probability
probability

第 四 章

随机变量的数字特征

probability
probability

§4.1 随机变量的数学期望

§4.2 随机变量的方差

§4.3 协方差、相关系数与矩

§4.4 n 维正态随机变量

用概率分布描述随机变量的全面情况，但常常遇到无法完整确定随机变量取值规律的情况，或者根据实际问题的需要，只须给出随机变量的某些特征。

在本章，从数值的角度定义随机变量的统计特征，称为**随机变量的数字特征**。

§4.1 数学期望

一. 随机变量的数学期望

引 例

定义4.1.1 设X是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1,2,3....$$

若 $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i < +\infty$ 则称

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$ 为X的数学期望(均值).

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$,

若 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<+\infty$$

称 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

为X的**数学期望(均值)**.

注1 随机变量的数学期望是它所有可能取值的加权平均值，**是一个数**.

注2 部分随机变量X的数学期望不存在.

定义中要求条件无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

绝对收敛，保证数学期望有唯一的数值.

同样，对连续型随机变量的无穷广义积分要求绝对收敛也出于相同的考虑。

如果绝对收敛不能得到满足，称随机变量的数学期望不存在.

教材例4.1.2，例 4.1.4

1.两点分布 $E(X)=p$

X	0	1
P	$1-p$	p

2. $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$; 证 明

3. $X\sim P(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$; 证 明

4. 均匀分布 $E(X)=(b+a)/2$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b];\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

5.指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

$E(X)=\lambda^{-1}$

证 明

6. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$；

证 明

二. 随机变量的函数的数学期望

设X 是随机变量,$Y=g(X)$也是随机变量,如何计算$E[g(X)]$?

思路

先确定$g(X)$的分布 ⇒ $E[g(X)]=?$

定理4.1.1* 设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$，$g(x)$ 为连续函数

本章核心定理

1) X 是离散型随机变量，分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,3\ldots.$$

若：$\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$$

2) X是连续型随机变量，其概率密度为$f_X(x)$.

若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)<+\infty$ 则

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx$$

例 4.1.1

例 4.1.2

例 4.1.3

思考 如何将定理推广到二维甚至更多维的情况?

定理4.1.2 设 (X, Y) 是二维随机变量, 如果 $Z = G(X, Y)$ 也是同类型随机变量并且数学期望存在, 则有

(1) 当(X, Y) 是离散型随机变量时

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}G(x_i, y_j)p_{ij}$$

(2) 当(X, Y) 是连续型随机变量时

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)dxdy$$

例 4.1.4　　例 4.1.5

练习 设随机变量X与Y相互独立，且$X, Y \sim N(0, \frac{1}{2})$，则 $E(|X-Y|) =$ ________

解答

三. 随机变量的数学期望的性质

设 $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ 是随机变量， c, b 是常数

1） $E(c) = c$;

2）$E(cX) = cE(X)$;

证 明

1)与2） ⟺ $E(cX+b) = cE(X)+b$.

3） $$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i);$$

4）若$X_1, X_2, \ldots, X_n$**相互独立**，则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

例 4.1.6

例 4.1.7

例 4.1.8

Ex. 摸彩赌博问题

一个庄家在一个签袋中放有8个白、8个黑的围棋子.规定：每个摸彩者交一角钱作"手续费"，然后一个从袋中摸出五个棋子，按下面"摸子中彩表"给"彩金".

摸到	五个白	四个白	三个白	其它
彩金	2元	2角	5分	共乐一次

庄家付出的彩金Y的分布律为

Y	0	0.05	0.2	2
$P\{Y=y_i\}$	0.5001	0.3589	0.1282	0.0128

假设进行了100人次的赌博,则他可能需付出的彩金为:

$0\times0.5001\times100+0.05\times0.3589\times100$

$+0.2\times0.1282\times100+2\times0.0128\times100$

$=1.7945+2.564+2.56=6.9185$(元)

平均每人次付出的彩金为

0.06919(元)=0×0.5001+0.05×0.3589+0.2×0.1282 +2×0.0128

$$= \sum_{i=1}^{4} y_i P\{Y = y_i\}$$

加权平均

是随机变量的所有可能取值按概率大小的加权平均值.

与彩金的算术平均

(0+0.05+0.2+2)/4=0.5625(元)

比较，哪个更合理?

1.$X\sim P(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$;

证明 $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $(k=0,1,2,\ldots.)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} \qquad (m=k-1)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

2. $X \sim B(n, p)$，则 $E(X) = np$;

证明

$$P\{X = i\} = C_n^i (1-p)^{n-i} p^i, \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i C_n^i (1-p)^{n-i} p^i$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)} p^{i-1}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1} = np.$$

可利用二项分布的可加性证明，见例4.1.12

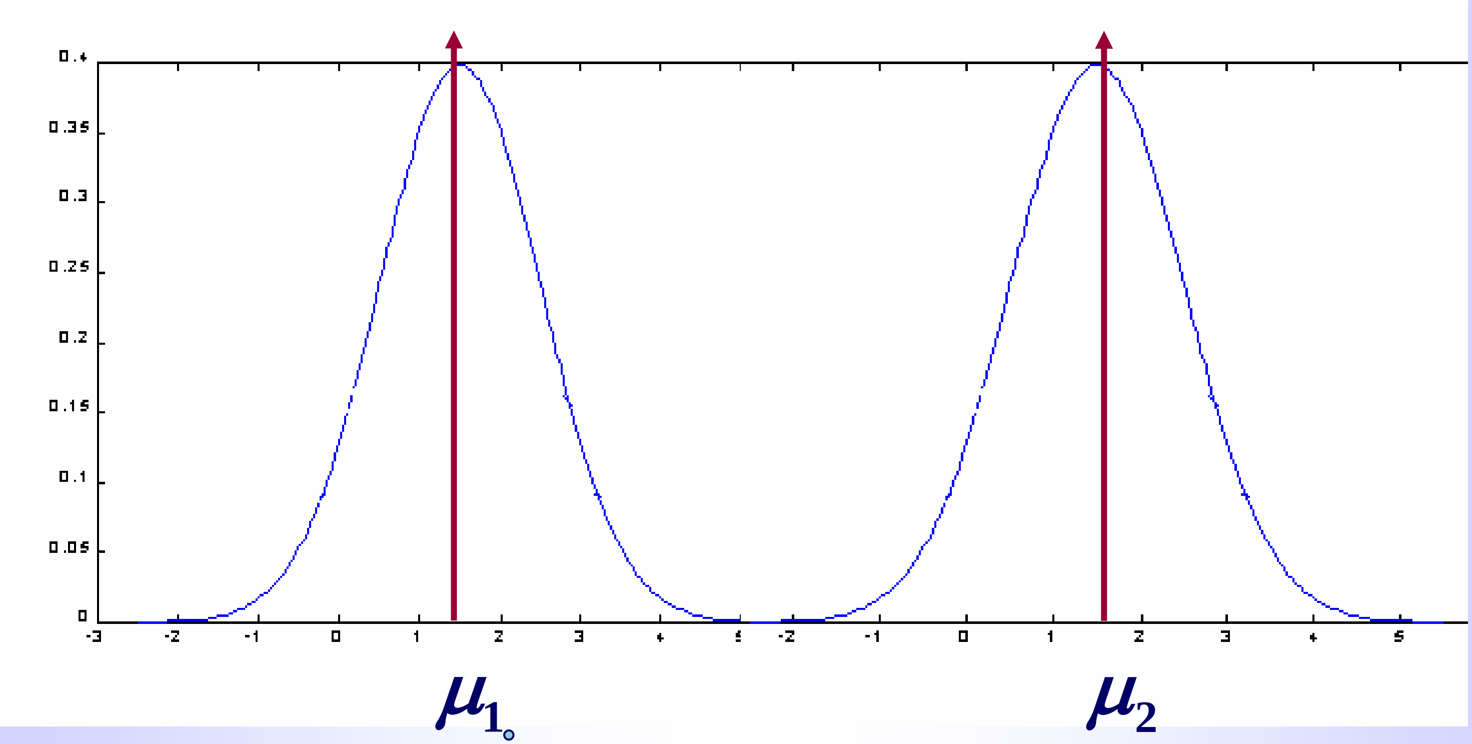
3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$;

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t = \frac{x-\mu}{\sigma}}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \mu$$



位置参数

6 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}ue^{-u}du=\frac{1}{\lambda}$$

例4.1.1　设随机变量X 的数学期望存在.

证明: $E\{[X - E(X)]^2\}=E(X^2) - [E(X)]^2$

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0;\\ 1-x, & 0\le x<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求 $E\{[X-E(X)]^2\}$.

证明 $E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\{x^2-2xE(X)+[E(X)]^2\}f(x)dx$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$\because E(X)=0$ (参见例4.1.3)

$$\therefore E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx$$

$$=1/6.$$

例4.1.2 设球的直径$X\sim U(a,b)$，求球的体积的数学期望$E(V)$.

解 体积$V=(\pi/6)X^3$,可得

$$f_V(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\sqrt[3]{\dfrac{2}{9\pi}}\,y^{-\frac{2}{3}}, & \dfrac{\pi}{6}a^3\le y\le\dfrac{\pi}{6}b^3;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 $E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_V(y)dy=\dfrac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2).$

另解

$$E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{\pi}{6}x^3dx$$

$$=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

例4.1.3 过半径为R的圆周上的已知点，与圆周上的任意点相连，求这样得到的弦的平均长度.

解 以已知点为原点, 过已知点的直径为 x 轴正向，如图所示.

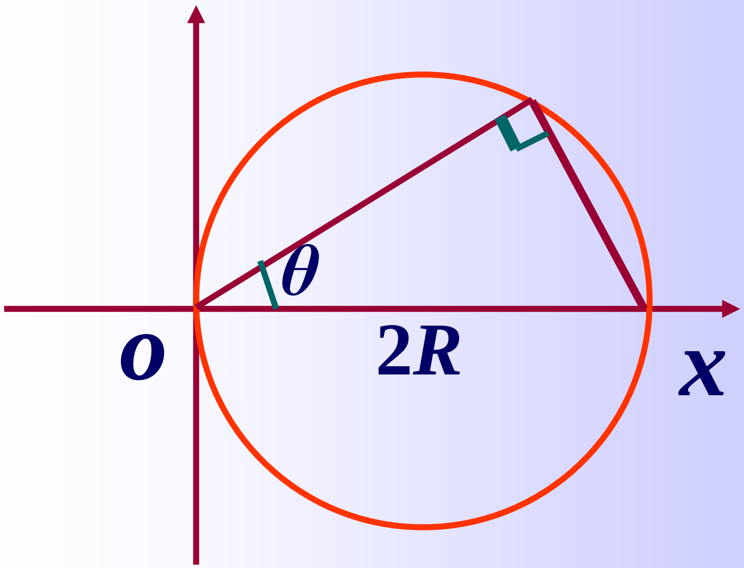
设弦与直径的夹角为θ

则 θ均匀分布于区间

$$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

设弦长为 L，则有

$$L = 2R\cos\theta$$ （如图所示）



所以，平均弦长为

$$E(L)=\int_{-\infty}^{+\infty}(2R\cos x)f_{\theta}(x)dx$$

由于

$$f_{\theta}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

因此

$$E(L)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2R\cos x)\frac{1}{\pi}dx=\frac{4R}{\pi}$$

总结 **若先求出** L **的概率密度，再计算数学期望，将是很繁杂的过程.**

例4.1.4 设随机变量X,Y相互独立,且

$$P\{X=x_i\}=p_{i.}\quad i=1,2,\ldots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{.j}\quad j=1,2,\ldots$$

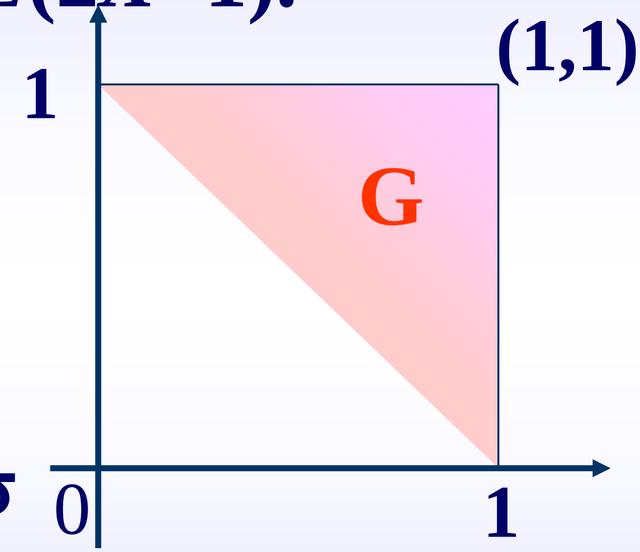
$E(X)$, $E(Y)$存在, 求$E(XY)$

解 $$E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{i.}p_{.j}=\sum_i x_i p_{i.}\sum_j y_j p_{.j}$$

$$=E(X)E(Y)$$

例4.1.5 设随机变量(X, Y)在以$(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求$E(X+Y)$、$E[(X+Y)^2]$、 $E(2X+1)$.



解

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G;\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$$E(X+Y)=\iint_{R_2}(x+y)f(x,y)d\sigma$$

$$=2\iint_{G}(x+y)d\sigma=2\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}(x+y)dy=\frac{4}{3}.$$

$$E[(X+Y)^2] = \iint_{R_2} (x+y)^2 f(x,y) d\sigma$$

$$= 2\iint_G (x+y)^2 d\sigma = 2\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x+y)^2 dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 [(x+1)^3 - 1]dx = \frac{11}{6}.$$

$$E(2X+1) = \iint_{R_2} (2x+1) f(x,y) d\sigma$$

$$= \iint_D 2(2x+1) d\sigma = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 2(2x+1) dy = \frac{7}{3}.$$

练习 设随机变量X与Y相互独立，且$X, Y \sim N(0, \frac{1}{2})$

则 $E(|X-Y|) =$ ____________.

解 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in R^2$

$$E(|X-Y|) = \iint_{R^2} |x-y| f(x,y) d\sigma = \cdots\cdots\cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

另解

$$\left.\begin{array}{l} X, Y\text{相互独立} \\ -Y \sim N(0, \frac{1}{2}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{具有可加性}]{\text{正态分布}} X - Y \sim N(0,1)$$

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[-e^{-\frac{y^2}{2}}]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

证明 $E(cX+b) = cE(X)+b$

(仅就X为连续型的情况给出证明)

$$E(cX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty}(cx+b)f(x)dx$$

$$= c\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$= cE(X)+b$$

例 4.1.6 证明

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$$

证明

$$左边=E\{XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

例4.1.7 随机变量X的分布为

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

试求 $E(X)$.

原始模型 N个球中有M个红球,余下为白球,从中任取n个球，n个球中的红球数为X

分析： 1）直接求解很困难, 应利用数学期望的性质求解.

2）设想这n个球是逐个不放回抽取的，共取了n 次.

令X_i表示第 i 次取到红球的个数,有

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

且 $X_i \sim B(1, p)$, $i=1,2, \ldots, n$

3) 由抽签的公平性有 $p = \mathrm{P}\{X_i=1\}=M/N$.

从而 $E(X_i)=1 \times M/N+0 \times (1-M/N)= M/N$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\frac{nM}{N}$$

问题 随机变量X 是否服从二项分布?

为什么?

例4.1.8 向某一目标进行射击，直至命中k次为止. 已知命中率为$p>0$.求射击次数X的数学期望.

分析 X的分布律为

$$P\{X=j\}=C_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k},\quad j=k,k+1,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{j=k}^{+\infty} jC_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k}$$

用数学期望和的性质进行求解.

数学期望

… 1 … 2 … i-1 … i … k …

X_i表示第i - 1次命中以后, 到第 i 次命中的射击次数, 则

$$X=X_1+X_2+\ldots.+X_k$$

X_i的分布律为

X_i	1	2	…..	m	……
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	…..	$(1-p)^{m-1}p$	……

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1}p$$

$$=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} m x^{m-1}\right]_{x=1-p}=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} x^{m}\right]'_{x=1-p}$$

$$=p\left[\frac{x}{1-x}\right]'=p\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p}=\frac{1}{p}$$

从而 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_k)=\dfrac{1}{p}k.$