§1.3 概 率

一、概率

随机事件发生的可能性大小是一个客观存在的量.

例如 ⇨ 抛硬币试验 摸球试验

<u>概率</u>是对随机事件发生可能性大小的客观度量.

事件<u>A出现的概率</u>（Probability）记为$P(A)$.

如何计算概率？怎样客观量度随机事件发生可能性大小？

二、频率

定义：在相同条件下，进行n 次试验，事件A 发生了m 次，称比值

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

为事件A发生的频率.

频率在一定程度上反映了事件发生可能性的大小.

频率可能因人因时或试验次数的变化而改变.

例如:　抛硬币试验

频率具有稳定性：在一定条件下，频率稳定于概率.

三、古典概率

事件的可能性分析 ⟶ 赌金分配问题

定义 设E是一个随机试验,若它满足以下两个条件:

(1) 仅有有限多个基本事件;

(2) 每个基本事件发生的可能性相等.

则称E 为古典概型试验.

例如: ⟶ 抛硬币试验　产品抽检试验

定义 设试验E为古典概型试验，A_i，i=1,2,…,n是基本事件,则由

$$P(A)=\frac{A\text{所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

$$=\frac{A\text{所含样本点的数目}}{\text{样本空间的样本点总数}}$$

所确定的概率称为事件A的**古典概率**.

例如：

掷骰子　　赌金分配

鸽笼问题　　摸球试验

注：在古典概率的计算中常用到排列组合的知识，如乘法原理、加法原理等等。

古典概率具有如下三个性质：

(1) 对任意事件A，有$0\le P(A)\le 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若A_1，A_2，…，A_m互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

证明 和事件所含基本件数为$\sum k_i$, 且

$P(A_i)=k_i/n$， $n=1,2, \ldots .m$ ，故

$$\sum P(A_i)=\sum k_i/n=(\sum k_i)/n$$

四、概率的统计定义

在相同条件下重复进行的 n 次试验中，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且随 n 越大摆动幅度越小，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

对本定义的评价

优点：直观易懂

缺点：粗糙模糊

不便使用

五 概率的公理化定义

频率不是概率； 古典概率局限性；

用抽象化方法定义概率.

定义： 设E的样本空间为Ω，对于E 的每个事件A均对应于唯一一个实数，记为$P(A)$，其对应规则为

1. (非负性) 对任一事件A, 有$0 \le P(A) \le 1$;

2. (规范性) $P(\Omega)=1$;

3. (可列可加性) E 的事件列$A_1, A_2, \ldots,$ 互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

称P(A)是A 的概率.

由公理化定义可以得到如下重要性质:

1. 不可能事件的概率为0, 即$P(\phi)=0$;

逆不真

证明： $\phi \cup \phi \cup \cdots = \phi$ ⇒

$$P(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\phi) \Rightarrow P(\phi)=0.$$

2. (有限可加性) 若试验E的事件组 $A_1, A_2, \ldots, A_m$互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

3. 对立事件概率之和为1, 即

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

证明　$\mathbf{A}\cup\bar{\mathbf{A}}=\Omega,\ \mathbf{A}\cap\bar{\mathbf{A}}=\phi$

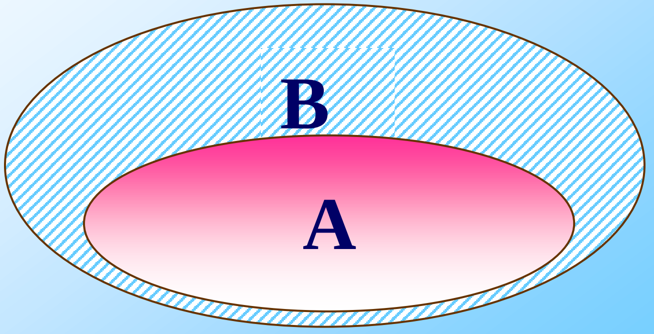
4. (概率单调性) 若事件A和B满足$\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$, 则有

$$P(A)\le P(B),\quad P(B-A)=P(B)-P(A)$$

证明

$$B=A\cup(B-A),\text{且}$$

$$A\cap(B-A)=\phi$$



由概率的有限可加性，得

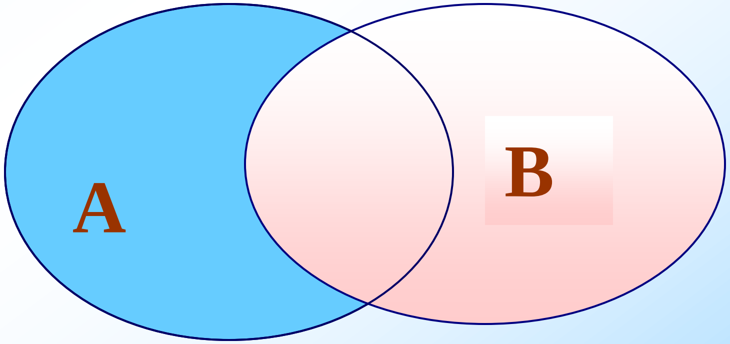
$$\Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(B-A)$$

$$\mathrm{P(B) - P(A) = P(B-A) \geq 0.}$$

有用结论：

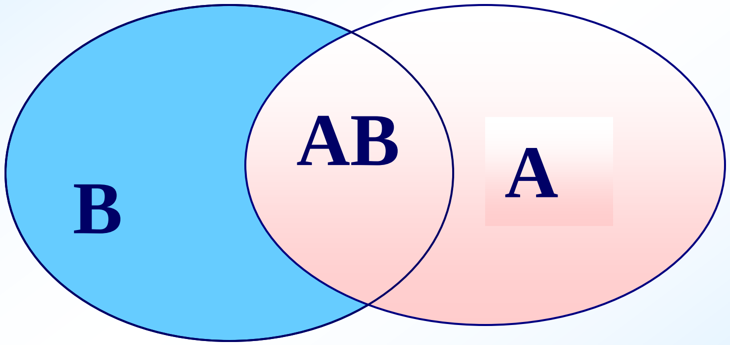
(1) $\mathrm{P(A-B) = P(A) - P(AB);}$

(2) $\mathrm{P(A-B) = P(A \cup B) - P(B).}$



概率加法定理: 对试验E 的任意两个事件A和B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



概率的公理化定义及性质,为概率的计算提供了更完善的理论依据.

见P_{13}例1.2.7　古典概率是公理化定义的特例.

例如：

抽检试验　　放球试验

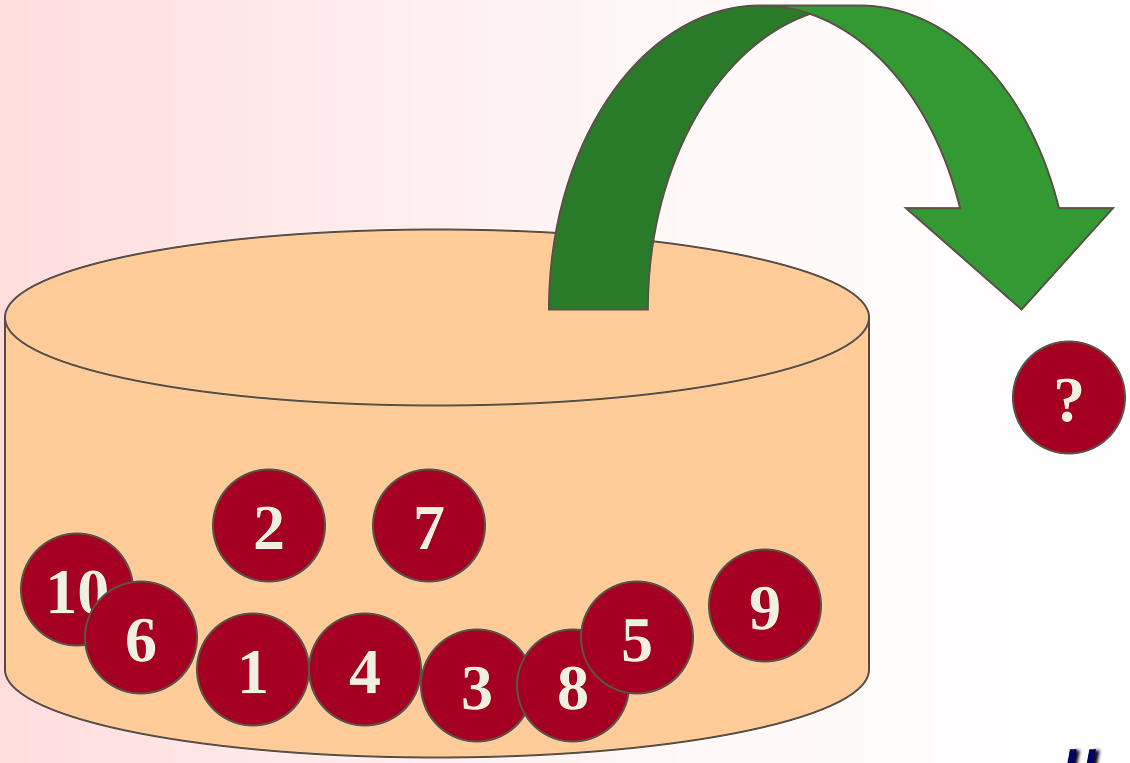
例1 抛一枚均匀硬币，观察其出现正面H和反面T的情况.

通过实践与分析可得：硬币出现正面的可能性等于它出现反面的可能性.

#

例2 从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码.

在一定条件下摸出任一号码的小球的可能性是相同的，这是客观存在的事实.



#

例3 抛一枚均匀硬币, 观察其出现正面H和反面T的情况.

质地均匀的硬币出现正反面具有等可能性.

历史上几位著名科学家实际实验记录结果如下:

实验者	抛掷次数	出现正面次数	m/n
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

#

例6 故事发生在十七世纪中叶，法国贵族德·美黑热衷于赌博，经常遇到赌资分配问题。他曾写信向当时法国的大数学家Pascal 请教问题：

假如一场比赛中先胜3局才算赢，两个赌徒在一人胜2局，另一人胜1局的情况下中断赌博，如何分配赌金?

有两种方案　2:1；　3:1；

Pascal 和当时第一流的数学家 Fermat 研究了此问题，得到正确的解答：**3 : 1.**

依据？

例7　抛一枚质量分布均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况.

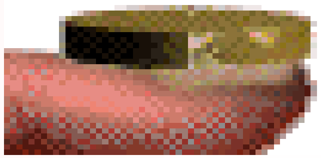
是一个古典概型的随机试验.

因为该试验的基本事件只有两个：

$$\{\omega_1\}=\{出现正面H\},$$

$$\{\omega_2\}=\{出现反面T\}.$$

而且基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性相等.　#



例8 非古典概型试验

E_5 检查N件产品中的次品个数, 因基本事件

$$A_i = \{次品个数为 i\}, \quad i = 0,1,2, \ldots, N.$$

出现的可能性不均等.

E_6 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达30小时，测该元件还能使用多少小时?

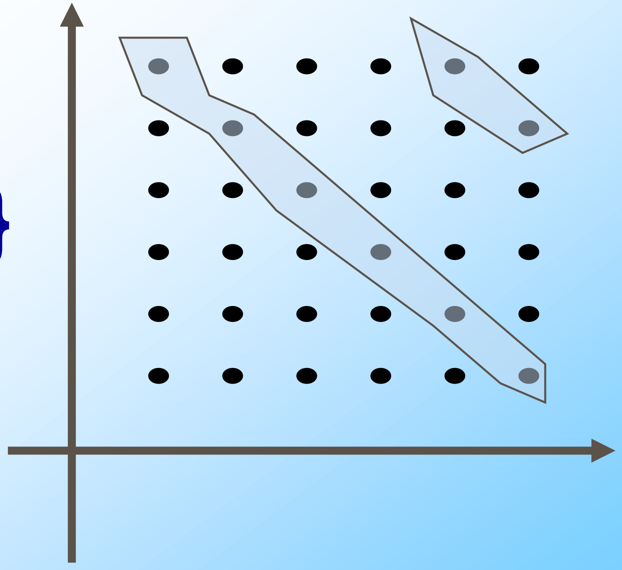
它的样本空间有无数多个样本点

故 E_5、E_6 都不是古典概型试验.

#

例9 :将两颗均匀骰子抛掷一次,求两颗骰子点数之和不为7,11的概率.

能将样本空间定义为:$\Omega=\{2,\ldots,12\}$ 吗?为什么?



解:设$\Omega=\{(1,1)(1,2)\ldots(6,6)\}$

$A=\{$两颗骰子点数之和为7,11$\}$

$P(A)=8/36=2/9$

所求概率$p=1-P(A)=7/9$

例10 假如一场比赛中胜3局才算赢，两个赌徒在一个胜2局，另一个胜1局的情况下中断赌博，如何分配赌金?

分析:

1）设想再进行2 局比赛即一定可结束;

2）共有2^2 种可能情况，每一种情况出现是等可能的;

3）其中仅有第一个赌徒2局皆输，第二个赌徒才可能赢.

结论

4种可能情况中,仅有“第一个赌徒2局皆输”一种情况有利于第二个赌徒，故

$$P_1 = 3/4, \qquad P_2 = 1/4 \longrightarrow 3:1$$

#

例11 一个鸽场养了n只鸽子，每只鸽子都等可能的飞入N个鸽笼中的任意一个去住($n\le N$)求以下事件发生的概率.

1）A={指定的n个鸽笼各有一只鸽子去住}；

2）B={恰好有n个鸽笼，每个各有一只鸽子}；

3）C={某指定的鸽笼中有m（m≤n）只鸽子}；

分析：计算古典概率时,若能将样本点全部列出，再来计算所求事件包含的样本点数(如P9 例1.2.2).

也可以利用排列组合的知识求出样本点总数和所求事件包含的样本点数.

解：由乘法原理可知，基本事件总数为N^n

指定的n个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法.故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

2）从N个鸽笼中任意选出n个，有C_N^n种不同的方法，

指定的n个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法.故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

3）从n个鸽子中任意选出 m 个，有 C_n^m 种不同的方法，剩下的鸽子住到余下的N-1个鸽笼中，住法有$(N-1)^{n-m}$种，故

$$P(C)=C_n^m\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

#

例12 袋中有10个小球, 4个红的, 6 个白的, 求

1）有放回地从中依次取3球，取得“2红1白”的概率.

2）不放回地从中依次取3 球，取得“2红1白”的概率.

解：设想10个球依次编号1,2,3,…10.

1）有放回抽样

样本点总数为 $N=10\times10\times10=10^3$

所求事件包含的样本点数为

$$r = C_3^2 \times 4^2 \times 6$$

C_3^2 是三次抽取中选出两次取到红球

故 $$P(A) = \frac{r}{N} = \frac{C_3^2 \times 4^2 \times 6}{10^3} = 0.288.$$

（2）无放回抽样

解法一　$N=10\times9\times8=A_{10}^{3}$

$$r = C_3^2 \times 4 \times 3 \times 6$$

$$P(A) = \frac{r}{N} = 0.3$$

解法二

$$N = C_{10}^{3}$$

$$r = C_{4}^{2} \times C_{6}^{1}$$

$$P(A) = \frac{r}{N} = 0.3$$

注意：例子中的基本事件的结构有什么变化?

#

例14 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取3件，求选到的3件产品中有次品的概率.

解法一　设A={选到的3件产品中有次品}，

A_i={选到的3件产品中有i件次品}，$i=1,2,3.$

有　$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且A_1, A_2, A_3互不相容，

所以有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3}{C_{50}^3}\approx 0.2761$$

解法二　考虑A的对立事件

$\overline{A}$={选到的3件产品全是合格品}

有　$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}\approx 0.7239$$

从而　$$P(A)=1-P(\overline{A})\approx 1-0.7239=0.2761$$

#

例15 将5个球随意地放入三只盒子，求每个盒子中至少有一个球的概率。

分析 此题直接采用古典概率定义去做会很困难，现借助于另一组事件来计算.

解 设 $A=$ {每个盒子中至少有一个球}

$B_i=$ {第 i 个盒子是空的}，$i=1$，2，3.

则 $A=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}=\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}$

$$P(A)=P(\overline{B_1\cup B_2\cup B_3})=1-P(B_1\cup B_2\cup B_3)$$

$$=1-P(B_1)-P(B_2)-P(B_3)+P(B_1B_2)$$

$$+P(B_1B_3)+P(B_2B_3)-P(B_1B_2B_3)$$

有 $P(B_i)=2^5/3^5,\ i=1,2,3;$

$P(B_iB_j)=1/3^5,\ \ 1\le i<j\le 3;$

$P(B_1B_2B_3)=0$ （为什么？）

故 $P(A)=1-3\times(2/3)^5+3\times(1/3)^5$

$=50/81=0.6173$

#

例12　（教材P14, 例1.2.10）有十张分别标有数1, 2, …10 的卡片，从中任取两张，求两张卡片上的数之和等于10 的概率.

解　用X和Y分别表示这两个数, 事件组

$\{X=k,\ Y=10-k\}=\{X=k\}\cap\{Y=10-k\}$

对$k=1$，2，…，9 是互不相容的.

两数之和为10 的事件可表示为

$$\{X+Y=10\} = \bigcup_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{9}\{X=k, Y=10-k\}$$

所求概率为

$$P\{X+Y=10\} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{9} P\{X=k, Y=10-k\}$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{9} \frac{1}{10\times 9} = \frac{4}{45}$$

#