第二章

随机变量的分布

§2.1 随机变量的分布函数

§2.2 离散型随机变量

§2.3 连续型随机变量

§2.1 随机变量及分布函数

一、随机变量

随机变量的实例

上述变量都定义在样本空间上,具有以下特点:

(1) 变量的取值由随机试验的结果来确定;

(2) 取各数值的可能性大小有确定的统计规律性.

上述变量称为随机变量,它可以完整地描述试验结果，从而可用量化分析方法来研究随机现象的统计规律性.

引进随机变量是将随机试验数量化，是对随机现象进行量化分析的重要手段.

随机变量的引进是概率论发展进程中的一次飞跃

定义：设E 的样本空间为Ω，对于每一个样本点$\omega\in \Omega$，都有唯一实数$X(\omega)$与之对应，且对于任意实数x，事件$\{ \omega| X(\omega) \le x \}$都有确定的概率，则称$X(\omega)$ 为<u>随机变量</u>，简记为X.

注 $\{\omega : X(\omega) \le x\} = \{X \le x\} \subset \Omega$

且使$P\{X\le x\}$总有意义.

例子 ⇨ 摸彩赌博

随机变量的优越性

1)将样本空间数值化、变量化(但不同于通常非随机变量);

2)可以完整地描述随机试验;

3)可用微积分等数学工具来解决随机问题.

二、分布函数

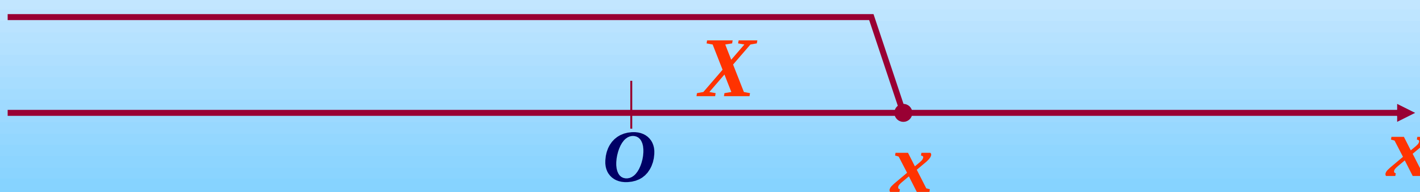
从随机变量定义可见，对任一实数 x 都有实数 $P\{\ \omega|\ X(\omega)\le x\ \}$ 与之对应，即构造了一个函数.

定义 设X是一个随机变量， x 是任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\omega: X(\omega) \le x\},$$

为随机变量X 的分布函数, $F(x)$ 也记为$F_X(x)$.

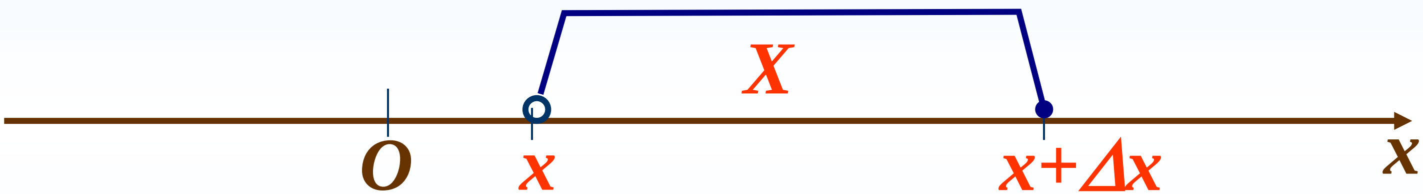
注1 分布函数$F(x)$的函数值表示事件 “随机点X落在$(-\infty, x]$内” 的概率.



注2 $F(x)$的改变量

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = P\{x < X \le x+\Delta x\}$$

是事件“随机点X 落在$(x, x+\Delta x]$内”概率.



例如

摸球试验

射击试验

分布函数的性质:

（1） $F(x)$ 为单调不降函数, 即若 $x_1 < x_2$,
则有 $F(x_1) \le F(x_2)$.

（2） $0 \le F(x) \le 1$，且

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

（3） $F(x)$ 是右连续函数, 即

$$F(x+0) = F(x)$$

从而有 $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$

可用分布函数的性质确定某一函数是否为随机变量的分布函数，或用来求解分布函数.

例如

分布函数的确定

E_1 抛一枚硬币,观察其出现正面H和反面T的情况.

用Z 表示抛一次硬币时出现正面的次数,则

$$Z(H)=1,\ Z(T)=0.$$

E_2 检验 N 件产品中的次品

用Y表示检查 N 件产品中的次品数，有

$$Y(k)=k,\ k\in\Omega_2, \qquad \Omega_2=\{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

共同特点:以上变量都是定义在样本空间上的变量.

例1 一个庄家在一个签袋中放有8个白、8个黑的围棋子. 规定：每个摸彩者交一角钱作"手续费"，然后从袋中摸出五个棋子，按下面"摸子中彩表"给"彩金".

摸到	五个白	四个白	三个白	其它
彩金	2元	2角	5分	共乐一次

解 用$\{\,i\,\}$表示"摸出的五个棋子中有 i 个白子"，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

用Y (单位:元)表示赌徒摸一次得到的彩金,则有

$$Y(i) = 0,\ i = 0,\ 1,\ 2$$

$$Y(3) = 0.05,\quad Y(4) = 0.2,\quad Y(5) = 2$$

Y 是定义在Ω上的随机变量, 对于每一个 $i \in \Omega$, 都有一个实数与之对应.

并且

$$P\{Y = 0.05\} = P(\{3\}) = C_8^2 C_8^3 / C_{16}^5 = 0.3589$$

$$P\{Y = 0.2\} = P(\{4\}) = C_8^1 C_8^4 / C_{16}^5 = 0.1282$$

$$P\{Y=2\}=P(\{5\})=C_8^5/C_{16}^5$$

$$P\{Y=0\}=P(\{0,1,2\})=1-0.3589-0.1282-0.0128$$

对于任意实数x，$\{X(\omega)\leq x\}$是一个随机事件，从而有确定的概率.

例如

$$P\{Y\leq -0.5\}=P(\phi)=0;\ P\{Y\leq 2\}=P(\Omega)=1;$$

$$P\{Y\leq 1.2\}=P(\{0,1,2,3,4\})=1-0.0128=0.9872;$$

彩金不到两元的概率接近99%.

总结 从本例中可看到，随机变量Y完整地描述了试验的全过程，而不必对每一个事件个别进行讨论.

进一步，可将微积分等数学工具用于对随机试验的分析.

例2 一袋中有依次标有–1、2、2、2、3、3数字的六个球，从中任取一球，试写出球上号码X的分布函数.

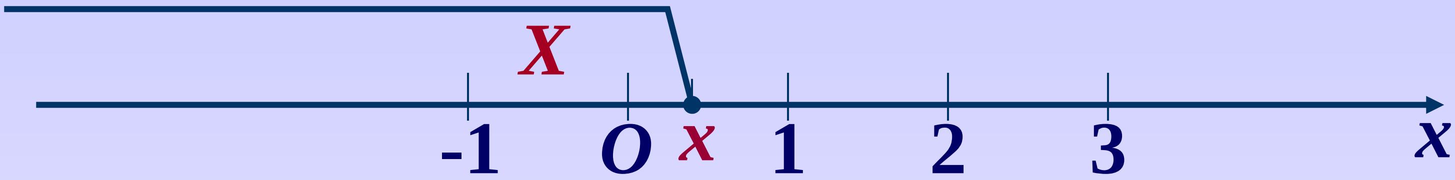
解：由题意有

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{6},P\{X=2\}=\frac{1}{2},P\{X=3\}=\frac{1}{3},$$

当$x<-1$时,

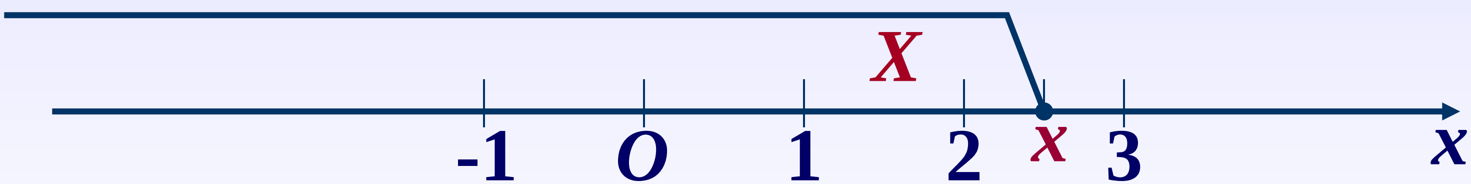
$$F(x)=P\{X\le x\}=P(\phi)=0.$$

当$-1 \le x < 2$时,



$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = 1/6 .$$

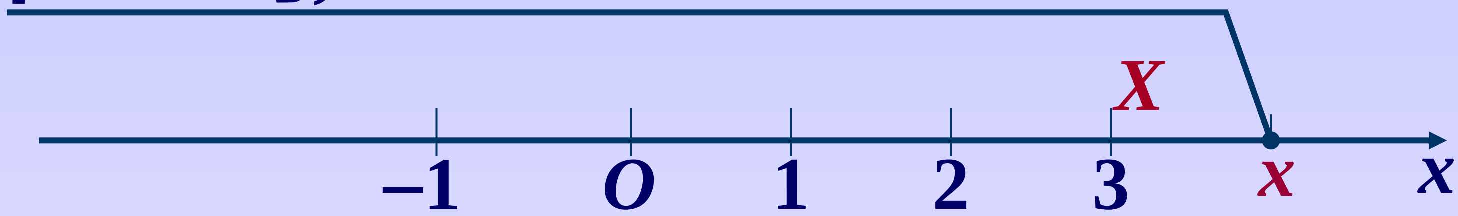
当$2 \le x < 3$时,



$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\}$$

$$= 2/3 .$$

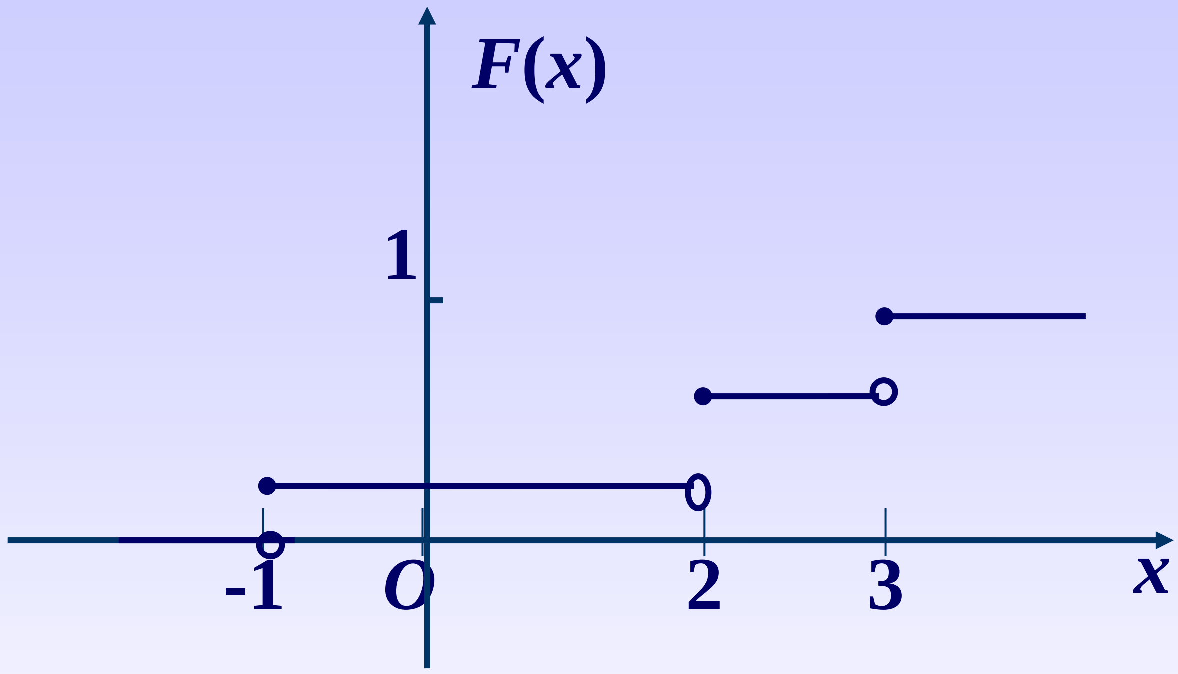
当$3 \le x$时,



$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\Omega\} = 1.$$

综上所述,可得

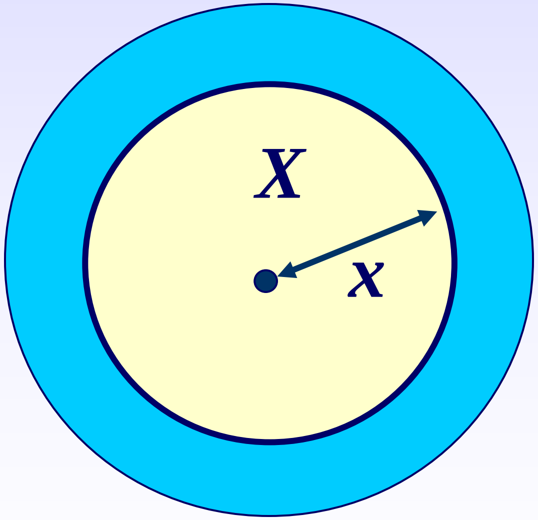
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \dfrac{1}{6}, & -1 \le x < 2; \\ \dfrac{2}{3}, & 2 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$



是右连续的单调不降阶梯函数，在不连续点处的阶跃值恰为$P\{X = k\}, k = -1,2,3.$

例3 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X 表示弹着点与圆心的距离。试求X 的分布函数.

解 由题意有



当$x < 0$时,

$$F(x) = P\{ X \le x \} = P(\varphi) = 0.$$

当$x \ge 2$时,

$$F(x) = P\{ X \le x \} = P(\Omega) = 1.$$

当$0 \le x < 2$时, 由题意知

$$P\{ 0 < X \le x \} = k x^2$$

其中k为一常数.

另一方面

$$1 = P\{ 0 < X \le 2 \} = 4k \to k = 1/4 .$$

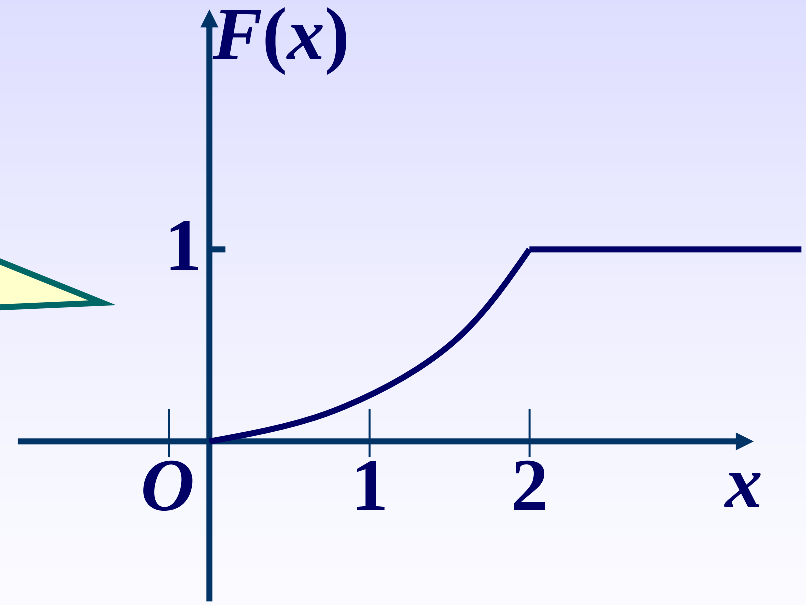
$$F(x) = P\{ X \le x \}$$

$$= P\{ X \le 0 \} + P\{ 0 < X \le x \} = \frac{1}{4} x^2$$

分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

处处连续
单调不降
有界函数



例4 随机变量X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ k(x-a), & a\le x\le b;\\ 1, & b<x.\end{cases}$$

求$k=?$

解 分布函数$F(x)$在$x=b$处右连续，

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to b^+}F(x)=1\\ F(b)=k(b-a)\end{array}\right\}\Rightarrow k=\frac{1}{b-a}$$