§4.2 随机变量的方差

数学期望作为数字特征，仅说明了随机变量平均特征。

平均值不能反映随机变量的其它特点,例如取值的范围、集中程度等。

本节引进随机变量的**方差描述随机变量取值的离散程度。**

引 例

定义4.2.1 设 X 是随机变量,若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，称

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

为 X 的**方差**. $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 称为 X 的**标准差**或**均方差**.

注 1）$D(X)\geq 0$.

2）$D(X)$ 是随机变量 X 的函数的数学期望；

当 X 为离散型或连续型时，分别有

$$D(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}[x_i-E(X)]^2P\{X=x_i\},$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f_X(x)dx.$$

常用计算公式:

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证 明

重要分布的方差计算

1. $X\sim B(n,p)$, 则 $E(X)=np$;

$D(X)=np(1-p)$ 例4.2.5

2. $X\sim P(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$;

证 明

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X) = \mu$;

$$D(X) = \sigma^2$$

证 明

典型分布的数学期望与方差:

1. $X \sim B(n, p)$，则 $E(X) = np$;　$D(X) = np(1-p)$

2. $X \sim P(\lambda)$，则 $E(X) = D(X) = \lambda$;

3.均匀分布　$E(X)=(b+a)/2$，　$D(X)=(b-a)^2/12$

4.指数分布　$E(X) = \sqrt{D(X)} = \dfrac{1}{\lambda}$

5. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X) = \mu$;　$D(X) = \sigma^2$

例 4.2.1

例 4.2.2

例 4.2.3

练习

三. 随机变量的方差的性质

设X , $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是随机变量，c, b 是常数

1）$E(c) = c$， $D(c) = 0$;

2）$E(cX) = cE(X)$， $D(cX) = c^2 D(X)$;

3) $$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i);$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)+2\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$

若$X_1, X_2,\ldots., X_n$相互独立，则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

证明3）

$$\because D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E\{[\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)]^2\}$$

$$= E\{[\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))]^2\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\{[X_i - E(X_i)]^2\} + 2\sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

若X_i , i=1,2,…n **相互独立，则**

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j)$$

$$\Rightarrow E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0$$

故有 $$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

4）$D(X) = 0 \Longleftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1.$

例 4.2.4 例 4.2.5 例 4.2.6

方差刻划了随机变量 X 围绕其数学期望的偏离程度！

方差是随机变量 X 关于任何值的偏离程度的最小值！

谁的技术水平发挥的更高?

已知甲乙两名射击运动员的历史记录为:

甲

X	10	9	8	7	6	5	0
$P(X=x_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0

乙

Y	10	9	8	7	6	5	0
$P(Y=y_k)$	0.7	0.05	0.02	0.03	0.1	0.1	0

$$E(X)=10\times0.5+9\times0.2+8\times0.1+7\times0.1+6\times0.05+5\times0.05=8.85(\text{环})$$

$$E(Y)=10\times0.7+9\times0.05+8\times0.02+7\times0.03+6\times0.1+5\times0.1=8.92(\text{环})$$

从平均水平来看，乙的技术水平略高些.

考虑其平方偏差值的平均值

甲：
$$\sum_{i=5}^{10}(i-E(X))^2 P\{X=i\}$$
$$=E\{[X-E(X)]^2\}=2.2275$$

乙：
$$\sum_{k=5}^{10}(k-E(Y))^2 P\{Y=k\}$$
$$=E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\}=3.4860$$

说明甲的技术水平发挥的更稳定一些.

证明 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$= E\{X^2 - 2X \cdot E(X) - [E(X)]^2\}$$

$$= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) - [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

1. $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$;

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k^2 = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k(k-1+1)}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}+e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2\cdot e^{\lambda}+e^{-\lambda}\lambda\cdot e^{\lambda}$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$

证明: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}}\quad \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,de^{-\frac{t^2}{2}}\ \underline{\underline{\text{分部积分}}}\ \sigma^2$$

例4.2.1 证明 函数 $\varphi(x)=E[(X-x)^2]$, $x\in R$,

当$x=E(X)$时达到最小.

证明 $\varphi(x)=E[(X-x)^2]=E(X^2)-2xE(X)+x^2$

令$\varphi'(x)=-2E(X)+2x=0$, 得到$x=E(X)$.

又$\because \varphi''(x)\big|_{x=E(X)}=2>0$,

故 $\varphi(x)$ 在$x=E(X)$处取到最小值.

随机变量X关于自身数学期望的偏离程度比相对其它任何值的偏离程度都小.

例4.2.2 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1)求$D(X)$.　　2) $Y=X^2+1$，求$D(Y)$.

解 1) $E(X)=(-1)\times 1/2+0\times 1/3+1\times 1/6=-1/3$,

$E(X^2)=(-1)^2\times 1/2+0^2\times 1/3+1^2\times 1/6=2/3$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=5/9$.

2) $E(Y)=[(-1)^2+1]\times 1/2+[0^2+1]\times 1/3$

$+[1^2+1]\times 1/6=5/3,$

$E(Y^2)=E(X^4+2X^2+1)=3,$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=2/9.$

例4.2.3 设随机变量X与Y相互独立,且

$X,Y \sim N(0,\frac{1}{2})$, 求$|X-Y|$的方差.

解 $\left.\begin{array}{l} X,Y\text{相互独立} \\ -Y \sim N(0,\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{具有可加性}]{\text{正态分布}} X-Y \sim N(0,1)$

令 $Z = X - Y$ 则 $Z \sim N(0,1)$

则 $E(Z)=0,\quad D(Z)=1,\quad E(|Z|)=\sqrt{2/\pi},$

$$E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=1,$$

$$D(|X-Y|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$$

练习 设一次试验成功的概率为p，进行100次独立重复试验，当$p=$ __1/2__ 时，成功次数的标准差的值最大，其值为 __5__ .

解　设成功次数为X，则$X \sim B(100, p)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{100p(1-p)} = 10\sqrt{p(1-p)},$$

引入函数　$\varphi(p) = p(1-p), \quad 0 < p < 1,$

令　$\varphi'(p) = 1 - 2p = 0 \quad \Rightarrow p = \dfrac{1}{2},$

又因 $\varphi''(p)\big|_{p=0.5} = -2,$

$$\Rightarrow \varphi(p)\text{在}p = \frac{1}{2}\text{取最大值,}$$

故 $\sigma(X) = 10\sqrt{p(1-p)} = 5.$

例4.2.4

随机变量X的$E(X),D(X)$存在，且$D(X)>0$

令 $$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

证明 $E(X^*)=0,\quad D(X^*)=1.$

证 $$E(X^*)=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0,$$

$$D(X^*)=\frac{1}{D(X)}D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1,$$

称 X^* 为 X 的标准化随机变量.

特别地

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \text{则} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

例4.2.5 设 $X, Y \sim N(0,1)$ 且 X, Y 相互独立，

求 $E(X^2+Y^2), D(X^2+Y^2)$.

解 $\because X, Y \sim N(0,1)$,

由 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1$,

同理 $E(Y^2)=1$, $\therefore E(X^2+Y^2)=2$,

$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{2}}dx-1=3-1=2.$$

又 $\because X,Y$相互独立

$$\therefore D(X^2+Y^2)=D(X^2)+D(Y^2)=4.$$

X^2+Y^2**服从自由度为 2的**χ^2**分布.**

例 4.2.6

证明:(Chebyshev不等式)

若随机变量X的方差$D(X)$存在，则$\forall\, \varepsilon > 0$有

$$P\{|X - E(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

证

$$P\{|X - E(X)| \ge \varepsilon\} = \int_{\{x \mid [x-E(X)] \ge \varepsilon\}} f(x)dx$$

$$\le \int_{\{x \mid [x-E(X)] \ge \varepsilon\}} \frac{|x - E(X)|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X-E(X)|\ge \varepsilon\}\le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

方差刻划了随机变量 X 相对数学期望的偏离程度!