Analiza: Vprašanja in odgovori

Patrik Žnidaršič

Verzija iz dne 12. oktober 2021

Kazalo

1 Števila

1.1 Naravna števila

1.1.1 Kako označimo naslednjika naravnega števila n?

$$n^+$$

1.1.2 Kaj so Peanovi aksiomi?

So aksiomi, ki definirajo množico $\mathbb{N}$ skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n priredi naslednjika n^+ ($n, n^+ \in \mathbb{N}$):

- Za vsaka $n, m \in \mathbb{N}$ in $m^+ = n^+$ velja $m = n$
- Obstaja število $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednjik od nobenega naravnega števila
- **Aksiom popolne indukcije**: Če $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ in če je za vsak $n \in A$ tudi $n^+ \in A$, potem je $A = \mathbb{N}$.

1.1.3 Kdaj je množica *dobro urejena*? Povej primer takšne množice. Povej primer množice, ki ni dobro urejena.

Kadar ima vsaka neprazna podmnožica najmanjši element. Dobro urejena je npr. $\mathbb{N}$, ne pa $\mathbb{Z}$.

1.2 Racionalna števila

1.2.1 Kdaj ulomka $\frac{m}{n}$ in $\frac{k}{l}$ predstavljata isto število?

Kadar je $ml = nk$.

1.2.2 Kaj so ulomki?

Množica $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

1.2.3 Kaj je racionalno število?

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na ekvivalenčne razrede:

$$(m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow ml = nk \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}, \forall n, l \in \mathbb{N}$$

Racionalno število je ekvivalenčni razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \{(k, l), ml = nk\}$$

1.2.4 Kateri trije aksiomi veljajo za grupe? Kateri dodatni velja za Abelove grupe?

Za grupe veljajo naslednji aksiomi: (prikazani simboli za množico A in dvočlen operator $+ : A \times A \to A$)

1. Asociativnost: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in A$
2. Obstoj enote: obstaja $0 \in A$, tako da za vsak $a \in A$ velja $0 + a = a + 0 = a$

3. Obstoj inverznega elementa: za vsak $a \in A$ obstaja inverzni element $-a \in A$, tako da velja $a + (-1) = (-a) + a = 0$

Za *Abelove* (oz. *komutativne*) grupe velja tudi aksiom komutativnosti:

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in A$$

1.2.5 Povej primer Abelove grupe in grupe, ki ni komutativna.

Abelova grupa: $(\mathbb{Q}, +)$ ali $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$
Grupa, ki ni komutativna: $(\mathbb{N}, +)$

1.2.6 Kako označimo enoto in inverzni element a za seštevanje in množenje?

Za seštevanje: 0, $-a$
Za množenje: 1, a^{-1}

1.2.7 Povej pravilo krajšanja za seštevanje v grupi A z operacijo $+ : A \times A \to A$

Naj bodo $a, x, y \in A$. Če velja $a + x = a + y$, potem je $x = y$.

1.2.8 Kaj je *komutativen obseg*? Kako ga še drugače imenujemo? Povej primer.

To je množica A z operacijama $+, \cdot$, kjer je $(A, +)$ Abelova grupa za seštevanje, $(A\backslash\{0\}, \cdot)$ Abelova grupa za množenje, veljata pa še dva aksioma:

1. $1 \neq 0$ (enota za seštevanje ni enaka enoti za množenje)
2. Aksiom distributivnosti: Za vse $a, b, c \in A$ velja $a(b + c) = ab + ac$.

Komutativen obseg imenujemo tudi *polje*. Primer je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

1.2.9 Kaj je *urejen obseg*?

To je obseg, ki ima urejenost, ki ustreza naslednjima aksiomoma:

1. Za vsako število $a \in A, a \neq 0$ velja, da je natanko eno od števil $a, -a$ pozitivno.
2. Za vsaki pozitivni števili $a, b \in A$ sta $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni.

1.2.10 Kako je definirana urejenost v urejenem obsegu?

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ je pozitivno} \quad a, b \in A$$

1.3 Realna števila