§1.5 事件的独立性

一、两个事件的独立性

在一般情况下(如P14 例1.3.1)

$$P(A|B) \neq P(A)$$

但若 $$P(A|B) = P(A) \qquad (*)$$

成立.即事件A发生的可能性大小不受事件B的影响，称A与B是<u>相互独立</u>的.

定义：设A，B是试验E的两个事件,若满足

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (**)$$

称事件A与B相互独立.

注：上述两个公式是**等价的**.(*)式常用来判断事件的独立性，而(**)式常用来计算概率.

定理：若事件A和B相互独立，则下列三对事件也相互独立

$$A,\overline{B};\quad \overline{A},B;\quad \overline{A},\overline{B}.$$

证明 仅对第三种情形证明

因为 $$P(AB) = P(A)P(B)$$

所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B})$$

设A, B是两个随机事件,且$0 < P(A) < 1$,

$P(B|A) = P(B|\overline{A})$,试问$A, B$是否相互独立?

答案 A **和**B **相互独立**.

因

$$P(B|A) = P(B|\overline{A}) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$$

$$\Rightarrow \quad P(AB)P(\overline{A}) = P(\overline{A}B)P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(AB)[1 - P(A)] = [P(B) - P(AB)]P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B)$$

设 $0 < P(A) < 1,\ 0 < P(B) < 1$，且

$P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$，则正确结论是(　　).

(A) A, B 互不相容;

(B) A, B 相互对立;

(C) A, B 相互独立;

(D) A, B 不相互独立.

选C. 事实上可以证明

若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$

证 若 A, B 相互独立

$$P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A})P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

若 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1-P(\bar{A}|\bar{B})$

$$\Rightarrow P(AB)=P(B)P(A|\bar{B})=[1-P(\bar{B})]P(A|\bar{B})$$
$$=P(A|\bar{B})-P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$
$$=P(A|\bar{B})-P(A\bar{B})$$

$$\Rightarrow\ P(A|\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})=P(A)$$

$\Rightarrow\ P(AB)=P(B)P(A)$ A,B 相互独立.

定义 设A_1，A_2，…，A_n为试验E的事件，若对任意的s（$1 < s \le n$）及$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s})$$

成立，则称事件A_1，A_2，…，A_n**相互独立.**

若对一切$1 \le i_1 < i_2 \le n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})$$

成立，则称事件A_1，A_2，…，A_n**两两独立.**

注： n 个事件相互独立是比两两独立更强的结论.

例子

三个事件的独立性是上述定义的特例.

定理： 若n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则将A_1，A_2，…，A_n中的任意多个事件换成它们的对立事件后，所得到的事件仍然相互独立.

命题

- 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立,将这n个事件任意分成 k 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的k 个事件也相互独立.

特别地,若A,B,C为三个相互独立的事件,则其中任意两个事件的和、差、交及其逆与另一个事件或其逆都是相互独立的。

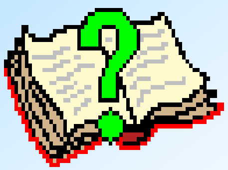
例子

事件的独立性有着广泛的用途.

例如

“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”

“有志者事竟成”



系统的可靠性设计

考虑A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生的概率，其中$0 < P(A_i) = p_i < 1$，

若（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容;

（2）A_1，A_2，…，A_n相互独立.

(1) 若A_1，A_2，…，A_n 互不相容，由概率的有限可加性可得

$$p = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

(2) 若A_1，A_2，…，A_n 相互独立，由对偶原理可得

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n})$$

特别，当 $P(A_i)=p$, $i=1, 2, \ldots, n$,有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \})= 1-(1-p)^n$$

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} = \lim_{n\to\infty} [1-(1-p)^n] = 1$$

小米加步枪战胜敌人的理论解释.

例1 设同时掷两个均匀的正四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码1，2，3，4.

$$\Omega=\begin{bmatrix}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(1,4)\\(2,1)&(2,2)&(2,3)&(2,4)\\(3,1)&(3,2)&(3,3)&(3,4)\\(4,1)&(4,2)&(4,3)&(4,4)\end{bmatrix}$$

令 A={甲四面体向下的一面是偶数},

B={乙四面体向下的一面是奇数},

C={两个四面体向下的一面同为奇数或偶数}.

由古典概率定义有

$$P(A)=P(B)=P(C)=8/16=1/2,$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4,$$

$$P(ABC)=P(\varphi)=0,$$

从而有

$$\left\{\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \qquad (*) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{array}\right.$$

即A、B、C 中任意两个都是相互独立的，称A、B、C 两两独立.

另一方面 $P(A|BC) = 0 \neq 1/2 = P(A)$

说明事件A发生的可能性大小会受到B与C的"联合"影响.

若A、B、C 两两独立，并且

$$P(A|BC) = P(A),$$

则 $P(ABC) = P(A|BC)P(BC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

称A、B、C **相互独立**。

从而

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

同时成立。

例2 已知事件 A, B, C 相互独立,证明 $\bar{A}$ 与 $B\cup C$ 也相互独立

证 $$P\left(\bar{A}(B\cup C)\right)=P(B\cup C)-P\left(A(B\cup C)\right)$$

$$=\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$-\left[P(AB)+P(AC)-P(ABC)\right]$$

$$=P(\bar{A})\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$=P(\bar{A})P(B\cup C)$$

下列不相互独立的是：

(A) $\overline{A+B}$, C

(B) $\overline{AC}$, $\overline{C}$

(C) $\overline{A-B}$, $\overline{C}$

(D) $\overline{AB}$, $\overline{C}$

#

例3 三个人独立地向同一目标射击，命中率分别为0.45、0.55、0.60, 求目标被击中的概率 p

解：令A_i={第i 人命中目标}，i =1,2,3.

则有 A_1、A_2、A_3相互独立.

由加法定理可得

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$= 0.45 + 0.55 + 0.60 - 0.45 \times 0.55 - 0.45 \times 0.60 - 0.60 \times 0.55 + 0.45 \times 0.55 \times 0.60$$

$$= 0.901$$

#

例4 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2，他持之以恒，不断重复试验，求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢?

解：设他做k次试验至少成功一次的概率为p_k，

A_j={第j次试验成功}，j=1，2，…

则
$$p_{10} = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})$$
$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{10})$$
$$= 1 - (1 - 0.2)^{10} \approx 0.8926$$

$$p_{20} = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{20})$$

$$= 1 - (1 - 0.2)^{20} \approx 0.9885$$

一般，将试验E重复进行k次，每次试验中A出现的概率p（$0 < p < 1$）则A至少出现一次的概率为

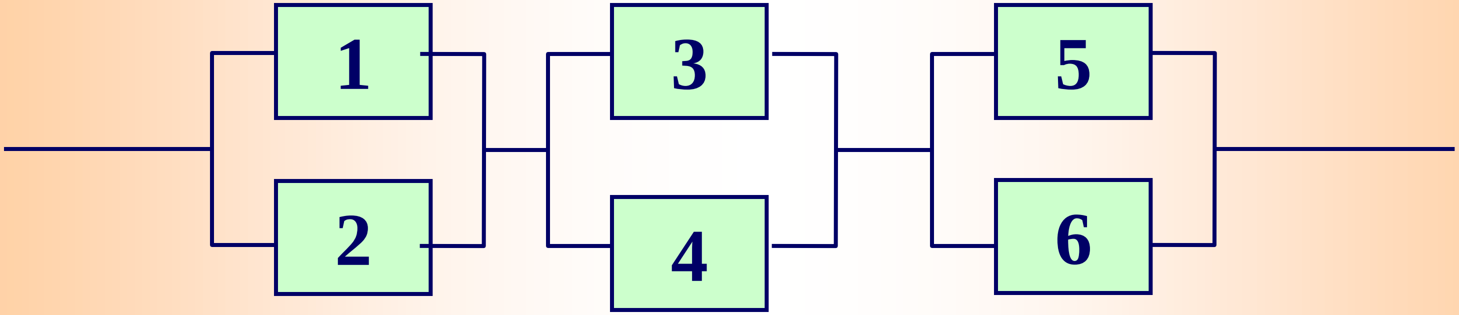
$$1-(1-p)^k$$

有

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}[1-(1-p)^k] = 1$$

#

例5 (可靠性问题) 设有6个元件，每个元件在单位时间内能正常工作的概率均为0.9，且各元件能否正常工作是相互独立，试求下面系统能正常工作的概率。



解 设 A_k={第k个元件能正常工作}，

k=1，2，…，6，

$A=\{$整个系统能正常工作$\}$

$$=(A_1\cup A_2)(A_3\cup A_4)(A_5\cup A_6)$$

A_1，A_2，…，A_6相互独立，可以证明

$$A_1\cup A_2,\ A_3\cup A_4,\ A_5\cup A_6$$

也相互独立.

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)P(A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)$$

$$=[1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3}\,\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5}\,\overline{A_6})]$$

$$=[1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})]$$

$$=[1-(1-0.9)^2]^3\approx 0.970299$$

#