概率论与数理统计习题课（一）

基本内容与重要结论：

样本空间与随机事件；

事件的关系与运算；

概率的定义及性质；

概率的计算公式：

若 $B \subset A$, $\quad P(A-B)=P(A)-P(B).$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

或 $\quad = P(A \cup B)-P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),$$

全概率公式：由因求果

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

关键在于有限划分

贝叶斯公式：由果溯因

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

随机事件的独立性：

事件A和事件B相互独立的充分必要条件是

$$P(B|A)=P(B)\text{或}P(A|B)=P(A);$$

$$P(AB)=P(A)P(B);$$

$$P(B|A)=P(B|\bar{A}).$$

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立，则**

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n).$$

一、基本概念

1、随机事件的相互独立和互不相容

A、B 互不相容： $AB=\varnothing$

19,21

A、B 相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$

一对事件相互独立和互不相容不能同时成立

例1

2、概率为零的事件不一定是不可能事件

$$P(\varnothing)=0,\ \text{但}P(A)=0 \not\Rightarrow A=\varnothing$$

3、P(AB)与P(A|B)的概念差别

P(AB)：两个事件同时发生的概率（试验完成前）(10)

P(A|B)：条件概率

$$P(AB)\begin{cases}A、B\ 互不相容\\ A、B\ 相互独立\\ 乘法公式\\ 事件的关系:A\subset B,P(AB)=P(A)\end{cases}$$

(7)

二、概率的计算

1、古典概率 （3、4、5）

2、利用事件运算律和概率性质计算概率(6,7,8,9)

三、基于条件概率的三个公式 (10,11,12,13,14,15,16,17)

乘法	全概率	贝叶斯
⇧	⇧	⇧
条件概率定义的改写	构造完备事件组	计算事后概率，是前两个公式的合用

例2

四、随机事件的独立性(20)

1、随机事件相互独立的直观理解

2、A_1，A_2，…A_n 相互独立与两两独立的区别

3、利用独立事件进行计算 例3

例2、设5件产品中有3件正品，2件次品，一次一件不放回地抽样两次，求(写出解答过程)：

1.在第一次抽到正品的条件下、第二次抽到正品的概率 p_1;

2. 第一次、第二次都抽到正品的概率p_2;

3. 第二次抽到正品的概率p_3.

解 设A_i={第i 次抽到正品}，i=1，2

1. $$p_1 = P(A_2|A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. $p_2 = P(A_1 A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ 或

$$p_2 = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

3. $P(A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) + P(\overline{A}_1) P(A_2 | \overline{A}_1)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

全概率公式

例1、同时掷两枚均匀硬币，设A={至多出现一枚正面}，B={一枚出现正面，另一枚出现反面}，C={同时出现正面或同时出现反面}，试讨论以下问题：

1. A、B、C是否互不相容？
2. A、B、C是否相互独立？

解 此试验的样本空间为

$$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$$

$$A=\{TH,HT,TT\},\quad B=\{TH,HT\},\quad C=\{HH,TT\}$$

因 $\qquad AB=B\neq\phi$

故A与B不是互不相容，从而A、B、C不是互不相容的。

因 $\qquad P(A)=\frac{3}{4},\quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$P(AB)=\frac{3}{4}\neq\frac{3}{8}=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(\phi)=0\neq\frac{1}{4}=P(B)P(C)$$

故A与B，B与C均不是相互独立的，从而A、B、C不相互独立。

例3、设每次射击的命中率为0.2，问至少进行多少次独立射击，才能使至少击中一次的概率不小于0.99?

解 设 $A_i = \{\text{第}i\text{次射击命中目标}\}$

$$P(A_i) = 0.2 \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$= 1 - (0.8)^n \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \quad (0.8)^n \le 0.01$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \frac{\ln 0.01}{\ln 0.8} = 20.6$$

至少进行21次射击，才能使至少击中一次的概率不小于0.99。

另解：设X表示n次试验中命中次数，则X~B(n,0.2)

$$P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\}$$

$$= 1 - C_5^0 0.2^0 0.8^n \ge 0.99$$

1、将一颗骰子掷4次，试求至少出现一次6点的概率 p_1; 将两颗骰子掷24次，求至少出现一次双6点的概率 p_2 .

解 设A={一颗骰子掷4次，至少出现一次6点}，

B={掷两颗骰子24次，至少出现一次双6点}

$$p_1 = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0.5177$$

$$p_2 = P(B) = 1 - P(\vec{B}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0.4914$$

4、同时掷两枚均匀硬币，设A={至多出现一枚正面}，B={一枚出现正面，另一枚出现反面}，C={同时出现正面或同时出现反面}，试讨论以下问题：

1. A、B、C是否互不相容?

2. A、B、C是否相互独立?

解 此试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A=\{TH,HT,TT\},\quad B=\{TH,HT\},\quad C=\{HH,TT\}$$

因 $AB=B\neq\phi$

故A与B不是互不相容，从而A、B、C不是互不相容的。

因 $P(A)=\dfrac{3}{4},\quad P(B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2},\quad P(C)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$$P(AB)=\frac{3}{4}\neq\frac{3}{8}=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(\phi)=0\neq\frac{1}{4}=P(B)P(C)$$

故A与B，B与C均不是相互独立的，从而A、B、C不相互独立。

5、一个班内有20位同学都想去参观一个展览会，但只有3张参观票，大家都同意通过这20位同学抽签决定3张票的归属。计算下列事件的概率：

（1）第二人抽到票的概率

（2）第二人才抽到票的概率

（3）第一人宣布抽到了票，第二人又抽到票的概率

（4）前两人中至少有一人抽到票的概率

2、三个箱子，第一个箱子4个黑球1个白球，第二个箱子3个黑球3个白球，第三个箱子3个黑球5个白球。随机地取一个箱子，再从这个箱子取出一球为白球的概率；已知取出的一个球为白球，此球属于第二个箱子的概率。

3、甲袋中有3个白球2个黑球，乙袋中有4个白球4个黑球，现从甲袋中任取2球放入乙袋，再从乙袋中取一球，求取到白球的概率；如果已知从乙袋中取到白球，求从甲袋中取出的是一白一黑得概率。