3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

Задача 1

Сигнал S(t) представляет собой импульс заданной формы. Вычислить энергию и норму такого сигнала.

а) прямоугольная $S_1(t)=U_1$, $0 \le t \le \tau_и$;

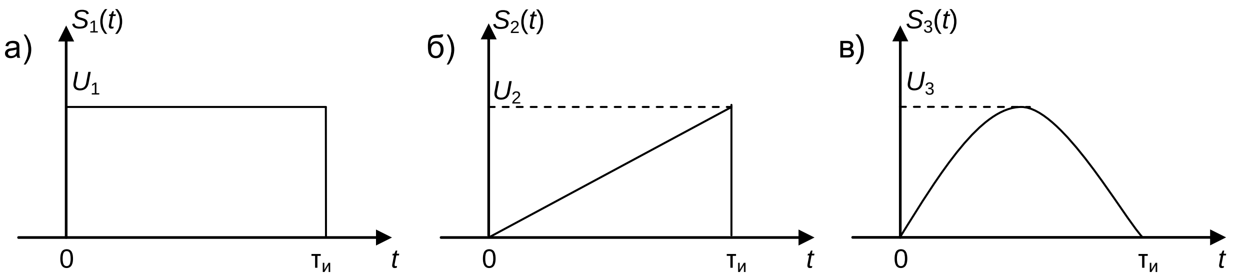
б) треугольная $S_2(t)=U_2 \cdot t/\tau_и$, $0 \le t \le \tau_и$;

в) синусоидальная $S_3(t)=U_3 \cdot \sin(\pi t/\tau_и)$, $0 \le t \le \tau_и$.

г) приподнятый косинус $S_4(t)=(U_4/2)\cdot[1-\cos(2\pi t/\tau_и)]$, $0 \le t \le \tau_и$;

д) треугольная №2 $S_5(t)=U_5 \cdot (1-t/\tau_и)$, $0 \le t \le \tau_и$;

е) треугольная №3 $$S_6t) = \begin{cases} 2U_6 \cdot t/\tau_и & 0 \le t \le \tau_и/2; \\ 2U_6 \cdot [1-t/\tau_и], & \tau_и/2 \le t \le \tau_и \end{cases}$$



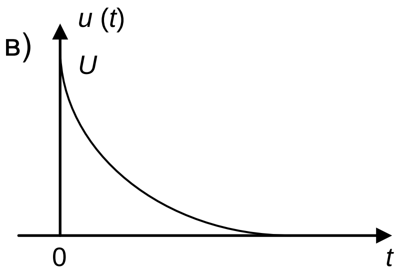
№ варианта	Сигналы	U_i (В)	$\tau_и$ (мс)
0	$S_1(t)$, $S_2(t)$ и $S_3(t)$	10	2

Задача 2

Определить метрику сигналов из задачи 1.

№ варианта	Сигналы	U_i (В)	$\tau_и$ (с)
0	$S_1(t)$ и $S_2(t)$: $S_1(t)$ и $S_3(t)$	10	2

Задача 3



Определить энергию и норму экспоненциального видеоимпульса $u(t) = U \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)$ (В).

№ варианта	U (В)	α ($с^{-1}$)
0	50	10^5

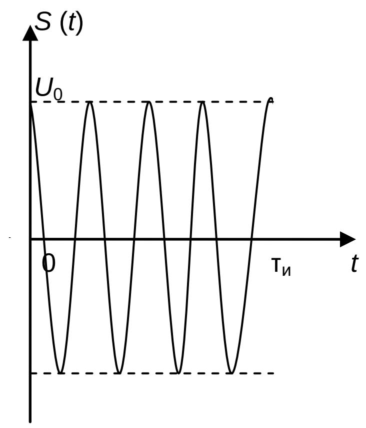
Задача 4

По результатам задачи 2 найти амплитуду U_1 прямоугольного импульса $S_1(t)$, при которой было бы минимальным расстояние между ним и импульсами другой формы.

Найти расстояние для каждого случая.

№ варианта	Сигналы	U_i (В)	$\tau_и$ (с)
0	$S_1(t)$ и $S_2(t)$: $S_1(t)$ и $S_3(t)$	10	2

Задача 5

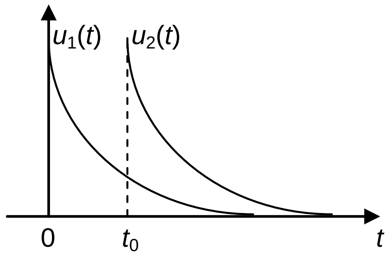


Вычислить энергию радиоимпульса с огибающей прямоугольной формы. Импульс существует на интервале времени $(0, \tau_и)$ описывается выражением $S(t) = U_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

№ варианта	U_0 (В)	ω_0 ($с^{-1}$)	φ_0	$\tau_и$ (с)
0	50	$2\pi\cdot10^5$	$\pi/2$	10^{-4}

Задача 6

Имеются два смещённых во времени экспоненциальных импульса:



$u_1(t) = U_m\exp(-\alpha t)\cdot\sigma(t)$ (В);

$u_2(t) = U_m\exp[-\alpha(t-t_0)]\cdot\sigma(t-t_0)$ (В);

Найти скалярное произведение сигналов и угол между ними.

№ варианта	U_m (В)	α ($с^{-1}$)	t_0 (с)
0	5	10^5	$2\cdot10^{-6}$

Норма сигналов в линейном пространстве является аналогом длины векторов, и обозначается индексом ||s(t)|| – ***норма*** (norm). В математике существуют различные формы норм. При анализе сигналов обычно используются квадратичные нормы:

$$||s(t)|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt} \;.$$

Метрика сигналов. Линейное пространство сигналов L является метрическим, если каждой паре сигналов $s(t) \in L$ и $v(t) \in L$ однозначно сопоставляется неотрицательное число ρ (s(t),v(t)) – *метрика* (metric) или расстояние между векторами.

Для метрик сигналов в метрическом пространстве любой размерности должны выполняться аксиомы:

ρ (s(t),v(t)) = ρ (v(t),s(t)) – рефлексивность метрики.

ρ (s(t),s(t)) = 0 для любых s(t) ∈ L.

ρ (s(t),v(t)) ≤ ρ (s(t),a) + ρ (a,v(t)) для любых a ∈ L.

Метрика определяется нормой разности двух сигналов:

ρ (s(t),v(t)) = || s(t) – v(t) ||.

По метрике сигналов можно судить, например, о том, насколько точно один сигнал может быть аппроксимирован другим сигналом, или насколько изменяется выходной сигнал относительно входного при прохождении через какое-либо устройство.

Скалярное произведение сигналов

Понятие скалярного произведения элементов x(t) и y(t) линейного пространства позволяет определять угол между двумя векторами (сигналами).

Определение скалярного произведения вещественных сигналов x и y в пространстве L^2:

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \;.$$

Косинус угла между сигналами x и y:

$$\cos\psi = \frac{(x, y)}{\|x\| \times \|y\|} \;.$$

При этом справедливо фундаментальное неравенство Коши –Буняковского

$$|(x, y)| \le \|x\| \times \|y\| \;.$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = 1/2 \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \ne -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$