§ 7.3 区间估计

由于样本的随机性，点估计有以下缺陷：

(1) 无从断定估计值是否为待估参数的真实值（即使是无偏有效估计量)；

(2) 不能把握估计值与参数真实值的偏离程度及估计的可靠程度.

改进 对于θ的估计，给定一个范围$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$满足:

(1) $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}$ 应尽可能大,即可靠程度高;

(2) $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 应尽可能小,精确度高.

一、定义

定义7.3.1 设总体的未知参数为θ, 由样本 X_1, …, X_n确定两个统计量

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n), \quad \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)$$

对于给定的实数α($0< \alpha <1$), 满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)\} = 1-\alpha$$

称随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为θ的**置信度**为$1-\alpha$的**区间估计（置信区间）**.

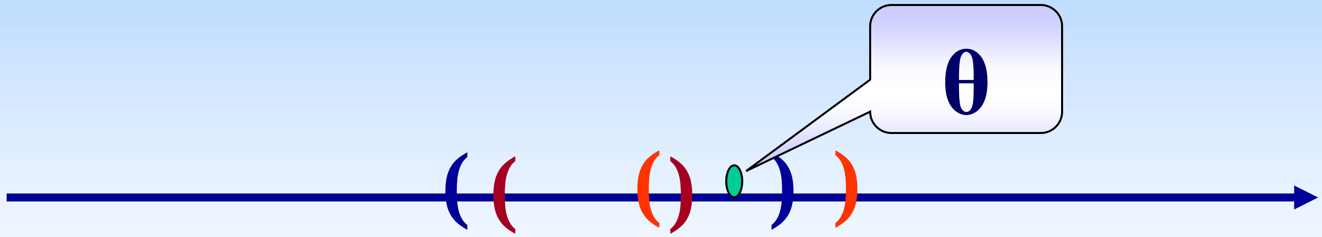
> $1-\alpha$又称**置信水平**或**置信概率**
> α称显著性水平，通常取值为**0.1，0.05.**

思考：应如何理解概率式

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n)\}=1-\alpha$$

1）随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 以$1-\alpha$的概率包含着待估参数θ.

1 - α反映了区间估计的可靠程度.



2）随机区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 是随机变量，反映了区间估计的精确程度.

希望精度与可靠程度均高,但二者是矛盾的.

在实际应用中广泛接受的原则是:

确定能接受的可靠程度的前提下,尽量提高精确度.

问题：如何构造随机区间?

正态分布中μ的区间估计

二、置信区间的枢轴变量法

1. 选取待估参数θ的**估计量**;

原则：优良性准则

常用：$\overline{X} \to \mu$，$S^2 \to \sigma^2$

2. 建立**枢轴变量**

对选定的θ的**估计量**，构造关于待估参数θ和样本的函数

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$$

其中W不含任何其他未知参数.

3. 确定W的分布

在一定条件下，W 通常具有经典分布(主要有正态、χ^2、T、F分布)；

4. 根据W的分布，对置信水平$1-\alpha$查上侧分位数,使

$$P\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

或类似的概率式成立.

5. 改写不等式得

$$P\{A \le \theta \le B\} = 1-\alpha$$

其中A、B是不含未知参数的统计量.

以较大概率包含待估参数

上面过程的关键是构造枢轴变量W，并以它为轴心，由$a \le W \le b$ 旋转出所需不等式

$$A \le \theta \le B.$$

三、正态总体的区间估计

单个正态总体： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1. μ的估计

1) 已知$\sigma = \sigma_0$:

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\{-u_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \le u_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

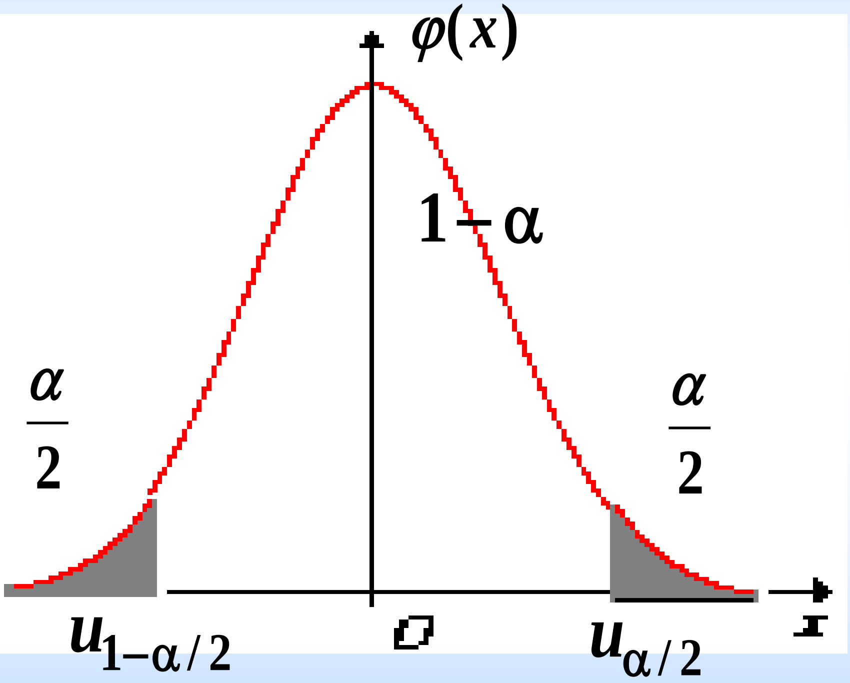
$$[\overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}]$$

因 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是μ的优良估计量，且

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$$

从而

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



令 $$P\{|U| \le u_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

从而 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

由此可得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为：

$$[\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$$

思考：未知σ时如何求μ的估计？

未知参数的替换

2) σ^2未知:

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1)\le\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

为确定枢轴变量

2. σ²的估计

分析: σ^2 的优良估计量为S^2,

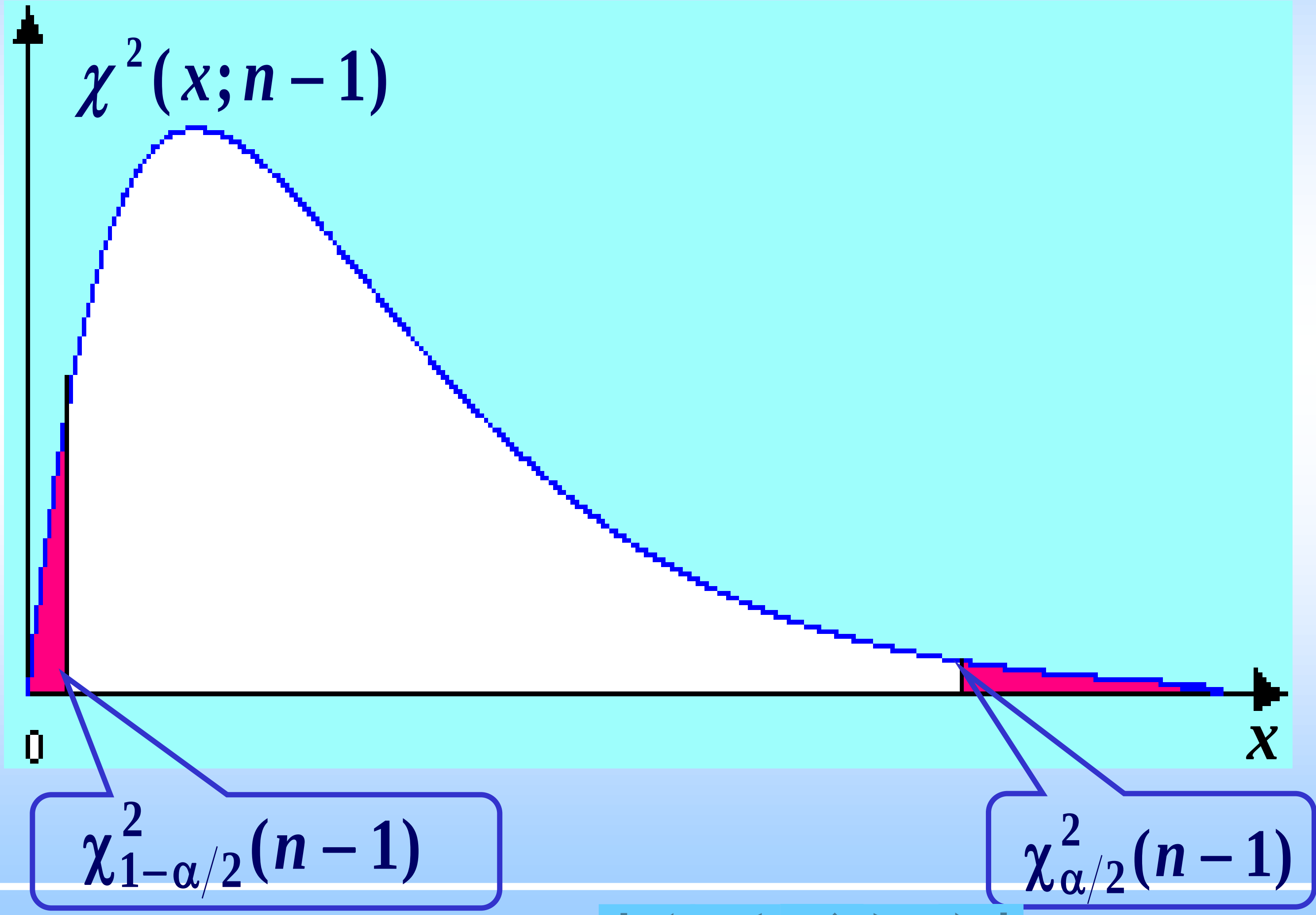
当μ未知时,由抽样分布定理可知,应选枢轴变量:

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

当μ已知时, 应选枢轴变量:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$$

问题：如何构造大概率事件?



1) 已知μ_0

$$\boxed{\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)}$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n)\}=1-\alpha$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\quad\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right]$$

2)未知μ

$$\boxed{\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)}$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$\left[(n-1)S^2\Big/\chi^2_{\alpha/2}(n-1),\ (n-1)S^2\Big/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right]$$

零件长度的方差

TIPS

婴儿体重的估计

四、两个正态总体

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X$与$Y$相互独立.

1. $\mu_1-\mu_2$的估计

1) 已知σ_1^2和σ_2^2

枢轴变量取

$$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$P\{-u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le u_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$\boxed{[\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]}$$

2) σ_1^2和σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,,\right.$$

$$\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ \right]$$

两稻种产量的期望差的置信区间

问题 能否用另外的方法求$\mu_1 - \mu_2$的区间估计?

分析 当 $n_1=n_2$ 时（成对抽样），

记 $Z_i = X_i - Y_i,\quad i = 1,2,\cdots,n;$

则
$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{X} - \bar{Y},$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$$

因 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 相互独立,且

$$Z_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma^2)$$

根据抽样定理知，可选枢轴变量

$$T = \frac{\bar{Z} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_Z / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

两稻种产量的期望差的置信区间

2. $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的区间估计

1) 未知 μ_1、μ_2

$$\boxed{F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)}$$

$$P\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\le\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\le F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}=1-\alpha$$

$$\boxed{\left[\frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\ \frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right]}$$

2) 已知μ_1 与μ_2

$$F=\frac{\dfrac{1}{n_1}\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{\dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

三、大样本方法构造置信区间(教材7.3(五))

四、单侧置信区间(自学)，见教材7.3(六)

小结：常见的区间估计

例7.3.1 设总体$X \sim N(\mu, 0.09)$，有一组样本值：12.6，13.4，12.8，13.2，求参数μ的置信度为0.95的置信区间.

解：有$1 - \alpha=0.95$，$\sigma_0=0.3$，$n = 4$,

$\bar{X}$ 是μ的无偏估计量, 是优良估计量，且

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0}{n})$$

从而

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

在标准正态分布表中查得上侧分位数

$$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$$

$$P\{|U|\le 1.96\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\le 1.96\right\}=1-\alpha=0.95,$$

或 $$P\{\overline{X}-1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\}=0.95,$$

得μ的置信区间为

$$[\overline{X}-1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$$

代入样本值算得 $\bar{x}=13$, 得到μ的一个区间估计为

$$[\bar{x}-1.96\frac{0.3}{\sqrt{4}},\bar{x}+1.96\frac{0.3}{\sqrt{4}}]=[12.706,\ 13.294].$$

注：该区间不一定包含μ.

总结此例，做了以下工作：

1）根据**优良性准则**选取统计量来估计参数；

$\bar{x}$是μ的优良估计量：无偏、有效、相合.

2) 建立了关于μ与统计量 $\overline{X}$的函数U，并确定U的分布；

这里 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

3) 查找临界值$u_{\alpha/2}$，构造一个关于U的概率为置信水平$1-\alpha$的随机事件.

4) 由上式解出关于待估参数μ的不等式，建立起关于μ的置信区间.

#

未知参数的替换

例7.3.2 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知σ^2，求参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

分析：1. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是μ的**优良估计**，且

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

思考：是否仍选统计量 $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 并令

$$P\{u_{1-\alpha/2} \le U \le u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

求得置信区间 ？

不行! 因为未知σ^2，故 U 不是统计量.

2. 选一个统计量去替代σ^2，

S^2、M_2 中选哪一个较好?

选S^2 因它是σ^2的无偏、有效、相合估计.

选下统计量作为枢轴变量，根据抽样定理

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

3. 由 t 分布的对称性，令

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le T \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

4. 整理后得μ的置信区间为

$$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

比较 已知$\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, μ的置信区间为

$$\left[\overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

#

零件长度的方差

例7.3.3 从自动机床加工的同类零件中任取16件测得长度值如下(单位：*mm*)

12.15	12.12	12.01	12.28	12.09	12.16	12.03	12.01
12.06	12.13	12.07	12.11	12.08	12.01	12.03	12.06

求方差的估计值和置信区间(α=0.05).

解 设零件长度为X，可认为X 服从正态分布.

设$X_1,X_2,\dots,X_n$是总体X的样本

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=12.08,\quad \sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2=0.0761$$

$$s^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2 = 0.005,$$

求方差的置信区间

由于μ未知，S^2是σ^2的优良估计，选取枢轴变量

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

相应的置信区间为

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

或 $\left[(n-1)S^2 \big/ \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\ ,\ (n-1)S^2 \big/ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right]$

查χ^2分布表可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(15) = 27.488,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(15) = 6.262$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\frac{0.0761}{27.488}, \frac{0.0761}{6.26}\right]$$ 即 $[0.002768,\ 0.012].$

比较：σ^2 的点估计值为 $s^2 = 0.005$.

#

例7.3.4 假定初生婴儿的体重服从正态分布，随机抽取12 名婴儿，测得体重为(单位：克)

3100， 2520， 3000， 3000， 3600， 3160，

3560， 3320， 2880， 2600， 3400， 2540

试以 95% 的置信度估计初生婴儿的平均体重以及方差.

解 设初生婴儿体重为X 克，则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体X的样本

(1) 需估计μ，而未知σ^2.

取 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ **作为枢轴变量.**

由于:

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1)\le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$\therefore\ \mu$ **的置信区间为:**

$$\boxed{[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]}$$

有 $\alpha=\underline{0.05}$, $n=\underline{12}$,

$t_{0.025}(11)=\underline{2.201}$,

$\because\ \bar{x}\approx 3057,\quad s\approx 375.3,\quad \therefore\ \mu$的置信区间为

$$\left[3057-\frac{375.3}{\sqrt{12}}\times 2.201,\ 3057+\frac{375.3}{\sqrt{12}}\times 2.201\right]$$

即 $[\,2818,\ 3296\,]$.

(2) 需估计σ^2,而未知μ,

取枢轴变量为 $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

由于:

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$\therefore\ \sigma^2$的置信区间为:

$$\boxed{\left[\,(n-1)S^2\big/\chi^2_{\alpha/2}(n-1),\ (n-1)S^2\big/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right]}$$

有 $\chi^2_{0.025}(11)=$ 21.92，$\chi^2_{0.975}(11)=$ 3.816，

$\because 11\times S^2 = 1549000,$

$\therefore \sigma^2$ 的置信区间为 $\left[\dfrac{1549000}{21.92}, \dfrac{1549000}{3.816}\right]$

即 $[70666, 405922.4]$.

#

例7.3.5 甲、乙两种稻种分别种在10块试验田中，每块田中甲、乙稻种各种一半。假设两种稻种产量X、Y服从正态分布，且方差相等. 10块田中的产量如下表 (单位：公斤)，求两稻种产量的期望差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间 (α=0.05).

甲	140	137	136	140	145	148	140	135	144	141
乙	135	118	115	140	128	131	130	115	121	125

解 设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，

估计$\mu_1-\mu_2$，取统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

由样本表可计算得

$$\bar{x} = 140.6, \quad s_1^2 = 16.933, \quad n_1 = 10,$$

$$\bar{y} = 126.8, \quad s_2^2 = 71.956, \quad n_2 = 10,$$

从而 $S_w = \sqrt{\dfrac{9 \times 16.933 + 9 \times 71.956}{18}} = 6.667,$

查t分布表得: $t_{0.025}(18) =$ 2.1009

两稻种产量期望差的置信度为95%的置信区间为

$$[\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}]$$

$$[140.6-126.8-2.1009\times 6.667\sqrt{\frac{2}{10}},\ 140.6-126.8-2.1009\times 6.667\sqrt{\frac{2}{10}}\ ]$$

即 $[7.536\,,\ 20.064\,].$

#

另解 **因枢轴变量**

$$T=\frac{\bar{Z}-(\mu_1-\mu_2)}{S_Z/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

其中 $Z=X-Y,\ \bar{Z}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-Y_i),$

令 $$P\{|T| \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha,$$

解得 $$P\{\overline{Z} - \frac{S_Z}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \le \mu_1 - \mu_2 \le \overline{Z} + \frac{S_Z}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\},$$

可得两稻种产量期望差的置信度为95%的置信区间为

$$[\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}]$$

#

单正态总体的区间估计

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad P\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

被估参数	条件	统计量(枢轴变量W)	置信区间
μ	已知σ^2	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left[\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	未知σ^2	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left[\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$

被估参数	条件	统计量(枢轴变量)	置信区间
σ^2	已知 μ	$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right]$
σ^2	未知 μ	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$

双正态总体的区间估计

被估参数	条件	统计量(枢轴变量)
$\mu_1-\mu_2$	已知$\sigma_1{}^2$与$\sigma_2{}^2$	$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
$\mu_1-\mu_2$	未知$\sigma_1{}^2$和$\sigma_2{}^2$	$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ S_w见P144
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	未知μ_1和μ_2	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$