

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
**Федеральное государственное**  
**бюджетное образовательное учреждение высшего образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ**  
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ**  
**им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

**Л. Н. Куликов**  
**М. Н. Москалец**  
**П. П. Шумаков**

# **ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**  
**ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ**

**СПб ГУТ)))**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2016**

УДК 621.391(075.8)

ББК 33.88я73

К 90

Рецензент

кандидат технических наук, доцент кафедры ТЭЦ и С СПбГУТ

*Д. Л. Бураченко*

*Рекомендовано к печати*

*редакционно-издательским советом СПбГУТ*

**Куликов, Л. Н.**

К90      Общая теория связи : учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы / Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец, П. П. Шумаков ; СПбГУТ. – СПб., 2016. – 104 с.

Изложен материал по основным этапам расчета системы связи, предназначенной для передачи непрерывных сообщений.

Может быть использовано для самостоятельной работы студентов при изучении теоретической части дисциплины ОТС ч. 2, а также при выполнении курсовой работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.03.01 «Радиотехника», 10.03.01 «Информационная безопасность», 11.05.04 «Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи».

**УДК 621.391(075.8)**

**ББК 33.88я73**

© Куликов Л. Н., Москалец М. Н., Шумаков П. П., 2016

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	6
2. ЗАДАНИЕ .....	8
3. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ .....	10
3.1. Источник сообщения .....	10
3.2. Аналого-цифровой преобразователь .....	11
3.3. Кодер .....	12
3.4. Формирователь модулирующих символов .....	13
3.5. Модулятор .....	14
3.5.1. <i>Сглаживающий формирующий фильтр</i> .....	14
3.5.2. <i>Блоки перемножителей, инвертор, сумматор</i> .....	15
3.6. Непрерывный канал .....	15
3.7. Демодулятор .....	16
3.8. Декодер .....	17
4. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ .....	19
4.1. Источник сообщений .....	19
4.2. Аналого-цифровой преобразователь .....	21
4.3. Кодер .....	22
4.4. Случайный синхронный телеграфный сигнал .....	24
4.5. Формирователь модулирующих символов или преобразователь последовательного кода в параллельный код .....	35
4.6. Модулятор .....	42
4.6.1. <i>Сглаживающий формирующий фильтр</i> .....	42
4.6.1.1. Межканальная и межсимвольная помехи .....	42
4.6.1.2. Сигналы со спектром приподнятого косинуса (импульсы Найквиста) .....	44
4.6.1.3. Определение формы сигнала $x_1(t)$ на выходе СФФ при условии, что в демодуляторе используется СФ с импульсом $x_1(t)$ .....	51
4.6.1.4. Прохождение прямоугольного импульса $g_2(t - nT)$ через СФФ .....	57
4.6.2. <i>Перемножители, инвертор и сумматор</i> .....	60
4.6.2.1. Корреляционные функции и спектральные плотности мощности случайных сигналов на выходах СФФ .....	60
4.6.2.2. Сигналы квадратурной модуляции КАМ-16 и КФМ-4 .....	64
4.6.2.3. Корреляционные функции и спектральные плотности мощности случайных сигналов на выходах перемножителей .....	68
4.6.2.4. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности случайного сигнала $s(t)$ на выходе модулятора (сумматора) .....	72
4.7. Непрерывный канал .....	75
4.8. Демодулятор и преобразователь параллельного кода в последовательный код .....	78

4.8.1. Обоснование структурной схемы. Импульсы $g_3(t - nT)$ .....	78
4.8.2. Схема демодулятора для сигналов на основе импульсов $g_3(t - nT)$ . <i>Прохождение сигнала <math>z(t)</math> через СФ1</i> .....	80
4.8.3. Определение составляющих $y_1(t)$ , $y_2(t)$ и $y_3(t)$ выходного сигнала $y(t)$ на выходе СФ1 .....	83
4.8.4. Вероятностные характеристики случайной величины $\xi$ .....	89
4.8.5. Вероятность ошибок на выходах РУ1 и РУ2 .....	92
4.8.6. Вероятность ошибки на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код .....	99
4.9. Декодер .....	100
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	102
Приложение .....	103

## **ВВЕДЕНИЕ**

Данное учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы по ОТС дополняет методические указания [7], изданные в 2012 г., где изложены принципы работы современных цифровых систем связи с использованием квадратурных видов модуляции и оптимальных в отношении флуктуационной помехи (типа белого шума).

В настоящем учебно-методическом пособии в структурную схему связи введены дополнительные блоки – сглаживающие формирующие фильтры (СФФ) в модуляторе и соответствующие согласованные фильтры (СФ) в демодуляторе, оптимизирующие систему связи в отношении флуктуационной помехи и устраняющие межсимвольную помеху.

Таким образом, при использовании этого учебно-методического пособия студенты могут изучить работу современных цифровых систем связи, использующих квадратурные виды модуляции, которые оптимальны в отношении флуктуационной и межсимвольной помех.

# 1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа (КР) по дисциплине «Общая теория связи» (ОТС) посвящена современным цифровым системам связи и ориентирована на использование новых теоретических и практических достижений в области цифровой связи.

На примере систем связи студенты получают практические результаты (в основном расчетного характера) по разделам дисциплины ОТС.

Как и в предыдущей курсовой работе по дисциплине ОТС [7], студенты должны:

рассчитать основные характеристики случайных сигналов на выходе источника сообщений, на выходе АЦП, использовать сверточное кодирование и декодирование на основе алгоритма Витерби [6];

применять современные виды модуляции (квадратурная амплитудная или квадратурная фазовая) с использованием соответствующих сигнальных созвездий;

последовательно рассмотреть определения вероятностных характеристик случайных процессов на выходах соответствующих функциональных узлов (корреляционные функции и спектральные плотности мощности);

привести подробный вывод корреляционной функции для случайного синхронного телеграфного сигнала в разд. 4.4;

обосновать каноническую форму сигналов квадратурных видов модуляции и определить корреляционную функцию на выходах СФФ, перемножителей в составе модулятора;

построить графики сигналов на выходе квадратурных модуляторов; на *выходе* блока ФМС

привести обоснование структурных схем квадратурных демодуляторов, определить вероятности ошибок на выходах решающих устройств (РУ) с последующим перерасчетом вероятности ошибок на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код;

возможные ошибки на выходе демодулятора исправить с использованием декодирования на основе алгоритма Витерби [6];

определить вероятности ошибок на выходе демодулятора при использовании квадратурных видов модуляции по методике, представленной в разд. 4.8.6.

Импульсные помехи, как правило, приводят к возникновению пакетов ошибок, и для их устранения применяют операции перемежения и деперемежения *информационных* символов. Операции перемежения и деперемежения *канальных* символов позволяют пакет ошибок свести к практически одиночным ошибкам. Ошибки можно легко исправить с использованием простых помехоустойчивых кодов, например сверточных.

При оформлении курсовой работы следует придерживаться следующих правил:

1) на титульном листе КР необходимо привести название учебного заведения, кафедры, учебной дисциплины, группы, фамилию, инициалы имени и отчества, номер зачетной книжки;

2) содержание работы излагать последовательно по функциональным узлам системы связи (от входа к выходу), описывая их функцию, приводя расчетные задания, необходимые схемы и таблицы;

3) графики полученных зависимостей следует приводить с указанием масштабов и размерностей по осям координат, а семейства непосредственно взаимосвязанных графиков приводить в виде рисунков.

## 2. ЗАДАНИЕ

Изучить и разработать систему цифровой связи, оптимальную в отношении флуктуационной помехи и исключаящую появления межсимвольной помехи. Возникновение межсимвольной и межканальной помех поясняется в тексте данного учебно-методического пособия.

В данной КР *не* предполагается оптимизировать систему связи в отношении импульсных помех, и поэтому блоки перемежения (П-4) и деперемежения (ДП-15) в структурной схеме (для КАМ-16 и КФМ-4), представленной на рис. 1, не используются.

Требуется:

1) изобразить структурную схему системы цифровой связи, включив блоки сглаживающих формирующих фильтров СФФ1 и СФФ2 в передающем устройстве и согласованных фильтров СФ1 и СФ2 в приемном устройстве;

2) пояснить назначение всех функциональных узлов цифровой системы связи;

3) рассчитать основные характеристики системы передачи цифровой информации.

На рис. 1 назначение функциональных узлов системы цифровой связи следующее:

- 1 – источник сообщений;
- 2 – аналого-цифровой преобразователь (АЦП);
- 3 – кодер (К);
- 4 – перемежитель (П);
- 5 – формирователь модулирующих символов (ФМС) или преобразователь последовательного кода в параллельный код;
- 6 – сглаживающие формирующие фильтры (СФФ1, СФФ2);
- 7 – перемножители;
- 8 – фазовращатель;
- 9 – генератор гармонических колебаний;
- 10 – инвертор;
- 11 – сумматор;
- 12 – непрерывный канал;
- 13 – демодулятор (ДМ);
- 14 – преобразователь параллельного кода в последовательный код;
- 15 – деперемежитель (ДП);
- 16 – декодер (ДК);
- 17 – цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП);
- 18 – получатель сообщений.



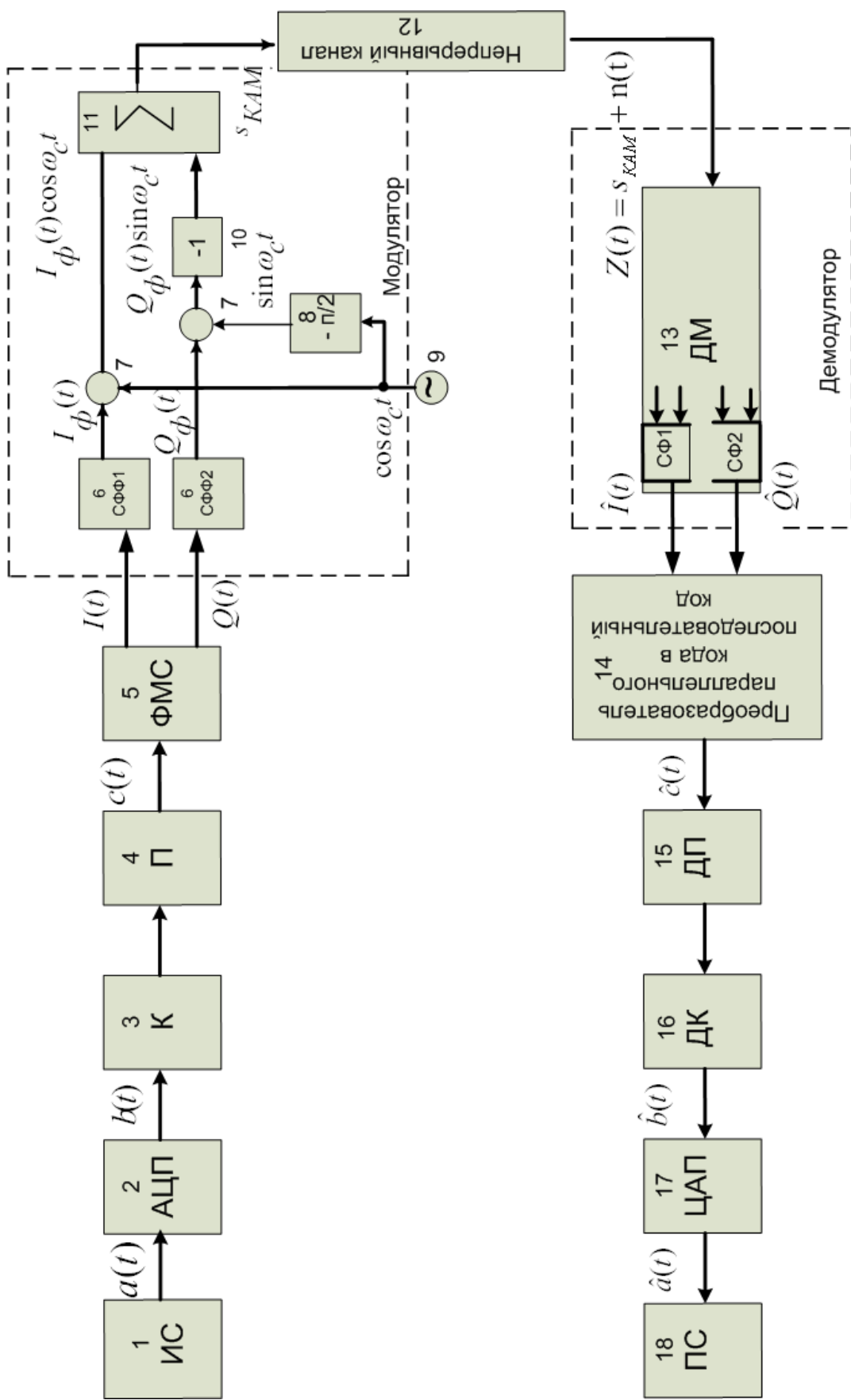


Рис. 1. Структурная схема цифровой системы связи

### 3. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Номер выполняемого варианта  $m$  определяется двумя последними цифрами в номере зачетной книжки студента (например, если номер зачетной книжки равен № 037071, тогда  $m = 71$ ).

Используя номер варианта  $m$ , внести свои данные в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Значение параметра	Данные по вашему варианту
Предельные уровни аналогового сигнала $a_{\min}, a_{\max}$ (В)	$a_{\max} = 25,6$ В	Внести свои данные
	$a_{\min} = -25,6$ В	
Верхняя частота спектра аналогового сигнала $f_{\text{в}}$	$f_{\text{в}} = (1 + m \cdot 10^{-2}) \cdot 10^4$ Гц	$f_{\text{в}} =$ Гц
Заданный уровень квантования	$j = 500 - 3 \cdot m$	$j =$
Спектральная плотность мощности флуктуационной помехи	Номер варианта $m$ , в пределах	$N_0 =$ В <sup>2</sup> /Гц
	1...33	$3,0 \cdot 10^{-7}$
	34...66	$2,3 \cdot 10^{-7}$
	67...99	$1,85 \cdot 10^{-7}$
$q$ – номер тактового интервала ошибки	$q = m(\text{mod } 3) + 1$	$q =$
№ вида модуляции $l = m(\text{mod } 2)$	Вид модуляции	Вид модуляции по числу $l$
0	КФМ-4	
1	КАМ-16	

Номер вида модуляции определяется числом  $l$ . Например, если вариант  $m = 71$ , то число  $l = 71(\text{mod } 2)$  равно остатку от деления числа 71 на 2, т. е. остаток – 1, вид модуляции – КАМ-16.

Кодирование и декодирование – сверточное. При осуществлении операций кодирования и декодирования на основе алгоритма Витерби рекомендуется использовать учебное пособие по теории электрической связи [6].

#### 3.1. Источник сообщения

Источник сообщения (ИС) вырабатывает реализации  $a(t)$  стационарного случайного процесса  $A(t)$  типа квазибелого шума с параметрами  $a_{\min}$ ,  $a_{\max}$  и  $f_{\text{в}}$ . Мгновенные значения сообщения равновероятны в интервале от значения  $a_{\min}$  до значения  $a_{\max}$ .

Требуется:

1) написать аналитические выражения для плотности вероятности  $w(a)$  мгновенных значений сообщения, функции распределения  $F(a)$  и построить их графики;

2) рассчитать математическое ожидание  $\bar{A}(t)$  и дисперсию  $D\{A(t)\}$  сообщения  $A(t)$ ;

3) написать аналитическое выражение для спектральной плотности мощности  $G_A(f)$  сообщения  $A(t)$  и построить график;

4) найти аналитическое выражение для корреляционной функции  $B_A(\tau)$  сообщения  $A(t)$  и построить график. По форме графика  $B_A(\tau)$  определить, является ли сообщение  $A(t)$  эргодическим случайным процессом или не является таковым (разд. 4.1).

### 3.2. Аналого-цифровой преобразователь

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) преобразует реализации аналогового (непрерывного) сообщения  $A(t)$  в цифровую форму, в поток двоичных символов: нулей и единиц, т. е. в последовательность прямоугольных импульсов, где «0» имеет нулевое напряжение, а «1» – прямоугольный импульс положительной полярности. Амплитуда импульсов  $U$  равна 1 В.

Преобразование аналогового сигнала в цифровую форму осуществляется в *три* этапа.

На *первом* этапе производится дискретизация реализации  $a(t)$  сообщения  $A(t)$  по времени. В моменты времени  $t_i$  берутся непрерывные по уровню отсчеты  $a(t_i)$  мгновенных значений реализации  $a(t)$ . Расстояние между отсчетами равно интервалу  $\Delta t$ , величина которого определяется в соответствии с теоремой Котельникова:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_{\text{в}}}; \quad f_d = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{\text{в}}, \quad (1)$$

где  $f_d$  – частота дискретизации.

На *втором* этапе выполняется квантование точных отсчетов  $a(t_i)$  по уровню. Для этого интервал  $\Delta$ , равный разности  $\Delta = a_{\text{макс}} - a_{\text{мин}}$ , разбивается на уровни квантования с постоянным шагом  $\Delta a = 0,1 \text{ В}$ . Уровни квантования нумеруются целыми числами  $0, 1, 2, 3, \dots, L-1$ . Нумерация уровней начинается с уровня, которому соответствует значение  $a_{\text{мин}}$ , и

заканчивается на уровне, которому соответствует значение  $a_{\text{макс}}$ . Обычно величина шага квантования  $\Delta a$  выбирается так, чтобы число уровней квантования  $L$  можно было представить в виде  $L = 2^k$ , где  $k$  – целое число.

Каждый аналоговый отсчет  $a(t_i)$  заменяется значением ближайшего к нему уровня квантования  $j$  в виде целого числа, удовлетворяющего неравенству  $0 \leq j \leq L - 1$ . Получаем квантованный отсчет  $j_{10}(t_i)$  в виде целого числа в десятичной форме счисления.

На *третьем* этапе число  $j_{10}(t_i)$  в десятичной форме переводится в двоичную форму счисления  $j_2(t_i)$  в виде последовательности  $k$  двоичных символов и на выходе АЦП появляется сигнал в виде двоичной цифровой последовательности из  $k$  информационных символов.

Требуется:

1) рассчитать интервал дискретизации  $\Delta t$  для получения непрерывных отсчетов  $a(t_i)$  реализации  $a(t)$ ,  $t_i = i \cdot \Delta t$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

2) рассчитать частоту дискретизации  $f_d$ ;

3) определить число уровней квантования  $L$ ;

4) рассчитать мощность шума квантования  $P_{\text{шк}}$  и сравнить ее с мощностью непрерывного сообщения  $A(t)$ ,  $P_{\text{шк}} = \Delta a^2 / 12$ ;

5) найти минимальное число  $k$  двоичных разрядов, требуемое для записи в двоичной форме любого номера  $j$  из  $L - 1$  номеров уровней квантования;

6) записать  $k$ -разрядное двоичное число, соответствующее заданному уровню квантования  $j$ ;

7) начертить временную диаграмму отклика АЦП  $b_{\text{АЦП}}(t)$  на заданный уровень квантования  $j$  в виде последовательности импульсов, сопоставляя *единичным* символам прямоугольные импульсы положительной полярности, а *нулевым* – нулевые напряжения. Амплитуда импульсов  $U$  равна  $2h$  В. Над импульсами надписать значения соответствующих двоичных информационных символов (ДИС). Длительность отклика АЦП на каждый отсчет не должна превышать интервала дискретизации  $\Delta t$  (разд. 4.2).

### 3.3. Кодер

Используется помехоустойчивый сверточный код. Выбрать структурную схему сверточного кодера в [6].

Требуется:

1) задать следующие параметры сверточного кодера: степень кодирования  $k/n = 1/2$ ; длину кодового ограничения  $K = 3$ ; векторы связи

$\bar{g}_1 = 111$  и  $\bar{g}_2 = 101$ . Импульсная характеристика  $h(k)$  задается информационной последовательностью 111011000..., где  $k$  – номер тактового интервала.

В [6] импульсная характеристика обозначена  $g(t)$ , а в данном учебно-методическом пособии используем обозначение  $h(t)$ .

Определить кодовое расстояние  $d$  по известной импульсной характеристике кодера  $h(k) = 111011000$ ;

2) определить и изобразить структурную схему кодера, соответствующую заданным параметрам в КР;

3) изобразить решетчатую диаграмму сверточного кодера от момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_{13}$ . Решетчатая диаграмма строится аналогично диаграмме [6, рис. 9, с. 21];

4) по решетчатой диаграмме сверточного кодера определить последовательность кодовых символов (КС)  $\bar{u}$  на выходе кодера при условии, когда на вход кодера поступает 9-разрядная двоичная последовательность информационных символов (ИС)  $\bar{m}$ , соответствующая заданному уровню квантования  $j$  (разд. 3.2, п. 6);

5) на решетчатой диаграмме кодера отметить путь, соответствующий полученным КС (разд. 4.3, табл. 2).

### 3.4. Формирователь модулирующих символов

Требуется:

1) изобразить сигнальное созвездие для заданного вида модуляции (разд. 4.5);

2) изобразить график реализации  $c(t)$  случайного процесса  $C(t)$ , формируемого с выхода блока сверточного кодера (К). Реализация  $c(t)$  поступает на вход блока ФМС на первых 16 бинарных интервалах длительностью  $T_B$ . Написать аналитическое выражение для случайного процесса  $C(t)$  (разд. 4.5);

3) в соответствии с сигнальным созвездием модулятора КАМ-16 или КФМ-4 изобразить графики реализаций  $i(t)$  и  $q(t)$  на выходе блока ФМС, соответствующие входной реализации  $c(t)$ . Написать аналитические выражения для случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$ ;

4) написать аналитические выражения для корреляционной функции  $B_C(\tau)$  и спектральной плотности мощности  $G_C(\omega)$  входного случайного процесса  $C(t)$  и построить графики этих функций;

5) написать аналитические выражения для корреляционных функций  $B_I(\tau)$  и  $B_Q(\tau)$ , спектральных плотностей мощности  $G_I(\omega)$  и  $G_Q(\omega)$  случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$ . Построить графики этих функций;

6) сравнить графики корреляционных функций и спектральных плотностей мощности сигналов на *входе* и *выходе* блока ФМС. Привести краткое описание результатов сравнения и, используя общие положения теории преобразования Фурье, пояснить, почему спектр выходных сигналов *уже* спектра входного сигнала (разд. 4.5).

### 3.5. Модулятор

В состав модулятора структурной схемы цифровой системы связи (ЦСС), рис. 1, между блоками ФМС и перемножителями входят сглаживающие формирующие фильтры СФФ, необходимые для оптимизации ЦСС в отношении межсимвольной помехи, а также инвертор и сумматор, на выходе которого получаем сигнал заданного вида модуляции.

#### 3.5.1. Сглаживающий формирующий фильтр

Требуется:

1) изобразить структурную схему модулятора в составе ЦСС (разд. 4.6.1.4, рис. 25);

2) написать аналитические выражения для сигнала  $x(t)$  со «спектром приподнятого косинуса» (импульса Найквиста) и его спектральной плотности  $S_x(f)$  для значений коэффициента сглаживания  $0 \leq \beta \leq 1$ . Изобразить графики сигналов  $x(t)$  и соответствующие спектральные плотности при  $0 \leq \beta \leq 1$  (рис. 19);

3) на одном рисунке изобразить графики спектральных плотностей  $S_x(\omega)$  и  $S_{x1}(\omega)$  сигналов  $x(t)$  и  $x_1(t)$  (рис. 22), где  $x(t)$  – импульс Найквиста при коэффициенте сглаживания  $\beta=1$ ;  $x_1(t)$  – импульс со спектральной плотностью  $S_{x1}(\omega) = \sqrt{S_x(\omega)}$ ;

4) на одном рисунке изобразить графики импульсов  $x(t)$  и  $x_1(t)$  (рис. 23);

5) написать аналитические выражения для случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ ;

6) написать аналитические выражения для корреляционных функций и спектральных плотностей мощности случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$  и построить графики этих функций (рис. 27 и 28 в разд. 4.6.2.1).

### 3.5.2. Блоки перемножителей, инвертор, сумматор

Требуется:

1) написать аналитические выражения для корреляционных функций  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$  и  $B_{Q_\Phi \sin}(\tau)$  случайных сигналов  $I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C)$  и  $Q_\Phi(t) \cdot \sin(\omega_C t + \varphi_C)$  на выходах *перемножителей*, где  $\varphi_C$  – случайная фаза с равномерной плотностью вероятности на интервале  $0 \dots 2\pi$ . Случайная фаза  $\varphi_C$  не зависит от случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ ;

2) написать аналитические выражения для корреляционных функций  $B_S(\tau) = B_{I_\Phi}(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau = B_{Q_\Phi}(\tau) \cdot \cos \omega_C \tau$  и для спектральной плотности мощности  $G_S(\omega)$  сигнала  $S(t)$  на выходе *сумматора* для заданного вида модуляции. Построить графики этих функций.

### 3.6. Непрерывный канал

Передача сигнала  $S(t)$  происходит по непрерывному неискажающему каналу с постоянными параметрами в присутствии аддитивной помехи  $n(t)$  типа гауссовского белого шума. Сигнал  $Z(t)$  на выходе такого канала имеет вид

$$Z(t) = \mu \cdot S(t) + n(t), \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент передачи канала. Для всех вариантов  $\mu = 1$ .

Односторонняя спектральная плотность мощности помехи  $n(t)$  равна  $N_0$  (значение  $N_0$  для своего варианта найти в исходных данных).

Требуется:

1) определить минимальную ширину полосы частот  $F_k$  непрерывного канала, необходимую для передачи по каналу сигнала  $S(t)$  с выхода модулятора;

2) определить  $P_c$  – среднюю мощность информационного сигнала  $\mu \cdot S(t)$  на выходе канала;

3) определить  $P_n$  – среднюю мощность помехи  $n(t)$  на выходе канала и найти отношение  $P_c / P_n$ ;

4) рассчитать пропускную способность  $C$  (за секунду) непрерывного канала.

### 3.7. Демодулятор

Требуется:

- 1) изобразить структурную схему когерентного демодулятора, оптимального по критерию максимального правдоподобия для заданного сигнала квадратурной модуляции;
- 2) написать алгоритмы работы решающих устройств РУ1 и РУ2 в составе когерентного демодулятора;
- 3) определить вероятности ошибок на выходах РУ1 и РУ2:
  - а) в случае КАМ-16 при значениях символов  $I_n$  и  $Q_n$ , равных  $h, -h, 3h, -3h$ , когда  $h = 1$  В ;
  - б) в случае КФМ-4 при значениях символов  $I_n$  и  $Q_n$ , равных  $h$  и  $-h$ , когда  $h = 1$  В ;
- 4) на четырех символьных интервалах длительностью  $T_S$  нарисовать сигналы на выходах РУ1 и РУ2 демодулятора, соответствующие сигналам на *выходе* блока ФМС, которые поступают на два *входа* преобразователя параллельного кода в последовательный код. Под двумя построенными графиками, используя сигнальное созвездие для заданного вида модуляции, изобразить график сигнала на *выходе* преобразователя кода в виде соответствующей последовательности прямоугольных импульсов на *входе* блока ФМС длительностью  $T_B$  (разд. 4.8);
- 5) определить вероятности ошибок

$$p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п}); p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п}); p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п})$$

на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код, где  $p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п})$  – обозначение вероятности ошибочного приема, если

$$I_n = h, \quad Q_n = h;$$

- б) определить среднюю вероятность ошибки на выходе преобразователя при условии, что имеют место равенства:

$$p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=-h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-h \\ Q_n=-h}} (\text{ош.п});$$

$$p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-3h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=-3h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-3h \\ Q_n=-3h}} (\text{ош.п});$$

$$\begin{aligned} p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п}) &= p_{\substack{I_n=-h \\ Q_n=3h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=-3h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-h \\ Q_n=-3h}} (\text{ош.п}) = \\ &= p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-3h \\ Q_n=h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=3h \\ Q_n=-h}} (\text{ош.п}) = p_{\substack{I_n=-3h \\ Q_n=-h}} (\text{ош.п}). \end{aligned}$$



### 3.8. Декодер

1. Изучить алгоритм сверточного декодирования по методу Витерби [6, с. 23–37].

2. Записать последовательность  $\bar{u}$ , состоящую из кодовых символов (табл. 2, нижняя строка). Эту последовательность передает сигнал, поступающий на вход демодулятора. После прохождения через демодулятор последовательность  $\bar{u}$  трансформируется в последовательность  $\bar{Z}$  на выходе демодулятора.

Если в демодуляторе из-за влияния сигнала помехи не произошли ошибки, то последовательность  $\bar{Z}$  будет в точности соответствовать последовательности  $\bar{u}$ .

Если же произошли ошибки, то последовательность  $\bar{Z}$  будет отличаться от последовательности  $\bar{u}$  на последовательность ошибок  $\bar{e}$ . Последовательность  $\bar{e}$  содержит такое же количество символов, как и последовательность  $\bar{u}$ . Если в демодуляторе ошибок не произошло, то последовательность  $\bar{e}$  будет состоять из одних «нулевых» символов. Если произошли ошибки, то в последовательности  $\bar{e}$  появятся «единицы» вместо «нулей» в тех разрядах, в которых произошли ошибки.

В данной КР есть предположение, что при приеме последовательности  $\bar{u}$  может быть одна ошибка в разряде с номером  $q$  (в табл. 1 исходных данных буквой  $q$  обозначен номер тактового интервала ошибки).

Величина  $q$  определяется по формуле  $q = m(\text{mod } 3) + 1$ . Если номер варианта  $m = 71$ , тогда  $71(\text{mod } 3) = 2$ , т. е. число 2 равно величине остатка от деления 71 на 3. Таким образом, при  $q = 2 + 1 = 3$  в демодуляторе на 3-м тактовом интервале произошла ошибка.

В данном случае последовательность ошибок  $\bar{e}$  будет иметь вид  $\bar{e} = 00100000$ . Чтобы получить  $\bar{Z}$  – последовательность символов на выходе демодулятора, – необходимо последовательность  $\bar{u}$  сложить с последовательностью  $\bar{e}$ . Сложение осуществляется поразрядно по модулю 2 ( $\text{mod } 2$ ) без переноса результата сложения в другие разряды.

Например:

$$\begin{array}{r} \bar{u} = 11010010 \\ \oplus \\ \bar{e} = 00100000 \\ \hline \bar{Z} = 11110010. \end{array}$$

Получили последовательность  $\bar{Z}$ , соответствующую последовательности  $\bar{Z}$  в [6, с. 24, формула (11)]. Один символ в полученной последовательности  $\bar{Z}$  принят ошибочно, и в процессе декодирования *эту ошибку* необходимо **исправить**. Отмечаем **крестиком** символ в последовательности  $\bar{Z}$ , принятый с ошибкой.

Требуется:

1) построить решетчатую диаграмму декодера последовательности  $\bar{Z}$  по аналогии с решетчатой диаграммой декодера [6, рис. 10]. Численные обозначения над ребрами решетчатой диаграммы декодера определяются с учетом последовательности  $\bar{Z}$  своего варианта [6, с. 24];

2) построить диаграммы выживших путей от момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_{k+2}$  по аналогии с решетчатыми диаграммами [6, рис. 11–17], когда от момента  $t_1$  до момента  $t_k$  выживает только *один* путь;

3) перенести *один* выживший путь от момента времени  $t_1$  до момента  $t_k$  с решетчатой диаграммы декодера на решетчатую диаграмму кодера. По этому пути на диаграмме кодера определить те кодовые символы, которые поступали на вход сверточного кодера и передавались по каналу связи от момента  $t_1$  до момента  $t_k$ .

Проследить по диаграмме, чтобы *ошибка* на выходе демодулятора была *исправлена*.

## 4. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

### 4.1. Источник сообщений

Сигналом называется физический материальный носитель *информации* (сообщение). Сообщения могут быть в виде показаний приборов, состояний физических элементов, печатного текста и т. д. Сообщения предназначены для передачи информации на расстояние в виде сигналов, дискретных или непрерывных во времени.

1. Для определения плотности вероятности  $w(a)$  сигнала  $A(t)$  (сообщения  $A(t)$ ) любая плотность вероятности  $w(a)$  должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(a) da = 1,$$

которое показывает, что площадь ограничения кривой  $w(a)$  от  $a = -\infty$  до  $a = \infty$  будет равна единице.

Условие равновероятности мгновенных значений сообщения  $A(t)$  в интервале  $(a_{\min}, a_{\max})$  означает, что функция  $w(a)$  является *равномерной*, т. е. равна постоянной величине  $C$  в интервале  $(a_{\min} - a_{\max})$ , а вне указанного интервала равна нулю.

В данном случае условие нормировки примет вид  $C \cdot (a_{\max} - a_{\min}) = 1$ , откуда  $C = 1 / (a_{\max} - a_{\min})$ .

Аналитическое выражение плотности вероятности  $w(a)$  будет равно

$$w(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty \leq a < a_{\min}; \\ C = \frac{1}{a_{\max} - a_{\min}} & \text{при } a_{\min} \leq a \leq a_{\max}; \\ 0 & \text{при } a_{\max} < a \leq \infty. \end{cases}$$

Определим функцию распределения вероятности  $F(a)$ . Функция  $F(a)$  связана с плотностью вероятности  $w(a)$  интегральным равенством

$$F(a) = \int_{-\infty}^a w(a') da',$$

где переменная интегрирования  $a'$  дополнительно обозначена штрихом, чтобы не путать переменную интегрирования с верхним пределом интеграла  $a$ . Верхний предел интеграла  $a$  является аргументом функции распределения вероятности  $F(a)$ .

Задавая аргумент функции  $F(a)$  последовательно в трех интервалах:  $-\infty < a < a_{\min}$ ;  $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ ;  $a_{\max} < a < \infty$  – и используя известные значения функции  $w(a)$  в этих интервалах, находим функцию  $F(a)$  на указанных интервалах

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty \leq a < a_{\min}; \\ \frac{a - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}} & \text{при } a_{\min} \leq a \leq a_{\max}; \\ 1 & \text{при } a_{\max} < a \leq \infty. \end{cases}$$

2. Для определения математического ожидания  $\overline{A(t)}$  и дисперсии  $D\{A(t)\}$  случайного сообщения  $A(t)$  рекомендуется использовать [1, с. 27–35; 10, с. 111–112].

3. Сообщение  $A(t)$  является случайным процессом типа квазибелого шума, и его спектральная плотность мощности  $G_A(f)$  постоянна на частотном интервале от значения  $(-f_B \text{ до } f_B)$ , а вне этого интервала равна нулю. Обозначим значение функции  $G_A(f)$  на интервале  $(-f_B \text{ до } f_B)$  через  $G_0$ .

Односторонняя спектральная плотность  $G_0(f) = 2G_A(f)$  постоянна (равномерна) на частотном интервале от значения 0 до  $f_B$ , а вне этого интервала равна нулю [10, с. 119, рис. 4.3].

Вся мощность  $P_A$  случайного процесса  $A(t)$  равна площади прямоугольника с основанием  $2f_B$  и высотой  $G_0$ , т. е.  $P_A = 2f_B \cdot G_0$ .

С другой стороны, мощность  $P_A$  случайного процесса  $A(t)$  равна дисперсии  $D\{A(t)\}$ , которая была определена в п. 2, т. е.  $P_A = D\{A(t)\}$ . В результате можем написать равенство

$$2f_B \cdot G_0 = D\{A(t)\},$$

в которое входит неизвестная величина  $G_0$ . Из полученного равенства находим  $G_0$  размерностью  $\text{В}^2/\text{Гц}$ :

$$G_0 = \frac{D\{A(t)\}}{2f_B}.$$

Таким образом, можно написать

$$G_A(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty \leq f < -f_B; \\ G_0 = \frac{D\{A(t)\}}{2f_B} & \text{при } -f_B \leq f \leq f_B; \\ 0 & \text{при } f_B < f \leq \infty. \end{cases}$$

4. В соответствии с теоремой Винера – Хинчина корреляционная функция  $B_A(\tau)$  стационарного случайного процесса  $A(t)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} B_A(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_A(f) \cdot e^{i2\pi f \tau} df = \int_{-f_B}^{f_B} G_0 \cdot e^{i2\pi f \tau} df = \int_{-f_B}^{f_B} G_0 \cdot \cos(2\pi f \tau) df = \\ &= 2G_0 \int_0^{f_B} \cos(2\pi f \tau) df = \frac{2G_0}{2\pi\tau} \sin(2\pi f \tau) = 2G_0 f_B \frac{\sin(2\pi f_B \tau)}{2\pi f_B \tau}. \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_A(\tau) = 0$ , сообщение  $A(t)$  является эргодическим случайным процессом [1, с. 39–40; 10, с. 112–121, рис. 4.3 и 4.4].

## 4.2. Аналого-цифровой преобразователь

1. Интервал дискретизации  $\Delta t$  определяется на основе теоремы отсчетов [1, с. 64–69; 10, с. 35–42].

2. Частота дискретизации  $\omega_d = \frac{2\pi}{\Delta t}$ .

3. Число уровней квантования  $L$  определяется по формуле

$$L = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{\Delta a}.$$

Параметры  $a_{\max}$ ,  $a_{\min}$  и  $\Delta a$  обычно подбираются так, чтобы число  $L$  было равно  $2^k$ , где  $k$  – целое число. Величина  $k$  удовлетворяет равенству  $k = \log_2 L$  и определяет число разрядов в двоичной последовательности, соответствующей заданному уровню квантования.

Например,  $m = 71$ , тогда номер уровня квантования  $j = 500 - 3 \cdot m = 287$ .

4. При расчете мощности шума квантования следует исходить из свойства равномерного распределения на интервале  $\Delta a$  [1, с. 87–89].

5. Для перевода числа 287 в двоичную форму можно использовать два способа:

а) число 287 при  $k = 9$  можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} 287 &= a_8 \cdot 2^8 + a_7 \cdot 2^7 + a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + \\ &+ a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_8, a_7, a_6, \dots, a_0$  могут принимать только два значения – «0» или «1». В результате имеем

$$287 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

б) эту же двоичную последовательность можно определить в результате деления на 2 числа 287 и получения частных:

$$\begin{array}{r}
 \underline{287} \mid \underline{2}\_ \\
 \underline{286} \underline{143} \mid \underline{2}\_ \\
 1 \quad \underline{142} \underline{71} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad 1 \quad \underline{70} \underline{35} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad 1 \quad \underline{34} \underline{17} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad \quad 1 \quad \underline{16} \underline{8} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \quad \underline{8} \underline{4} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{0} \underline{4} \underline{2} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \underline{2} \underline{1} \mid \underline{2}\_ \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \underline{0} \quad 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1.
 \end{array}$$

В курсовой работе двоичная последовательность для любого отсчета должна содержать 9 двоичных символов.

6. При выполнении временной осциллограммы отклика АЦП  $b_{\text{АЦП}}(t)$  на уровень с заданным номером  $j$  следует использовать уровни напряжения интерфейса *Centronics*. Амплитуда  $U$  импульсов равна 1 В.

### 4.3. Кодер

При кодировании выполнить задание (разд. 3.3, пп. 1–5) данного пособия. В [6] выбрать сверточный кодер, нарисовать его структурную схему и решетчатую диаграмму [6, рис. 9, с. 21].

Например, № варианта КР  $m = 71$ . Заданному уровню квантования  $j$  соответствует  $\bar{m} \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$  двоичная информационная последовательность, поступающая на вход сверточного кодера (табл. 2).

*Таблица 2*

Информационные символы (ИС) $\bar{m}$	1	0	0	0	1	1	1	1	1
Кодовые символы (КС) $\bar{y}$	11	10	11	00	11	01	10	10	10

В первой строке табл. 2 указать информационные символы ИС  $\bar{m}$  по заданию уровня  $j$ .

Во вторую строку табл. 2 записать полученные кодовые символы КС  $\bar{u}$  на выходе сверточного кодера по решетчатой диаграмме кодера (разд. 3.3, пп. 3–5).

На решетчатой диаграмме кодера отметить путь, соответствующий кодовым символам второй строки табл. 2.

С выхода сверточного кодера (К) кодовые символы (КС)  $\bar{u}$  реализации  $c(t)$  случайного процесса  $C(t)$  (для своего варианта) поступают на вход блока ФМС (разд. 3.4, п. 2).

Рассмотрим использование решетчатой диаграммы кодера при кодировании на примере.

Пусть  $m$  – номер варианта КР,  $m = 71$ . Получена последовательность информационных символов ИС:  $\bar{m} = 100011111$ , соответствующая номеру уровня квантования  $j = 287$ . Построить решетчатую диаграмму кодера (рис. 2) аналогично [6, рис. 9].

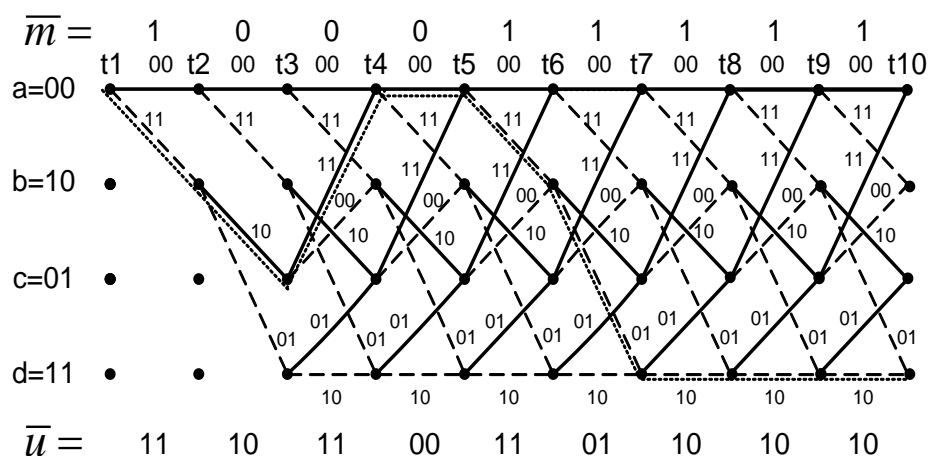


Рис. 2. Решетчатая диаграмма кодера

Над решетчатой диаграммой кодера сверху выписать символы ИС  $\bar{m}$  по одному символу над каждым ребром. По правилам, изложенным в [6, с. 18, 19], последовательно, начиная с момента времени  $t_1$  для каждого информационного символа ИС, определить два кодовых символа КС. Последовательность КС обозначить  $\bar{u}$ , т. е.  $\bar{u} = 11\ 10\ 11\ 00\ 11\ 01\ 10\ 10\ 10$ .

Под решетчатой диаграммой записать по два символа под каждым ребром диаграммы этой последовательности  $\bar{u}$ .

Весь путь, соответствующий кодированию, обозначить *другим цветом* (например, красным).

2. Для определения функции корреляции  $B_C(\tau)$  и спектральной плотности мощности  $G_C(f)$  случайного синхронного телеграфного сигнала использовать разд. 4.4 и [1, с. 40–45; 10, с. 112–123].

#### 4.4. Случайный синхронный телеграфный сигнал

Для определения вероятностных характеристик случайных сигналов на входе и выходе блока ФМС рассмотрим случайный синхронный телеграфный сигнал  $X(t)$  и его вероятностные характеристики.

На рис. 3 изображена реализация  $x_1(t)$  случайного процесса  $X(t)$  под названием «Случайный синхронный телеграфный сигнал» (ССТС). На вход ФМС этот сигнал поступает с выхода кодера К.

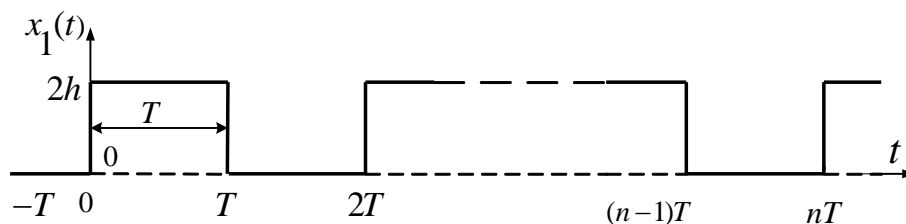


Рис. 3. Возможная реализация случайного сигнала  $X(t)$

В [6, с. 11] амплитуда прямоугольных импульсов обозначена  $U = 1$  В.

В целях последующего определения корреляционной функции случайного процесса  $X(t)$  амплитуду  $U$  удобно обозначить  $2h$ .

Случайный сигнал  $X(t)$  обладает следующими свойствами.

1. Случайный процесс  $X(t)$  в дискретные моменты времени  $T, 2T \dots (n-1)T, nT$  (рис. 3), разделенные интервалом  $T$ , принимает значения 0 и  $2h$  с вероятностью 0,5 каждое, независимо от того, какое значение имел сигнал на предыдущем участке длительностью  $T$ .

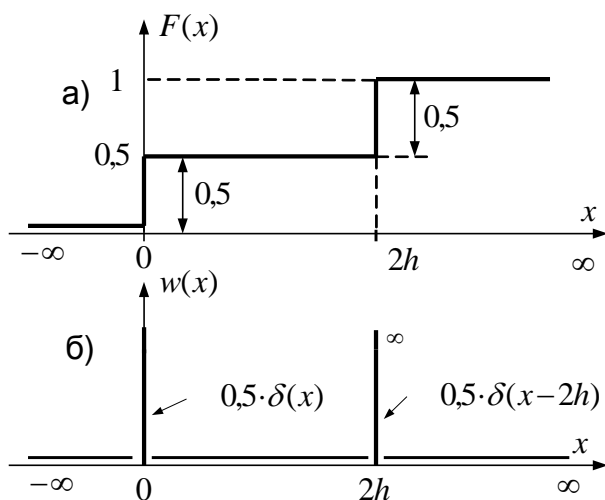


Рис. 4. Законы распределения случайного телеграфного сигнала:

- а) функция распределения вероятности  $F(x)$ ;
- б) плотность распределения вероятности  $w(x)$

Определим функцию распределения вероятности  $F(x)$ , характеризующую случайный процесс  $X(t)$ . Исходя из определения функции  $F(x) = P\{X(t) \leq x\}$ , где  $P\{X(t) \leq x\}$  есть вероятность того, что случайный процесс  $X(t)$  принимает значения, меньшие заданной величины  $x$  или равные  $x$ . Используя значения данных  $x = 0, 2h$  в п. 1, построим график функции  $F(x)$ , изображенный на рис. 4, а.

График функции  $F(x)$  построен на основе определения функции  $F(x)$  и свойств случайного процесса  $X(t)$ , отмеченных в п. 1.



Действительно, когда  $x < 0$ , вероятность  $P\{X(t) < 0\} = 0$ , так как заданный сигнал значений, меньших  $x = 0$ , не принимает. Поэтому  $F(x) = 0$  для значений  $x < 0$ . Когда  $x = 0$ , вероятность  $P\{X(t) = 0\} = 0,5$ , так как сигнал  $X(t)$  принимает значение  $x = 0$  с вероятностью 0,5 на каждом из интервалов  $T, 2T, 3T, \dots, nT$ . Поэтому кривая  $F(x)$  в точке  $x = 0$  скачком изменяется с нулевого уровня до уровня 0,5.

В интервале  $0 < x < 2h$  сохраняется вероятность  $P\{X(t) \leq x\} = 0,5$  для любого  $x$  из этого интервала, так как в этом интервале сигнал не принимает никаких значений, поэтому  $F(x) = P\{X(t) \leq x\} = 0,5$ .

Когда  $x = 2h$ , вероятность  $P\{X(t) \leq 2h\} = 1$ , так как значения  $x = 2h$  и  $x = 0$  сигнал принимает с вероятностью 0,5 каждый. Отсюда  $P\{X(t) \leq 2h\} = 1$ . Поэтому в точке  $x = 2h$  функция  $F(x)$  скачкообразно изменяется еще раз на величину 0,5, достигая значения, равного 1. Поскольку  $F(x)$  не может принимать значения больше 1 и не может убывать при увеличении аргумента  $x$ , имеем  $F(x) = 1$  при значениях  $x > 2h$ .

2. Как известно, плотность вероятности  $w(x)$  случайного процесса  $X(t)$  связана с функцией  $F(x)$  формулой  $w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Вычисляя производную от кривой  $F(x)$  (рис. 4, а), получим график плотности вероятности  $w(x)$  (рис. 4, б). На тех интервалах на оси  $x$ , на которых дифференцируемая функция  $F(x)$  постоянна, производная равна нулю, и только в точках  $x = 0$  и  $x = 2h$ , где функция  $F(x)$  имеет разрывы непрерывности 1-го рода, производная отличается от нуля. Из теории обобщенных функций известно, что величина производной в этих точках равна  $\delta$ -функции, умноженной на численный коэффициент, равный величине скачка дифференцируемой функции  $F(x)$ . Согласно рис. 4, б аналитическое выражение для функции  $w(x)$  имеет вид

$$w(x) = 0,5\delta(x) + 0,5\delta(x - 2h), \quad (3)$$

т. е. представляет собой сумму двух  $\delta$ -функций. Видно, что найденная плотность вероятности удовлетворяет условию нормировки, так как каждая  $\delta$ -функция в (3) ограничивает площадь, равную 0,5.

3. Определим математическое ожидание случайного процесса  $X(t)$ :

$$\begin{aligned} \overline{X(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot [0,5\delta(x) + 0,5\delta(x - 2h)] \cdot dx = \\ &= 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x) dx + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x - 2h) dx = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2h = 0 + h = h. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученный результат означает, что процесс  $X(t)$  не является *центрированным* случайным процессом, так как  $\overline{X(t)} \neq 0$ . Центрированный процесс  $\overset{\circ}{X}(t)$  будет равен

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \overline{X(t)}. \quad (5)$$

4. На рис. 5 показаны четыре произвольные реализации  $\overset{\circ}{x}_1(t)$ ,  $\overset{\circ}{x}_2(t)$ ,  $\overset{\circ}{x}_3(t)$  и  $\overset{\circ}{x}_4(t)$  центрированного процесса  $\overset{\circ}{X}(t)$ .

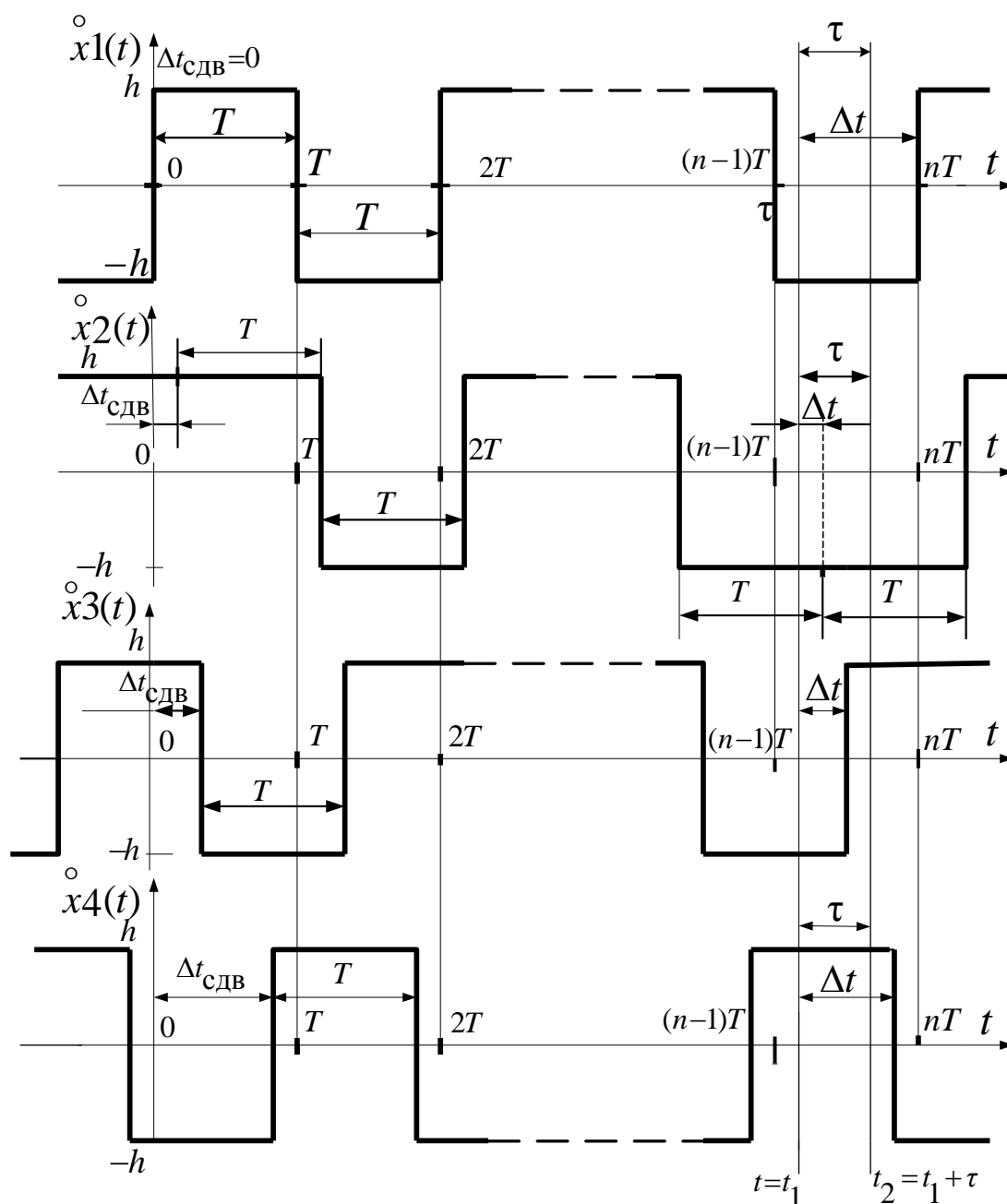


Рис. 5. Реализации случайного сигнала  $\overset{\circ}{X}(t)$

Границы тактовых интервалов для первой реализации  $x_1(t)$  обозначены  $0, T, 2T, \dots, (n-1)T, nT, \dots$ , и эти же моменты времени обозначены на графиках других реализаций. На рис. 5 видно, что границы тактовых интервалов у разных реализаций не совпадают, т. е. любой момент времени на интервале  $0 \dots T$  может с равной вероятностью оказаться моментом начала такта для других реализаций:  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  и т. д.

Таким образом, интервал времени  $\Delta t_{\text{сдв}}$  между точкой ( $t = 0$ ) и началом тактового интервала есть случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $0 \dots T$ .

График плотности вероятности этой случайной величины изображен на рис. 6.

Корреляционная функция  $B_X(t_1, t_2)$  для сигнала  $X(t)$  определяется по формуле

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)}. \quad (6)$$

Определим  $B_X(t_1, t_2)$  для двух случаев:

а)  $\tau = t_2 - t_1 > T$ ;

б)  $\tau = t_2 - t_1 < T$ .

Если  $\tau = t_2 - t_1 > T$ , то моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  в каждой реализации принадлежат разным тактовым интервалам. При этом случайная величина

$\overline{X(t_1) \cdot X(t_2)}$  будет равна произведению двух независимых случайных величин  $\overline{X(t_1)}$  и  $\overline{X(t_2)}$ . Как известно, математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей, т. е.  $\overline{X(t_1) \cdot X(t_2)} = \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X(t_2)}$ . Поскольку данный процесс  $\overline{X(t)}$  является *центрированным* (т. е.  $\overline{X(t_1)} = \overline{X(t_2)} = 0$ ), то из (6) при  $\tau = t_2 - t_1 > T$  следует

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)} = \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X(t_2)} = 0 \cdot 0 = 0. \quad (7)$$

Если  $\tau = (t_2 - t_1) < T$ , то моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$  для одной части реализаций ансамбля  $\overline{X(t)}$  будут принадлежать одному тактовому интервалу, а для другой части реализаций ансамбля  $\overline{X(t)}$  моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$  будут принадлежать соседним тактовым интервалам.

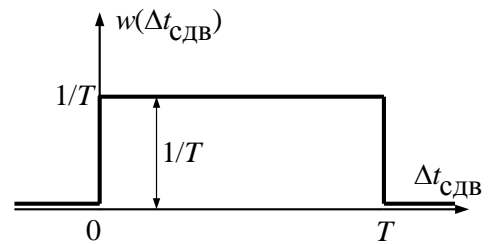


Рис. 6. График плотности вероятности  $w(\Delta t_{\text{сдв}})$

На рис. 5 проведены две вертикальные линии, пересекающие все реализации, левой линии соответствует момент времени  $t = t_1$ , а правой линии – момент времени  $t = t_2$ . Расстояние между вертикальными линиями обозначено через  $\tau = (t_2 - t_1) < T$ . Все реализации из ансамбля случайного

процесса  $\overset{\circ}{X}(t)$  в данном случае можно разделить на две группы:  $A$  и  $B$ .

В группу  $A$  введем все реализации, у которых моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат *одному* тактовому интервалу. В эту группу из четырех реализаций (рис. 5) попадут реализации:  $\overset{\circ}{x}_1(t)$  и  $\overset{\circ}{x}_4(t)$ .

В группу  $B$  введем все реализации, у которых моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат *разным* (соседним) тактовым интервалам. В эту группу попадут реализации  $\overset{\circ}{x}_2(t)$  и  $\overset{\circ}{x}_3(t)$ .

Математическое ожидание случайной величины  $\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)$  по всему ансамблю случайного процесса  $\overset{\circ}{X}(t)$  получим, если вначале отдельно найдем математические ожидания этого произведения по реализациям группы  $A$  и по реализациям группы  $B$ , а затем найденные математические ожидания усредним по обеим группам. Тогда

$$\frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} = \frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} \overset{(\text{по } A \text{ и } B)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} = \frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} \overset{(\text{по } A)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} + \frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} \overset{(\text{по } B)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}, \quad (8)$$

где  $P(A)$  и  $P(B)$  – вероятности того, что реализация войдет, соответственно, в группу  $A$  или группу  $B$ .

Определим  $\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)$ . Для любой реализации  $\overset{\circ}{x}_k(t)$ , попавшей в группу  $A$ , произведение  $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = h^2$ . Например:

если  $k = 1$ , то произведение  $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = (-h) \cdot (-h) = h^2$ ;

если  $k = 4$ , то произведение  $\overset{\circ}{x}_k(t) \cdot \overset{\circ}{x}_k(t) = h \cdot h = h^2$  и т. д.

Таким образом, получим

$$\frac{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} \overset{\text{по } A}{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)} = h^2. \quad (9)$$

Величина  $\frac{\overset{\circ}{\text{по } B}}{\overset{\circ}{X(t_1)} \cdot \overset{\circ}{X(t_2)}}$  определяется аналогично, но при этом надо учи-

тывать, что у реализации группы  $B$  моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат разным тактовым интервалам, поэтому случайные величины  $\overset{\circ}{X(t_1)}$  и  $\overset{\circ}{X(t_2)}$  из группы  $B$  будут независимы, что позволяет написать:

$$\frac{\overset{\circ}{\text{по } B}}{\overset{\circ}{X(t_1)} \cdot \overset{\circ}{X(t_2)}} = \frac{\overset{\circ}{\text{по } B}}{\overset{\circ}{X(t_1)}} \cdot \frac{\overset{\circ}{\text{по } B}}{\overset{\circ}{X(t_2)}} = 0 \cdot 0 = 0. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\overset{\circ}{X(t_1)} \cdot \overset{\circ}{X(t_2)} = h^2 \cdot P(A) + 0 \cdot P(B) = h^2 \cdot P(A). \quad (11)$$

Для определения вероятности  $P(A)$  на каждой реализации (рис. 5) введем интервал  $\Delta t$ , равный расстоянию от момента  $t = t_1$  до ближайшего момента времени, при котором *может* произойти изменение знака реализации. На рис. 5 видно, что каждая реализация имеет свою величину этого интервала и поэтому интервал  $\Delta t$  есть величина случайная. Если момент времени  $t = 0$  перенести в точку момента времени  $t = t_1$ , то по смыслу величина интервала  $\Delta t$  заменится на величину интервала  $\Delta t_{\text{сдв}}$  на рис. 5. Следовательно, величина интервала  $\Delta t$  есть случайная величина, имеющая ту же плотность вероятности  $w(\Delta t)$ , что и случайная величина  $\Delta t_{\text{сдв}}$ , т. е. равномерную (рис. 7).

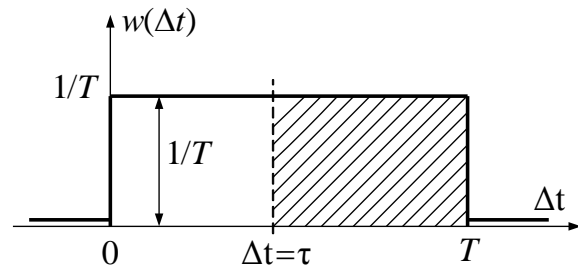


Рис. 7. Плотность вероятности случайной величины  $\Delta t$

На рис. 5 видно, что для всех реализаций группы  $A$  выполняется неравенство

$$\Delta t > \tau, \quad (12)$$

где  $\tau$  — известная детерминированная величина  $\tau = t_2 - t_1$ .

Неравенство (12) является формальным (математическим) признаком того, что реализация  $x_1(t)$  или  $x_4(t)$  принадлежит группе  $A$ . Для реализаций группы  $B$  аналогичным признаком является выполнение неравенства

$$\Delta t < \tau. \quad (13)$$

Таким образом, вероятность  $P(A)$  равна вероятности выполнения неравенства (12), т. е.

$$P(A) = P(\Delta t \geq \tau). \quad (14)$$

Зная плотность вероятности  $w(\Delta t)$  (рис. 7), можно найти величину

$$\begin{aligned} P(\Delta t \geq \tau): P(A) = P(\Delta t \geq \tau) &= \int_{\Delta t=\tau}^{\infty} w(\Delta t) d(\Delta t) = \\ &= \int_{\tau}^T \frac{1}{T} d(\Delta t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau}^T d(\Delta t) = \frac{1}{T} \cdot (T - \tau) = 1 - \frac{\tau}{T}. \end{aligned} \quad (15)$$

При вычислении интеграла (15) верхний предел интегрирования, равный  $\infty$ , заменяем конечной величиной  $T$ , так как при значениях  $\Delta t \geq T$  подынтегральная функция  $w(\Delta t)$  (рис. 7) равна нулю. Таким образом,  $P(A) = P(\Delta t \geq \tau)$  равна той части площади прямоугольника, которая на рис. 7 обозначена штриховкой. Аналогично, используя неравенство (13), можно найти величину  $P(B)$ . Подставляя величину  $P(A) = P(\Delta t \geq \tau)$  в (11) при  $\tau \leq T$ , запишем корреляционную функцию

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)} = h^2 \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}\right). \quad (16)$$

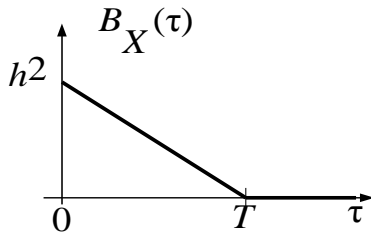


Рис. 8. График  $B_X(\tau)$  при  $\tau \geq 0$

Правая часть (16) зависит только от  $\tau = t_2 - t_1$ , т. е.  $B_X(t_1, t_2) = B_X(\tau)$ . Учитывая это свойство корреляционной функции, а также то, что  $\overline{X(t)} = h$  (т. е. математическое ожидание не зависит от времени  $t$ ), делаем вывод, что рассматриваемый процесс  $X(t)$  является *стационарным* процессом в широком смысле. Используя (7) и (16), можно построить график функции  $B_X(\tau)$  при  $\tau \geq 0$  (рис. 8).

На интервале  $0 \dots T$  график  $B_X(\tau)$  имеет форму прямой линии, имеющей отрицательный наклон, проходящий через точку  $h^2$  на оси ординат и точку  $T$  на оси абсцисс.

Линейная зависимость графика (рис. 8) с отрицательным наклоном объясняется тем, что аргумент  $\tau$  входит в (16) в первой степени и перед ним стоит знак «минус».

Стационарность процесса  $X(t)$  позволяет продолжить кривую  $B_X(\tau)$  в область отрицательных значений  $\tau < 0$ , используя свойство симметрии корреляционной функции стационарного процесса.

Аналитическое выражение для корреляционной функции  $B_X(\tau)$ , справедливое как для значений  $\tau > 0$ , так и для значений  $\tau < 0$ , имеет вид

$$B_X(\tau) = \begin{cases} h^2 \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \text{при } |\tau| \leq T; \\ 0 & \text{при } |\tau| > T. \end{cases} \quad (17)$$

Корреляционной функции  $B_X(\tau)$  соответствует график рис. 9.

5. Определим *дисперсию* заданного случайного процесса  $X(t)$ . Известно, что дисперсия стационарного процесса равна значению корреляционной функции при значении  $\tau = 0$ , т. е.

$$D\{X(t)\} = B_X(0) = h^2. \quad (18)$$

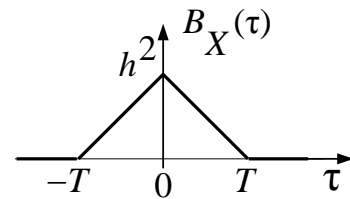


Рис. 9. График корреляционной функции  $B_X(\tau)$

Из графика рис. 9 следует, что  $B_X(\tau)$  удовлетворяет следующему пределу

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_X(\tau) = 0, \quad (19)$$

что является необходимым и достаточным условием *эргодичности* данного стационарного процесса  $X(t)$ .

Таким образом, рассматриваемый случайный процесс является не только *стационарным*, но и *эргодическим* процессом. Тогда вероятностные характеристики, такие как математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция, могут быть определены с помощью только одной реализации из ансамбля процесса  $X(t)$  путем соответствующих усреднений этой реализации по времени.

6. Для определения *спектральной плотности мощности*  $G_X(\omega)$  случайного процесса  $X(t)$  используется теорема Винера–Хинчина, которая справедлива только для стационарных центрированных процессов:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Имеем  $\int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \sin \omega\tau d\tau = 0$ , поскольку  $B_X(\tau)$  является четной функцией аргумента  $\tau$ , а  $\sin \omega\tau$  — нечетная функция  $\tau$  (произведение четной функции

на нечетную функцию является нечетной функцией, а интеграл от любой нечетной функции в указанных пределах интегрирования равен нулю).

Учитывая четность подынтегральной функции в (20), а также формулу (17), вместо (20) можно написать

$$G_X(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= 2h^2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2h^2}{\omega} \cdot \sin \omega T - \frac{2h^2}{T} \int_0^T \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau. \quad (21)$$

Используя метод интегрирования по частям, после элементарных преобразований получим окончательный результат

$$G_X(\omega) = T \cdot h^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}. \quad (22)$$

График функции  $G_X(\omega)$  представлен на рис. 10.

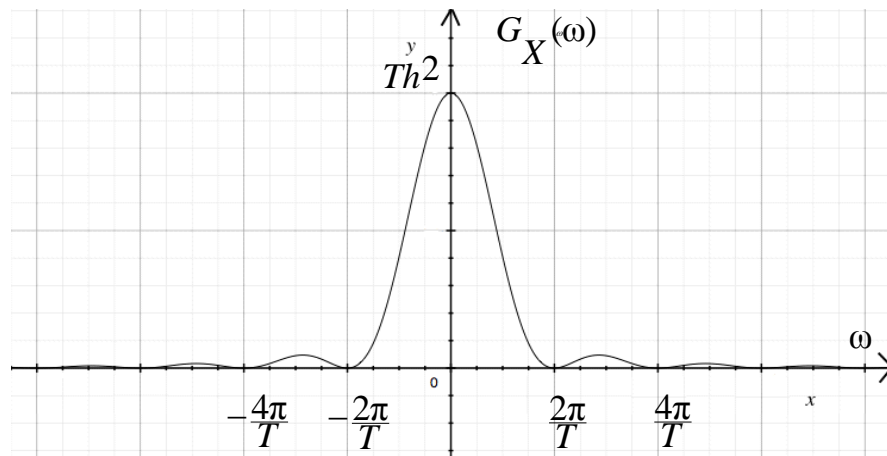


Рис. 10. Спектральная плотность  $G_X(\omega)$

Функция (22) в точках  $\omega = \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$  обращается в нуль, и кривая  $G_X(\omega)$  при этих значениях  $\omega$  касается оси абсцисс.

Основная доля мощности сигнала сосредоточена в ограниченной полосе частот вблизи частоты  $\omega = 0$ . Случайный синхронный телеграфный сигнал, имеющий теоретически бесконечную протяженность спектра, является нефинитным, но с практической точки зрения его можно считать низкочастотным, но занимающим достаточно широкую полосу частот.



Корреляционные функции  $B_I(\tau)$  и  $B_Q(\tau)$  случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$  на выходе блока ФМС определяются по аналогичной методике определения корреляционной функции случайного процесса  $X(t)$ , поступающего на вход блока ФМС. Если необходимо найти  $B_I(\tau)$ , то существует небольшое отличие при определении математического ожидания произведения  $I(t_1) \cdot I(t_2)$  по группе  $A$ , в которую попадают реализации случайного процесса  $I(t)$  при выполнении неравенства  $\tau < \Delta t$ .

Во-первых, изначально процесс  $I(t)$  является центрированным случайным процессом.

Во-вторых, поскольку реализации случайного процесса  $I(t)$  в отличие от реализаций случайного процесса  $X(t)$  принимают четыре дискретных значения  $-3h, -h, h, 3h$  с одинаковой вероятностью  $P = 0,25$ , то математическое ожидание произведения  $I(t_1) \cdot I(t_2)$  по группе  $A$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \overline{I(t_1) \cdot I(t_2)} &= (-3h)^2 \cdot P(-3h) + (-h)^2 \cdot P(-h) + h^2 \cdot P(h) + (3h)^2 \cdot P(3h) = \\ &= 9h^2 \cdot 0,25 + h^2 \cdot 0,25 + h^2 \cdot 0,25 + 9h^2 \cdot 0,25 = 20h^2 \cdot 0,25 = 5h^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Корреляционная функция  $B_I(\tau)$  случайного процесса  $I(t)$  будет соответствовать структуре корреляционной функции  $B_X(\tau)$  случайного процесса  $X(t)$ , определяемой выражением (17):

$$B_I(\tau) = \begin{cases} 5h^2 \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_S}\right), & \text{при } |\tau| \leq T_S; \\ 0, & \text{при } |\tau| > T_S. \end{cases} \quad (24)$$

Отличие  $B_I(\tau)$  от корреляционной функции  $B_X(\tau)$  проявляется в том, что вместо множителя  $h^2$  используется множитель  $5h^2$  и вместо параметра  $T$  используется параметр  $T_S$ , где  $T_S$  – символный интервал (рис. 11).

Случайный процесс  $Q(t)$  имеет такие же вероятностные характеристики, какие имеет процесс  $I(t)$ , поэтому имеет место равенство

$$B_Q(\tau) = B_I(\tau). \quad (25)$$

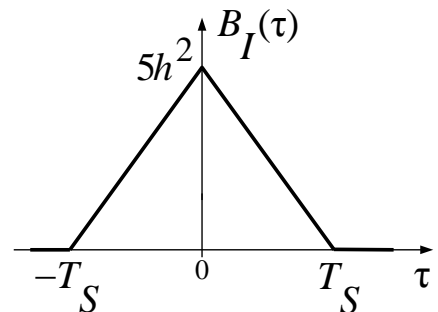


Рис. 11. График корреляционной функции  $B_I(\tau)$

Используя теорему Винера – Хинчина и равенство (25), получим

$$G_O(\omega) = G_I(\omega) = T_S \cdot 5h^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_S}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_S}{2}\right)^2}. \quad (26)$$

Форма графика функций  $G_O(\omega) = G_I(\omega)$  и будет похожа на форму графика  $G_X(\omega)$  на рис. 10. Величина главного максимума станет равной  $T_S \cdot 5h^2$ , и в точках  $\omega = \pm \frac{2\pi}{T_S}, \pm \frac{4\pi}{T_S}, \dots$  график этих функций будет касаться оси абсцисс  $\omega$ .

В случае КАМ-16 величина  $T_S = 4T_B$ , где  $T_B$  – бинарный интервал, и поэтому график функций  $G_O(\omega)$  и  $G_I(\omega)$ , оставаясь нефинитным, станет в 4 раза уже, чем график на рис. 10.

Изложенную методику определения корреляционной функции для случайного синхронного телеграфного сигнала  $X(t)$  несложно обобщить и получить корреляционные функции для случайных процессов, в которых в качестве переносчиков информационных символов используются импульсы  $g(t)$ , форма которых отличается от прямоугольной формы. Примерами таких импульсов, используемых на практике, являются импульсы  $g(t)$ , форма которых похожа на форму гауссовской плотности вероятности, а также импульсы, связанные с сигналами со спектром «приподнятого косинуса».

Сигналы со спектром «приподнятого косинуса» используются в спутниковой и мобильной связи.

Например, если задан случайный процесс

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot g(t - nT) \quad (27)$$

(где  $X_n$  – случайная величина, заданная на символьном интервале  $T_S$  с номером  $n$ , которая принимает известные дискретные значения с заданными вероятностями, величина их не зависит от значения  $n$ ;  $g(t)$  – детерминированный импульс заданной формы, не обязательно прямоугольной), то его корреляционная функция  $B_X(\tau)$  может быть определена как

$$B_X(\tau) = \overline{X_n^2} \cdot \frac{1}{T_S} \cdot B_g(\tau), \quad (28)$$

где  $\overline{X_n^2}$  – математическое ожидание случайной величины  $X_n^2$ ;  $\frac{1}{T_S}$  – частота поступления в канал связи информационных символов  $X_n$ .

Автокорреляционная функция импульса  $g(t)$  определяется формулой

$$B_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt. \quad (29)$$

#### 4.5. Формирователь модулирующих символов или преобразователь последовательного кода в параллельный код

На рис. 12 изображен блок формирователя модулирующих символов (ФМС).

Реализации  $c(t)$  случайного сигнала (процесса)  $C(t)$ , поступающие на вход блока ФМС, формируются следующим образом.



Рис. 12. Формирователь модулирующих символов

В [6] сигнал с выхода сверточного кодера представляет собой случайную последовательность однополярных прямоугольных импульсов с амплитудой  $U = 1\text{В}$ . Пример фрагмента этой последовательности изображен на рис. 13, а.

Предполагается, что этот сигнал, прежде чем поступить на вход блока ФМС, преобразуется в сигнал на рис. 13, б, состоящий из биполярных прямоугольных импульсов с амплитудой  $h(B)$  и длительностью  $T_B$ , где  $T_B$  – бинарный интервал. Параметр  $h$  – размерная величина и может принимать любые заданные численные значения, например  $h = 2\text{ В}$  (рис. 13, б):

- символ «1» передается импульсом положительной полярности с амплитудой  $h$  [3, с. 148];
- символ «0» передается импульсом отрицательной полярности.

Реализацию  $c(t)$  случайного процесса  $C(t)$ , где

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot g_1(t - nT_B) \quad (30)$$

можно представить в следующей аналитической форме:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot g_1(t - nT_B), \quad (31)$$

где  $g_1(t)$  – прямоугольный импульс длительностью  $T_B$  (рис. 13, в),

$$g_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T_B; \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T_B, \end{cases} \quad (32)$$

$g_1(t - nT_B)$  – прямоугольный импульс такой же формы, как  $g_1(t)$ , но сдвинутый *вправо* относительно импульса  $g_1(t)$  на величину  $nT_B$ , если  $n > 0$ , или *влево*, если  $n < 0$ ;

$c_n$  – численный коэффициент, являющийся реализацией случайной величины  $C_n$  на  $n$ -интервале  $T_B$ .

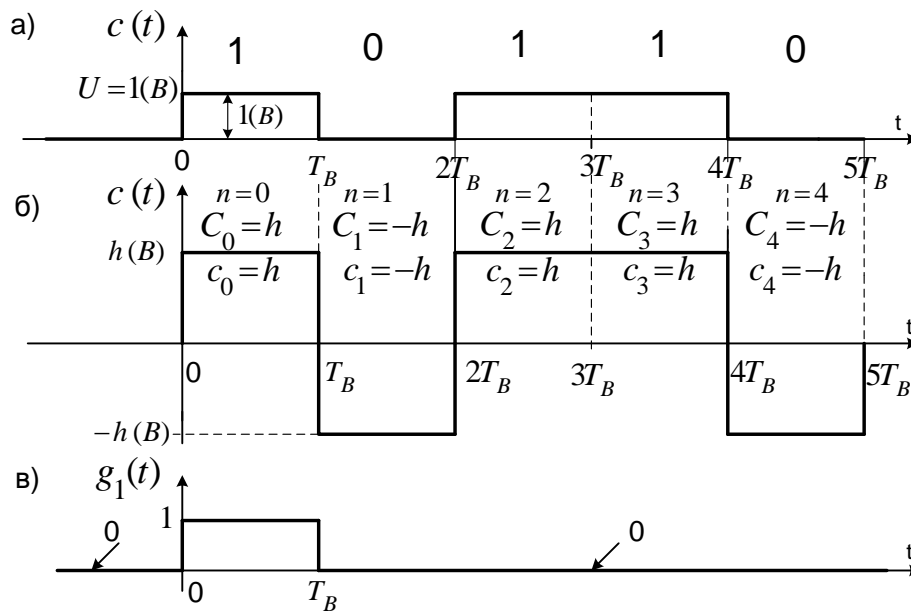


Рис. 13. Импульс  $g_1(t)$  и фрагмент реализации  $c(t)$

Величина  $C_n$  принимает два дискретных значения  $h(B)$  и  $-h(B)$  с вероятностью 0,5 каждое, т. е.  $P(h) = P(-h) = 0,5$ .

Если в заданной реализации  $c(t)$  на  $n$ -интервале передается информационный символ «1», то  $c_n = h(B)$ , если передается символ «0», то  $c_n = -h(B)$  (рис. 13, б).

Связь между входным сигналом и выходными сигналами блока ФМС характеризует сигнальное созвездие для заданного вида модуляции. Сигнальное созвездие строится в *декартовой* системе координат  $I$  и  $Q$ . Каждой точке (звезде) сигнального созвездия будут соответствовать численные значения координат  $I$  и  $Q$ . Существуют разные формы сигнальных созвездий, но наибольшее практическое применение получили созвездия квадратной формы. Примерами таких созвездий являются КАМ-16, КАМ-64, КФМ-4 и др., где цифры 16, 64 и 4 показывают количество точек в созвездии.

Слово «квадратурная» показывает, что в состав сигнала КАМ или КФМ входит сумма двух сигналов, один из которых зависит от множителя  $\cos \omega_c t$ , а другой – от множителя  $\sin \omega_c t$ . Благодаря этим множителям сигналы обладают свойством взаимной ортогональности. Про такие сигналы говорят, что они находятся в «квадратуре».

Количество точек на квадратном созвездии можно представить в виде  $2^k$ , где  $k = 2, 4, 6, 8, \dots$  – четные числа. Точкам сигнального созвездия на каждой координатной оси  $I$  и  $Q$  соответствует  $M = 2^{k/2}$  дискретных значений, определяемых для каждого значения  $m$  по формуле [3, с. 148]

$$(2m - 1 - M)h, \quad (33)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $M = 2^{k/2}$  для квадратных созвездий типа КАМ-16, КАМ-64 и т. д.

Расстояние между соседними дискретными значениями равно  $2h$ , где  $h$  – заданная величина. Каждой точке сигнального созвездия соответствует блок из  $k$  двоичных символов, который может появиться на входе блока ФМС.

Приведем примеры определения параметров квадратурной амплитудной модуляции КАМ-16 и квадратурной фазовой модуляции КФМ-4.

### ***Квадратурная амплитудная модуляция КАМ-16***

Число точек в созвездии, равное 16, представляем в виде  $2^k = 2^4$ , где  $k = 4$ . Определяем величину  $M$  – число дискретных значений, которые могут принимать координаты  $I$  и  $Q$  точек на сигнальном созвездии, т. е.  $M = 2^{k/2} = 2^2 = 4$ . Используя (33), находим значения координат точек созвездия КАМ-16 на осях  $I$  и  $Q$ :

$$-3h, -h, h, 3h. \quad (34)$$

Итак, сигнальное созвездие для КАМ-16 содержит 16 точек. Известно также, что существует  $16 = 2^4$  различных блоков (последовательностей) из 4 двоичных символов, отличающихся друг от друга хотя бы одним символом (битом). Отсюда следует, что каждую точку на сигнальном созвездии можно связать с одним из 16 символьных блоков. Соответствие между 16 различными блоками из 4 символов (битов) и 16 точками сигнального созвездия можно осуществлять различными способами.

Наиболее рациональное соответствие получается при использовании так называемого *кода Грея*, когда соседним точкам на сигнальном созвездии соответствуют блоки, отличающиеся друг от друга *только одним символом*. Сигнальное созвездие для КАМ-16 изображено на рис. 14.

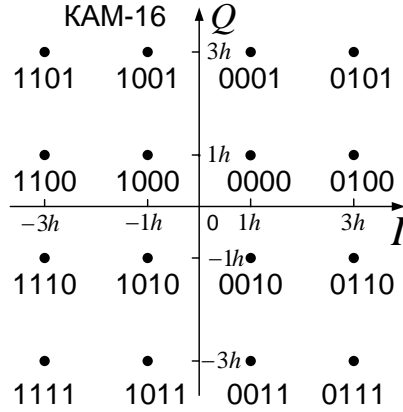


Рис. 14. Сигнальное созвездие для КАМ-16

Действительно, если при передаче сигнала с параметрами  $I$  и  $Q$ , являющимися координатами какой-либо точки сигнального созвездия, демодулятор в условиях действия флуктуационной помехи типа белого шума неверно определит величины передаваемых параметров  $I$  и  $Q$ , то наиболее вероятные ошибки будут соответствовать координатам  $\hat{I}$  и  $\hat{Q}$  тех точек сигнального созвездия, которые находятся на наименьшем евклидовом расстоянии от точки сигнального созвездия с координатами  $I$  и  $Q$ .

Тогда в этом случае при обратном переходе от принятых параметров  $\hat{I}$  и  $\hat{Q}$  к возможным блокам из 4 двоичных символов ошибка будет только в одном символе (бите) из 4 передаваемых, что важно при декодировании с исправлением ошибок.

Графики рис. 15 иллюстрируют пример, когда по заданной реализации  $c(t)$  входного случайного процесса  $C(t)$  с использованием сигнального созвездия КАМ-16 строятся реализации  $i(t)$  и  $q(t)$  выходных случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$ . Процессы  $I(t)$  и  $Q(t)$  можно представить в виде

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S); \quad Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (35)$$

где  $g_2(t)$  – прямоугольный импульс длительностью  $T_S = 4T_B$  (рис. 15, б);  $T_S$  – символьный интервал;  $T_B$  – бинарный интервал;

$$g_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T_B; \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T_B, \end{cases} \quad (36)$$

где  $g_2(t - nT_S)$  – прямоугольный импульс такой же формы, как импульс  $g_2(t)$ , но сдвинутый *вправо* относительно импульса  $g_2(t)$  на величину  $nT_S$ , если  $n > 0$ , или *влево*, если  $n < 0$ ;

$I_n$  и  $Q_n$  – независимые случайные величины, заданные на символьном интервале с номером  $n$ , которые согласно сигнальному созвездию (рис. 14) принимают четыре дискретных значения  $-3h$ ,  $-h$ ,  $h$ ,  $3h$  с вероятностью 0,25 каждое, т. е.

$$P(-3h) = P(-h) = P(h) = P(3h) = 0,25. \quad (37)$$

На рис. 15, а изображен фрагмент возможной реализации  $c(t)$ , поступающей на вход блока ФМС, который соответствует последовательности из 16 кодовых двоичных символов (КС) – 1011001001110110.

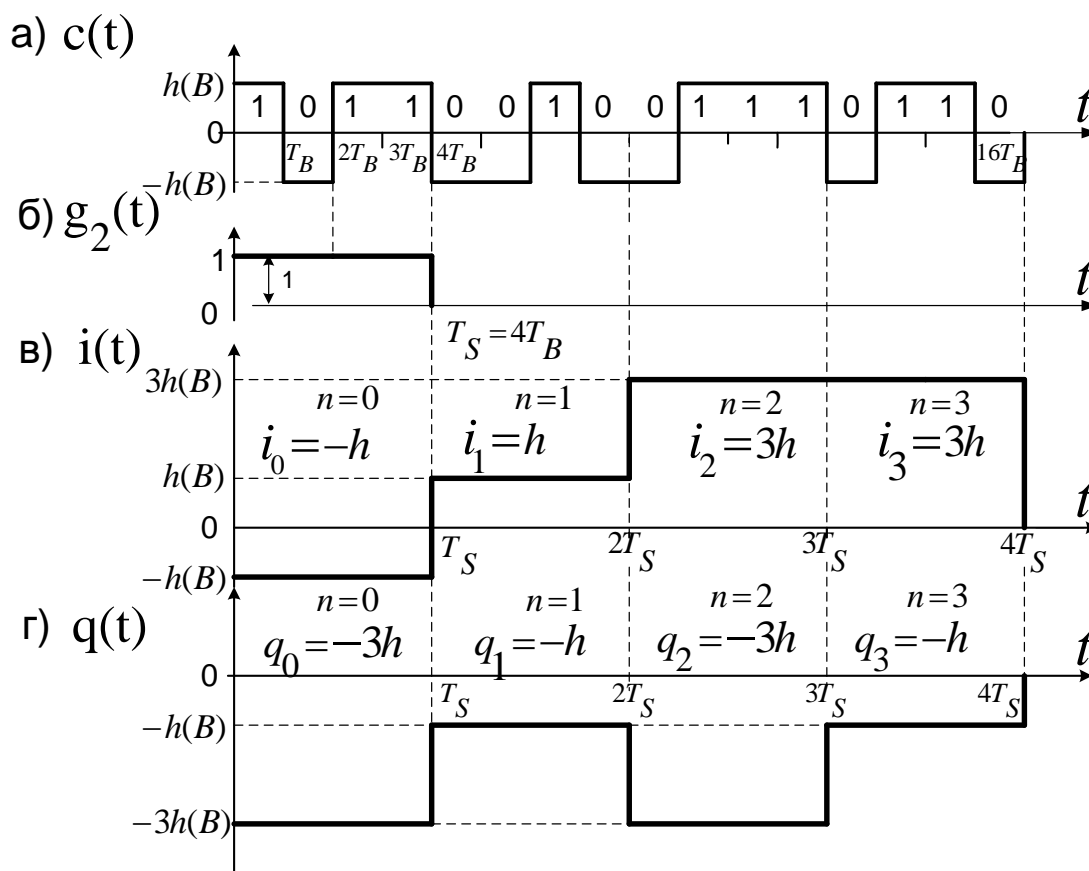


Рис. 15. Реализации  $i(t)$  и  $q(t)$   
случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$  для КАМ-16

Реализации  $i(t)$  и  $q(t)$  в соответствии с выражением (35) можно представить в форме

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n \cdot g_2(t - nT_S); \quad q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (38)$$

где  $i_n$  и  $q_n$  – реализации случайных величин  $I_n$  и  $Q_n$  на символьном интервале с номером  $n$  (рис. 15, в, г), входящих в (35).

Пользуясь сигнальным созвездием (рис. 14) для входной реализации  $c(t)$  (рис. 15, а) по 4 символьным блокам двоичных символов определяются численные значения  $i_n$  и  $q_n$  на символьном интервале длительностью  $T_S$  с номером  $n$ , где  $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ .

Первые четыре символа (бита) 1 0 1 1 из заданной последовательности  $c(t)$  расположены над символьным интервалом  $T_S$  с номером  $n = 0$ . На сигнальном созвездии находим точку, которой соответствует блок из четырех символов (бит) 1 0 1 1. Значения реализаций  $i_0$  и  $q_0$  случайных величин  $I_0$  и  $Q_0$  будут равны значениям координат найденной точки, т. е.  $i_0 = -h$  и  $q_0 = -3h$ .

Аналогично находим численные значения реализаций  $i_n$  и  $q_n$  для интервалов  $T_S$  с номерами  $n = 1, n = 2, n = 3$ .

Отметим, что сигналы  $i(t)$  и  $q(t)$  на рис. 15, в, г должны быть сдвинуты по оси времени  $t$  вправо на величину  $T_S$  относительно сигнала  $c(t)$  на рис. 15, а. Чтобы было легче проследить за соответствием между графиком сигнала  $c(t)$  и графиками реализаций  $i(t)$  и  $q(t)$ , графики рис. 15, в, г показаны без указанного сдвига.

### Квадратурная фазовая модуляция КФМ-4

Сигнальное созвездие представлено на рис. 16.

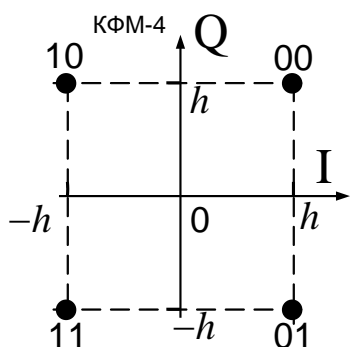


Рис. 16. Сигнальное созвездие квадратурной фазовой модуляции КФМ-4

На созвездии КФМ-4 число точек 4 представляем в виде  $2^k = 2^2$ , где  $k = 2$ . Определяем величину  $M$  — число дискретных значений, которые могут принимать координаты  $I$  и  $Q$  точек на сигнальном созвездии:  $M = 2^{k/2} = 2^{2/2} = 2$ . Используя (33), находим значения координат точек созвездия КФМ-4 на осях  $I$  и  $Q$ :

$$-h, h. \quad (39)$$

Формально этот вид модуляции можно обозначить как КАМ-4. Поскольку точки (звезды) созвездия (рис. 16) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, то колебания, соответствующие этим точкам, будут иметь одинаковые амплитуды, но разные фазы. Так как сигналы, соответствующие разным точкам созвездия (рис. 16) различаются только фазами, правильнее такие сигналы назвать сигналами «квадратурной» фазовой модуляции КФМ-4. Фаза сигнала может принимать значения 45, 135, 225, 315° соответственно (рис. 16).



На выходах блока ФМС для КФМ-4 также появляются сигналы  $I(t)$  и  $Q(t)$ , представленные в виде формул (35):

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT_S); \quad Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot g_2(t - nT_S), \quad (40)$$

где  $I_n$  и  $Q_n$  – независимые случайные величины, которые согласно сигнальному созвездию (рис. 16) принимают два дискретных значения  $h$  и  $-h$ , с вероятностью 0,5 каждое:

$$P(h) = P(-h) = 0,5, \quad (41)$$

где  $g_2(t)$  – прямоугольный импульс длительностью  $T_S = 2T_B$  с амплитудой  $U = 1$  (рис. 17, б);  $g_2(t - nT_S)$  – прямоугольный импульс такой же формы, как импульс  $g_2(t)$ , но сдвинутый относительно импульса  $g_2(t)$  на величину  $nT_S$ .

Фрагменты реализаций  $i(t)$  и  $q(t)$  случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$ , соответствующие заданной реализации  $c(t)$  входного процесса  $C(t)$ , представлены на рис. 17.

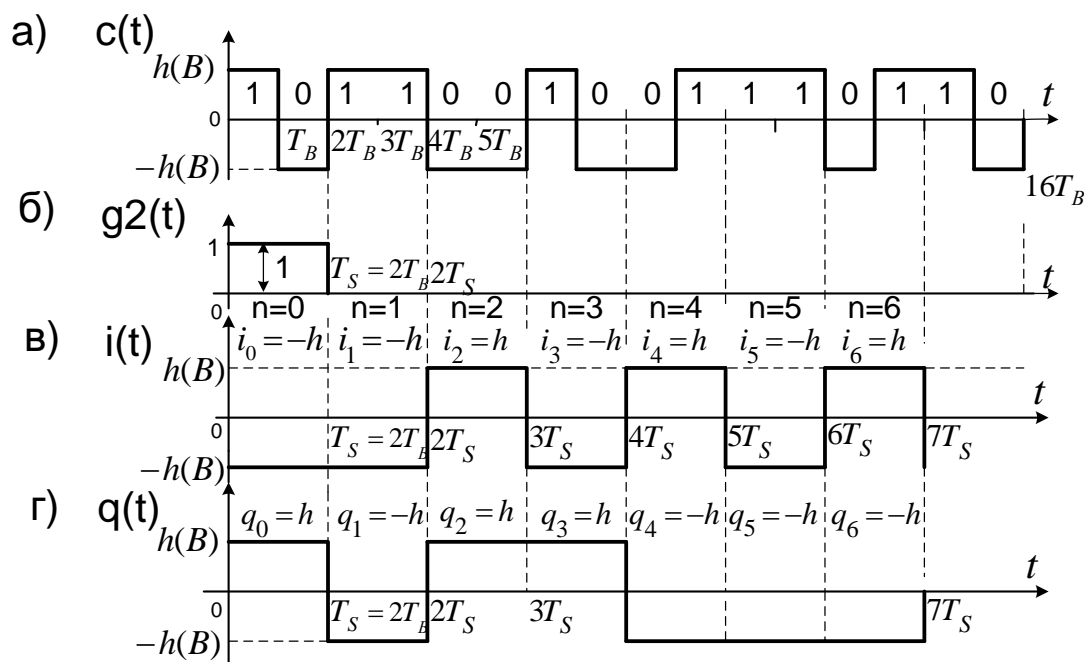


Рис. 17. Реализации  $i(t)$  и  $q(t)$   
случайных процессов  $I(t)$  и  $Q(t)$  для КФМ

Методика изображения реализаций для КФМ полностью соответствует методике построения реализаций  $i(t)$  и  $q(t)$  на рис. 15.

Нетрудно показать, что полученные ранее в разд. 4.4 аналитические выражения (17), (24) для корреляционных функций  $B_X(\tau)$ ,  $B_I(\tau)$  являются частными случаями более общего аналитического выражения (28) при соответствующем задании процесса  $X(t)$ .

Если в качестве случайного процесса  $X(t)$  выбрать случайные процессы  $C(t)$  или  $I(t)$ , задаваемые соответственно в разд. 4.5 формулами (30) и (35), то получим для корреляционных функций этих процессов соответственно в разд. 4.4 формулы (17) или (24).\*

## 4.6. Модулятор

### 4.6.1. Сглаживающий формирующий фильтр

#### 4.6.1.1. Межканальная и межсимвольная помехи

Перед рассмотрением данного раздела рекомендуется ознакомиться с основами теории многоканальной передачи сообщений [1–3].

На практике по одной линии связи часто передают одновременно несколько различных сообщений (количество сообщений может достигать нескольких сотен или даже тысяч). При этом на приемной стороне канала используется частотное или временное разделение одновременно передаваемых сообщений.

В настоящее время, как более простое при реализации, чаще используется частотное разделение. Чтобы не возникало взаимного влияния разделяемых сообщений, необходимо исключить возможность пересечения спектров сигналов, с помощью которых сообщения передаются по линии связи.

На структурной схеме рис. 1 последовательности информационных символов (ПИС) с выхода блока АЦП до входа блоков сглаживающих формирующих фильтров (СФФ1 и СФФ2) передаются в виде последовательностей соответствующих *прямоугольных* импульсов.

Известно, что спектральные плотности мощности случайных процессов на основе прямоугольных импульсов являются нефинитными, т. е. имеют бесконечную протяженность по оси частот. Поэтому операция модуляции не позволяет транспонировать спектры различных последовательностей из прямоугольных импульсов в непересекающиеся полосы на оси частот.

---

\* В разд. 4.8 дается обоснование структурной схемы демодулятора для КАМ-16. Изучить изложенный материал для КАМ-16 и самостоятельно составить структурную схему демодулятора для КФМ-4 (КАМ-4).

Пересечение спектров модулированных сигналов приводит к возникновению так называемых *межканальных* помех. Более подробно вопрос о частотном разделении каналов рассмотрен в [1, разд. 9.2., с. 257].

Если исключить пересечение спектров модулированных сигналов, то *межканальная* помеха возникать не будет.

Для этого можно использовать два подхода.

1. Перед осуществлением операций модуляции необходимо произвести ограничение нефинитного спектра информационных последовательностей (ИП) из прямоугольных импульсов с помощью ФНЧ. На выходе ФНЧ получим сигналы, имеющие финитный спектр, и последующие операции модуляции транспонируют эти финитные спектры в непересекающиеся полосы канала на оси частот. В результате взаимное влияние передаваемых сообщений будет исключено.

Но после ограничения спектра сигналов ИП вместо *межканальных* помех появятся *межсимвольные* помехи. Графики на рис. 18 поясняют механизм возникновения *межсимвольных* помех.

Прямоугольный импульс  $x(t)$  с амплитудой  $A$  и длительностью  $T$  (рис. 18, а) поступает на вход идеального ФНЧ с частотой среза  $f_{\text{ср}} = f_1$ . Импульсы  $y(t)$  на выходе ФНЧ для различных величин  $f_1 \cdot T$  показаны на рис. 18, б).

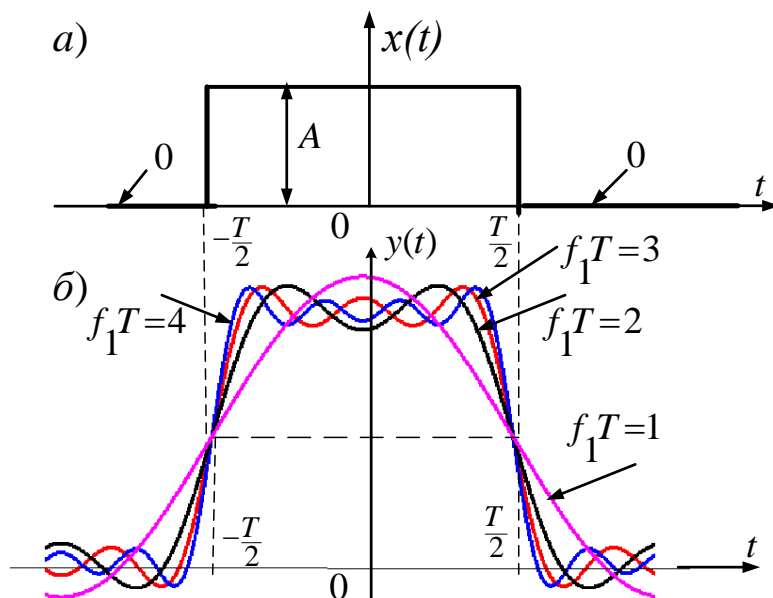


Рис. 18. Сигнал  $y(t)$  на выходе ФНЧ  
в зависимости от величины  $f_1 \cdot T$

Если входной импульс  $x(t)$  (рис. 18, а) является финитным (импульсом конечной длительности  $T$  по времени), то импульсы  $y(t)$  в строгом

смысле являются сигналами нефинитными (бесконечно протяженными по времени), и чем меньше величина произведения  $f_1 \cdot T$ , тем меньше форма импульса  $y(t)$  похожа на прямоугольную форму. Сигнал  $y(t)$  выходит за пределы интервала  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  и в виде «хвостов» заходит на соседние тактовые интервалы, на которых передаются импульсы, соответствующие другим информационным символам (ИС).

В результате на выходе ФНЧ на любом тактовом интервале помимо «своего» искаженного прямоугольного импульса будет присутствовать сигнал в виде совокупности «хвостов» от нескольких предшествующих прямоугольных импульсов, ранее поступивших на вход ФНЧ.

Этот «совокупный» сигнал является случайным процессом, так как «совокупность хвостов» непредсказуема и называется *«межсимвольной помехой»*.

Итак, в результате операции ограничения нефинитного спектра последовательностей из прямоугольных импульсов и последующих операций модуляции, *межканальная* помеха устраняется, но взамен ее возникает новая – *межсимвольная* помеха внутри каждого канала.

Естественно возникает вопрос: можно ли вместо ограничения нефинитного спектра последовательностей прямоугольных импульсов использовать другое преобразование этих последовательностей, при котором не возникали бы межсимвольные и межканальные помехи?

Положительный ответ на этот вопрос в своей статье, опубликованной в 1928 г., дал американский ученый Найквист. Рекомендации Найквиста позволяют реализовать второй подход к решению проблемы.

2. Второй подход, так же как и первый, *устраняет* взаимное влияние передаваемых сообщений (межканальную помеху), но *не приводит* к возникновению межсимвольной помехи.

Суть рекомендаций Найквиста сводится к тому, чтобы вместо ФНЧ, который только ограничивает нефинитный спектр прямоугольных импульсов, использовать *сглаживающий формирующий* фильтр (СФФ), преобразующий поступающие на его вход прямоугольные импульсы в импульсы совершенно другой формы, спектр которых изначально финитен и удовлетворяет критерию Найквиста [3, с. 468–472].

#### 4.6.1.2. Сигналы со спектром приподнятого косинуса (импульсы Найквиста)

Использование импульсов Найквиста для транспортировки информационных символов (ИС) по каналу связи позволяет построить цифровую систему связи (ЦСС), в которой не возникают межканальная и межсимвольная помехи.

При этом оптимизируется прием в условиях действия флуктуационной помехи типа белого шума.

Примером таких сигналов являются «сигналы со спектром приподнятого косинуса». В дальнейшем для краткости эти сигналы будем называть *импульсами Найквиста*.

Импульсы Найквиста  $x(t)$  и их спектральные плотности  $S_x(f)$  характеризуются следующими аналитическими выражениями:

$$x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right)}{\frac{\pi \cdot t}{T}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi \beta t}{T}\right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}}; \quad (42)$$

$$S_x(f) = \begin{cases} T & \text{при } 0 \leq |f| \leq \frac{1-f}{2T}; \\ \frac{T}{2} \cdot \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T}{\beta} \cdot \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right] \right\} & \text{при } \left( \frac{1-f}{2T} \right) \leq |f| \leq \left( \frac{1+f}{2T} \right); \\ 0 & \text{при } |f| > \frac{1+f}{2T}, \end{cases} \quad (43)$$

где  $\beta$  – коэффициент *сглаживания* (или *ската*) [3], который может принимать значения в интервале  $0 \leq \beta \leq 1$ . Графики импульсов Найквиста  $x(t)$  и их спектральных плотностей для значений коэффициента  $\beta = 0; 0,25; 0,5; 1$  приведены на рис. 19, а, б.

Отметим основные свойства импульсов Найквиста [3].

1. Все импульсы Найквиста  $x(t)$  имеют бесконечную длительность, (рис. 19, а), т. е. являются сигналами нефинитными во времени.

2. Импульсы Найквиста обладают свойством *четности* и быстро убывают при значении  $|t| \rightarrow \infty$ . Скорость убывания зависит от величины коэффициента сглаживания  $\beta$ . Максимальная скорость убывания согласно (42) достигается при коэффициенте  $\beta = 1$  и пропорциональна  $1/t^3$ . Минимальная скорость убывания пропорциональна  $1/t$  и достигается при значении  $\beta = 0$ .

3. Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  импульсов Найквиста *финитна* при любом значении  $\beta$  (рис. 19, б). Чем больше значение  $\beta$ , тем большую полосу частот занимает спектральная плотность  $S_x(\omega)$ :

– при значении  $\beta = 1$  полоса частот *максимальна* и равна  $2/T$ , т. е. равна ширине всего лишь одного главного лепестка нефинитного спектра прямоугольного импульса длительностью  $T$ ;

– при значении  $\beta = 0$  полоса частот *минимальна*, и ее протяженность равна  $1/T$ .

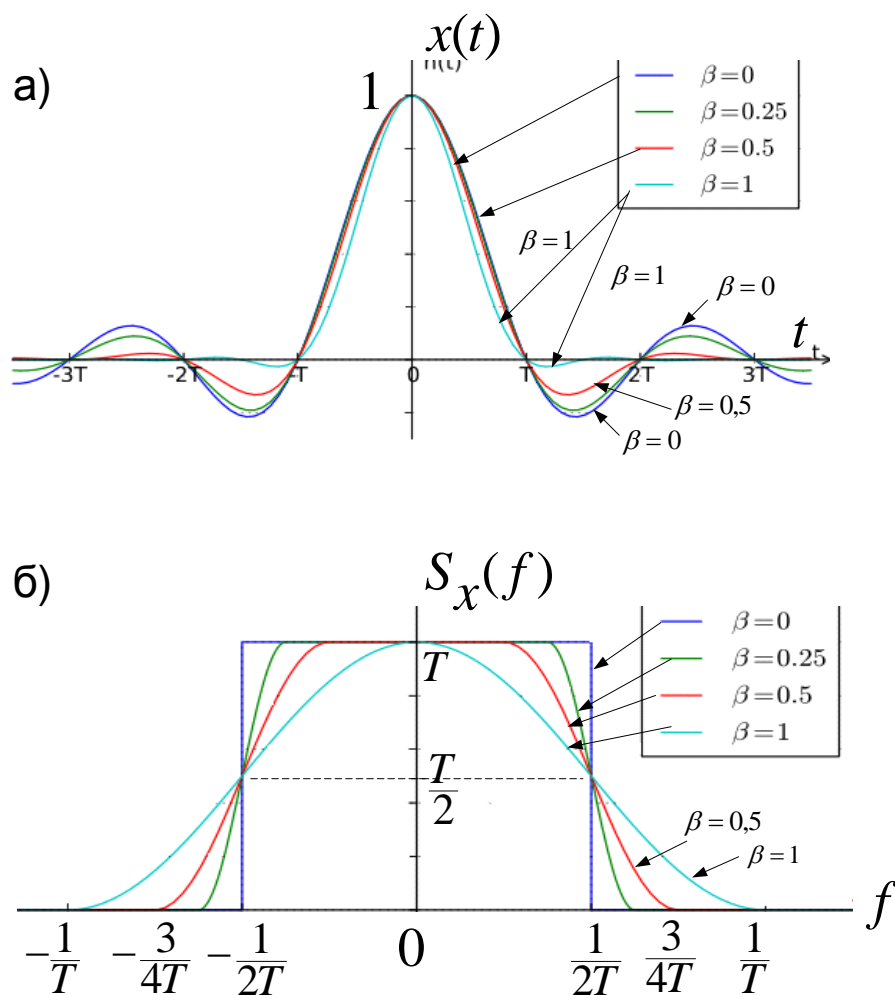


Рис. 19. Импульсы Найквиста  $x(t)$   
и их спектральные плотности  $S_x(f)$

4. При практическом использовании [4] длительность нефинитных импульсов Найквиста ограничивают до длительности, равной  $(3...7) \cdot T$  (рис 19, а), в результате получаем усеченные импульсы, т. е. финитные во времени.

Мощность усеченного импульса Найквиста длительностью  $6T$  составляет, приблизительно, 95 % от мощности неусеченного импульса.

В тех случаях, когда при приеме в демодуляторе используется согласованный фильтр (СФ), *ограничение* длительности импульса на входе согласованного фильтра становится принципиально *необходимым*, так как СФ можно построить только для сигналов конечной длительности на основании известного критерия Пэли – Винера [5].

В формулы (42) и (43), относящиеся к импульсам Найквиста, входит параметр  $T$ . В зависимости от контекста этот параметр  $T$  может иметь смысл бинарного интервала  $T_B$  или символьного интервала  $T_S$ , которые приводились в разд. 4.5, формулы (32) и (36).

Рассмотрим на простом примере, почему при использовании импульсов Найквиста в качестве переносчиков информационных символов (ИС) не возникают *межсимвольные* помехи.

Пусть по системе связи требуется передать только *одно* сообщение на небольшое расстояние, что позволяет обойтись без модуляции. При этом предполагается, что при передаче его на *короткое* расстояние обеспечивается высокий уровень отношения мощности информационного сигнала к мощности флуктуационной помехи  $\text{сигнал/шум} \gg 1$  на входе приемного устройства. Высокий уровень этого отношения сигнал/шум позволяет *пренебречь* флуктуационной помехой и *не вводить* в состав приемного устройства (в демодуляторе) согласованный фильтр (СФ). Предполагаемые условия передачи сообщения позволяют также обойтись без использования *модуляции*.

Как известно, модуляция согласует передаваемое сообщение с каналом связи при передаче сообщений на *большое* расстояние, а также позволяет осуществить частотное разделение сигналов при передаче нескольких сообщений по одной линии связи.

При выполнении отмеченных выше условий информационные последовательности (ИП) на основе *прямоугольных* импульсов в передающем устройстве (ПерУ) с помощью сглаживающего формирующего фильтра (СФФ) *преобразуются* в соответствующие последовательности *усеченных импульсов* Найквиста, которые затем по линии связи (ЛС) поступают на вход приемного устройства.

В приемном устройстве (ПрУ) в определенные моменты времени берутся *отсчеты* (указанные *утолщенными* линиями на рис. 20 д, е, ж, з) *принимаемых* информационных последовательностей на основе импульсов Найквиста, и по *величине отсчетов* приемное устройство (ПрУ) *принимает* решения о численных значениях *передаваемых* информационных символов.

Описанный принцип работы системы связи может быть использован на практике при *небольшой* протяженности линии связи (ЛС) между передающим ПерУ и приемным ПрУ устройствами или в том случае, когда в стационарную ЛС *большой* протяженности включают регенераторы, которые периодически восстанавливают мощность ослабленного информационного сигнала (ИС) до требуемого уровня.

Изложенный выше материал поясняют графики на рис. 20.

На графиках (рис. 20, а, в, г) показаны *безразмерные* функции  $g_2(t)$ ,  $x(t)$  и  $g_3(t)$  соответственно.

На рис. 20, б, д, е, ж, з изображены графики функций  $i(t)$ ,  $hg_3(t)$ ,  $hg_3(t-T)$ ,  $[-hg_3(t-2T)]$  и  $hg_3(t-3T)$ , размерностью в вольтах (В), где  $i(t)$  – фрагмент реализации случайного процесса  $I(t)$  с выхода блока ФМС.

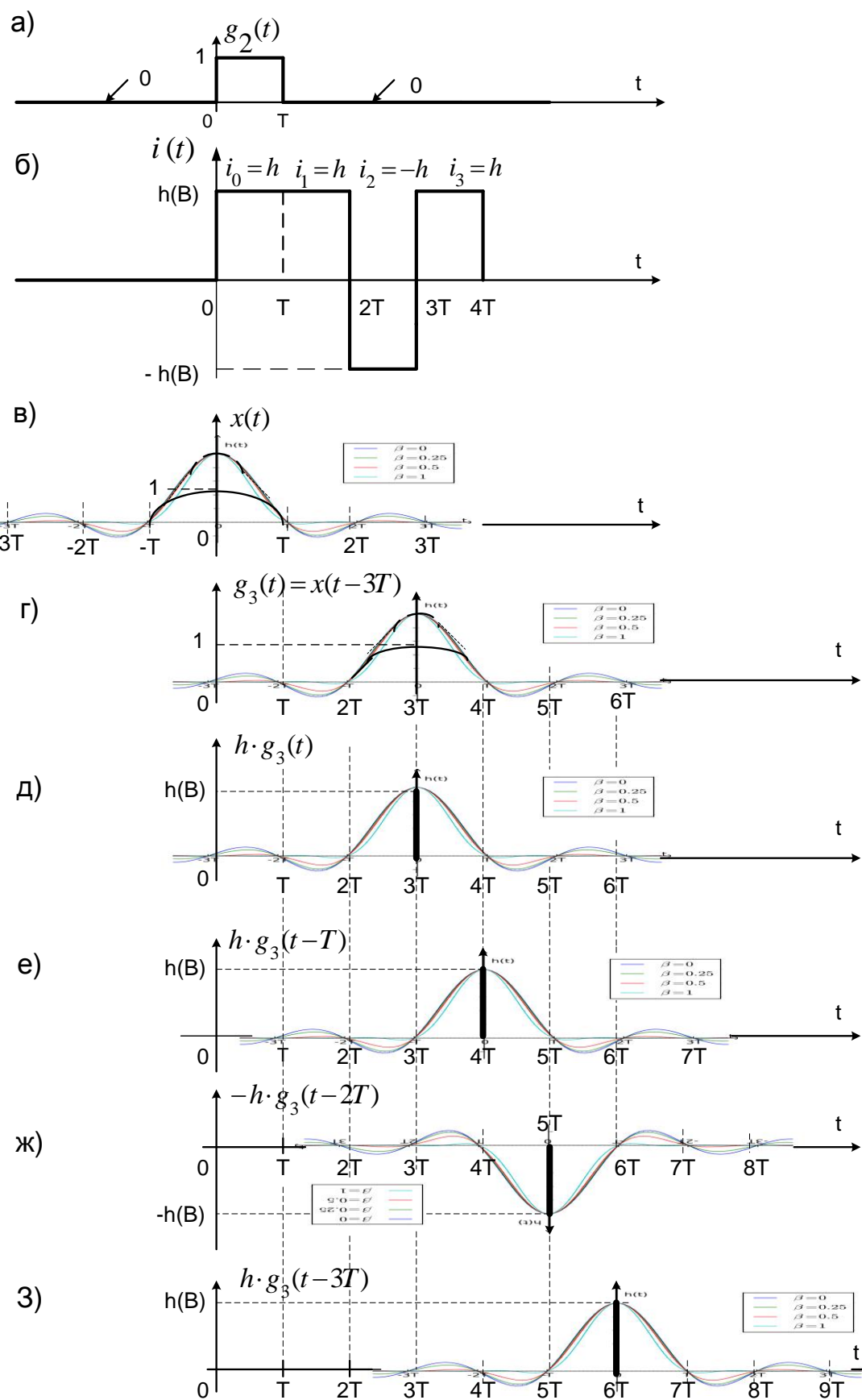


Рис. 20. Отсчеты главных максимумов импульсов Найквиста при  $\beta = 1$ , порождаемых прямоугольными импульсами (б)



На рис. 20, а изображен прямоугольный импульс  $g_2(t)$ , на основе которого формируются информационные случайные последовательности  $I(t)$  и  $Q(t)$  на выходе блока ФМС (разд. 4.5, формулы (35) и (40)).

Поскольку импульс  $g_2(t)$  появляется на выходе блока ФМС (разд. 4.5, формула (36)), то длительность импульса  $g_2(t)$  должна быть обозначена через  $T_s$  – символьный интервал. В дальнейшем для упрощения записи вместо обозначений  $T_s$  будем писать  $T$ .

Усеченный импульс Найквиста  $x(t)$  при значении  $\beta=1$  длительностью  $6T$  показан на рис. 20, в. Если этот импульс сдвинуть вправо на время, равное  $3T$  (т. е. задержать на время  $3T$ ), то получим импульс  $g_3(t)$  (рис. 20, г):

$$g_3(t) = x(t - 3T). \quad (44)$$

Сглаживающий формирующий фильтр (СФФ) преобразует прямоугольный импульс  $g_2(t)$  (рис. 20, а) в импульс  $g_3(t)$  (рис. 20, г), импульс  $g_2(t - T)$  – в импульс  $g_3(t - T)$ , а импульс  $g_2(t - 2T)$  – в импульс  $g_3(t - 2T)$  и т. д.

Если теперь на вход СФФ поступит реализация  $i(t)$  случайного процесса  $I(t)$ , равная

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n g_2(t - nT), \quad (45)$$

то на выходе СФФ появится реализация  $i_\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n g_3(t - nT)$  случайного процесса  $I_\Phi(t)$ :

$$I_\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_3(t - nT), \quad (46)$$

где  $i_n$  – детерминированная величина, которая является реализацией случайной величины  $I_n$ . Величины  $i_n$  в выражениях для  $i(t)$  и  $i_\Phi(t)$  принимают одинаковые значения на соответствующих символьных интервалах  $T$ .

Пусть на вход СФФ поступит фрагмент реализации  $i(t)$  процесса  $I(t)$  (рис. 20, б), состоящий из четырех слагаемых для значений  $i_0 = h$ ,  $i_1 = h$ ,  $i_2 = -h$  и  $i_3 = h$ , тогда

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 g_2(t) + i_1 g_2(t - T) + i_2 g_2(t - 2T) + i_3 g_2(t - 3T) = \\ &= h \cdot g_2(t) + h \cdot g_2(t - T) - h \cdot g_2(t - 2T) + h \cdot g_2(t - 3T). \end{aligned} \quad (47)$$

На выходе СФФ получим фрагмент сигнала  $i_{\Phi}(t)$ :

$$i_{\Phi}(t) = h \cdot g_3(t) + h \cdot g_3(t-T) - h \cdot g_3(t-2T) + h \cdot g_3(t-3T). \quad (48)$$

Таким образом, СФФ преобразует информационную последовательность (47), построенную на основе прямоугольных импульсов  $g_2(t-nT)$ , в информационную последовательность  $i_{\Phi}(t)$ , построенную на основе импульсов Найквиста  $g_3(t-nT)$ .

Первому слагаемому в (48) соответствует график на рис. 20, д, второму, третьему и четвертому слагаемым в (48) – графики на рис. 20, е, ж, з соответственно.

По линии связи на вход приемного устройства (ПрУ) поступит сумма импульсов Найквиста (рис. 20, д, е, ж, з).

В приемном устройстве (ПрУ) берутся *отсчеты* суммарного сигнала из этих импульсов в моменты времени  $3T$ ,  $4T$ ,  $5T$ ,  $6T$ , ..., отсчеты которых на рис. 20, д, е, ж, з изображены *утолщенными* вертикальными линиями.

На рис. 20 видно, что в моменты времени, когда берутся отсчеты, только один из импульсов Найквиста имеет главный максимум, а остальные импульсы в эти моменты времени принимают нулевые значения и поэтому не влияют на величину отсчета *одного* главного *максимума*.

Следовательно, можно считать, что при использовании *импульсов* Найквиста вместо прямоугольных импульсов, прошедших через фильтр-ограничитель (ФНЧ), *межсимвольная помеха* будет *отсутствовать*.

По величинам измеренных отсчетов главных максимумов приемное устройство (ПрУ) принимает решения о численных значениях информационных коэффициентов  $i_n$ , входящих в (48).

В тех случаях когда протяженность канала связи достаточно велика, но при этом нет возможности использовать регенерирующие устройства (например, в условиях спутниковой или мобильной связи), мощность информационного сигнала (ИС), поступающего на вход приемника, будет существенно ослаблена за счет потерь в канале связи. Эта мощность ИС может быть *соизмеримой* с мощностью флуктуационной помехи типа белого шума, всегда присутствующей на входе приемника.

В этом случае флуктуационной помехой *нельзя пренебречь*, поэтому необходима *оптимизация* приема в отношении этой флуктуационной помехи, которая *реализуется* введением в приемное устройство согласованного фильтра (СФ).

Описанный выше способ приема информационных символов обеспечивает отсутствие межсимвольной помехи, но не является оптимальным в условиях действия флуктуационной помехи, которая при слабом информационном сигнале станет существенно влиять на *правильный* (верный) прием информационных символов (ИС).

Чтобы оптимизировать прием в условиях действия флуктуационной помехи, *отсчеты* импульсов, на основании которых определяются значения принимаемых информационных символов (ИС), нужно брать на *выходе* фильтра, согласованного с входными импульсами.

А для того чтобы эти отсчеты были свободны и от межсимвольной помехи, импульсы на *выходе* согласованного фильтра (СФ) с учетом вышесказанного должны иметь форму импульсов Найквиста  $x(t)$ , задаваемых формулой (42).

**Таким образом**, согласованный фильтр СФ будет обеспечивать:

во-первых, оптимальность приема при действии флуктуационной помехи;

во-вторых, отсутствие межсимвольной помехи при взятии отсчетов у импульсов Найквиста на выходе СФ.

#### 4.6.1.3. Определение формы сигнала $x_1(t)$ на выходе СФФ при условии, что в демодуляторе используется СФ с импульсом $x_1(t)$

На рис. 21 изображен согласованный фильтр (СФ) с входным сигналом  $x_1(t)$ , форма этого сигнала  $x_1(t)$  пока неизвестна и подлежит определению.

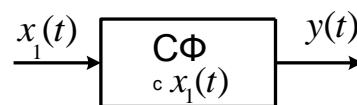


Рис. 21. Сигналы на входе и выходе СФ

Для определения формы входного сигнала  $x_1(t)$  используем известное свойство СФ: *форма сигнала*  $y(t)$  на выходе СФ с сигналом  $x_1(t)$  при подаче сигнала  $x_1(t)$  на его вход будет соответствовать *форме временной корреляционной функции*  $B_{x1}(t)$  входного сигнала  $x_1(t)$  [8]:

$$B_{x1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_1(\tau + t) d\tau. \quad (49)$$

Обсуждается только форма сигнала  $y(t)$  на выходе СФ. Полностью сигнал  $y(t)$  задается своей формой и положением формы на оси времени  $t$  относительно положения входного сигнала  $x_1(t)$ . Выше также отмечалось, что *форма выходного сигнала*  $y(t)$  в общем случае отличается от формы входного сигнала и должна иметь *форму импульса Найквиста*  $x(t)$ , задаваемого по выражению (42).

**Вывод.** Для преодоления межсимвольной помехи необходимо потребовать, чтобы при поступлении на вход СФ импульса  $x_1(t)$  на выходе этого СФ формировался сигнал  $y(t)$ , форма которого определяется формой импульса Найквиста  $x(t)$ , приведенного на (рис. 19, а).

В итоге можем написать равенство

$$B_{x1}(t) = x(t), \quad (50)$$

которое не противоречит свойству четности функций, входящих в левую и правую части равенства (50).

Из теории линейных электрических цепей известно, что физически реализуемый линейный фильтр можно построить только в том случае, если его передаточная функция  $K(\omega)$  удовлетворяет критерию Пэли – Винера [5, с. 402]. Применительно к согласованному фильтру (СФ) с заданным сигналом  $x_1(t)$  критерий Пэли – Винера означает, что *можно* создать физически реализуемый СФ только для сигнала  $x_1(t)$  *конечной* длительности.

Импульс Найквиста  $x(t)$ , входящий в (50) и задаваемый (42), является *нефинитным* сигналом, которому соответствует *финитный* спектр, определяемый (43). Из равенства (50) следует, что корреляционная функция  $B_{x1}(t)$  также будет нефинитной функцией, а из нефинитности  $B_{x1}(t)$  следует нефинитность сигнала  $x_1(t)$ .

Условие физической реализуемости СФ приводит к необходимости усечения сигнала  $x_1(t)$  и соответственно усечения импульса  $x(t)$ .

При замене нефинитного импульса  $x(t)$  *усеченным* импульсом изменится спектральная плотность  $S_x(f)$ , так как усеченному импульсу соответствует *нефинитная* спектральная плотность. Но, вследствие быстрого убывания импульса  $x(t)$  при удалении от главного максимума (так как при значении  $\beta=1$  скорость убывания пропорциональна  $1/t^3$ ) в интервале  $-3T \leq t \leq 3T$  длительностью  $6T$  будет сосредоточено приблизительно 95 % мощности неусеченного импульса  $x(t)$ .

В полосе частот, которую занимал финитный спектр *неусеченного* импульса, будет сосредоточена основная часть мощности *усеченного* импульса соответственно.

Это свойство спектра импульса Найквиста позволяет при проведении расчетов, связанных с *усеченным* импульсом длительностью, равной  $6T$  или бóльшей, *использовать* спектральную плотность по формуле (43), соответствующей *неусеченному* импульсу. Погрешность расчетов, возникающая при сделанном допущении, будет *приемлемой* с практической точки зрения.

Преобразуя по Фурье левую и правую части (50), получим равенство соответствующих спектральных плотностей

$$S_{B_{x1}}(\omega) = S_x(\omega). \quad (51)$$

Используя равенство Парсеваля, представим правую часть равенства (49) в виде интеграла по оси частот  $\omega$  [8, с. 30]:

$$B_{x1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_1(\tau + t) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{x1}(\omega)|^2 \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega. \quad (52)$$

Функцию  $B_{x1}(t)$  можно также представить в виде обратного преобразования Фурье от  $S_{B_{x1}}(\omega)$  – спектральной плотности функции  $B_{x1}(t)$ :

$$B_{x1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{B_{x1}}(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega. \quad (53)$$

Из (52) и (53) следует, что функция  $S_{B_{x1}}(\omega)$  должна удовлетворять равенству

$$S_{B_{x1}}(\omega) = |S_{x1}(\omega)|^2. \quad (54)$$

Из (51) и (54) следует равенство  $|S_{x1}(\omega)|^2 = S_x(\omega)$ , которое представим в эквивалентной форме

$$|S_{x1}(\omega)| = \sqrt{S_x(\omega)}, \quad (55)$$

где  $S_{x1}(\omega)$  – спектральная плотность искомого импульса  $x_1(t)$ ;

$S_x(\omega)$  – известная спектральная плотность импульса Найквиста по выражению (43);

Спектральная плотность любого сигнала, в том числе и неизвестного пока импульса  $x_1(t)$  в общем случае является комплексной функцией частоты  $\omega$ , которая при определенных условиях может быть *вещественной* и обладать еще и другими дополнительными свойствами.

Любую комплексную функцию частоты  $\omega$ , в том числе и  $S_{x1}(\omega)$  всегда можно представить в виде

$$S_{x1}(\omega) = |S_{x1}(\omega)| \cdot e^{i\varphi_{x1}(\omega)}, \quad (56)$$

где  $|S_{x1}(\omega)|$  – модуль комплексной функции  $S_{x1}(\omega)$ ;

$\varphi_{x1}(\omega)$  – аргумент комплексной функции  $S_{x1}(\omega)$ .

Равенство (55) определяет только модуль  $|S_{x1}(\omega)|$ , а аргумент  $\varphi_{x1}(\omega)$  в (56) остается пока неизвестным. Функция  $S_x(\omega)$  в (55) и задаваемая в (43) является функцией вещественной, четной, положительно определенной.

Функция  $\sqrt{S_x(\omega)}$ , определяющая модуль  $|S_{x1}(\omega)|$ , сохраняет отмеченные свойства функции  $S_x(\omega)$ .

Вполне естественно потребовать, чтобы функция  $S_{x1}(\omega)$  также обладала отмеченными свойствами функции  $S_x(\omega)$ . Для этого множитель  $e^{i\varphi_{x1}(\omega)}$ , входящий в (56) и придающий комплексный характер функции  $S_{x1}(\omega)$ , должен равняться единице, т. е.

$$e^{i\varphi_{x1}(\omega)} = 1, \quad (57)$$

что выполняется, если аргумент  $\varphi_{x1}(\omega) = 0$ .

Используя (55), (56) и (57), можно окончательно определить спектральную плотность  $S_{x1}(\omega)$  искомого сигнала  $x_1(t)$ :

$$S_{x1}(\omega) = \sqrt{S_x(\omega)}. \quad (58)$$

Учитывая, что  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , из (43) при  $\beta = 1$  получим

$$S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left( 1 + \cos \omega \frac{T}{2} \right), & \text{при } -\frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0, & \text{при } |\omega| > \frac{2\pi}{T}. \end{cases} \quad (59)$$

Используя (58) и (59), определим  $S_{x1}(\omega)$  в интервале  $-\frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$ :

$$S_{x1}(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2} \left( 1 + \cos \omega \frac{T}{2} \right)} = \sqrt{T \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega \frac{T}{2} \right)} = \sqrt{T \cos^2 \omega \frac{T}{4}} = \sqrt{T} \cdot \cos \omega \frac{T}{4}. \quad (60)$$

Используя (59) и (60), определим  $S_{x1}(\omega)$  на всей оси  $\omega$ :

$$S_{x1}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{T} \cdot \cos \omega \frac{T}{4}, & \text{при } -\frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0, & \text{при } |\omega| > \frac{2\pi}{T}. \end{cases} \quad (61)$$

Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  *нефинитного* импульса Найквиста  $x(t)$  для коэффициента сглаживания  $\beta = 1$  изображена на рис. 22, а.

Спектральная плотность  $S_{x1}(\omega)$  искомого *нефинитного* импульса  $x_1(t)$  показана на рис. 22, б.

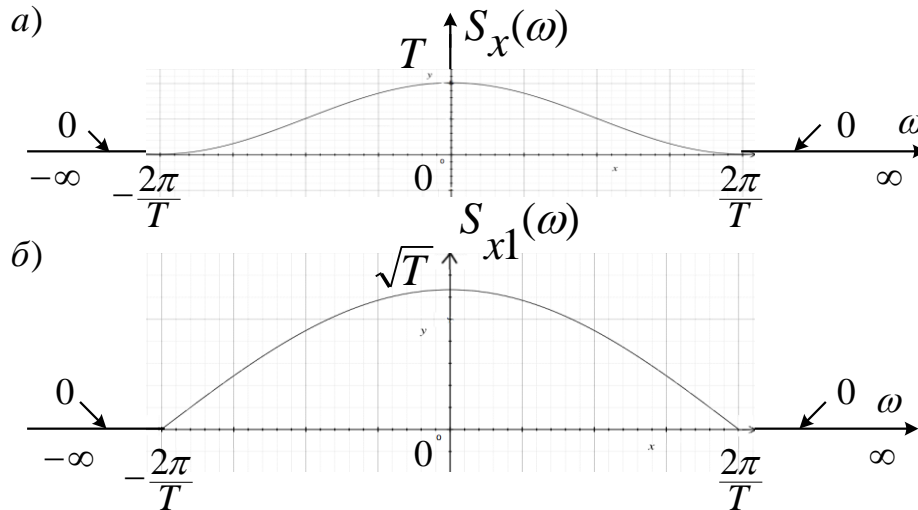


Рис. 22. Спектральные плотности  $S_x(\omega)$  и  $S_{x1}(\omega)$   
нефинитных импульсов  $x(t)$  и  $x_1(t)$

Выполняя обратное преобразование Фурье от известной функции  $S_{x1}(\omega)$ , определим искомый импульс

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x1}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \Rightarrow ,$$

согласно (61) изменяем пределы интегрирования

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{T}}^{\frac{2\pi}{T}} \sqrt{T} \cdot \cos \omega \frac{T}{4} \cdot e^{i\omega t} d\omega \Rightarrow$$

Представляя экспоненту по формуле Эйлера и учитывая свойства четности функции  $\cos \omega \frac{T}{4}$  и нечетности функции  $\sin \omega \frac{T}{4}$ , получим

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{T}}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{T}}^{\frac{2\pi}{T}} \cos \omega \frac{T}{4} \cdot \cos \omega t \cdot d\omega = \frac{\sqrt{T}}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{T}}^{\frac{2\pi}{T}} \left[ \frac{1}{2} \cos \omega \cdot \left( t - \frac{T}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \omega \cdot \left( t + \frac{T}{4} \right) \right] \cdot d\omega.$$

После элементарных преобразований окончательно определим искомый сигнал  $x_1(t)$  (рис. 23):

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \left[ \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{T}{4} \right)}{\frac{2\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{T}{4} \right)} + \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{T}{4} \right)}{\frac{2\pi}{T} \cdot \left( t + \frac{T}{4} \right)} \right]. \quad (62)$$

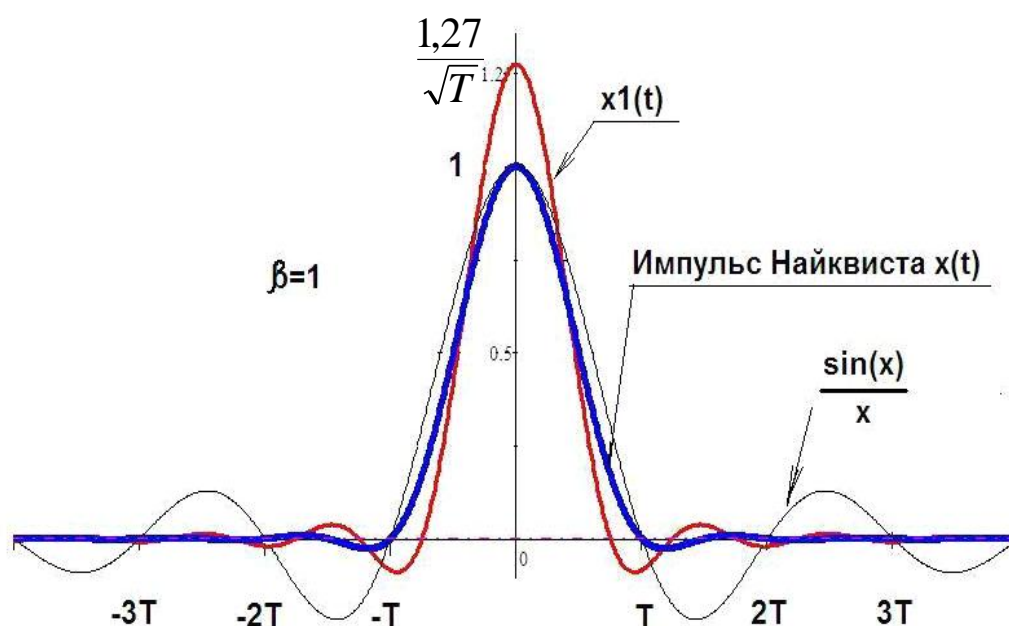


Рис. 23. Импульс Найквиста  $x(t)$  и искомый импульс  $x_1(t)$

При сравнении графиков импульсов  $x_1(t)$  и  $x(t)$ , приведенных на рис. 23, видно, что они имеют разную форму.

График искомого импульса  $x_1(t)$ , имеющего  $\max \frac{1,27}{\sqrt{T}}$  (В), на рис. 23 изображен в виде *тонкой* кривой.

Импульс Найквиста  $x(t)$  на этом же графике показан *утолщенной* кривой при значении  $\beta = 1$ .

Отметим различия импульсов  $x(t)$  и  $x_1(t)$  на рис. 23.

1. Значения импульса Найквиста  $x(t)$  в моменты времени  $t = \pm T, \pm 2T, \dots$  равны нулю, а значения импульса  $x_1(t)$  в эти же моменты времени отличаются от нуля.

2. Величина главного максимума импульса  $x(t)$  равна единице, а величина главного максимума  $x_1(t)$  зависит от параметра  $T$  и равна  $\frac{1,27}{\sqrt{T}}$ .

Например, при  $T = 10^{-4}$  (с) величина  $\frac{1,27}{\sqrt{T}} = 127$ , т. е. примерно на два порядка превышает величину главного максимума импульса Найквиста  $x(t)$ .

Этот пример показывает, что желательно от импульса  $x_1(t)$  перейти к нормированному импульсу  $x_{1н}(t)$ ,

$$x_{1н}(t) = \frac{\sqrt{T}}{1,27} \cdot x_1(t). \quad (63)$$



График импульса  $x_{1H}(t)$  изображен на рис. 24.

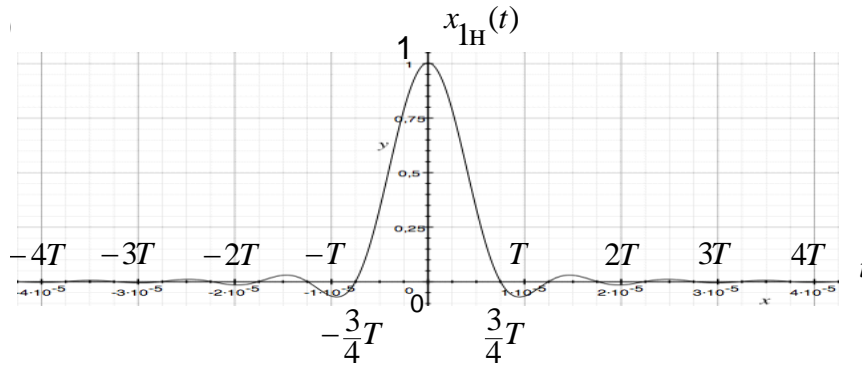


Рис. 24. График нормированного импульса  $x_{1H}(t)$

Величина главного максимума нормированного импульса  $x_{1H}(t)$  не зависит от параметра  $T$  и равна единице, как и у импульса Найквиста  $x(t)$ .

#### 4.6.1.4. Прохождение прямоугольного импульса $g_2(t - nT)$ через СФФ

Фрагмент структурной схемы в составе ЦСС системы связи, содержащий ФМС и два сглаживающих формирующих фильтра (СФФ), представлен на рис. 25.

Информационные случайные процессы  $I(t)$  и  $Q(t)$  с выходов ФМС поступают соответственно на входы верхнего и нижнего сглаживающих формирующих фильтров (СФФ).

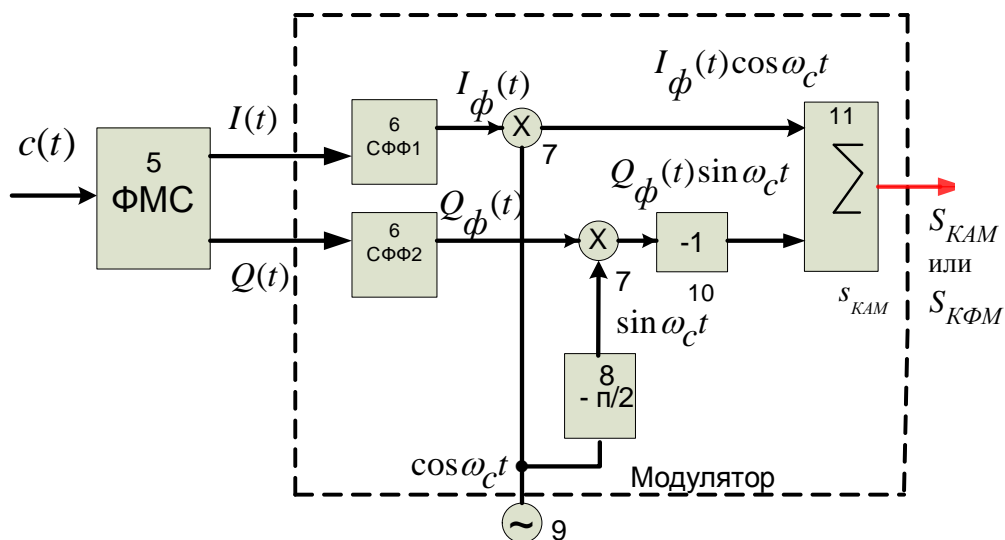


Рис. 25. Расположение блоков СФФ в схеме цифровой системы связи с квадратурной модуляцией

Прямоугольный импульс  $g_2(t)$ , на основе которого строятся импульсные последовательности на выходах ФМС, показан на рис. 26, а.

На рис. 26, б представлен фрагмент реализации  $i(t)$  случайного процесса  $I(t)$ , поступающий на вход верхнего сглаживающего формирующего фильтра СФФ1 (тот же самый фрагмент, что и показанный ранее на рис. 20, б).

Сигналу  $i(t)$  соответствует аналитическое выражение

$$i(t) = i_0 g_2(t) + i_1 g_2(t - T) + i_2 g_2(t - 2T) + i_3 g_2(t - 3T),$$

где информационные символы  $i_0, i_1, i_2, i_3$  принимают соответственно значения  $h, h, -h, h$ .

Прямоугольные импульсы  $i_n g_2(t - nT)$ , где  $n$  – номер символьного интервала, приведены на рис. 26, б, после прохождения через СФФ они преобразуются в импульсы  $i_n g_3(t - nT)$ .

Форма этих импульсов  $i_n g_3(t - nT)$  соответствует форме усеченного нормированного импульса  $x_{1н}(t)$ , рис. 26, в. Но эти импульсы сдвинуты вправо на время  $(n + 3) \cdot T$  относительно импульса  $x_{1н}(t)$ , т. е.

$$g_3(t - nT) = x_{1н}[t - (n + 3)T]. \quad (64)$$

При  $n = 0$  из (64) получим

$$g_3(t) = x_{1н}(t - 3T). \quad (65)$$

Согласно (65) импульс  $g_3(t)$  представляет собой импульс  $x_{1н}(t)$ , сдвинутый вправо на время  $3T$  (рис. 26, г), и его главный максимум равен единице.

Импульс  $i_0 g_3(t) = i_0 x_{1н}(t - 3T)$  при значении  $i_0 = h$  изображен на рис. 26, д, где  $h = 2$  В.

Последующие импульсы  $i_1 g_3(t - T), i_2 g_3(t - 2T), i_3 g_3(t - 3T)$ , при  $i_1 = h, i_2 = -h, i_3 = h$  приведены соответственно на рис. 26, е, ж, з.

Результирующий сигнал, формируемый на верхнем выходе СФФ1, равен сумме импульсов, изображенных на рис. 26, д, е, ж, з.

На выходе нижнего СФФ2 реализация  $q(t)$  случайного процесса  $Q_{\Phi}(t)$  формируется аналогично.

**Обратить внимание** на рис. 20 и 26.

Сравнивая импульсы на рис. 20, г, д, е, ж, з соответственно с импульсами на рис. 26, г, д, е, ж, з, можно отметить их внешнее сходство. Но эти импульсы принципиально *отличаются* друг от друга.

Импульсы на рис. 20, г, д, е, ж, з являются импульсами Найквиста, а импульсы на рис. 26, г, д, е, ж, з не являются таковыми.

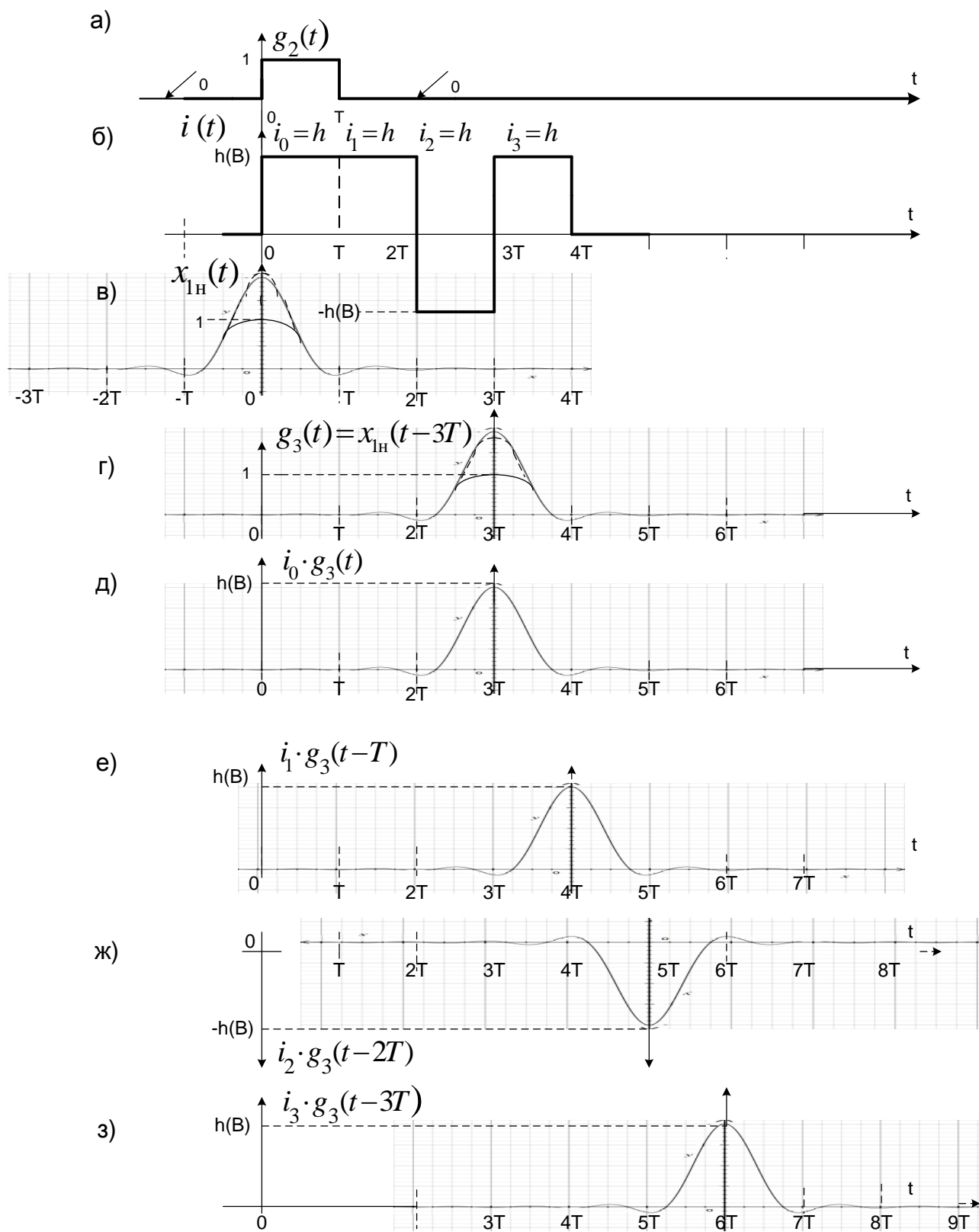


Рис. 26. Графики сигналов на входе и выходе верхнего СФФ1

Но если эти импульсы на рис. 26, г, д, е, ж, з подать на вход согласованного фильтра (СФ) с импульсом  $g_3(t) = x_{1н}(t - 3T)$  (рис. 26, г), то соответствующие импульсы на выходе СФ будут импульсами Найквиста, обеспечивающими отсутствие межсимвольной помехи при взятии отсчетов главных максимумов этих импульсов.

СФ находится в приемном устройстве (ПрУ) и входит в состав демодулятора.

Подробно это будет изложено в разделе о работе демодулятора для квадратурной модуляции.

В итоге в сигнал на выходе сумматора КАМ или КФМ входят случайные процессы  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ , ансамбли которых соответствуют полученной ранее формуле (46):

$$I_\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_3(t - nT); \quad Q_\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n g_3(t - nT), \quad (66)$$

где  $I_n(t)$  и  $Q_n(t)$  – независимые случайные величины, принимающие известные дискретные значения с заданными вероятностями, какие они имеют в формулах (35) и (40);

$g_3(t) = x_{1н}(t - 3T)$  – детерминированный импульс, спектральная плотность которого выражается через спектральную плотность импульса Найквиста.

## 4.6.2. Перемножители, инвентор и сумматор

### 4.6.2.1. Корреляционные функции и спектральные плотности мощности случайных сигналов на выходе СФФ

В разд. 4.4 по формуле (28) определена корреляционная функция стационарного случайного процесса  $X(t)$ , в котором в качестве переносчиков информационных символов  $X_n$  используются детерминированные импульсы  $g(t - nT)$ . Формула (28) имеет вид

$$B_X(\tau) = \overline{X_n^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot B_g(\tau),$$

где  $\overline{X_n^2}$  – математическое ожидание квадрата случайной величины  $X_n$ ;

$\frac{1}{T}$  – частота поступления в канал связи информационных символов  $X_n$ ;

$B_g(\tau)$  – автокорреляционная функция детерминированного импульса  $g(t)$ , определяемая равенством (29),

$$B_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt.$$

Стационарный случайный процесс  $I_\Phi(t)$  на выходе СФФ1 передает по каналу связи информационные символы  $I_n$ , поступающие в канал со скоростью  $\frac{1}{T} \left( \frac{\text{симв.}}{\text{с}} \right)$ . Переносчиками информационных символов  $I_n$  являются импульсы  $g_3(t - nT)$ . Поэтому формула (28) для корреляционной функции  $B_{I_\Phi}(\tau)$  стационарного процесса  $I_\Phi(t)$  принимает вид

$$B_{I_\Phi}(\tau) = \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot B_{g_3}(\tau). \quad (67)$$

Определим математическое ожидание  $\overline{I_n^2}$  для КАМ-16. Информационные символы  $I_n$  принимают значения  $3h, h, -h, -3h$  с одинаковой вероятностью  $P(3h) = P(h) = P(-h) = P(-3h) = 0,25$ .

Математическое ожидание  $\overline{I_n^2}$  будет равно

$$\begin{aligned} \overline{I_n^2} &= P(3h) \cdot (3h)^2 + P(h) \cdot h^2 + P(-h) \cdot (-h)^2 + P(-3h) \cdot (-3h)^2 = \\ &= 0,25(9h^2 + h^2 + h^2 + 9h^2) = 5h^2. \end{aligned}$$

Для КФМ-4 аналогично получим  $\overline{I_n^2} = h^2$ .

Таким образом, имеем

$$\overline{I_n^2} = \begin{cases} 5h^2, & \text{для КАМ-16;} \\ h^2, & \text{для КФМ-4.} \end{cases} \quad (68)$$

Определим автокорреляционную функцию  $B_{g_3}(\tau)$ , входящую в (67).

В равенстве (29) при замене  $g(t) = g_3(t)$  получим

$$B_{g_3}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_3(t) \cdot g_3(t + \tau) dt, \quad (69)$$

где согласно (65) и (63) имеют место равенства

$$g_3(t) = x_{1н}(t - 3T); \quad x_{1н}(t) = \frac{\sqrt{T}}{1,27} \cdot x_1(t),$$

а  $x_1(t)$  определяется (62).

В результате (69) будет иметь вид

$$B_{g_3}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{1н}(t - 3T) \cdot x_{1н}(t - 3T + \tau) dt = \frac{T}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - 3T) \cdot x_1(t - 3T + \tau) dt.$$

Полученный интеграл является автокорреляционной функцией  $B_{x_1}(\tau)$  импульса  $x_1(t)$ . Поэтому равенство, определяющее  $B_{g_3}(\tau)$ , представим в форме

$$B_{g_3}(\tau) = \frac{T}{1,27^2} B_{x_1}(\tau).$$

Если в равенстве (50) обозначение аргумента  $t$  изменить на  $\tau$ , то равенство (50) представим в виде

$$B_{x_1}(\tau) = x(\tau).$$

С учетом этого равенства функцию  $B_{g_3}(\tau)$  можно представить следующим образом

$$B_{g_3}(\tau) = \frac{T}{1,27^2} \cdot x(\tau). \quad (70)$$

Подставляя (70) в (67), окончательно определим корреляционную функцию  $B_{I_\Phi}(\tau)$  случайного процесса  $I_\Phi(t)$  на выходе СФФ:

$$B_{I_\Phi}(\tau) = \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \cdot x(\tau), \quad (71)$$

где  $\overline{I_n^2}$  – определяется (68);

$x(\tau)$  – импульс Найквиста при значении  $\beta = 1$ .\*

Учитывая график функции  $x(\tau)$  на рис. 19, а, представим график функции  $B_{I_\Phi}(\tau)$ , изображенный на рис. 27.

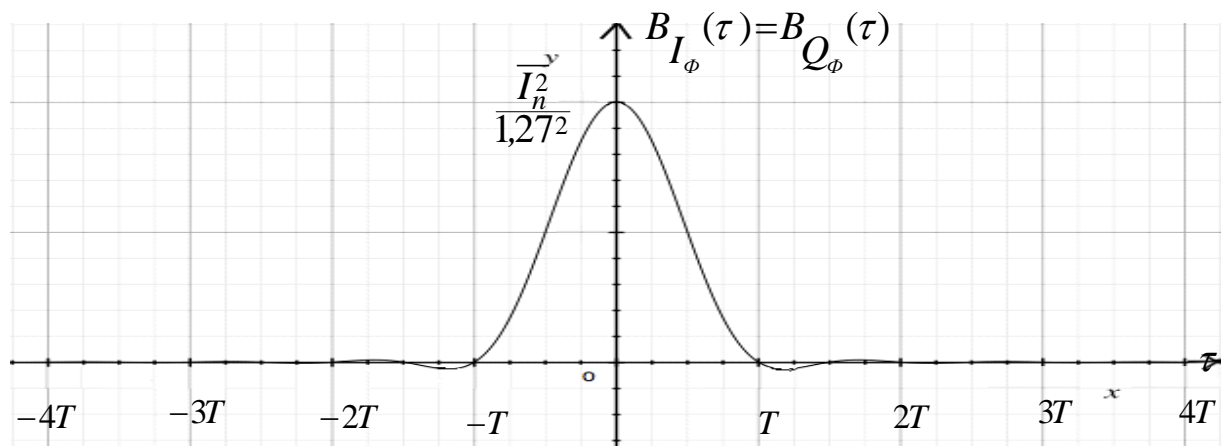


Рис. 27. График корреляционных функций  $B_{I_\Phi}(\tau)$  и  $B_{Q_\Phi}(\tau)$  случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$

\*Напомним, что в равенстве (50) сделано изменение обозначения аргумента  $t$  на  $\tau$ .

В соответствии с теоремой Винера–Хинчина определим спектральную плотность мощности  $G_{I_\Phi}(\omega)$  случайного процесса  $I_\Phi(t)$

$$G_{I_\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{I_\Phi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \Rightarrow$$

Используя (71), будем иметь

$$\Rightarrow \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \Rightarrow$$

Так как полученный интеграл определяет спектральную плотность  $S_x(\omega)$  импульса Найквиста  $x(t)$  при значении  $\beta = 1$ , то согласно (43) получим

$$G_{I_\Phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \cdot \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right], & |\omega| \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0, & |\omega| > \frac{2\pi}{T}. \end{cases} \quad (72)$$

График спектральных плотностей мощности  $G_{I_\Phi}(\omega)$ , соответствующий (72), показан на рис. 28.

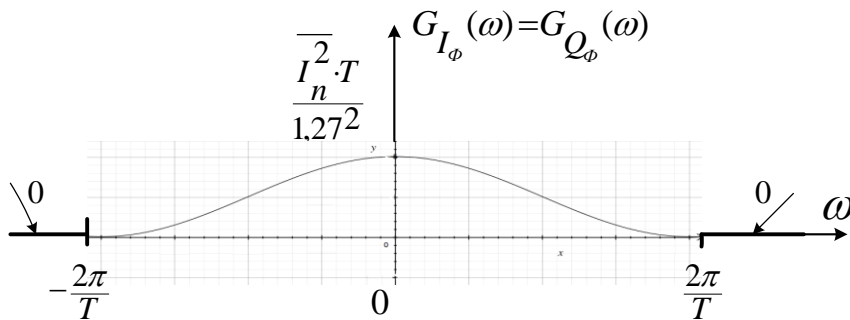


Рис. 28. График спектральных плотностей мощности  $G_{I_\Phi}(\omega)$  и  $G_{Q_\Phi}(\omega)$

Так как случайный процесс  $Q_\Phi(t)$  на выходе нижнего сглаживающего формирующего фильтра (СФФ) имеет такие же вероятностные характеристики, как и процесс  $I_\Phi(t)$ , то можно написать следующие равенства:

$$B_{Q_\Phi}(\tau) = B_{I_\Phi}(\tau) = \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \cdot x(t),$$

$$G_{I_\Phi}(\omega) = G_{Q_\Phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{5h^2}{1,27^2} \cdot \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right], & |\omega| \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0, & |\omega| > \frac{2\pi}{T}. \end{cases} \quad (73)$$

В заключение раздела отметим, что корреляционные функции (72) и спектральные плотности мощности (73) случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$  на выходе СФФ определены без учета усеченности импульсов  $x_1(t)$  и  $x(t)$ . Ранее отмечалось, что возникающая погрешность при таком подходе будет незначительной с практической точки зрения.

#### 4.6.2.2. Сигналы квадратурной модуляции КАМ-16 и КФМ-4

На структурной схеме системы связи (рис. 1) сигнал  $Q_\Phi(t) \cdot \sin \omega_c t$  с выхода нижнего СФФ и далее с выхода нижнего перемножителя поступает на вход инвертора, который изменяет знак перед этим сигналом с плюса на минус. С учетом этого на выходе сумматора получаем сигнал  $s(t)$

$$s(t) = I_\Phi(t) \cdot \cos \omega_c t - Q_\Phi(t) \sin \omega_c t. \quad (74)$$

Этот сигнал в зависимости от заданного вида модуляции является сигналом квадратурной *амплитудной* или квадратурной *фазовой* модуляции. Множители  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$  обеспечивают ортогональность сигналов  $I_\Phi(t) \cdot \cos \omega_c t$  и  $Q_\Phi(t) \sin \omega_c t$ . Поэтому говорят, что эти сигналы находятся в квадратуре.

Сигналы, входящие в (74), передаются одновременно, в одной и той же полосе частот, по одной линии связи.

Свойство ортогональности обеспечивает линейную независимость этих сигналов, а значит, и возможность их разделения на приемном конце канала. Возможность разделения этих сигналов позволяет независимо производить оценку информационных параметров (модулирующих символов)  $I_n$  и  $Q_n$  в составе сигналов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ . Используя полученные ранее выражения (35) из разд. 4.5 для сигналов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ , формулу (74) запишем в виде

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_3(t - nT_s) \cdot \cos \omega_c t - \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n g_3(t - nT_s) \sin \omega_c t. \quad (75)$$

Выделим из правой части (75) сигнал  $s_k(t)$ , которому соответствует слагаемое с индексом  $n = k$ , где  $k$  – произвольное фиксированное целое число:

$$\begin{aligned} s_k(t) &= I_k g_3(t - kT_s) \cdot \cos \omega_c t - Q_k g_3(t - kT_s) \sin \omega_c t = \\ &= g_3(t - kT_s) \cdot (I_k \cos \omega_c t - Q_k \sin \omega_c t). \end{aligned} \quad (76)$$



С помощью сигнала (76) по каналу передаются информационные (модулирующие) символы  $I_k$  и  $Q_k$ . Сигнал (76) появляется на выходе модулятора, начиная с момента  $t = kT_s$ , и его длительность равна длительности усеченного импульса  $g_3(t - kT_s)$ , т. е. равна  $6T_s$ .

Из разд. 4.5 следует, что символы  $I_k$  и  $Q_k$  являются *декартовыми* координатами точки  $M$  на сигнальном созвездии (рис. 29), которая соответствует выделенным слагаемым из выражения (75).

Согласно рис. 29 параметры  $I_k$  и  $Q_k$  можно представить в виде

$$I_k = U_k \cdot \cos \theta_k, \quad Q_k = U_k \cdot \sin \theta_k, \quad (77)$$

где  $U_k = \sqrt{I_k^2 + Q_k^2}$  и  $\theta_k = \arctg Q_k / I_k$ .

Величины  $U_k$  и  $\theta_k$  – координаты той же точки  $M$  на сигнальном созвездии в *полярной* системе координат. Подставив (77) в (76), преобразуем сигнал  $s_k(t)$  к виду

$$\begin{aligned} s_k(t) &= g_3(t - kT_s) \cdot (U_k \cos \theta_k \cdot \cos \omega_c t - U_k \sin \theta_k \cdot \sin \omega_c t) = \\ &= g_3(t - kT_s) \cdot U_k \cos(\omega_c t + \theta_k). \end{aligned} \quad (78)$$

Из (78) видно, что в состав выделенного сигнала в качестве сомножителя входит гармоническое колебание

$$U_k \cos(\omega_c t + \theta_k), \quad (79)$$

представленное в *канонической* форме.\*

Представление гармонического колебания (79) в канонической форме в составе сигнала (78) получено благодаря знаку «минус» в выражении (74) перед вторым слагаемым. Этот знак обеспечивается введением инвертора в нижнюю ветвь перед сумматором на структурной схеме (рис. 1).

Гармоническому колебанию (79) соответствует комплексная амплитуда

$$\dot{U}_k = U_k \cdot e^{j\theta_k}, \quad (80)$$

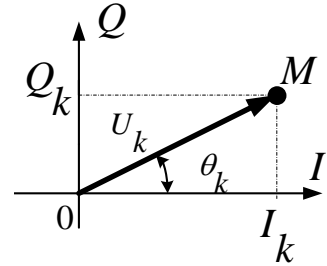


Рис. 29.  $I_k$  и  $Q_k$  – координаты точки  $M$  на сигнальном созвездии в декартовой системе координат

\*Как следует из учебников и учебных пособий по теории электрических цепей и теории сигналов [5–9], при записи гармонического колебания в канонической форме перед начальной фазой  $\theta_k$  должен стоять знак *плюс*, как в выражении (79). При этом численное значение начальной фазы  $\theta_k$  в каждом конкретном случае может быть величиной положительной или отрицательной.

которая при условии, что  $\theta_k > 0$ , представлена на комплексной плоскости вектором  $\dot{U}_k$  (рис. 30, а).

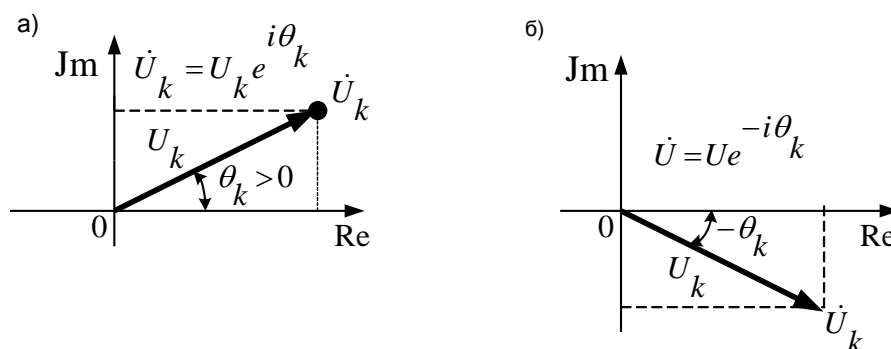


Рис. 30. Вектор комплексной амплитуды:

а)  $\dot{U}_k = U_k \cdot e^{j\theta_k}$  ; б)  $\dot{U}_k = U_k \cdot e^{-j\theta_k}$

Существенно, что вектор  $\dot{U}_k$  по длине и направлению полностью соответствует исходному вектору с координатами  $I_k$  и  $Q_k$  точки  $M$  на сигнальном созвездии на рис. 29.

Поскольку в (78) гармонический сигнал представлен в канонической форме, а выражение (78) было получено из сигнала (74), то выражение (74) является *канонической* формой для сигнала квадратурной модуляции (КАМ, КФМ).

Если в структурной схеме исключить инвертор перед сумматором, тогда сигнал на выходе сумматора будет представлен в виде

$$s_{\text{КАМ}}(t) = I_{\phi}(t) \cdot \cos \omega_c t + Q_{\phi}(t) \sin \omega_c t. \quad (81)$$

В этом случае, повторив приведенные выше выкладки, в составе выделенного сигнала получим гармонический сигнал в форме  $U_k \cos(\omega_c t - \theta_k)$ , которая не является канонической, как упоминалось ранее. Вектор комплексной амплитуды для данного гармонического сигнала будет иметь вид  $\dot{U}_k = U_k \cdot e^{-j\theta_k}$ . На комплексной плоскости этот вектор при условии  $\theta_k > 0$  изображен на рис. 30, б.

Сравнивая рис. 30, б и 29, делаем вывод, что при задании сигнала  $s_{\text{КАМ}}(t)$  в форме (81) вектор  $\dot{U}_k$  на комплексной плоскости *не* совпадает по направлению с соответствующим вектором  $\dot{U}_k$  на сигнальном созвездии на рис. 29. Это является следствием того, что форма (81) *не* является *канонической* для представления сигнала КАМ, и от этого возникает отмеченное несоответствие.

Таким образом, из двух возможных представлений сигнала квадратурной модуляции в форме (74) или в форме (81), будем считать *канонической* только форму (74) и только ее будем использовать в КР.

При определении корреляционной функции случайного сигнала на выходе модулятора необходимо уточнить задание ансамблей случайных процессов на выходах перемножителей.

При задании ансамблей этих процессов предполагается, что имеется ансамбль одинаковых передающих устройств, по которым передаются различные реализации случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ .

В состав каждого передающего устройства (ПерУ) входит свой генератор гармонического колебания  $\cos(\omega_c t + \varphi)$ , где начальная фаза  $\varphi$  принимает какое-то детерминированное численное значение. Множество этих различных значений  $\varphi$  образует случайную величину  $\varphi_c$ , т. е. каждое  $\varphi$  является реализацией случайной величины  $\varphi_c$ .

При задании случайных процессов на выходе перемножителей, детерминированные функции  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$ , входящие в (74), необходимо расширить до случайных функций  $\cos \omega_c t + \varphi_c$  и  $\sin(\omega_c t + \varphi_c)$  введением в аргумент детерминированных функций  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$  случайной фазы  $\varphi_c$ , не зависящей от случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$ . Тогда вместо (74) получим случайный процесс  $s(t)$  следующего вида:

$$s(t) = I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c) - Q_\Phi(t) \cdot \sin(\omega_c t + \varphi_c). \quad (82)$$

Случайный процесс  $s(t)$  в (82) позволяет правильно определить корреляционную функцию случайного сигнала КАМ или КФМ на выходе сумматора.

Обращаем внимание на случайную фазу  $\varphi_c$ . В каждой отдельной реализации случайного процесса, определенного по формуле (82), фаза  $\varphi_c$  имеет свое численное значение, которое не изменяется во времени. Случайный же характер фазы  $\varphi_c$  проявляется в том, что для разных реализаций значения  $\varphi_c$  отличаются друг от друга и ансамбль этих значений образует случайную величину  $\varphi_c$  с равномерной плотностью вероятности  $w(\varphi_c)$  на интервале  $0 \dots 2\pi$ ,

$$w(\varphi_c) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{при } 0 \leq \varphi_c \leq 2\pi; \\ 0, & \text{при } \varphi_c < 0, \varphi_c > 2\pi. \end{cases} \quad (83)$$

График  $w(\varphi_c)$  изображен на рис. 31.

Только при равномерной плотности вероятности  $w(\varphi_c)$  для случайной фазы  $\varphi_c$  (рис. 31) случайный процесс на выходе модулятора (на выходе сумматора) будет *стационарным*.

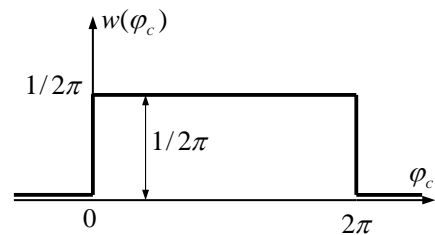


Рис. 31. Равномерная плотность вероятности  $w(\varphi_c)$

#### 4.6.2.3. Корреляционные функции и спектральные плотности мощности случайных сигналов на выходах перемножителей

На выходе верхнего перемножителя (ПМ-1) получаем сигнал

$$I_{\Phi}(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c).$$

Определим математическое ожидание этого случайного сигнала

$$\overline{I_{\Phi}(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c)} = \overline{I_{\Phi}(t)} \cdot \overline{\cos(\omega_c t + \varphi_c)}. \quad (84)$$

Это равенство получено на основании того, что сомножители  $I_{\Phi}(t)$  и  $\cos(\omega_c t + \varphi_c)$  представляют собой независимые случайные процессы. Ранее отмечалась о независимости случайной фазы  $\varphi_c$  от сигнала  $I_{\Phi}(t)$ . Случайный процесс  $I_{\Phi}(t)$ , полученный по выражению (46):

$$I_{\Phi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_3(t - nT),$$

формируется на выходе блока СФФ при подаче на его вход случайного процесса  $I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_2(t - nT)$  с выхода блока ФМС. Причем блок СФФ трансформирует прямоугольные импульсы  $g_2(t - nT)$  в импульсы  $g_3(t - nT)$ . Значения информационных символов (ИС)  $I_n$  при этом не изменяются.

Определим математические ожидания  $\overline{I_{\Phi}(t)}$  и  $\overline{\cos(\omega_c t + \varphi_c)}$ , входящие в (84):

$$\overline{I_{\Phi}(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot g_3(t - nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{I_n} \cdot g_3(t - nT), \quad (85)$$

где  $g_3(t - nT_S)$  – детерминированный сигнал.

Согласно (37) из разд. 4.5 можем написать для КАМ-16

$$\begin{aligned} \overline{I_n} &= (-3h) \cdot p(-3h) + (-h) \cdot p(-h) + h \cdot p(h) + 3h \cdot p(3h) = \\ &= (-3h) \cdot 0,25 + (-h) \cdot 0,25 + h \cdot 0,25 + 3h \cdot 0,25 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для КФМ-4 получим

$$\overline{I_n} = 0. \quad (86)$$

Подставляя (86) в (85), получим

$$\overline{I_{\Phi}(t)} = 0. \quad (87)$$

Следовательно,  $\overline{I_\Phi(t)}$  – центрированный процесс.

Математическое ожидание сигнала  $\cos(\omega_c t + \varphi_c)$ , зависящего от случайной величины  $\varphi_c$  с равномерной плотностью вероятности  $w(\varphi_c)$  (83) на интервале  $0 \dots 2\pi$ , определим по формуле

$$\overline{\cos(\omega_c t + \varphi_c)} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \varphi_c) w(\varphi_c) d\varphi_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \varphi_c) d\varphi_c = 0. \quad (88)$$

Подставляя (87) и (88) в (84), получим

$$\overline{I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c)} = 0. \quad (89)$$

Это равенство означает, что случайный процесс  $I_\Phi(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c)$  является центрированным, поэтому корреляционная функция  $B_{I_\Phi \cos}(t_1, t_2)$  этого процесса определяется по формуле

$$\begin{aligned} B_{I_\Phi \cos}(t_1, t_2) &= \overline{I_\Phi(t_1) \cdot \cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot I_\Phi(t_2) \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c)} = \\ &= \overline{I_\Phi(t_1) \cdot I_\Phi(t_2)} \cdot \overline{\cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c)}. \end{aligned} \quad (90)$$

Равенство (90) получено на основании известного положения теории вероятностей о том, что математическое ожидание от произведения независимых случайных сомножителей равно произведению математических ожиданий этих сомножителей.

Математическое ожидание  $\overline{I_\Phi(t_1) \cdot I_\Phi(t_2)}$  в (90) равно корреляционной функции  $B_{I_\Phi}(t_1, t_2)$  центрированного случайного процесса  $I_\Phi(t)$  (87), т. е.

$$B_{I_\Phi}(t_1, t_2) = \overline{I_\Phi(t_1) \cdot I_\Phi(t_2)}.$$

Необходимо отметить, что процесс  $I_\Phi(t)$ , помимо свойства центрированности, обладает также свойством стационарности, так как процесс стационарный получается в результате прохождения центрированного стационарного процесса  $I(t)$  через СФФ, который является линейным фильтром.\*

С учетом свойства стационарности процесса  $I_\Phi(t)$  можем написать

$$B_{I_\Phi}(t_1, t_2) = B_{I_\Phi}(t_2 - t_1).$$

---

\*Как известно из курса ОТС, при подаче на вход любого линейного фильтра центрированного, стационарного процесса выходной процесс будет также центрированным и стационарным.

Рассмотрим математическое ожидание другого сомножителя в (90):

$$\overline{\cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c)} = \overline{\frac{1}{2} \cos \omega_c (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]} = \quad (90a)$$

$$= \overline{\frac{1}{2} \cos \omega_c (t_2 - t_1)} + \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]} = \quad (90б)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \omega_c (t_2 - t_1) + \overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]}. \quad (90в)$$

В этой цепочке преобразований *первое* равенство (90a) получено в результате использования формулы  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ .

*Второе* равенство (90б) получено на основании известного положения теории вероятностей – математическое ожидание суммы случайных слагаемых всегда равно сумме математических ожиданий слагаемых.

*Третье* равенство (90в) получено на основании правила: математическое ожидание детерминированной величины  $\frac{1}{2} \cos \omega_c (t_2 - t_1)$  равно самой детерминированной величине. Второе слагаемое  $\overline{\frac{1}{2} \cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]}$  в сумме равенства (90в) является математическим ожиданием случайной величины  $\frac{1}{2} \cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]$ , так как в аргумент косинуса входит случайная фаза  $2\varphi_c$ . Аналогично (88) получим:  $\overline{\cos[\omega_c (t_1 + t_2) + 2\varphi_c]} = 0$ .

Итак, равенство (90) принимает следующий вид:

$$B_{I_{\Phi} \cos}(t_1, t_2) = B_{I_{\Phi}}(t_1, t_2) \cdot \frac{1}{2} \cos \omega_c (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} B_{I_{\Phi}}(t_2 - t_1) \cdot \cos \omega_c (t_2 - t_1). \quad (91)$$

Вводя обозначение  $\tau = (t_2 - t_1)$ , равенство (91) представим в виде

$$B_{I_{\Phi} \cos}(\tau) = \frac{1}{2} B_{I_{\Phi}}(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau. \quad (92)$$

Таким образом, на выходе перемножителя получаем случайный процесс  $I_{\Phi}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c)$  (66). Математическое ожидание этого процесса согласно (89) равно нулю, т. е. постоянно, и его корреляционная функция  $B_{I_{\Phi} \cos}(t_1, t_2)$ , учитывая (91), зависит от разности времен  $(t_2 - t_1)$ . Следовательно, случайный процесс на выходе перемножителя является стационарным.

Корреляционная функция  $B_{I_\Phi}(\tau)$  случайного процесса  $I_\Phi(t)$  определяется формулой (71). Подставляя (71) в (92), окончательно получаем

$$B_{I_\Phi \cos}(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \cdot x(\tau) \cos \omega_c \tau. \quad (93)$$

На рис. 32 представлен график функции  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$ , где  $x(\tau)$  – импульс Найквиста (при коэффициенте ската  $\beta = 1$ ).

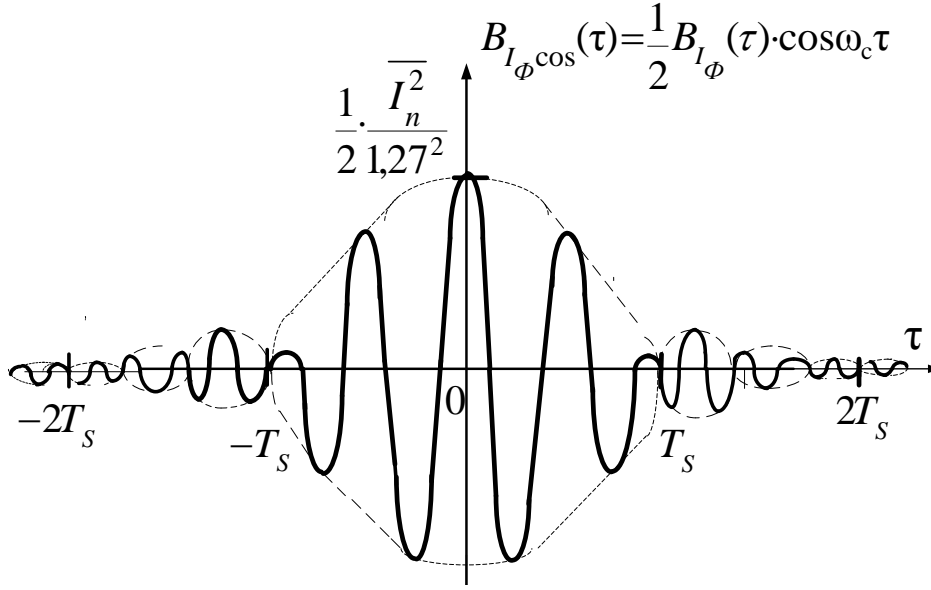


Рис. 32. Корреляционная функция  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$   
случайного процесса  $I_\Phi(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c)$

Спектральную плотность мощности случайного сигнала на выходе перемножителя определим на основании теоремы Винера – Хинчина. Преобразуя функцию  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$  по Фурье, с учетом (93) получим

$$G_{I_\Phi \cos}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{I_\Phi \cos}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \Rightarrow,$$

учитывая, что  $\cos \omega_c \tau = \frac{e^{i\omega_c \tau} + e^{-i\omega_c \tau}}{2}$ , имеем

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{4} \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} d\tau + \frac{1}{4} \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-i(\omega + \omega_c)\tau} d\tau \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} [S_x(\omega - \omega_c) + S_x(\omega + \omega_c)], \end{aligned} \quad (94)$$

где графики функций  $S_x(\omega - \omega_c)$  и  $S_x(\omega + \omega_c)$  получаются в результате сдвига графика функции  $S_x(\omega)$  (43) на рис. 19, б соответственно вправо и влево на величину  $\omega_c$ .

Напомним, что функция  $S_x(\omega)$  импульса Найквиста  $x(t)$  при значении коэффициента ската  $\beta = 1$  и  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  равна

$$S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left( 1 + \cos \frac{T}{2} \omega \right) & \text{при } |\omega| \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0 & \text{при } |\omega| > \frac{2\pi}{T}. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что имеет место равенство.

$$B_{Q_\Phi \sin}(\tau) = B_{I_\Phi \cos}(\tau). \quad (95)$$

Отсюда получаем

$$G_{I_\Phi \cos}(\omega) = G_{Q_\Phi \sin}(\omega). \quad (96)$$

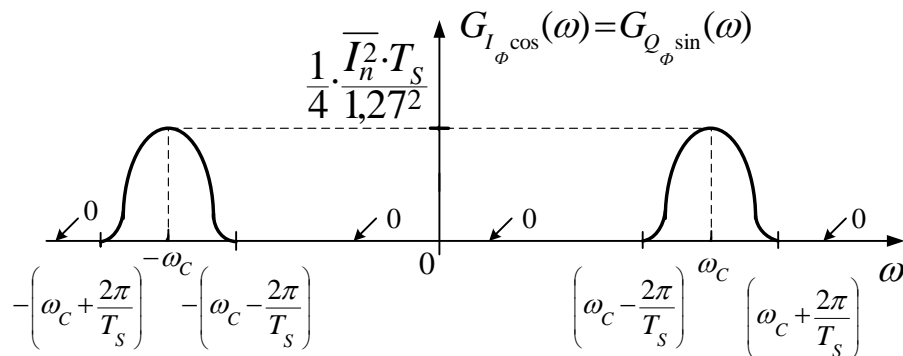


Рис. 33. Спектральные плотности мощности  $G_{I_\Phi \cos}(\omega)$  и  $G_{Q_\Phi \sin}(\omega)$  случайных процессов  $I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c)$  и  $Q_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c)$  на выходе перемножителей

#### 4.6.2.4. Корреляционная функция и спектральная плотность мощности случайного процесса $s(t)$ на выходе модулятора (сумматора)

Согласно структурной схеме системы связи (рис. 1) на выходе модулятора (сумматора) получаем сигнал  $s(t)$  квадратурной модуляции КАМ-16 или КФМ-4, ссылаясь на выражение (82) в разд. 4.6.2.2:

$$s(t) = I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_c) - Q_\Phi(t) \cdot \sin(\omega_c t + \varphi_c).$$



В соответствии с изложенным в разд. 4.6.2.2 математическое ожидание  $\overline{s(t)} = 0$ , тогда можно утверждать, что  $s(t)$  является центрированным случайным процессом, поэтому его корреляционная функция будет следующей:

$$\begin{aligned} B_s(t_1, t_2) &= \overline{s(t_1) \cdot s(t_2)} = \\ &= \overline{\left[ I_\Phi(t_1) \cdot \cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) - Q_\Phi(t_1) \sin(\omega_c t_1 + \varphi_c) \right] \times} \\ &\quad \times \overline{\left[ I_\Phi(t_2) \cdot \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c) - Q_\Phi(t_2) \sin(\omega_c t_2 + \varphi_c) \right]} \Rightarrow \end{aligned}$$

Имея в виду известные свойства математического ожидания, можно написать

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{\left[ I_\Phi(t_1) \cdot \cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot I_\Phi(t_2) \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c) \right]} - \\ &\quad - \overline{\left[ I_\Phi(t_1) \cdot \cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot Q_\Phi(t_2) \sin(\omega_c t_2 + \varphi_c) \right]} - \\ &\quad - \overline{\left[ Q_\Phi(t_1) \cdot \sin(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot I_\Phi(t_2) \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c) \right]} + \\ &\quad + \overline{\left[ Q_\Phi(t_1) \cdot \sin(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot Q_\Phi(t_2) \sin(\omega_c t_2 + \varphi_c) \right]} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{I_\Phi(t_1) \cdot Q_\Phi(t_2) \cdot \cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c)} - \overline{I_\Phi(t_1) \cdot Q_\Phi(t_2)} \times \\ &\quad \times \overline{\cos(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \sin(\omega_c t_2 + \varphi_c)} - \overline{Q_\Phi(t_1) \cdot I_\Phi(t_2) \cdot \sin(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \cos(\omega_c t_2 + \varphi_c)} + \\ &\quad + \overline{Q_\Phi(t_1) \cdot Q_\Phi(t_2) \cdot \sin(\omega_c t_1 + \varphi_c) \cdot \sin(\omega_c t_2 + \varphi_c)} \Rightarrow . \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} &\Rightarrow B_{I_\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{2} \cos \omega_c(t_2 - t_1) - B_{I_\Phi, Q_\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{2} \sin \omega_c(t_2 - t_1) - \\ &\quad - B_{I_\Phi, Q_\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{2} \sin(\omega_c(t_2 - t_1)) + B_{Q_\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{2} \cos \omega_c(t_2 - t_1) \Rightarrow . \end{aligned}$$

Здесь  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$  являются независимыми случайными процессами, поэтому взаимные корреляционные функции равны нулю:

$$B_{I_\Phi, Q_\Phi}(t_2 - t_1) = B_{Q_\Phi, I_\Phi}(t_2 - t_1) = 0.$$

Тогда получим

$$B_s(t_1, t_2) = \frac{1}{2} B_{I_\Phi}(t_2 - t_1) \cos \omega_c(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} B_{Q_\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \cos \omega_c(t_2 - t_1).$$

Согласно (73) имеем  $B_{Q_\Phi}(t_2 - t_1) = B_{I_\Phi}(t_2 - t_1)$ . В результате получим  $B_s(t_1, t_2) = B_s(t_2 - t_1) = B_{I_\Phi}(t_2 - t_1) \cos \omega_c(t_2 - t_1)$ . Вводя обозначение  $(t_2 - t_1) = \tau$ , будем иметь

$$B_s(\tau) = B_{I_\Phi}(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau. \quad (97)$$

Используя (71), окончательно получим

$$B_s(\tau) = \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{1,27^2} \cdot x(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau, \quad (98)$$

где  $x(\tau)$  – импульс Найквиста, определяемый (42) при  $\beta = 1$  (рис. 19, б);

$\overline{I_n^2}$  – определяется формулой (68) для КАМ-16 или для КФМ-4.

График функции  $B_s(\tau)$  приведен на рис. 34.

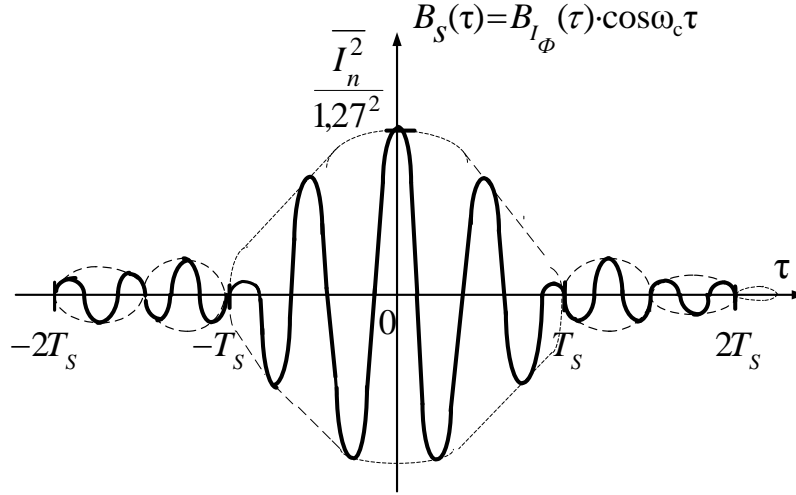


Рис. 34. График корреляционной функции  $B_s(\tau)$

Спектральная плотность мощности  $G_s(\omega)$  случайного сигнала  $s(t)$  в соответствии с теоремой Винера – Хинчина определяется через преобразование Фурье корреляционной функции  $B_s(\tau)$ . Используя (98), получим

$$\begin{aligned} G_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{l\phi \cos}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \overline{I_n^2} \cdot \frac{1}{1,27^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} [S_x(\omega - \omega_c) + S_x(\omega + \omega_c)], \end{aligned} \quad (99)$$

где согласно (59) получим аналитические выражения для функции  $S_x(\omega - \omega_c)$  и  $S_x(\omega + \omega_c)$

$$S_x(\omega - \omega_c) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ (\omega - \omega_c) \frac{T}{2} \right] \right\} & \text{при } \omega_c - \frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \omega_c + \frac{2\pi}{T}, \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_c - \frac{2\pi}{T}; \end{cases}$$

$$S_x(\omega + \omega_c) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ (\omega + \omega_c) \frac{T}{2} \right] \right\} & \text{при } -\omega_c - \frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq -\omega_c + \frac{2\pi}{T}; \\ 0 & \text{при } -\omega < \omega_c - \frac{2\pi}{T} > -\omega_c + \frac{2\pi}{T}. \end{cases}$$

График  $G_s(\omega)$ , соответствующий функции  $S_x(\omega - \omega_c)$  в области положительной полуоси частот  $\omega$ , изображен на рис. 35. На том же рисунке изображен график  $G_s(\omega)$ , соответствующий функции  $S_x(\omega + \omega_c)$  в области отрицательной полуоси частот  $\omega$ .

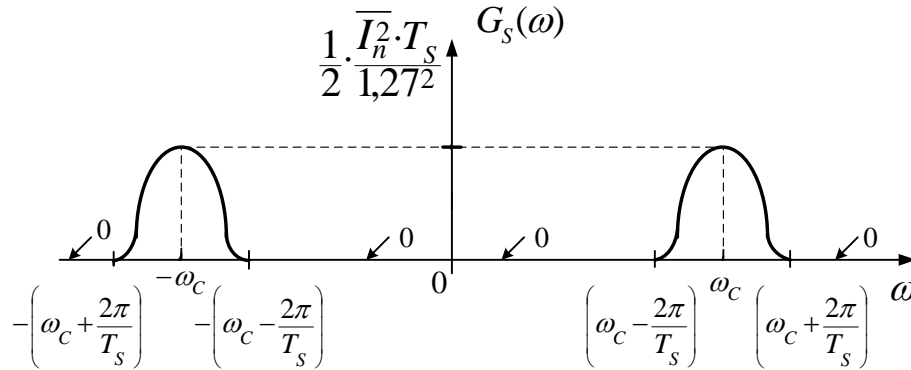


Рис. 35. Спектральные плотности мощности  $G_s(\omega)$  случайных процессов

$I_\Phi(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$  и  $Q_\Phi(t) \cdot \sin(\omega_c t + \phi_c)$  на выходе сумматора

Сравнивая (97) с (92), делаем вывод, что с точностью до множителя  $1/2$  функция  $B_s(\tau)$  равна функции  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$ . Также с точностью до множителя  $1/2$  форма графика  $B_s(\tau)$  соответствует форме графика  $B_{I_\Phi \cos}(\tau)$  (рис. 32).

Спектральная плотность  $G_s(\omega)$  на выходе сумматора будет равна удвоенной спектральной плотности  $G_{I_\Phi \cos}(\omega)$ , определяемой (96) и рис. 33.

В заключение раздела отметим, что корреляционные функции (71) и спектральные плотности мощности (73) случайных процессов  $I_\Phi(t)$  и  $Q_\Phi(t)$  на выходе СФФ определены без учета усеченности импульсов  $x_1(t)$  и  $x(t)$ . Ранее отмечалось, что возникающая погрешность при таком подходе будет незначительной с практической точки зрения.

## 4.7. Непрерывный канал

Передача сигнала  $S(t)$  с выхода модулятора происходит по непрерывному неискажающему каналу с постоянными параметрами в присутствии аддитивной помехи  $n(t)$  типа гауссовского белого шума. Сигнал  $z(t)$  на выходе такого канала имеет вид (2)

$$Z(t) = \mu \cdot S(t) + n(t),$$

где  $\mu$  – коэффициент передачи канала. Для всех вариантов в данной курсовой работе  $\mu = 1$ .

Односторонняя спектральная плотность мощности помехи  $n(t)$  равна  $N_0$ , (значение  $N_0$  для своего варианта найти в исходных данных).

Основная величина, которую требуется определить в данном разделе КР – пропускная способность  $C$  непрерывного канала за единицу времени. Эта величина определяется по [1, формула (4.47)].

$$C = F_k \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_c}{P_{\Pi}} \right), \quad (100)$$

где  $F_k$  – минимальная ширина полосы пропускания непрерывного канала, необходимая для прохождения сигнала  $s(t)$  с выхода модулятора;

$P_c$  – средняя мощность случайного сигнала  $s(t)$ ;

$P_{\Pi}$  – средняя мощность аддитивной помехи  $n(t)$ , сосредоточенная в полосе пропускания непрерывного канала.

### *Решение*

1. Определим минимальную ширину полосы частот  $F_k$  непрерывного канала, необходимую для передачи сигнала  $s(t)$  с выхода модулятора.

Спектральная плотность мощности  $G_s(\omega)$  случайного сигнала  $s(t)$  определена на рис. 35 в разд. 4.6.2.4 по формуле (99). На рис. 35 видно, что на положительной полуоси частоты  $\omega$  спектр  $G_s(\omega)$  занимает полосу частот  $\omega_c - \frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \omega_c + \frac{2\pi}{T}$ , т. е. ширина этой полосы равна  $2\pi \cdot \frac{2}{T}$ .

Учтем, что угловая частота  $\omega = 2\pi \cdot f$ , тогда при переходе от угловой частоты  $\omega$  к частоте  $f$  полученная ширина полосы частот  $F_k$  вдоль оси частот  $f$  соответствует спектру сигнала  $s(t)$ :

$$F_k = \frac{2}{T}. \quad (101)$$

2. Определим  $P_c$  – среднюю мощность информационного сигнала  $\mu \cdot S(t)$  на выходе канала.

Для всех вариантов КР величина задана  $\mu = 1$ , поэтому  $P_c$  будет равна средней мощности информационного сигнала  $s(t)$  на выходе модулятора. Корреляционная функция  $B_s(\tau)$  сигнала  $s(t)$  определена в разд. 4.6.2.4 по формуле (98). С одной стороны, средняя мощность  $P_c$  случайного сигнала  $s(t)$  равна дисперсии этого сигнала, а с другой стороны, дисперсия равна значению функции  $B_s(\tau)$  при значении  $\tau = 0$ , т. е. средняя мощность сигнала  $s(t)$  равна корреляционной функции  $P_c = B_s(0)$ . Учитывая,

что функции  $x(\tau)$  и  $\cos\omega_c\tau$ , входящие в выражение (93) при значении  $\tau=0$ , принимают значения  $x(\tau)=1$  при  $\tau=0$  и  $\cos\omega_c\tau=1$  при  $\tau=0$ , получим из (98)

$$P_c = B_s(0) = \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2}. \quad (102)$$

3. Определим мощности помехи  $P_{\Pi}$  на выходе канала и величины отношения  $P_c / P_{\Pi}$ .

Для определения величины  $P_{\Pi}$  – мощности помехи  $n(t)$  в полосе частот шириной  $F_k$ , которую занимает спектр информационного сигнала  $s(t)$ , используем график односторонней спектральной плотности мощности  $G_{\Pi}(f)$  помехи  $n(t)$ -типа белого шума. Найти в исходных данных величину односторонней спектральной плотности мощности  $N_0$ .

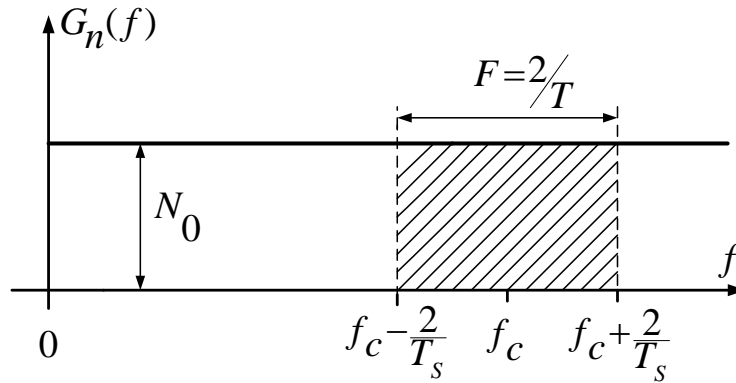


Рис. 36. График односторонней спектральной плотности мощности помехи  $n(t)$  типа белого шума

Мощность  $P_{\Pi}$  помехи  $n(t)$  в полосе частот непрерывного канала шириной  $F_k = \frac{2}{T}$  равна величине заштрихованной площади на рис. 36, тогда

$$P_{\Pi} = N_0 \cdot F_k = N_0 \cdot \frac{2}{T_s}. \quad (103)$$

Используя (102) и (103), определим отношение  $P_c / P_{\Pi}$

$$\frac{P_c}{P_{\Pi}} = \frac{\overline{I_n^2}}{1,27^2} \cdot \frac{T_s}{2N_0}. \quad (104)$$

4. Определим пропускную способность непрерывного канала по формуле (100):

$$C = F_k \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_c}{P_n} \right).$$

Переходя к натуральным логарифмам, получим [1, формула (4.48)]

$$C = F_k \cdot \log_2 e \cdot \ln \left( 1 + \frac{P_c}{P_n} \right) \equiv 1,443 F_k \ln \left( 1 + \frac{P_c}{P_n} \right). \quad (105)$$

## 4.8. Демодулятор и преобразователь параллельного кода в последовательный код

### 4.8.1. Обоснование структурной схемы. Импульсы $g_3(t - nT)$

В КР [7, с. 51–60] приведено обоснование структурной схемы когерентного демодулятора для сигналов квадратурных видов модуляции. При обосновании структурной схемы предполагалось, что на вход демодулятора поступает сигнал  $z(t)$ , определяемый выражением (69) в [7, разд. 4.8, с. 52] и состоящий из двух слагаемых:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_2(t - nT) \cos \omega_c t - Q_n g_2(t - nT) \sin \omega_c t] + n(t). \quad (106)$$

Первое слагаемое (сумма) является информационным сигналом квадратурной амплитудной модуляции КАМ-16.

Второе слагаемое  $n(t)$  – сигнал флуктуационной помехи типа белого шума.

Информационный сигнал строился на основе прямоугольных импульсов  $g_2(t - nT)$  длительностью  $T$ , следующих друг за другом через интервал  $T$ . Импульсы  $g_2(t - nT)$  формировались на выходе блока ФМС [7, разд. 4.5, с. 28–35].

В результате сделанного обоснования была получена структурная схема демодулятора, использующая активные фильтры [7, разд. 4.8, с. 60, рис. 30].

В настоящем пособии в разд. 4.8 на вход демодулятора вместо сигнала (106) поступает сигнал  $z(t)$ , определяемый другим выражением

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_3(t - nT) \cos \omega_c t - Q_n g_3(t - nT) \sin \omega_c t] + n(t), \quad (107)$$

которое отличается от (106) тем, что вместо прямоугольных импульсов  $g_2(t - nT)$  используются импульсы  $g_3(t - nT)$ , определяемые выражением (64) в разд. 4.6.1.4:

$$g_3(t - nT) = x_{1н}[t - (n + 3)T],$$

откуда при  $n = 0$  получим выражение (65):

$$g_3(t) = x_{1н}(t - 3T).$$

Нормированный импульс  $x_{1н}(t)$  определяется в разд. 4.6.1.3, формулы (63), (62) и рис. 24.

В (107) каждому значению индекса суммирования  $n$  соответствует информационный сигнал (ИС)

$$I_n g_3(t - nT) \cos \omega_c t - Q_n g_3(t - nT) \sin \omega_c t, \quad (108)$$

который возникает на оси времени  $t$  вначале символьного интервала с номером  $n$  и имеет длительность, равную длительности усеченного импульса  $g_3(t - nT)$ , т. е.  $6T$ .

В состав сигнала (108) входят информационные символы  $I_n$  и  $Q_n$ , являющиеся независимыми случайными величинами, каждая из которых при любом  $n$  для КАМ-16 принимает одно из четырех дискретных значений:  $h$ ,  $-h$ ,  $3h$  и  $-3h$  с одинаковой вероятностью

$$P(h) = P(-h) = P(3h) = P(-3h) = 0,25.$$

Так, например, при значении  $n = 0$  сигнал (108) примет вид

$$I_0 g_3(t) \cos \omega_c t - Q_0 g_3(t) \sin \omega_c t. \quad (109)$$

Случайной составляющей  $I_0 g_3(t) \cos \omega_c t$  соответствуют четыре реализации, которые можно обозначить:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t; & s_3(t) &= 3h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t; \\ s_2(t) &= -h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t; & s_4(t) &= -3h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t. \end{aligned} \quad (110)$$

Каждая из этих реализаций передает одно из четырех дискретных значений случайной величины  $I_0$ :  $h$ ,  $-h$ ,  $3h$ ,  $-3h$ .

Аналогично второй случайной составляющей  $-Q_0 g_3(t) \sin \omega_c t$  сигнала (108) соответствуют четыре реализации:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= -h \cdot g_3(t) \sin \omega_c t; & s'_3(t) &= -3h \cdot g_3(t) \sin \omega_c t \\ s'_2(t) &= h \cdot g_3(t) \sin \omega_c t; & s'_4(t) &= 3h \cdot g_3(t) \sin \omega_c t. \end{aligned} \quad (111)$$

Если энергию сигналов  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$  и  $s_4(t)$  обозначить  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  и  $E_4$  соответственно, то величины  $E_2$ ,  $E_3$  и  $E_4$  можно выразить через величину  $E_1$ , используя (110). В результате получим

$$E_2 = E_1; \quad E_3 = E_4 = 9E_1. \quad (112)$$

Если энергию сигналов  $s'_1(t)$ ,  $s'_2(t)$ ,  $s'_3(t)$  и  $s'_4(t)$  аналогично обозначить  $E'_1$ ,  $E'_2$ ,  $E'_3$  и  $E'_4$  и использовать (111) и (110), будем иметь

$$E'_1 = E'_2 = E_1; \quad E'_3 = E'_4 = 9E_1. \quad (113)$$

Поскольку усеченные импульсы  $g_3(t - nT)$  в (107) имеют длительность, равную  $6T$ , но при этом следуют через интервал  $T$ , то импульсы пересекаются друг с другом на протяжении нескольких символьных интервалов, что показано в разд. 4.6.1.4, рис. 26, д, е, ж, з.

Пересечение импульсов  $g_3(t - nT)$  для разных значений  $n$  делает принципиально невозможным реализацию структурной схемы демодулятора на основе активных фильтров.

#### **4.8.2. Схема демодулятора для сигналов на основе импульсов $g_3(t - nT)$ . Прохождение сигнала $z(t)$ через СФ1**

Если в структурной схеме демодулятора [7, рис. 30] активные фильтры заменить на фильтры СФ1 и СФ2, согласованные соответственно с сигналами  $s_1(t)$  из (110) и  $s'_1(t)$  из (111), т. е. с сигналами

$$s_1(t) = h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t; \quad (114)$$

$$s'_1(t) = -h \cdot g_3(t) \sin \omega_c t, \quad (115)$$

то в результате этой замены получим структурную схему когерентного демодулятора для сигнала КАМ-16 (рис. 37).

Данный демодулятор обеспечит оптимальный прием информационных символов  $I_n$  и  $Q_n$ , поступающих на вход этого демодулятора в составе сигнала (107) в условиях действия флуктуационной помехи.

Рассмотрим прохождение сигнала  $z(t)$ , определяемого равенством (107), через СФ1 (рис. 37). Сигнал на выходе СФ1 обозначим  $y(t)$ . Этот сигнал определяется *сверткой* импульсной характеристики  $h_1(t)$  согласованного фильтра СФ1 с входным сигналом  $z(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \cdot z(t - \tau) d\tau. \quad (116)$$



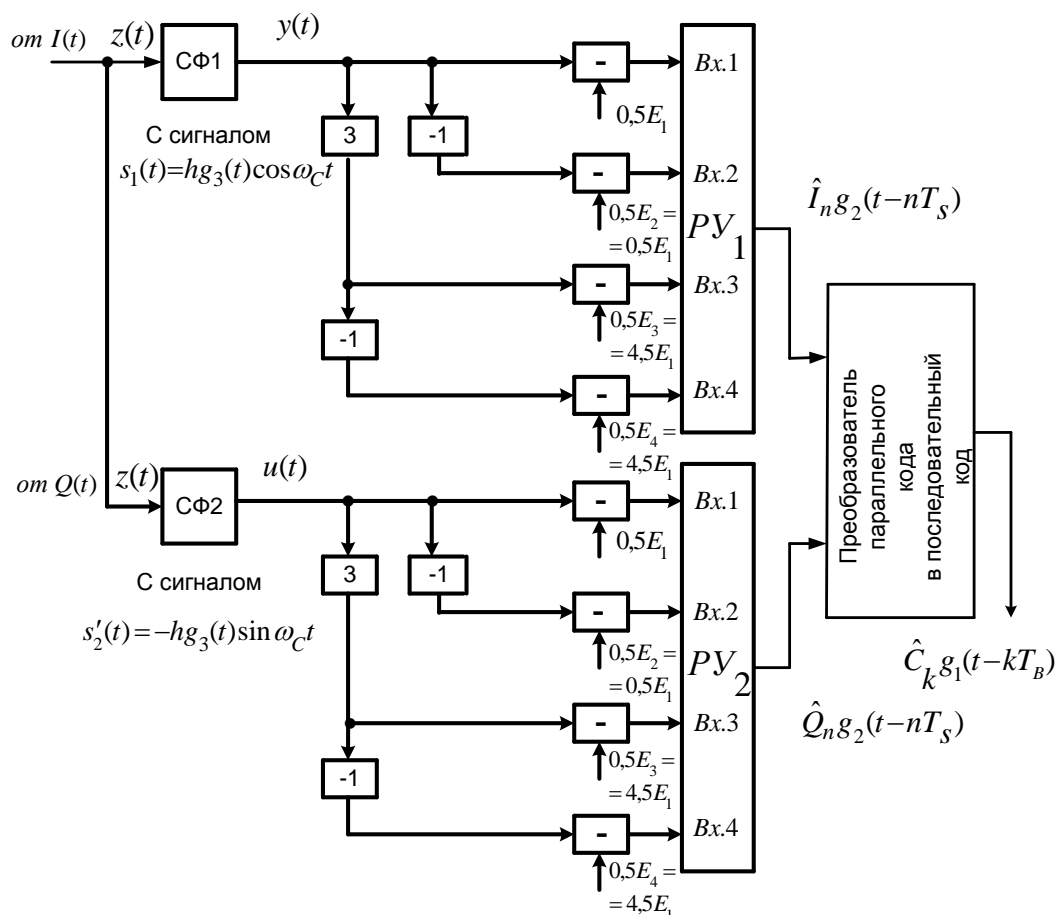


Рис. 37. Структурная схема когерентного демодулятора для сигнала КАМ-16

Напомним! В структурной схеме демодулятора (рис. 37) для сигналов от входа модулятора до входа преобразователя тактовые интервалы названы символьными интервалами и обозначены через  $T_s$ , а сигналы с выхода преобразователя, тактовые интервалы, называются бинарными интервалами и обозначаются через  $T_B$ . При работе демодулятора при правильном (безошибочном) приеме сигнал на выходе ПУ1 будет иметь форму сигнала на верхнем выходе блока ФМС, а сигнал на выходе ПУ2 будет иметь форму сигнала на нижнем выходе блока ФМС. Сигнал на выходе преобразователя будет иметь форму сигнала на входе блока ФМС.

Определим импульсную характеристику  $h_1(t)$ . Отмечалось, что согласованный фильтр СФ1 согласован с сигналом  $s_1(t) = h \cdot g_3(t) \cos \omega_c t$ . Используя в разд. 4.8.1 формулу (65), можем написать

$$s_1(t) = h \cdot x_{1H}(t - 3T) \cdot \cos \omega_c t. \quad (117)$$

Длительность сигнала  $s_1(t)$  определяется длительностью импульса  $x_{1H}(t - 3T)$ , входящего сомножителем в правую часть (117). Поскольку усеченный импульс  $x_{1H}(t - 3T)$  имеет длительность  $6T$ , то и сигнал  $s_1(t)$  будет иметь такую же длительность, равную  $6T$ .

Как известно [1, 2], импульсная характеристика  $h_1(t)$  фильтра, согласованного с сигналом  $s_1(t)$  длительностью  $6T$ , может быть определена по формуле

$$h_1(t) = s_1(6T - t). \quad (118)$$

Изменяя знак перед аргументом  $t$  в левой и правой частях равенства (117), можем написать

$$s_1(-t) = h \cdot x_{1H}(-t - 3T) \cdot \cos \omega_c(-t). \quad (119)$$

С учетом (119) выражение (118) примет вид

$$h_1(t) = s_1(6T - t) = h \cdot x_{1H}(6T - t - 3T) \cdot \cos \omega_c(6T - t) \Rightarrow .$$

Так как  $\cos(6T - t)$  четная функция, можно написать

$$h_1(t) = h \cdot x_{1H}(3T - t) \cdot \cos \omega_c(t - 6T). \quad (120)$$

Напомним, что частота  $\omega_c$  в выражении (120) выбирается из условия, чтобы на интервале длительностью  $T$  укладывалось целое число периодов  $T_C = \frac{2\pi}{\omega_c}$  гармонических колебаний  $\cos \omega_c t$  или  $\sin \omega_c t$ , т. е.

$$T = m \cdot T_C = m \cdot \frac{2\pi}{\omega_c},$$

где  $m$  – произвольное целое число. При выполнении этого условия имеет место равенство

$$\cos \omega_c(t - p \cdot T) = \cos \omega_c t, \quad (121)$$

где  $p$  – произвольное целое число.

Действительно,

$$\begin{aligned} \cos \omega_c(t - p \cdot T) &= \cos \omega_c \left( t - p \cdot m \cdot \frac{2\pi}{\omega_c} \right) = \cos \left( \omega_c t - \omega_c \cdot p \cdot m \cdot \frac{2\pi}{\omega_c} \right) = \\ &= \cos(\omega_c t - p \cdot m \cdot 2\pi) = \cos \omega_c t, \end{aligned}$$

так как произведение  $p \cdot m$  – целое число, а  $\cos \omega_c t$  – периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Указанный выбор частоты  $\omega_c$ , как отмечалось в [7], обеспечивает также ортогональность сигналов  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$  на интервале длительностью  $T$ .

С учетом (121) выражение (120) принимает вид

$$h_1(t) = h \cdot x_{1H}(3T - t) \cdot \cos \omega_c t. \quad (122)$$

В соответствии с (116) и (122) сигнал  $y(t)$  на выходе СФ1 примет вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot x_{1H}(3T - \tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot z(t - \tau) d\tau. \quad (123)$$

Сигнал  $z(t)$  на входе СФ1 согласно (107) можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) + z_3(t), \quad (124)$$

где 
$$z_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_3(t - nT) \cos \omega_c t; \quad (125)$$

$$z_2(t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n g_3(t - nT) \sin \omega_c t; \quad (126)$$

$$z_3(t) = n(t). \quad (127)$$

#### 4.8.3. Определение составляющих $y_1(t)$ , $y_2(t)$ и $y_3(t)$ выходного сигнала $y(t)$ на выходе СФ1

Согласованный фильтр (СФ1) является линейным четырехполюсником. Свойство линейности позволяет рассматривать раздельное прохождение составляющих  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  и  $z_3(t)$  входного сигнала  $z(t)$  через СФ1. Составляющие  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  и  $z_3(t)$  входного сигнала  $z(t)$  создадут на выходе СФ1 сигналы  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  соответственно. Выходной сигнал  $y(t)$ , как отклик СФ1 на входной сигнал  $z(t)$ , будет равен сумме

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t). \quad (128)$$

Сигнал  $u(t)$  на выходе СФ2 (рис. 37) определяется аналогично сигналу  $y(t)$  (128) на выходе СФ1.

В правую часть (123) вместо входного сигнала  $z(t - \tau)$  подставим его первую составляющую  $z_1(t - \tau)$  и в результате этой замены найдем первую составляющую  $y_1(t)$  выходного сигнала  $y(t)$ :

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot x_{1H}(3T - \tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot z_1(t - \tau) d\tau. \quad (129)$$

В (129) у функции  $z_1(t - \tau)$  аргументом является переменная интегрирования  $\tau$ , а величина  $t$  является параметром. Обозначим аргумент  $t$  в (125) и (64) буквой  $\tau$ , тогда запишем

$$z_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n g_3(\tau - nT) \cos \omega_c \tau], \quad (130)$$

где согласно (64)

$$g_3(\tau - nT) = x_{1H}[\tau - (n + 3)T]. \quad (131)$$

Подставляя (131) в (130), будем иметь

$$z_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n \cdot x_{1H}[\tau - (n+3)T] \cos \omega_c \tau]. \quad (132)$$

Изменив знак перед аргументом  $\tau$  в левой и правой частях в (132), получим

$$z_1(-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n \cdot x_{1H}[-\tau - (n+3)T] \cos \omega_c(-\tau)]. \quad (133)$$

С учетом (133) функция  $z_1(t - \tau)$  в (129) примет вид

$$z_1(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot x_{1H}[t - \tau - (n+3)T] \cdot \cos \omega_c(t - \tau). \quad (134)$$

После подстановки (134) в (129) будем иметь

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h x_{1H}(3T - \tau) \cos \omega_c \tau \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n x_{1H}[t - \tau - (n+3)T] \cos \omega_c(t - \tau)] d\tau. \quad (135)$$

В состав подынтегральной функции входит произведение  $\cos \omega_c \tau \cdot \cos \omega_c(t - \tau)$ , которое можно представить в виде суммы

$$\frac{1}{2} \cos \omega_c(2\tau - t) + \frac{1}{2} \cos \omega_c t.$$

В результате из (135) получим сумму из двух интегралов. В состав подынтегральной функции первого интеграла войдет множитель  $\frac{1}{2} \cos \omega_c(2\tau - t)$ , и благодаря этому множителю первый интеграл обратится в нуль, если этот интеграл преобразовать по формуле Парсеваля. В состав подынтегральной функции второго интеграла войдет множитель  $+\frac{1}{2} \cos \omega_c t$ , не зависящий от переменной интегрирования  $\tau$ , поэтому его можно вынести за знак интеграла. Тогда выражение (135) примет вид

$$y_1(t) = \frac{h}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot \cos \omega_c t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_{1H}[(3T - \tau)] \cdot x_{1H}[t - \tau - (n+3)T] d\tau. \quad (136)$$

Используя в разд. 4.6.1.3 формулу (63)  $x_{1H}(t) = \frac{\sqrt{T}}{1,27} \cdot x_1(t)$ , равенство (136) можно представить в форме

$$y_1(t) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos \omega_c t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1[(3T - \tau)] \cdot x_1[t - \tau - (n+3)T] d\tau. \quad (137)$$

Интеграл в составе выражения (137) равен временной автокорреляционной функции  $B_{x1}[t - (n + 6)T]$  ненормированного импульса  $x_1(\tau)$ , смещенной вправо на  $(n + 6)T$ , т. е. можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(3T - \tau) \cdot x_1[t - \tau - (n + 3)T] d\tau = B_{x1}[t - (n + 6)T].$$

Аргумент  $[t - (n + 6)T]$  корреляционной функции определяется как разность аргументов сомножителей в подынтегральной функции:

$$[t - \tau - (n + 3)T] - (3T - \tau) = [t - (n + 6)T].$$

В соответствии с формулой (50) в разд. 4.6.1.3 можно написать

$$B_{x1}[t - (n + 6)T] = x[t - (n + 6)T]. \quad (138)$$

Форма автокорреляционной функции  $B_{x1}(t)$  определяется формой импульса Найквиста  $x(t)$  согласно выражению (138).

Поскольку  $B_{x1}(t)$  является автокорреляционной функцией импульса  $x_1(t)$ , длительность которого равна  $6T$ , то функция  $B_{x1}(t)$  будет иметь длительность  $12T$ .\*

Таким образом, длительность автокорреляционной функции  $B_{x1}[t - (n + 6)T]$  равна  $12T$ , а форма этой функции совпадает с формой импульса Найквиста  $x[t - (n + 6)T]$  также длительностью  $12T$ .

Выражение (137) можно представить в виде

$$y_1(t) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot x[t - (n + 6)T] \cdot \cos \omega_c(t). \quad (139)$$

В (139) длительность сигнала, соответствующего каждому слагаемому в сумме, определяется длительностью импульса  $x[t - (n + 6)T]$ , т. е. равна  $12T$ . Причем информационные символы  $I_n$  независимые и принимают значения  $3h$ ,  $h$ ,  $-h$  и  $-3h$ .

Чтобы прояснить смысл полученного выражения (139), выделим из суммы слагаемые, соответствующие значениям  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

при  $n = 0$

$$y_{1,0} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0 \cdot x(t - 6T) \cos \omega_c t;$$

---

\*Как известно, любой сигнал конечной длительности имеет автокорреляционную функцию, длительность которой в 2 раза превышает длительность самого сигнала.

при  $n = 1$

$$y_{1,1} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_1 \cdot x(t - 7T) \cos \omega_c t;$$

при  $n = 2$

$$y_{1,2} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_2 \cdot x(t - 8T) \cos \omega_c t.$$

Каждому из этих слагаемых соответствует сигнал длительностью  $12T$ .

Пусть для определенности значения передаваемых информационных символов равны  $I_0 = h$ ;  $I_1 = h$  и  $I_2 = -h$ .

На рис. 38, а, б, в приведены графики выделенных сигналов.\*

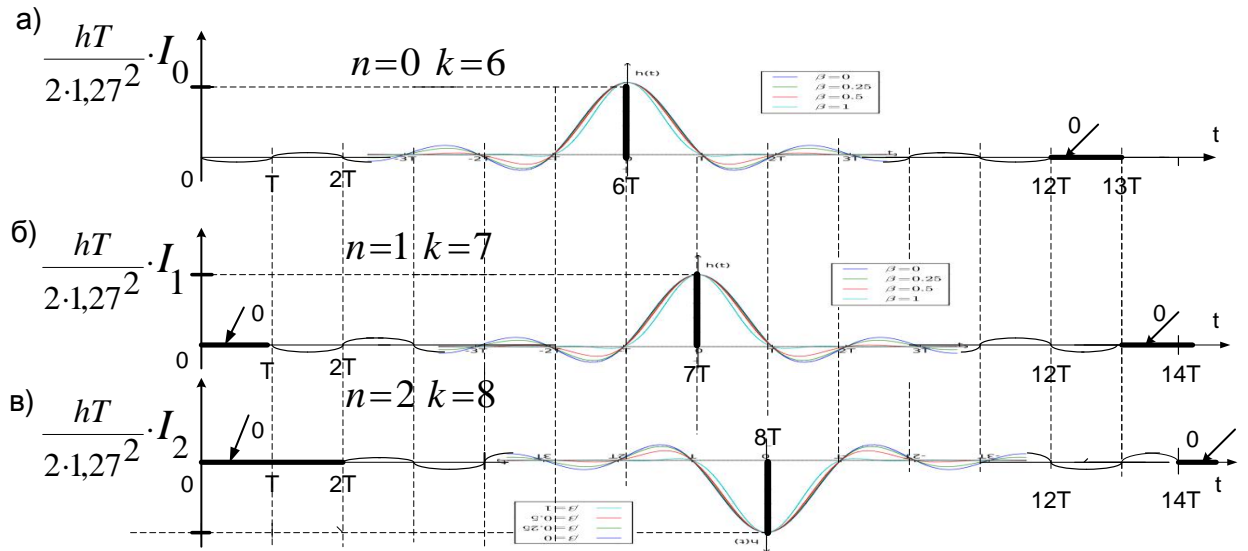


Рис. 38. Графики выделенных сигналов

На графиках видно, что главные экстремумы сигналов пропорциональны указанным значениям символов  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$ . Следовательно, по величинам отсчетов главных экстремумов можно определить значения информационных символов  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$ .

Далее, повторяя процедуру вывода формулы (139), определим  $y_2(t)$  – отклик СФ1 на сигнал  $z_2(t)$ , задаваемый (126):

$$y_2(t) = \frac{-hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot x[t - (n + 6)T] \cdot \sin \omega_c(t). \quad (140)$$

Информационные символы  $Q_n$  также независимы и принимают значения  $3h$ ,  $h$ ,  $-h$  и  $-3h$  с вероятностью 0,25 каждое.

\*Чтобы избежать излишнего усложнения, графики построены без учета множителя  $\cos \omega_c t$ .

Аналогично определяется  $y_3(t)$  – отклик СФ1 на сигнал помехи  $z_3(t) = n(t)$ .

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h x_{1H}(3T - \tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot n(t - \tau) d\tau. \quad (141)$$

Решающее устройство (РУ1) демодулятора срабатывает только в моменты времени, кратные  $T$ , т. е. при значениях времени  $t = kT$ , где  $k$  – целое число. Поэтому значение сигнала  $y(t)$  на выходе СФ1, определяемого (128), необходимо знать только для этих моментов времени (рис. 38).

Из (128) получим

$$y(kT) = y_1(kT) + y_2(kT) + y_3(kT). \quad (142)$$

Имея в виду (139), (140) и (141), получим:

$$y_1(kT) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot x[(k - n - 6)T] \cdot \cos(\omega_c kT); \quad (143)$$

$$y_2(kT) = \frac{-hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \cdot x[(k - n - 6)T] \cdot \sin(\omega_c kT); \quad (144)$$

$$y_3(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} h x_{1H}(3T - \tau) \cdot \cos \omega_c \tau \cdot n(kT - \tau) d\tau. \quad (145)$$

Определим значения  $\cos(\omega_c kT)$  и  $\sin(\omega_c kT)$  в (143) и (144). Как уже отмечалось, что частота  $\omega_c$  выбирается из условия, чтобы на интервале длительностью  $T$  укладывалось целое число  $m$  периодов длительностью  $T_C = \frac{1}{f_C} = \frac{2\pi}{\omega_c}$ , откуда  $\omega_c = \frac{2\pi}{T_C}$ , т. е.  $T = m \cdot T_C = m \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$ , где  $m$  – произвольное целое число. Таким образом, можно написать

$$\cos(\omega_c kT) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_C} kT\right) = \cos\left(2\pi k \frac{T}{T_C}\right) = \cos(2\pi \cdot k \cdot m) = 1,$$

так как  $k \cdot m$  – целое число, а  $\cos(\omega_c t)$  – периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Аналогично получим  $\sin(\omega_c kT) = 0$ .

Таким образом, в момент времени  $t = kT$  ( $k$  – произвольное целое число) функции  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$  будут принимать значения, равные 1 и 0 соответственно. Поэтому выражения (143) и (144) примут вид:

$$y_1(kT) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot x[(k - n - 6)T]; \quad (146)$$

$$y_2(kT) = 0. \quad (147)$$

**Внимание!** Сигналы  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , определенные выражениями (139) и (140), формируются на выходе фильтра СФ1.

Сигнал  $y_1(t)$  переносит информационные символы  $I_n$ , а сигнал  $y_2(t)$  – символы  $Q_n$ . Но сигнал  $y_2(t)$  в момент времени  $t = kT$ , когда берутся отсчеты сигнала  $y(t)$  на выходе СФ1, принимает нулевые значения согласно (147) и поэтому не оказывает влияния на отсчеты сигнала  $y_1(t)$ . Это свойство отсчетов в моменты времени  $t = kT$  является следствием использования квадратурной модуляции.

Видно, что в моменты времени  $t = kT$ , когда берутся отсчеты сигнала  $y(t)$  на выходе СФ1, только одно слагаемое в сумме (146) будет отличаться от нуля. Этому слагаемому соответствует номер  $n = (k - 6)$ .

Действительно, функция  $x[(k - n - 6)T]$  при значении  $n = (k - 6)$  будет равна  $x[(k - (k - 6) - 6)T] = x(0) = 1$  согласно свойству импульса Найквиста  $x(t)$  (разд. 4.6.1.2, рис. 19, а).

Для других значений  $n$ , например для значений  $n = (k - 6) \pm 1$ , получим функцию  $x[(k - (k - 6 \pm 1) - 6)T] = x(\mp T) = 0$ . Графики рис. 19, а разд. 4.6.1.2 подтверждают сделанные выводы.

Таким образом, сумма в (146), содержащая бесконечное число слагаемых, при взятии отсчетов в момент  $kT$  фактически сводится к одному слагаемому с номером  $n = (k - 6)$ , т. е. равенство (146) можно представить в виде

$$y_1(kT) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6}. \quad (148)$$

Из (148), в частности, следует:

при  $k = 6$

$$y_1(6T) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{6-6} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0;$$

при  $k = 7$

$$y_1(7T) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{7-6} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_1; \quad (149)$$

при  $k = 8$

$$y_1(8T) = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{8-6} = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_2 \quad \text{и т. д.}$$

Из равенств (149) видно, что по величинам отсчетов составляющей  $y_1(t)$  в момент времени  $t = 6T, 7T, 8T, \dots$  можно определить соответствующие численные значения информационных символов  $I_0, I_1, I_2, \dots$ , т. е.  $I_0$  – через  $y_1(6T)$ ,  $I_1$  – через  $y_1(7T)$ ,  $I_2$  – через  $y_1(8T)$  и т. д.



Равенство (128) определяет три составляющие сигнала  $y(t)$  на выходе СФ1. Составляющие  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  рассмотрены раньше.

Теперь рассмотрим третью составляющую  $y_3(t)$  как результат прохождения флуктуационной помехи  $n(t)$  через СФ1. Сигнал  $y_3(t)$  определяется равенством (141), а величина отсчета этого сигнала в момент времени  $t = kT$ , т. е.  $y_3(kT)$ , определяется равенством (145).

Отсюда следует, что величина  $y_3(kT)$  является случайной величиной, так как в состав подынтегральной функции (145) входит случайный процесс  $n(kT - \tau)$ .

#### 4.8.4. Вероятностные характеристики случайной величины $\xi$

Обозначим случайную величину  $y_3(kT)$  буквой  $\xi$ . Переменную интегрирования  $\tau$  в (145) обозначим буквой  $t$  и, воспользовавшись свойством четности функции  $x_{1H}(t)$ , можем написать

$$\xi = y_3(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot x_{1H}(t - 3T) \cdot \cos \omega_c t \cdot n(kT - t) dt. \quad (150)$$

Определим вероятностные характеристики случайной величины  $\xi$ .

Из (150) следует, что  $\xi$  является гауссовской, центрированной случайной величиной, так как в состав интеграла (150) входит гауссовский, центрированный, стационарный случайный процесс  $n(kT - t)$  – флуктуационная помеха типа белого шума с заданной спектральной плотностью мощности  $N_0$ .

Так как  $\xi$  – гауссовская случайная величина, то ее одномерная плотность вероятности  $w(\xi)$  полностью определяется двумя параметрами – математическим ожиданием  $\bar{\xi}$  и дисперсией  $D\{\xi\}$ . В результате центрированности процесса  $n(kT - t)$  величина  $\xi$  также будет центрированной случайной величиной, т. е.  $\bar{\xi} = 0$  и плотность вероятности

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D\{\xi\}}} \cdot \exp \left[ -\frac{\xi^2}{2D\{\xi\}} \right]. \quad (151)$$

Определим дисперсию  $D\{\xi\}$ . Так как  $\bar{\xi} = 0$ , то  $D\{\xi\}$  будет равна математическому ожиданию величины  $\xi^2$ , т. е.

$$D\{\xi\} = \bar{\xi}^2. \quad (152)$$

Используя (150), равенство (152) принимает вид

$$D\{\xi\} = \overline{\left( \int h \cdot x_{1H}(t-3T) \cdot \cos \omega_c t \cdot n(kT-t) \right)^2}.$$

Правая часть полученного выражения сводится к двукратному интегралу

$$D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^2 x_{1H}[t_1-3T] x_{1H}[t_2-3T] \cos \omega_c t_1 \times \\ \times \overline{\cos \omega_c t_2 n(kT-t_1) \cdot n(kT-t_2)} dt_1 dt_2. \quad (153)$$

В (153) символ математического ожидания внесен под знак интегралов и проведен только над случайными сомножителями. Известно, что математическое ожидание  $\overline{n(kT-t_1) \cdot n(kT-t_2)}$  является корреляционной функцией стационарного случайного процесса  $n(kT-t)$ , сформированного на основе стационарного процесса  $n(t)$  типа белого шума. Поэтому корреляционная функция зависит от разности аргументов сомножителей  $n(kT-t_1)$  и  $n(kT-t_2)$ , т. е. от разности  $(kT-t_2) - (kT-t_1) = t_1 - t_2$ .

Учитывая свойство четности корреляционной функции стационарного процесса, можно написать

$$\overline{n(kT-t_1) \cdot n(kT-t_2)} = B_n(t_1-t_2) = B_n(t_2-t_1), \quad (154)$$

где  $B_n(t_2-t_1)$  – корреляционная функция случайного процесса  $n(t)$ . Корреляционная функция флуктуационной помехи типа белого шума [2, с. 64; 10, с. 120, 121] определяется формулой

$$B_n(t_2-t_1) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2-t_1), \quad (155)$$

где  $N_0$  – односторонняя спектральная плотность мощности флуктуационной помехи  $n(t)$ ;  $\delta(t_2-t_1)$  – дельта-функция.

Используя (154) и (155) равенство (153) можно представить в виде двукратного интеграла:

$$D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^2 x_{1H}[t_1-3T] \cdot x_{1H}[t_2-3T] \cos \omega_c t_1 \cdot \cos \omega_c t_2 \cdot \frac{N_0}{2} \delta(t_2-t_1) dt_1 dt_2. \quad (156)$$

Применяя «фильтрующее свойство  $\delta$ -функции», произведем интегрирование в (156) по переменной  $t_2$ . В результате получим однократный интеграл по переменной  $t_1$  и в этом интеграле сделаем замену переменной интегрирования  $t_1$ , обозначив ее буквой  $t$ , тогда окончательно получим

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2 x_{1H}^2[t-3T] \cdot \cos^2 \omega_c t \cdot dt. \quad (157)$$

Равенство  $\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_c(t)$  позволяет полученный интеграл представить в виде суммы двух интегралов:

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{1H}^2[t-3T] dt + \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{1H}^2[t-3T] \cdot \cos 2\omega_c t dt.$$

Используя формулу Парсеваля, нетрудно показать, что второй интеграл равен нулю, и дисперсия будет определяться только первым интегралом

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{1H}^2[t-3T] dt. \quad (158)$$

Применяя равенства (63), (49) и (50) из разд. 4.6.1.3, выражение для дисперсии принимает вид

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{1H}^2[t-3T] dt = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} \cdot B_{x1}(0) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} \cdot x(0),$$

где  $x(0)$  – значение импульса Найквиста  $x(t)$  при значении  $t=0$ . Согласно (42) и рис. 19, а из разд. 4.6.1.2 имеем  $x(0)=1$  и с учетом этого равенства получим

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2}. \quad (159)$$

Определим энергию  $E_1$  сигнала  $s_1(t)$ , используя (65) и (110):

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} h^2 x_{1H}^2(t-3T) \cdot \cos^2 \omega_c t \cdot dt. \quad (160)$$

Сравнивая (160) и (157), запишем

$$D\{\xi\} = \frac{N_0}{2} \cdot E_1. \quad (161)$$

Далее из сравнения (159) и (161) следует выражение для энергии сигнала  $s_1(t)$

$$E_1 = \frac{h^2 \cdot T}{2 \cdot 1,27^2}. \quad (162)$$

С учетом (142), (148), (147) и (150) значения сигнала  $y(t)$  на выходе СФ1 в момент времени  $t = kT$  будут следующими:

$$\begin{aligned} y(kT) &= y_1(kT) + y_2(kT) + y_3(kT) = \\ &= \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} + 0 + \xi = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} + \xi. \end{aligned} \quad (163).$$

#### 4.8.5. Вероятность ошибок на выходах РУ1 и РУ2

В соответствии со схемой демодулятора (рис. 37) и напряжением  $y(kT)$  на выходе СФ1 в момент времени  $t = kT$  можно определить напряжения на входах РУ1 в моменты времени  $t = kT$ :

$$\begin{aligned} u_{\text{BX1}}(kT) &= y(kT) - 0,5E_1 = \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} + \xi - 0,5E_1; \\ u_{\text{BX2}}(kT) &= -y(kT) - 0,5E_2 = -\frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} - \xi - 0,5E_2; \\ u_{\text{BX3}}(kT) &= 3 \cdot y(kT) - 0,5E_3 = 3 \cdot \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} + 3\xi - 0,5E_3; \\ u_{\text{BX4}}(kT) &= -3 \cdot y(kT) - 0,5E_4 = -3 \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_{k-6} - 3\xi - 0,5E_4, \end{aligned} \quad (164)$$

где  $E_1$  определяется формулой (162), а  $E_2$ ,  $E_3$  и  $E_4$  – равенствами (112).

Пусть отсчет на выходе СФ1 осуществляется в момент времени  $t = kT = 6T$  (т. е.  $k = 6$  на рис. 38). Тогда символ  $I_{k-6}$  будет обозначен  $I_{6-6} = I_0$ , равенства (164) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{BX1}}(6T) &= \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0 + \xi - 0,5E_1; \\ u_{\text{BX2}}(6T) &= -\frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0 - \xi - 0,5E_2; \\ u_{\text{BX3}}(6T) &= 3 \cdot \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0 + 3\xi - 0,5E_3; \\ u_{\text{BX4}}(6T) &= -3 \frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0 - 3\xi - 0,5E_4. \end{aligned} \quad (165)$$

Величина  $\frac{hT}{2 \cdot 1,27^2} \cdot I_0$  равна величине отсчета главного максимума при значении  $t = 6T$  импульса (рис. 38, а).

Если в составе сигнала  $z(t)$ , определяемого равенством (107), *сигнал помехи*  $n(t)$  будет равен нулю, то согласно (150) величина  $\xi$  также будет равна нулю ( $\xi = 0$ ) и напряжения на входах РУ1 согласно (165) будут следующими:

$$\begin{aligned} u_{\text{BX1}}(6T) &= \frac{hT \cdot I_0}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5E_1; & u_{\text{BX2}}(6T) &= -\frac{hT \cdot I_0}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5E_2; \\ u_{\text{BX3}}(6T) &= 3 \frac{hT \cdot I_0}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5E_3; & u_{\text{BX4}}(6T) &= -3 \cdot \frac{hTI_0}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5E_4. \end{aligned} \quad (166)$$

Используя равенства (166) легко проверить, что если символ  $I_0$  принимает одно из возможных значений:  $h$ ,  $-h$ ,  $3h$  или  $-3h$ , то максимальное напряжение в момент времени  $t = 6T$  будет сформировано соответственно, на первом, втором, третьем или четвертом входах РУ1.

**Обратить внимание!** Значение информационного символа  $I_0 = 3h$ , тогда с учетом (112) и (162) равенства (166) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{BX1}}(6T) &= \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2} = 2,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2}; \\ u_{\text{BX2}}(6T) &= -\frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2} = -3,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2}; \\ u_{\text{BX3}}(6T) &= 3 \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5 \cdot 9 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2} = 4,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2}; \\ u_{\text{BX4}}(6T) &= -3 \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - 0,5 \cdot 9 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2} = -13,5 \frac{h^2T}{2 \cdot 1,27^2}. \end{aligned} \quad (167)$$

Тогда из формул (167) следует, что *максимальное* напряжение будет на третьем входе РУ1, а РУ1 *примет решение* в пользу значения переданного информационного символа  $I_0$ , равного  $3h$ , т. е. решение будет верным.

Таким образом, при *отсутствии помехи* ( $\xi = 0$ ) демодулятор, используя формулы (167), будет принимать *только правильные* решения о значении принимаемого символа  $\hat{I}_0$ .

Если же на входе СФ1 *помеха*  $n(t) \neq 0$ , то и на выходе СФ1 помеха также  $\xi \neq 0$ . При этом РУ1 будет принимать решение не на основе (167), а на основе (165). В этом случае РУ1 может принимать *не только правильные, но и ошибочные* решения. Физической причиной ошибочных решений является присутствие случайной величины  $\xi$  в формулах (165).

Определим вероятности *правильного* и *ошибочного* решений, принимаемых РУ1. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что значение принимаемого информационного символа  $\hat{I}_0 = h$ . В этом случае выражения (165) примут вид

$$\begin{aligned} u_{\text{BX1}}(6T) &= \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1; & u_{\text{BX2}}(6T) &= -\frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} - \xi - 0,5E_2; \\ u_{\text{BX3}}(6T) &= 3 \cdot \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3; & u_{\text{BX4}}(6T) &= -3 \cdot \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} - 3\xi - 0,5E_4. \end{aligned} \quad (168)$$

При *правильном* приеме, когда  $\hat{I}_0 = h$ , наибольшее входное напряжение в момент времени  $t = 6T$  будет сформировано на первом входе РУ1. Поэтому будут выполняться три неравенства

$$\begin{aligned} \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1 &> -\frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} - \xi - 0,5E_2; \\ \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1 &> 3 \cdot \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3; \\ \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1 &> -3 \cdot \frac{hTh}{2 \cdot 1,27^2} - 3\xi - 0,5E_4. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований и с учетом (112) эти неравенства примут вид:

$$2\xi > -2 \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2}; \quad -2\xi > 2 \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} - 4E_1; \quad 4\xi > -4 \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} - 4E_1.$$

Окончательно получим, учитывая (162)

$$\xi > -E_1; \quad \xi < E_1; \quad \xi > -2E_1. \quad (169)$$

При *правильном* приеме должны одновременно выполняться три неравенства (169). Для более наглядного представления этих неравенств на рис. 39 штриховкой обозначены области на оси  $\xi$ , на которых выполняются соответствующие неравенства из (169).

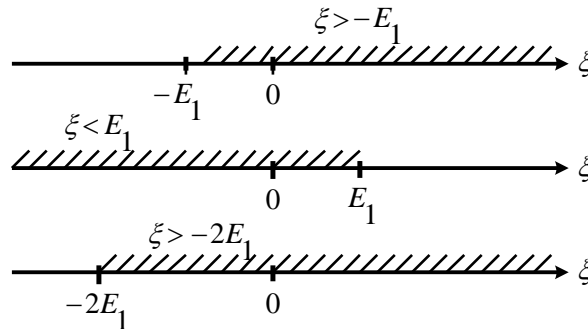


Рис. 39. Области выполнения неравенств (169) в интервале  $-E_1 \leq \xi \leq E_1$  при правильном приеме

Одновременно все три неравенства будут выполняться только на интервале

$$-E_1 \leq \xi \leq E_1. \quad (170)$$

Вероятность *правильного* приема символа  $I_0$  при значении  $I_0 = h$  согласно (170) будет равна

$$P_{I_0=h}(\text{п.п.}) = P\{-E_1 \leq \xi \leq E_1\} = \int_{-E_1}^{E_1} w(\xi) d\xi, \quad (171)$$

где плотность вероятности  $w(\xi)$  случайной величины  $\xi$  определяется выражением (151) и изображена на рис. 40.

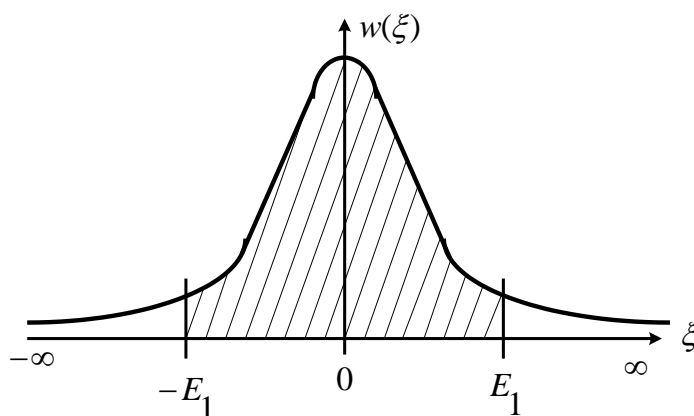


Рис. 40. График плотности вероятности  $w(\xi)$

Вероятность *правильного* приема  $P_{I_0=h}(\text{п.п.})$  равна величине заштрихованной площади согласно (171) на рис. 40.

Вероятность *ошибочного* приема  $P_{I_0=h}(\text{ош})$  равна разности

$$P_{I_0=h}(\text{ош}) = 1 - P_{I_0=h}(\text{п.п.}) = 1 - \int_{-E_1}^{E_1} w(\xi) d\xi. \quad (172)$$

Численно величина  $P_{I_0=h}(\text{ош})$  равна сумме площадей двух незаштрихованных участков под кривой  $w(\xi)$ , уходящих в области  $-\infty$  и  $\infty$  соответственно.

Так как площади незаштрихованных участков на рис. 40 одинаковы, то общая площадь этих участков равна удвоенной площади одного участка, например в пределах от  $E_1$  до  $\infty$ . Поэтому можно написать

$$P_{I_0=h}(\text{ош}) = 2 \int_{E_1}^{\infty} w(\xi) d\xi. \quad (173)$$

Используя (151), получим из (173)

$$P_{I_0=h}(\text{ош}) = 2 \int_{E_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D(\xi)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D(\xi)}\right) d\xi. \quad (174)$$

Вводя новую переменную интегрирования  $\eta$  по формуле  $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{D(\xi)}}$ , будем иметь  $d\xi = \sqrt{D(\xi)} d\eta$ . При  $\xi = E_1$  получим  $\eta = \frac{E_1}{\sqrt{D(\xi)}}$ . Если  $\xi = \infty$ , то  $\eta = \infty$ .

В результате (174) запишется в виде

$$P_{I_0=h}(\text{ош}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1/\sqrt{D(\xi)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta. \quad (175)$$

Используя табулированную функцию (см. приложение), равную

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta,$$

из равенства (175) получим

$$P_{I_0=h}(\text{ош}) = 2Q\left(\frac{E_1}{\sqrt{D(\xi)}}\right), \quad (176)$$

где  $E_1$  и  $D(\xi)$  определяются выражениями (162) и (161).

2. Теперь предположим, что значение передаваемого информационного символа  $I_0 = 3h$ , тогда выражения (165) запишем так:

$$\begin{aligned} u_{\text{вх1}}(6T) &= \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1; & u_{\text{вх2}}(6T) &= -\frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - \xi - 0,5E_2; \\ u_{\text{вх3}}(6T) &= 3 \cdot \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3; & u_{\text{вх4}}(6T) &= -3 \cdot \frac{hT \cdot 3h}{2 \cdot 1,27^2} - 3\xi - 0,5E_4. \end{aligned} \quad (177)$$

В данном случае, когда  $I_0 = 3h$  при *правильном* приеме наибольшее входное напряжение в момент времени  $t = 6T$  будет сформировано на третьем входе РУ1 и поэтому будут выполняться три неравенства:

$$\begin{aligned} 9 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3 &> 3 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} + \xi - 0,5E_1; \\ 9 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3 &> -3 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} - \xi - 0,5E_2; \end{aligned}$$



$$9 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} + 3\xi - 0,5E_3 > -9 \cdot \frac{h^2 T}{2 \cdot 1,27^2} - 3\xi - 0,5E_4.$$

После элементарных преобразований, учитывая (112) и (162), получим эквивалентную систему неравенств:

$$\xi > -E_1; \quad \xi > -2E_1; \quad \xi > -3E_1. \quad (178)$$

При правильном приеме должны одновременно выполняться три неравенства (178). Одновременно эти три неравенства (178) будут выполняться только на интервале

$$-E_1 \leq \xi \leq \infty. \quad (179)$$

Вероятность *правильного* приема символа  $I_0$  при значении  $I_0 = 3h$ , имея в виду (179), будет равна

$$P_{I_0=3h}(\text{п.п.}) = P\{-E_1 \leq \xi \leq \infty\} = \int_{-E_1}^{\infty} w(\xi) d\xi. \quad (180)$$

Вероятность *правильного* приема  $P_{I_0=3h}(\text{п.п.})$  в соответствии с (180) будет равна величине *заштрихованной* площади на рис. 41.

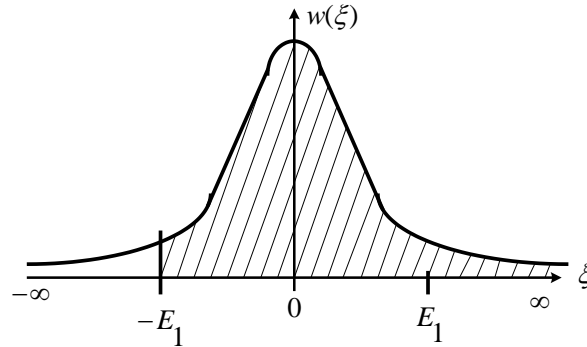


Рис. 41. К определению  $P_{I_0=3h}(\text{п.п.})$   
при значении  $I_0 = 3h$

Вероятность *ошибочного* приема символа  $I_0$ , когда его передаваемое значение равно  $3h$  (рис. 41) будет равна площади *незаштрихованного* участка под кривой  $w(\xi)$  от  $-\infty$  до  $-E_1$ . Сравнивая площади незаштрихованных участков на рис. 41 и 40, можно заметить, что вероятность ошибки при значении  $I_0 = 3h$  *ровно* в два раза меньше вероятности ошибки при  $I_0 = h$ , т. е.

$$P_{I_0=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} P_{I_0=h}(\text{ош}) = Q\left(\frac{E_1}{\sqrt{D(\xi)}}\right). \quad (181)$$

Вероятности ошибок в работе РУ1 при  $I_0 = -h, -3h$ , а также вероятности ошибок в работе РУ2 при  $Q_0 = h, -h, 3h$  и  $-3h$  рассчитываются по формулам в табл. 3, 4.

Вероятности ошибок в работе РУ1 и РУ2 при различных значениях передаваемых информационных символов  $I_n$  и  $Q_n$  представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Передаваемая величина ИС $I_n$	Вероятность ошибки в работе РУ1
$I_n = h$	$p_{I_n=h}(\text{ош}) = \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}} \right) \right] = 2Q \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$I_n = -h$	$p_{I_n=-h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош})$
$I_n = 3h$	$p_{I_n=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{I_n=h}(\text{ош}) = Q \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$I_n = -3h$	$p_{I_n=-3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{I_n=h}(\text{ош})$

Таблица 4

Передаваемая величина ИС $Q_n$	Вероятность ошибки в работе РУ2
$Q_n = h$	$p_{Q_n=h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош}) = 2Q \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$Q_n = -h$	$p_{Q_n=-h}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош})$
$Q_n = 3h$	$p_{Q_n=3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{Q_n=h}(\text{ош}) = Q \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}$
$Q_n = -3h$	$p_{Q_n=-3h}(\text{ош}) = \frac{1}{2} p_{Q_n=h}(\text{ош})$

**Примечание.** При использовании формул в разд. 4.8.5, табл. 3 и 4 величину параметра  $E_1$  необходимо определять по формуле (162).

Решения, принимаемые РУ1 и РУ2 о значениях передаваемых символов  $I_n$  и  $Q_n$  в виде соответствующих сигналов, поступают на входы преобразователя параллельного кода в последовательный код.

Вероятность ошибки на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код определяется по методике, изложенной в разд. 4.8.6.

#### 4.8.6. Вероятность ошибки на выходе преобразователя параллельного кода в последовательный код

Ошибки на выходе этого преобразователя происходят в трех случаях:

- 1) когда значение передаваемого символа  $I_n$  определено ошибочно (будем считать, что произошло случайное событие А);
- 2) когда значение передаваемого символа  $Q_n$  определено ошибочно (будем считать, что произошло случайное событие В);
- 3) когда значения обоих передаваемых символов  $I_n$  и  $Q_n$  определены ошибочно.

Напомним известные в теории вероятности определения.

Суммой двух случайных событий А и В называется такое третье событие  $C = A + B$ , которое состоит в наступлении или события А, или события В, или в наступлении обоих событий А и В. Для обозначения суммы применяется запись  $C = A + B$ . При этом вероятность суммы определяется по формуле

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \quad (182)$$

где через  $(A \cdot B)$  обозначено *произведение* событий А и В, которое состоит в осуществлении и события А и события В. Вероятность произведения  $(A \cdot B)$  определяется по формуле

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B), \quad (183)$$

где  $P(B / A)$  и  $P(A / B)$  – условные вероятности.

Если события А и В независимы, то  $P(B / A) = P(B)$ , а  $P(A / B) = P(A)$ , при этом (183) примет вид

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \quad (184)$$

а (182) примет вид

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \quad (185)$$

Нетрудно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя, поскольку ошибки на выходах РУ1 и РУ2 происходят независимо.

Пусть, например, на  $n$ -м интервале передаются значения ИС  $I_n = h$  и  $Q_n = h$ , тогда, используя (185), можно определить вероятность ошибки на выходе преобразователя:

$$p_{\substack{I_n=h \\ Q_n=h}}(\text{ош}) = p_{I_n=h}(\text{ош}) + p_{Q_n=h}(\text{ош}) - p_{I_n=h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=h}(\text{ош}). \quad (186)$$

В правую часть (186) входят вероятности ошибки на выходах РУ1 и РУ2, значения которых указаны в табл. 3 и 4.

Для четырех из шестнадцати точек сигнального созвездия КАМ-16, координаты которых  $I_n$  и  $Q_n$  приведены в табл. 5, вероятности ошибок на выходе преобразователя будут одинаковыми, и их величину можно определить по (186).

Таблица 5

$I_n$	$h$	$h$	$-h$	$-h$
$Q_n$	$h$	$-h$	$h$	$-h$

Таблица 6

$I_n$	$3h$	$3h$	$-3h$	$-3h$
$Q_n$	$3h$	$-3h$	$3h$	$-3h$

Для других четырех точек сигнального созвездия, координаты которых  $I_n$  и  $Q_n$  приведены в табл. 6, вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать по следующей формуле:

$$p_{I_n=3h, Q_n=3h}(\text{ош}) = p_{I_n=3h}(\text{ош}) + p_{Q_n=3h}(\text{ош}) - p_{I_n=3h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=3h}(\text{ош}). \quad (187)$$

Для остальных восьми точек сигнального созвездия, координаты которых  $I_n$  и  $Q_n$  приведены в табл. 7, а, вероятности ошибок на выходе преобразователя также будут одинаковыми, и их величину можно рассчитать так:

$$p_{I_n=3h, Q_n=h}(\text{ош}) = p_{I_n=3h}(\text{ош}) + p_{Q_n=h}(\text{ош}) - p_{I_n=3h}(\text{ош}) \cdot p_{Q_n=h}(\text{ош}). \quad (188)$$

Таблица 7

$I_n$	$3h$	$h$	$-h$	$-3h$	$-h$	$-3h$	$h$	$3h$
$Q_n$	$h$	$3h$	$3h$	$h$	$-3h$	$-h$	$-3h$	$-h$

Учитывая, что всего на сигнальном созвездии КАМ-16 содержится 16 точек, определим среднюю величину вероятности ошибки на выходе преобразователя

$$p_{\text{ср}}(\text{ош}) \left( 4 \cdot p_{I_n=h, Q_n=h}(\text{ош}) + 4 \cdot p_{I_n=3h, Q_n=3h}(\text{ош}) + 8 \cdot p_{I_n=3h, Q_n=h}(\text{ош}) \right) / 16. \quad (189)$$

## 4.9. Декодер

Рассмотрим выполнение задания по разд. 4.9 на примере.

Рекомендуется использовать учебное пособие [6, с. 23–30].

Пусть  $m$  – номер варианта в КР,  $m = 71$ .

1. В соответствии с табл. 2, полученной для этого варианта, в разд. 4.3 выписать из 2-й строки численные значения кодовых символов (КС), которые передавались по каналу связи,  $\bar{u} = 1110110011 \ 01101010$ .

Из табл. 1 исходных данных определить номер тактового интервала  $k$ , на котором произошла ошибка на выходе демодулятора, т. е.  $k = m(\bmod 3) + 1 = 71(\bmod 3) + 1 = 2 + 1 = 3$ . Ошибка произошла на 3-м тактовом интервале, поэтому на вход декодера поступает последовательность  $\bar{Z} = 110^x011001101101010$ . Крестиком отмечен кодовый символ, который был принят ошибочно в последовательности  $\bar{u}$ .

2. Построить решетчатую диаграмму декодера (рис. 42) с учетом полученной последовательности  $\bar{Z}$  [6, с. 24].

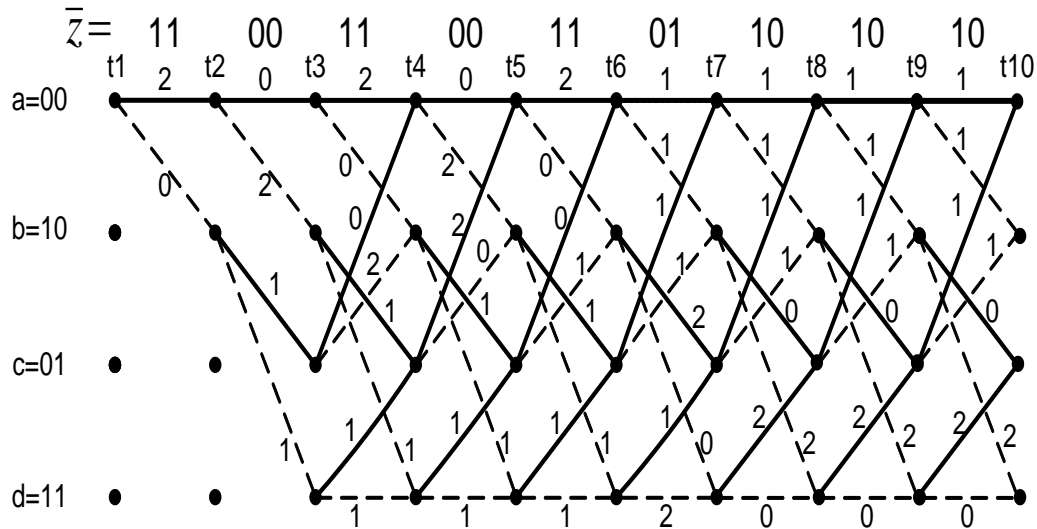


Рис. 42. Решетчатая диаграмма декодера

3. Используя методику [6, с. 25–29], построить диаграммы выживших путей. Определить момент времени  $t_n$ , когда останется только один выживший путь. Этот путь с решетчатой диаграммы декодера перенести на решетчатую диаграмму кодера и по этой диаграмме определить кодовые символы (КС), которые действительно передавались по каналу связи.

В результате этой операции ошибка, полученная на выходе демодулятора, будет исправлена.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. Зюко, А. Г. Теория передачи сигналов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
2. Зюко, А. Г. Теория электрической связи : учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров. – М. : Радио и связь, 1998.
3. Прокис, Дж. Цифровая связь : пер. с англ. / Дж. Прокис ; под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 2000. – 800 с.
4. Галкин, В. А. Цифровая мобильная радиосвязь : учеб. пособие для вузов / В. А. Галкин. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007 – 432 с.
5. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – Изд. Радио и связь, 1977.
6. Куликов, Л. Н. Теория электрической связи. Основы сверточного кодирования : учеб. пособие / Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец. – СПб., 2006.
7. Куликов, Л. Н. Общая теория связи : методические указания к выполнению курсовой работы / Л. Н. Куликов, М. Н. Москалец, М. Н. Чесноков. – СПб., 2012.
8. Григоровский, Л. Ф. Теория электрической связи. Модели сигналов и методы их преобразования в системах связи : учеб. пособие / Л. Ф. Григоровский, В. И. Коржик, В. Г. Красов, В. Ф. Кушнир. – Л. : ЛЭИС. – 1990.
9. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.

### *Дополнительная*

10. Сальников, А. П. Теория электрической связи : конспект лекций / А. П. Сальников. – СПб. : Линк, 2007.
11. Скляр, Бернард. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение : пер. с англ. / Бернард Скляр. – Изд. 2-е, испр. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
12. Биккенин, Р. Р. Теория электрической связи : учеб. пособие / Р. Р. Биккенин, М. Н. Чесноков. – Л. : ЛЭИС. – 2010.
13. Кларк, Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк, мл. Дж. Кейн ; пер. с англ. С. И. Гельфонда ; под ред. Б. С. Цыбакова. – М. : Радио и связь, 1987. – Вып. 28. – 392 с.
14. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. И. Атабеков. – М. : Энергия, 1969. – 424 с.
15. Френкс, Л. Теория сигналов : пер. с англ. / Л. Френкс ; под ред. Д. Е. Вакмана. – М. : Советское радио, 1974. – 344 с.
16. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1964.

# Приложение

## ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \int_X^\infty \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	0,46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	0,42074	41683	41294	40905	40517	401298	39743	39358	38974	38591
0,3	0,38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	335197	34827
0,4	0,34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	0,30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	0,27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	0,24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	0,21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	0,18406	18141	17879	17619	17361	17106	16863	16602	16354	16109
1,0	0,15866	15625	15386	15150	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	0,13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	0,11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	0,09680	09510	09342	09176	09012	08851	08691	08534	08379	08226
1,4	0,08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	0,06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	0,05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	0,04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	0,03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	0,02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330
2,0	0,02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	0,01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	0,01390	01355	01321	01287	01255	01222	01191	01160	01130	01101
2,3	0,01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	0,00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	0,00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00508	00494	00480
2,6	0,00466	00453	00440	00427	00415	00402	00391	00379	00368	00357
2,7	0,00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00264
2,8	0,00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	0,00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

$X$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$
3,0	$135 \cdot 10^{-5}$	3,3	$48 \cdot 10^{-5}$	3,6	$16 \cdot 10^{-5}$	3,9	$48 \cdot 10^{-6}$	4,5	$34 \cdot 10^{-7}$
3,1	$97 \cdot 10^{-5}$	3,4	$34 \cdot 10^{-5}$	3,7	$11 \cdot 10^{-5}$	4,0	$32 \cdot 10^{-6}$	4,8	$8 \cdot 10^{-7}$
3,2	$69 \cdot 10^{-5}$	3,5	$23 \cdot 10^{-5}$	3,8	$72 \cdot 10^{-6}$	4,3	$85 \cdot 10^{-7}$	5,0	$3 \cdot 10^{-7}$

**Куликов Леонард Николаевич  
Москалец Мария Николаевна  
Шумаков Павел Петрович**

## **ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ**

**Учебно-методическое пособие  
по выполнению курсовой работы**

Редактор *И. И. Щенсяк*  
Компьютерная верстка *Н. А. Ефремовой*

План издания 2015 г., п. 86

Подписано к печати 09.02.2016  
Объем 6,5 усл.-печ. л. Тираж 14 экз. Заказ 618  
Редакционно-издательский отдел СПбГУТ  
191186 СПб., наб. р. Мойки, 61  
Отпечатано в СПбГУТ