§2.3 连续型随机变量

一、概率密度函数

例子 → **射击试验**

定义 设随机变量X的分布函数为$F(x)$, 若存在非负函数$f(x)$, 对于任意实数x, 均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

称随机变量X是<u>连续型随机变量</u>,称函数$f(x)$为X的<u>概率密度</u>.

注:

(1) 连续型随机变量X的**分布函数是连续函数.**

证明 由分布函数的性质可知，$F(x)$在x处右连续， 对于$\Delta x > 0$,

$$0 \le F(x) - F(x - \Delta x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x-\Delta x} f(t)dt$$

$$= \int_{x-\Delta x}^{x} f(t)dt \to 0, \quad 当\Delta x \to 0^{+}.$$

即$F(x)$在x处左连续，故$F(x)$在x处连续.

（2）X 是连续型随机变量，则对任意实数$x_0 \in R$，有

$$P\{X = x_0\} = 0$$

证明　当$\Delta x > 0$，有

$$\{X = x_0\} \subset \{x_0 - \Delta x < X \le x_0\}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le P\{X = x_0\} \le P\{x_0 - \Delta x < X \le x_0\}$$

$$= F(x_0) - F(x_0 - \Delta x)$$

令$\Delta x \to 0$，由$F(x)$的连续性有

$$0 \le P\{X = x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - \Delta x) \to 0$$

故 $$P\{X = x_0\} = 0.$$

（3）$P(\phi) = 0$，但是其逆不真.

概率密度函数的性质

(1) $f(t) \ge 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

概率曲线下总面积为1

若函数$f(x)$满足上述(1)和(2),则它必是某个随机变量的概率密度.

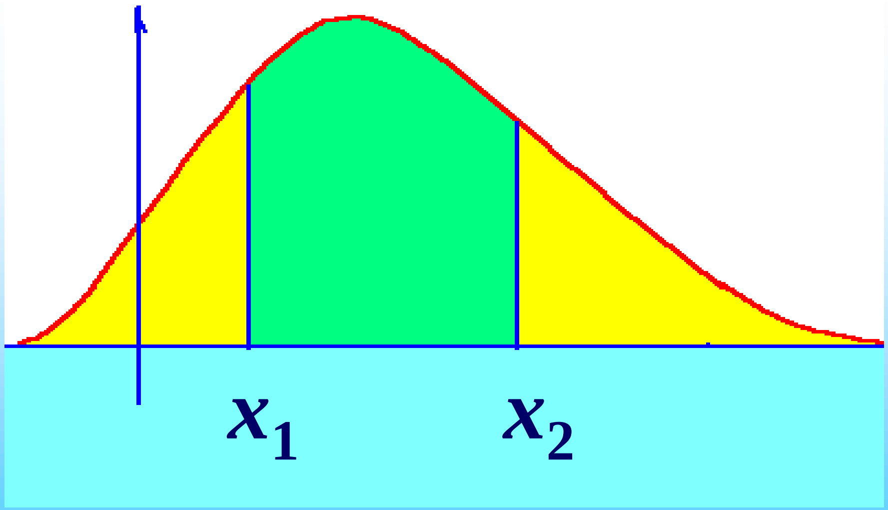
(3) $P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\}$

$= P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\}$

$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$

证明 $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$



而 $\{x_1 \le X \le x_2\} = \{x_1 < X \le x_2\} \cup \{X = x_1\}$

(4) 若$f(x)$在点x处连续,则有

$$F'(x) = f(x),$$

证明

$$F'(x) = [\int_{-\infty}^{x} f(t)dt]' = f(x).$$

性质的应用实例

概率密度判定

函数参数确定

概率的计算

二、 均匀分布和指数分布

(1) 均匀分布

设随机变量X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

称随机变量X 在区间 $(a,\ b)$ 上服从**均匀分布**,记为$X\sim U(a,b)$.

特点：随机变量X 落在 $(a,\ b)$ 的子区间的概率与位置无关，仅与测度（即长度）成正比.

即对于$(c,\ c+l)\subset(a,\ b)$，有

$$P\{c<x\le c+l\}=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}dx=\frac{l}{b-a}$$

应用 (1) 大量试验服从均匀分布;

(2) 是计算机模拟的基础.

例如 参见例子

(2) 指数分布

设随机变量X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (\lambda>0)$$

称随机变量X 服从参数为 λ 的指数分布.

特点 指数分布具有无后效性.即有(P46例2.3.4)

$$P\{X>t+s \mid X>t\}=P\{X>s\}$$

参见例子

三、正态分布(GAUSS 分布)

设随机变量X 的概率密度函数为

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad x\in R$$

其中μ, σ ($\sigma>0$)是常数，则称随机变量X 服从参数为 μ，σ^2 的<u>正态分布</u>(<u>或高斯分布</u>)，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

特别当 $\mu=0,\ \sigma=1$时, 其概率密度为

$$\varphi(x)=\varphi(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$$

称随机变量X 服从标准正态分布,即$X\sim N(0,\ 1)$.

1. 正态分布概率密度曲线的特征

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x;\mu,\sigma^2)\,dx=1$

即概率曲线下总面积为1.

(2)曲线关于直线 $x=\mu$ 对称, 即对任意实数 x 有

$$\varphi(\mu - x;\mu,\sigma^2) = \varphi(\mu + x;\mu,\sigma^2)$$

曲线下直线两侧的面积各为1/2，并且

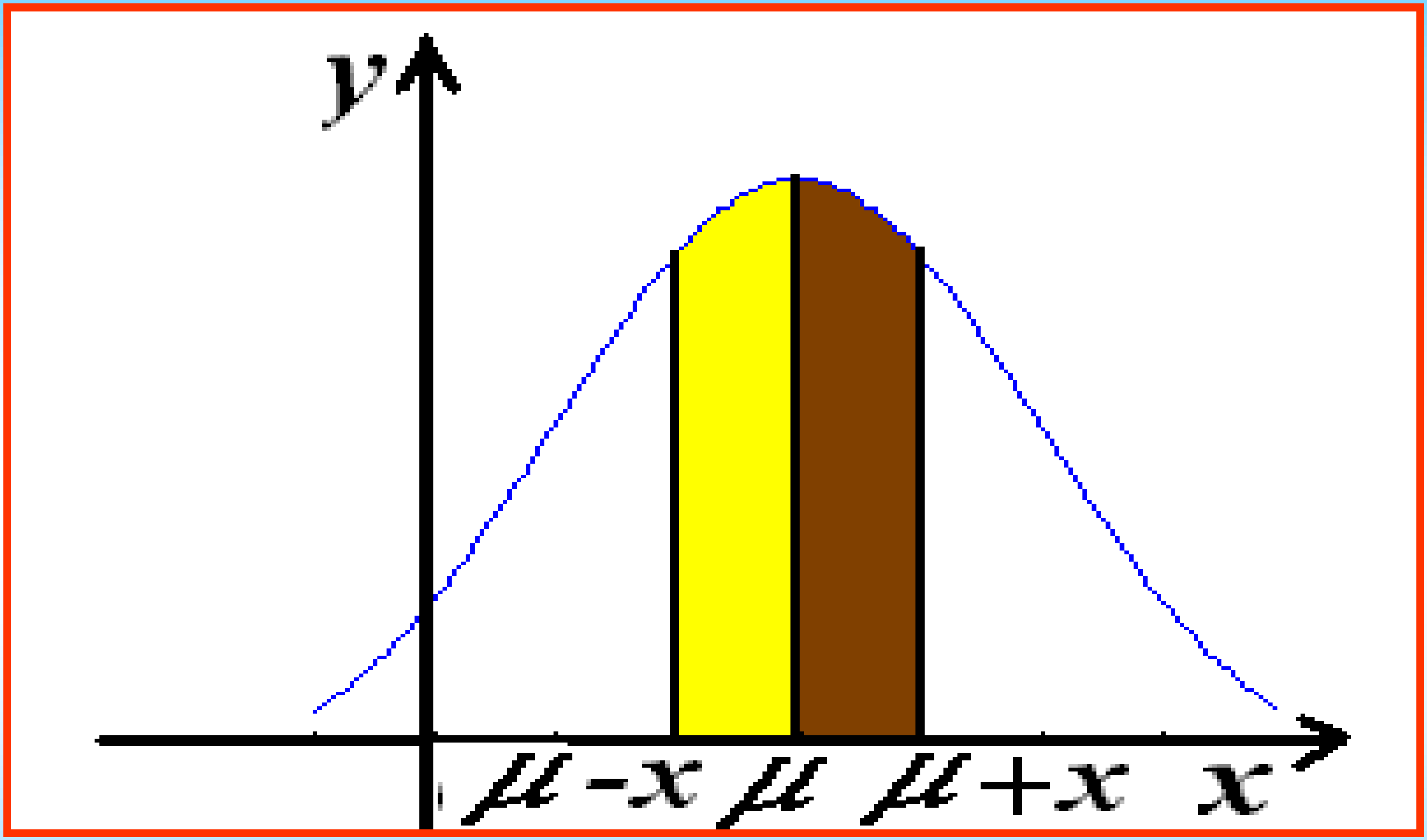
$$P\{\mu - x < X \le \mu\} = P\{\mu < X \le \mu + x\}$$

1. 若X～N(2, σ^2), 且P{2＜X＜4}=0.3，

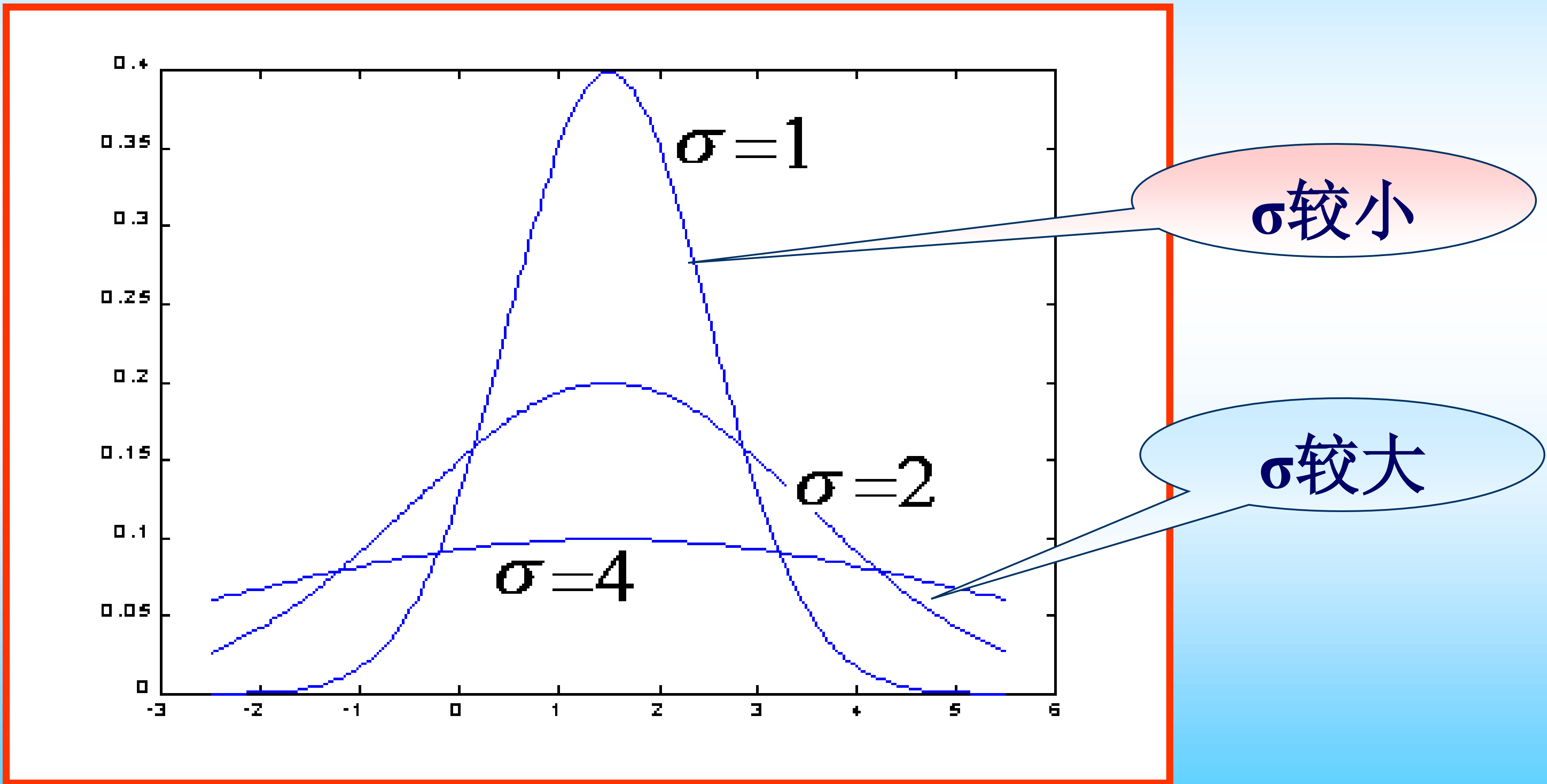
则P{0＜X}= ________ .

2. 若X～N(μ,σ^2)，且P{3＜X}=P{X ＜1}

则μ=?


y
μ -x
μ
μ +x
x

(3)曲线$x=\mu$处取得最大值$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，固定$\mu$，$\sigma^2$越大，曲线越趋于平坦.



2 正态分布概率的计算

若随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为

$$\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\qquad x\in R$$

若随机变量X服从标准正态分布,其分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dt,\quad x\in R$$

$$\boxed{\Phi(-x)=1-\Phi(x)}$$

查表

P253的附表2《标准正态分布表》给出了$x \geq 0$的标准正态分布函数值.

（1）若随机变量$X \sim N(0, 1)$，则

$$P\{a < X \leq b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

（2）若随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

证明:

$$\Phi(x; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$\frac{y=\dfrac{t-\mu}{\sigma}}{\mathrm{d}t=\sigma\,\mathrm{d}y} \quad \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

所以有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \Phi(x_2;\mu,\sigma^2) - \Phi(x_1;\mu,\sigma^2)$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

正态分布概率计算　车门设计

分位数 $X \sim N(0, 1)$, 若实数 u_α 使

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$$

则称 u_α 为标准正态分布的对应于 α 的上侧分位数。

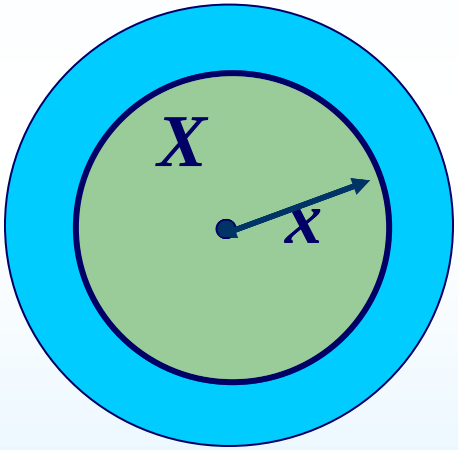
参见例子 → 分位数

电池可靠性估计

例1 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。

解：X的分布函数为

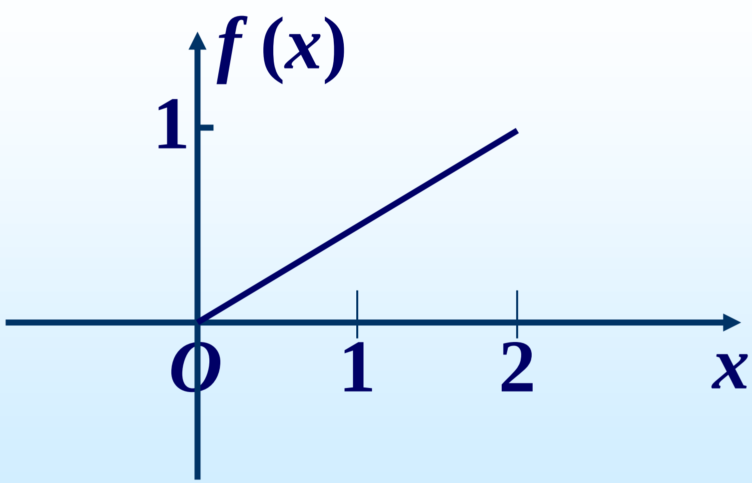
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

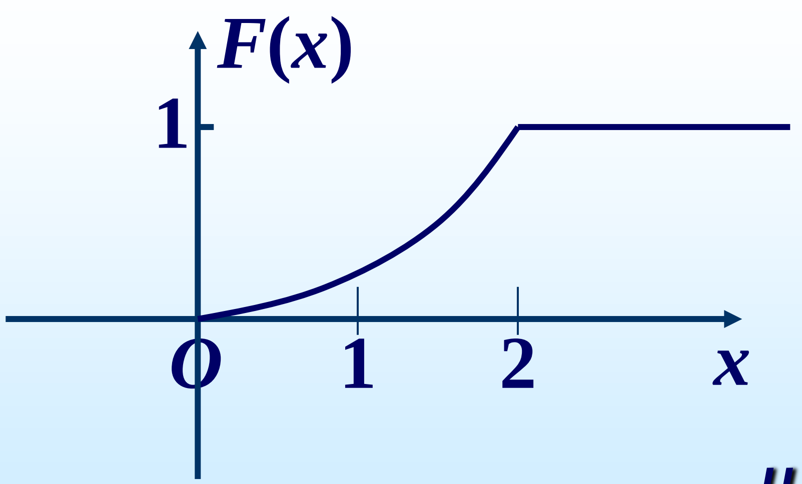


考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x/2, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f(x)$的变上限积分为

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2; \\ \int_{0}^{2} \frac{t}{2}dt = 1, & 2 \le x. \end{cases} = F(x)$$





例2 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$$

证明 $\varphi(x)$ 是概率密度函数.

证 (1) $\varphi(x)>0$, $x\in R$ 显然成立,

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1.$

令 $$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy$$

$$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,rdr$$

$$=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=2\pi \quad \Longrightarrow \quad I=\sqrt{2\pi}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=1.$$

#

例3 设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{\theta}}, & x>\alpha; \\ 0, & x\le\alpha. \end{cases}$$

试确定常数k.

解 因 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{\alpha}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=-\theta k\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}d(-\frac{x}{\theta})=-\theta ke^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\alpha}^{+\infty}$$

$$=\theta ke^{-\frac{\alpha}{\theta}} \Longrightarrow k=\frac{1}{\theta}e^{\frac{\alpha}{\theta}}$$

#

例4 已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

用Y表示对进行X三次独立重复观测中，事件$\{X\le \frac{1}{2}\}$出现的次数，求$P\{Y=2\}=?$

解

$$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$$

所以 $Y\sim B(3,\ 1/4)$，从而

$$P\{Y=2\}=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})=\frac{9}{64}.$$

#

例5 设随机变量$X \sim U(0, 5)$，求方程$4r^2 + 4Xr + X + 2 = 0$有实根的概率 p .

解：$p = P\{(4X)^2 - 4 \times 4(X+2) \geq 0\}$

$$= P\{X^2 - (X+2) \geq 0\} = P\{(X-2)(X+1) \geq 0\}$$

$$= P(\{X \leq -1\} \cup \{X \geq 2\})$$

$$= P\{X \leq -1\} + P\{X \geq 2\}$$

$$= P\{2 \leq X \leq 5\}$$

$$= \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

#

例6.某电子元件发生故障则不可修复，它的寿命X服从 参数为$\lambda=1/2000$的指数分布. 它工作了1000小时后能再工作1000小时的概率为多少?

解 $P\{X\geq 2000 \mid X\geq 1000\}=P\{X\geq 1000\}$

$=1-P\{X<1000\}=1-F(1000)$

$=1-[1-e^{-1000/2000}]=e^{-1/2}.$

其中

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

#

例7 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明

$$P\{|X-\mu|<x\}=P\{\mu-x<X<\mu+x\}=2\Phi(\frac{x}{\sigma})-1$$

证 $$P\{\mu-x<X<\mu+x\}=\Phi(\frac{\mu+x-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{\mu-x-\mu}{\sigma})$$

$$=\Phi(\frac{x}{\sigma})-\Phi(\frac{-x}{\sigma})$$

$$=\Phi(\frac{x}{\sigma})-[1-\Phi(\frac{x}{\sigma})]$$

$$=2\Phi(\frac{x}{\sigma})-1$$

特别地，有

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

表明X以很大的概率密集在$x=\mu$的附近.

3σ原则

#

例8 公共汽车的车门是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的.设男子身高X服从参数为$\mu=172\text{cm}$ $\sigma=6$的正态分布.即$X\sim N(172,36)$.问车门的高度该如何设计.

解： 设车门的高度为h cm. 按设计要求

$P\{X\ge h\}\le 0.01$ 或者 $P\{X<h\}\ge 0.99$ 因为 $X\sim N(172,36)$

则：$$P\{X<h\}=\Phi\left(\frac{h-172}{6}\right)\ge 0.99$$

查表有$\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

故$(h-172)/6=2.33$ 即$h=172+6*2.33=186\text{cm}$

故设计车门高度为186cm时,可使男子与车门顶碰头的机会不大于0.01

例9 设$X \sim N(10, 2^2)$，求α使

$$P\{|X-10|<\alpha\}=0.9$$

解 $P\{|X-10|<\alpha\}=2\Phi(\frac{\alpha}{2})-1=0.9$

$\Rightarrow$ $\Phi(\frac{\alpha}{2})=0.95$

$\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2}=1.645$

$\Rightarrow$ $\alpha=3.29$

#

例10 某种电池的寿命是X小时，$X \sim N(300, 35^2)$，计算

(1) 电池寿命在335小时以上的概率p_1？

(2) 求允许时限x，使电池寿命在

$(300-x, 300+x)$内的概率不小于0.9.

解 (1) $p_1 = P\{X > 335\} = 1 - P\{X \le 335\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{335-300}{35}\right) = 1 - \Phi(1)$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

(2) $0.9 \le P\{300 - x < X < 300 + x\}$

$$= 2\Phi(\frac{x}{35}) - 1$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{x}{35}) \ge 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{x}{35} \ge 1.645$$

$$\Rightarrow x \ge 57.75$$

#