§ 7.2 估计量的优良性准则

对于总体的参数，可用各种不同的方法去估计它，因此一个参数的估计量不唯一.

如 $X \sim U(0,\theta)$,θ的矩法估计量为 $2\overline{X}$，

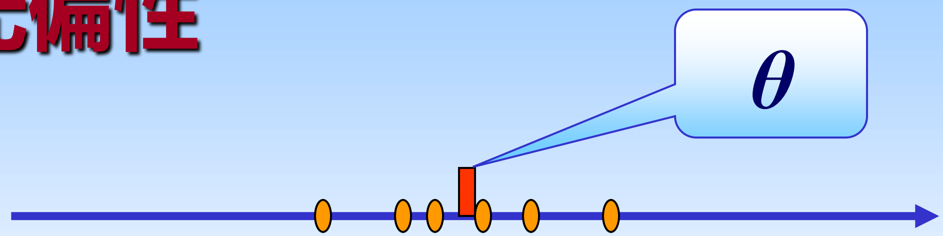
极大似然估计量为 $\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$

在众多的估计量中选哪一个更好?

选取的标准是什么?

三个常用准则：无偏性、有效性、相合性.

1. 无偏性



定义7.2.1 若参数θ的估计量 $\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

对一切 n 及$\theta \in \Omega$，有

$$E(\hat{\theta}_n) = E[T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta$$

称 $\hat{\theta}_n$ 为θ的**无偏估计量**. 若

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}[E(\hat{\theta}_n) - \theta] = 0$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为θ的**渐进无偏估计量**.

若θ的实函数 $g(\theta)$ 的无偏估计量存在，称 $g(\theta)$是可估计函数.

注 当 $\hat{\theta}$是 θ的无偏估计量，$g(\hat{\theta})$不一定是$g(\theta)$的无偏估计量.

反例

样本均值是总体均值$E(X)$的无偏估计量.

样本的k阶原点矩是总体的k阶原点矩的无偏估计量.

TIPS

S^2 是 σ^2 的无偏估计

注意:

$$M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\text{不是}\sigma^2\text{的无偏估计}$$

$$\because M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$$

$$\Rightarrow E(M_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\text{已知}E(X)=\mu\text{时},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\text{是}\sigma^2\text{的无偏估计}$$

2. 有效性

思考：已知总体X的样本X_1, X_2, X_3,下列估计量是否为μ的无偏估计量?

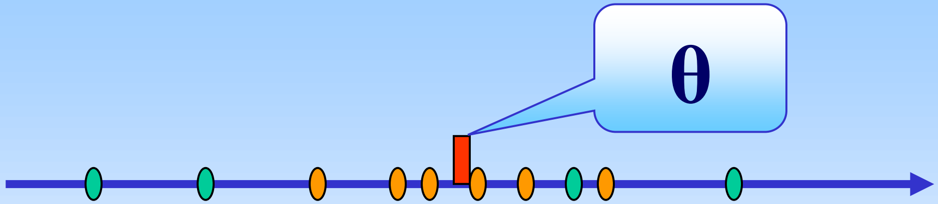
哪个更好?

$1.\ \overline{X};\quad 2.\ X_1;\quad 3.\ X_1+X_2;\quad 4.\ 0.1X_1+0.2X_2+0.7X_3.$

参数的无偏估计量不惟一.

无偏估计只能保证估计无系统误差:

$$E(\hat{\theta}-\theta)=0$$



希望 $\hat{\theta}$ 的取值在θ及其附近越密集越好，

$\Longrightarrow$ 其方差应尽量小.

定义7.2.2 设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 都是未知参数θ的无偏估计量,若

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Omega$$

称 $\hat{\theta}_1$比 $\hat{\theta}_2$<u>有效</u>(优效).

设 $\hat{\theta}_0$ 是 θ 的无偏估计，如果对 θ 的任何一个无偏估计量 $\hat{\theta}$ 都有

$$\boxed{D(\hat{\theta}_0) \le D(\hat{\theta}), \quad \theta \in \Omega}$$

称 $\hat{\theta}_0$ 为 θ 的最小方差无偏估计量.

TIPS

证明无偏性判断有效性(1)

证明无偏性判断有效性(2)

$\overline{X}$ 和 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的最小方差无偏估计

3. 相合性

7.2.3定义 设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是未知参数$\theta$的估计量，若对任意的ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为θ的**相合估计量**.

TIPS

相合估计量的证明(1)

相合估计量的证明(2)

$\overline{X}$ 是μ的相合估计量;

S^2 和M_2 都是σ^2的相合估计量.

$\overline{X}$ 和S^2 分别是μ 和σ^2 的相合、无偏估计

$\overline{X}$ 和S^2 分别是μ 和σ^2 的最小方差无偏估计

例7.2.1 设总体的方差 $D(X)=\sigma^2>0$，有

$$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(X)=\mu$$

$$E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2\neq\mu^2$$

证明 S^2 是σ^2 的无偏估计量

例7.2.2 设总体的方差 $D(X)=\sigma^2>0$，则样本方差S^2是σ^2的无偏估计.

证 $$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

$$(n-1)E(S^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$=nE(X^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$= n\{D(X) + E(X)^2\} - n\{D(\overline{X}) + E(\overline{X})^2\}$$

$$= n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2) \quad = (n-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(S^2) = \sigma^2.$$

#

例7.2.3 设总体$X \sim U[0,\theta]$, $\theta>0$ 未知, (X_1, X_2, X_3)是取自X的一个样本

1) 试证 $\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3} X_i$, $\hat{\theta}_2 = 4\min_{1\le i\le 3} X_i$

都是θ的无偏估计;

2) 上述两个估计量中哪个的方差最小?

分析: 要判断估计量是否是无偏估计量, 需要计算统计量的数学期望.

令 $Y = \max\limits_{1\le i\le 3} X_i,\quad Z = \min\limits_{1\le i\le 3} X_i$

证 1) 先求X与Y的概率密度函数，

已知分布函数

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta; \\ 1, & x \ge \theta. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\max_{1\le i\le 3} X_i \le y\}$$

$$= P\{X_1 \le y, X_2 \le y, X_3 \le y\}$$

$$= P\{X_1 \le y\}\cdot P\{X_2 \le y\}\cdot P\{X_3 \le y\}$$

$$= [F_X(y)]^3$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 3[F(y)]^2 f(y)$$

$$\therefore\ f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\theta}\cdot\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^2, & 0 \le y \le \theta; \\ 0\quad, & else. \end{cases}$$

$$E(Y)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta y^3dy=\frac{3}{4}\theta,$$

同理可得, $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}\cdot\left(1-\frac{z}{\theta}\right)^2, & 0\le z\le\theta\\ 0\quad , & else\end{cases}$

$$\therefore E(Z)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta z\cdot(\theta-z)^2dz=\frac{1}{4}\theta$$

从而, $E(\frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3}X_i)=E(4\min_{1\le i\le 3}X_i)=\theta,$

即 $\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 和 $4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 都是 θ 的无偏估计.

2) $\because D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{80}\theta^2,$

$$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{3}{80}\theta^2,$$

$$\therefore D(\frac{4}{3}Y) \le D(4Z)$$

即 $\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 比 $\hat{\theta}_2 = 4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 的方差小. #

例7.2.4 证明

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i,\ \ c_i \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} c_i = 1,$$

是无偏估计量，$\overline{X}$ 是其中最有效估计量.

证

$$E(\hat{\mu}) = E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = E(X)\sum_{i=1}^{n} c_i = E(X),$$

$$D(\hat{\mu}) = D(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

利用拉格朗日乘数法求条件极值，令

$$L(c_1, c_2 \cdots c_n; \ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} c_i - 1\right)$$

从联立方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_i} = 2c_i - \lambda = 0; & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = 1. \end{cases}$$

解得 $\lambda = \dfrac{2}{n}$，和 $c_i = \dfrac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$

即函数 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$ 的最小值点是

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$.

#

例7.2.5 设 $X\sim N(0,\sigma^2)$, 证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的相合估计量.

分析 1) 证明相合性常用到**切比雪夫不等式、大数定律;**

2) 这里计算方差较难, 可以先化为 χ^2 分布, 再利用卡方分布的性质计算.

证

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=E(X^2)=\sigma^2,$$

令 $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{\sigma^2}{n}Y$,

$$\therefore D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}Y\right)$$

$$=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot D(Y)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n},$$

由切比雪夫不等式，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ **是σ^2的相合估计量.**

#

例7.2.6 设总体X的k阶原点矩$E(X^k)$存在，证明样k阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$是其无偏、相合估计量.

证 样本构成的随机变量序列$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$相互独立同分布,

$\Rightarrow \{X_i^k\}, i=1,2,\cdots$ 相互独立同分布, $E(X_i^k)=E(X^k)$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=E(X^k)$$

服从辛钦大数定理，对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| \geq \varepsilon\} = 0$$

或者

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\} = 1$$

#