§4.4 n 维正态随机变量

一. 二维正态概率密度的矩阵表示

二维正态随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\quad (x,y)\in R^2,$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0$,均为常数, $|\rho|<1$,

记 $$\mu = E\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

均值向量

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中$\sigma_1>0, \sigma_2>0$, $|\rho|<1$, 故协方差矩阵满足$|C|\neq 0$.

联合概率密度可表示为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{X}-\mu)'\mathrm{C}^{-1}(\mathrm{X}-\mu)\right\}$$

二. 二维正态分布的重要结论

若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,**有下述结论成立:**

1. 每个分量服从正态分布; 例3.1.10

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

2. 正态随机变量的线性函数服从正态分布;

$$aX + b \sim N(a\mu_1 + b, a^2\sigma_1^2)$$

例3.4.7

3. 正态分布具有可加性;

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

例3.4.11

思考 将2和3合起来得到什么结论? 例4.4.1

4. 正态分布的期望与方差:

$$E(X) = \mu_1, D(X) = \sigma_1^2,$$

$$E(Y) = \mu_2, D(Y) = \sigma_2^2.$$

5. 正态随机变量(X, Y)的相关系数和协方差分别为

例4.4.6

$$\rho_{XY} = \rho.$$

$$Cov(X,Y) = C_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

6. 正态随机变量(X, Y)相互独立的充分必要条件是$\rho = 0$.

例3.2.5

从而　　X与Y相互独立$\Leftrightarrow$ X与Y不相关

三. 多维正态随机变量

定义4.1.1 设 n维随机变量$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 联合概率密度为

$$\varphi(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

其中$C=(c_{ij})$是n 阶正定对称矩阵, $|C|$是其行列式,

$$X=(x_1, x_2,\ldots x_n)', \ \mu=(\mu_1, \mu_2,\ldots \mu_n)'$$

称$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$服从n维正态分布.

注 1) $E(X_i)=\mu_i,\quad D(X_i)=\sigma_i^2,$

2) $c_{ij}=Cov(X_i,X_j)=\rho\sigma_i\sigma_j.$

n维正态随机变量的分布由一阶矩和二阶矩完全确定.

正态分布具有可加性

四. 正态随机向量性质

1) 有限个相互独立的正态随机变量的线性函数仍服从正态分布;

2) n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从正态分布,则$X_1, X_2, \ldots, X_n$的任意非零线性组合

$$l_1X_1+l_2X_2+\ldots l_nX_n \qquad (l_1, l_2, \ldots, l_n\text{不全为}0)$$

服从正态分布.

3) n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从正态分布,设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$是$X_1, X_2, \ldots, X_n$的非零线性组合,则$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$是m维正态随机变量.

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho_{ij} = 0\ (i \neq j)$

5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ 协方差矩阵为对角阵.

例如 (X_1, X_2, X_3)是三维正态随机变量,则

$X_1+X_2-X_3$ 和 X_1-X_2 都服从正态分布.

$(X_1+X_2,\ X_1-X_2)$是二维正态随机变量.

若X_1, X_2, X_3两两独立, 则X_1, X_2, X_3相互独立.

例4.4.2 (习题四第15题) 设二维随机变量

$(X, Y) \sim N(1, 3^2; 0, 4^2; -0.5)$, $Z = \dfrac{X}{3} + \dfrac{Y}{2}$

因 $X = X$, $Z = \dfrac{X}{3} + \dfrac{Y}{2}$

即(X, Z)是二维正态分布随机变量(X, Y)的线性组合，故服从二维联合正态分布.

例4.4.1 设随机变量 X、Y 相互独立,

$X \sim N(1,\ 2)$, $Y \sim N(0,\ 1)$, 求 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度.

解 Z是相互独立的正态分布随机变量X、Y 的线性组合, 故 Z也服从正态分布; 计算 Z 的均值和方差, 有

$$E(Z) = 2\,E(X) - E(Y) + 3 = 2 - 0 + 3 = 5$$

$$D(Z) = 4\,D(X) + D(Y) = 4\times 2 + 1 = 9$$

因此， $Z \sim N(5,\ 3^2)$**，其概率密度为**

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}} \quad -\infty < z < +\infty$$