§4.3 协方差、相关系数与矩

当研究的问题涉及多个随机变量的时候，变量与变量之间的关系，是必须关注的一个方面。

本节介绍的协方差、相关系数就是描述随机变量之间相互关系的数字特征。

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\underline{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\underline{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$$

一.协方差

定义4.3.1 若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，称

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为随机变量(X,Y)的**协方差**.

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

协方差的性质

1. $D(X)=Cov(X,X)$;
2. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$;
3. $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$，a,b是常数;

4. $Cov(X, a)=0$;

5. $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.

6. X, Y相互独立，$Cov(X,Y)=0$；

证 2） $Cov(aX,bY) = E\{[aX - aE(X)][bY - bE(Y)]\}$

$$= abE\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= abCov(X,Y).$$

常用计算公式

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

例4.3.1 例4.3.2

二、相关系数

定义4.3.2 设二维随机变量X,Y的$D(X)>0$, $D(Y)>0$，称

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量X与Y的**相关系数**.

标准化随机变量的协方差

注 1）ρ_{XY}是一无量纲的量.

2）$$\rho_{XY}=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$=E[X^*Y^*]=Cov(X^*,Y^*)$$

性质 设随机变量X,Y的相关系数ρ存在，则

1） $|\rho|\le 1$;

2） $|\rho|=1$ $\Longleftrightarrow$ X与Y依概率为1线性相关. 即 存在 $\alpha,\beta,(\alpha\neq 0)$,

$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

证 明

3）若$\xi=a_1X+b_1$ ，$\eta=a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

证 明

相关系数是衡量两个随机变量之间**线性相关程度**的数字特征.

注1 若随机变量X, Y的相关系数ρ_{XY}存在,

1）若$\rho_{XY}=1$, $P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$

中的$\alpha>0$, 称 X, Y **正相关**;

2）$\rho_{XY}=-1$, 则$\alpha<0$ 称 X, Y **负相关**;

3）$\rho_{XY}=0$, 称 X, Y **不相关**.

注2 $\rho_{XY}=0$ 仅说明X, Y之间**没有线性关系**, 但可以有其他**非线性关系**.

参见教材例4.4.4

练习 将一枚硬币重复抛掷n次，X, Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数，则$\rho_{XY}=$ -1

定理4.3.1 若随机变量X 与Y 相互独立，则X 与Y 不相关，即有 $\rho_{XY}=0$.

注1 此定理的**逆定理不成立**，即由$\rho_{XY}=0$ 不能得到X 与Y 相互独立.

注2 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma^2_1;\mu_2,\sigma^2_2;\rho)$

X, Y 相互独立 $\longleftrightarrow$ $\rho_{XY}=0$.

参见教材
例4.4.6

例4.3.3　例4.3.4　例4.3.5

定义4.3.3 设n 维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的协方差

$$C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

均存在, 称矩阵 $C=(c_{ij})$ 为$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 的**协方差矩阵.**

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

其中有 $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$D(X)=cov(X,X)$

例4.3.6

三、协方差矩阵的性质

1) $c_{ii}=D(X_i),\qquad i=1,2,\ldots,n;$

2) $c_{ij}=c_{ji},\qquad i,j=1,2,\ldots,n;$

对称阵

3）C是非负定矩阵;

4) $c_{ij}^2\le c_{ii}\cdot c_{jj},\qquad i,j=1,2,\ldots,n$

四.矩

定义4.3.4 设X为随机变量, 若$E(|X|^k) < +\infty$, 称

$$\gamma_k = E(X^k) \qquad k=1,2,3\ldots\ldots$$

为X的 k 阶原点矩.

称$\alpha_k = E(|X|^k)$, $k=1,2,3\ldots\ldots$为X的 k 阶绝对原点矩.

定义4.3.5 设 X 为随机变量,若$E[|X-E(X)|^k] < +\infty$, 称

$$\mu_k = E\{[X-E(X)]^k\} \quad k=1,2,3\ldots\ldots$$

为X的k 阶中心矩.

称 $\beta_k = E[|X - E(X)|^k]$　$k=1,2,3\ldots\ldots$为X 的k阶绝对中心矩.

其中　$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$

注意到　$\mu_2=D(X),\ \gamma_1=E(X),\ \gamma_2=E(X^2)$

$$\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^{\,2}$$

更一般的, 因$\mu_1=0$, 可得　γ_k与μ_k的关系:

$$\gamma_k = E(X^k) = E\{[X - E(X) + E(X)]^k\}$$

$$= E\{[(X-\gamma_1)+\gamma_1]^k\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1{}^i E[(X - \gamma_1)^{k-i}]$$

数学期望
线性性质

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1{}^i \mu_{k-i}$$

同理 $\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \gamma_1^{k-i} \gamma_i$

随机变量的矩是数！！！

例4.3.1 (X,Y)在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求Cov(X, Y) .

解 因$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0,$

故 Cov$(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{xy}{\pi}dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\cos\theta\, d\theta dr = 0.$$

例4.3.2 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots X_n, (n > 1)$ 相互独立同分布，且其方差为 $\sigma^2 > 0$，令

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

计算协方差 $Cov(X_1, Y)$.

解 因 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立，故

$$Cov(X_1, X_i) = E(X_1 X_i) - E(X_1)E(X_i) = 0, \quad (i = 2,3,\cdots,n)$$

$$Cov(X_1,Y)=\frac{1}{n}Cov(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i)$$

$$=\frac{1}{n}Cov(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Cov(X_1,X_i)$$

$$=\frac{1}{n}D(X_1)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

定理证明

1） $|\rho|\le 1$

证明：$0 \le D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*)$

$$= 2 \pm 2\rho_{XY} = 2(1 \pm \rho_{XY})$$

$$\Rightarrow \quad 1 \pm \rho_{XY} \ge 0, \qquad \therefore |\rho_{XY}| \le 1.$$

2） $|\rho| = 1 \Longleftrightarrow$ **X与Y依概率为1 线性相关，即**

$$\exists \alpha, \beta\ (\alpha \ne 0), \text{使} \quad P\{Y = \alpha X + \beta\} = 1.$$

证明："$\Rightarrow$"必要性

$\rho=-1$ 时由1）有

$$D(X^*+Y^*)=0,\quad E(X^*+Y^*)=0.$$

由方差的性质4）得

$$P\{X^*+Y^*=E(X^*+Y^*)\}=1,$$

即 $P\{X^*+Y^*=0\}=1$，**或者**

$$P\left\{Y=-\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X+\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X)+E(Y)\right\}=1.$$

对 $\rho=1$ 同理可证.

"$\Leftarrow$"充分性

若 $P\{Y=\alpha X+\beta\}=1,$

$$E(Y)=\alpha E(X)+\beta,\quad D(Y)=\alpha^2 D(X),$$

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\\&=E\{[X-E(X)][\alpha X+\beta-E(\alpha X+\beta)]\}\\&=\alpha D(X).\end{aligned}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}=\pm 1.$$

3）若 $\xi = a_1X+b_1$ ，$\eta = a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

证 $D(\xi) = a_1^2D(X), \quad D(\eta) = a_2^2D(Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta) &= E\{[\xi - E(\xi)][\eta - E(\eta)]\} \\ &= E\{[a_1X - a_1E(X)][a_2Y - a_2E(Y)]\} \\ &= a_1a_2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= a_1a_2\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

例4.3.3 (X,Y)在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le 1;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\le y\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

已计算得 $\mathrm{Cov}(X, Y)=0.$

可以验证 $D(X)>0, D(Y)>0,$

从而 $\rho_{XY}=0.$

当$x^2+y^2\le 1$, $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),$

随机变量不相关不一定相互独立!

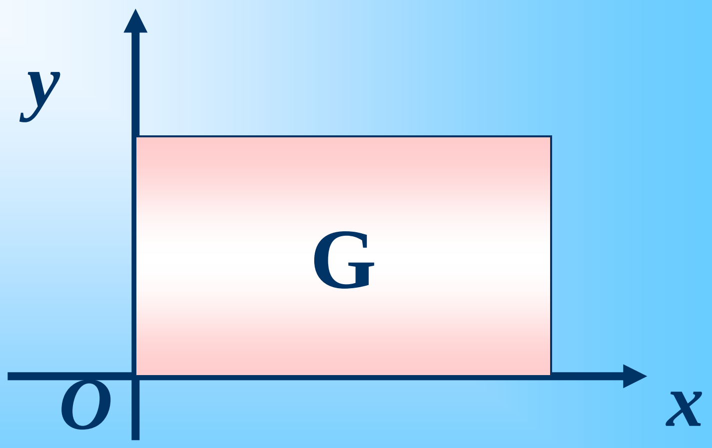
例4.3.4 设二维随机变量（X, Y）在矩形 $G=\{(x, y)|0\le x\le 2，\ 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布．记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y;\\ 1, & X>Y.\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y;\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

求 ρ_{UV}.

分析 $$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$

$$=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$



关键是求$E(UV)$ ⇨ 可先求出UV分布律.

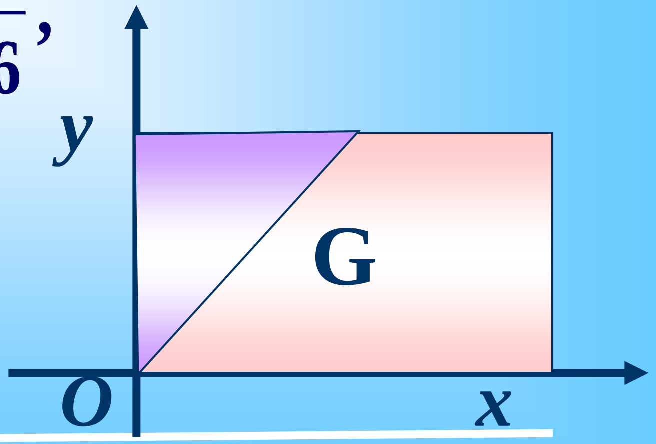
解 由已知可得

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(U)=0\times P\{X\le Y\}+1\times P\{X>Y\}=3/4=E(U^2)$$

$$D(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16},$$

同理 $E(V)=1/2,\quad D(V)=1/4,$



UV 的分布律为

$$UV=\begin{cases}0, & X\le 2Y;\\ 1, & X>2Y.\end{cases}=V$$

故 $E(UV)=E(V)=1/2,$

$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例4.3.5 某集装箱中放有100件产品, 其中一、二、三等品分别为80、10、10件. 现从中任取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品;}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\qquad (i=1,2,3)\quad \text{求}\rho_{X_1X_2}$$

需求

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$$

关键是求$E(X_1X_2)$ → 求出X_1X_2分布律

解 由已知可得

$$E(X_1)=0\times P\{抽到非一等品\}$$

$$+1\times P\{抽到一等品\}=0.8$$

$$D(X_1)=0.8(1-0.8)=0.16$$

同理 $E(X_2)=0.1 \quad D(X_2)=0.09$

$$X_1X_2=\begin{cases}1, & 抽到一等品同时抽到二等品;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$E(X_1X_2)=1\times P\{X_1X_2=1\}+0\times P\{X_1X_2=0\}$$

$$=1\times 0+0\times 1=0$$

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

例4.3.6 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0<x<1, 0<y<2(1-x);\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求：(X, Y)的协方差矩阵。

分析 计算(X, Y)的协方差矩阵，本质上就是计算X、Y的方差和协方差.

解 先计算 $E(X)$, $E(Y)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6x^2ydy$$

$$=\int_0^1 12x^2(1-x)^2dx=\frac{2}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6xy^2dy$$

$$=\int_0^1 16x(1-x)^3dx=\frac{4}{5}$$

为计算方差，再计算 $E(X^2)$，$E(Y^2)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6x^3 ydy=\int_0^1 12x^3(1-x)^2 dx=\frac{1}{5}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6xy^3 dy=\int_0^1 24x(1-x)^4 dx=\frac{4}{5}$$

得到

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{5}-(\frac{2}{5})^2=\frac{1}{25}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{4}{5}-(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{25}$$

为计算协方差，计算 $E(XY)$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}6x^2y^2dy=\int_0^1 16x^2(1-x)^3dx=\frac{4}{15}$$

得到

$$Cov(X, Y) = \frac{4}{15} - \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = -\frac{4}{75}$$

于是，(X, Y) 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{4}{75} \\ -\frac{4}{75} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

例4.3.7 (习题四第21题, $P127$) 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 3^2; 0, 4^2; -0.5)$, 并且

$$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$$

试求:

(1) Z 的数学期望和方差;

(2) X与Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(3) X与Z 是否相互独立?

解 (1) $E(Z)=\dfrac{E(X)}{3}+\dfrac{E(Y)}{2}=\dfrac{1}{3}+0=\dfrac{1}{3}$

$$D(Z)=\frac{D(X)}{3^2}+\frac{D(Y)}{2^2}$$

$$+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\underline{\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

协方差

$$=\frac{3^2}{3^2}+\frac{4^2}{2^2}+\frac{1}{3}\times(-0.5)\times3\times4=3$$

(2) 计算相关系数 ρ_{XZ}，先求协方差

$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$$

$$=Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-0.5)\times 3\times 4=0$$

因 $D(X)>0$, $D(Z)>0$, 故 $\rho_{XZ}=0$.

(3) (X, Z)是正态分布随机变量(X, Y)的线性组合，也服从二维联合正态分布.

$\rho_{XZ} = 0$,即 X与Z 不相关，从而X与Z 相互独立.