第八章

假 设 检 验

§ 8.1 假设检验的基本思想与步骤

§8.2 正态总体的参数检验

§ 8.1 假设检验的基本思想与步骤

一.假设检验的基本思想

引例1 已知一个暗箱中有100个白色与黑色球，不知各有多少个.现有人猜测其中有95个白色球，是否能相信他的猜测呢?

他相当于提出假设:

$p=P(A)=0.05$，A={任取一球是黑球}.

现随意从中抽出一个球, 发现是黑球, 怎样解释这一事实?

可有两种解释:

1）他的猜测是正确的,恰抽得黑球是随机性所致;

2）他的猜测错了.

应接受哪一种呢?

根据**小概率事件原理**, 事件A的发生不能不使人们怀疑他的猜测,更**倾向于**认为箱中白球个数不是95个.

引例 2

假设检验基本思想：提出统计假设, 根据小概率事件原理对其进行检验.

二、基本概念

工件直径的假设检验

1. 参数与分布的假设检验

1）关于总体参数的假设检验, 如 $H_0:\mu=\mu_0$

2）关于总体分布的假设检验,如

$$H_0: F(x)=\Psi(x;\mu,\sigma^2)$$

2. 原假设与备择假设

根据问题的需要提出的一对对立的假设，记H_0为原假设或零假设；

与原假设H_0相对立的假设称为备选假设，记为H_1.

相对于原假设, 可考虑不同的备选假设, 如

1) H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$;

2) H_0: $\mu\leq\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$;

3) H_0: $\mu\geq\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$; ……

3. 检验统计量

用做检验统计推断的统计量.

4. 假设检验的接受域和拒绝域

根据假设检验目的, 由样本去推断是否接受原假设H_0.

接受域 使H_0得以接受的检验统计量取值的区域A.

否定域：使H_0被否定的检验统计量取值的区域R.

三.假设检验的基本步骤

包装机工作正常与否的判断

1.提出原假设：根据实际问题提出原假设H_0和备选假设H_1;

2. 建立检验统计量：寻找参数的一个良好估计量，据此建立一个不带任何未知参数的统计量U作为检验统计量，并在H_0成立的条件下，确定U的分布(或近似分布)；

2

3.确定H_0的否定域：根据实际问题选定显著性水平α，依据检验统计量的分布与H_0的内容，确定H_0的否定域；

3

4. 对H_0作判断：根据样本值算出检验统计量的统计值u，判断u是否落在拒绝域，以确定拒绝或接受H_0.

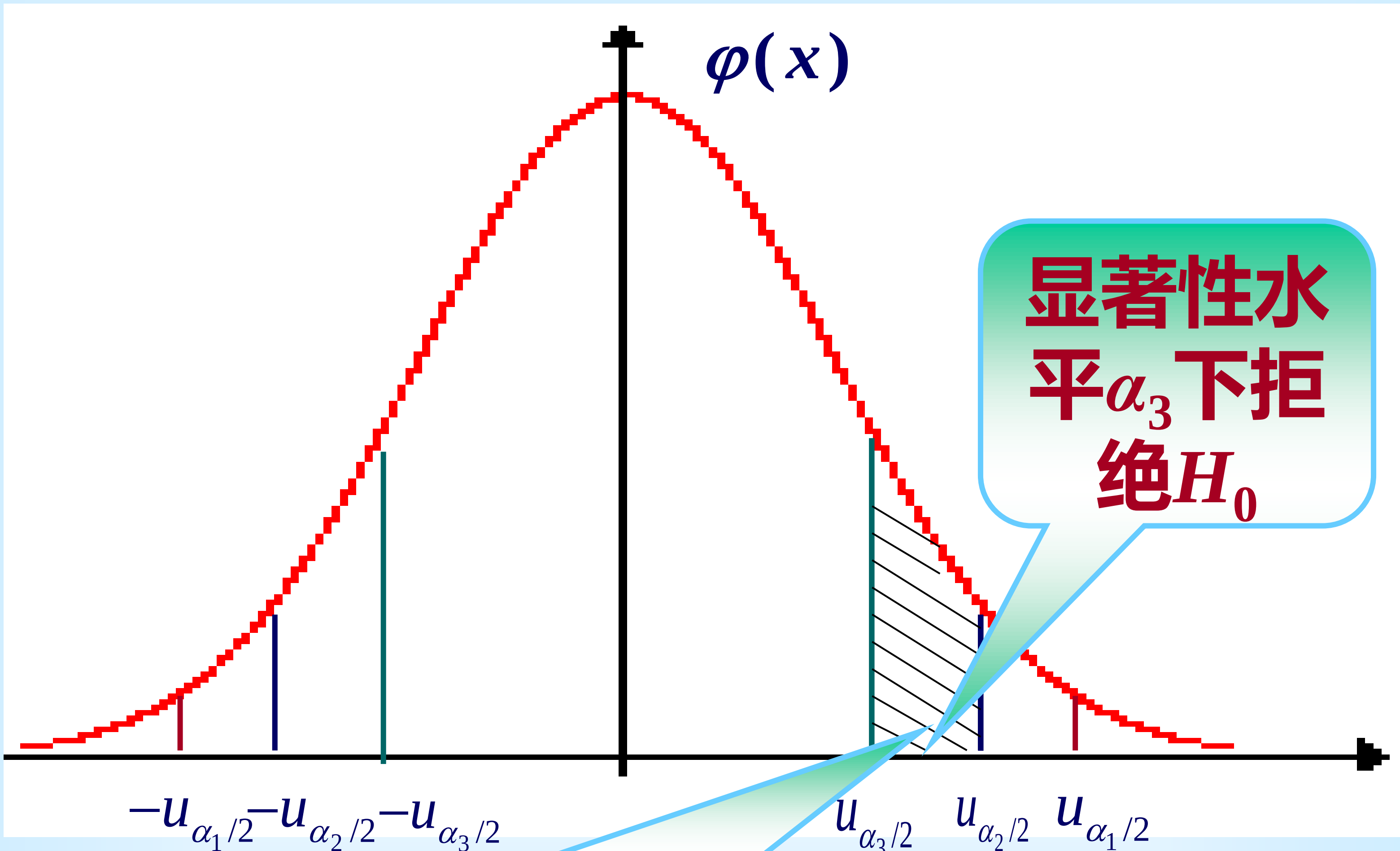
4

对原假设H_0做出判断，称为对H_0做显著性检验， $1-\alpha$称为置信水平.

注1 对不同的显著性水平α，有不同的否定域，从而可能有不同的判断结论.

如在工件直径的假设检验问题中，设$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$，对不同的分位数

假设检验基本思想



显著性水平α_2下接受H_0

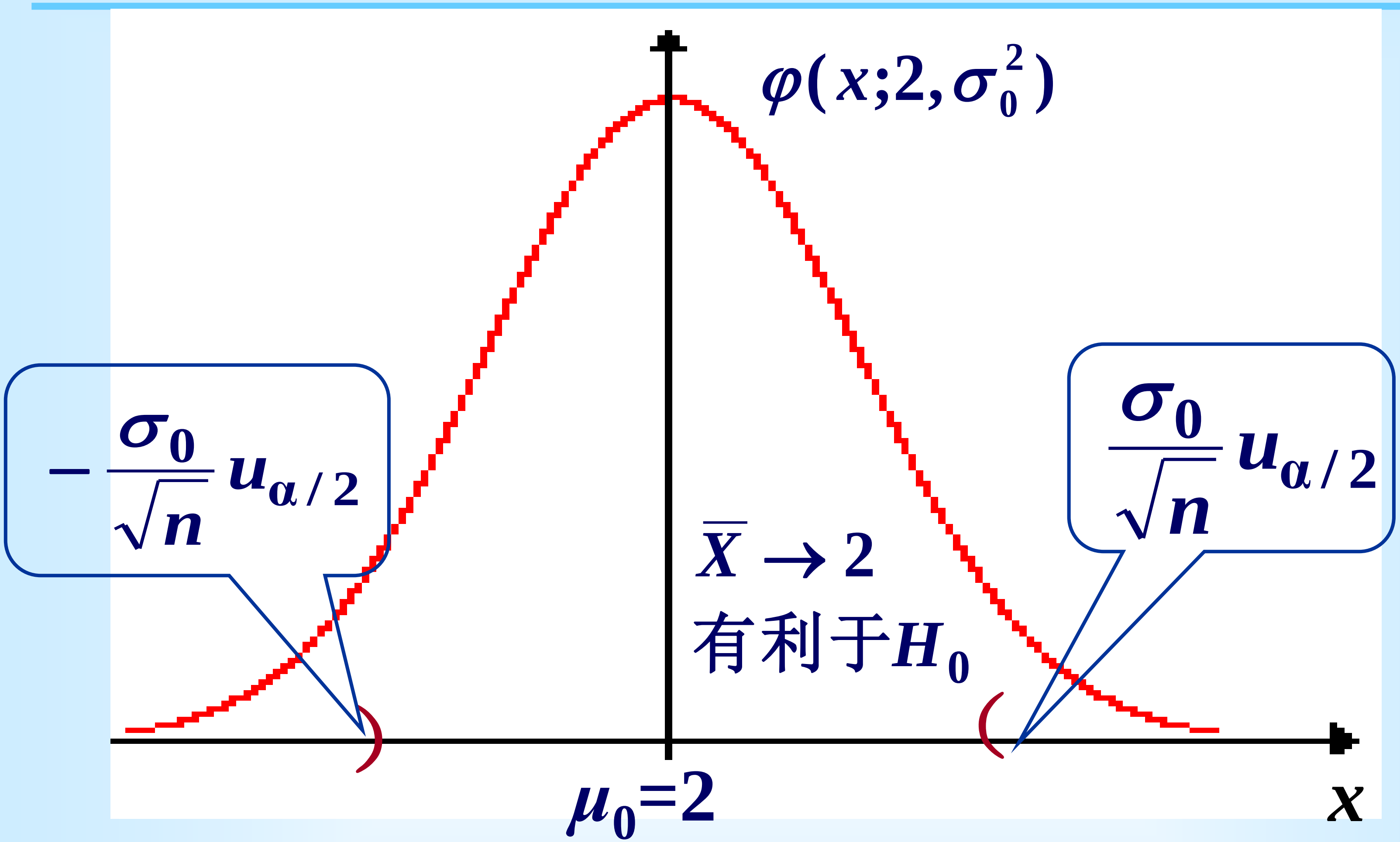
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

注2 在确定H_0的拒绝域时应遵循**有利准则**：将检验统计量对H_0有利的取值区域确定为接受域，对H_1成立有利的区域作为拒绝域.

如在工件直径假设检验问题中

1）若检验 H_0：$\mu=\mu_0=2$，H_1：$\mu\neq\mu_0=2$；取检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$



$\overline{X}$ 的值越接近于$\mu_0=2$，越有利于H_0成立，不利于H_1成立，故对给定α，H_0的拒绝域为：

$$\left|\bar{x}-\mu_0\right| > \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$$

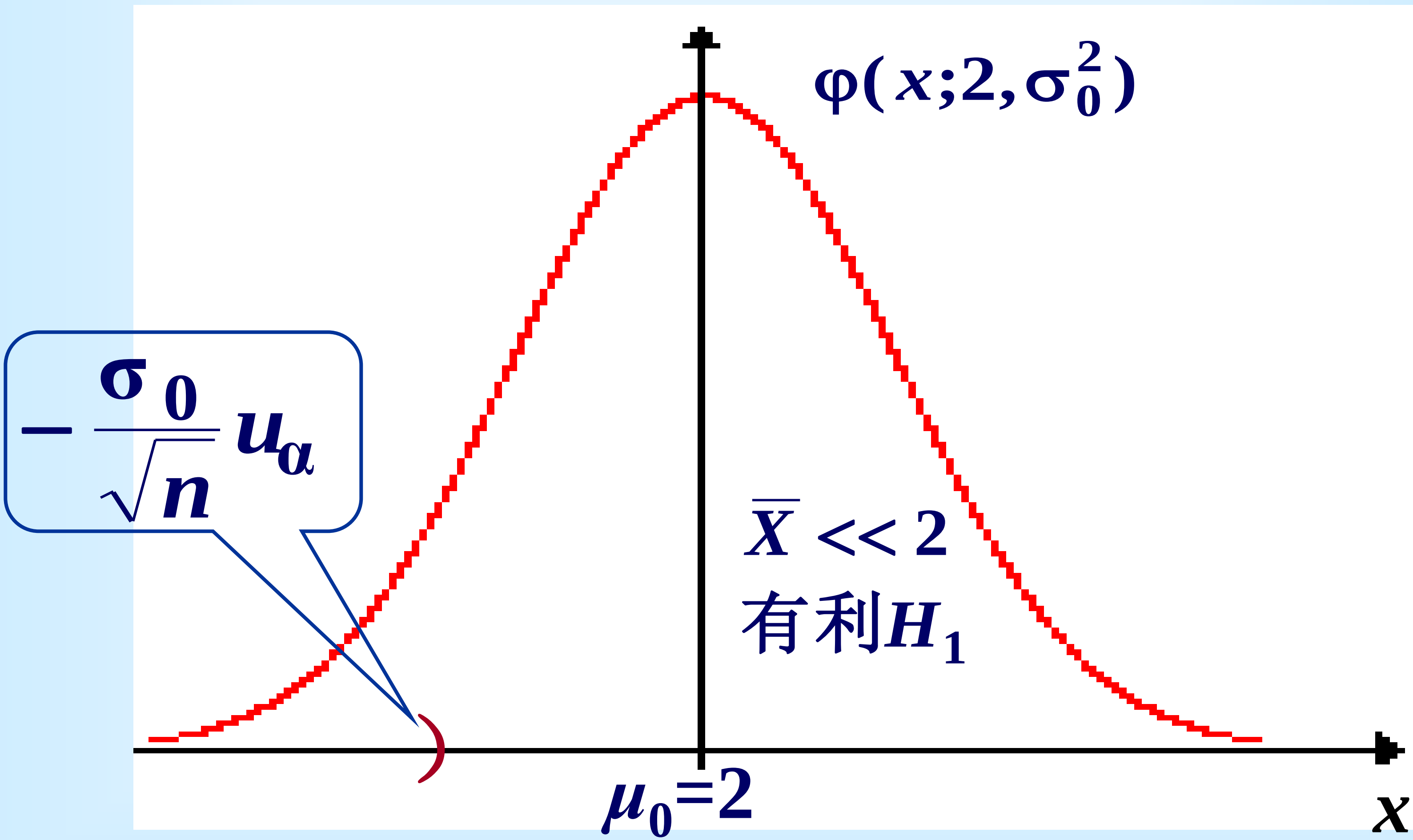
或

$$|u| = \frac{\left|\bar{x}-\mu_0\right|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{\alpha/2}$$

2）若检验 H_0：$\mu=\mu_0=2$，H_1：$\mu<\mu_0$；取检验统计量

$$U = \frac{\overline{X}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

检验 $H_0:\mu=\mu_0=2$， $H_1:\mu<\mu_0$



给定α，H_0的否定域为：

$$\overline{X}-\mu_0<-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_\alpha\,,\qquad \text{即：}\ U<-u_\alpha$$

例中

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=-2.2<-u_{0.05}=-1.645$$

拒绝H_0，即认为新工艺使工件直径偏小.

大样本假设检验例子

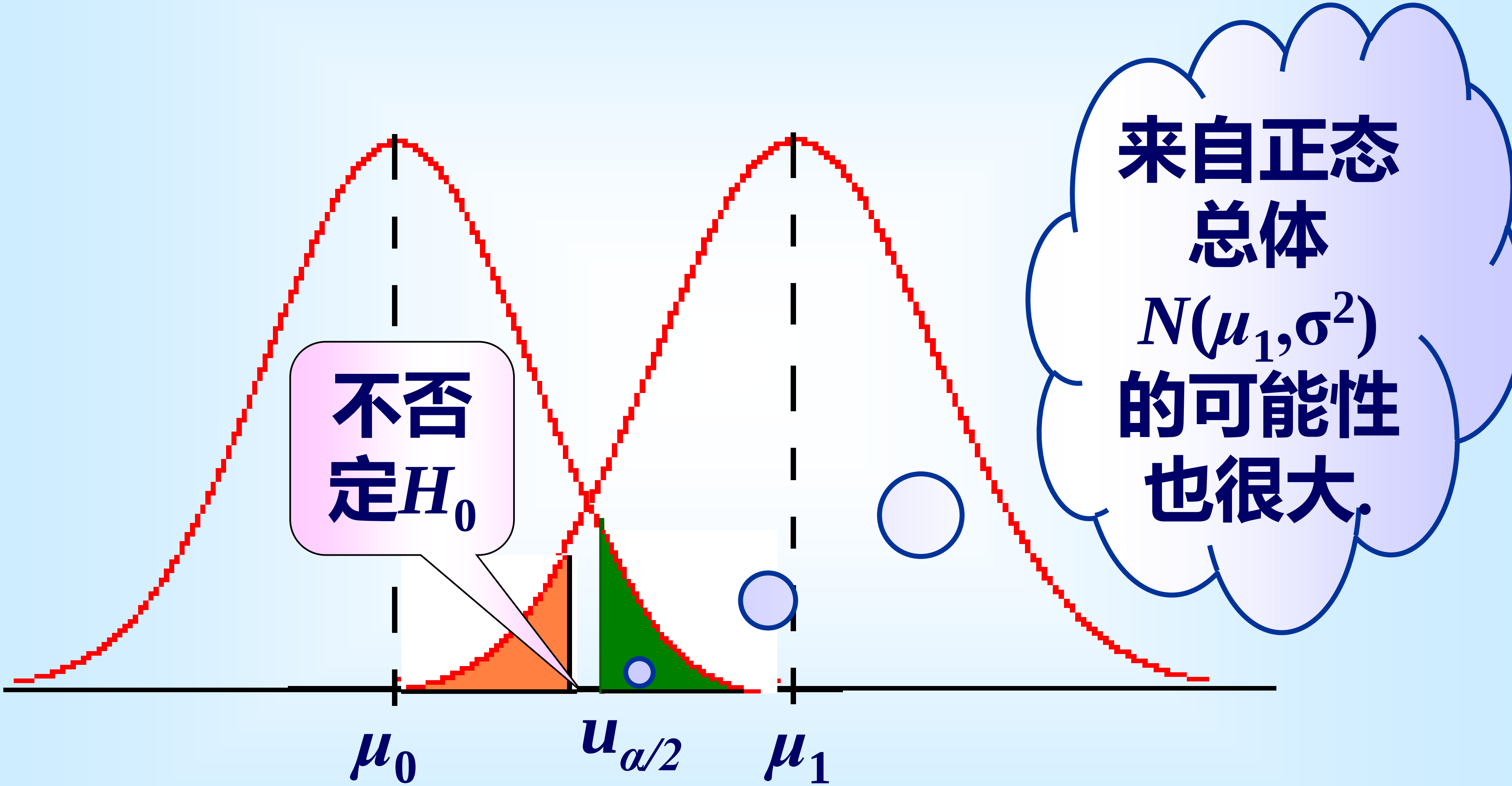
四、两类错误

1）假设检验的主要依据是"小概率事件原理"，而小概率事件并非绝对不发生.

2）假设检验方法是依据样本去推断总体，样本只是总体的一个局部，不能完全反映整体特性.

无论接受或拒绝原假设H_0
都可能做出错误的判断

检验 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$；



第一类错误(弃真)：在H_0成立的情况下，错误地否定了H_0；

第二类错误(纳伪)：在H_0不成立的情况下，错误地接受了H_0.

检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$， H_1：$\mu\neq\mu_0$ ，

令

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当 H_0 成立时，

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=U_1\sim N(0,1)$$

若H_1成立时，(即$\mu \neq \mu_0$)

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = U_2 = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, 1\right)$$

显著性水平

犯第一类错误的概率为

$$P\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}} \mid H_0\text{真}\} = P\{|U_1| > u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$$

犯第二类错误的概率$\beta(\mu)$

$$P_\mu\{|U| \le u_{\frac{\alpha}{2}} \mid H_0\text{假}\} = P\{|U_2| < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \beta(\mu), \mu \neq \mu_0$$

两类错误

判断 真实情况 判断 正误	H_0 真	H_1 真
拒绝H_0	犯第一类错误（弃真）	判断正确
接受H_0	判断正确	犯第二类错误（纳伪）

不可能使两类错误同时都尽可能小！
减小一类错误，必然使另一错误增大.

例8.1.1 在一次社交聚会中， 一位女士宣称她能区分在熬好的咖啡中，是先加奶还是先加糖，并当场试验，结果 8 杯中判断正确 7 杯.但因她未完全说正确，有人怀疑她的能力！该如何证明她的能力呢?

在场的一位统计学家给出了如下的**推理思路**：

设该女士判断正确的概率为p

原假设H_0： $p=1/2$ 即该女士凭猜测判断，

对立假设H_1： $p>1/2$ 即该女士确有判断力.

在假设H_0下，8杯中猜对7杯以上的概率为0.0352 (用二项分布计算).

若H_0正确，则小概率事件发生！

— 故拒绝H_0， 即认为该女士确有鉴别能力.

例 8.1.2 工厂生产的工件直径标准为$\mu_0=2$ (cm)，现从采用新工艺生产的产品中抽取出100个，算得直径 $\overline{x} = 1.978$(cm)，问 $\overline{x}$ 与μ_0的差异是否反映了工艺条件的改变引起工件直径发生了显著的变化？(已知$\sigma=\sigma_0=0.1$).

解 用X表示新工艺生产的工件直径总体，设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的样本

提出统计假设

$H_0:\mu=2$；(原假设)，$H_1:\mu\neq\mu_0=2$ (备择假设)

原假设H_0相当于“新工艺对工件直径无显著影响”.

若H_0成立，则有

标准化

$$U=\frac{\bar{X}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

由于 $$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,(\alpha=0.05)$$

则 $$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|>u_{\alpha/2}\right\}=\alpha,$$ 小概率事件

而 $u_{\alpha/2} = 1.96$

$$|u| = \left|\frac{\bar{x}-2}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| = \frac{|1.978-2|}{0.1/100} = 2.2 > 1.96,$$

小概率事件在一次试验中竟发生，无理由接受原假设H_0，即认为新工艺对工件有显著的影响.

#

例8.1.3 某车间有一台葡萄糖自动包装机，额定标准为每袋重500克.设每袋产品重量 $X \sim N(\mu, 15^2)$，某天开工后，为了检验包装机工作是否正常，随机取得9袋产品，称得重量数据为(单位：克)：

497	506	518	524	498	511	520	515	512

问：这天包装机是否工作正常?

分析：设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体X的样本，若$\mu=500$(克)，则包装机工作正常,否则认为不正常.

第一步 根据实际问题提出一对假设

H_0：$\mu=500=\mu_0$；　　H_1：$\mu\neq\mu_0$；

若拒绝H_0，表明包装机工作很可能不正常；否则，可认为包装机工作正常.

第二步 构造适当的检验统计量.

由于 $\overline{X}$ 是μ的良好估计量，且$\sigma_0^2=15^2$，当H_0成立时，有

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-500}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

第三步 确定H_0的拒绝域

对给定的显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$，由正态分布表可查得$u_{\alpha/2}$，使得

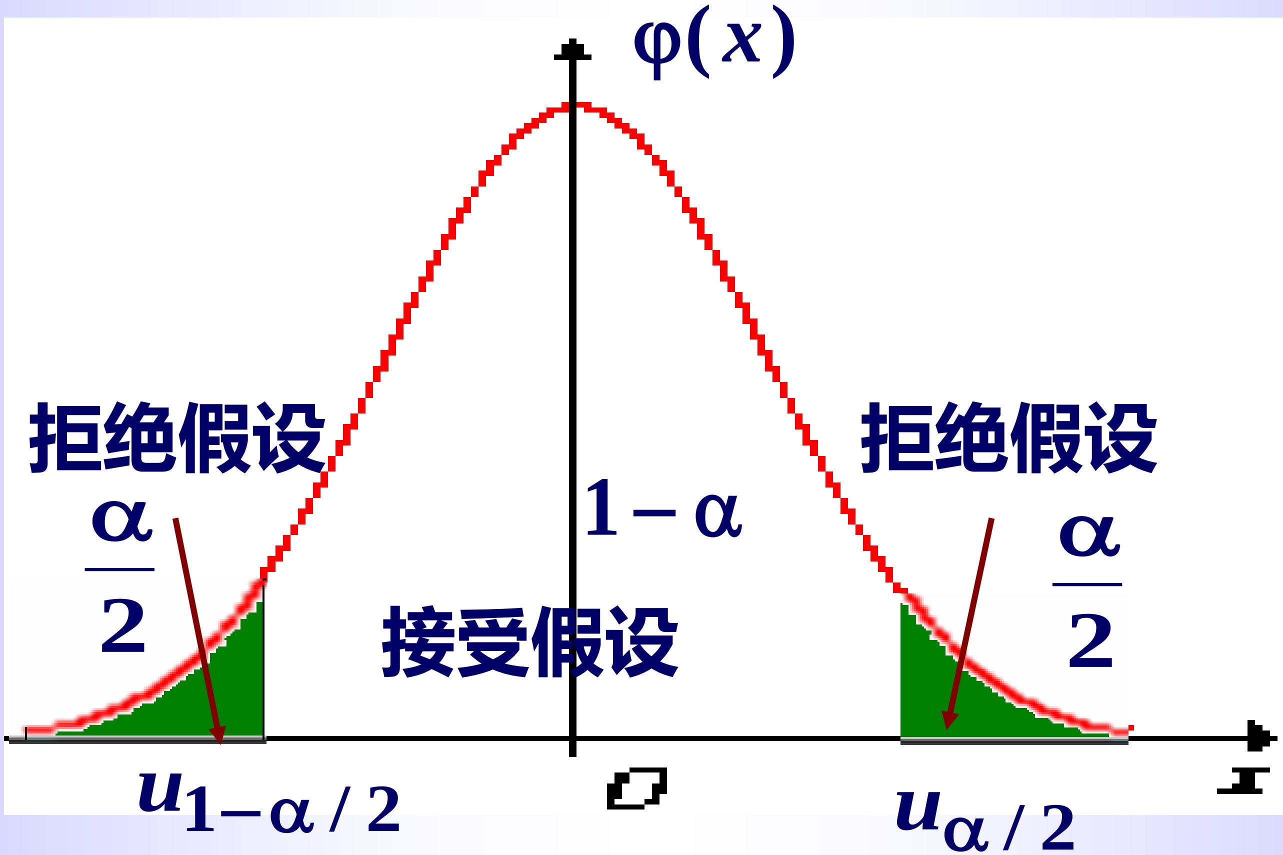
$$P\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

即

$$P\{|U|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

于是H_0的拒绝域为

$$(-\infty,-u_{\alpha/2})\cup(u_{\alpha/2},+\infty)$$



第四步 做出结论判断.

对给定的样本值x_1，…，x_n，算出U 的统计值

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, \quad 其中\ \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

若 $|u|>u_{\alpha/2}$ 则拒绝 H_0 (而接受 H_1);
否则接受 H_0.

因若原假设 H_0 成立，小概率事件 $P\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$ 发生，有理由怀疑原假设 H_0 是错误的.

若取α=0.05，查表得： $u_{\alpha/2}$=1.96，由样本可算得:

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|=\frac{|511-500|}{15/3}=\frac{11}{5}=2.2,$$

由于$|u|$=2.2> 1.96，故在显著性水平α=0.05 之下拒绝H_0，即认为包装机工作不正常.

例8.1.4 某系统中装有1024个同类元件，对系统进行一次周期性检查，更换了其中18个元件，是否可认为该批元件的更新率p为0.03.(取α=0.01)

解 1）需检验 H_0：p=0.03； H_1: $p\neq 0.03$。

2）用Y表示1024个元件中需更换的个数，若H_0为真，则有

$$Y \sim B（1024，0.03）$$

由D—L中心极限定理知

$$U=\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$$

近似成立.

3）对给定$\alpha(0<\alpha<1)$，有

$$P\{|U|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\left\{\left|\frac{Y-np}{\sqrt{np1-p)}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx\alpha$$

当$\alpha=0.01$，$u_{\alpha/2}=u_{0.005}=2.575$，$H_0$的拒绝域为

$$(-\infty,\ -2.575)\cup(2.575,\ +\infty).$$

4）统计量U的统计值

$$u=\frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{18-1024\times 0.03}{\sqrt{1024\times 0.03\times 0.97}}=-2.330,$$

$-2.330\in(-2.575，2.575)$,

无理由拒绝H_0，即在$\alpha=0.01$的显著性水平下，可认为元件更新率为0.03.

若取$\alpha=0.05$，$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，则因

$-2.330\notin（-1.96，1.96）$无理由接受H_0，即认为更新率不是0.03.

#