§3.2 随机变量的独立性

一、二维随机变量的独立性

随机事件A 与B 相互独立，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

定义 设(X, Y)是二维随机变量，若对任意实数对(x, y)均有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

成立，称X与Y **相互独立**.

意义 对任意实数对(x, y)，**随机事件**

$$\{X \le x\}、\{Y \le y\}$$

<u>都相互独立.</u>

等价条件:

1. X与Y相互独立 ⟺ $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

对任意实数(x, y)均成立.

2. (离散型)X与Y相互独立 ⟺

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

或 $$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$$

对所有$(x_i\,,\,y_j\,)$均成立.

注 若否定结论，只需找到一对(i, j)使

$$p_{ij}\neq p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$$

3. (连续型)X与Y相互独立 ⟺

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

在平面上除去“面积”为0 的集合外成立.

例3.2.1 例3.2.2 例3.2.3 练习

二. 多维随机变量的独立性

定义 设 n 维随机变量（$X_1, X_2, \ldots X_n$)的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$， 若对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i),$$

称 $X_1, X_2, \ldots X_n$ **相互独立**.

注 对任意实数向量$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n个随机事件 $A_k=\{X_k \le x_k\}, k=1,2, \ldots, n$， 都相互独立.

思考 随机事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，应有以下

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s})$$

2^n-n-1个等式同时成立, 缺一不可.如何理解?

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\lim_{\substack{x_k\to+\infty\\ k=3,4,\cdots,n}} F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\lim_{\substack{x_k\to+\infty\\ k=3,4,\cdots,n}} \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)F_{X_3}(+\infty)\cdots F_{X_n}(+\infty)$$

$$=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

定理3.2.1 若n维随机变量（$X_1, X_2, \dots, X_n$）相互独立，则任意k个随机变量($2 \le k \le n$)也相互独立.

注 随机变量相互独立则一定两两独立，但逆不真.

定理3.2.1 若n维随机变量（$X_1, X_2, \dots, X_n$）相互独立，则

1). 随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$也相互独立.

2) m维随机向量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与n维随机向量$(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$也相互独立.

3) 随机变量 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$g(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$也相互独立.

如 3维随机变量X_1, X_2, X_3相互独立，则

X_1^2, X_2^2, X_3^2也相互独立.

X_1+X_2与X_3也相互独立.

$\sin X_1$与X_3也相互独立.

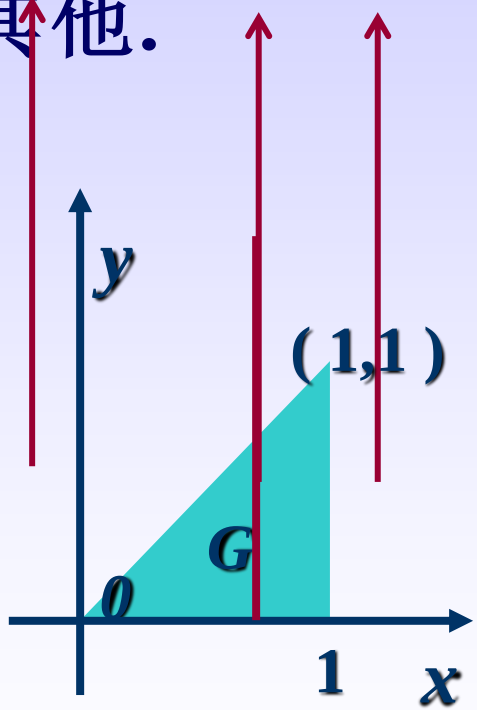
X_1+X_2与X_1-X_2不一定相互独立.

随机变量的独立性
本质上是随机事件的独立性

例3.2.2 已知二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问X, Y是否相互独立？



解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}0, & x<0 \text{ or } x>1;\\ \int_0^x 8xy\,dy, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0 \text{ or } x>1;\\ 4x^3, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0 \ or \ y>1; \\ 4y-4y^3, & 0\le y\le 1.\end{cases}$$

在区域 $G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$

$$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

故 X,Y 不相互独立.

例3.2.3 设随机变量 X, Y 相互独立, X~U(0, a) , Y~ U(0, π/ 2)且 $0 < b < a$ 试求 $P\{X < b\cos Y\}$

解

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

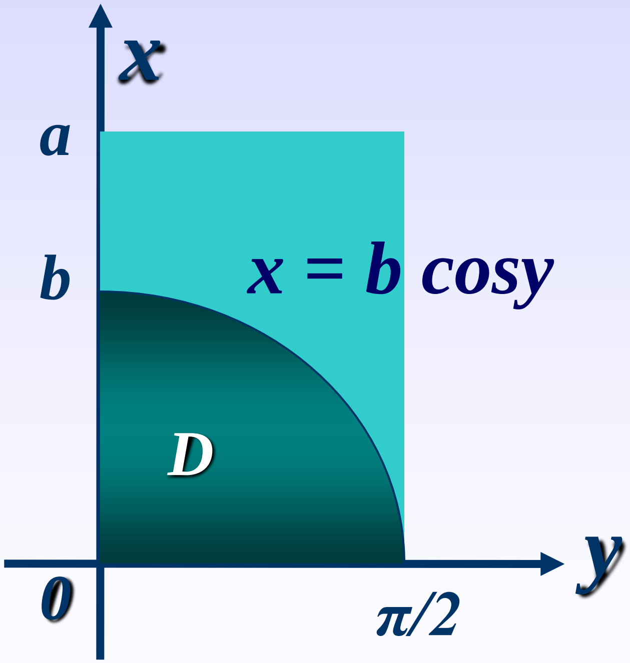
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2/\pi, & 0 < y < \pi/2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因为随机变量 X, Y 相互独立，则

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 2/a\pi, & o < x < a, 0 < y < \pi/2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$P\{X < b\cos Y\} = \iint_D \frac{2}{a\pi} dxdy$$



$$= \frac{2}{a\pi} S(D) = \frac{2b}{a\pi}.$$

练习 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 填出空白处的数值.

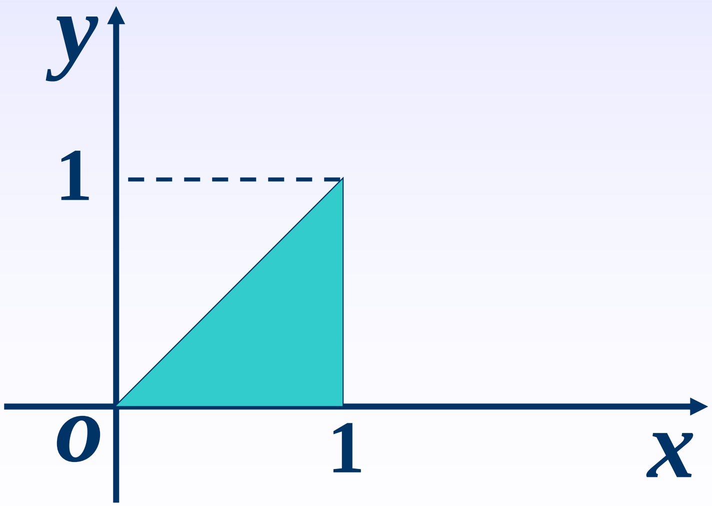
$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/24	1/8		1/4
x_2	1/8	3/8		3/4
$p_{\cdot j}$	1/6	1/2		1

例3.2.1 设随机变量 (X, Y) 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<1, 0<y<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

问: X、Y 是否相互独立?

分析 $f(x, y)$ 在如图所示区域内不等于 0，在其余区域均等于 0。

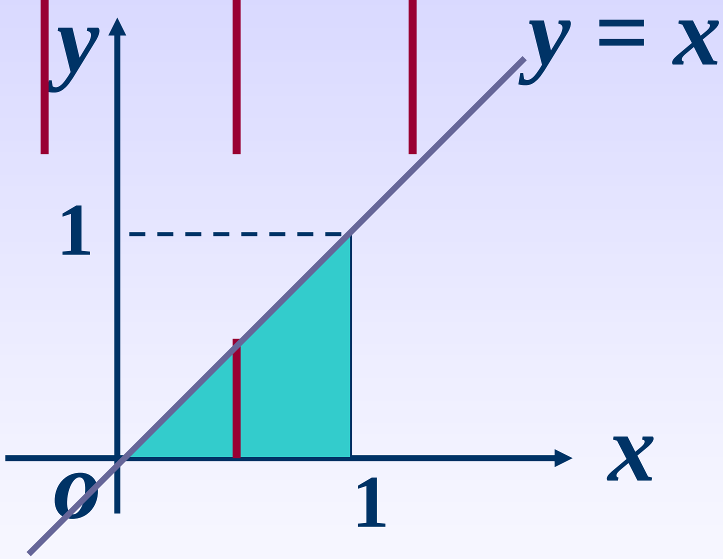


因为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $-\infty < x < +\infty$

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$时,

在整个积分路径上被积函数 $f(x,y)$ 始终为 0; 因此

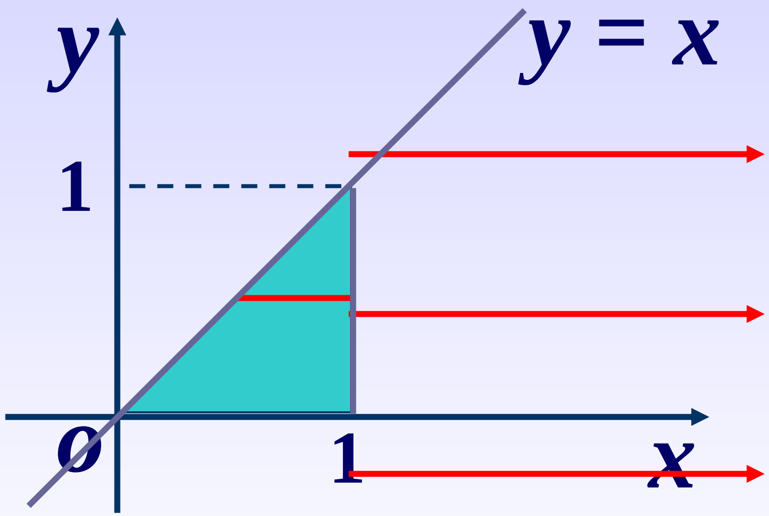
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$$



当 $0< x <1$ 时,

$$f_X(x)=\int_0^x 2dy = 2x$$

类似地, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\ ,\quad -\infty<y<+\infty$



当$y\leq 0$ 或 $y\geq 1$时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$$

当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1 2dx=2(1-y)$$

于是，

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故当 $0<x<1$ 且 $0<y<x$ 时，

找出了一个面积不为0的区域

$f(x,y)=2 \neq f_x(x)\,f_y(y)=4x(1-y)$

因此，X 与 Y 不相互独立.