

# Vprašanja in odgovori: Združeno

Patrik Žnidaršič

Verzija iz dne 18. oktober 2021

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Analiza</b>	<b>2</b>
1.1	Števila . . . . .	3
1.1.1	Naravna števila . . . . .	3
1.1.2	Racionalna števila . . . . .	3
1.1.3	Realna števila . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Logika in množice</b>	<b>6</b>
2.1	Množice in preslikave . . . . .	7
2.1.1	Osnovno o množicah . . . . .	7
2.1.2	Konstrukcije množic . . . . .	7
2.1.3	Preslikave . . . . .	7
2.1.4	Uporabne preslikave . . . . .	8
2.1.5	Izomorfizem . . . . .	8
2.2	Simbolni zapis . . . . .	8
2.2.1	Logične formule . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Algebra</b>	<b>10</b>
3.1	Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ . . . . .	11
3.1.1	Koordinatni sistem in vektorji v prostoru . . . . .	11
3.1.2	Skalarni produkt . . . . .	11
3.1.3	Vektorski produkt . . . . .	12
3.1.4	Mešani produkt . . . . .	12
3.2	Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$ . . . . .	13
3.2.1	Enačbe ravnin . . . . .	13
3.2.2	Razdalja do ravnine . . . . .	14

## Poglavje 1

# Analiza

## 1.1 Števila

### 1.1.1 Naravna števila

Kako označimo naslednjika naravnega števila  $n$ ?

$$n^+$$

Kaj so Peanovi aksiomi?

So aksiomi, ki definirajo množico  $\mathbb{N}$  skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu  $n$  priredi naslednjika  $n^+$  ( $n, n^+ \in \mathbb{N}$ ):

- Za vsaka  $n, m \in \mathbb{N}$  in  $m^+ = n^+$  velja  $m = n$
- Obstaja število  $1 \in \mathbb{N}$ , ki ni naslednjik od nobenega naravnega števila
- **Aksiom popolne indukcije:** Če  $A \subset \mathbb{N}$  in če je  $1 \in A$  in če je za vsak  $n \in A$  tudi  $n^+ \in A$ , potem je  $A = \mathbb{N}$ .

Kdaj je množica *dobro urejena*? Povej primer takšne množice. Povej primer množice, ki ni dobro urejena.

Kadar ima vsaka neprazna podmnožica najmanjši element. Dobro urejena je npr.  $\mathbb{N}$ , ne pa  $\mathbb{Z}$ .

### 1.1.2 Racionalna števila

Kdaj ulomka  $\frac{m}{n}$  in  $\frac{k}{l}$  predstavljata isto število?

Kadar je  $ml = nk$ .

Kaj so ulomki?

Množica  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ .

Kaj je racionalno število?

Množico  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  razdelimo na ekvivalenčne razrede:

$$(m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow ml = nk \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}, \forall n, l \in \mathbb{N}$$

Racionalno število je ekvivalenčni razred urejenih parov in ga označimo z  $\frac{m}{n}$ :

$$\frac{m}{n} = \{(k, l), ml = nk\}$$

Kateri trije aksiomi veljajo za grupe? Kateri dodatni velja za Abelove grupe?

Za grupe veljajo naslednji aksiomi: (prikazani simboli za množico  $A$  in dvočlen operator  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$ )

1. Asociativnost:  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in A$
2. Obstoj enote: obstaja  $0 \in A$ , tako da za vsak  $a \in A$  velja  $0 + a = a + 0 = a$

3. Obstoj inverznega elementa: za vsak  $a \in A$  obstaja inverzni element  $-a \in A$ , tako da velja  $a + (-1) = (-a) + a = 0$

Za Abelove (oz. komutativne) grupe velja tudi aksiom komutativnosti:

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in A$$

**Povej primer Abelove grupe in grupe, ki ni komutativna.**

Abelova grupa:  $(\mathbb{Q}, +)$  ali  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

Grupa, ki ni komutativna:  $(\mathbb{N}, +)$

**Kako označimo enoto in inverzni element  $a$  za seštevanje in množenje?**

Za seštevanje:  $0, -a$

Za množenje:  $1, a^{-1}$

**Povej pravilo krajšanja za seštevanje v grupi  $A$  z operacijo  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$**

Naj bodo  $a, x, y \in A$ . Če velja  $a + x = a + y$ , potem je  $x = y$ .

**Kaj je komutativen obseg? Kako ga še drugače imenujemo? Povej primer.**

To je množica  $A$  z operacijama  $+$ ,  $\cdot$ , kjer je  $(A, +)$  Abelova grupa za seštevanje,  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Abelova grupa za množenje, veljata pa še dva aksioma:

1.  $1 \neq 0$  (enota za seštevanje ni enaka enoti za množenje)
2. Aksiom distributivnosti: Za vse  $a, b, c \in A$  velja  $a(b + c) = ab + ac$ .

Komutativen obseg imenujemo tudi *polje*. Primer je  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

**Kaj je urejen obseg?**

To je obseg, ki ima urejenost, ki ustreza naslednjima aksiomoma:

1. Za vsako število  $a \in A, a \neq 0$  velja, da je natanko eno od števil  $a, -a$  pozitivno.
2. Za vsaki pozitivni števili  $a, b \in A$  sta  $a + b$  in  $a \cdot b$  pozitivni.

**Kako je definirana urejenost v urejenem obsegu?**

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ je pozitivno} \quad a, b \in A$$

### 1.1.3 Realna števila

**Kaj je Dedekinov rez? Definiraj množico realnih števil. Kako jo označimo?**

To je vsaka podmnožica  $A \subset \mathbb{Q}$ , za katero velja:

1.  $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$
2. za vsak  $p \in A$  in za vsak  $q \in \mathbb{Q}, q < p$ , je tudi  $q \in A$
3. za vsak  $p \in A$  obstaja  $q \in A$ , da je  $q > p$

Realna števila so množica vseh rezov. Označimo jo z  $\mathbb{R}$ .

**Kako je definiran nasprotni element reza  $A$ ?**

$-A = \{p \in \mathbb{Q}; \text{ obstaja } r \in \mathbb{Q}, r > 0 : -p - r \notin A\}.$

**Kdaj je rez  $A$  pozitiven?**

Kadar  $0^* \subset A \wedge 0^* \neq A$ .

**Naj bo  $B$  urejen obseg. Kdaj je množica  $A \subset B$  navzgor omejena? Kako imenujemo najmanjšo od vseh zgornjih mej, če obstaja?**

Kadar obstaja  $M \in B$ , da velja  $a \leq M$  za vsak  $a \in A$ .

Najmanjšo zgornjo mejo imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* množice  $A$ ; označimo ga s  $\sup A$ .

**Kaj je maksimum množice  $A$ ?**

To je največji element množice  $A$ , če obstaja. Označimo ga s  $\max A$ .

## Poglavje 2

# Logika in množice

## 2.1 Množice in preslikave

### 2.1.1 Osnovno o množicah

**Kaj je *ekstenzionalnost množic*?**

To je pravilo, ki trdi, da sta množici enaki, če imata iste elemente; oz. če je vsak element prve množice tudi element druge množice, in obratno.

**Kako zapišemo prazno množico in standardni enojec?**

Prazna množica:  $\{\}$  ali  $\emptyset$

Standardni enojec:  $1 = \{()\}$

**Kaj je *enojec*?**

Množica  $A$  je enojec, kadar velja:

- obstaja  $x \in A$
- če  $x \in A$  in  $y \in A$ , potem  $x = y$

### 2.1.2 Konstrukcije množic

**Kaj sta *zmnožek* in *vsota množic*? Kako se drugače imenujeta?**

Zmnožek ali *kartezični produkt* množic  $A$  in  $B$  je nova množica  $A \times B$ , katere elementi so urejeni pari  $(x, y)$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ .

Vsota ali *koproduct* množic  $A$  in  $B$  je množica  $A + B$ , katere elementi so  $\text{in}_1 x$  za  $x \in A$  ter  $\text{in}_2 y$  za  $y \in B$ .

**Kaj je *projekcija*  $\text{pr}_i u$  in kaj *injekcija*  $\text{in}_i x$ ?**

$\text{pr}_i u$  označuje  $i$ -to komponento urejenega para  $u$ .

$\text{in}_i x$  je simbol, s katerim ločimo elemente različnih množic pri seštevanju.

### 2.1.3 Preslikave

**Katere tri komponente ima preslikava?**

Domeno, kodomeno in prirejanje.

Prirejanje mora biti: (za preslikavo  $f : A \rightarrow B$ )

- *Celovito*: Za vsak  $x \in A$  obstaja  $y \in B$ , ki mu je prirejen.
- *Enolično*: Če sta elementu  $x \in A$  prirejena elementa  $y$  in  $z \in B$ , potem  $y = z$ .

**Kaj je eksponent množic  $A$  in  $B$ ?**

To je množica  $B^A$ , katere elementi so preslikave z domeno  $A$  in kodomeno  $B$ .



**Koliko je preslikav  $A \rightarrow \emptyset$  in koliko preslikav  $\emptyset \rightarrow A$ ?**

Preslikava  $\emptyset \rightarrow A$  je ena sama.

Preslikav  $A \rightarrow \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$  ni.

#### 2.1.4 Uporabne preslikave

**Kaj je identiteta?**

Je preslikava  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  za poljubno množico  $A$ ;  $\text{id}_A : x \mapsto x$ .

**Kaj je kompozitum preslikav? Povej dve njegovi računski lastnosti.**

Kompozitum preslikav  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$  je preslikava  $g \circ f : A \rightarrow C$ , ki  $x \mapsto g(f(x))$ .

Kompozitum je asociativen in ima nevtralen element - identiteto.

**Kaj je evalvacija? Kako jo še imenujemo?**

Evalvacija, *aplikacija* ali *uporaba* je preslikava, ki sprejme preslikavo in argument, ter preslikavo uporabi na argumentu.

$\text{ev} : B^A \times A \rightarrow B$

$\text{ev} : (f, x) \mapsto f(x)$

#### 2.1.5 Izomorfizem

**Kdaj je  $f : A \rightarrow B$  inverz  $g : B \rightarrow A$ ? Kako imenujemo preslikavo, ki ima inverz? Kako označimo inverz take preslikave?**

Kadar velja  $f \circ g = \text{id}_B$  in  $g \circ f = \text{id}_A$ .

Preslikavo  $f$  z inverzom imenujemo *izomorfizem* in jo označimo z  $f^{-1}$ .

**Kaj velja za kompozitum dveh izomorfnihih preslikav  $f, g$ ? Kaj velja za njegov inverz?**

Tudi kompozitum je izomorfizem. Za njegov inverz velja:  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**Kdaj sta dve množici  $A, B$  izomorfni? Kako to zapišemo?**

Množici sta izomorfni, če obstaja izomorfizem iz  $A$  v  $B$ .

To zapišemo  $A \cong B$ .

**Katere tri lastnosti veljajo za  $\cong$ ?**

Refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost.

## 2.2 Simbolni zapis

**Povej primer levo in primer desno asocirane operacije.**

Levo asocirana:  $+, -, \times, \dots$

Desno asocirana:  $\Rightarrow, \rightarrow, \dots$

### Kaj so implicitni argumenti? Povej primer.

To so argumenti operatorja, ki jih pogosto izpustimo; takrat mora bralec iz konteksta izvesti, kaj naj bi te argumenti bili; npr. množici v zapisu projekcije  $\text{pr}_1^{A,B}$ .

### Kakšna je razlika med implicitnimi argumenti in privzeto vrednostjo? Povej primer privzete vrednosti.

Pri privzeti vrednosti smo dogovorjeni, s čim naj nadomestimo izpuščeno vrednost, pri implicitnih argumentih pa so vrednosti vedno drugačne in razvidne iz konteksta. Primer je  $\log x = \log_{10} x$ .

## 2.2.1 Logične formule

### Kateri dve vrsti logičnih formul poznamo? Kaj je razlika med njima?

- *Izjavni račun*: Zapisujemo izjave z osnovnimi vezniki
- *Predikatni račun*: Za zapisovanje uporabimo tudi predikate, t.j. operatorje  $=, \neq, \leq, \dots, \forall, \exists$ .

### Kako zapišemo resnico, neresnico, negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo?

- Resnica:  $\top$
- Neresnica:  $\perp$
- Negacija:  $\neg$
- Konjunkcija:  $\wedge$
- Disjunkcija:  $\vee$

### Kako se imenujeta argumenta pri implikaciji? Kako se jih na dolgo bere?

Antecedent  $\Rightarrow$  Konsekvent

Antecedent je zadosten pogoj za konsekvent.

Konsekvent je potreben pogoj za antecedent.

### Katera kvantifikatorja poznamo?

Univerzalni kvantifikator ( $\forall$ ) in eksistenčni kvantifikator ( $\exists$ ).

## Poglavje 3

# Algebra

## 3.1 Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

### 3.1.1 Koordinatni sistem in vektorji v prostoru

#### Kakšen je pozitivno orientiran koordinatni sistem?

Tak, kjer je ordinatna os za  $90^\circ$  pozitivno rotirana od abscisne osi.

#### Kaj sestavlja koordinatni sistem v prostoru?

Tri medsebojno paroma pravokotne številske premice, ki se sekajo v koordinatnem izhodišču.

#### Kaj je krajevni vektor točke $T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ?

To je usmerjena daljica z začetkom v izhodišču in koncem v točki  $T$ .

#### Kaj je vektor?

Vektor  $\vec{a} = (x, y, z)$  je množica vseh usmerjenih daljic, ki jih dobimo z vzporednim premikom krajevnega vektorja do točke  $T(x, y, z)$ .

#### Kaj je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ?

To je vsak izraz oblike  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ , kjer so  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

#### Kdaj so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linearno neodvisni? Kdaj sta dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna?

Kadar nobeden izmed vektorjev ni enak kakšni linearni kombinaciji ostalih.

Dva vektorja sta linearno odvisna, kadar velja  $\vec{a} = \alpha \vec{b}$  ali  $\vec{b} = \beta \vec{a}$  za neka  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . To je natanko takrat, ko sta vzporedna.

#### Kaj je baza prostora $\mathbb{R}^3$ ? Kaj je *standardna baza*?

Baza prostora je množica treh linearno neodvisnih vektorjev.

Standardna baza so vektorji  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

### 3.1.2 Skalarni produkt

#### Kaj je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ?

To je število  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

#### Kaj je *norma* vektorja $\vec{a}$ ? Kaj predstavlja?

To je število  $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ . Predstavlja dolžino vsake usmerjene daljice, ki predstavlja vektor  $\vec{a}$ .

**Naštej 4 lastnosti skalarnega produkta.**

1. Komutativnost:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .
2. Distributivnost:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .
3. Homogenost:  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .
4. Pozitivna definitnost:  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$  in  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .

**Kako izračunaš kot med dvema vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ? Kaj je kriterij za pravokotnost vektorjev?**

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Kjer je  $\phi$  kot med vektorjema.

Kriterij za pravokotnost:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

### 3.1.3 Vektorski produkt

**Kaj je vektorski produkt vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ ?**

To je vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$ , za katerega velja:

- pravokoten je na  $\vec{a}$  in na  $\vec{b}$ .
- dolžina je ploščina paralelograma, napetega na krajevna vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .
- trojica  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$  je pozitivno orientirana.

**Kakšen je predpis za vektorski produkt?**

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

**Povej 3 lastnosti vektorskega produkta.**

- Antikomutativnost:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .
- Distributivnost:  $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ .
- Homogenost:  $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

### 3.1.4 Mešani produkt

**Kaj je mešani produkt vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ? Kakšen je njegov predpis?**

To je število  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

### Kakšna je geometrijska interpretacija mešanega produkta?

Mešani produkt  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$ , pomnožen z orientacijo urejene trojice  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Kako izračunamo prostornino nepravilnega tetraedra, določenega z vektorji  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ?

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

### Povej 2 lastnosti mešanega produkta.

1. Asociativnost v vseh faktorjih:  $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}]$ .
2. Homogenost:  $\alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}]$ .

### Kaj je Lagrangeva identiteta?

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

## 3.2 Premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$

### 3.2.1 Enačbe ravnin

#### Kaj je enačba ravnine?

Enačba ravnine  $\Sigma$  je taka enačba v spremenljivkah  $x, y, z$ , da velja:

- Če točka  $T(a, b, c)$  leži na  $\Sigma$ , potem  $a, b, c$  zadoščajo enačbi.
- Če  $T \notin \Sigma$ , pa  $a, b, c$  ne zadoščajo enačbi.

**Kaj je normala ravnine? Koliko normal ima ravnina? Kaj še potrebujemo, da natanko določimo ravnino, poleg normale?**

Normala ravnine je poljuben neničelen vektor, ki je pravokoten na ravnino.

Ravnina ima več normal, vse izmed katerih so si vzporedne.

Ravnina je natanko določena z normalo in eno točko na ravnini.

**Kakšne splošne oblike je enačba ravnine? Kako iz te oblike preberemo normalo? Ali je enačba ravnine enolična?**

Splošna oblika:  $ax + by + cz + d = 0$ ,  $a, b, c$  niso vsi 0.

Normala take ravnine je  $(a, b, c)$ .

Enačba ravnine ni enolična, saj lahko enačbo pomnožimo z poljubnim neničelnim skalarjem, in še vedno predstavlja isto ravnino.

**Kaj je normalna enačba ravnine? Kako je z njeno enoličnostjo?**

To je poseben primer enačbe ravnine  $ax + by + cz + d = 0$ , kjer ima normala  $(a, b, c)$  dolžino 1. Je enolična do predznaka natančno, lahko jo pomnožimo z  $-1$ .

Podaj enačbo ravnine skozi tri nekolinearne točke  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ .

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

### 3.2.2 Razdalja do ravnine

Kaj je razdalja med točko  $T_1$  in ravnino? Navedi njeno formulo z uporabo normale  $\vec{n}$ , krajevnega vektorja do točke na ravnini  $\vec{r}_0$  ter krajevnega vektorja do točke  $T_1$ ,  $\vec{r}_1$ .

To je najkrajša razdalja  $\Delta$  med  $T_1$  in kakšno točko na ravnini.

$$\Delta = \left| \frac{\vec{n}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{\|\vec{n}\|} \right|$$

Navedi formulo za razdaljo točke  $T(x_0, y_0, z_0)$  od ravnine z enačbo  $ax + by + cz + d = 0$ .

$$\Delta = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Kaj je razdalja med dvema vzporednima ravninama?

To je razdalja med poljubno točko na eni ravnini in drugo ravnino.

Kaj je razdalja med premico in njej vzporedno ravnino?

To je razdalja med poljubno točko na premici in ravnino.