Vprašanja in odgovori: Združeno

Patrik Žnidaršič

Verzija iz dne 11. december 2021

Kazalo

1 Analiza **3**
1.1 Števila . . . 4
1.1.1 Naravna števila . . . 4
1.1.2 Racionalna števila . . . 4
1.1.3 Realna števila . . . 5
1.1.4 Kompleksna števila . . . 7
1.2 Množice in preslikave . . . 7
1.3 Številska zaporedja . . . 8
1.4 Številske vrste . . . 9

2 Logika in množice **12**
2.1 Množice in preslikave . . . 13
2.1.1 Osnovno o množicah . . . 13
2.1.2 Konstrukcije množic . . . 13
2.1.3 Preslikave . . . 13
2.1.4 Uporabne preslikave . . . 14
2.1.5 Izomorfizem . . . 14
2.2 Logika in simbolni zapis . . . 14
2.2.1 Logične formule . . . 15
2.2.2 Definicije in dokazi . . . 15
2.2.3 Boolova algebra . . . 16
2.3 Množice . . . 16
2.4 Relacije . . . 18
2.4.1 Ekvivalenčne relacije . . . 19

3 Algebra **21**
3.1 Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ . . . 22
3.1.1 Koordinatni sistem in vektorji v prostoru . . . 22
3.1.2 Skalarni produkt . . . 22
3.1.3 Vektorski produkt . . . 23
3.1.4 Mešani produkt . . . 23
3.2 Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$ . . . 24
3.2.1 Enačbe ravnin . . . 24
3.2.2 Razdalja do ravnine . . . 25
3.2.3 Enačbe premic . . . 25
3.2.4 Razdalja do premice . . . 26
3.3 Grupe . . . 26

3.3.1 Podgrupe 28
3.3.2 Homomorfizem grup 28
3.4 Kolobarji 29
3.5 Vektorski prostori 30
3.5.1 Linearne preslikave 31
3.6 Končnorazsežni vektorski prostor 31

4 Proseminar A **32**
4.1 Mestni zapis števil 33
4.2 Zaporedja 33
4.3 Razstavljanje izrazov 33
4.4 Kompleksna števila 34
4.5 Vektorji 34

Poglavje 1

Analiza

1.1 Števila

1.1.1 Naravna števila

Kako označimo naslednjika naravnega števila n?

$$n^+$$

Kaj so Peanovi aksiomi?

So aksiomi, ki definirajo množico $\mathbb{N}$ skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n priredi naslednjika n^+ $(n, n^+ \in \mathbb{N})$:

- Za vsaka $n, m \in \mathbb{N}$ in $m^+ = n^+$ velja $m = n$
- Obstaja število $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednjik od nobenega naravnega števila
- **Aksiom popolne indukcije**: Če $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ in če je za vsak $n \in A$ tudi $n^+ \in A$, potem je $A = \mathbb{N}$.

Kdaj je množica *dobro urejena*? Povej primer takšne množice. Povej primer množice, ki ni dobro urejena.

Kadar ima vsaka neprazna podmnožica najmanjši element. Dobro urejena je npr. $\mathbb{N}$, ne pa $\mathbb{Z}$.

1.1.2 Racionalna števila

Kdaj ulomka $\frac{m}{n}$ in $\frac{k}{l}$ predstavljata isto število?

Kadar je $ml = nk$.

Kaj so ulomki?

Množica $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Kaj je racionalno število?

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na ekvivalenčne razrede:

$$(m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow ml = nk \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}, \forall n, l \in \mathbb{N}$$

Racionalno število je ekvivalenčni razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \{(k, l), ml = nk\}$$

Kateri trije aksiomi veljajo za grupe? Kateri dodatni velja za Abelove grupe?

Za grupe veljajo naslednji aksiomi: (prikazani simboli za množico A in dvočlen operator $+ : A \times A \to A$)

1. Asociativnost: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in A$
2. Obstoj enote: obstaja $0 \in A$, tako da za vsak $a \in A$ velja $0 + a = a + 0 = a$

3. Obstoj inverznega elementa: za vsak $a \in A$ obstaja inverzni element $-a \in A$, tako da velja $a + (-1) = (-a) + a = 0$

Za *Abelove* (oz. *komutativne*) grupe velja tudi aksiom komutativnosti:

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in A$$

Povej primer Abelove grupe.

Abelova grupa: $(\mathbb{Q}, +)$ ali $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot)$

Kako označimo enoto in inverzni element a za seštevanje in množenje?

Za seštevanje: 0, $-a$
Za množenje: 1, a^{-1}

Povej pravilo krajšanja za seštevanje v grupi A z operacijo $+ : A \times A \to A$

Naj bodo $a, x, y \in A$. Če velja $a + x = a + y$, potem je $x = y$.

Kaj je *komutativen obseg*? Kako ga še drugače imenujemo? Povej primer.

To je množica A z operacijama $+, \cdot$, kjer je $(A, +)$ Abelova grupa za seštevanje, $(A \backslash \{0\}, \cdot)$ Abelova grupa za množenje, veljata pa še dva aksioma:

1. $1 \neq 0$ (enota za seštevanje ni enaka enoti za množenje)
2. Aksiom distributivnosti: Za vse $a, b, c \in A$ velja $a(b + c) = ab + ac$.

Komutativen obseg imenujemo tudi *polje*. Primer je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

Kaj je *urejen obseg*?

To je obseg, ki ima urejenost, ki ustreza naslednjima aksiomoma:

1. Za vsako število $a \in A, a \neq 0$ velja, da je natanko eno od števil $a, -a$ pozitivno.
2. Za vsaki pozitivni števili $a, b \in A$ sta $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni.

Kako je definirana urejenost v urejenem obsegu?

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ je pozitivno} \quad a, b \in A$$

1.1.3 Realna števila

Kaj je Dedekinov rez? Definiraj množico realnih števil. Kako jo označimo?

To je vsaka podmnožica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero velja:

1. $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$
2. za vsak $p \in A$ in za vsak $q \in \mathbb{Q}, q < p$, je tudi $q \in A$
3. za vsak $p \in A$ obstaja $q \in A$, da je $q > p$

Realna števila so množica vseh rezov. Označimo jo z $\mathbb{R}$.

Kako je definiran nasprotni element reza A?

$-A = \{p \in \mathbb{Q};\ \text{obstaja } r \in \mathbb{Q}, r > 0 : -p - r \notin A\}$.

Kdaj je rez A pozitiven?

Kadar $0^* \subset A \wedge 0^* \neq A$.

Naj bo B urejen obseg. Kdaj je množica $A \subset B$ navzgor omejena? Kako imenujemo najmanjšo od vseh zgornjih mej, če obstaja?

Kadar obstaja $M \in B$, da velja $a \leq M$ za vsak $a \in A$.
Najmanjšo zgornjo mejo imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* množice A; označimo ga s $\sup A$.

Kaj je maksimum množice A?

To je največji element množice A, če obstaja. Označimo ga s $\max A$.

Kako imenujemo najmanjšo od vseh spodnjih mej množice? Kaj je minimum množice?

Natančno spodnjo mejo imenujemo *infimum* in jo označimo $\inf A$ (kjer je A množica).
Minimum množice A je najmanjši element množice, če obstaja. Označimo ga z $\min A$.

Kaj pravi Dedekindov aksiom? Kateri obseg ga izpolnjuje?

Vsaka neprazna množica navzgor omejena podmnožica v A ima natančno zgornjo mejo.
Izpolnjuje ga obseg $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Kakšna je razlika med algebrajskimi in transcendentnimi števili?

Algebrajska števila so rešitve polinomskih enačb s celimi koeficienti.
Transcendentna števila so vsa ostala racionalna števila.

Katere so posledice Dedekindovega aksioma?

1. $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$ ni navzgor omejena.
2. Za vsako realno število a obstaja $m \in \mathbb{Z}, m > a$.
3. (*Arhimedska lastnost*): Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}, na > b$.
4. Naj bo a pozitivno realno število. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}, {}^1\!/_n < a$

Kakšen je zaprti in kakšen odprti interval?

Zaprti: $[a, b]$
Odprti: (a, b)

Kaj je ϵ-okolica točke a? Kaj je okolica točke a?

ϵ-okolica je interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.
Okolica točke a je vsaka taka podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje kakšno ϵ-okolico točke a.

Kaj je absolutna vrednost realnega števila x?

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Kaj je trikotniška neenakost?

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

1.1.4 Kompleksna števila

Kaj je kompleksno število α? Kako označimo množico vseh kompleksnih števil?

To je urejen par realnih števil (a, b). Množico vseh kompleksnih števil označimo z $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Kaj je geometrijski pomen absolutne vrednosti?

$|z|$ je razdalja točke z od koordinatnega izhodišča.

Kako je določen polarni zapis kompleksnega števila?

Z razdaljo od izhodišča ter poltrakom skozi izhodišče, na katerem se število nahaja; ta poltrak je določen s pozitivnim kotom od pozitivnega dela abscisne osi.

Kaj je argument kompleksnega števila z?

To je kot ϕ v polarnem zapisu $z = \cos\phi + i\sin\phi$, kjer je $\phi \in [0, 2\pi)$.

Katera pogoja morata biti izpolnjena, da je $r(x+yi)$ polarni zapis kompleksnega števila?

$r > 0$ in $x^2 + y^2 = 1$.

Povej vse rešitve enačbe $w^n = z$ za $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$.

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}))$$

za $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ in $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.2 Množice in preslikave

Kdaj sta množici A in B ekvipotentni?

Kadar obstaja bijektivna preslikava $A \to B$.

Kdaj je množica števno neskončna in kdaj števna?

Množica je števno neskončna, če je ekvipotentna z $\mathbb{N}$. Množica je števna, če je končna ali števno neskončna.

1.3 Številska zaporedja

Kaj je zaporedje realnih števil?

To je preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Kdaj zaporedje $(a_n)_n$ konvergira proti številu $a \in \mathbb{R}$? Kako v takem primeru označimo a?

Kadar velja, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $M \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq M$ velja $|a_n - a| < \epsilon$. Označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Kdaj je zaporedje konvergentno in kdaj divergentno?

Zaporedje je konvergentno, če konvergira. Če ne kovergira, je divergentno.

Kaj je ϵ-ska okolica števila a? Kaj je okolica števila a?

To je odprt interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Okolica je množica, v kateri je vsaj kakšna ϵ-ska okolica a.

Koliko limit ima lahko konvergentno zaporedje? Katera konvergentna zaporedja so omejena?

Vsako konvergentno zaporedje ima natanko eno limito. Vsak konvergentna zaporedja so omejena.

Kaj je stekališče zaporedja $(a_n)_n$?

To je število $s \in \mathbb{R}$, za katero velja, da v vsaki okolici števila s leži neskončno mnogo členov zaporedja.

Kaj je naraščajoče in kaj monotono zaporedje?

Zaporedje $(a_n)_n$ je naraščajoče, če velja $\forall n \in \mathbb{N}. a_{n+1} \geq a_n$.
Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Definiraj podzaporedje zaporedja $(a_n)_n$.

Naj bo $(n_j)_j$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Zaporedje $(a_{n_j})_j$ imenujemo podzaporedje zaporedja $(a_n)_n$.

Kaj je *rep zaporedja* a_n?

To je vsako zaporedje $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, m \in \mathbb{N}$.

Povej izrek o sendviču.

Naj bodo zaporedja $(a_n), (b_n), (c_n)$ takšna, da velja $a_n < b_n < c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in denimo, da sta (a_n) in (c_n) konvergentni zaporedji z istima limitama. Potem je tudi (b_n) konvergentno zaporedje z enako limito.

Kaj je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$?

1.

Kaj je Cauchyjevo zaporedje?

Naj bo (a_n) zaporedje. Pravimo, da a_n izpolnjuje Cauchyjev pogoj, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{N}$, da za vse $n, m \geq M$ velja $|a_n - a_m| < \epsilon$. Če zaporedje izpolnjuje ta pogoj, je to Cauchyjevo zaporedje.

Kdaj zaporedje konvergira proti neskončnosti?

Kadar za vsak $K \in \mathbb{R}$ obstaja $M \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq M$ velja $a_n > K$.

Kakšni sta drugi imeni za zgornjo in spodnjo limito zaporedja? Kako sta definirani?

Limes superior in limes inferior. To sta supremum in infimum množice vseh stekališč zaporedja.

Ali tudi za kompleksna zaporedja velja, da je konvergentno natanko tedaj, ko izpolnjuje Cauchyjev pogoj?

Da.

1.4 Številske vrste

Kaj je številska vrsta? Kaj je splošni člen številske vrste?

To je neskončna formalna vsota realnega zaporedja (a_n):

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Splošni člen je število a_k.

Kdaj številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira?

Kadar konvergira zaporedje delnih vsot $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Kam konvergira geometrijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$?

Če je $|q| < 1$, konvergira k $\frac{a}{1-q}$. Sicer ne konvergira.

Povej Cauchyjev pogoj za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Kakšna je limita zaporedja (a_n), če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira?

Vrsta konvergira natanko tedaj, kadar za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ in za vse $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

.

V takem primeru je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kaj je harmonična vrsta?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Povej primerjalni kriterij za številski vrsti z nenegativnimi členi. Kako imenujemo taki vrsti?

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ številski vrsti z nenegativnimi členi. Denimo, da velja $a_n \leq b_n$ za vse člene.
Če je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tudi konvergentna.
Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.
Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rečemo *majoreta* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kdaj konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?

Kadar je $p > 1$.

Kaj je kvocientni kriterij?

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- Če obstaja $q \in \mathbb{R}, q < 1$, da velja $d_n \leq q$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Če velja $d_n \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta divergira.

Kaj je Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Sestavimo zaporedje $c_n = \sqrt[n]{a_n}$.

- Če obstaja tak $q < 1$, da so $c_n \leq q$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta konvergira.
- Če $c_n \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta divergira.

Kaj je Raabejev kriterij?

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje $r_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

- Če obstaja $r > 1$, da velja $r_n \geq r$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta konvergira.
- Če velja $r_n \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta divergira.

Kdaj je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna?

Kadar je konvergentna $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Povej Leibnizov kriterij za alternirajoče vrste.

Naj bo a_n padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ kovergira. Velja ocena

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{m} (-1)^n a_n \right| \leq a_{m+1}$$

Kaj je preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

To je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\Pi(n)}$, kjer je $\Pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna preslikava.

Kaj je Cauchyjev produkt številskih vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

To je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kjer je $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$.

Poglavje 2

Logika in množice

2.1 Množice in preslikave

2.1.1 Osnovno o množicah

Kaj je *ekstenzionalnost množic*?

To je pravilo, ki trdi, da sta množici enaki, če imata iste elemente; oz. če je vsak element prve množice tudi element druge množice, in obratno.

Kako zapišemo prazno množico in standardni enojec?

Prazna množica: $\{\}$ ali $\emptyset$
Standardni enojec: $1 = \{()\}$

Kaj je *enojec*?

Množica A je enojec, kadar velja:

- obstaja $x \in A$
- če $x \in A$ in $y \in A$, potem $x = y$

2.1.2 Konstrukcije množic

Kaj sta zmnožek in vsota množic? Kako se drugače imenujeta?

Zmnožek ali *kartezični produkt* množic A in B je nova množica $A \times B$, katere elementi so urejeni pari $(x, y), x \in A, y \in B$.
Vsota ali *koprodukt* množic A in B je množica $A + B$, katere elementi so $\mathrm{in}_1\, x$ za $x \in A$ ter $\mathrm{in}_2\, y$ za $y \in B$.

Kaj je projekcija $\mathrm{pr}_i\, u$ in kaj injekcija $\mathrm{in}_i\, x$?

$\mathrm{pr}_i\, u$ označuje i-to komponento urejenega para u.
$\mathrm{in}_i\, x$ je simbol, s katerim ločimo elemente različnih množic pri seštevanju.

2.1.3 Preslikave

Katere tri komponente ima preslikava?

Domeno, kodomeno in prirejanje.
Prirejanje mora biti: (za preslikavo $f : A \to B$)

- *Celovito*: Za vsak $x \in A$ obstaja $y \in B$, ki mu je prirejen.
- *Enolično*: Če sta elementu $x \in A$ prirejena elementa y in $z \in B$, potem $y = z$.

Kaj je eksponent množic A in B?

To je množica B^A, katere elementi so preslikave z domeno A in kodomeno B.

Koliko je preslikav $A \to \emptyset$ in koliko preslikav $\emptyset \to A$?

Preslikava $\emptyset \to A$ je ena sama.
Preslikav $A \to \emptyset, A \neq \emptyset$ ni.

2.1.4 Uporabne preslikave

Kaj je identiteta?

Je preslikava $\mathrm{id}_A : A \to A$ za poljubno množico A; $\mathrm{id}_A : x \mapsto x$.

Kaj je kompozitum preslikav? Povej dve njegovi računski lastnosti.

Kompozitum preslikav $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \to C$, ki $x \mapsto g(f(x))$.
Kompozitum je asociativen in ima nevtralen element - identiteto.

Kaj je *evalvacija*? Kako jo še imenujemo?

Evalvacija, *aplikacija* ali *uporaba* je preslikava, ki sprejme preslikavo in argument, ter preslikavo uporabi na argumentu.
$\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$
$\mathrm{ev} : (f, x) \mapsto f(x)$

2.1.5 Izomorfizem

Kdaj je $f : A \to B$ inverz $g : B \to A$? Kako imenujemo preslikavo, ki ima inverz? Kako označimo inverz take preslikave?

Kadar velja $f \circ g = \mathrm{id}_B$ in $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
Preslikavo f z inverzom imenujemo *izomorfizem* in jo označimo z f^{-1}.

Kaj velja za kompozitum dveh izomorfnih preslikav f, g? Kaj velja za njegov inverz?

Tudi kompozitum je izomorfizem. Za njegov inverz velja: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Kdaj sta dve množici A, B izomorfni? Kako to zapišemo?

Množici sta izomorfni, če obstaja izomorfizem iz A v B.
To zapišemo $A \cong B$.

Katere tri lastnosti veljajo za $\cong$?

Refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost.

2.2 Logika in simbolni zapis

Povej primer levo in primer desno asocirane operacije.

Levo asocirana: $+, -, \times, \ldots$
Desno asocirana: $\Rightarrow, \to, \ldots$

Kaj so implicitni argumenti? Povej primer.

To so argumenti operatorja, ki jih pogosto izpustimo; takrat mora bralec iz konteksta izvesti, kaj naj bi te argumenti bili; npr. množici v zapisu projekcije $\mathrm{pr}_1^{A,B}$.

Kakšna je razlika med implicitnimi argumenti in privzeto vrednostjo? Povej primer privzete vrednosti.

Pri privzeti vrednosti smo dogovorjeni, s čim naj nadomestimo izpuščeno vrednost, pri implicitnih argumentih pa so vrednosti vedno drugačne in razvidne iz konteksta. Primer je $\log x = \log_{10} x$.

2.2.1 Logične formule

Kateri dve vrsti logičnih formul poznamo? Kaj je razlika med njima?

- *Izjavni račun*: Zapisujemo izjave z osnovnimi vezniki
- *Predikatni račun*: Za zapisovanje uporabimo tudi predikate, t.j. operatorje $=, \neq, \leq, \ldots, \forall, \exists$.

Kako zapišemo resnico, neresnico, negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo?

- Resnica: $\top$
- Neresnica: $\bot$
- Negacija: $\neg$
- Konjunkcija: $\wedge$
- Disjunkcija: $\vee$

Kako se imenujeta argumenta pri implikaciji? Kako se jih na dolgo bere?

$$\text{Antecedent} \Rightarrow \text{Konsekvent}$$

Antecedent je zadosten pogoj za konsekvent.
Konsekvent je potreben pogoj za antecedent.

Katera kvantifikatorja poznamo?

Univerzalni kvantifikator ($\forall$) in eksistenčni kvantifikator ($\exists$).

2.2.2 Definicije in dokazi

Kako dokažeš enolični obstoj? Kako ga označiš?

Tako da dokažeš, da sta dve vrednosti, pri katerih pogoj drži, nujno enaki. Označimo z $\exists!$.

Kaj je *operator enoličnega opisa*?

To je operator $\iota x \in A.\phi(x)$, s katerim določimo enolično opisan element; pod pogojem, da velja $\exists! x \in A.\phi(x)$.

Kaj je kontekst? Kako vanj uvedemo novo spremenljivko?

Kontekst je skupek vseh trenutno veljavnih simbolov in predpostavk. Vanj uvedemo novo spremenljivko z definicijo ($x := \ldots$) ali prosto („Naj bo $x \in A$“).

Kako se s pravili vpeljave dokaže implikacijo, ekvivalenco, univerzalno izjavo in eksistenčno izjavo?

Za implikacijo predpostavimo levo stran in dokažemo desno. Za ekvivalenco dokažemo obe implikaciji. Za univerzalno izjavo dokažemo $\phi(x)$ za poljuben $x \in A$. Za eksistenčno izjavo podamo nek x, dokažemo $x \in A$ in dokažemo $\phi(x)$.

2.2.3 Boolova algebra

Kako imenujemo spremenljivko z vrednostjo iz $2 = \{\top, \bot\}$? Kakšna je Boolova preslikava? Kaj je tavtologija?

Izjavna spremenljivka.
Boolova preslikava je vsaka preslikava $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n} \mapsto 2$.
Tavtologija je izjava, katere resničnostna vrednost je vedno resnica, ne glede na vrednost spremenljivk.

Kakšna je disjunktna oblika izjave?

$$\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$$

Kjer so

$$c_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$$

in

$$l_j = p_j \text{ ali } \neg p_j$$

Kdaj je nabor logičnih veznikov poln? Povej primer polnega nabora.

Kadar lahko s temi vezniki izrazimo vsako resničnostno tabelo; npr. $\wedge, \vee, \neg$.

2.3 Množice

Definiraj karakteristično preslikavo in potenčno množico.

Karakteristična preslikava je preslikava $A \to 2$.
Potenčna množica $P(A)$ je množica, katere elementi so podmnožice A.

Kakšna je razlika med množicami in razredi? Kako rečemo razredu, ki ne mora biti predstavljen z množico?

Množice so lahko elementi množic ali razredov, razredi pa ne.
Pravi razred.

Kaj je potenčni razred?

To je razred $P(C) = \{D | D \subseteq C\}$, pri čemer so D množice.

Kaj je družina množic?

To je preslikava $A : I \to \mathrm{Set}$, kjer množici I pravimo *indeksna množica*.

Kaj je funkcija izbire za družino $A : I \to$ Set?

To je prirejanje f, ki vsakemu indeksu $i \in I$ priredi element $f(i) \in A_i$.

Definiraj presek in unijo družine množic $A : I \to$ Set. Kdaj je presek pravi razred?

$$\cup A := \{x | \exists i \in I . x \in A_i\}$$

$$\cap A := \{x | \forall i \in I . x \in A_i\}$$

Presek je pravi razred, samo če je I prazen.

Kaj pove aksiom o uniji?

Unija družine množic je množica.

Definiraj produkt in koprodukt družine $A : I \to$ Set

Kartezični produkt družine je množica

$$\prod_{i \in I} := \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i | \forall i \in I . f(i) \in A_i\}$$

Koprodukt je množica

$$\sum_{i \in I} A_i := \{\mathrm{in}_i \, x | i \in I, x \in A_i\}$$

Kaj sta j-ta projekcija in j-ta injekcija?

j-ta projekcija je preslikava $\mathrm{pr}_j : f \mapsto f(j)$
j-ta injekcija je preslikava $\mathrm{in}_j : A_j \to \sum_{i \in I} A_i$

Simbolično zapiši za funkcijo $f : A \to B$ lastnosti injektivnosti, surjektivnosti in bijektivnosti.

Injektivnost:

$$\forall x, y \in A . f(x) = f(y) \implies x = y$$

Surjektivnost:

$$\forall y \in B . \exists x \in A . f(x) = y$$

Bijektivnost:

$$\forall y \in B . \exists ! x \in A . f(x) = y$$

Kaj je monomorfizem in kaj epimorfizem? Čemu sta ta pojma ekvivalentna?

Monomorfizem je preslikava, ki jo smemo krajšati na levi. Epimorfizem je preslikava, ki jo smemo krajšati na desni. Monomorfizem je ekvivalenten injektivnosti, epimorfizem surjektivnosti.

Definiraj retrakcijo in prerez.

Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ taki, da velja $f \circ g = \mathrm{id}_B$ (ne pa nujno v drugo smer), potem pravimo, da je f retrakcija in g prerez.

Kaj je izpeljana množica?

Naj bo $f : A \to B$. Izpeljana množica je

$$\{f(x)|x \in A\} := \{y \in B|\forall x \in A.f(x) = y\}$$

Kaj sta slika in praslika preslikave $f : A \to B$?

Praslika podmnožice $S \subseteq B$ je $f^*(S) := \{x \in A|f(x) \in S\}$
Slika podmnožice $T \subseteq A$ je $f_*(T) := \{f(x)|x \in T\}$

2.4 Relacije

Kaj je n-mestna relacija? Povej dve najbolj dolgočasni relaciji.

To je predikat na $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$. Vedno obstajata prazna in univerzalna relacija.

Kako imenujemo množici v dvomestni relaciji?

Domena in kodomena.

Kaj je diagonala? Kako jo označimo?

To je relacija $\Delta_A \subseteq A \times A, \Delta_A = \{(x, y) \in A \times A|x = y\}$

Kaj je antisimetričnost, irefleksivnost, asimetričnost, sovisnost in stroga sovisnost?

- antisimetričnost: $\forall x, y \in A.xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- irefleksivnost: $\forall x \in A.\neg(xRx)$
- asimetričnost: $\forall x, y \in A.xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
- sovisnost: $\forall x, y \in A.x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
- stroga sovisnost: $\forall x, y \in A.xRy \vee yRx$

Kako so na relacijah definirani unija, presek in komplement?

$$x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$$

$$x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$$

$$x(R^{\complement})y \Leftrightarrow \neg(xRy)$$

Kaj je transpozicija relacije $R \subseteq A \times B$? Ali je transpozicija involucija?

To je relacija $R^T \subseteq B \times A$, $\quad yR^Tx \Leftrightarrow xRy$. Transpozicija je involucija.

Kaj je kompozitum relacij $R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$? Ali je kompozitum asociativen? Ali ima enoto?

To je relacija $S \circ R \subseteq A \times C$.

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B, aRb \wedge bSc\}$$

Je asociativen, ima enoto Δ.

Kaj je n-ta potenca relacije $R \subseteq A \times A$?

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ R-jev}}$$

Kaj je funkcijska relacija? Kaj je graf funkcije f?

To je dvomestna relacija, ki je enolična in celovita.
Graf funkcije f ne relacija $\Gamma_f \subseteq A \times B, \Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B | f(a) = b\}$.

Kaj je tranzitivna ovojnica relacije $R \subseteq A \times A$?

To je relacija $T \subseteq A \times A$, da velja:

- T je tranzitivna
- $R \subseteq T$
- T je najmanjša tranzitivna relacija, ki vsebuje R

2.4.1 Ekvivalenčne relacije

Kdaj je $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija?

Če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Kaj je ekvivalenčna relacija, porojena s preslikavo?

To je relacija $\sim_f \subseteq A \times A$ za funkcijo $f : A \to B$, za katero velja $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija na A. Kaj je ekvivalenčni razred elementa $x \in A$? Kaj je kanonična kvocientna preslikava?

Ekvivalenčni razred je množica $[x]_E := \{y \in A | xEy\}$.
Kanonična kvocientna preslikava je $q_E : A \to A/E, x \mapsto [x]_E$.

Kaj velja za particijo $S \subseteq P(A)$ množice A?

1. $\forall B \in S . B \neq \emptyset$
2. $\forall B, C \in S . B = C \vee B \cap C = \emptyset$
3. $\bigcup S = A$

Kaj je izbor predstavnikov za ekvivalenčno relacijo $E \subseteq A \times A$?

To je množica $C \subseteq A$, ki vsak ekvivalenčni razred seka v natanko enem elementu:

$$\forall \xi \in A/E . \exists! x \in A . x \in \xi \cap C$$

Povej aksiom izbire.

Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

Poglavje 3

Algebra

3.1 Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

3.1.1 Koordinatni sistem in vektorji v prostoru

Kakšen je pozitivno orientiran koordinatni sistem?

Tak, kjer je ordinatna os za 90° pozitivno rotirana od abscisne osi.

Kaj sestavlja koordinatni sistem v prostoru?

Tri medsebojno paroma pravokotne številske premice, ki se sekajo v koordinatnem izhodišču.

Kaj je krajevni vektor točke $T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

To je usmerjena daljica z začetkom v izhodišču in koncem v točki T.

Kaj je vektor?

Vektor $\vec{a} = (x, y, z)$ je množica vseh usmerjenih daljic, ki jih dobimo z vzporednim premikom krajevnega vektorja do točke $T(x, y, z)$.

Kaj je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$?

To je vsak izraz oblike $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Kdaj so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linearno neodvisni? Kdaj sta dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna?

Kadar nobeden izmed vektorjev ni enak kakšni linearni kombinaciji ostalih.
Dva vektorja sta linearno odvisna, kadar velja $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ ali $\vec{b} = \beta\vec{a}$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. To je natanko takrat, ko sta vzporedna.

Kaj je baza prostora $\mathbb{R}^3$? Kaj je *standardna baza*?

Baza prostora je množica treh linearno neodvisnih vektorjev.
Standardna baza so vektorji $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

3.1.2 Skalarni produkt

Kaj je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$?

To je število $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Kaj je *norma* vektorja $\vec{a}$? Kaj predstavlja?

To je število $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Predstavlja dolžino vsake usmerjene daljice, ki predstavlja vektor $\vec{a}$.

Naštej 4 lastnosti skalarnega produkta.

1. Komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Distributivnost: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3. Homogenost: $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. Pozitivna definitnost: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Kako izračunaš kot med dvema vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$? Kaj je kriterij za pravokotnost vektorjev?

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

Kjer je ϕ kot med vektorjema.
Kriterij za pravokotnost: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

3.1.3 Vektorski produkt

Kaj je vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$?

To je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, za katerega velja:

- pravokoten je na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$.
- dolžina je ploščina paralelograma, napetega na krajevna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je pozitivno orientirana.

Kakšen je predpis za vektorski produkt?

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Povej 3 lastnosti vektorskega produkta.

- Antikomutativnost: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- Distributivnost: $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- Homogenost: $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

3.1.4 Mešani produkt

Kaj je mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$? Kakšen je njegov predpis?

To je število $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Kakšna je geometrijska interpretacija mešanega produkta?

Mešani produkt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, pomnožen z orientacijo urejene trojice $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Kako izračunamo prostornino nepravilnega tetraedra, določenega z vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|$$

Povej 2 lastnosti mešanega produkta.

1. Asociativnost v vseh faktorjih: $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}]$.
2. Homogenost: $\alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}]$.

Kaj je Lagrangeva identiteta?

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}$$

3.2 Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$

3.2.1 Enačbe ravnin

Kaj je enačba ravnine?

Enačba ravnine Σ je taka enačba v spremenljivkah x, y, z, da velja:

- Če točka $T(a, b, c)$ leži na Σ, potem a, b, c zadoščajo enačbi.
- Če $T \notin \Sigma$, pa a, b, c ne zadoščajo enačbi.

Kaj je normala ravnine? Koliko normal ima ravnina? Kaj še potrebujemo, da natanko določimo ravnino, poleg normale?

Normala ravnine je poljuben neničelen vektor, ki je pravokoten na ravnino.
Ravnina ima več normal, vse izmed katerih so si vzporedne.
Ravnina je natanko določena z normalo in eno točko na ravnini.

Kakšne splošne oblike je enačba ravnine? Kako iz te oblike preberemo normalo? Ali je enačba ravnine enolična?

Splošna oblika: $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c niso vsi 0.
Normala take ravnine je (a, b, c).
Enačba ravnine ni enolična, saj lahko enačbo pomnožimo z poljubnih neničelnim skalarjem, in še vedno predstavlja isto ravnino.

Kaj je *normalna enačba ravnine*? Kako je z njeno enoličnostjo?

To je poseben primer enačbe ravnine $ax + by + cz + d = 0$, kjer ima normala (a, b, c) dolžino 1. Je enolična do predznaka natančno, lahko jo pomnožimo z -1.

Podaj enačbo ravnine skozi tri nekolinearne točke $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

3.2.2 Razdalja do ravnine

Kaj je razdalja med točko T_1 in ravnino? Navedi njeno formulo z uporabo normale $\vec{n}$, krajevnega vektorja do točke na ravnini $\vec{r}_0$ ter krajevnega vektorja do točke T_1, $\vec{r}_1$.

To je najkrajša razdalja Δ med T_1 in kakšno točko na ravnini.

$$\Delta = \left| \frac{\vec{n}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{\|\vec{n}\|} \right|$$

Navedi formulo za razdaljo točke $T(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine z enačbo $ax + by + cz + d = 0$.

$$\Delta = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Kaj je razdalja med dvema vzporednima ravninama?

To je razdalja med poljubno točko na eni ravnini in drugo ravnino.

Kaj je razdalja med premico in njej vzporedno ravnino?

To je razdalja med poljubno točko na premici in ravnino.

3.2.3 Enačbe premic

Kaj je enačba premice v prostoru?

Sistem dveh linearnih enačb v spremenljivkah x, y, z, da velja: $T(a, b, c)$ leži na premici natanko takrat, ko a, b, c zadostujejo obema enačbama.

Kaj je smerni vektor premice? Kaj še potrebujemo, da premico popolnoma definiramo?

Smerni vektor premice je poljuben neničelni vektor, ki je premici vzporeden. Da enolično določimo premico, potrebujemo še eno točko na premici.

Povej vektorsko enačbo premice ter enačbo premice po komponentah.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}$$

Kjer je $\vec{r}$ poljuben vektor, $\vec{r}_0$ krajevni vektor do točke na premici, λ neko realno število in $\vec{s}$ smerni vektor premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Kjer so x, y, z koordinate do poljubne točke, x_0, y_0, z_0 koordinate točke na premici ter a, b, c komponente smernega vektorja premice.

3.2.4 Razdalja do premice

Povej enačbo za razdaljo točke T_1 s krajevnim vektorjem $\vec{r}_1$ od premice z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}$.

$$\Delta = \frac{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}$$

Čemu je enaka razdalja med dvema vzporednima premicama?

Razdalji med poljubno točko na eni premici in drugo premico.

Povej enačbo za razdaljo med dvema mimobežnima premicama. Kdaj se nevzporedni premici sekata?

$$\Delta = \frac{|[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2]|}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|}$$

Kjer sta $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ krajevna vektorja do dveh točk na premicah (ena točka na premico), $\vec{s}_1$ in $\vec{s}_2$ pa smerna vektorja premic.
Dve nevzporedni premici se sekata, kadar je navedeni mešani produkt 0.

3.3 Grupe

Kaj je binarna notranja operacija na množici A? Kako v splošnem imenujemo njen izhod?

To je preslikava $A \times A \to A, (x, y) \mapsto x \circ y$. $x \circ y$ v splošnem imenujemo *kompozitum*.

Kaj je dvočlena zunanja operacija?

To je preslikava množic A in R s predpisom $R \times A \to A$.

Kako imenujemo množico, na kateri je definirana vsaj ena operacija?

Algebraična struktura.

Kdaj je $a \in A$ obrnljiv?

Kadar obstaja inverz $a^{-1} \in A$, da je $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

Kaj so grupoid, polgrupa in monoid? Za vsakega povej primer.

Grupoid je neprazna množica z binarno operacijo $(A, \circ)$, npr. $(\mathbb{Z}, -)$.
Polgrupa je grupoid, kjer je operacija asociativna, npr. $(\mathbb{N}, +)$.
Monoid je polgrupa z enoto, npr. $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Kaj je inverz kompozituma $a \circ b$ obrnljivih elementov $a, b \in A$ v monoidu $(A, \circ)$?

$$b^{-1} \circ a^{-1}$$

Kaj je grupa? Podaj primer. Kdaj je grupa komutativna?

To je monoid, v katerem je vsak element obrnljiv, npr. $(\mathbb{Z}, +)$. Grupa je komutativna, kadar velja $a \circ b = b \circ a$ za vsaka a, b elementa grupe.

Do katerega n so končne grupe velikosti n komutativne?

Do $n = 5$.

Kaj je permutacija končne množice A? Kako označimo grupo permutacij množice A z n elementi in operacijo $\circ$? Koliko elementov ima?

Permutacija na množici A je bijektivna preslikava $A \to A$. Množico vseh permutacij označimo z $S(A)$, grupo $(S(A), \circ)$ pa z S_n. Imenujemo jo *simetrična grupa* reda n, ima pa $n!$ elementov.

V kakšni obliki običajno pišemo permutacije?

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \Pi(1) & \Pi(2) & \Pi(3) & \dots & \Pi(n) \end{pmatrix}$$

Katere grupe permutacij s kompozitumom so komutativne?

Samo S_2.

Kaj je cikel? Kako ga označimo?

Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ paroma različni. Permutacija $\sigma \in S_n$, definirana s predpisom $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{k-1}) = a_k, \sigma(a_k) = a_1$ in $\sigma(x) = x$ za $x \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash a_1, a_2, \dots, a_k$ se imenuje cikel dolžine k. Označimo ga z $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}$.

Kdaj sta dva cikla disjunktna? Kakšno lastnost imata?

Cikla sta disjunktna, če pripadajoči množici elementov, ki v ciklu niso slike samih sebe, nimata skupnih elementov. Disjunktna cikla vedno komutirata.

Kako se imenuje cikel z dolžino 2?

Transpozicija.

Kako je definiran znak permutacije?

$s(\mathrm{id}) = 1$.
Za cikel σ dolžine k je $s(\sigma) = (-1)^{k+1}$.
Za permutacijo Π, razdeljeno na cikle, je $s(\Pi) = s(\sigma_1)s(\sigma_2)\dots s(\sigma_m)$.

Kakšen je znak produkta permutacije s transpozicijo? Kdaj je permutacija soda in kdaj liha? Kakšen znak ima inverz sode permutacije?

Nasproten znaku permutacije. Permutacija je soda, če jo lahko zapišemo kot produkt sodega števila transpozicij. Permutacija je liha, če jo lahko zapišemo kot produkt lihega števila transpozicij. Inverz sode permutacije ima enak znak kot soda permutacija.

Kaj je *alternirajoča grupa* reda n? Kakšne moči je?

To je grupa

$$A_n = \{\Pi \in S_n | \, \Pi \text{je soda permutacija}\}$$

z močjo $\frac{n!}{2}$.

3.3.1 Podgrupe

Kaj je podgrupa?

Naj bo $(G, \cdot)$ grupa. Neprazna podmnožica $H \subseteq G$ je podgrupa G, kadar velja:

- Zaprtost za množenje: Če sta $a, b \in H$, potem $ab \in H$.
- Zaprtost za invertiranje: Če je $a \in H$, je tudi $a^{-1} \in H$.

Kateri dve podgrupi ima vsaka grupa G moči 2 ali več?

Neprava podgrupa: G.
Trivialna podgrupa: {enota}.

Kdaj je neprazna podmnožica H grupe $(G, \cdot)$ tudi podgrupa G?

Kadar za vsaka $a, b \in H$ tudi $ab^{-1} \in H$.

3.3.2 Homomorfizem grup

Kaj je homomorfizem grup $(G, \circ)$ in $(H, *)$? Povej primer.

To je preslikava $f : G \to H$, za katero za vsaka $a, b \in G$ velja $f(q \circ b) = f(a) * f(b)$; npr. preslikava $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot), f(x) = 2^x$.

Kako homomorfizem grup preslika enoto in inverz?

Enoto preslika v enoto, inverz pa v inverz.

Definiraj izraze: *monomorfizem*, *epimorfizem*, *izomorfizem*, *endomorfizem* in *avtomorfizem*.

Monomorfizem je injektiven homomorfizem.
Epimorfizen je surjektiven homomorfizem.
Izomorfizem je bijektiven homomorfizem.
Endomorfizem je homomorfizem $G \to G$.
Avtomorfizem je bijektivni endomorfizem.

Povej primer notranjega avtomorfizma grupe G.

$$f_a : G \to G$$

$$x \mapsto axa^{-1}$$

Kdaj sta grupi G in H izomorfni? Kako to označimo?

Kadar obstaja izomorfizem $G \to H$. To označimo $G \cong H$.

Kaj je slika in kaj jedro homomorfizma f?

Slika homomorfizma je

$$\mathrm{im} f = \{f(x); x \in G\}$$

Jedro homomorfizma je

$$\ker f = \{x \in G; f(x) = 1\}$$

Kako preveriš injektivnost homomorfizma f?

f je injektiven natanko tedaj, ko je $\ker f = \{1\}$.

3.4 Kolobarji

Definiraj kolobar.

Neprazna množica K z operacijama $+, \cdot$ se imenuje *kolobar*, kadar velja:

- $(K, +)$ je Abelova grupa
- $(K, \cdots)$ je polgrupa
- Veljata distributivnostna zakona: $a(b + c) = ab + ac$ in $(b + c)a = ba + ca$.

Kaj je *kolobar z enoto* in kaj *komutativen kolobar*?

Kolobar z enoto je kolobar z enoto za množenje.
Komutativen kolobar je takšen, kjer je množenje komutativno.

Kaj je *delitelj niča*? Povej primer.

Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar in $a, b \in K$ neničelna elementa, za katera velja $ab = 0$. a je levi delitelj niča, b pa desni delitelj niča.
Primer: $2, 3$ sta delitelja niča v $\mathbb{Z}_6$.

Kaj je *obseg*? Kaj je *polje*? Koliko največ deliteljev niča ima obseg?

Kolobar $(K, +, \cdot)$ je obseg, kadar ima enoto $1 \neq 0$ in za vsak $a \in K \backslash \{0\}$ obstaja $a^{-1} \in K$, da je $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.
Polje je komutativen obseg.
V obsegu ni deliteljev niča.

Kdaj je $\mathbb{Z}_n$ polje?

Kadar je n praštevilo.

Definiraj podkolobar.

$H \subseteq K$ je podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$, kadar je $(H, +)$ podgrupa Abelove grupe $(K, +)$ in je H zaprta za množenje.

Definiraj homomorfizem kolobarjev.

Naj bosta K in L kolobarja. Preslikava $f : K \to L$ je homomorfizem kolobarjev, kadar velja $f(a + b) = f(a) + f(b)$ in $f(ab) = f(a)f(b)$ za vsaka $a, b \in K$.

Definiraj podobseg in podpolje.

Naj bo O obseg. Neprazna podmnožica $O' \subseteq O$ je podobseg obsega O, kadar je podkolobar in za vsak $a \in O' \backslash \{0\}$ velja $a^{-1} \in O'$. Če je O komutativen, govorimo o podpolju.

3.5 Vektorski prostori

Definiraj vektorski prostor nad poljem F.

To je Abelova grupa $(V, +)$ skupaj z zunanjo operacijo $F \times V \to V$, za katero velja:

- distributivnost v skalarju
- distributivnost v vektorju
- homogenost
- $\forall v \in V.1v = v$

Definiraj vektorski podprostor prostora V nad poljem F.

Neprazna podmnožica $W \subseteq V$ je vektorski podprostor prostora V, kadar velja:

- Zaprtost za seštevanje
- Zaprtost za množenje s skalarjem

Kaj je trivialni vektorski podprostor?

$\{0\}$

Kaj je linearna kombinacija?

To je vsak zapis oblike $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorji in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalarji.

Kaj je linearna ogrinjača podmnožice M vektorskega prostora V? Kako jo označimo?

To je najmanjši vektorski podprostor prostora V, ki vsebuje M. Oznaka je $\mathrm{Lin}M$.

Kaj je linearna ogrinjača prazne množice?

$\{0\}$

Kaj je vsota podprostorov $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$? Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da je vsota *direktna*?

To je linearna ogrinjača unije teh podprostorov.
Da je vsota direktna, mora vsak $x \in W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ imeti enoličen zapis $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, kjer je $x_i \in W_i$.

3.5.1 Linearne preslikave

Kaj je linearna preslikava vektorskih prostorov U in V nad poljem F?

To je preslikava $\mathcal{A} : U \to V$, če velja

- aditivnost: $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
- homogenost: $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x)$

Za vsaka $x, y \in U$ ter $\alpha \in F$.

Kako pravimo linearnim preslikavam $\mathcal{A} : U \to F$?

Linearni funkcionali.

Kako označimo množico vseh linearnih preslikav $U \to V$?

$$\mathrm{L}(U, V)$$

Kaj je algebra nad poljem F?

To je množica A, skupaj z operacijami seštevanja, množenja in množenja s skalarjem, kjer velja:

1. A je vektorski prostor nad F
2. A je kolobar
3. $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$ za vse $a, b \in A$ in vse $\alpha \in F$

3.6 Končnorazsežni vektorski prostor

Kaj je ogrodje vektorskega prostora V nad poljem F? Kdaj je vektorski prostor končnorazsežen?

To je množica $M \subseteq V$, če velja $\mathrm{Lin}M = V$.
Vektorski prostor je končnorazsežen, če ima končno ogrodje.

Kdaj so vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linearno neodvisni? Kdaj je neskončna množica vektorjev linearno neodvisna?

Če velja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$.
Neskončna množica je linearno neodvisna, če je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna.

Kaj je baza prostora V?

To je podmnožica $B \subseteq V$, ki je hkrati linearno neodvisna in ogrodje.

Poglavje 4

Proseminar A

4.1 Mestni zapis števil

Kako zapišemo število $n \in \mathbb{N}$ z osnovo c?

Število zaporedoma delimo s c, ostanek pri deljenju pa zapišemo na ustrezno mesto. Ker potence $c, c^2, c^3, \ldots$ naraščajo preko vsake meje, lahko tako zapišemo vsako naravno število.

Kako razširimo mestni zapis na racionalna števila? Kakšna slabost se tako prikaže?

Tako, da primerjamo število tudi z negativnimi eksponenti. Slabost je, da tako dobljen zapis ni enoličen.

4.2 Zaporedja

Kaj je aritmetično zaporedje? Kako izračunamo vsoto prvih n členov takega zaporedja?

To je zaporedje, kjer je razlika med sosednjima členoma konstantna.

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_n)}{2} = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Kaj je geometrijsko zaporedje? Kako izračunamo vsoto prvih n členov takega zaporedja?

To je zaporedje, kjer je kvocient med dvema sosednjima členoma konstanten.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Če pa je $q = 1$:

$$S_n = na_1$$

Kako izračunamo vsoto neskončnega geometrijskega zaporedja?

Če je $|q| < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

4.3 Razstavljanje izrazov

Razstavi $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$, $a^n - b^n$ in $a^n + b^n$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Ali obstaja kakšna omejitev glede izbire n?

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$$

Zadnji razcep velja le za lihe n.

4.4 Kompleksna števila

Kaj je kompleksno število? Kaj je njegovo konjugirano število?

Kompleksno število je urejen par realnih števil, zapišemo ga z $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. Njegovo konjugirano število je $\overline{z} = x - yi$.

Povej enačbo premice v kompleksnih številih.

$$z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha + d = 0$$

Kakšna je *vrtnarska definicija elipse*?

Za dani točki A, B in število c, kjer je c večje od razdalje med A in B, je množica vseh točk T, za katere je vsota oddaljenosti od A in B enaka c, elipsa z goriščema A in B.

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - \alpha| + |z - \beta| = c\}$$

Kakšna je enačba elipse z goriščema na abscisni osi in središčem v izhodišču?

Za elipso $|z + e| + |x - e| = c$;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Kjer je $a = \frac{c}{2}$ in $b = \sqrt{a^2 - e^2}$.

4.5 Vektorji

Povej vektorsko enačbo premice.

$$\vec{v}(x, y) = \vec{v}(x_0, y_0)$$

Kjer je (x, y) poljubna točka, (x_0, y_0) točka na premici, $\vec{v}$ pa normala premice.

Kakšna je *parametrična enačba premice*?

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{e}$$

Kjer je (x, y) poljubna točka, (x_0, y_0) točka na premici, $\vec{e}$ poljuben vektor, vzporeden premici, t pa realno število. Če imamo podano normalo $\vec{v} = (a, b)$, lahko izberemo $\vec{e} = (-b, a)$.