习题课（三）

各知识点的关系

二维随机变量
- 独立性
- 随机变量函数的分布

联合分布 → 分布律、概率密度及性质

边缘分布 → 边缘分布函数、分布律、概率密度函数

条件分布 → 条件分布函数、分布律、概率密度函数

二、二维随机变量的联合分布

1、联合分布函数及其性质　　1

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

1）**单调不减性** $F(x,y)$**分别对**x，y**单调不减.**

2）**有界性：** $0\le F(x,y)\le 1$

$$\lim_{x\to -\infty} F(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} F(x,y)=1\quad \lim_{y\to -\infty} F(x,y)=0,$$

3）**右连续性** $F(x,y)$ **分别关于**x **或** y**右连续.**

4）**相容性：对任意** $x_1<x_2$，$y_1<y_2$，**有**

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

2、联合概率密度及性质

1) $f(x,y) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续，则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

4) 若$G \subset R^2$，有

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)d\sigma$$

1）验证

2）确定参数　　4,10

3）计算概率　　6

3、联合分布律及性质　　例 1

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1,2,\dots. \qquad (*)$$

若　1) $p_{ij} \geq 0; \qquad i, j = 1,2,\dots$

2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

三、二维随机变量的边缘分布

由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le +\infty, Y < y\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

边缘分布律

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i\cdot} \quad i = 1,2,\ldots$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{\cdot j} \quad j = 1,2,\ldots$$

边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

四、随机变量的独立性

7(15)，8，9，10, 21

对任意实数对(x,y)均有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

即：$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

1）（离散型）

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

2）（连续型）

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

在平面上除去“面积”为0 的集合外成立.

五、条件分布

条件分布律

若$P\{Y=y_j\}>0$，则在事件$\{Y=y_j\}$发生的条件下事件$\{X=x_i\}$ $i=1,2,..$ 发生的条件概率为

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i=1,2,.... \quad (*)$$

1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0 \quad i=1,2,....$

2) $\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i|Y=y_j\}=1$

条件概率密度

$f_Y(y) > 0$，有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

x是自变量
y是固定值

称

$$f_{X|Y}(x|y) = F'_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在$Y=y$ 的条件下随机变量X 的条件概率密度.

$$P\{a < Y \le b | X = c\} = \int_a^b f_{Y|X}(y|c) dy$$

例 2

11，12，13

六、随机变量函数的分布

1、离散型 $\begin{cases} \text{定理} \\ \text{离散卷积公式} \end{cases}$

$Y=g(X)$ **是随机变量, 则**

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}$$

$$=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\},\qquad j=1,2,\ldots$$

其中 $S_j=\{x_i \mid g(x_i)=y_j\}$

设随机变量(X, Y)是离散型随机变量, X, Y相互独立,其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k) \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$P\{Y=r\}=q(r) \quad r=0,1,2,\ldots$$

则$X+Y$的分布律为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m} p(k)q(m-k) \quad m=0,1,2,..$$

离散卷积公式

例

2、连续型

$\begin{cases} \text{1）分布函数法} \quad \text{例 3} \\ \text{2）公式法} \quad 16 \\ \text{3）特殊函数的分布} \end{cases}$

1） 16、17、18、19、22

（1）**先求出** Z **的分布函数** $F_Z(Z)$;

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{G(X, Y) \le z\}$$

$$= \iint\limits_{\{(x,y):G(x,y)\le z\}} f(x,y)\,dx\,dy$$

（2）**对** $F_Z(Z)$ **微分得到** $f_z(z)$;

3）：

（1）$M = max\,(X,Y)$， $N = min\,(X\,,Y)$ (24)

（2）$Z = X + Y$ 的分布 （22）、例

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy$$

若随机变量X, Y相互独立，则

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

类似可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$$

$$f_z(z) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx}$$

（3）$Z = X/Y$ 的分布

设随机变量(X, Y)的联合概率密度为$f(x,y)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y)\, dy$$ 教材例3.4.13

3、利用分布的可加性（二项、泊松、正态）

15

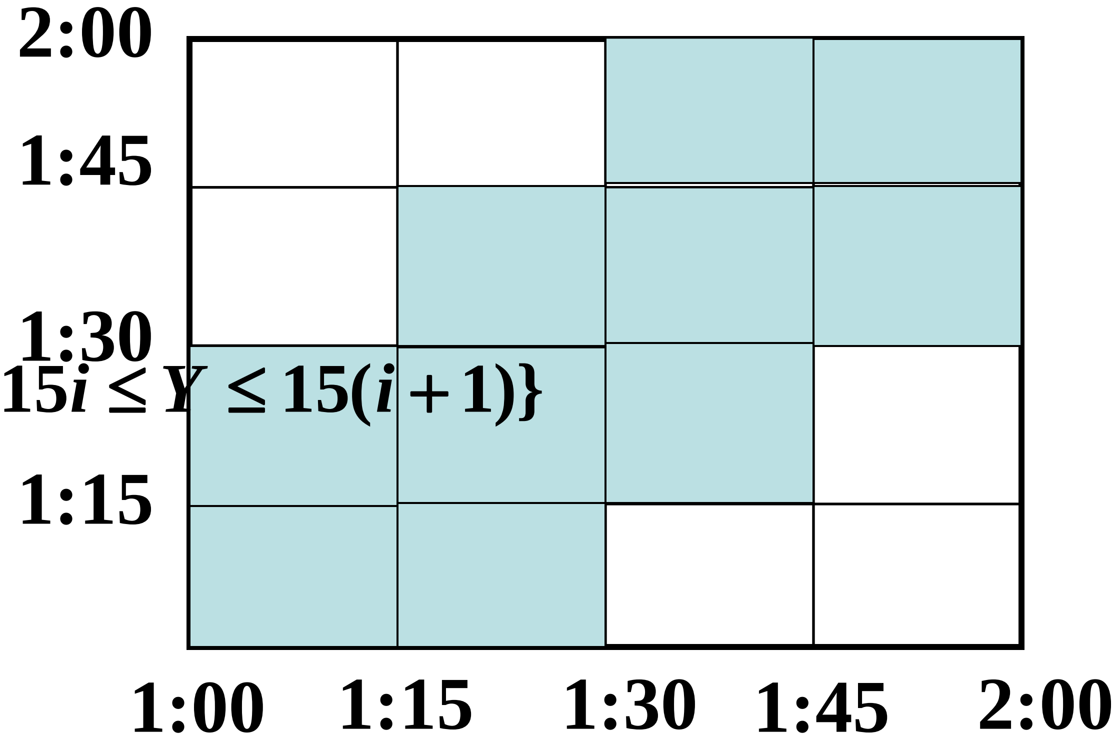
6

1) 见车就乘

所求概率为:

$$\sum_{i=0}^{3} P\{15i \le X \le 15(i+1), 15i \le Y \le 15(i+1)\}$$

p=0.25



2) 最多等一辆车

所求概率为:

p= 5 / 8

例1 设随机变量Z服从参数为1的指数分布，引入随机变量

$$X=\begin{cases}0 & 若Z\le 1\\ 1 & 若Z>1\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0 & 若Z\le 2\\ 1 & 若Z>2\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布律。

解： 因为Z服从参数为1的指数分布，故其分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

故（X，Y）的联合分布律为

$$p_{00}=P\{X=0,Y=0\}=P\{Z\leq 1,Z\leq 2\}$$

$$=P\{Z\leq 1\}=F(1)=1-e^{-1},$$

$$p_{01}=P\{X=0,Y=1\}=P\{Z\leq 1,Z>2\}$$

$$=P\{\varnothing\}=0,$$

$$p_{10}=P\{X=1,Y=0\}=P\{Z>1,Z\leq 2\}$$

$$=P\{1<Z\leq 2\}=F(2)-F(1)=e^{-1}-e^{-2},$$

$$p_{11}=P\{X=1,Y=1\}=P\{Z>1,Z>2\}$$

$$=P\{Z>2\}=1-F(2)=e^{-2}.$$

7

$$p = P\left\{X^2 + Y^2 \le r\right\}$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标变换}}} \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{r}} t\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]d\theta$$

$$x = t\cos\theta$$

$$y = t\sin\theta$$

$$= 1 - e^{-\frac{r}{2}}$$

书：24

$$P\{X<Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{20\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}dy\right]dx$$

极坐标变换…… $=0.5$

另解：

$$P\{X\geq Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{20\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{20\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}dy\right]dx=P\{X<Y\}$$

由 $P\{X<Y\}+P\{X\geq Y\}=1$

得 $P\{X<Y\}=0.5$

8

$\because$ X,Y相互独立

$$\therefore p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$$

$$p_{12} = p_{1.}p_{.2} \qquad p_{13} = p_{1.}p_{.3}$$

即 $\begin{cases} 1/9 = (1/6 + 1/9 + 1/18)(1/9 + \alpha) \\ 1/18 = (1/6 + 1/9 + 1/18)(1/18 + \beta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha = 2/9 \qquad \beta = 1/9$$

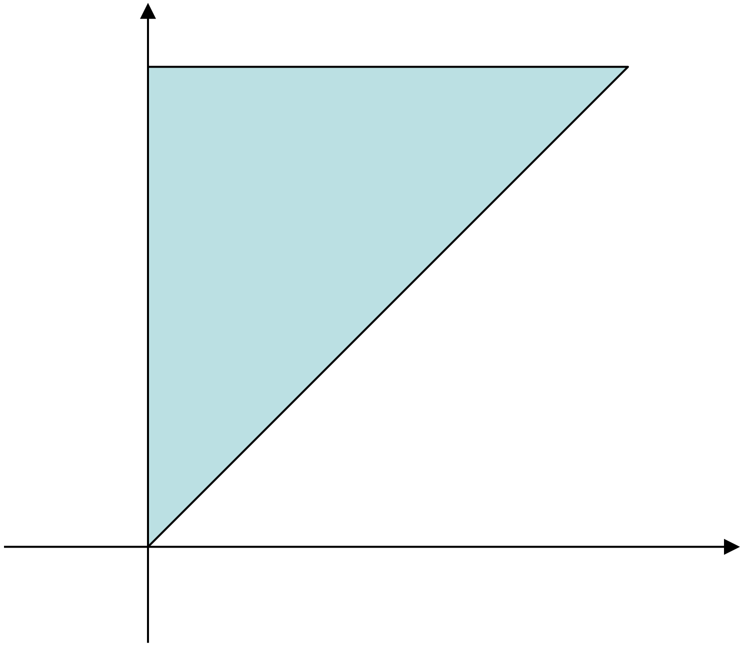
9

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x\left(1-x^2\right) & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx & 0<y<1\\ 0 & y<0 \text{或} y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4y^3 & 0<y<1\\ 0 & y<0 \text{或} y>1\end{cases}$$

在区域$G=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\}$中

$$f(x,y)\neq f_X(x)*f_Y(y)$$

X,Y不相互独立

21

=

$$f_X(x)=\begin{cases}0.5, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & \text{y}\le 0\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0\le x\le 2, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

X, Y相互独立

$$a^2+Xa+Y=0 \quad \text{有根} \quad X^2-4Y\ge 0 \quad \text{即：} Y\le\frac{X^2}{4}$$

$$P\{Y\le\frac{X^2}{4}\}=\iint\limits_{y\le\frac{x^2}{4}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{y\le\frac{x^2}{4}} e^{-2y}dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{4}} e^{-2y}dy$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^2(e^{-\frac{x^2}{2}}-1)dx=1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\phi(2)-\phi(0))=1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\phi(2)-0.5)$$

（2）

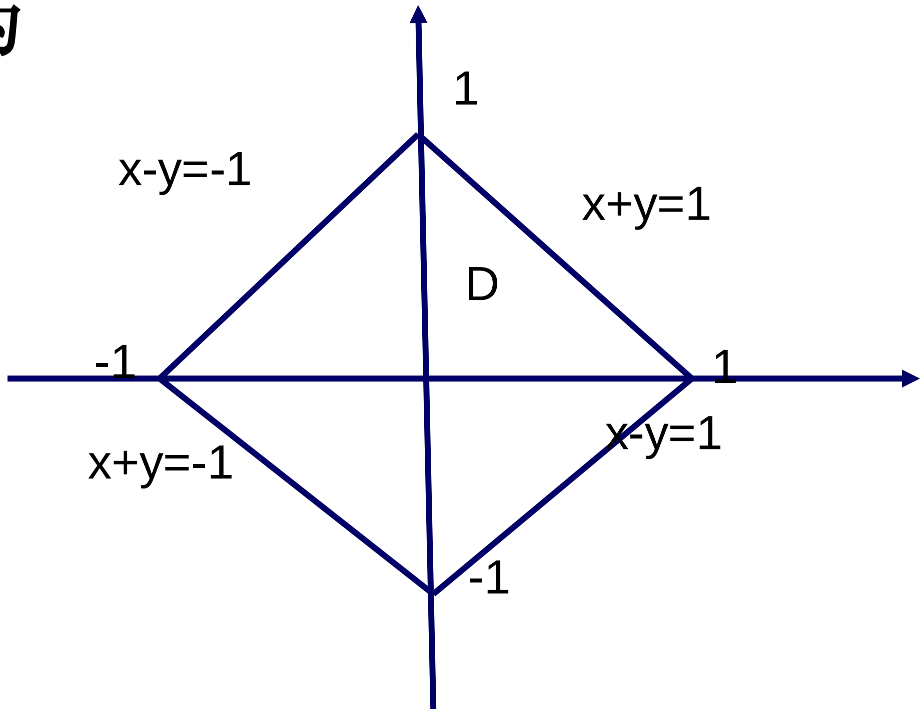
$$P\{X+2Y\le 3\} = \iint\limits_{x+2y\le 3} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} e^{-2y}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (1-e^{-3+x})dx = 1-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-3}$$

11、随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布，其中 $D=\{(x,y):|x+y|\le 1,|x-y|\le 1\}$，讨论X与Y是否相互独立。讨论 $f_{Y|X}(y|x)$ 的存在区间，并在X=0的条件下求 $f_{Y|X}(y|0)$.

解、(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$



因

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-1-x}^{x+1}\frac{1}{2}dy=1+x, -1\le x\le 0\\ \int_{x-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy=1-x, 0\le x\le 1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}1+y, & -1\le y\le 0\\ 1-y, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当(x,y) ∈D时

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f_X(x)f_Y(y),$$

故X与Y不相互独立

当 x∈(-1,1) 时，因 $f_X(x)>0,\ f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 有定义，且

$$f_{Y|X}(y\,|\,0)=\frac{f(x,y)}{f_X(0)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |\,y\,|\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

书：17

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^3 \frac{1}{3}\sin x dy=\sin x & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\sin x dx=1/3 & 0\le y\le 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当 $0<x\le \frac{\pi}{2}$, $f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}1/3 & 0\le y\le 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当 $0\le y\le 3$, $f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

例2、设(X, Y)的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & x>0, y>x \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

求：1. 边缘密度函数；2.条件密度函数；

3. $P\{X>2 \mid Y<4\}$.

解：1.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy)=\begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0; \\ 0, & x\le 0。 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0。\end{cases}$$

2. 当$x>0$, $f_X(x)>0$,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y}, & y>x;\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

当$y>0$, $f_Y(y)>0$,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & x<y;\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

3. $P\{X > 2 \mid Y < 4\} = \dfrac{P\{X > 2, Y < 4\}}{P\{Y < 4\}}$

$$= \frac{\int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy}{\int_0^4 y e^{-y} dy} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}}$$

例、设X，Y是相互独立同分布的离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=n\}=\{Y=n\}=\frac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$$

求X＋Y的分布律

$$P\{X+Y=m\}$$

$$=\sum P\{X=k\}P\{Y=m-k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}$$

$k\geq 1\quad m-k\geq 1$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^m}=\frac{m-1}{2^m}$$

$m\geq 2$

15 $P\left\{-\sqrt{2} < X + Y < 2\sqrt{2}\right\}$

坐标或极坐标变换…… $=0.8185$

另解：

易知 X, Y 相互独立, $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$

从而 $X + Y \sim N(0,2)$

$$P\left\{-\sqrt{2} < X + Y < 2\sqrt{2}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{2\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 0.8185$$

16、设随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$,试写出Y=|X|的概率密度。

解、

$$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=\begin{cases}P\{-y<X<y\}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\varphi_X(x)dx, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

当y>0时

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\varphi_X(y)+\varphi_X(-y)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

例3、随机变量(X, Y)在

$$G = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解：(X, Y)的联合密度为

$$\therefore\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x, y) \in G; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

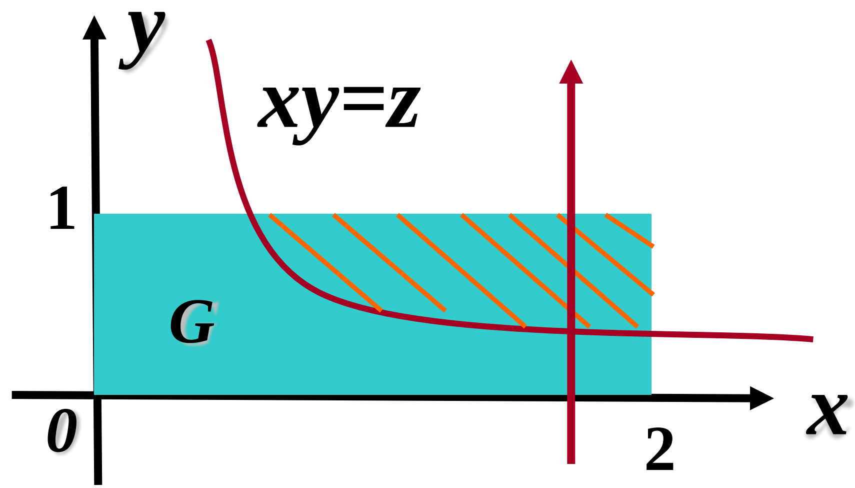
$Z = XY$，当$0<z<2$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{XY \le z\} = 1 - P\{XY > z\}$$

$$= 1 - \iint_{xy>z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= 1 - \int_z^2 dx \int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{2}\,dy$$

$$= \frac{z}{2}(1 + \ln 2 - \ln z)$$



当$z \le 0$，$F_Z(z)=0$；　　当$z \ge 2$，$F_Z(z)=1$；

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln z), & 0 < z < 2; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

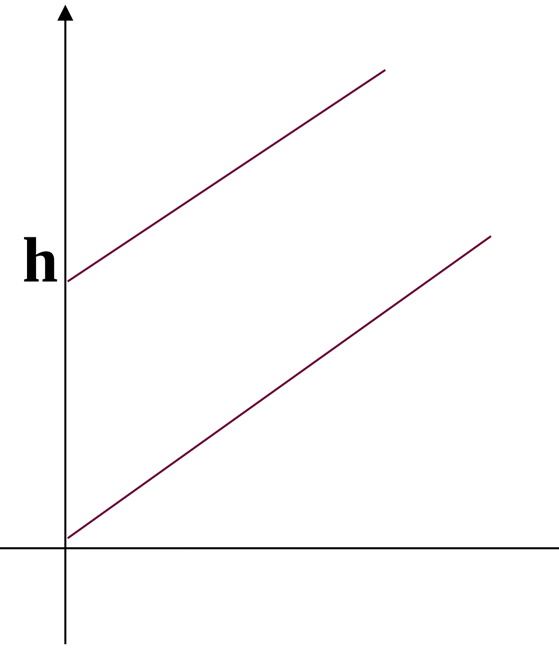
书：31

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$G = \{(x,z) \mid x > 0, 0 < z - x < h\}$$

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \dfrac{1}{h} & (x,z) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{其他} \\ \int_0^z \dfrac{\lambda}{h} e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{h}(1 - e^{-\lambda z}) & 0 < z \le h \\ \int_{z-h}^z \dfrac{\lambda}{h} e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{h} e^{-\lambda z}(e^{-\lambda z} - 1) & z > h \end{cases}$$

2、已知随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{4}{15}, & -1\le x<1 \\ \dfrac{11}{15}, & 1\le x<2 \\ 1, & 2\le x \end{cases}$$

（1）写出X的分布律；（2）计算概率P{X=1.5}和P{X≥1.5}，（3）计算条件概率P{X≤1.5|X≥0.5}.

解、（1）根据分布函数的间断点知，X的可能取值为-1，1，2

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=\frac{4}{15},\ P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=\frac{7}{15},$$

$$P\{X=2\}=F(2)-F(2-0)=\frac{4}{15},$$

$$(2)P\{X=1.5\}=0,\ P\{X\geq 1.5\}=1-P\{X<1.5\}=1-F(1.5)=\frac{4}{15}$$

$$(3)P\{X\leq 1.5\mid X\geq 0.5\}=\frac{P\{0.5\leq X\leq 1.5\}}{P\{X\geq 0.5\}}=\frac{F(1.5)-F(0.5)}{1-F(0.5)}=\frac{7}{11}$$

3、（15分）设随机变量*X*的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} C(1-x^2), & -1\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求（1）常数*C*;

（2）*X*的分布函数*F*(*x*);

（3）P{0≤*X*≤0.5}

解: （1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1} C(1-x^2)dx=\frac{4}{3}C$

得 $C=\frac{3}{4}$

(2)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \int_{-1}^{x}\frac{3}{4}(1-t^2)dt, & -1\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{4}(-x^3+3x+2) & -1\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

(3) $P(0\le X\le 0.5)=F(0.5)-F(0)=\dfrac{11}{32}$

4、（15分）设（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1; \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

试求：

（1）(X,Y)求关于X与Y的边缘密度函数；

（2）讨论X与Y是否独立；

（3）求 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$

（4）计算 $P(|Y|<\frac{1}{3}\,|\,X=\frac{1}{2})$

解 (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} dy = 2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} 1dy = 1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1} 1dy = 1-y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）**当(x,y) ∈{|y|<x,0<x<1} 时**

$\because \quad f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$ $\quad\therefore$ ***X*与*Y*不相互独立**

（3）当0<x<1时：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & |y|<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x\notin(0,1)$ $\quad f_{y|x}(y|x)$ 不存在

（4）

$$P(|Y|<\frac{1}{3}|X=\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})dy=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}1dx=\frac{2}{3}$$

5、(10分)设随机变量*X*与*Y*相互独立, 其概率密度分别为

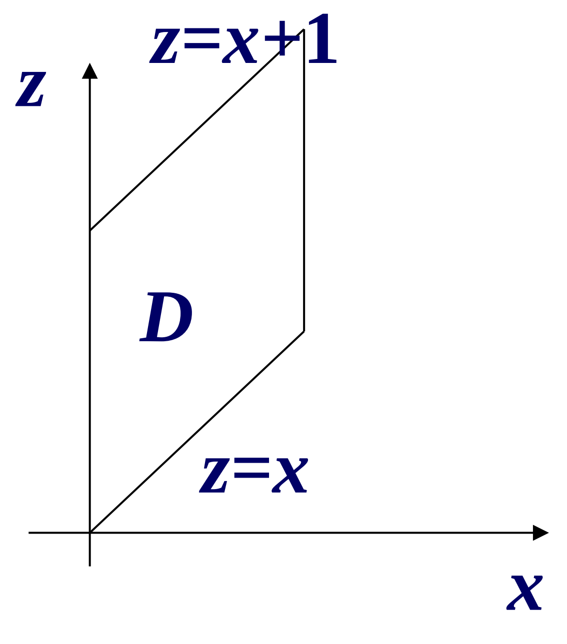
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量*Z*=*X*+*Y*的概率密度函数$f_Z(z)$.

解:

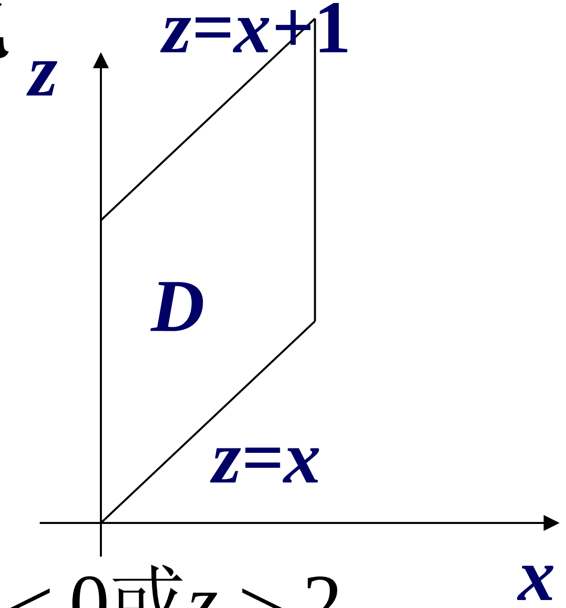
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$D=\left\{(x,z)\middle|\begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{matrix}\right\}$$



其中*D*如图

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x), & (x,z)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



则

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2,\\ \int_0^z 2(z-x)dx=z^2, & 0\le z\le 1,\\ \int_{z-1}^1 2(z-x)dx=2z-z^2, & 1\le z\le 2.\end{cases}$$

18、设电路中的电压振幅$X \sim N(0,1)$，求：经过半波整流后的电压振幅 $Y = \dfrac{X+|X|}{2}$ 的分布函数，并讨论随机变量Y 的类型.

解：$F_Y(y) = P\{\dfrac{X+|X|}{2} \le y\}, \forall y$

$$= P\{\frac{X+|X|}{2} \le y, X > 0\} + P\{\frac{X+|X|}{2} \le y, X \le 0\}$$

$$=P\{0 < X \le y\} + P\{y \ge 0, X \le 0\}$$

当$y \ge 0$时，$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(0) + F_X(0)$

$$= F_X(y)$$

当$y < 0$时，$F_Y(y) = 0$

则$F_Y(y)$在0处间断，故随机变量Y既非离散也非连续

19、假设随机变量X服从指数分布，试求 Y= min{X,2} 的分布函数，并讨论随机变量 Y 是否为离散或连续型随机变量，为什么？

解：$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\min\{X,2\} \le y\}$

$$= 1 - P\{\min\{X,2\} > y\} = 1 - P\{X > y, 2 > y\}$$

当$y<0$时，$F_Y(y) = 1 - P(X > y) = F_X(y) = 0$

当$0 \le y < 2$时，$F_Y(y) = 1 - P(X > y) = F_X(y)$

当$y \ge 2$时，$F_Y(y) = 1 - P\{\varnothing\} = 1$

$$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \le y < 2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$$

其中：$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

则$F_Y(y)$在y=2处间断，故随机变量Y既非离散也非连续

24、设随机变量X_1、X_2独立同分布，其概率密度为$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

令$Y_1=\min\{X_1, X_2\}, Y_2=\max\{X_1，X_2\}$.求$(Y_1，Y_2)$的联合分布函数。

解：$F_{X_1}(x)=F_{X_2}(x)=1-e^{-y}, y>0$

$$F_{Y_1}(y)=1-[1-F_X(y)]^2=1-e^{-2y}, y>0$$

$$F_{Y_2}(y)=F_X{}^2(y)=(1-e^{-y})^2, y>0$$

$$F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=P\{Y_1\le y_1, Y_2\le y_2\}=P\{Y_2\le y_2\}-P\{Y_1>y_1, Y_2\le y_2\}$$

$$=P\{X_1\le y_2, X_2\le y_2\}-P\{X_1>y_1, X_2>y_1, X_1\le y_2, X_2\le y_2\}$$

当$y_1<y_2$时

$$=F_{X_1}{}^2(y_2)-P\{y_1<X_1\le y_2, y_1<X_2\le y_2\}$$

$$=F_{X_1}{}^2(y_2)-[F_{X_1}(y_2)-F_{X_1}(y_1)]^2=2F_{X_1}(y_2)F_{X_1}(y_1)-F_{X_1}{}^2(y_1)$$

当$y_1\ge y_2$时，$F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=F_{X_1}{}^2(y_2)$

22、设$P\{X=0\}=P\{X=1\}=1/2, Y\sim U(0,1)$且$X,Y$相互独立，求$X+Y$的概率分布

解：记$Z=X+Y$,则

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\},\forall z$$

$$=P\{X+Y\le z, X=0\}+P\{X+Y\le z, X=1\}$$

$$=P\{Y\le 0, X=0\}+P\{1+Y\le z, X=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le 0\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-1\}$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$z\ge 2$时, $F_Z(z)=1$

当$0\le z<1$时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}F_Y(z)$

当$1\le z<2$时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F_Y(z-1)$

综上：

例：已S_0知服从0−1分布，其分布律为$P\{S_0=0\}=P\{S_0=1\}=0.5$,
$N\sim N(0,1), S=S_0+N$, 若S_0与N相互独立, 求$P\{0.25<S<0.75\}$
（结果用$\Phi(x)$表示即可，尽可能简化）

解：$P\{0.25<S<0.75\}=P\{0.25<S_0+N<0.75\}$

$$=P\{0.25<S_0+N<0.75, S_0=0\}+P\{0.25<S_0+N<0.75, S_0=1\}$$

$$=P\{0.25<N<0.75, S_0=0\}+P\{0.25<1+N<0.75, S_0=1\}$$

$$=P\{0.25<N<0.75\}P\{S_0=0\}+P\{0.25<1+N<0.75\}P\{S_0=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{0.25<N<0.75\}+\frac{1}{2}P\{-0.75<N<-0.25\}$$

$$=\frac{1}{2}(\Phi(0.75)-\Phi(0.25)+\Phi(-0.25)-\Phi(-0.75))$$

$$=\Phi(0.75)-\Phi(0.25)$$

例：设随机变量X,Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}, z \in R$

解：$P\{XY<z\}=P\{XY<z,Y=0\}+P\{XY<z,Y=1\}$

$$=P\{0<z,Y=0\}+P\{X<z,Y=1\}$$

当$z<0$时，$P\{XY<z\}$=$P\{X<z\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}\Phi(z)$

当$z \geq 0$时，$P\{XY<z\}$=$P\{Y=0\}+P\{X<z\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z)$