§1.4 条件概率

一、条件概率

对随机现象的研究中，常遇到另一类概率计算问题.

例1 100件产品中有5件不合格，其中3 件是次品，2 件是废品，现从中任取一件，试求

1）抽得废品的概率p_1;

2）已知抽得不合格品，它是废品的概率p_2.

将已知事件B 发生的条件下，事件A发生的可能性的客观度量称为条件概率，记为$P(A|B)$.

例如： 产品抽检试验

定义：设A，B是随机试验E 的两个随机事件，且$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下,事件A发生的条件概率.

由P_{15}的性质1.3.1可知条件概率满足概率定义的三个公理，故而概率的性质同样适用于条件概率.

- 非负性 $1 \geq P(B \mid A) \geq 0$
- 归一性 $P(\Omega \mid A) = 1$
- 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \,\middle|\, A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$

- $P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A)$
- $P(\bar{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$
- $P(B_1 - B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A)$

问题 (1) 判断所求的概率是否是条件概率?

(2) 判断题目中概率数据是否是条件概率?

例如:

掷硬币试验

射击试验

一般地

条件概率与无条件概率之间的大小无确定关系

P_{16}例1.3.4

若 $B \subset A$

$$\Rightarrow \quad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B)$$

条件概率　　　　无条件概率

对条件概率$P(A|B)$的理解：

1)条件概率较原来的概率发生了变化。

$$P(A) \neq P(A|B)$$

2) 条件概率与积事件的概率有别。

条件概率有先后次序之分，积事件无先后次序之分。

3)条件概率可通过原来的概率计算得到。

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

二、乘法公式

定理 设$P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

若$P(A)>0$，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

条件概率定义的改写

更一般地有，若$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)=$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

注： 乘法公式是概率计算中的重要公式.关键是分清题目中所给数据是否为条件概率.

例如： 抽签的公平性 激烈空战

三、全概率公式

事件的概率计算可能很复杂，有时可以采用借助于一组基本事件组的方法.

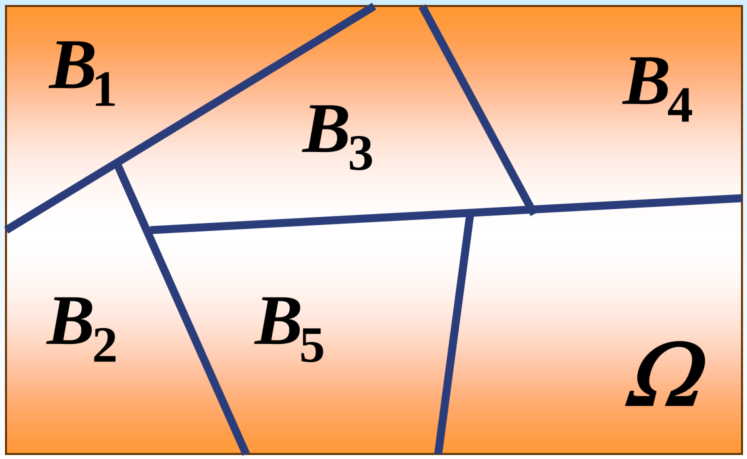
例如： 有朋自远方来

定义：设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，B_1，B_2，…， B_n 为 E 的一组事件，若

(1) $B_i \cap B_j = \phi$，$i \neq j$;

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

称 B_1，B_2，…， B_n 为 Ω 的一个<u>有限划分(或称完备事件组)</u>.



定理（全概率公式） 设随机试验E的样本空间为Ω，$A \subset \Omega$, B_1，B_2，…，B_n为Ω的一个有限划分, 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 则有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

证明 B_1，B_2，…，B_n为Ω的一个有限划分

因 $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

吸收律

故 $A = A \cap \Omega = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$$

分配律

又因为 $(AB_i)\cap(AB_j)=A\cap(B_iB_j)$

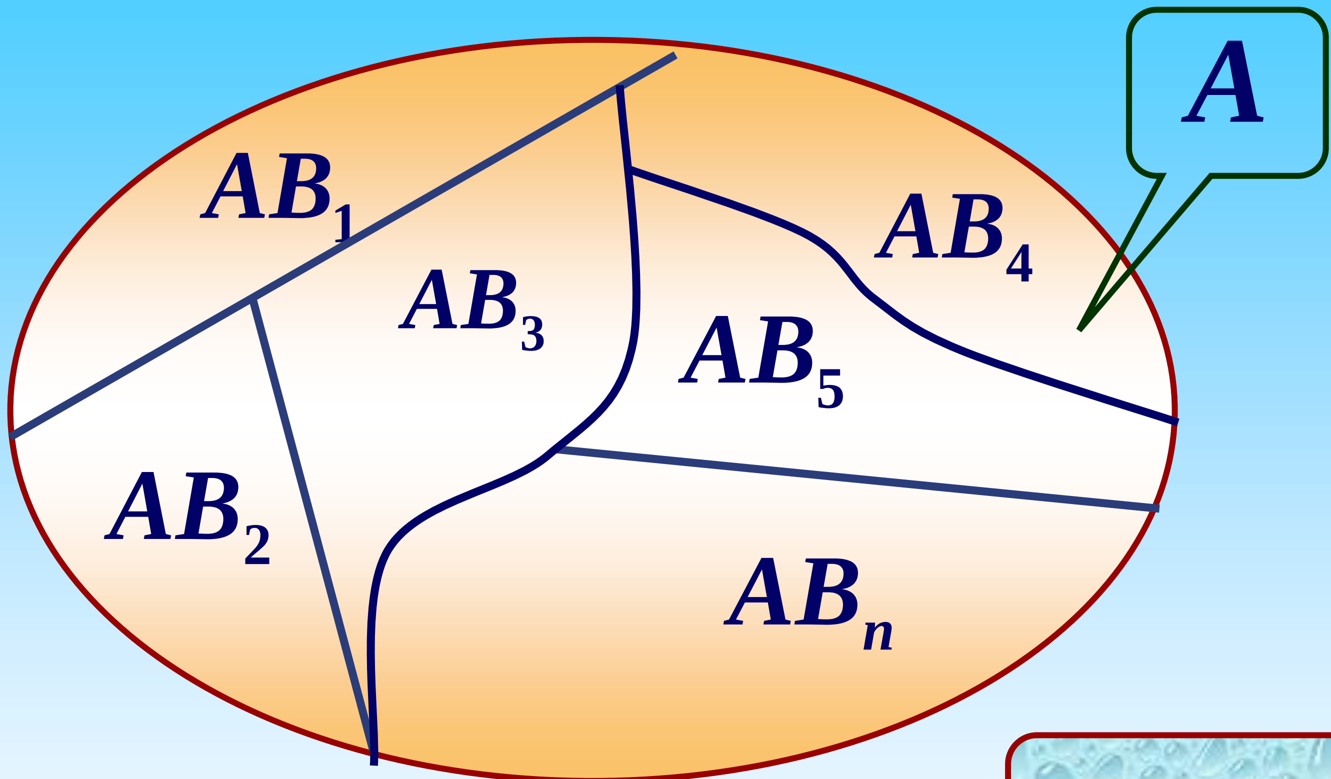
$$=A\phi=\phi,\quad i\neq j$$

由概率的有限可加性

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}AB_i)$$

因为$P(B_i)>0, i=1, 2, \ldots, n$，利用乘法公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$



概率分解

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

注:该公式常用在预测推断中, 称为事前概率.

例如: 抽检试验　抽签公平性

练习 袋中有50 个球，20个黄色的，30 个白色的两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二人取到黄球的概率是 ——

思考 

在抽检试验中,如果已抽到一件次品，需追究有关车间的责任,你如何考虑?

应计算以下概率：

$$P(B_i / A) = ? \quad i=1, 2, 3,4.$$

并比较其大小.

这类概率称为事后概率.

追究责任问题

另一类应用问题：把事件A看成“结果”，把事件B_1，B_2，…，B_n看成导致该结果的可能“原因”，在已知A发生的条件下，去找出最有可能导致它发生的“原因”.

这类问题称为贝叶斯问题.

四、贝叶斯公式

定理（贝叶斯公式） 设随机试验E的样本空间为Ω, $A \subset \Omega$, B_1, B_2, …, B_n为Ω的一个有限划分, 且$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

证明

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

贝叶斯公式用来计算事后概率。

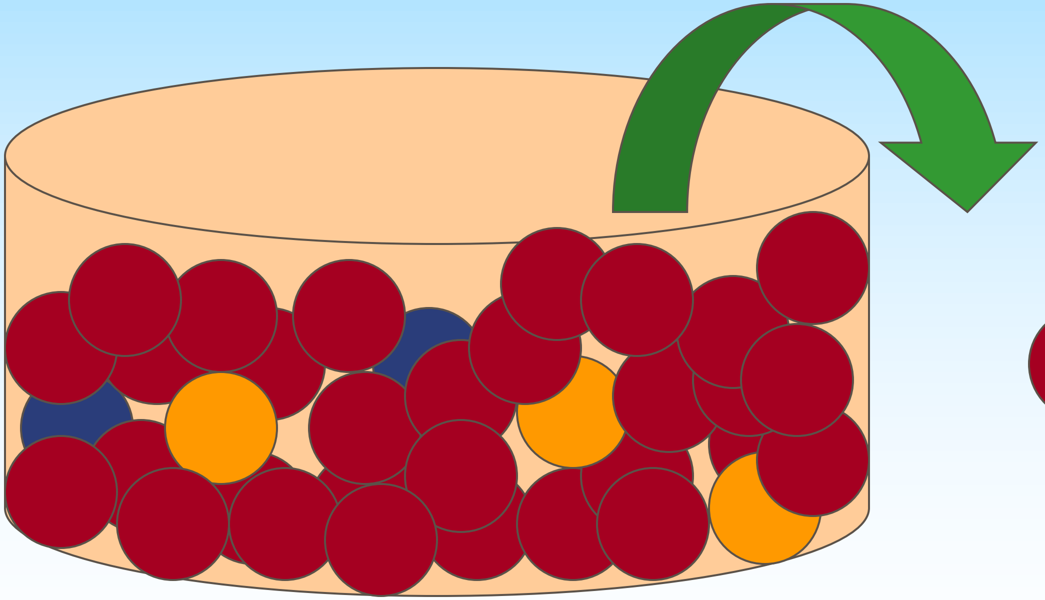
例如： **病情诊断试验**

见P20，例1.3.12和例1.3.13

例1 100件产品中有5件不合格，其中3 件是次品，2 件是废品，现从中任取一件，试求

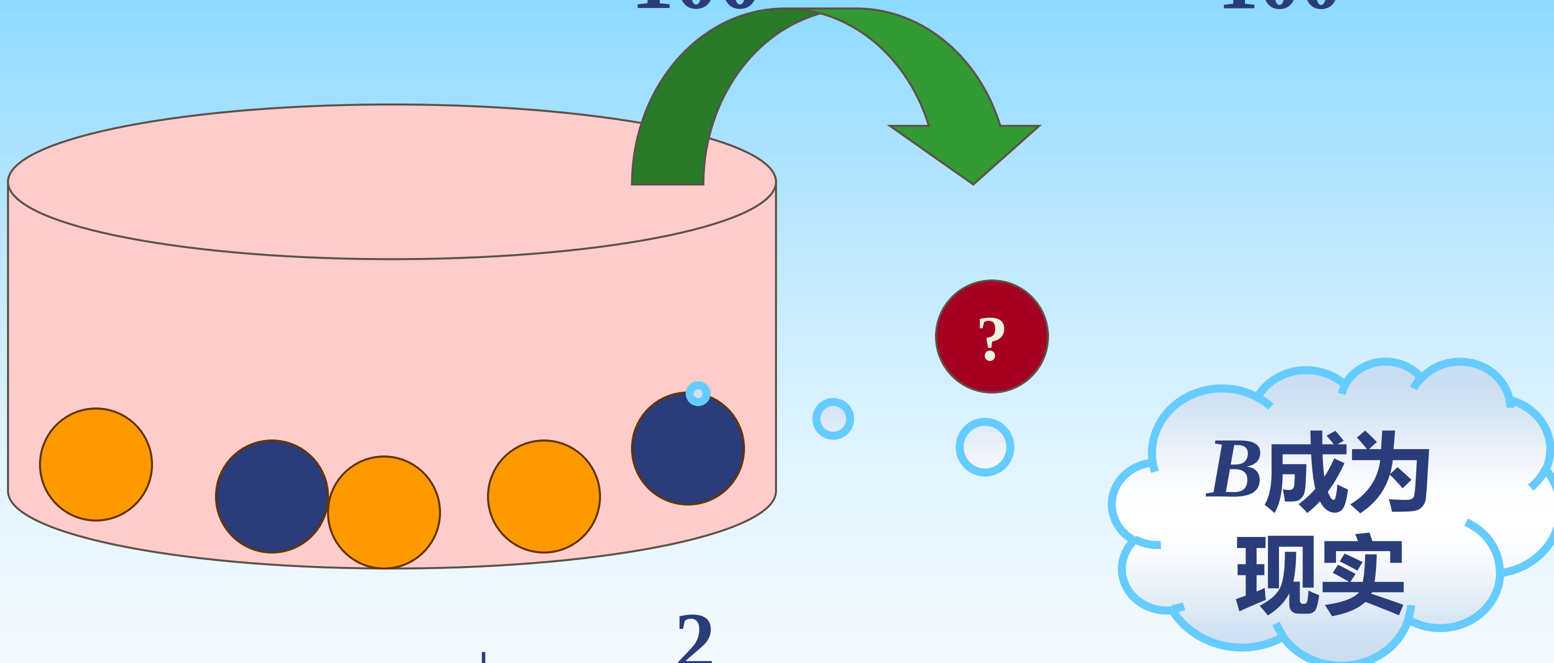
1）抽得废品的概率p_1;

2）已知抽得不合格品，它是废品的概率p_2.



解：令A={抽得废品}，B={抽得不合格品}.

有 $p_1 = P(A) = \dfrac{2}{100}$, $\quad P(B) = \dfrac{5}{100}$



$$p_2 = P(A|B) = \frac{2}{5}$$

注意到 $$P(AB)=\frac{2}{100}$$

有 $$P(A|B)=\frac{2}{5}=\frac{2/100}{5/100}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

\#

例2 掷一枚硬币直到出现三次正面才停止，问正好在第六次停止的情况下，第五次也是正面的概率?

解 令 $A_k=$ {第 k 次出现正面}，$k=1,2,\ldots$

$B=$ {第六次停止投掷}

则 $P(B)=C_5^2/2^6$

正

1	2	3	4	5	6

$$P=P(A_5 \mid B)=P(A_5B)/P(B)$$

$$=\frac{C_4^1/2^6}{C_5^2/2^6}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

例3 甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被击中，求它被甲射中的概率.

解：设 A={目标被甲击中}，

B={目标被乙击中}，

C={目标被击中}.

所求概率为

$$p = P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$= 0{\cdot}6 + 0{\cdot}5 - 0{\cdot}6 \times 0{\cdot}5 = 0{\cdot}8$$

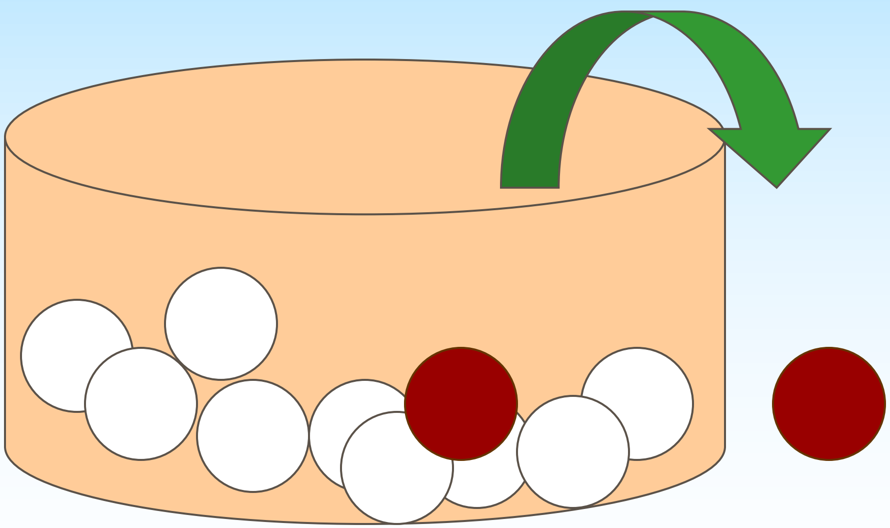
P =0.6/0.8=0.75

例4 （抽签的公平性）

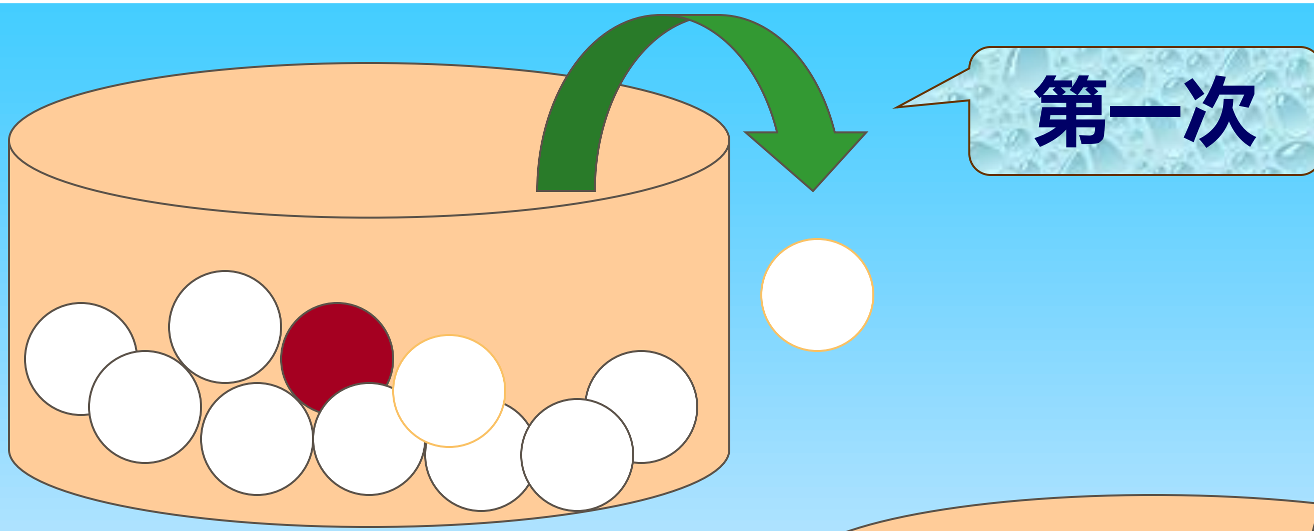
袋中有10 个球, 9 个白色的, 1个红色的, 10 个人依次不放回的各取一球，问第一个人，第二个人，最后一人取到红球的概率各为多少?

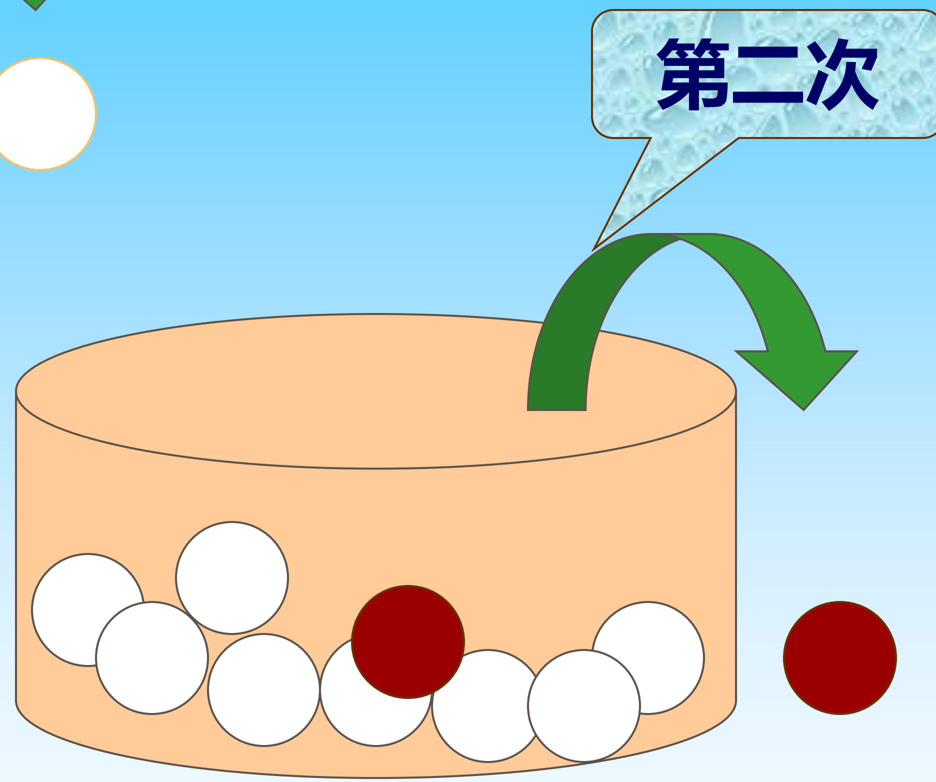
解： 设A_i = ｛第 i 人取到红球｝，

i =1，2，…，10.



$$P(A_1)=\frac{1}{10};$$





$$A_2 = \overline{A}_1 A_2$$

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1) P(A_2 \mid \overline{A}_1)$$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10};$$

$$P(A_{10})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9A_{10})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_{10}|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9)$$

$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{10}$$

有 $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_{10})$. #

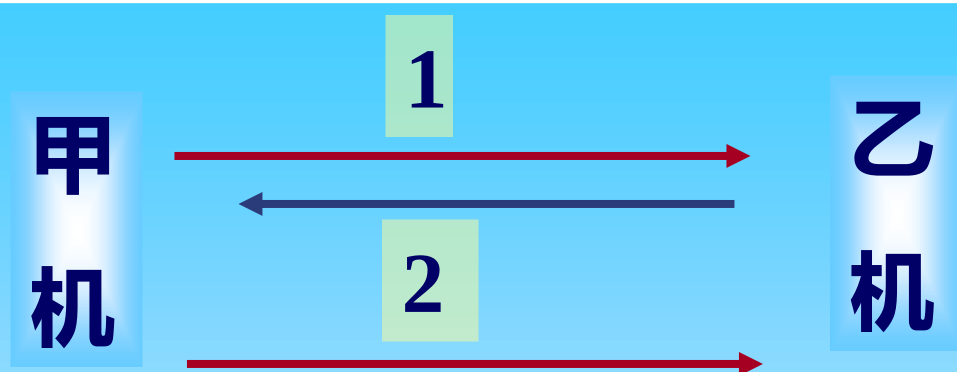
例5 两架飞机进行空战,甲机首先开火, 击落乙机的概率为0.2；若乙机未被击落，进行还击，击落甲机的概率为0.3；若甲机又未被击落，它再次向乙机开火，并击落它的概率为0.4 .试求这几个回合中

1）甲机被击落的概率p_1;

2）乙机被击落的概率p_2.

条件概率

分析



解：设A={甲机首次攻击时击落乙机}

B={乙机击落甲机}

C={甲机第二次攻击时击落乙机}

有 $P(A)=0.2,\ P(B\mid\overline{A})=0.3,\ P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})=0.4$

1）甲机被击落的概率

$$p_1 = P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B\mid\overline{A}) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

2）乙机被击落的概率

$$p_2 = P(A \cup \overline{A}\,\overline{B}C) = P(A) + P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$= P(A) + P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})$$

$$= P(A) + [1 - P(A)][1 - P(B\mid\overline{A})]P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})$$

$$= 0.2 + (1-0.2)(1-0.3) \times 0.4$$

$$= 0.424$$

#

例6 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，各车间的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02. 现从出厂产品中任取一件，问恰好取到次品的概率是多少?

解 设 A= {恰好取到次品}，

B_i={恰好取到第 i 个车间的产品},

i=1,2,3,4

构成一个样本空间的划分, 且

$P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.2,$

$P(B_3)=0.3,\quad P(B_4)=0.35,$

题目中的条件概率如下

$P(A \mid B_1)=0.05,\quad P(A \mid B_2)=0.04,$

$P(A \mid B_3)=0.03,\quad P(A \mid B_4)=0.02,$

由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)=0.0315$$

#

例7 设袋中有n个红球, m个白球. 三人依次不放回地各取出一个球. 求他们取得红球的概率各为多少?

解：设A_i={第 i 个人取到红球}，i=1,2,3

$$P(A_1)=\frac{n}{m+n},$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})$$

$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}$$

$$=\frac{n}{m+n}$$

事件组 $A_1A_2, \overline{A_1}A_2, A_1\overline{A_2}, \overline{A_1}\,\overline{A_2}$ **构成一个有限划分，由全概率公式可得**

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)P(A_3\mid \overline{A_1}A_2)$$

$$+P(A_1\overline{A_2})P(A_3\mid A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})P(A_3\mid \overline{A_1}A_2)$$

$$+P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)P(A_3\mid A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid \overline{A_1})P(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\times\frac{n-2}{m+n-2}+\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}\times\frac{n-1}{m+n-2}$$

$$+\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\times\frac{n}{m+n-2}=\frac{n}{m+n}$$

#

例8 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，各车间的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，发觉该产品**是次品**而且其标志已脱落，厂方应如何处理此事较为合理?

分析 关注次品来自哪个车间？可能性最大?

第1车间 第2车间 第3车间 第4车间

B_i={恰好取到第 i 个车间的产品}，i=1,2,3,4

构成一个样本空间的划分.

设 A= {恰好取到次品}，

事件A已成为现实，需考虑是哪一个“**原因**”所致的可能性大小，即求条件概率P(B_i|A).

解：

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.15\times 0.05}{0.0315}=\frac{15}{63}$$

同理

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{16}{63}$$

$$P(B_3|A)=\frac{18}{63},\qquad P(B_4\,|\,A)=\frac{14}{63}.$$

#

例9 设某医院用某一种方法诊断肝癌，由于各种原因，被诊断为患有肝癌的患者未必患有肝癌。

令 A={被检查者**确实**患有肝癌}，

B={被检查者**诊断**为患有肝癌}.

$P(A)=0.0004$（患者的比例很小）；

$P(B|A)=0.95$(对肝癌病人的诊断准确率很高);

$P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$（对非肝癌病人的诊断准确率也很高),

现有一病人被该方法诊断为肝癌，求此人确是患者的概率.

解：从题设可得

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.0004,\ P(B\mid\overline{A})=1-0.9.$$

根据贝叶斯公式有

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$= \frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + (1 - 0.0004) \times (1 - 0.9)}$$

$$\approx 0.0038$$

注：诊断有病的人确实患病的可能性很小.

例10 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张，将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞. 求2 张都是假钞的概率.

下面解法正确吗?

解一 令 B 表示 “其中1张是假钞”.

A表示 “2 张都是假钞”

$$P\left(A \middle| B\right) = 4/19 = 0.2105.$$

解二 令 A 表示“抽到2 张都是假钞”，
B表示“2 张中至少有1张假钞”． $A \subset B$

则所求概率是 $P(A|B)$ (而不是$P(A)$！)．

$$P(AB) = P(A) = C_5^2 / C_{20}^2$$

$$P(B) = (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) / C_{20}^2$$

所以

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

$$= C_5^2 / (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) = 10/85 = 0.118$$

#