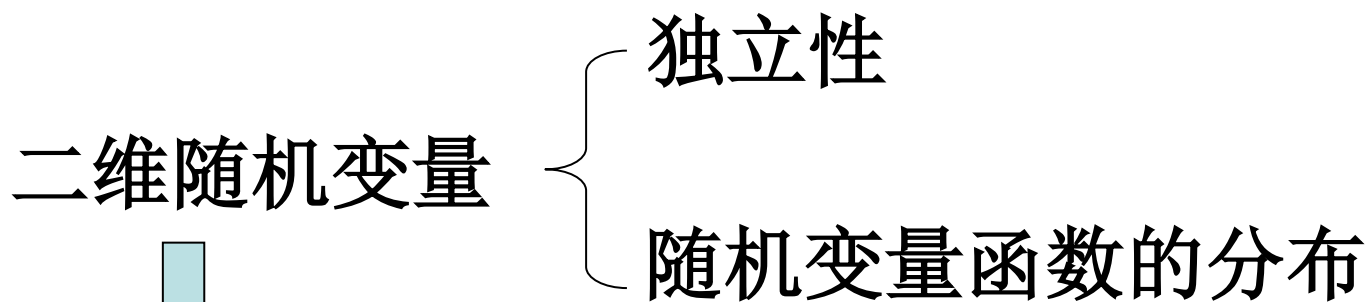


习题课（三）

各知识点的关系



联合分布 \longrightarrow 分布律、概率密度及性质

边缘分布 \longrightarrow 边缘分布函数、分布律、概率密度函数

条件分布 \longrightarrow 条件分布函数、分布律、概率密度函数



二、二维随机变量的联合分布

1、联合分布函数及其性质 1

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

1) **单调不减性** $F(x, y)$ 分别对 x, y 单调不减.

2) **有界性:** $0 \leq F(x, y) \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1 \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0,$$

3) **右连续性** $F(x, y)$ 分别关于 x 或 y 右连续.

4) **相容性:** 对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$



2、联合概率密度及性质

1) $f(x, y) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

3) 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处连续, 则

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

4) 若 $G \subset R^2$, 有

21

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) d\sigma$$



1) 验证

2) 确定参数 4,10

3) 计算概率 6

3、联合分布律及性质 例 1

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (*)$$

若 1) $p_{ij} \geq 0$; $i, j = 1, 2, \dots$

$$2) \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$



三、二维随机变量的边缘分布

由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X \leq +\infty, Y < y\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) \end{aligned}$$



边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i.} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{.j} \quad j = 1, 2, \dots$$

边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

四、随机变量的独立性

7, 8, 9, 10, 21

对任意实数对 (x, y) 均有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

即: $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

1) (离散型)

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

2) (连续型)

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

在平面上除去“面积”为0的集合外成立.



五、条件分布

条件分布律

若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则在事件 $\{Y = y_j\}$ 发生的条件下事件 $\{X = x_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ 发生的**条件概率**为

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad i = 1, 2, \dots \quad (*)$$

$$1) \quad P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} = 1$$



条件概率密度

$f_Y(y) > 0$, 有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du$$

称

$$f_{X|Y}(x|y) = F'_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

x 是自变量
 y 是固定值

为在 $Y=y$ 的条件下随机变量 X 的条件概率密度.

$$P\{a < Y \leq b | X = c\} = \int_a^b f_{Y|X}(y|c) dy$$

11, 12, 13



六、随机变量函数的分布

1、离散型 $\left\{ \begin{array}{l} \text{定理} \\ \text{离散卷积公式} \end{array} \right.$

$Y = g(X)$ 是随机变量, 则

$$\begin{aligned} P\{Y = y_j\} &= P\{g(X) = y_j\} \\ &= \sum_{x_i \in S_j} P\{X = x_i\}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中 $S_j = \{x_i | g(x_i) = y_j\}$



设随机变量 (X, Y) 是离散型随机变量, X, Y 相互独立, 其分布律分别为

$$P\{X = k\} = p(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P\{Y = r\} = q(r) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

则 $X+Y$ 的分布律为

$$P\{X + Y = m\} = \sum_{k=0}^m p(k)q(m-k) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

离散卷
积公式

例



- 2、连续型
- 1) 分布函数法
 - 2) 公式法 **16**
 - 3) 特殊函数的分布

1) **16、17、18、19、22**

(1) **先求出 Z 的分布函数 $F_Z(Z)$;**

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{G(X, Y) \leq z\}$$

$$= \iint_{\{(x,y): G(x,y) \leq z\}} f(x, y) dx dy$$

(2) **对 $F_Z(Z)$ 微分得到 $f_z(z)$;**



3) :

$$(1) M = \max(X, Y), \quad N = \min(X, Y)$$

$$(2) Z = X + Y \text{ 的分布} \quad (23)$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

若随机变量 X, Y 相互独立, 则

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

类似可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

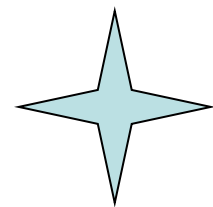
(3) $Z = X/Y$ 的分布

设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(z y, y) dy$$

3、利用分布的可加性（二项、泊松、正态）

15



6

1) 见车就乘

所求概率为:

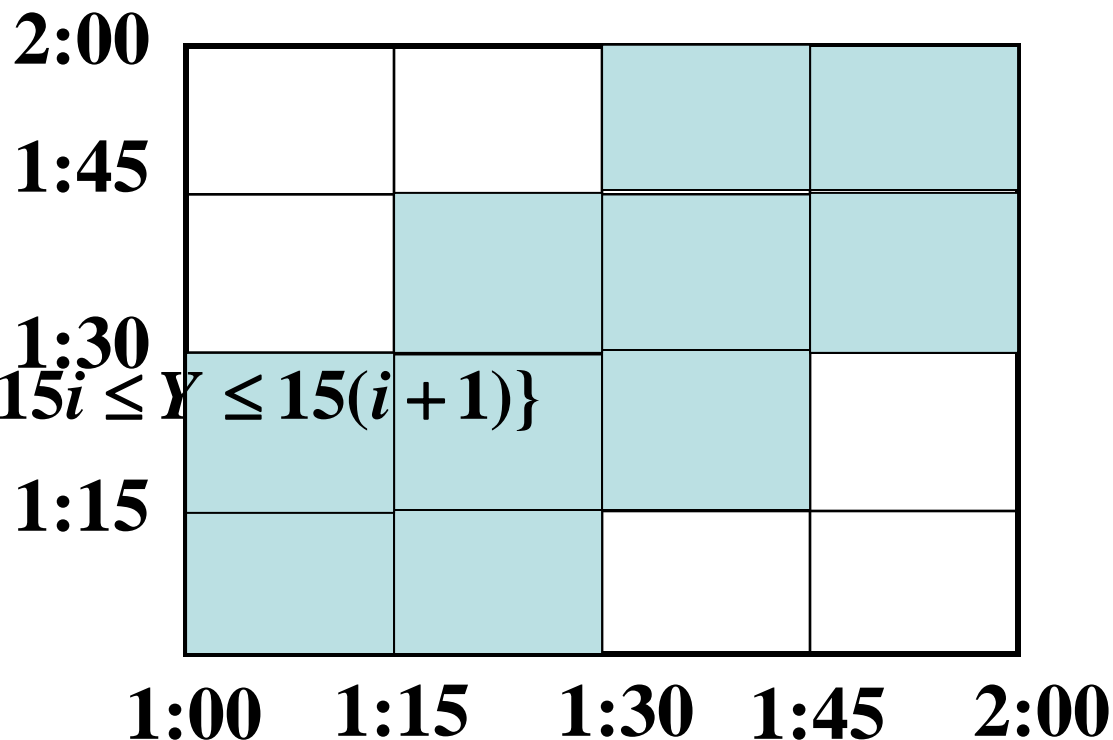
$$\sum_{i=0}^3 P\{15i \leq X \leq 15(i+1), 15i \leq Y \leq 15(i+1)\}$$

$$p=0.25$$

2) 最多等一辆车

所求概率为:

$$p=5/8$$



例1 设随机变量 Z 服从参数为1的指数分布，
引入随机变量

$$X = \begin{cases} 0 & \text{若 } Z \leq 1 \\ 1 & \text{若 } Z > 1 \end{cases}, Y = \begin{cases} 0 & \text{若 } Z \leq 2 \\ 1 & \text{若 } Z > 2 \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布律。

解： 因为 Z 服从参数为1的指数分布，故其分布函数

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$



故 (X, Y) 的联合分布律为

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{X = 0, Y = 0\} = P\{Z \leq 1, Z \leq 2\} \\ &= P\{Z \leq 1\} = F(1) = 1 - e^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{01} &= P\{X = 0, Y = 1\} = P\{Z \leq 1, Z > 2\} \\ &= P\{\emptyset\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{10} &= P\{X = 1, Y = 0\} = P\{Z > 1, Z \leq 2\} \\ &= P\{1 < Z \leq 2\} = F(2) - F(1) = e^{-1} - e^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= P\{X = 1, Y = 1\} = P\{Z > 1, Z > 2\} \\ &= P\{Z > 2\} = 1 - F(2) = e^{-2}. \end{aligned}$$



$$p = P\{X^2 + Y^2 \leq r\}$$

极坐标变换

$$x = t \cos \theta$$

$$y = t \sin \theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{r}} t \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] d\theta$$

$$= 1 - e^{-\frac{r}{2}}$$

书: 24

$$P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} \frac{1}{20\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{20}} dy \right] dx$$

极坐标变换..... = 0.5

另解:

$$\begin{aligned} P\{X \geq Y\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} \frac{1}{20\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{20}} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} \frac{1}{20\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{20}} dy \right] dx = P\{X < Y\} \end{aligned}$$

由 $P\{X < Y\} + P\{X \geq Y\} = 1$

得 $P\{X < Y\} = 0.5$



8

$\therefore X, Y$ 相互独立

$$\therefore p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$$

$$p_{12} = p_{1.} p_{.2} \quad p_{13} = p_{1.} p_{.3}$$

$$\text{即} \begin{cases} 1/9 = (1/6 + 1/9 + 1/18)(1/9 + \alpha) \\ 1/18 = (1/6 + 1/9 + 1/18)(1/18 + \beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2/9 \quad \beta = 1/9$$

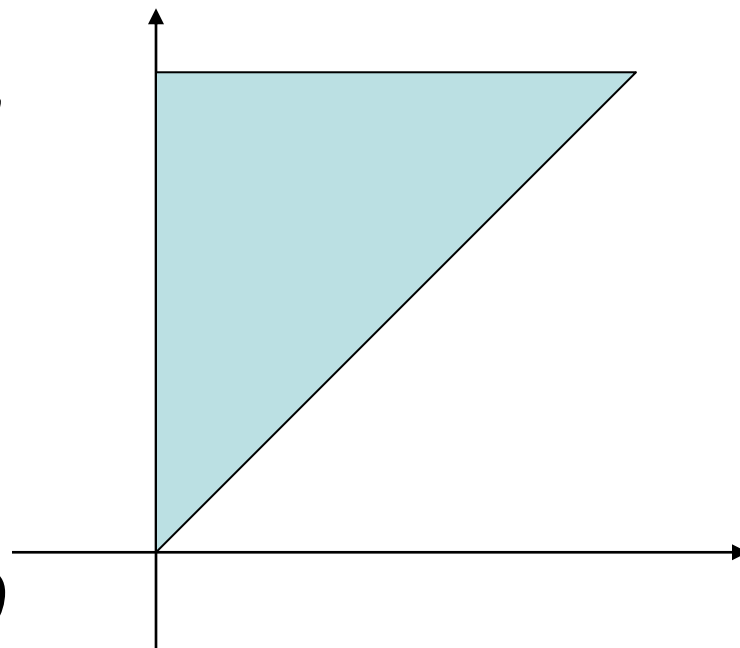
9

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_x^1 8xy dy & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x(1-x^2) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y 8xy dx & 0 < y < 1 \\ 0 & y < 0 \text{ 或 } y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4y^3 & 0 < y < 1 \\ 0 & y < 0 \text{ 或 } y > 1 \end{cases}$$

在区域 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 中

$$f(x, y) \neq f_X(x) * f_Y(y)$$

X, Y 不相互独立



21

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-2y}, & 0 \leq x \leq 2, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

X, Y相互独立

$$a^2 + Xa + Y = 0 \quad \text{有根} \quad X^2 - 4Y \geq 0 \quad \text{即: } Y \leq \frac{X^2}{4}$$

$$\begin{aligned} P\{Y \leq \frac{X^2}{4}\} &= \iint_{y \leq \frac{x^2}{4}} f(x, y) dx dy = \iint_{y \leq \frac{x^2}{4}} e^{-2y} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{4}} e^{-2y} dy \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 (e^{-\frac{x^2}{2}} - 1) dx = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\phi(2) - \phi(0)) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\phi(2) - 0.5) \end{aligned}$$



(2)

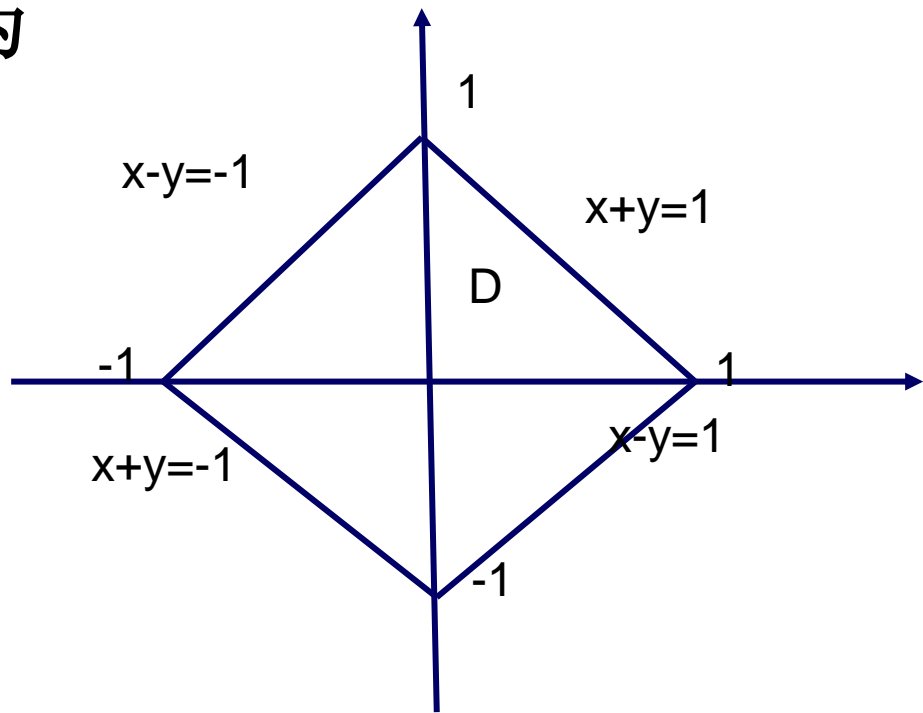
$$\begin{aligned} P\{X + 2Y \leq 3\} &= \iint_{x+2y \leq 3} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} e^{-2y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - e^{-3+x}) dx = 1 - \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-3} \end{aligned}$$



11、随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，其中
 $D=\{(x,y):|x+y|\leq 1, |x-y|\leq 1\}$ ，讨论 X 与 Y 是否相互独立。
讨论 $f_{Y|X}(y|x)$ 的存在区间，并在 $X=0$ 的条件下求
 $f_{Y|X}(y|0)$ 。

解、 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$



因

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-1-x}^{x+1} \frac{1}{2} dy = 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} dy = 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 1+y, & -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $(x,y) \in D$ 时

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f_X(x)f_Y(y),$$

故 X 与 Y 不相互独立

当 $x \in (-1,1)$ 时, 因 $f_X(x) > 0$, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$
有定义, 且

$$f_{Y|X}(y|0) = \frac{f(x,y)}{f_X(0)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



书: 17

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^3 \frac{1}{3} \sin x dy = \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \sin x dx = 1/3 & 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1/3 & 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 \leq y \leq 3, f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



例2、设 (X, Y) 的密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

求：1. 边缘密度函数； 2. 条件密度函数；

3. $P\{X > 2 | Y < 4\}$.

解：1.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

2. 当 $x > 0$, $f_X(x) > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{x-y}, & y > x; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

当 $y > 0$, $f_Y(y) > 0$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & x < y; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$



$$3. \quad P\{X > 2|Y < 4\} = \frac{P\{X > 2, Y < 4\}}{P\{Y < 4\}}$$

$$= \frac{\int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy}{\int_0^4 y e^{-y} dy} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}}$$



例、设 X , Y 是相互独立同分布的离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = n\} = P\{Y = n\} = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$$

求 $X + Y$ 的分布律

$$\begin{aligned} & P\{X + Y = m\} \\ &= \sum P\{X = k\}P\{Y = m - k\} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} P\{X = k\}P\{Y = m - k\} \quad k \geq 1 \quad m - k \geq 1 \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^m} = \frac{m-1}{2^m} \quad m \geq 2 \end{aligned}$$

15 $P\{-\sqrt{2} < X + Y < 2\sqrt{2}\}$

坐标或极坐标变换…… = 0.8185

另解：

易知 X, Y 相互独立.

从而 $X + Y \sim N(0, 2)$

$$P\{-\sqrt{2} < X + Y < 2\sqrt{2}\} \\ = \Phi\left(\frac{2\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 0.8185$$



16、设随机变量 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 试写出 $Y=|X|$ 的概率密度。

解、

$$F_Y(y) = P\{|X| \leq y\} = \begin{cases} P\{-y < X < y\}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-y}^y \varphi_X(x) dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \varphi_X(y) + \varphi_X(-y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$



例3、随机变量 (X, Y) 在

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解： (X, Y) 的联合密度为

$$\therefore f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in G; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$



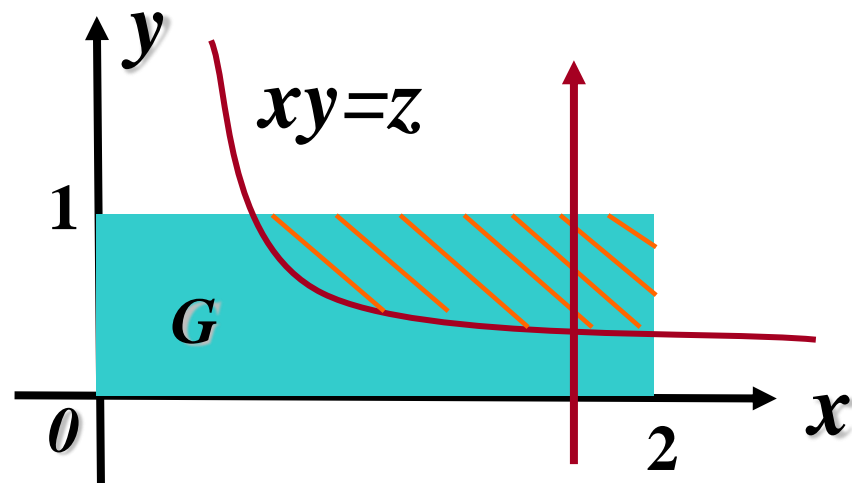
$$Z = XY, \text{ 当 } 0 < z < 2$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = 1 - P\{XY > z\}$$

$$= 1 - \iint_{xy > z} f(x, y) dx dy$$

$$= 1 - \int_z^2 dx \int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{2} dy$$

$$= \frac{z}{2} (1 + \ln 2 - \ln z)$$



$$\text{当 } z \leq 0, \quad F_Z(z) = 0; \quad \text{当 } z \geq 2, \quad F_Z(z) = 1;$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln z), & 0 < z < 2; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$



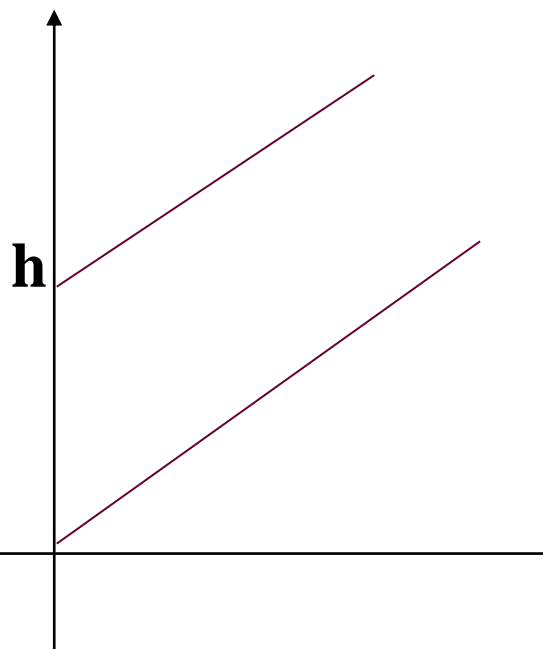
书: 31

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

$$G = \{(x, z) \mid x > 0, 0 < z - x < h\}$$

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \frac{1}{h} & (x, z) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{其他} \\ \int_0^z \frac{\lambda}{h} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{h} (1 - e^{-\lambda z}) & 0 < z \leq h \\ \int_{z-h}^z \frac{\lambda}{h} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{h} e^{-\lambda z} (e^{-\lambda z} - 1) & z > h \end{cases}$$



2、已知随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{4}{15}, & -1 \leq x < 1 \\ \frac{11}{15}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

(1) 写出X的分布律； (2) 计算概率 $P\{X=1.5\}$ 和 $P\{X \geq 1.5\}$ ， (3) 计算条件概率 $P\{X \leq 1.5 | X \geq 0.5\}$.

解、(1) 根据分布函数的间断点知，X的可能取值为-1, 1, 2

$$P\{X = -1\} = F(-1) - F(-1-0) = \frac{4}{15}, P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = \frac{7}{15},$$

$$P\{X = 2\} = F(2) - F(2-0) = \frac{4}{15},$$

$$(2) P\{X = 1.5\} = 0, P\{X \geq 1.5\} = 1 - P\{X < 1.5\} = 1 - F(1.5) = \frac{4}{15}$$

$$(3) P\{X \leq 1.5 \mid X \geq 0.5\} = \frac{P\{0.5 \leq X \leq 1.5\}}{P\{X \geq 0.5\}} = \frac{F(1.5) - F(0.5)}{1 - F(0.5)} = \frac{7}{11}$$

3、（15分） 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} C(1-x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求（1）常数 C ；

（2） X 的分布函数 $F(x)$ ；

（3） $P\{0 \leq X \leq 0.5\}$

解：（1）由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 C(1-x^2)dx = \frac{4}{3}C$

得 $C = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \int_{-1}^x \frac{3}{4}(1-t^2)dt, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad P(0 \leq X \leq 0.5) = F(0.5) - F(0) = \frac{11}{32}$$

4、（15分） 设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

试求：

(1) (X, Y) 求关于 X 与 Y 的边缘密度函数；

(2) 讨论 X 与 Y 是否独立；

(3) 求 $f_{Y|X}(y|x)$

(4) 计算 $P(|Y| < \frac{1}{3} | X = \frac{1}{2})$

解 (1)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 1 dy = 1 + y, & -1 < y < 0, \\ \int_y^1 1 dy = 1 - y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 当 $(x, y) \in \{|y| < x, 0 < x < 1\}$ 时

$\because f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y) \quad \therefore X$ 与 Y 不相互独立

(3) 当 $0 < x < 1$ 时:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x} & |y| < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x \notin (0,1)$ $f_{y|x}(y|x)$ 不存在

(4)

$$P(|Y| < \frac{1}{3} | X = \frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f_{Y|X}(y | \frac{1}{2}) dy = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 dx = \frac{2}{3}$$

5、(10分)设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

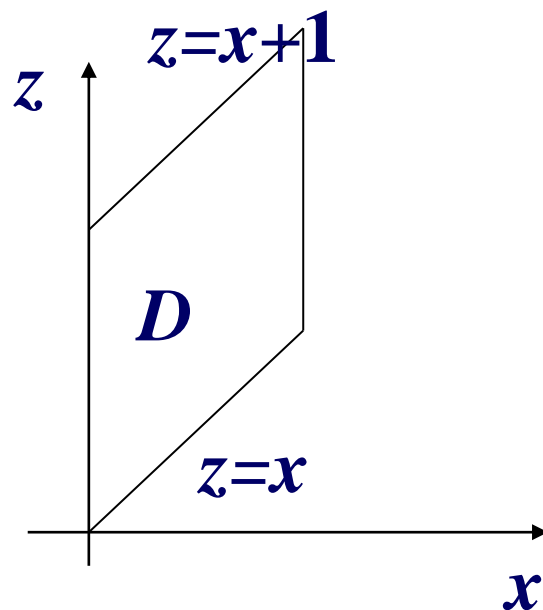
求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解:

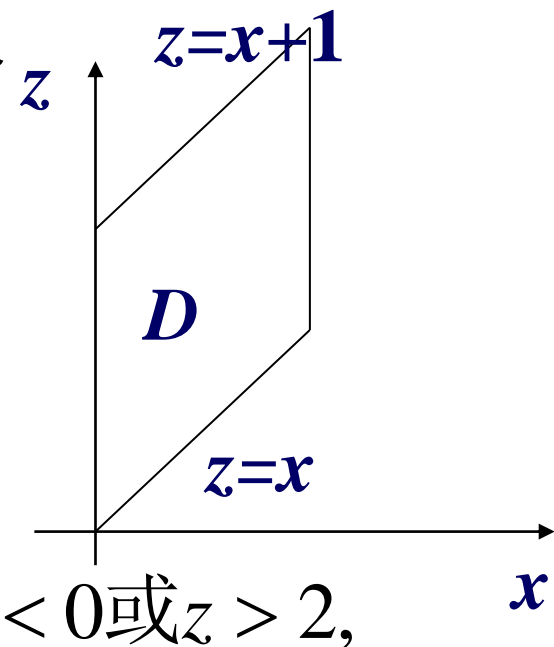
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

$$D = \left\{ (x, z) \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z-x \leq 1 \end{array} \right. \right\}$$

其中 D 如图



$$f_X(x)f_Y(z-x) = \begin{cases} 2(z-x), & (x,z) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



则

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ 或 } z > 2, \\ \int_0^z 2(z-x)dx = z^2, & 0 \leq z \leq 1, \\ \int_{z-1}^1 2(z-x)dx = 2z - z^2, & 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$