概率论与数理统计习题课（二）

一、随机变量及其分布函数

定义：$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\omega: X(\omega) \le x\}$,

1、分布函数是概率

2、分布函数的几何意义

3、分布函数的性质 $\begin{cases} \text{验证F(x) (1)} \\ \text{确定参数} \\ \text{计算概率} \end{cases}$

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P\{a < X < b\}$$
$$= P\{X < b\} - P\{X \le a\}$$
$$= F(b-0) - F(a)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} 0 & F(x)\text{的连续点} \\ F(x) - F(x-0) & \end{cases}$$

二、离散型随机变量（分布律）

$$\begin{cases} (1) \quad p_i \geq 0, \ \forall i; \\ (2) \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \end{cases}$$

1、求p_i （2,3,4）

2、参数的确定

3、能用分布律计算概率（定义、基本性质）(5,6,7)

4、求分布函数　例1

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

$$= P[\bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}] = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\}$$

三、连续型随机变量

1、F(x)连续

2、f(x)的性质

(1) $f(t) \geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\}$

$$= P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

(4) 若$f(x)$在点x处连续,则有

$$F'(x) = f(x),$$

3、$x_0 \in R$，有 $P\{X = x_0\} = 0$

要求：1、判断f(x)

2、参数

3、计算概率

4、F(x), f(x)的相互转换

例2

8,9,10

四、常见分布

五种重要分布的分布律和概率密度

3,5,9

1、贝努里试验与二项分布 $X \sim B(n, p)$.

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n.$$

1）判断贝努里试验

2）确定贝努里试验有关随机变量的分布 (3)

2、泊松分布（二项分布的极限分布）$X \sim P(\lambda)$.

$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0$，1，…；（$\lambda>0$）

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda \quad (\lambda>0)$, 则有 (5)

$$\lim_{n\to\infty} P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,\cdots$$

3、均匀分布 $X \sim U(a, b)$. (12,13)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即对于 $(c,\ c+l)\subset(a,\ b)$，**有**

$$P\{c<x\le c+l\}=\frac{l}{b-a}$$

4、指数分布（无后效性）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (\lambda>0)$$

$$P\{X>t+s \mid X>t\}=P\{X>s\}$$ (17,18)

5、正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

正态分布概率计算的两种方法：

1）利用正态概率曲线特征

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x;\mu,\sigma^2)\,dx=1$

$$P\{\mu-x<X\le\mu\}=\mathrm{P}\{\mu<X\le\mu+x\}$$

2）利用常用正态概率计算公式 (14,15,19)

（1）**若随机变量**$X \sim N(0, 1)$，**则**

$$P\{a < X \leq b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

（2）**若随机变量**$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，**则**

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(3.8) - \Phi(0.3) \approx 1 - \Phi(0.3)$$

三、既非离散也非连续型随机变量 (11)

9、从一批子弹中抽5发试射，若没有一发子弹落在距靶心2cm外，则视该批子弹合格，设弹着点与靶心距离为Xcm， X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Axe^{-x^2}, & 0<x<3; \\ 0, & 其他。\end{cases}$$

求（1）A；（2）认为该批子弹合格的概率。

解：（1）由

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^3 Axe^{-x^2}dx=\frac{A}{2}(1-e^{-9})$$

$$\therefore\ A=\frac{2}{1-e^{-9}}$$

（2）设Y——弹着点在靶心2cm内的子弹数,

C——认为该批子弹合格，则

$$Y \sim B(5, p)$$

其中

$$p = P(0 \le X \le 2) = \int_0^2 f(x)dx = \frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}$$

则

$$P(C) = P(Y=5) = C_5^5 p^5 (1-p)^0 = \left(\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}\right)^5$$

例1、一辆汽车沿一条街道行驶，需要通过3个设有红绿信号灯的路口，在每个路口前遇到红或绿的概率均为1/2，而且是相互独立的。以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数，试写出X的分布律和分布函数。

解　X的可能取值为0，1，2，3；

A_k={汽车在第k个路口遇到红灯}，　$k=1,2,3,$

A_k, $k=1,2,3$相互独立.

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2^3},$$

$$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{2^3},$$

X的分布律为

X	0	1	2	3
P	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^3$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ \dfrac{3}{4}, & 1\le x<2;\\ \dfrac{7}{8}, & 2\le x<3;\\ 1, & 3\le x.\end{cases}$$

例： 独立重复进行某项实验成功就停止，每次成功的概率都是1/2，若至多做3次实验，用X表示试验次数，试写出X的分布律和分布函数。

例2、设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} Ae^{x}, & x<0; \\ B, & 0\le x<1; \\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\ge 1. \end{cases}$$

试求：1. A，B的值； 2. X的概率密度；

3. $P\{X\ge \dfrac{1}{3}\}$

解 1. 由于X是连续型随机变量，其分布函数是连续函数，

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} Ae^{x} = A,$$

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} B = B,$$

$A=B$，由

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = \lim_{x\to 1-} B = B,$$

$$\lim_{x\to 1+} F(x) = \lim_{x\to 1+} 1 - Ae^{-(x-1)} = 1 - A,$$

可得 $A = B = \dfrac{1}{2}$

2. X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0;\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

X的概率密度为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{x}, & x < 0; \\ 0, & 0 \le x < 1; \\ \dfrac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

$$3.\ P\{X \ge \frac{1}{3}\} = 1 - P\{X < \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

或 $$P\{X \ge \frac{1}{3}\} = \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 0dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-1)}dx = \frac{1}{2}$$

15、某种电子元件在电源电压不超过200伏，200伏至240伏及超过240伏3种情况下，损坏率依次是0.1，0.001及0.2，设电源电压$X \sim N(220, 25^2)$,求:

1.此种元件的损坏率;

2. 此种元件的损坏时，电源电压在200~240伏的概率。

解　设　A={元件损坏}，

B_1={电源电压不超过200伏}，

B_2={电源电压是200伏~240伏}，

B_3={电源电压超过240伏}，

B_1，B_2，B_3构成样本空间的一个划分，且

$$P(B_1)=P\{X\le 200\}=P\{\frac{X-220}{25}\le -0.8\}=\Phi(-0.8)$$

$$=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$$

$$P(B_2)=P\{200\le X\le 240\}=\Phi(\frac{240-220}{25})-\Phi(\frac{200-220}{25})$$

$$=2\Phi(0.8)-1=0.5762$$

$$P(B_3)=P\{240\le X\}=1-P(X<240)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

(或根据标准正态分布的对称性，或利用

$$P(B_3)=1-P(B_1)-P(B_2))$$

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A|B_k)$$

$$=0.2119\times0.1+0.5762\times0.001+0.2119\times0.2$$

$$=0.0693$$

袋中有大小相同的**10**个球，编号为**0,1,2**，…，**9**，从中任取一个，观察其号码，按“大于**5**”，“等于**5**”，“小于**5**”三种情况定义一个随机变量**X**，并写出**X**的分布律和分布函数。

某企业招聘**330**人，按考试成绩从高分到低分依次录取，共有**1000**人报名，而报名者考试成绩$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。已知**90**分以上有**36**人，**60**分以下有**115**人，问被录用者最低分数是多少？