集合论

集合的基数：集合中元素个数

幂集（集族）：集合所有不同子集构成的集合

集合的对等（等势）：A、B之间存在一一对应关系

命题逻辑

命题：能判断真假的陈述句

原子命题&复合命题：不能再分解为更简单命题的命题称为原子命题；由命题联结词联结原子命题的叫复合changzhimingt命题。

命题常量/常值命题：原子命题。

命题变量/命题变元：P，Q，R等。

永真公式/重言式：任意给定解释下为真。

永假公式/矛盾式：同上。

命题的等价：对于所有出现在G,H命题变元的2^n组不同解释，真值都相同。

推理规则：

(1) **P 规则(Premise，前提引用规则)** 在推理过程中，如果引入前提集合中的一个前提，则称使用了 P 规则。

(2) **T 规则(Transformation，逻辑结果引用规则)** 在推理过程中，如果引入推理过程中产生的某个中间结果，则称使用了 T 规则。

(3) **CP 规则(Conclusion Premise，附加前提规则)** 在推理过程中，如果逻辑结果为蕴涵式，并且将该蕴涵式的前件作为前提引入，则称使用了 CP 规则①。

范式：公式的标准型。

联结词的完备集&极小联结词的完备集

文字&合取式（短语）&析取式（子句）&合取范式&析取范式

极大项&极小项

谓词逻辑

个体词：原子命题中可以独立存在的客体（主，宾）

谓词：用于刻画客体性质或客体关系的部分·。

个体域/论域：个体变量的取值范围。

量词的辖域

原子谓词公式（原子公式）&合式谓词公式（......）:p(t1,t2,......)为原子公式；原子公式也是合式公式，注意递归定义。

自由变元&约束变元：辖域中变元自由/约束出现。

改名规则&供代入规则：改名和替换。

闭式：G是任意公式，且G中无自由变元。闭式在任何解释下都有确切真值。

谓词公式的解释有哪些构成：非空个体域D；每个常量符号；每个N元函数符号；每个N元谓词符号。

前束范式：量词、量词......+命题。

二元关系

序偶：由两个元素x,y按照一定次序组成的二元组，也称有序偶对。

笛卡尔积：A×B＝{<x，y>|(x∈A)∧(y∈B)}

二元关系： A，B 为两个非空集合，称 A×B 的任何子集 R 为从 A 到 B 的二元关系，简称关系（Relation），记作 R：A→B；A＝B，则称 R 为 A 上的二元关系，记作 R：A→A;若 $\langle x,y\rangle\in R$，则记为xRy，读作“x 对 y 有关系 R”.

空关系&全关系&恒等关系

复合关系、逆关系

自反&反自反&都不&都有（空集上的空关系）：

例 4.19 设 $A=\{a,b,c\}$，R_1、R_2 和 R_3都是 A 上的关系，其中 $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle\}$，$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$，$R_3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$。试判定它们是否具有自反性和反自反性，并写出 R_1、R_2 和 R_3的关系矩阵，画出相应的关系图。

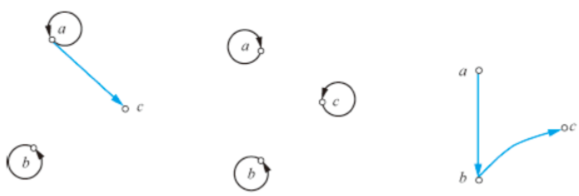
分析 自反性和反自反性的判定按照“自反性和反自反性的集合表示判断方法”进行；按集合 A 列举的元素顺序写出关系矩阵；对于 A 上的关系，按照 $A=B$ 的情形画出关系图。

解 (1)在 R_1 中，因为 $\exists c(c\in A\land\langle c,c\rangle\notin R_1)\land\exists a(a\in A\land\langle a,a\rangle\in R_1)$，所以 R_1 不是自反的，也不是反自反的。在 R_2 中，因为 $\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\in R)=1$，所以 R_2 是自反的。在 R_3中，因为 $\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\notin R_3)=1$，所以 R_3是反自反的。

(2)设 R_1、R_2 和 R_3的关系矩阵分别为 $\boldsymbol{M}_{R_1}$、$\boldsymbol{M}_{R_2}$和 $\boldsymbol{M}_{R_3}$，则

$$\boldsymbol{M}_{R_1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{M}_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{M}_{R_3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(3)R_1、R_2 和 R_3的关系图分别如图 4.7(a)、图 4.7(b)和图 4.7(c)所示。



(a) (b) (c)

对称&反对称&都不&都有：

(2)设 R、S、T 和 V 的关系矩阵分别为 M_R、M_S、M_T和 M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3)R、S、T 和 V 的关系图分别如图 4.8(a)、图 4.8(b)、图 4.8(c)和图 4.8(d)所示。

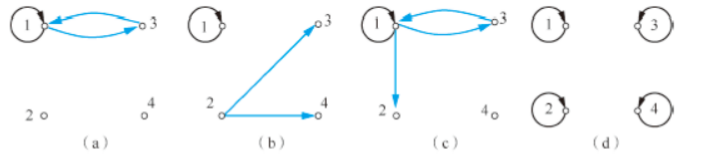


图 4.8

传递性：注意如果能连起来，组合后必须在；否则就不能有组合，如<2,3>也是{1，2，3，4}上的传递关系。

例 4.22 设 $A=\{1,2,3\}$，R、S、T 和 VA 上的关系，其中，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$S=\{\langle 1,2\rangle\}$，$T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$V=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$。

(1)试判定它们是否具有传递性。

(2)分别写出 R、S、T 和 V 的关系矩阵。

(3)分别画出 R、S、T 和 V 的关系图。

分析 传递性的判定根据“传递性的集合表示判断方法”直接判定即可；按集合 A 列举的元素顺序写出关系矩阵；对于 A 上的关系，按照 $A=B$ 的情形画出关系图。

解 (1)根据“传递性的集合表示法判断方法”，关系 R 和 S 都是传递的；关系 T 和 V 不是传递的。

(2)设 R、S、T 和 V 的关系矩阵分别为 M_R、M_S、M_T和 M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(3)R、S、T 和 V 的关系图分别如图 4.9(a)、图 4.9(b)、图 4.9(c)和图 4.9(d)所示。

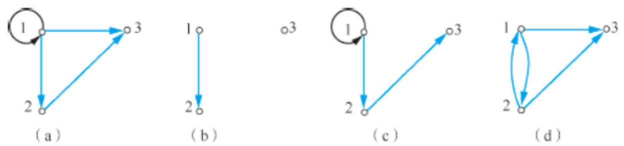


图 4.9

r、s、t：自反，对称，传递关系的闭包；都是添加元素后的集合。

特殊关系

相容关系：非空集合上，自反，对称（注意是相互包容，所以有对称性；同时自己与自己也是相容的，所以有自反性）

集合的覆盖：给定非空集合 A，设有集合$S=\{A(1),A(2),...,A(m)\}$。如果

- $A_i\subseteq A$且 $A(i)\neq\emptyset,i=1,2,\cdots,m;$
- $\bigcup_{i=1}^m A_i=A$

则 S 被称作集合 A 的一个覆盖。

划分：包含于A，不为空，相互之间无交集，并为A。

类/块：集合A由一个划分所分作的不同的类/块。

图论

图：序偶G=<v,e>

零图：仅由孤立节点组成的图

平凡图：仅含一个节点的零图。

多重图，线图和简单图：

平行边：有向图中，相同起点和终点的边；无向图中，两个节点间的边。

有平行边的叫多重图，无的叫线图，无环的线图叫简单图。

子图，真子图，导出子图和生成子图

解题小贴士

子图的判断

(1) 子图的结点集和边集是 G 的结点集和边集的子集。

(2) 真子图的结点集和边集是 G 的结点集或边集的真子集。

(3) 生成子图与 G 的结点集相同而边集是子集。 点保留，边可少

(4) V_2 的导出子图要求包含 G 中所有两个端点属于 V_2 的边。对应结点，边保留

结点度数：图G中以结点为端点的边数。

图的同构：设两个图G和G'，如果存在双射函数$g: V \to V$，使得对于任意的$e = (vi, vj) \in E$当且仅当$e' = (g(vi), g(vj)) \in E'$，并且$e$与$e$的重数相同，则称$G$与$G'$同构（Isomor-phism），记为$G \cong G'$。

简单/基本（回）通路：基本点不同，简单边相异。

可达：两点之间存在通路。无向图中的可达关系也是一种等价关系。

无向图的连通性：若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是连通图，否则为非连通图（分离图）

有向图的连通性：

定义 6.19 设 $G=\langle V,E\rangle$是一个有向图。

(1) 略去 G 中所有有向边的方向得无向图 G'，如果 G'是连通图，则称有向图 G 是连通图或弱连通图(Weakly Connected Graph)，否则称 G 是非连通图。

(2) 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称 G 是单向连通图(Unilaterally Connected Graph)。

(3) 若 G 中任何一对结点都是相互可达的，则称 G 是强连通图(Strongly Connected Graph)。

有向图 G 是**强连通图**的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点的**回路**

有向图 G 是**单向连通图**的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点的**通路**

特殊图

树：连通无回路的无向图，叫无向树，简称**树**。极大连通，极小无回。（平凡图也是树）

生成树：图G的某个生成子图是树，则称为G的生成树。生成树 T_G 中的边称为**树枝**，G 中不在 T_G 中的边称为**弦**，T_G 的所有弦的集合称为生成树的**补**。

最小生成树：G中具有最小权的生成树。

有向树：若一个有向图去除所有方向得到的为树，该有向图为有向树。

一颗非平凡的**有向树**，如果恰有**一个结点的入度为 0**，其余所有**结点的入度均为 1**，则称之为**根树（外向树）**

- 入度为 0 的结点称为根；出度为 0 的结点称为叶；**入度为 1，出度大于 0 的结点称为内点**
- 内点和根统称为**分支点**
- 在根树中，从根到任一结点 v 的通路长度称为该结点的层数，所有结点的层数中最大的称为根树的**高**

K元树：T中每个分支点至多K个儿子

完全K元树：所有**分支点恰好**有K个儿子

满K元树：完全K元**且**每个叶子节点的层数均为树高。

有序K元树

前缀码：A={b_1,b_2,......b_m,}是一个符号集合，对任意元素互相不为前缀，则A为前缀码。

欧拉图：若G无孤立结点，存在一条回路经过每条边一次且仅一次，则G为欧拉图。

桥（割边）：

定义 7.12 设 $G=\langle V,E\rangle$，$e\in E$，如果

$$p(G-e)>p(G)$$

则称 e 为 G 的桥(Bridge)或割边(Cut edge)。

显然，所有的悬挂边都是桥。

哈密顿图：经过每个结点一次仅一次的回路叫哈密顿回路，有则为哈密顿图。

偶图：

定义 7.14 若无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 的结点集 V 能够划分为两个子集 V_1、V_2，满足 $V_1\cap V_2=\varnothing$，且 $V_1\cup V_2=V$，使得 G 中任意一条边的两个端点，一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为偶图(Bipartite Graph)或二部图、二分图。V_1 和 V_2 称为互补结点子集，

完全偶图（完全二部图/二分图）：V_1和V_2中每个结点都有且仅有一条边相关联。

匹配·：

定义 7.16 在偶图 $G=\langle V_1,E,V_2\rangle$ 中，$V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$，若存在 E 的子集 $E'=\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),\cdots,(v_q,v_q')\}$，其中 $v_1',v_2',\cdots,v_q'$是 V_2 中的 q 个不同的结点，则称 G 的子图 $G'=\langle V_1,E',V_2\rangle$ 为从 V_1 到 V_2 的一个完全匹配(Complete Matching)，简称匹配。

由匹配的定义知，在偶图 $G=\langle V_1,E,V_2\rangle$ 中，若存在 V_1 到 V_2 的单射 f，使得对任意 $v\in V_1$，都有$(v,f(v))\in E$，则存在 V_1 到 V_2 的匹配。

由单射的性质知，不是所有的偶图都有匹配，存在匹配的必要条件是 $|V_1|\leqslant|V_2|$。然而，这个条件并不是充分条件。

平面图·：G中任意两条边除公共结点外没有其他交叉点。

	无向图	有向图
欧拉通路	仅有 0 或 2 个奇度数节点**（充要条件）**	一个结点入度比出度大 1，另一个结点出度比入度大 1，其余入度等于出度。**（充要条件）**
欧拉图（欧拉回路）	度数均为偶数**（充要条件）**	入度等于出度**（充要条件）**
哈密顿通路	任意两个不相邻的结点 $\deg(u)+\deg(v)\geq n-1$	
哈密顿图（哈密顿回路）	任意两个不相邻的结点 $\deg(u)+\deg(v)\geq n$	转为无向图后包含生成子图K_n
非哈密顿通路	找到V的某个非空子集V_1，使得 $p(G-V_1)>\|V_1\|+1$	
非哈密顿图	找到V的某个非空子集V_1，使得 $p(G-V_1)>\|V_1$	
非哈密顿通路/图	强烈推荐：标 AB	
偶图	所有回路长度均为偶数**（充要条件）**	
非平面图	存在一个能收缩为K_5或$K_3,3$的子图**（充要条件）**$m>3n-6$ 或 $m>\frac{k}{k-2}(n-2),k$为次数	

偶图和平面图默认都是无向图