# §1.2　随机事件与随机变量

## 一、随机试验和随机事件

随机试验是对随机现象所进行的观察和实验，具有如下特征：

(1) 可在相同条件下重复进行;

(2) 事前可明确试验的全部可能结果;

(3) 试验前不能预言将出现哪一个结果.

摸球试验　抛硬币　其它试验

随机试验中会出现不同的可能结果.

在一定条件下基于一定的试验目的进行试验，称试验的每一个可能发生也可能不发生的事情为随机事件，简称事件.

通常中用大写字母$A$，$B$，$C$以及$A_1, A_2, \cdots$
$A_n, \cdots$等表示事件.

<u>**必然事件**</u> **随机试验中肯定发生的事件,记为 $\Omega$ .**

<u>**不可能事件**</u> **随机试验中肯定不发生的事件,记为$\varnothing$.**

**例如：**

**摸球试验**

**抛硬币**

**其它试验**

<u>**基本事件**</u> **在一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件.**

复合事件 由若干基本事件组合而成的事件.

基本事件可理解为“不能再分解”的事件.

例如: 摸球试验 抛硬币

注意:试验目的不同, 则试验的基本事件有可能不相同.

例如: 测量身高

## 二、样本空间和随机变量

将联系于试验的每一个基本事件,用包含一个元素$\omega$的单点集来表示.

基本事件$A_1$　基本事件$A_2$　⋯ ⋯

↕　↕　——对应

单点集$\{\omega_1\}$　单点集$\{\omega_2\}$　⋯ ⋯

基本事件的对应元素全体所组成的集合

$$\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots\}$$

称为试验的样本空间,样本空间的元素称为样本点.

若一个基本事件对应的样本点是$\omega$,对任意事件$A$ ,若$\omega \in A$ , 称事件$A$ 发生,否则称 $A$ 没有发生.

**复合事件**:由若干基本事件组成的随机事件.

复合事件是样本空间的子集.

样本空间$\Omega$对应的事件是必然事件,

空集 $\varnothing$ 对应的事件是不可能事件.

例如: 摸球试验

## 三、随机事件的关系及运算

随机事件的关系及运算实质上对应集合的关系及运算.

(1) 包含关系

若$A\subset B$，即事件$A$ 发生,必然导致事件$B$发生,称事件B包含事件A, 或A 是 B 的子事件.

从集合的角度：若$\omega\in A$ ⟹ $\omega\in B$

对任意事件$A$，有$\varnothing\subset A\subset \Omega$.

例子

如果两个事件互相包含,称为两事件**相等**.

(2) 和事件

事件$A$与$B$的**和事件**记为 $A\cup B$.

从集合角度:$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或$\omega\in B\}$

从事件角度:$A\cup B$ 是事件{$A$与$B$至少有一个发生}.

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$表示事件

"事件组$A_1$, $A_2,\cdots$, $A_n$中至少有一个发生"

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示事件“事件列$A_1$，$A_2$,$\cdots$中至少有一个发生”.

**例如:** 参见实例

**(3) 积事件**

**事件$A$与$B$的积事件记为 $A \cap B$ 或 $AB$.**

**从集合角度:**$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$ **且**$\omega \in B\}$.

**从事件角度:** $A \cap B$ **是事件**{ $A$与$B$ **同时发生**}.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$表示事件“事件组$A_1$，$A_2, \cdots$，$A_n$同时发生”.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$表示“事件列$A_1$，$A_2, \cdots$同时发生”

参见实例

**(4) 互不相容事件**

**若 $AB = \varnothing$ ,称$A$、$B$为互不相容或互斥事件,**

**即$A$、$B$不可能同时发生.**

**显然, $\varnothing$与任何事件互不相容.**

$A_1, A_2, \cdots, A_n$**中任意两个互不相容, 称** $A_1, A_2, \cdots, A_n$**互不相容(两两互斥).**

**事件列** $A_1, A_2, \cdots$**互不相容是指其中任意有限个事件互不相容.**

**性质：同一试验的基本事件互不相容.**

**参见实例**

## (5) 对立事件（逆事件）

若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，称 $A$、$B$ 互为对立事件（逆事件），记为 $B=\overline{A}$

从集合角度: $\overline{A}=\{\omega \mid \omega\notin A\}$

从事件角度: $\overline{A}$是事件{ $A$不发生}.

显然，在一次试验中$\overline{A}$与$A$ 必发生且仅发生一个，非此即彼.

TIPS

摸球试验

请思考：$\overline{\overline{A}} = ?$

## (6) 差事件

事件$A$与$B$之差 记为$A - B$

从集合角度： $A - B = \{\omega \mid \omega \in A, \text{但}\, \omega \notin B\}.$

从事件角度： $A - B$是事件$\{A$发生并且$B$不发生$\}$

有

$$A - B = A\overline{B}, \quad \overline{A} = \Omega - A$$

TIPS

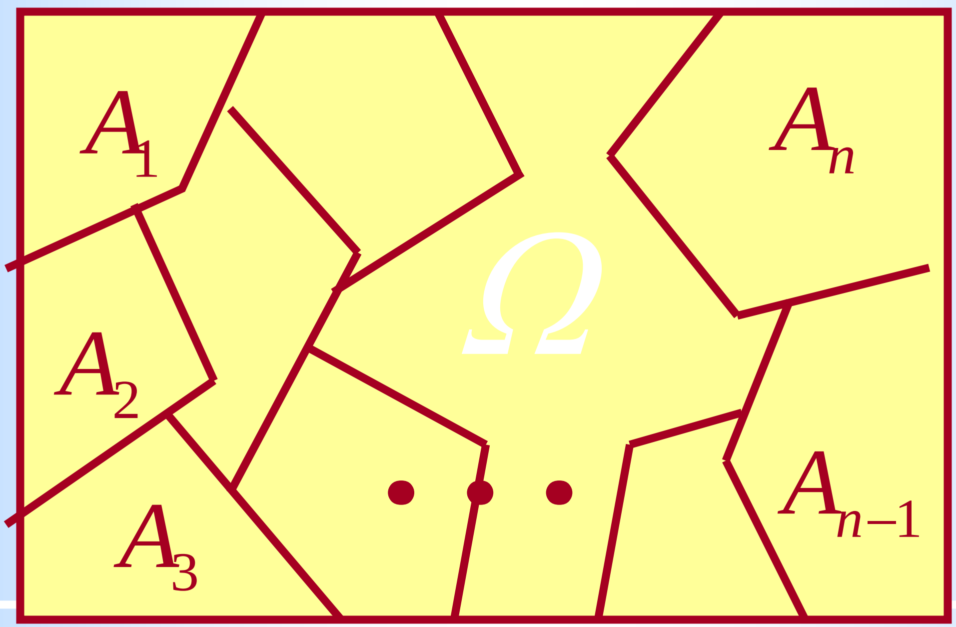
参见例子

## (7). 完备事件组

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，且 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组

或称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 $\Omega$ 的一个有限划分



## (8) 随机事件（集合）运算律

**交换律:** $A\cup B= B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$;

**结合律:** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

**分配律:** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ ;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ .

**德· 摩根律:** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

**吸收律:**

如果 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B, AB = A.$

$$A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega.$$

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (AB) = A$$

见 P8例1.1.8

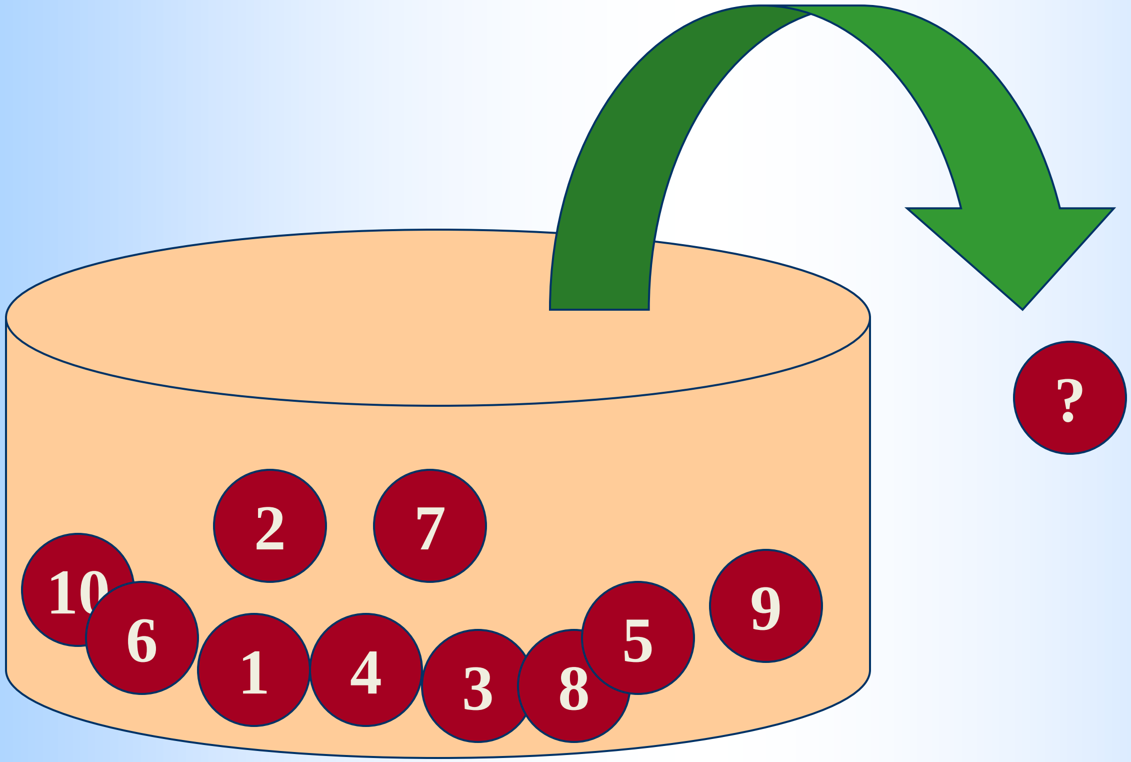
$$A - B = A\bar{B} = A - AB$$

$$A - B = (A \cup B) - B$$

参见例子

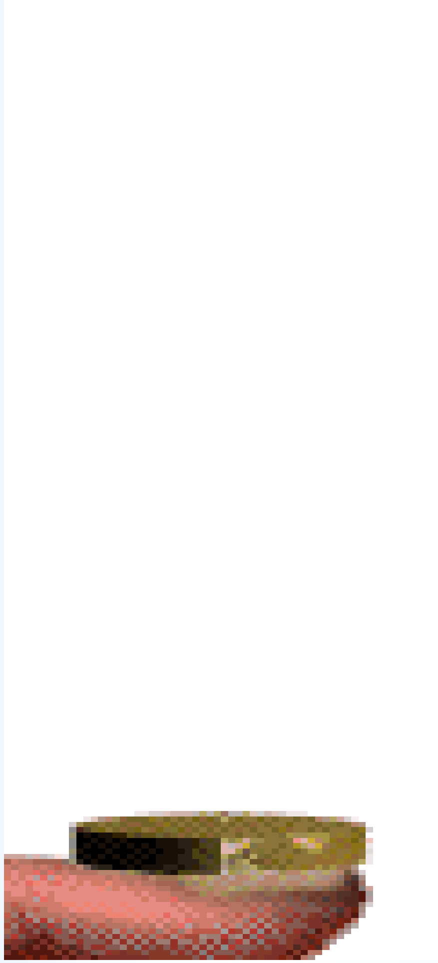
# END

**E1 从10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码, 这就是一个随机试验。**




#

## E2 抛一枚硬币，将会出现正面还是反面?



#

E3 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达300小时，检测该元件还能使用多少小时?

E4 掷两粒均匀骰子的试验.

E5 检验出N件产品中的次品.

E6 测量某团体人员的身高.

$E_1$ 从 10个标有号码 1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码.

$A$ = {取得的小球号码为偶数};

$B$ = {号码为奇数};

$C$ = {号码大于3};

$A_i$ = {号码为$i$ }, $i$ =1,2,⋯,10.

等等; 都是随机事件.

$W$ ={号码不超过10 } 是必然事件,

$F$ ={号码等于0}是不可能事件.

#

E2 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况.

在试验中，若根据硬币出现正面或反面来决定球赛的首发权，把硬币“出现正面H”和“出现反面T”这两个可能结果看成随机事件.

故有

$$A=\{\text{出现正面}\},$$

$$B=\{\text{出现反面}\}.$$

由于试验的目的，硬币沿什么方向滚动等结果将不被看成随机试验.

#

E3　检验N件产品中的次品

随机事件有：$A$={检验到正品}；

$B$={检验到次品}，等等.

E4　测量某团体人员的身高.

用X表示人的身高，$\{X = x\}$表示“人的身高为$x$”，有：

$\{X = x\}$，　$\{X > 0\}$，$\{X < 1.5\}$，

$\{X > 1.70\}$，…

都是随机事件.　#

E1 从10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码,下述试验结果:

$A=$ {取得的小球号码为偶数};

复合事件

$B=$ {号码为奇数 };

基本事件

$C=$ {号码大于 3};

$A_i=$ {号码为$i$ }, $i=1,2,\cdots,10.$

复合事件

$\Omega=$ {号码不超过10}是必然事件,

$\phi=$ {号码等于0 } 是不可能事件.

#

**例2 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况.**

**在试验中，若根据硬币出现正面或反面来决定球赛的首发权，把硬币“出现正面H”和“出现反面T”这两个可能结果看成随机事件。**

**故有：$A$={出现正面}，**

**$B$={出现反面}。**

**基本事件**

**例4 测量某团体人员的身高.**

**用$X$表示人的身高，$\{X = x\}$表示"人的身高为$x$",有：**

基本事件

$$\{X = x\},\quad \{X > 0\},$$

复合事件

$$\{X < 1.5\},\quad \{X > 1.70\}$$

**若测量人的身高是为了判断乘车购票与否，则仅有三个基本事件：**

A=｛购全票｝，B=｛购半票｝，C=｛免票｝. #

E1 从10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码, 考虑随机试验中的事件:

$A$ = {取得的小球号码为偶数},

B = {号码为奇数},

C = {号码大于3};

$A_i$ = {号码为$i$ }, $i = 1, 2, \cdots, 10$

基本事件: $A_i$ = {号码为$i$ } $=\{\omega_i\}=\{i\}$,

$i = 1,2,\cdots,10.$

## 复合事件:

$$A=\{\text{号码为偶数}\}=\{2,4,6,8,10\}$$

$$B=\{\text{号码为奇数}\}=\{1,3,5,7,9\};$$

$$C=\{\text{号码大于3}\}=\{4,5,6,7,8,9,10\}.$$

$\Omega$={号码不超过10 }={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}为样本空间，也是一个必然事件.

$\varnothing$ ={号码等于0 },不包含任何基本事件,从而不包含任何样本点，是不可能事件.

A={号码为偶数} = {2,4,6,8,10} $\subset \Omega$,

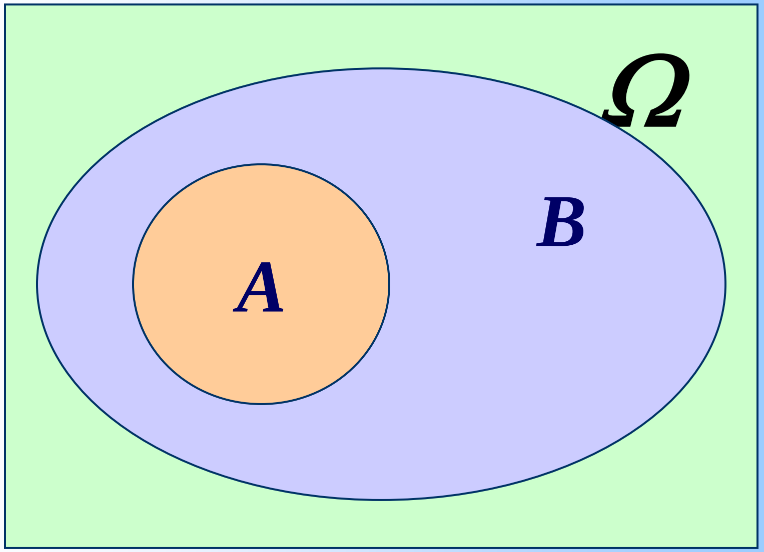
$B$ = {号码为奇数}={1,3,5,7,9} $\subset \Omega$.

如果在一次试验中，取到编号为3 的小球，称基本事件$A_3$ = {号码为3}={$\omega_3$ }={3 }发生.

因$3 \in B$，称事件$B$ 在这次试验中发生.

#

从集合的角度 参见示图




E1 从10个标有号码1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码, 考虑随机试验中的事件:

$A=$ {球的号码为4的倍数}={4, 8},

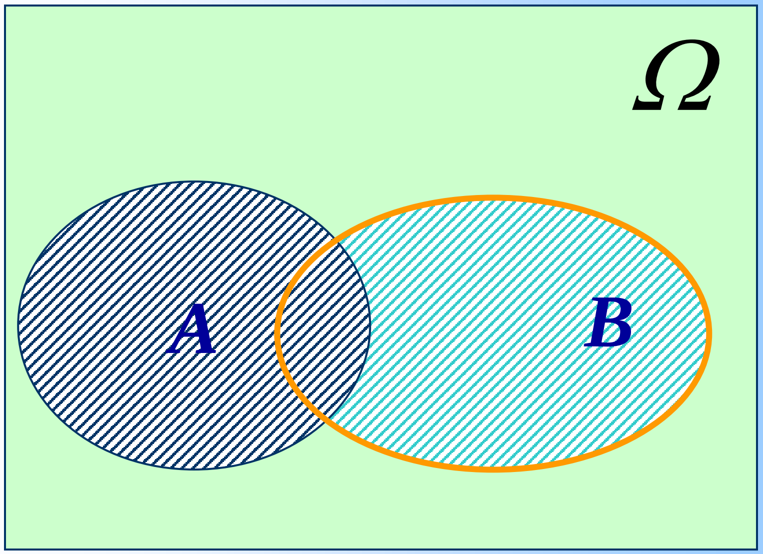
$B=$ {球号码为偶数}={2, 4, 6, 8, 10}.

则 $A\subset B$

#

## 和事件

从集合的角度 参见示图




E1 从10个标有号码 1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录得小球的号码,设

$A$={球的号码是不大于3的奇数}={1, 3},

$B$={球的号码是不大于4的偶数}={2, 4}

$A \cup B = ?$

$A \cup B$={球的号码不超过4} = {1, 2, 3, 4}.

**例 对某一目标进行射击,**

$A_i$ = {第 $i$ 次射击击中目标},$i$ =1,2, …

$A$ = {击中目标};

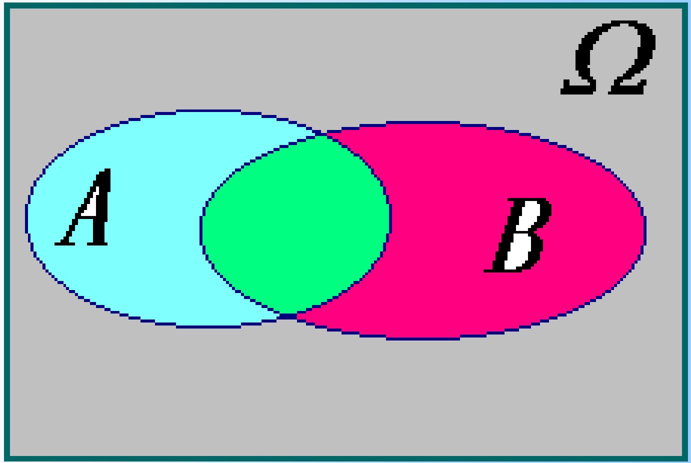
$B_k$ = {前 $k$ 次击中目标},k=1,2, …

**则**

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i, \qquad B_k=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,$$

#

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$




**E1** 从10个标有号码 1,2,…, 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

记

$A$={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9}，

$B$={球的号码大于5}={6，7，8，9，10}

$$A\cap B = C = ?$$

$C$={球的号码是7或9} = {7，9}.

**例 对某一目标进行射击，直至命中为止.**

**设：** $D_k$ = {进行了k次射击}；

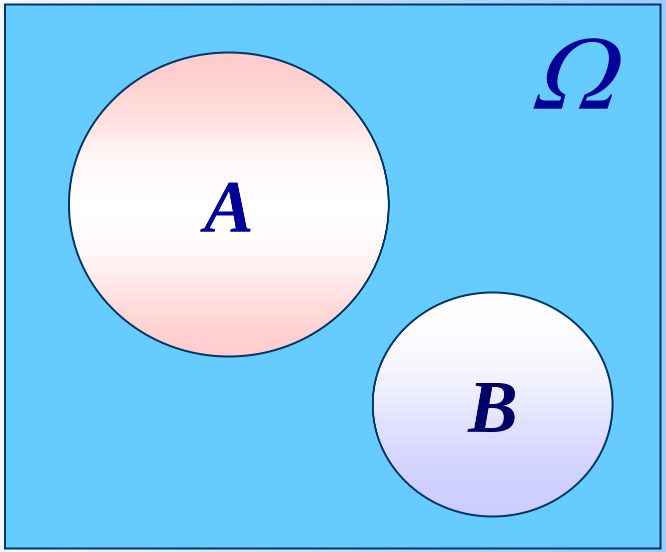
$A_i$ = {第$i$ 次射击命中目标}，$i$=1,2…

$B_i$ = {第$i$ 次射击未命中目标}, $i$=1,2…

**则** $D_k = B_1B_2 \ldots B_{k-1}A_k$

#

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



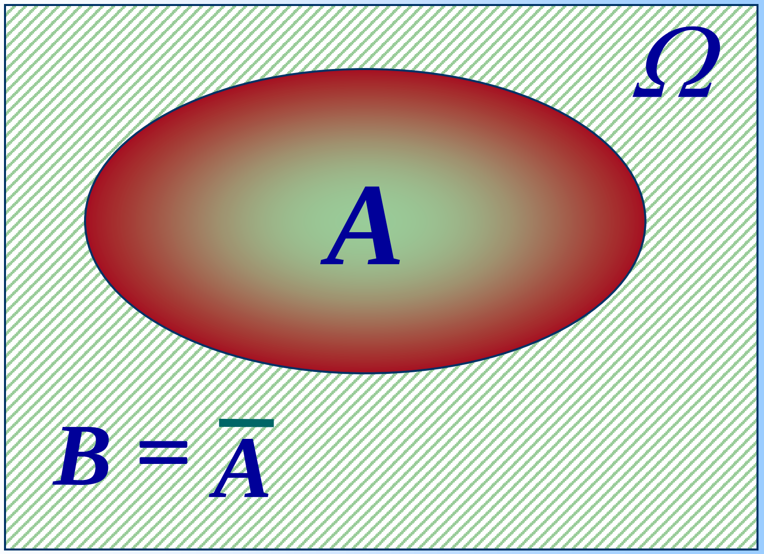

E1 从 10个标有号码 1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录小球的号码, 考虑

$A$={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

$B$={球的号码是不大于4 的偶数}={2，4}.

则 $A$与$B$是互不相容的事件. #

从集合的角度 参见示图




**E1** 从 10个标有号码 1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录小球的号码, 以下两个事件:

$A$={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

$B$={球的号码是偶数}={2，4，6，8，10}.

是对立事件.

#

甲乙两人向同一目标射击,设A={甲命中目标,乙未命中目标}则其对立事件

$\overline{A}$ =( )

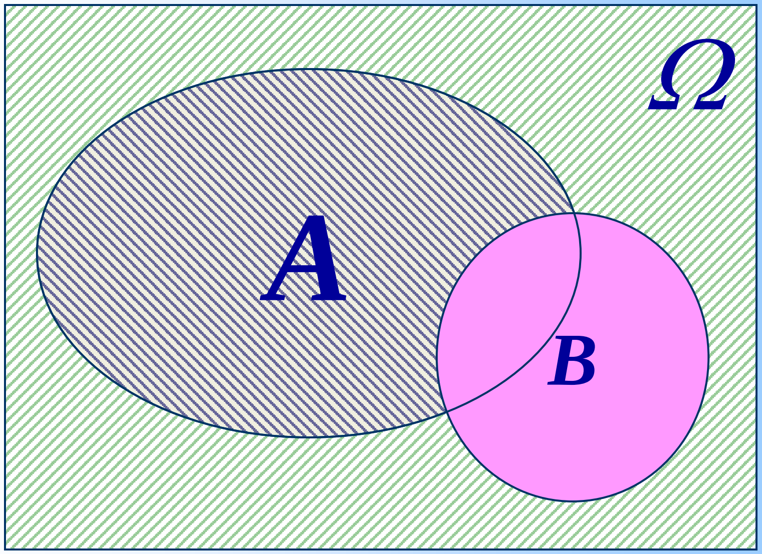
(a): { 甲未命中且乙命中}

(b): { 甲乙均命中}

(c): { 甲未命中}

(d): { 甲未命中或乙命中}

从集合的角度 参见示图




**E1** 从 10个标有号码 1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录小球的号码.

$A$={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

$B$={球的号码不大于4}={1，2，3，4}.

则：$A-B=\{5，7，9\}$.

**续例4 测量某团体人员的身高.**

**用$X$表示人的身高, $\{X=x\}$表示"人的身高为$x$"随机事件与 $\{X\le 1.70\}$与$\{X\le 1.5\}$的差事件为**

$$\{X\le 1.7\}-\{X\le 1.5\}=\{1.5< X \le 1.7\}$$

**表示事件"人的身高介于1.5米与1.7米之间".**

#

**例 证明** $(A-AB)\cup B=A\cup B$

**证明:**

$$(A-AB)\cup B=A(\overline{AB})\cup B$$

差事件性质

$$=A(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B$$

对偶律

$$=A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B$$

分配律

$$=A\overline{B}\cup B$$

$$=A\overline{B}\cup AB\cup B$$

吸收律

$$=A(B\cup\overline{B})\cup B$$

$$=A\Omega\cup B=A\cup B$$

设A B C为三个随机事件,试用A,B,C的运算关系表示下列事件.

1) A发生,B,C都不发生.
2) A,B,C中恰有两个发生.
3) A,B,C中不多于一个发生.
4) A,B,C中至少有一个发生.

解: 1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ $\quad A\overline{B \cup C}$

2) $AB\overline{C} \cup AC\overline{B} \cup BC\overline{A}$

$(AB \cup AC \cup BC) - ABC$

3) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}C\overline{B} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

$\overline{AB \cup BC \cup AC}$

4) $A \cup C \cup B$