Глава 7. Дискретные сигналы

Цель работы: изучить математическое описание дискретных сигналов и овладеть программными средствами их моделирования в MATLAB.

7.1. Краткая теоретическая справка

Дискретным называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел *бесконечной* разрядности $x(nT)$ или $x(n)$, называемой коротко *последовательностью*.

В теории ЦОС термины *"дискретный сигнал"* и *"последовательность"* употребляют в тождественном смысле.

При компьютерном моделировании под дискретным сигналом условно понимают последовательность чисел *максимально возможной* разрядности, а под цифровым — последовательность чисел *заданной* разрядности.

В MATLAB числа с максимальной разрядностью относятся к типу `double`, который выбирается по умолчанию.

7.1.1. Детерминированные дискретные сигналы

Детерминированным дискретным сигналом называют сигнал, значения которого в любой момент времени n (или nT) заранее известны или могут быть определены точно по заданной математической модели.

Детерминированный дискретный сигнал описывается последовательностью $x(nT)$ или $x(n)$, при этом термин "детерминированной" принято опускать.

Для детерминированного дискретного сигнала (последовательности) представляют интерес такие его характеристики как среднее значение, энергия, средняя мощность, автокорреляционная и автоковариационная функции.

Средним значением последовательности называют сумму ее значений, отнесенную к длине.

Энергией последовательности называют сумму квадратов ее значений, а *средней мощностью* — энергию, отнесенную к длине последовательности.

В MATLAB среднее значение `M` вычисляется с помощью функции:

```
M = mean(x)
```

где `x` — вектор отсчетов последовательности.

Энергия `E` и средняя мощность `P` вычисляются согласно их определению:

```
E = sum(x.^2)
```

```
P = sum(x.^2)/length(x)
```

где `length(x)` — длина последовательности.

Автокорреляционная функция (АКФ[1]) $R_x(m)$ последовательности длины N позволяет оценить зависимость между ее отсчетами при различных сдвигах по времени m:

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)\, x(n+m), \quad -(N-1) \le m \le (N-1)\,. \tag{7.1}$$

Автоковариационная функция $r_x(m)$ позволяет оценить зависимость между отклонениями отсчетов последовательности от среднего значения μ_x при различных сдвигах по времени m:

$$r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} [x(n) - \mu_x][\,x(n+m) - \mu_x],\ -(N-1) \le m \le (N-1)\,. \tag{7.2}$$

Согласно определению, $R_x(m)$ (7.1) и $r_x(m)$ (7.2) являются четными функциями длины $L = 2N-1$, центрированными относительно $m = 0$:

$$R_x(m) = R_x(-m)\,;$$

$$r_x(m) = r_x(-m)\,.$$

При этом в точке $m = 0$ имеем:

$$R_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = P_{\text{ср}\,x} = \sigma_x^2 + \mu_x^2\,; \tag{7.3}$$

$$r_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \mu_x]^2 = \sigma_x^2\,, \tag{7.4}$$

где $P_{\text{ср}\,x}$ и σ_x^2 — средняя мощность и дисперсия последовательности $x(n)$.

Очевидно, что при $\mu_x = 0$ получаем равенства:

$$R_x(m) = r_x(m)\,;$$

$$R_x(0) = r_x(0) = \sigma_x^2\,.$$

В MATLAB АКФ и автоковариационная функция рассчитываются с помощью функций (без учета множителя $1/N$):

```
R = xcorr(x)
r = xcov(x)
```

[1] В англоязычной литературе — аббревиатура ACF (Autocorrelation Function).

где `x` — вектор отсчетов исходной последовательности длины N; `R` и `r` — векторы длины $L=2N-1$ значений АКФ $R_x(m)$ и автоковариационной функции $r_x(m)$, соответственно, центрированных относительно $m=N$:

$$R_x(N+m)=R_x(N-m),\ \ m=1,2,\ldots,N-1; \tag{7.5}$$

$$r_x(N+m)=r_x(N-m),\quad m=1,2,\ldots,N-1. \tag{7.6}$$

При этом в точке $m=N$ имеем:

$$R_x(N)=P_{\text{ср}\,x}=\sigma_x^2+\mu_x^2; \tag{7.7}$$

$$r_x(N)=\sigma_x^2. \tag{7.8}$$

7.1.2. Случайные дискретные сигналы

Случайным (*стохастическим*) *дискретным сигналом* называют сигнал, значения которого в дискретные моменты времени n (или nT) заранее неизвестны и могут быть определены лишь с некоторой вероятностью.

Случайный дискретный сигнал описывается совокупностью случайных последовательностей $x_k(n)$, $k=1,2,\ldots,K$, $n=0,1,\ldots,(N-1)$, и закономерностями, характеризующими свойства совокупности.

Описание случайного дискретного сигнала удобно представить в виде матрицы $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) & \ldots & x_1(n) & \ldots & x_1(N-1) \\ x_2(0) & x_2(1) & \ldots & x_2(n) & \ldots & x_2(N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_K(0) & x_K(1) & \ldots & x_K(n) & \ldots & x_K(N-1) \end{bmatrix}.$$

Ансамблем реализаций называют совокупность случайных последовательностей $x_k(n)$ (строки матрицы $\mathbf{X}$), а *реализацией* — одну из последовательностей.

Любая реализация случайного сигнала представляет собой детерминированный сигнал.

Определение *стационарности* случайного сигнала см. в книге.

Стационарный случайный дискретный сигнал называется *эргодическим*, если при определении его статистических характеристик усреднение *по ансамблю реализаций* эквивалентно *усреднению по времени* одной реализации, теоретически бесконечной длины $N\to\infty$.

Эргодический случайный дискретный сигнал — *случайная последовательность* $x(n)$ — описывается математическим ожиданием (средним значением) μ_x, дисперсией σ_x^2, АКФ $R_x(m)$ и автоковариационной функцией $r_x(m)$.

При *конечной* длине N последовательности говорят о вычислении их *оценок*:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,;$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n) - \hat{\mu}_x\right]^2\,.$$

Оценки АКФ $\hat{R}_x(m)$ и автоковариационной функции $\hat{r}_x(m)$ получают соответственно по формулам (7.1) и (7.2).

В MATLAB для вычисления *оценок* математического ожидания `M` и дисперсии `D` используются функции:

```
M = mean(x)
D = var(x)
```

где `x` — вектор отсчетов исходной последовательности длины N.

При моделировании методов и алгоритмов ЦОС часто используют случайные последовательности в виде белого шума. Две его широко применяемые разновидности генерируются в MATLAB (см. табл. 2.1):

- равномерный белый шум — последовательность случайных чисел из диапазона $[0;1]$, распределенных по равномерному закону (математическое ожидание — 0,5 и дисперсия — 1/12) — с помощью функции:

  ```
  x = rand(1,N)
  ```

  где `x` — вектор-строка отсчетов случайной последовательности длины `N`.

  Автоковариационная функция данного равномерного белого шума при $N \to \infty$ имеет вид *цифрового единичного импульса*;

- нормальный белый шум — последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону (математическое ожидание — 0 и дисперсия — 1) — с помощью функции:

  ```
  x = randn(1,N)
  ```

  АКФ данного нормального белого шума при $N \to \infty$ имеет вид *цифрового единичного импульса*.

Для моделирования нормального белого шума с заданными математическим ожиданием (средним значением) и дисперсией воспользуемся свойствами дисперсии $D\{X\}$ и математического ожидания $M\{X\}$ случайной величины X:

$$M\{X + C\} = M\{X\} + C\,;$$

$$D\{X + C\} = D\{X\} + D\{C\} = D\{X\}\,;$$

$$M\{BX\} = BM\{X\}\,;$$

$$D\{BX\} = B^2 D\{X\}\,,$$

где C, B — константы.

Таким образом, на основе случайной величины X с нулевым математическим ожиданием $M\{X\}=0$ и единичной дисперсией $D\{X\}=1$ можно получить случайную величину $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = BX + C \tag{7.9}$$

с математическим ожиданием $M\{\tilde{X}\}=C$ и дисперсией $D\{\tilde{X}\}=B^2$.

7.3. Задание на лабораторную работу

Задание на лабораторную работу связано с моделированием и анализом последовательностей и включает в себя следующие пункты:

1. Цифровой единичный импульс $u_0(nT)$ (идентификатор `u0`):

$$u_0(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

   с выводом графиков на интервале дискретного времени nT (идентификатор `nT`):

$$nT \in [0; (N-1)T] \tag{7.11}$$

   и дискретного нормированного времени n (идентификатор `n`):

$$n \in [0; (N-1)]. \tag{7.12}$$

   Пояснить:

   - взаимосвязь между дискретным и дискретным нормированным временем;
   - различие между цифровым единичным импульсом и дельта-функцией.

2. Цифровой единичный скачок $u_1(nT)$ (идентификатор `u1`):

$$u_1(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

   с выводом графиков на интервалах времени (7.11) и (7.12).

   Пояснить:

   - соответствие между цифровым и аналоговым единичными скачками;
   - чему равна частота дискретизации цифрового единичного скачка.

3. Дискретная экспонента $x_1(nT)$ (идентификатор `x1`):

$$x_1(nT) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{7.14}$$

   с выводом графиков на интервалах времени (7.11) и (7.12).

   Пояснить соответствие между дискретной и аналоговой экспонентами.

4. Дискретный комплексный гармонический сигнал $x_2(n)$ (идентификатор `x2`):

$$x_2(n) = Ce^{j\hat{\omega}_0 n} \tag{7.15}$$

с выводом графиков вещественной и мнимой частей на интервале времени (7.12).

Записать сигнал (7.15) в виде комбинации двух вещественных последовательностей.

5. Задержанные последовательности.

Вывести графики последовательностей (7.10), (7.13) и (7.14), задержанных на m отсчетов (идентификаторы `u0_m`, `u1_m` и `x1_m`), на интервале времени (7.12).

Записать формулы задержанных последовательностей.

6. Дискретный прямоугольный импульс $x_3(n)$:

$$x_3(n) = \begin{cases} U, & n_0 \le n \le (n_0 + n_{imp} - 1); \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{7.16}$$

с выводом графика на интервале времени (7.12).

Выполнить моделирование импульса двумя способами:

- с помощью функции `rectpuls` — идентификатор `x3_1`;
- на основе цифрового единичного скачка — идентификатор `x3_2`.

Пояснить:

- формат функции `rectpuls` (познакомиться самостоятельно);
- как выполняется моделирование импульса в обоих случаях.

7. Дискретный треугольный импульс.

Вывести график дискретного треугольного импульса $x_4(n)$ (идентификатор `x4`), сформированного посредством свертки дискретного прямоугольного импульса $x_3(n)$ (7.16) с самим собой, на интервале времени, равном длине свертки L:

$$n \in [0; (L-1)]\,. \tag{7.17}$$

Для вычисления свертки использовать функцию:

`conv(x,y)`

где `x`, `y` — сворачиваемые последовательности.

Привести аналитическую запись свертки. Определить теоретически и по графику длину свертки L и ширину треугольного импульса.

8. Линейная комбинация дискретных гармонических сигналов $x_5(n)$ (идентификатор `x5`):

$$x_5(n) = a_1 x1(n) + a_2 x2(n) + a_3 x3(n)\,, \tag{7.18}$$

где

$$xi(n) = B_i \sin(\hat{\omega}_i n),\ i = 1, 2, 3\ , \qquad (7.19)$$

с выводом графиков последовательностей $xi(n)$ и $x_5(n)$ на интервале времени

$$n \in [0; (5N-1)]\ . \qquad (7.20)$$

Вычислить среднее значение (идентификатор `mean_x5`), энергию (идентификатор `E`) и среднюю мощность (идентификатор `P`) последовательности (7.18).

Пояснить:

- операции при моделировании линейной комбинации сигналов (7.18);
- как определяют указанные характеристики.

9. Дискретный гармонический сигнал с экспоненциальной огибающей.

Вывести график дискретного сигнала $x_6(n)$ (идентификатор `x6`), представляющего собой дискретный гармонический сигнал $x(n)$ (идентификатор `x`)

$$x(n) = C \sin(\hat{\omega}_0 n) \qquad (7.21)$$

с экспоненциальной огибающей $|a|^n$, на интервале времени (7.12).

Привести аналитическую формулу дискретного сигнала $x_6(n)$ и пояснить операции при его моделировании.

10. Периодическая последовательность дискретных прямоугольных импульсов.

Вывести график пяти периодов периодической последовательность $x_7(n)$ (идентификатор `x7`) дискретных прямоугольных импульсов амплитуды U и длительности n_{imp} с периодом, вдвое большим длительности импульса.

Для формирования пяти периодов последовательности выполнить действия:

- на основе цифрового единичного скачка (7.13) сформировать один период последовательности (идентификатор `xp`);
- сформировать пять периодов последовательности с помощью функции `repmat` *(см. разд. 2.1.2)*.

Пояснить операции при моделировании периодической последовательности.

11. Равномерный белый шум.

Вычислить оценки математического ожидания (идентификатор `mean_uniform`) и дисперсии (идентификатор `var_uniform`) равномерного белого шума (идентификатор `r_uniform`) длины 10 000 с математическим ожиданием и дисперсией, установленными по умолчанию.

Вывести график оценки автоковариационной функции $\hat{r}_x(m)$ шума (идентификатор `r_r_uniform`), центрированной относительно $m = 0$.

Пояснить:

- чему равны истинные значения математического ожидания и дисперсии;
- каков вид истинной автоковариационной функции;
- чему равна длина оценки автоковариационной функции.

12. Нормальный белый шум.

    Вычислить оценки математического ожидания (идентификатор `mean_norm`) и дисперсии (идентификатор `var_norm`) нормального белого шума (идентификатор `r_uniform`) длины 10 000 с математическим ожиданием и дисперсией, установленными по умолчанию.

    Вывести график оценки АКФ $\hat{R}_x(m)$ шума (идентификатор `R_r_norm`), центрированной относительно $m = 0$.

    Пояснить:

    - чему равны истинные значения математического ожидания и дисперсии;
    - каков вид истинной АКФ;
    - чему равна длина оценки АКФ.

13. Аддитивная смесь $x_8(n)$ (идентификатор `x8`) дискретного гармонического сигнала $x(n)$ (7.21) с нормальным белым шумом с выводом графика на интервале времени (7.12).

    Пояснить, что понимают под аддитивной смесью сигнала с шумом.

14. Оценка АКФ $\hat{R}_x(m)$ (идентификатор `R`) последовательности $x_8(n)$ (см. п. 13) с выводом графика АКФ, центрированной относительно $m = 0$.

    Вывести оценку дисперсии последовательности $x_8(n)$ и значение $R_x(N)$.

    Пояснить:

    - свойства АКФ;
    - соответствие между выведенными значениями.

15. Нормальный белый шум с заданными статистическими характеристиками.

    С помощью функции `plot` вывести графики четырех разновидностей нормального белого шума длины 10 000:

    - с математическим ожиданием и дисперсией, установленными по умолчанию, — идентификатор шума `r_norm` (см. п. 12);
    - с математическим ожиданием mean и дисперсией, установленной по умолчанию, — идентификатор шума `r_normMean`;
    - с математическим ожиданием, установленным по умолчанию, и дисперсией var — идентификатор шума `r_normVar`;

- с математическим ожиданием mean и дисперсией var — идентификатор шума r_normMeanVar.

Для наглядности вывести графики шумов в одинаковом диапазоне по оси ординат [-MAX MAX] с помощью функции ylim, где MAX равно максимальному значению шума среди четырех его разновидностей.

Построить гистограммы четырех разновидностей нормального белого шума с помощью функции hist (параметры задать по умолчанию).

Для наглядности вывести гистограммы в одинаковом диапазоне по оси абсцисс [-MAX MAX] с помощью функции xlim, где значение MAX определено ранее.

В заголовке гистограмм вывести значения оценок математического ожидания (Mean value) и дисперсии (Variance).

Пояснить:

- к каким изменениям шума приводит изменение его математического ожидания и дисперсии;
- что отображает гистограмма и как она изменяется при изменении математического ожидания и дисперсии шума.

7.4. Типовой script-файл для выполнения лабораторной работы

Перед выполнением работы должна быть представлена табл. 7.1 исходных данных для своего номера бригады $N_{\text{бр}}$.

Для *запуска* лабораторной работы необходимо обратиться к script-файлу lr_07 по его имени:

```
>> lr_07
```

Для *принудительного снятия* script-файла с выполнения следует нажать комбинацию клавиш <Ctrl>+<Break>.

При выполнении script-файла текущие окна с графиками *не закрывать*.