der Menge M, das die Eigenschaft $P(x)$ besitzt" ist wahr genau dann wenn $P(x)$ für mindestens eines der in Frage kommenden x wahr ist.

Schreibweise: $\underbrace{\exists}_{\text{es gibt, es existiert}} \quad x \in M \underbrace{:}_{\text{sodass gilt}} P(x)$ "$\exists$" heißt Existenzquantor, die Aussage Existenzaussage

1.15 Beispiel/Bemerkung

	a	b	c
Übungsgruppe G:	Anna	Bob	Clara
	blond	blond	blond

$B(x)$: x ist blond

$W(x)$: x ist weiblich

$B(a) = 1, \ W(b) = 0$

1.) Alle Studenten der Gruppe sind blond (1)

$\forall x \in G : x$ ist blond ;$\forall x \in G : B(x)$ (1)

Das bedeutet:
a blond $\wedge$ b blond $\wedge$ c blond
$B(a)_{(1)} \wedge B(b)_{(1)} \wedge B(c)_{(1)}$

$\forall$ ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2.) Alle Studenten der Gruppe sind weiblich (0)

$\underbrace{W(a)}_{1} \wedge \underbrace{W(b)}_{0} \wedge \underbrace{W(c)}_{1}$ (0)

3.) Es gibt einen Studenten der Gruppe, der weiblich ist. (1)

$\exists x \in G : W(x)$ (1)

$\underbrace{W(a)}_{1} \vee \underbrace{W(b)}_{0} \vee \underbrace{W(c)}_{1}$ $= 1$

$\exists$ ist eine verallgemeinerte Disjunktion.

4.) Aussage A: Alle Studenten der Gruppe sind weiblich (0)

Verneinung von A? $\neg A$

⚠ Nicht korrekt wäre: Alle Studenten der Gruppe sind männlich. (0)

korrekt: Nicht alle Studenten der Gruppe sind weiblich (1)

Es gibt (mind.) einen Studenten der Gruppe, der nicht weiblich ist (1)

allgemeiner:

1.16 Negation von All- und Existenzaussagen

a) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \equiv \exists x \in M : \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \equiv \forall x \in M : \neg P(x)$

(Verallgemeinerung der Regeln von DeMorgan $\rightarrow$ Bsp. 1.15,4)

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x \in G : W(x)) &\equiv \neg(W(a) \wedge W(b) \wedge W(c)) \\
&\underset{DeMorgan}{\equiv} \neg W(a) \vee \neg W(b) \vee \neg W(c) \\
&\equiv \exists x \in G : \neg W(x)
\end{aligned}$$