Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Лабораторная работа №4
Вариант: Метод Рунге-Кутта 4 го порядка

Выполнил:
Воробьев Кирилл
P3231

Преподаватель:
Перл Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург, 2022г

Описание метода

Метод Рунге-Кутты находит приближенное значение y для заданного x. С помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка можно решить только обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

Далее по формуле (указана в расчетных формулах метода) высчитываются значения на каждом шаге. Меньший размер шага означает большую точность.

Формула в основном вычисляет следующее значение y_{n+1}, используя текущее y_n плюс средневзвешенное значение четырех приращений.

k_1 — это приращение, основанное на наклоне в начале интервала, используя y

k_2 — это приращение, основанное на наклоне в середине интервала, используя $y + hk_{1/2}$.

k_3 — это снова приращение, основанное на наклоне в средней точке, используя использование $y + hk_{2/2}$.

k_4 — это приращение, основанное на наклоне в конце интервала, используя $y + hk_3$.

Метод является методом четвертого порядка, что означает, что локальная ошибка усечения составляет порядок O(h^5), а общая накопленная ошибка составляет порядок O(h^4).

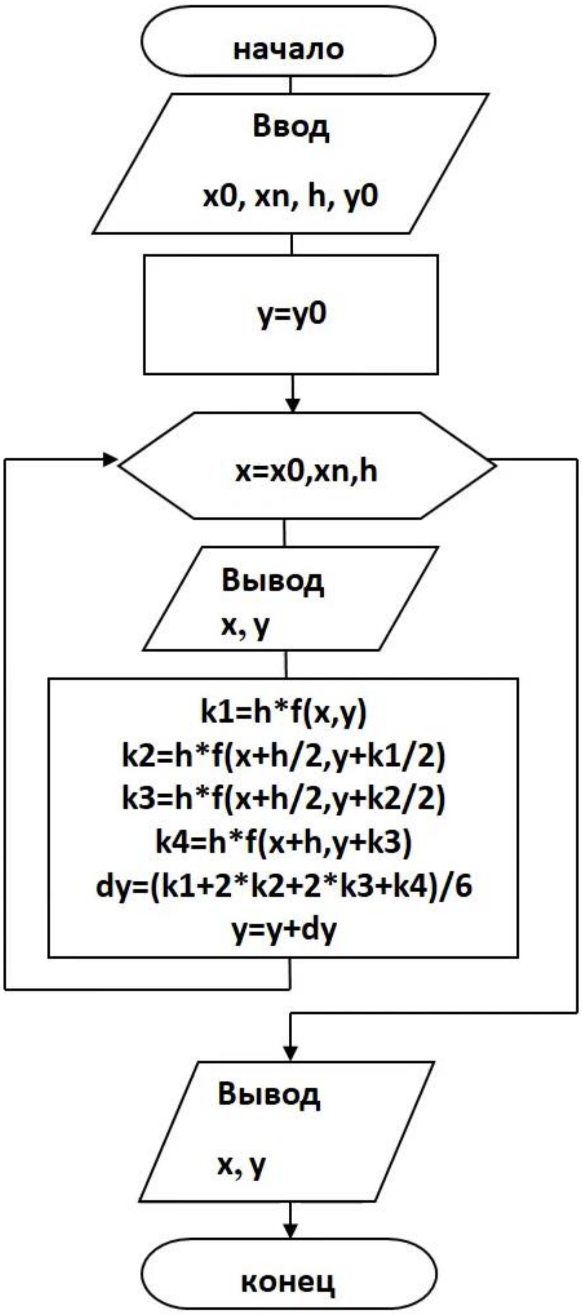
Расчетные формулы метода

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}\left(x_n, \mathbf{y}_n\right) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}\left(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{k}_3\right)
\end{aligned}$$

Блок-схема метода



Метод в коде

```
public static List<Point> doMethod(double[] borders, double startY, double step, Equation equation) {
    List<Point> points = new ArrayList<>();
    double y = startY;
    points.add(new Point(borders[0], y));
    for (double x = borders[0]; x < borders[1] - step; x += step) {
        double k1 = getK1(x, y, step, equation);
        double k2 = getK2(x, y, step, k1, equation);
        double k3 = getK3(x, y, step, k2, equation);
        double k4 = getK4(x, y, step, k3, equation);
        double dy = getDy(k1, k2, k3, k4);
        y += dy;
        points.add(new Point( x: x + step, y));
    }
    return points;
}
```

Расчет коэффициентов

```java
public static double getK1(double x, double y, double step, Equation equation) {
    return step * equation.getDerivative(x, y);
}

public static double getK2(double x, double y, double step, double k1, Equation equation) {
    return step * equation.getDerivative( x: x + step / 2.0,  y: y + k1 / 2.0);
}

public static double getK3(double x, double y, double step, double k2, Equation equation) {
    return step * equation.getDerivative( x: x + step / 2.0,  y: y + k2 / 2.0);
}

public static double getK4(double x, double y, double step, double k3, Equation equation) {
    return step * equation.getDerivative( x: x + step,  y: y + k3);
}
```

Вычисление Δy

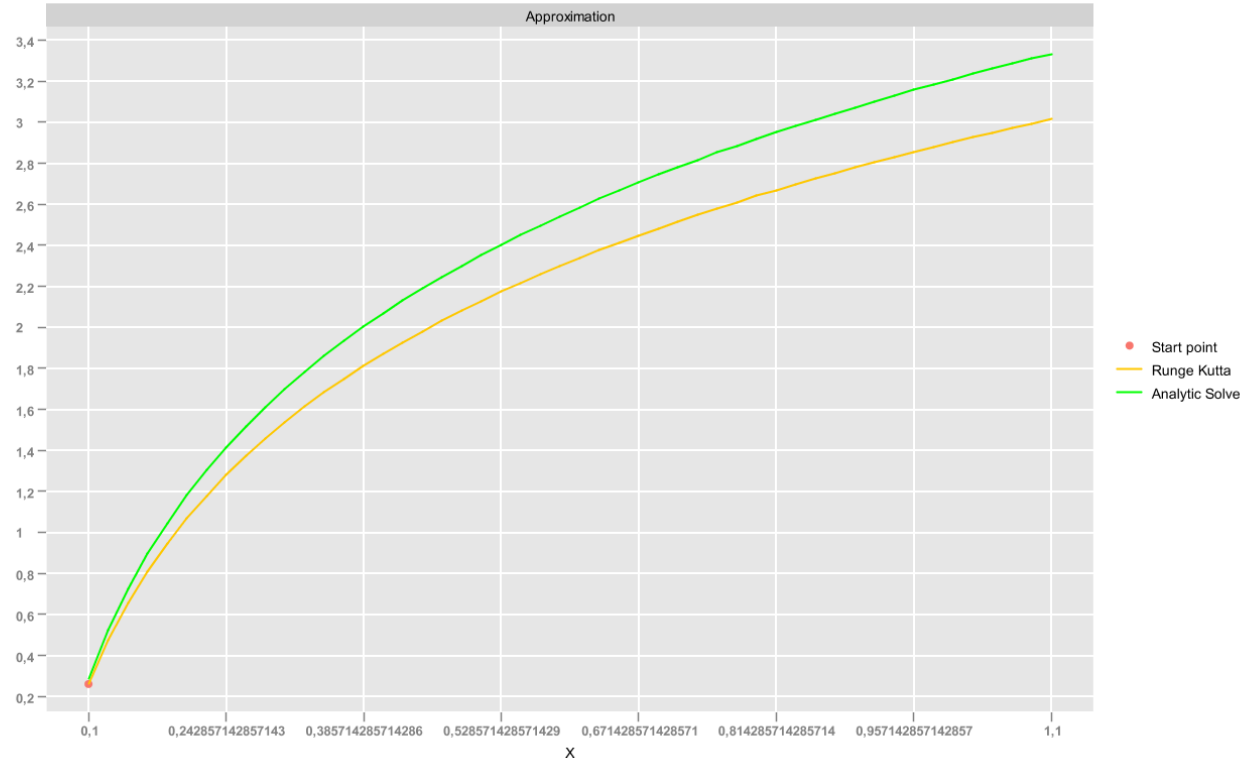
```java
public static double getDy(double k1, double k2, double k3, double k4) {
    return (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6.0;
}
```

Примеры работы программы

Пример №1

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
-----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 2
-----------------------------------------------------------
Введите левую границу: 0,1
-----------------------------------------------------------
Введите правую границу: 1,1
-----------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
-----------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 1
-----------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
-----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 2
-----------------------------------------------------------
```

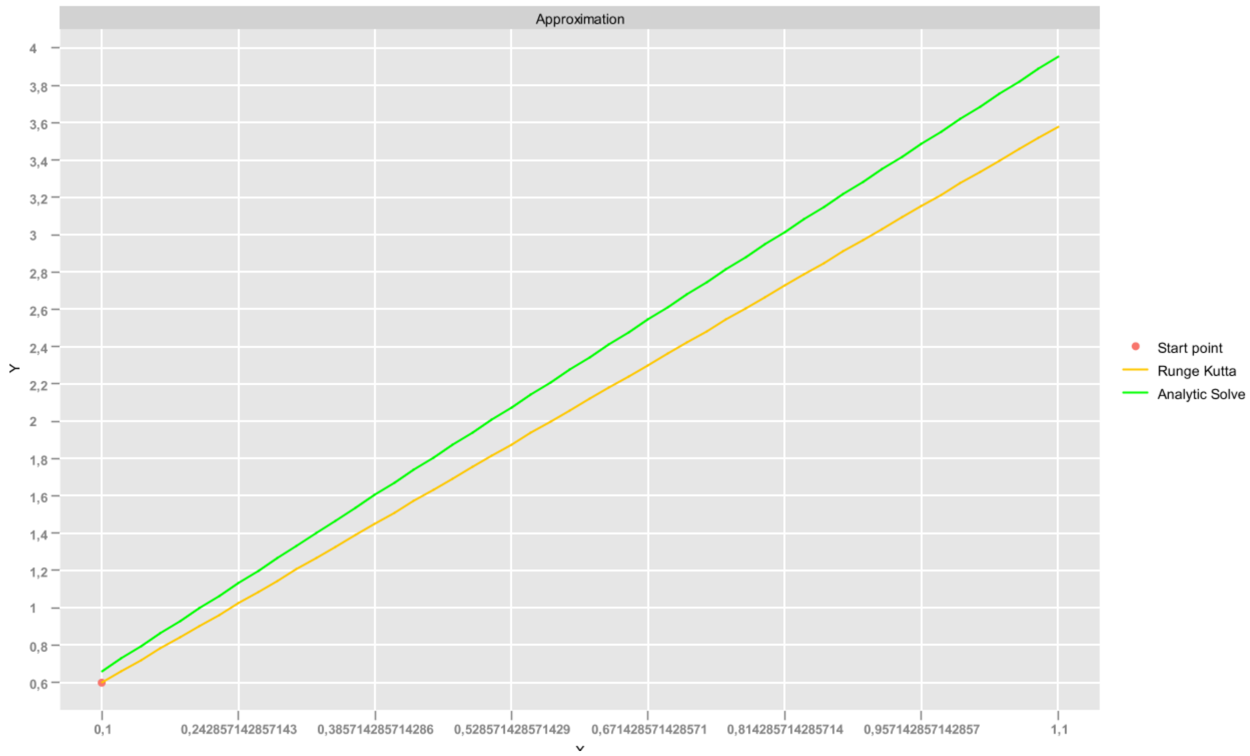
```
   x    |   y
-------|-------
0,1000 | 1,0000
0,2000 | 1,1078
0,3000 | 1,2320
0,4000 | 1,3785
0,5000 | 1,5548
0,6000 | 1,7712
0,7000 | 2,0421
0,8000 | 2,3877
0,9000 | 2,8368
1,0000 | 3,4315
1,1000 | 4,2348
```



Пример №2

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
------------------------------------------------------------
Ваш выбор: 2
------------------------------------------------------------
Введите левую границу: 0,1
------------------------------------------------------------
Введите правую границу: 1,1
------------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
------------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 1
------------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
------------------------------------------------------------
Ваш выбор: 1
------------------------------------------------------------
```

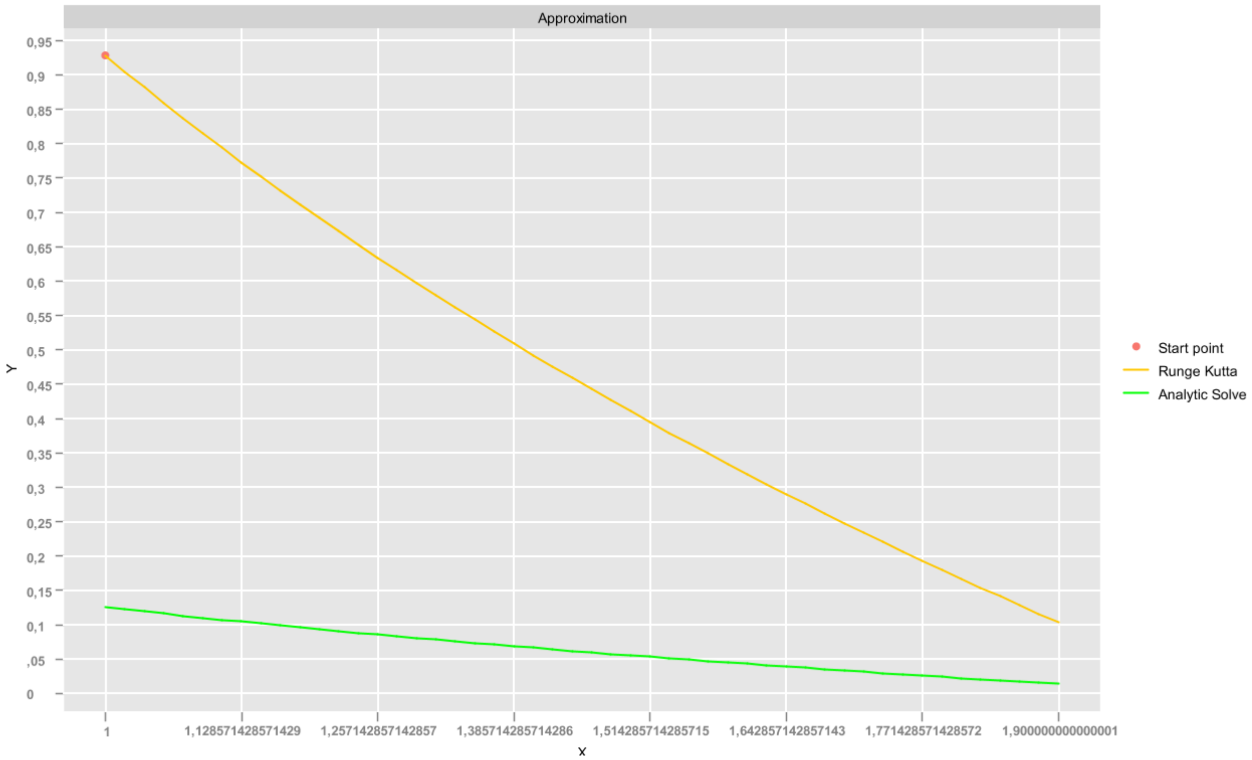
x	y
0,1000	1,0000
0,2000	1,1078
0,3000	1,2320
0,4000	1,3785
0,5000	1,5548
0,6000	1,7712
0,7000	2,0421
0,8000	2,3877
0,9000	2,8368
1,0000	3,4315
1,1000	4,2348



Пример №3

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
---------------------------------------------------------
Ваш выбор: 1
---------------------------------------------------------
Введите левую границу: 1
---------------------------------------------------------
Введите правую границу: 2
---------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
---------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 1
---------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
---------------------------------------------------------
Ваш выбор: 2
---------------------------------------------------------
```

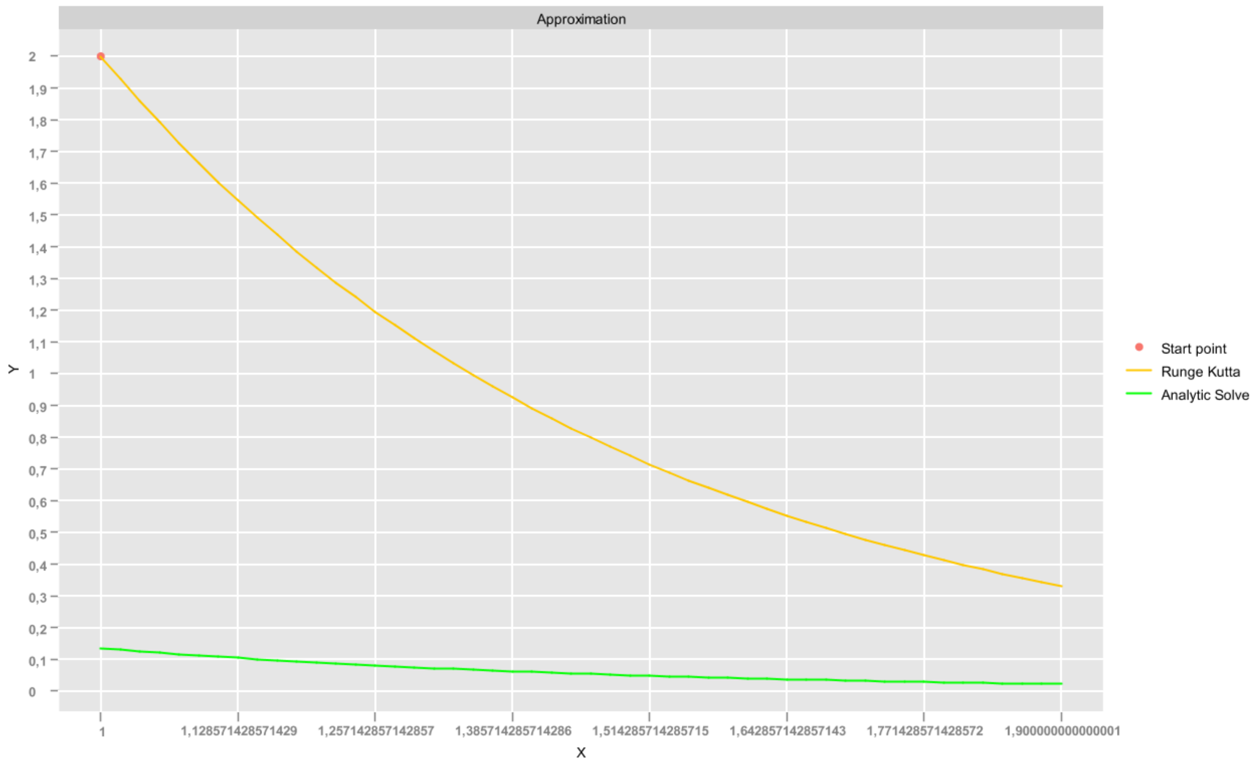
x	y
1,0000	1,0000
1,1000	0,8187
1,2000	0,6703
1,3000	0,5488
1,4000	0,4493
1,5000	0,3679
1,6000	0,3012
1,7000	0,2466
1,8000	0,2019
1,9000	0,1653



Пример №4

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
-----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 1
-----------------------------------------------------------
Введите левую границу: 1
-----------------------------------------------------------
Введите правую границу: 2
-----------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
-----------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 2
-----------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
-----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 3
-----------------------------------------------------------
```

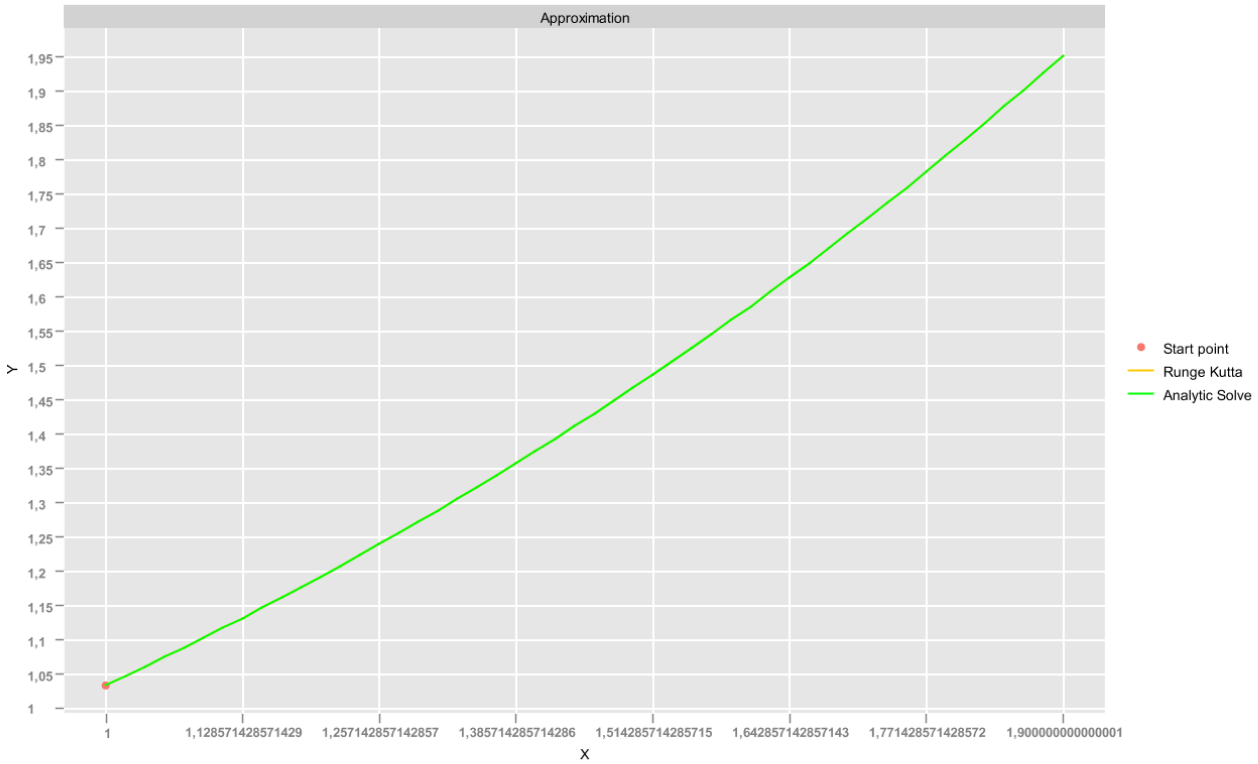
```
   x    |    y
-------|-------
1,0000 | 2,0000
1,1000 | 1,6375
1,2000 | 1,3406
1,3000 | 1,0976
1,4000 | 0,8987
1,5000 | 0,7358
1,6000 | 0,6024
1,7000 | 0,4932
1,8000 | 0,4038
1,9000 | 0,3306
```



Пример №5

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
---------------------------------------------------------
Ваш выбор: 3
---------------------------------------------------------
Введите левую границу: 1
---------------------------------------------------------
Введите правую границу: 2
---------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
---------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 1
---------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
---------------------------------------------------------
Ваш выбор: 3
---------------------------------------------------------
```

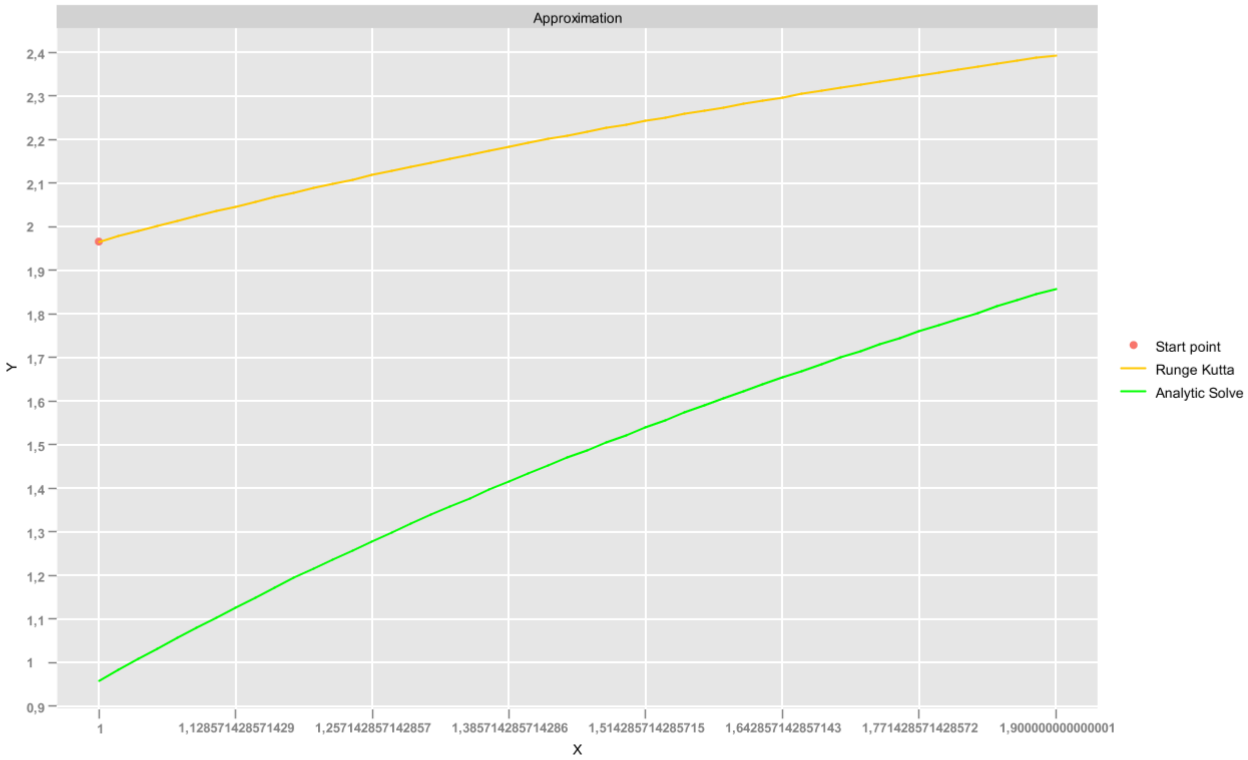
```
   x    |    y
-------|-------
1,0000 | 1,0000
1,1000 | 1,1000
1,2000 | 1,2000
1,3000 | 1,3000
1,4000 | 1,4000
1,5000 | 1,5000
1,6000 | 1,6000
1,7000 | 1,7000
1,8000 | 1,8000
1,9000 | 1,9000
```



Пример №6

```
1) y' = - 2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = e^(x - y)
----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 3
----------------------------------------------------------
Введите левую границу: 1
----------------------------------------------------------
Введите правую границу: 2
----------------------------------------------------------
Введите шаг: 0,1
----------------------------------------------------------
Введите начальное значение y: 2
----------------------------------------------------------
1) Линейная функция аппроксимации
2) Логарифмическая функция аппроксимации
3) Показательная функция аппроксимации
----------------------------------------------------------
Ваш выбор: 2
----------------------------------------------------------
```

x	y
1,0000	2,0000
1,1000	2,0380
1,2000	2,0783
1,3000	2,1211
1,4000	2,1663
1,5000	2,2140
1,6000	2,2642
1,7000	2,3170
1,8000	2,3722
1,9000	2,4298



Вывод

Локальная ошибка O(h^2) метода Эйлера – это бесконечно малая величина от h^2, а глобальная O(h) – бесконечно малая от h. Следовательно, метод Эйлера имеет глобальную ошибку на каждом шаге на единицу по порядку хуже, чем локальная погрешность.

Локальная погрешность метода Рунге-Кутты O (h^5) – это бесконечно малая величина относительно h^5, а глобальная O (h^4) – бесконечно малая от h^4 .

Таким образом, метод Рунге-Кутты является более точным по сравнению с методом Эйлера.