概率论与数理统计习题课（4-5章）

基本内容与重要结论：

1. 随机变量的数学期望及其性质。

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y).$$

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$（随机变量相互独立时）

2. 随机变量的方差及其性质。

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

注意： 常见分布的数学期望和方差。

3. 随机变量的协方差及其性质。

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

$$\operatorname{cov}(X,c)=0.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X).$$

$$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y).$$

$$\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y).$$

4. 随机变量的相关系数。

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

$$\rho_{XY}=\pm 1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1.$$

若X与Y相互独立 $\Rightarrow \rho_{XY}=0.$

特别地,对二维正态分布随机变量,相互独立与不相关等价.

4. 随机变量的相关系数（续）。

$$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

5. 正态分布的相关性质。

6. 切比雪夫不等式： $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\sigma^2/\varepsilon^2.$

7. 三个大数定律。

8. 两个中心极限定理。

① 独立同分布中心极限定理；

② 棣莫弗—拉普拉斯定理。

习题四：4、5、6、8、 9、12、13、14、15

例 5、已知随机变量X~$P(\lambda)$，试求E[1/(1+X)]

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2\cdots$$

$$E(\frac{1}{X+1})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(1+k)!}\lambda^{-1}e^{-\lambda}$$

$$\because\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$$

$$=\lambda^{-1}e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

9、设在底层乘电梯的人数服从的泊松分布，又设此电梯共有N+1层，每个乘客在每一层要求停下来离开是等可能的，而且与其余乘客是否在这层停下是相互独立的。求所有乘客都走出电梯之前该电梯停止次数的期望。

解: 设所有乘客都走出电梯之前该电梯停止次数为X，在底层乘电梯的人数为Y，当$\{Y=k\}$时，设第i层停下的次数为X_i

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第i站有人下}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P\{X_i=0\,|\,Y=k\}=\frac{(N-1)^k}{N^k}\qquad P\{X_i=1\,|\,Y=k\}=1-\frac{(N-1)^k}{N^k}$$

$$P\{X_1=1\}=\sum_{k=0}^{+\infty}P\{Y=k\}P\{X_1=1|Y=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-5}5^k}{k!}(1-\frac{(N-1)^k}{N^k})$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-5}5^k}{k!}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-5}5^k}{k!}(1-\frac{1}{N})^k$$

$$=1-e^{-5}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{5^k}{k!}(1-\frac{1}{N})^k$$

$$=1-e^{-5}\cdot e^{5(1-\frac{1}{N})}$$

$$=1-e^{-\frac{5}{N}}$$

$$E(X_i)=1-e^{-\frac{5}{N}}$$

$$X=X_2+X_3+\cdots+X_{N+1}$$

$$E(X)=\sum_{i=2}^{N+1}E(X_i)=N(1-e^{-\frac{5}{N}})$$

12、 民航机场的送客汽车载有20名乘客，从机场开出，乘客可以在10个车站下车，如果到达某一车站时无顾客下车，则在该车站不停车。设随机变量X表示停车次数，假定每个乘客在各个车站下车是等可能的，求平均停车次数。

解:设第i站的停车次数为X_i:

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第i站有人下}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{10}X_i,\text{且}P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20},P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10[1-(\frac{9}{10})^{20}]$$

直接计算困难！

13、 将n只球（1到n号）随机地放进n个盒子（1到n号）中去，一个盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记X为总的配对数，球E(X)和D(X)。

解:设第i只球配对次数为X_i

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{只球装入第}i\text{号盒子} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n} \qquad P\{X_i = 0\} = 1 - \frac{1}{n} \qquad E(X_i) = \frac{1}{n}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$E(X) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

其中：$E(X^2)=(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j$

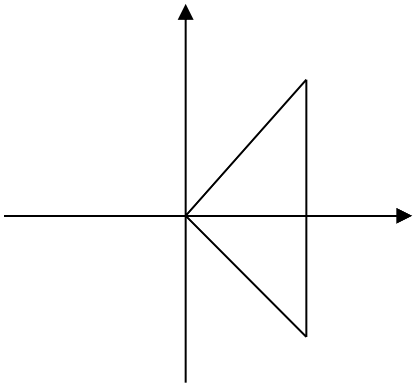
$E(X_i^2)=E(X_i)=\dfrac{1}{n}\qquad P\{X_iX_j=1\}=P\{X_i=1,X_j=1\}=\dfrac{1}{n(n-1)}$

$E(X_iX_j)=\dfrac{1}{n(n-1)},\qquad \sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)=C_n^2\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\qquad D(X)=n\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{1}{2}-1^2=1$

14： 设(X,Y)联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, |y|\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



证明X与Y不相关。

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

分析： 只需求E(X)、E(Y)、E(XY)，其中

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy, \text{或}$$

$$E(Y)=\iint_{R^2} y f(x,y)dxdy$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0\\ 1-y, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例（3）、 设随机变量X的概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

问X与|X|是否不相关，是否相互独立。

解：需验证

$$P\{X\le a, |X|\le b\}=P\{X\le a\}P\{|X|\le b\}, \forall(a,b)$$

$$\because \{|X|\le a\}=\{-a\le X\le a\}\subset\{X\le a\}$$

$$\therefore P\{X\le a, |X|\le a\}=P\{|X|\le a\}\ne P\{X\le a\}P\{|X|\le a\}$$

2、$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$

$$\mathrm{cov}(X,|X|)=E(X,|X|)-E(X)E(|X|)=E(X|X|)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=0$$

习题五：6、8

8、设某个系统由相互独立的n个部件组成，每个部件正常工作的概率均为0.9，且至少有80%个的部件正常工作才能使整个系统工作。问n至少为多大，才能使系统的可靠性为95%

解、设X表示正常工作的部件数，则X~B(n, 0.9),
E(X)=np=0.9n,D(X)=npq=0.09n.所求概率为：

$P\{80\%n \le X \le n\} \ge 95\%$ 由D-L中心极限定理：

$$P\{80\%n \le X \le n\} \approx \Phi(\frac{n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}) - \Phi(\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}})$$

$$= 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 \ge 0.95$$

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.975 \qquad \therefore \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96 \qquad n \ge 35$$

相关例题：

1. 随机变量 $X \sim B(n, 0.8)$，且$E(X)$=3.2，则

$E(X^2) = \underline{10.88}$.

3. 设随机变量 $X_i \sim N(0,1), i = 1,2$ 且不相关，

则 $\underline{\quad C \quad}$.

（A） X_1, X_2一定独立；

（B） (X_1, X_2) 服从二维正态分布；

（C） X_1, X_2未必独立；

（D） $X_1 + X_2$服从一维正态分布.

3. 设 ρ_{XY} 是随机变量X与Y的相关系数，若 $\rho_{XY}=-1$ 则存在常数a_____和b,使P{Y=aX+b}=_________.

4、设随机变量(X,Y)服从正态分布，其中X~N(1,1),Y~N(-2,1),并且X和Y的相关系数为0.5，令Z=2X+Y，试求：E(Z),D(Z)和概率密度$f_Z(z)$.

例、 设随机变量U在[−2，2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1,\\ 1, & 若U>-1.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1,\\ 1, & 若U>1.\end{cases}$$

求：① X和Y的联合分布；② D(X+Y).

解:① $P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=P\{U\le -1\}=\frac{1}{4}$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=P\{\phi\}=0$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=P\{-1<U\le 1\}=\frac{2}{4}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4}$$

X和Y的联合分布律：

X/Y	-1	1
-1	$1/4$	0
1	$1/2$	$1/4$

② X+Y的分布为：

$X+Y$	-2	0	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$(X+Y)^2$	0	4
P	$1/2$	$1/2$

$$\therefore D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2$$

注：此题为研究生入学试题。

例、某车间有同类型号机床200部，每部机床开动的概率为0.7，假设各机床**开动与否互不影响**，开动时，每部机床消耗电能15个单位，问：至少供应多少单位电能，才能使可以95%以上的概率保证不致因供电不足而影响生产。

解：用X表示200台机床中同时开动的数目,则

$$X \sim B(200, 0.7), \quad E(X) = 200 \times 0.7 = 140,$$

$$D(X) = 200 \times 0.7 \times 0.3 = 42$$

设至少供应m个单位电能，才能以95%以上的概率保证不致因供电不足而影响生产。即要使

$$0.95 \le P\{0 \le X \le \frac{m}{15}\}$$

$$= P\{\frac{0-140}{\sqrt{42}} \le \frac{X-140}{\sqrt{42}} \le \frac{m/15-140}{\sqrt{42}}\}$$

由中心极限定理 $\approx \Phi(\frac{m/15-140}{\sqrt{42}}) - \Phi(\frac{0-140}{\sqrt{42}}) \approx \Phi(\frac{m/15-140}{\sqrt{42}}) - 0$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{15/m-140}{\sqrt{42}}) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$$

由$\Phi(x)$的严格单调增加性，得

$$\Rightarrow \quad \frac{m/15-140}{\sqrt{42}} \geq 1.645 \quad \Rightarrow \quad m \geq 2260$$

由于2260/15=150.67 不是整数(机床数目), 所以取m= 15×151=2265, 只要供应151台机床所需的电能2265 单位以上，就可以95%以上的概率保证车间不会因供电不足而影响生产。

例、**设随机变量序列**$\{X_k\}, k=1,2,\ldots$**相互独立，都服从参数为**2**的指数分布，证明随机变量序列** $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{X_k}, n=1,2\cdots$ 依概率收敛于2。

4. 某人途经一个十字路口，所经方向有 50%时间亮红灯，遇红灯需等待直至绿灯，等待时 间在区间[0, 20](单位：秒)上服从均匀分布. 用X表示此人的等待时间，求X的分布函数，并分析X是否为离散型或连续型随机变量，说明理由.

解: 设A=“经过路口时为绿灯”，则 P(A) = 1/2

$$F_X(x) = P\{X \le x\}, \forall x$$

当$x < 0$时，$F_X(x) = 0$

当$x \ge 20, F_X(x) = 1$

当$0 \le x < 20$时, $F_X(x) = P\{X \le x\}$

$$= P(A)P\{X \le x \mid A\} + P(\bar{A})P\{X \le x \mid \bar{A}\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{40}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{40}, & 0\le x<20\\ 1, & x\ge 20\end{cases}$$

X既非离散也非连续。因为离散型随机变量至多取可列个数值，但X可取（**0**,20）中的任意值，对任意的$\forall a,b\in(0,20)$ 且$a<b$有 $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)=\dfrac{b-a}{40}>0$

另外，连续型随机变量的分布函数处处连续，但此分布函数在x=0处不连续。

5、设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\},z\in R$

解：$P\{XY<z\}=P\{XY<z,Y=0\}+P\{XY<z,Y=1\}$

$$=P\{0<z,Y=0\}+P\{X<z,Y=1\}$$

当$z<0$时，$P\{XY<z\}=P\{X<z\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}\Phi(z)$

当$z\geq 0$时，$P\{XY<z\}=P\{Y=0\}+P\{X<z\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z)$

四、设随机变量X,Y相互独立, 且$X\sim U(0,2)$，$Y\sim U(0,1)$, 求$Z=X/Y$的概率密度。

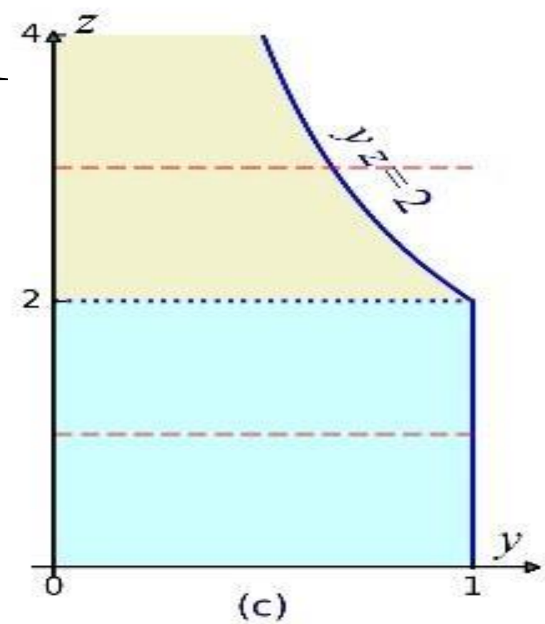
解：X,Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$Z=X/Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy$$

其中$f(yz,y)=\begin{cases}1/2, & 0\le yz\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$



当$z<0$时，$f_Z(z)=0$

当$0\le z<2$时, $f_Z(z)=\int_0^1\frac{y}{2}dy=\frac{1}{4}$

当$z\ge 2$时, $f_Z(z)=\int_0^{2/z}\frac{y}{2}dy=\frac{1}{z^2}$

五、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\\ 0, & else\end{cases}$$

求（1）边缘概率密度，并判断是否相互独立;

（2）$f_{Y|X}(y|x)$;　（3）$P\{-5<Y<1/2 \mid X=1/2\}$

解：（2）$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$

当$0<x\le 1$时，$f_X(x)>0$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0\le y\le 2x\\ 0, & else\end{cases}$$

（3）$P\{-5<Y<1/2 \mid X=1/2\}$

$$=\int_{-5}^{1/2} f_{Y|X}(y|1/2)dy$$

$$=\int_{0}^{1/2} 1dy=1/2$$

关于随机变量的分布，下列说法中，正确的个数为

①若存在有限对(x, y)，使得$f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$，则 X ,Y 不独立；(错)

②二维正态分布的边缘分布是正态分布，二维均匀分布的边缘分布是均匀分布；（错）

③设 X ,Y 均服从正态分布，则 X+Y不一定服从正态分布；（对）

④连续型随机变量的分布函数为连续函数，概率密度函数不一定为连续函数.（对）