§8.2 正态总体的参数检验

一、均值μ的检验

1. U 检验法

1) 单样本U 检验法：

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma_0^2)$中抽取的简单随机样本

已知σ_0^2，检验

$$H_0: \mu = \mu_0,\quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

原假设成立时，

$$\boxed{U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$$

拒绝域为：

$$\boxed{|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}}$$

见例8.1.1 “包装机工作正常与否的判断”

2) 双样本U检验法

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 来自正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$

已知σ_1^2与σ_2^2，检验

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (或$\mu_1-\mu_2=0$)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

原假设H_0成立时，

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

拒绝域为：$\boxed{|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}}$

***U* 检验法的要点**

1.构造服从标准正态分布的统计量 U 作为检验统计量；

2. 为进行标准化，必须已知总体的方差。

未知方差时,如何检验关于正态总体均值的有关假设?

2. t 检验法

1) 单样本 t 检验法

$X_1,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，

μ,σ^2 未知，检验

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

原假设成立时，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为：

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

TIPS

铁水温度的测量

采用不同的显著性水平α,常得到不同的结论.

即检验的结果依赖于显著性水平α的选择.

2) 双样本 t 检验法

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 来自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 来自正态总体$N(\mu_2, \sigma^2)$

检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

未知σ_1^2, σ_2^2, 但有$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

原假设成立时，检验统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

拒绝域为：

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

其中，$S_w^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$$

TIPS

成年人红细胞数与性别的关系

二、方差σ^2的检验

1. χ^2 检验法

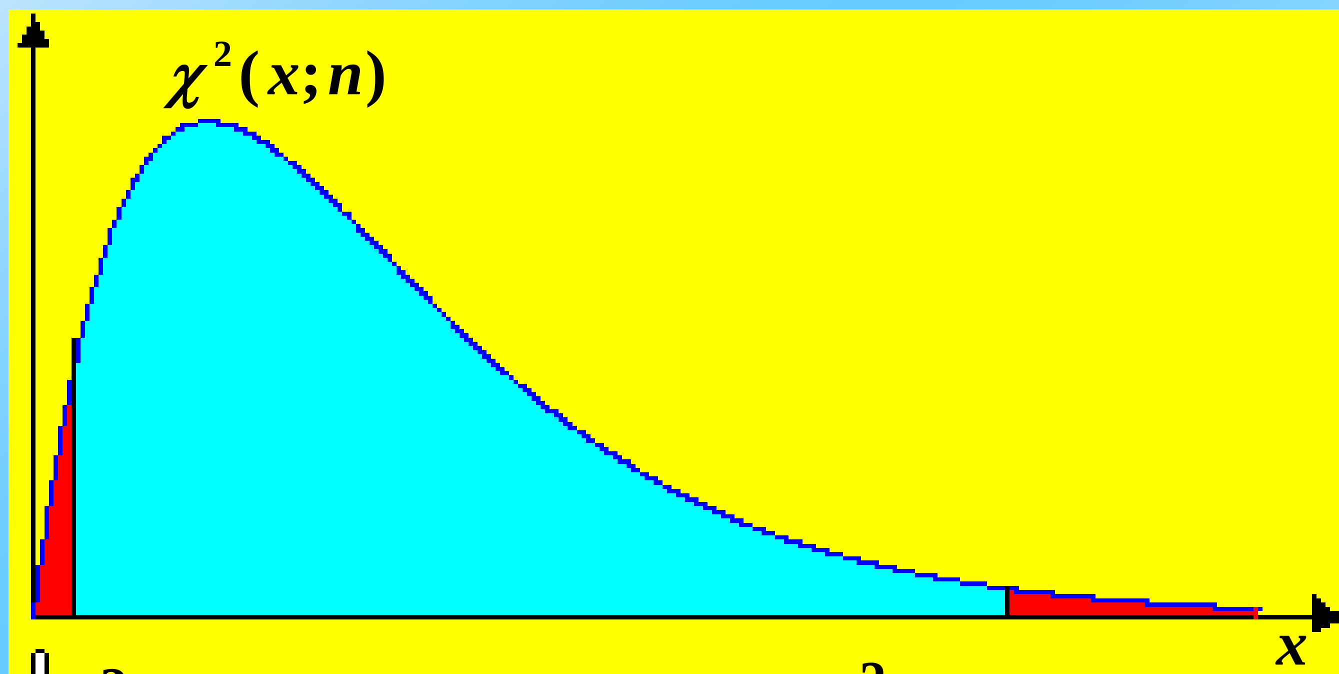
$X_1,\ldots,X_n$ 是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

1)已知μ

原假设成立时，

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi^2(n)$$



$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ $\chi^2_{\alpha/2}(n)$

拒绝域为：

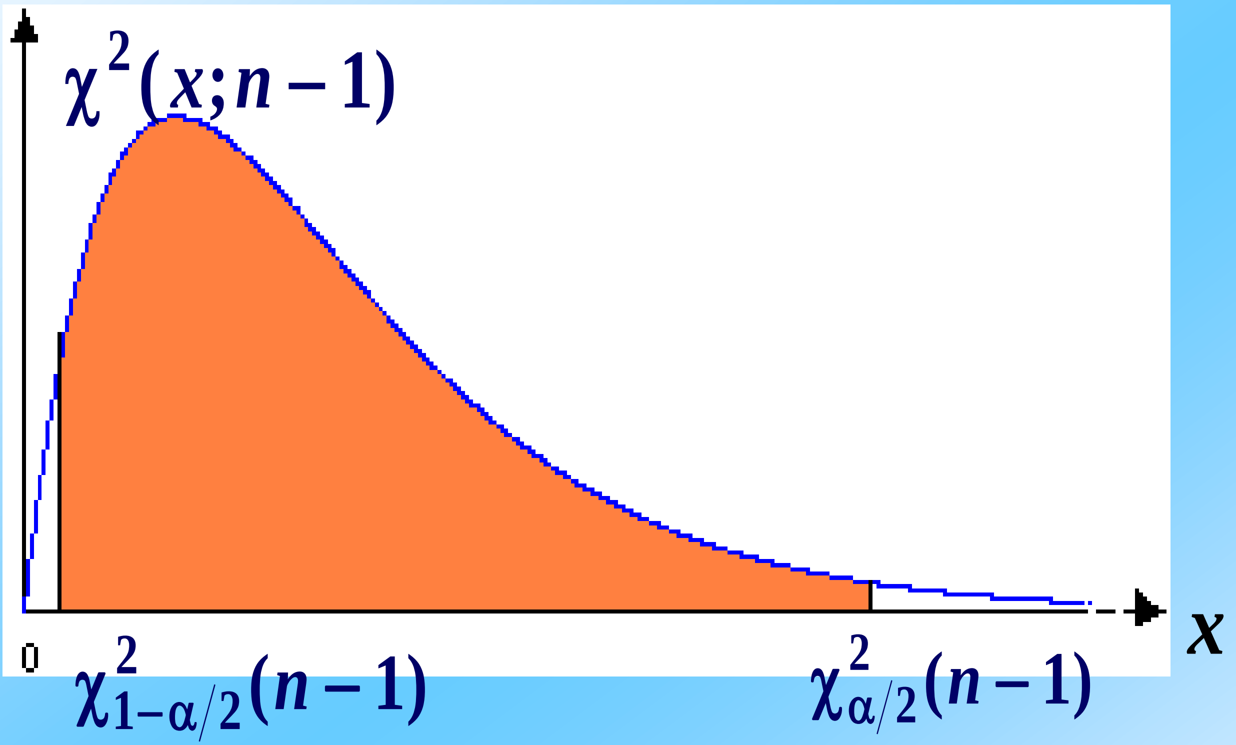
$$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \quad \text{或} \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

2) 未知μ

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

原假设成立时， $$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$



拒绝域为：

$$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \text{或} \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

车 床 加 工 精 度

2. *F* 检验法

$X_1,\ldots,X_{n_1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本;

$Y_1,\ldots,Y_{n_2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本;

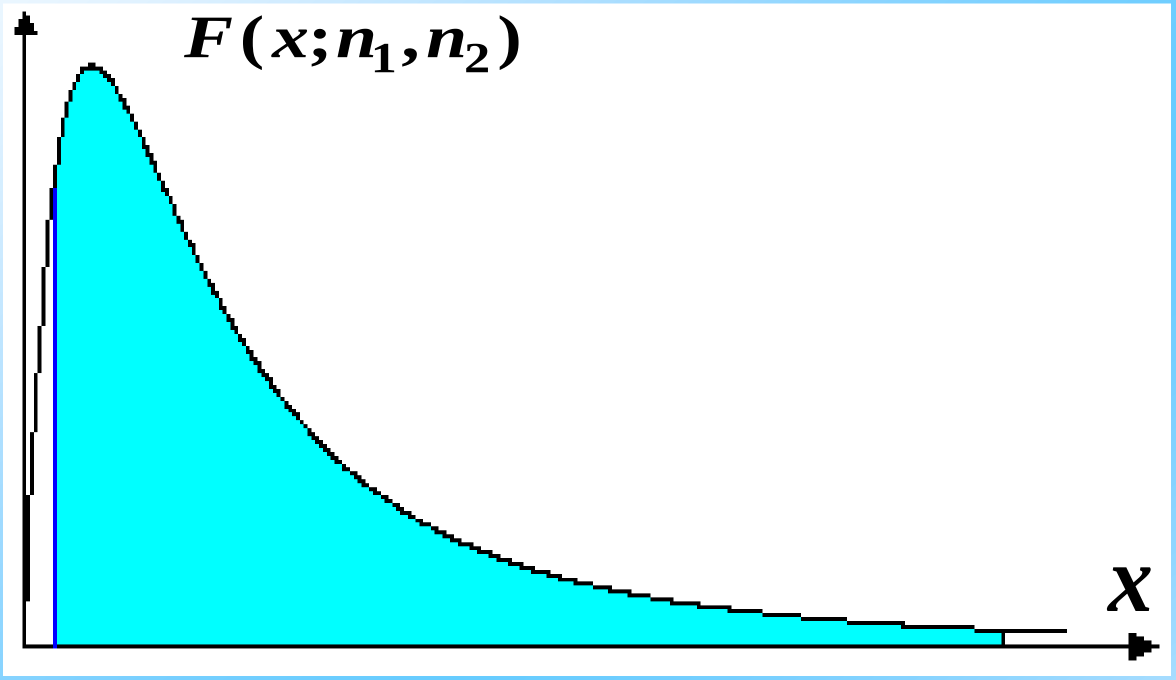
检验

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2;\quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

1) 已知μ_1、 μ_2

原假设成立时，

$$F=\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}\left(Y_j-\mu_2\right)^2}\sim F(n_1,n_2)$$



$F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$ $F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$

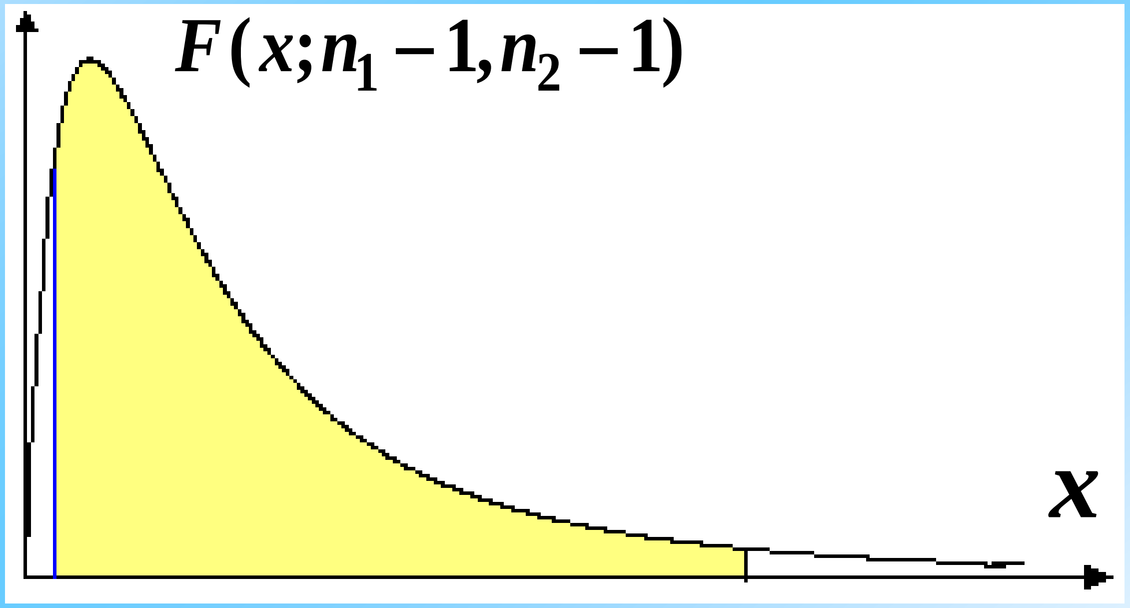
拒绝域为：

$$f > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2) \quad \text{或} \quad f < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$$

2) 未知μ_1、μ_2

原假设成立时，

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$



$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域为:

$$f > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

或

$$f < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

成年人红细胞数与性别的关系(F 检验法)

TIPS

假设检验练习

例 炼钢厂为测定混铁炉铁水温度，用测温枪(主要装置为一种热电偶)测温6次，记录如下(单位：$^{\circ}$C)：

1318	1315	1308	1316	1315	1312

若用更精确的方法测的铁水温度为1310°C(可视为铁水真正温度)，问这种测温枪有无系统误差?

解 设X表示铁水的温度，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的样本。根据题意要求，需检验

$$H_0: \mu=1310, \quad H_1: \mu\neq 1310$$

由于σ^2未知，故采用 t 检验法.

H_0成立时，检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域为： $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$\because\quad \overline{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=1314,\quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=3.521,$$

$$\therefore\quad t=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}=\frac{1314-1310}{3.521/\sqrt{6}}=2.783,$$

若取α=0.05，查t分布表可得 $t_{0.025}(5)=2.5706$，

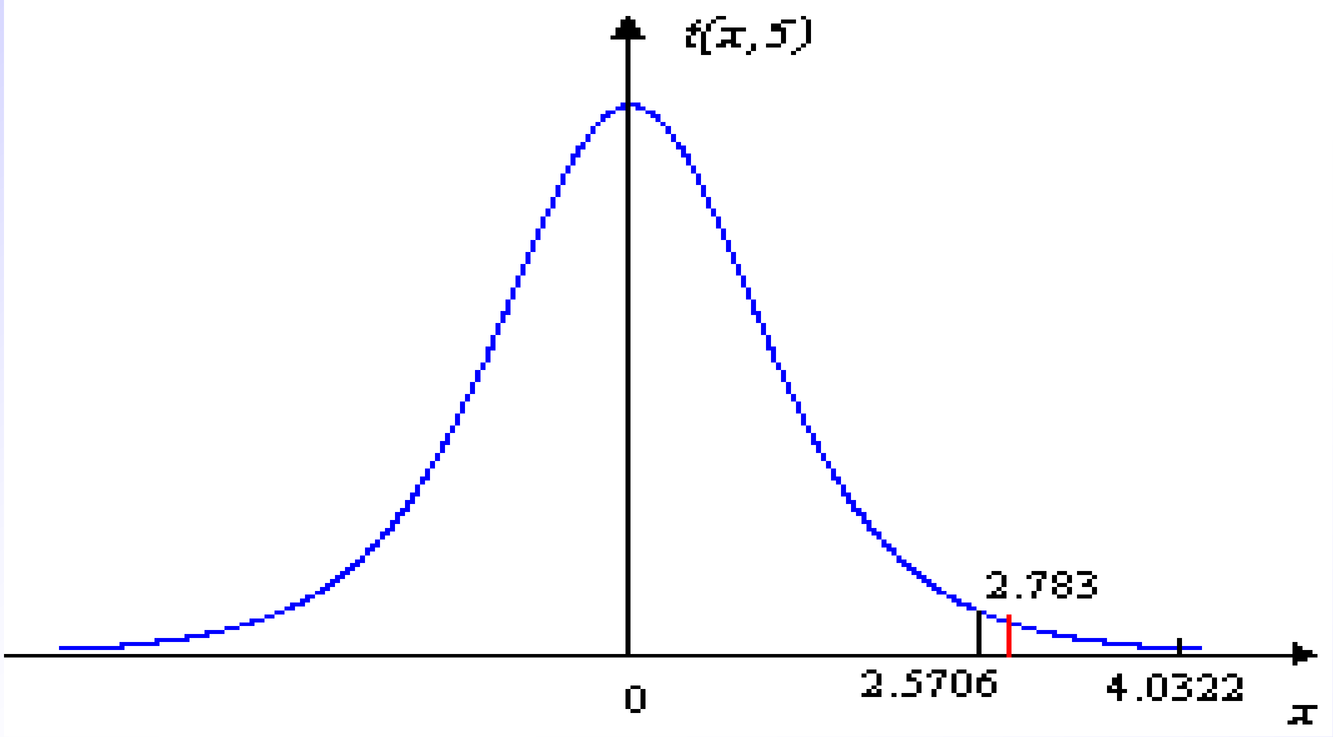
因为 $|t|=2.783>t_{0.025}(5)=2.5706$，

所以在显著性水平0.05下，拒绝H_0，即可认为该种测温枪有系统误差.

若取α=0.01，查t分布表可得 $t_{0.005}(5)=4.0322$，

因为 $|t|=2.783<t_{0.005}(5)=4.0322$，

所以在显著性水平0.01下，接受H_0，即可认为该种测温枪没有系统误差.


t(x, 5)
2.783
0
2.5706
4.0322
x

例 一自动车床加工的零件长度$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，原加工精度$\sigma_0=0.424$，经过一段时间后要检验此车床是否保持原加工精度，测得31个零件的长度数据如下： (取$\alpha=0.05$)

长度x_i：	10.1	10.3	10.6	11.2	11.5	11.8	12
频数y_i：	1	3	7	10	6	3	1

解 检验假设 H_0：$\sigma=\sigma_0=0.424$， H_1：$\sigma\neq\sigma_0$

若原假设H_0成立，则有

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域为： $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **或** $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

计算得 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 11.084,$

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - n\bar{x} = 3816.42 - 3808.418 = 8.002,$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{8.002}{0.424^2} = 44.51,$$

查表得 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(30)=16.8,$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(30)=47.0,$

因

$$\chi^2_{0.975}(30)<\chi^2<\chi^2_{0.025}(30),$$

故显著性水平0.05下不能拒绝原假设H_0，即可认为车床保持了原加工精度.

#

例 为研究正常成年男、女红细胞的平均数之差别, 检查某地正常成年男子 156名, 正常成年女子74名, 计算得男性红细胞平均数为465.13万/mm^3, 样本标准差为54.976万/mm^3; 女性红细胞平均数为422.16万/mm^3, 样本标准差为49.536万/mm^3.

试检验该地正常成年人的红细胞平均数是否与性别有关(方差相等, α=0.01).

解 设X表示正常成年男性的红细胞数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的样本。

Y表示正常成年女性的红细胞数，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$是总体Y的样本 .

$$X\sim N(\mu_1,\sigma^2),\qquad Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$$

需作检验： H_0: $\mu_1=\mu_2$; H_1: $\mu_1\neq\mu_2$.

由于σ^2 未知, 故采用 t 检验法, 取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$$

在H_0成立的条件下

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

拒绝域为: $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

$\because\quad n_1=156,\quad \bar{x}=465.13万/mm^3,\quad s_1=54.976万/mm^3$

$n_2=74,\quad \bar{y}=422.16万/mm^3,\quad s_2=49.536万/mm^3$

$$\therefore S_w=\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]}=53.295,$$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{465.13-422.16}{53.295\sqrt{\frac{1}{156}+\frac{1}{74}}}=5.712,$$

$\alpha=0.01$时可得：$t_{\alpha/2}=t_{0.005}(228)=2.58,$

(查标准正态分布表 $u_{0.005}=2.58$)

有 $|t|=5.712>2.58,$

所以在显著性水平0.01下拒绝假设H_0，即认为正常成年男、女性红细胞数有显著差异.

#

例 为研究正常成年男、女红细胞的平均数之差别, 检查某地正常成年男子 156名, 正常成年女子 74名, 计算得男性红细胞平均数为465.13万/mm^3, 样本标准差为54.976万/mm^3；女性红细胞平均数为422.16万/mm^3，样本标准差为49.536万/mm^3.

试检验该地正常成年男子与女子的红细胞数标准差是否相等(α=0.1).

解 设X表示正常成年男性的红细胞数，

Y表示正常成年女性的红细胞数，

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

需作检验： $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$； $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

由于μ_1和μ_2未知, 故采用 F 检验法, 取统计量

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

在H_0成立的条件下： $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$,

拒绝域为：

$$f > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } f < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

$\because \quad n_1 = 156,\ s_1 = 54.976\text{万}/mm^3,\ n_2 = 74,\ s_2 = 49.536\text{万}/mm^3,$

$$\therefore\ f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{54.976^2}{49.536^2} = 1.232,$$

α=0.1 时可得 $F_{\alpha/2} = F_{0.05}(155,73) \approx 1.41$

$F_{1-\alpha/2} = F_{0.95}(155,73) \approx 0.726$

于是 $F_{0.95}(155,73)<f<F_{0.05}(155,73)$

所以在**显著性水平0.1下**不能拒绝假设H_0 $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$，即可认为成年男女的红细胞数的标准差无显著的差异.

#

12. 某灯泡厂在采用新工艺条件的前后, 各取10个灯泡进行寿命试验. 测得新工艺前灯泡寿命的样本均值为2460，样本标准差为56小时；采用新工艺条件的后的样本均值为2550小时，样本标准差为48小时. 已知灯泡寿命服从正态分布，取显著性水平α=0.05，问新工艺条件前后灯泡的平均寿命有无显著差异?

检验 H_0：$\mu_1=\mu_2$， H_1：$\mu_1\neq\mu_2$，

问题：$\sigma_1=\sigma_2$?

?

应检验 （1） H_0：$\sigma_1=\sigma_2$， H_1：$\sigma_1\neq\sigma_2$，

接受H_0的前提下，再检验

（2） H_0：$\mu_1=\mu_2$， H_1：$\mu_1\neq\mu_2$.

思考：对（2）进行检验，考虑可选用哪一个统计量作为检验统计量?

改问：能否认为灯泡的平均寿命在采用新工艺后有明显提高（取显著性水平$\alpha=0.01$）？

需检验 H_0：$\mu_1 \geq \mu_2$， H_1：$\mu_1 < \mu_2$，

思考：还应考虑什么问题?

练习题 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著性水平0.05下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？并给出检验过程·