باسمه تعالی

پروژه‌ی درس آمار و احتمال مهندسی

تصمیم گیری با وجود ابهام

استاد درس
دکتر آرش امینی

دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

پاییز ۱۴۰۳

آخرین مهلت تحویل:
۱۷ دی ۱۴۰۳

فهرست مطالب

حتما قبل از شروع پروژه بخش ۱ را مطالعه نمایید.

۱ نکات مهم

لطفاً به نکات زیر دقّت کنید:

۱. پس از پایان پروژه یک روز برای تحویل حضوری پروژه در نظر گرفته می شود و باید کد ها و خروجی های خود را در حضور دستیاران آموزشی ارائه دهید و به پرسش های دستیاران پاسخ دهید. دقت کنید که باید به تمام بخش های پروژه مسلط باشید.

۲. تمامی شبیه‌سازی‌ها باید با کمک زبان Python انجام شود. همچنین مجاز هستید از تمام کتابخانه هایی که در طول تمرین ها از آنها استفاده کرده اید مانند `numpy`، `scipy` و `pytorch` استفاده نمایید اما دقت کنید پیاده سازی الگوریتم ها باید توسط شما انجام شده باشد و نمیتوانید از کتابخانه هایی که الگوریتم را به صورت آماده پیاده سازی کرده اند استفاده نمایید.

۳. تحویل پروژه به صورت گزارش و کدهای نوشته‌شده است. گزارش باید شامل پاسخ پرسش‌ها، تصاویر و نمودارها و نتیجه‌گیری‌های لازم باشد. در نهایت یک فایل شامل کد ها و یک گزارش به فرمت pdf را در سامانه CW آپلود نمایید.

۴. اگر برای پاسخ به پرسش‌ها، از منبعی (کتاب، مقاله، سایت و...) کمک گرفته‌اید، حتماً به آن ارجاع دهید.

۵. درصورت مشاهده‌ی تقلّب، نمره‌ی هردو فرد منفی منظور خواهد شد.

۶. در صورت داشتن پرسش، به GhLmu@ و BornaKhodabandeh@، مسئولین پروژه در پیام‌رسان تلگرام پیام دهید.

موفّق باشید!

زنجیره مارکف

نظریه زنجیره مارکوف

یک Markov Chain دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که عبارتند از: $X_۰, X_۱, X_۲, \dots$، که خاصیت Markov را برآورده می‌کند. خاصیت Markov بیان می‌کند که اگر وضعیت کنونی سیستم معلوم باشد، وضعیت آینده تنها به همین وضعیت وابسته است و به وضعیت‌های قبلی ارتباطی ندارد. این ویژگی که گاهی به نام خاصیت بی‌حافظگی (Memoryless Property) شناخته می‌شود، به‌طور ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(X_{n+۱} \mid X_n, X_{n-۱}, \dots, X_۰) = P(X_{n+۱} \mid X_n),$$

مشروط بر اینکه وضعیت کنونی X_n مشخص باشد.

به عبارت دیگر، احتمال انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر تنها به وضعیت کنونی وابسته است و به دنباله رویدادهای قبلی ربطی ندارد.

یک Markov Chain می‌تواند توسط یک transition matrix P توصیف شود که در آن هر عنصر P_{ij} نمایانگر احتمال انتقال از وضعیت i به وضعیت j است.

مفاهیم کلیدی:

- **حالت ها (States):** مقادیر ممکن که سیستم می‌تواند به آن‌ها دست یابد.
- **احتمالات گذار (Transition Probabilities):** احتمالات انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر.
- **توزیع ایستان (π):** توزیعی که تحت احتمالات انتقال تغییر نمی‌کند، یعنی $\pi P = \pi$.
- **ارگودیسیتی (Ergodicity):** ویژگی‌ای که تضمین می‌کند زنجیره مارکوف پس از تعداد کافی گام‌ها به یک توزیع پایا همگرا می‌شود، بدون توجه به وضعیت اولیه.

سوالات مربوط به زنجیره مارکف

۱. **Markov Property:** Markov property را تعریف کنید. چرا به آن "بی‌حافظه" می‌گویند؟ این ویژگی چگونه بر پیش‌بینی‌پذیری سیستم در طول زمان تأثیر می‌گذارد؟

۲. **Transition Matrix:** یک Chain Markov ساده با ۲ وضعیت به‌صورت زیر داریم:

$$P = \begin{pmatrix} ۰/۷ & ۰/۳ \\ ۰/۴ & ۰/۶ \end{pmatrix}$$

احتمال توزیع بعد از دو گام را محاسبه کنید، به شرط آنکه سیستم از وضعیت ۱ شروع کند.

۳. **توزیع پایا:** برای یک زنجیره مارکوف با ۳ وضعیت و ماتریس انتقال زیر:

$$P = \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰/۲ & ۰/۳ \\ ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۳ \\ ۰/۴ & ۰/۳ & ۰/۳ \end{pmatrix}$$

توزیع ایستان π را با حل معادله $\pi P = \pi$ بیابید.

۴. **ارگودیک بودن:** مفهوم ارگودیک بودن در زنجیره‌های مارکوف را توضیح دهید. ارگودیک بودن چگونه بر همگرایی زنجیره مارکوف به یک توزیع پایا تأثیر می‌گذارد؟

Monte Carlo Methods

روش‌های مونت کارلو الگوریتم‌های محاسباتی هستند که به شبیه‌سازی تصادفی تکراری برای به‌دست آوردن نتایج عددی تکیه دارند. این روش‌ها به‌ویژه زمانی که حل‌های تحلیلی دشوار یا غیرقابل محاسبه باشند، بسیار مفید هستند. ایده اصلی پشت شبیه‌سازی‌های مونت کارلو این است که نمونه‌های تصادفی از یک توزیع احتمالی شناخته‌شده شبیه‌سازی کرده و از این نمونه‌ها برای برآورد مقادیر مختلف مانند میانگین‌ها، واریانس‌ها و احتمال‌ها استفاده می‌شود.

قبل از پرداختن به کاربردهای عملی روش‌های مونت کارلو، مرور دو قضیه کلیدی که مبنای این روش‌ها را تشکیل می‌دهند ضروری است: **قضیه قانون اعداد بزرگ** (LLN) و **قضیه حد مرکزی** (CLT). این قضایا تضمین می‌کنند که شبیه‌سازی‌های مونت کارلو با افزایش تعداد آزمایش‌ها به نتایج درست و قابل اعتمادی می‌رسند.

۱.۱ قضیه قانون اعداد بزرگ (LLN)

قضیه قانون اعداد بزرگ: قضیه قانون اعداد بزرگ بیان می‌کند که با افزایش تعداد نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع (i.i.d)، میانگین نمونه به میانگین حقیقی (μ) توزیع اصلی همگرا خواهد شد. این یک نتیجه بنیادی در نظریه احتمالات است که تضمین می‌کند با افزایش تعداد آزمایش‌ها در شبیه‌سازی‌های مونت کارلو، برآوردها دقیق‌تر خواهند شد.

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی i.i.d با میانگین μ باشند، میانگین نمونه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

قضیه قانون اعداد بزرگ تضمین می‌کند که:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$$

این بدین معنی است که با افزایش تعداد نمونه‌ها (n)، میانگین نمونه ($\bar{X}_n$) به‌طور حتمی به میانگین حقیقی μ همگرا خواهد شد.

۲.۱ قضیه حد مرکزی (CLT)

قضیه حد مرکزی: قضیه حد مرکزی یکی دیگر از ارکان نظریه احتمالات است که توزیع میانگین نمونه را برای اندازه‌های نمونه بزرگ توصیف می‌کند. قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که بدون توجه به شکل توزیع اصلی، توزیع میانگین نمونه به یک توزیع نرمال تبدیل می‌شود، مشروط بر اینکه توزیع اصلی دارای میانگین و واریانس محدود باشد.

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی i.i.d با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، میانگین نمونه به‌صورت زیر است:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که وقتی $n \to \infty$، توزیع میانگین نمونه $\bar{X}_n$ به یک توزیع نرمال تبدیل می‌شود:

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0, 1)$$

این بدین معنی است که برای n بزرگ، توزیع میانگین نمونه به‌طور تقریبی نرمال است با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$، حتی اگر توزیع اصلی داده‌ها نرمال نباشد.

۳.۱ مراحل اجرای شبیه‌سازی‌های monte carlo:

۱. **انتخاب توزیع:** توزیعی که می‌خواهید از آن نمونه‌برداری کنید را انتخاب کنید (مثلاً نرمال، یکنواخت، نمایی).

۲. **نمونه‌برداری تصادفی:** از تکنیک‌های نمونه‌برداری تصادفی برای تولید مقادیر تصادفی از توزیع انتخاب‌شده استفاده کنید.

۳. **محاسبه میانگین نمونه:** برای هر مجموعه از نمونه‌های تصادفی، میانگین نمونه را محاسبه کنید. این میانگین به‌عنوان برآوردی از مقدار مورد نظر استفاده می‌شود.

۴. **افزایش اندازه نمونه:** اندازه نمونه را به‌طور تدریجی افزایش دهید تا مشاهده کنید چگونه میانگین نمونه به میانگین حقیقی همگرا می‌شود. طبق قانون اعداد بزرگ، هرچه تعداد نمونه‌ها بیشتر شود، دقت برآورد افزایش می‌یابد.

۵. **تصویری از همگرایی:** میانگین‌های نمونه را برای اندازه‌های نمونه مختلف رسم کنید تا همگرایی را مشاهده کنید. همان‌طور که در قضیه حد مرکزی پیش‌بینی شده است، توزیع میانگین‌های نمونه باید با افزایش n به توزیع نرمال نزدیک شود.

پرسش شبیه‌سازی ۱. با انجام شبیه سازی، عملکرد روش های مونته کارلو را به صورت دقیق بررسی میکنید.

۱. **برآورد** π **:** از شبیه‌سازی‌های Monte Carlo برای برآورد مقدار π استفاده کنید، با تولید نقاط تصادفی در یک مربع و شمارش تعداد نقاطی که درون یک ربع دایره قرار دارند. مقدار برآورد شده از π را با مقدار حقیقی مقایسه کنید.

۲. **کاربرد قانون اعداد بزرگ:** یک کد پایتون بنویسید تا نمونه‌های تصادفی از یک توزیع نرمال شبیه‌سازی کنید. میانگین نمونه را برای اندازه‌های مختلف نمونه ($n = ۱۰, ۵۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$) محاسبه کنید و نتایج را رسم کنید.
چگونه میانگین نمونه به میانگین واقعی با افزایش تعداد نمونه‌ها همگرا می‌شود؟ این رفتار چگونه به قانون اعداد بزرگ (LLN) مرتبط است؟

۳. **برآورد واریانس :** از شبیه‌سازی‌های Monte Carlo برای برآورد واریانس یک متغیر تصادفی از توزیع نمایی استفاده کنید و آن را با واریانس واقعی مقایسه کنید.
چطور دقت برآورد واریانس با افزایش تعداد نمونه‌ها بهبود می‌یابد؟ این چه چیزی درباره ویژگی‌های همگرایی شبیه‌سازی‌های Monte Carlo به ما می‌گوید؟

۴. **CLT و همگرایی:** نمونه‌های تصادفی از یک توزیع یکنواخت شبیه‌سازی کنید و میانگین نمونه را برای اندازه‌های مختلف نمونه ($n = ۱۰, ۵۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$) محاسبه کنید. همگرایی میانگین نمونه را مشاهده کنید و توزیع میانگین نمونه ها را برای مقادیر مختلف n رسم کنید.
توزیع میانگین نمونه چگونه با افزایش تغییر می‌کند؟ این را به قضیه حد مرکزی (Central Limit Theorem - CLT) ربط بدهید و توضیح دهید چرا میانگین تجربی به توزیع نرمال میل می‌کنند.

۵. **فاصله اطمینان و CLT:** بعد از اجرای یک شبیه‌سازی مونت کارلو برای برآورد میانگین نمونه، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین برآورد شده بسازید. چگونه قضیه حد مرکزی (CLT) استفاده از فاصله اطمینان‌های مبتنی بر توزیع نرمال را توجیه می‌کند؟ اندازه نمونه ها چگونه بر عرض فاصله اطمینان تأثیر می‌گذارد؟

۶. **همگرایی برای توزیع‌های مختلف:** شبیه‌سازی فرآیند برآورد میانگین را برای توزیع‌های مختلف مانند نرمال، یکنواخت و توزیع Cauchy انجام دهید. میانگین نمونه را برای اندازه‌های مختلف نمونه ($n = ۱۰, ۵۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$) محاسبه کنید و نتایج را رسم کنید.
چگونه میانگین نمونه برای توزیع‌های مختلف همگرا می‌شود؟ برای توزیع‌هایی مانند نرمال و یکنواخت، همگرایی به سرعت اتفاق می‌افتد، اما برای توزیع‌های با دنباله‌های سنگین (مثل توزیع Cauchy) این همگرایی کندتر است.

این فرآیند نشان می‌دهد که همگرایی نه تنها یک مفهوم نظری است، بلکه تحت تأثیر ویژگی‌های توزیع زیرین قرار دارد. در این زمینه، از شما خواسته می‌شود تا روند همگرایی برای توزیع‌های مختلف را تحلیل کنید و نشان دهید که چگونه طبیعت توزیع بر سرعت همگرایی تأثیر می‌گذارد.

۷. **تحلیل همگرایی برای توزیع‌های مختلف:** شبیه‌سازی فرآیند برآورد میانگین را برای توزیع‌های مختلف انجام دهید و تغییرات همگرایی میانگین نمونه را بررسی کنید:

– توزیع نرمال: تولید نمونه‌های تصادفی از یک توزیع نرمال و محاسبه میانگین نمونه برای اندازه‌های مختلف ($n = ۱۰, ۵۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$). مشاهده کنید که میانگین نمونه چگونه به میانگین واقعی (صفر برای توزیع نرمال استاندارد) همگرا می‌شود.

– توزیع یکنواخت: همین کار را برای توزیع یکنواخت $U(۰, ۱)$ انجام دهید و مشاهده کنید که میانگین نمونه چگونه به $\mu = ۰٫۵$ همگرا می‌شود.

– توزیع Cauchy: تولید نمونه‌هایی از توزیع Cauchy و محاسبه میانگین نمونه. شما احتمالاً مشاهده خواهید کرد که میانگین نمونه حتی با اندازه‌های بزرگ نمونه‌ها هم همگرا نمی‌شود، زیرا توزیع Cauchy دارای دنباله‌های سنگین است.

– تحلیل: میانگین‌های نمونه را برای هر توزیع رسم کنید و مشاهده کنید که با افزایش تعداد نمونه‌ها، همگرایی چگونه تغییر می‌کند. سرعت همگرایی برای توزیع‌های نرمال، یکنواخت و Cauchy را مقایسه کنید و تفاوت‌ها را تحلیل کنید.

پرسش تئوری ۱. چند پرسش نهایی در مورد مشاهدات شما:

۱. چرا قضیه قانون اعداد بزرگ برای قابلیت اطمینان روش‌های Carlo Monte ضروری است؟

۲. چگونه قضیه حد مرکزی، تفسیر و اعتماد به نتایج Monte Carlo را آسان می‌کند، حتی برای توزیع‌های غیرنرمال؟

۳. آیا روش‌های Monte Carlo می‌توانند شکست بخورند؟ چه نقشی دارند مفروضات LLN و CLT (برای مثال، واریانس محدود) در تضمین موفقیت آن‌ها؟

---

۲ مسئله منشی

۱.۲ بیان مسئله

در مسئله منشی، چالش اصلی یافتن نقطهٔ بهینه میان میزان اطلاعات دریافت‌شده و زمان مناسب برای استفاده از این اطلاعات است.

شکل استاندارد این مسئله به این صورت است: N نفر برای منشی‌گری تقاضا می‌دهند و به‌طور تصادفی مرتب شده و یکی پس از دیگری مصاحبه می‌شوند. مصاحبه‌کننده در هر لحظه اطلاعات متقاضی‌های قبلی و متقاضی فعلی را دارد و باید همان‌جا تصمیم بگیرد که فرد را انتخاب کند یا رد کند. فرد ردشده قابل‌بازگشت نیست و هدف، یافتن بهترین متقاضی است.

در ابتدای فرآیند، احتمال اینکه متقاضی‌های اولیه بهترین باشند کم است، بنابراین انتخاب در ابتدای بازی منطقی نیست. اما اگر بیش از حد متقاضی‌ها را رد کنیم، ممکن است بهترین متقاضی را از دست بدهیم. بنابراین چالش این مسئله، تعیین تعداد بهینه‌ای از افراد (r) است که باید رد شوند تا اطلاعات کافی کسب شود، بدون آنکه بهترین متقاضی از دست برود.

استراتژی بهینه این است که r متقاضی اول را رد کنیم و سپس اولین متقاضی که بهتر از افراد قبلی باشد را انتخاب کنیم. اگر تا نفر آخر کاندیدای مطلوب پیدا نشد، نفر آخر انتخاب می‌شود.

پرسش تئوری ۲. استراتژی بهینه را تحلیل کنید.

۱. احتمال انتخاب بهترین کاندید با این استراتژی را برحسب r بدست آورید.

۲. برای مقادیر بزرگ N، این احتمال را به‌صورت تابعی پیوسته از r تخمین بزنید.

۳. مقدار بهینه r را برای مقادیر بزرگ N تخمین بزنید.

۴. احتمال انتخاب بهترین کاندید با استفاده از این مکانیزم چقدر است؟

اگر پرسش‌های بالا درست پاسخ داده شوند، می‌توان اثبات کرد که در حالتی که تنها ابزار ما مقایسه متقاضی‌ها باشد و هدف انتخاب بهترین باشد، این مکانیزم بهینه است.

۲.۲ فروش بهینه

حال این مکانیزم را در یک سناریو واقعی‌تر بررسی می‌کنیم. فرض کنید شما کالایی برای فروش دارید و روزانه N خریدار به شما قیمتی پیشنهاد می‌دهند. خریدار iام به شما قیمت v_i را پیشنهاد می‌دهد. هدف شما فروش کالا به بالاترین قیمت ممکن است. در اینجا فرض می‌کنیم قیمت‌ها، $v_۱, v_۲, \dots, v_N$، از یک توزیع احتمال $\mathcal{D}$ مستقل و همسان توزیع شده هستند. نوعی مدل رفتاری برای خریدار ها.

پرسش تئوری ۳. فرض کنید $\mathcal{D} = U[a, b]$. به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. اگر تمامی پیشنهادها از قبل معلوم بودند، کالا به قیمت $\max_{۱\leq i\leq N} v_i$ فروخته می‌شد. امید ریاضی این مقدار $\mathbb{E}[\max_{۱\leq i\leq N} v_i]$ را محاسبه کنید و آن را به‌عنوان یک باند بالا در نظر بگیرید.

۲. اگر فروش به صورت تصادفی انجام می‌شد، امید بهره چقدر بود؟ این مقدار را به‌عنوان یک باند پایین در نظر بگیرید.

در حالتی که قیمت‌های v_i مقادیر عددی دارند، مقایسه پیشنهادها آسان است. بنابراین مکانیزم مشابه مسئله منشی قابل اجرا است و کالا به بهترین پیشنهاد فروخته می‌شود. مکانیزم بهینه را با $\mathcal{T}_N$ مشخص می‌کنیم که در آن $\mathcal{T}_N$ زمان توقف بهینه را تعیین می‌کند و مقدار دریافتی ما $v_{\mathcal{T}_N}$ خواهد بود.

پرسش تئوری ۴. فرض کنید $\mathcal{D} = U[a, b]$. به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. امید ریاضی بهره حاصل از مکانیزم توقف بهینه $\mathbb{E}[v_{\mathcal{T}_N}]$ را برای Nهای بزرگ محاسبه کنید.

۲. بهره حاصل از این مکانیزم را با باند بالا و پایین مقایسه کنید.

توجه کنید که در مسئله فروش کالا، بهره ما در قیمت فروش است، و اطلاعات ما میتواند فراتر از توانایی مرتب سازی باشد، مکانیزم مسئله منشی، برای هز توضیعی از پیشنهاد ها قابل اعمال است، ولی طبیعتا اگر ما به آمار پیشنهاد ها اطلاع داشته باشیم، ممکن است بتوانیم عملکرد مطلوب تری را داشتته باشیم.

پرسش شبیه‌سازی ۲. با استفاده از شبیه‌سازی Monte Carlo و توزیع $\mathcal{D} = U[۰, ۱]$، سناریو پیشین را برای مقادیر مختلف N بین ۰ تا ۱۰۰ شبیه‌سازی کنید. موارد زیر را تحلیل کنید:

۱. عملکرد مکانیزم توقف بهینه، باند بالا، و باند پایین را در عمل مقایسه کنید.

۲. نتایج شبیه‌سازی را با محاسبات تئوری مقایسه کنید.

۳ تحلیل رفتار

با داشتن اطلاعات آماری درباره توزیع پیشنهادها، می‌توان تصمیم‌گیری را بهبود داد. به عنوان مثال، می‌توان تخمین زد که به احتمال زیاد یک پیشنهاد بالاتر از یک مقدار آستانه τ در میان N متقاضی وجود دارد:

$$\mathbb{P}[\exists i : v_i \geq \tau] \geq ۱ - \epsilon$$

یک مکانیزم ساده می‌تواند این باشد که کالا به اولین پیشنهاد بالای τ فروخته شود. اگر چنین پیشنهادی تا نفر آخر نیامد، کالا به نفر آخر فروخته می‌شود.

پرسش تئوری ۵. فرض کنید $\mathcal{D} = U[a, b]$. به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. امید ریاضی بهره را برحسب τ و ϵ محاسبه کنید و نمودار آن را برای $a = ۰, b = ۱, N = ۱۰$ رسم کنید.

۲. برای $N = ۲۰$ و $\epsilon = ۰/۰۵$، مقدار τ را محاسبه کنید. امید ریاضی بهره در این حالت چقدر است؟ این مقدار را با مکانیزم‌های پیشین مقایسه کنید.

۳. رابطه‌ای برای تعیین بهترین مقدار τ در حضور N متقاضی بدست آورید.

پرسش شبیه‌سازی ۳. با استفاده از شبیه‌سازی Monte Carlo و توزیع $\mathcal{D} = U[۰, ۱]$، موارد زیر را تحلیل کنید:

۱. عملکرد مکانیزم توقف بهینه برای $\epsilon = ۰/۰۵$ و مقدار بهینه ϵ^* (که با روش‌های عددی محاسبه می‌شود) را شبیه‌سازی کنید. عملکرد این مکانیزم را با مکانیزم های پیشین مقایسه کنید.

۲. نمودار ϵ^* و مقدار متناظر τ^* را برحسب N رسم کنید. چه مفهومی را می‌توان برداشت کرد؟

در یک سناریو واقعی، ما این دانش پیشین را به رفتار محیط خود، در اینجا خریدارها، نداریم. یک مکانیزم ممکن برای پیشروی در این نوع سناریو، استفاده از یک رویکرد دو مرحله‌ای است:

۱. دوره یادگیری (مشاهده اولیه): در ابتدا برای r خریدار اول $(r \leq N)$ صبر می‌کنیم و مقادیر پیشنهاد شده $v_۱, v_۲, \ldots, v_r$ را مشاهده و ثبت می‌کنیم. این داده‌ها به ما اجازه می‌دهند که پارامترهای توزیع $\mathcal{D}$ را با استفاده از این نمونه‌ها تخمین بزنیم (مثلاً میانگین، واریانس، یا پارامترهای دیگر).

۲. دوره تصمیم‌گیری: پس از دوره یادگیری، از $t = r + ۱$ به بعد، از تخمین به‌دست‌آمده استفاده می‌کنیم تا یک قانون توقف را اعمال کنیم. به عنوان مثال، آستانه τ را تعیین می‌کنیم و اولین پیشنهادی که بالاتر از τ باشد را می‌پذیریم. اگر تا خریدار N چنین پیشنهادی نیامد، کالا به نفر آخر فروخته می‌شود.

پرسش تئوری ۶. فرض کنید $\mathcal{D} = U[a, b]$. به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. برای r خریدار اول، تخمین پارامترهای $\mathcal{D}$ را با استفاده از تخمینگر بیشینه درست نمایی محاسبه کنید.

۲. رابطه‌ای برای تعیین τ بر اساس تخمین‌های مرحله اول ارائه دهید. ابتدا برای $\epsilon = ۰/۰۵$ و سپس رابطه ای برای مقدار بهینه τ^* بدست آوردید.

پرسش شبیه‌سازی ۴. با استفاده از شبیه‌سازی Monte Carlo و توزیع $\mathcal{D} = U[۰, ۱]$، موارد زیر را تحلیل کنید:

۱. برای مقادیر مختلف r با در نظر گیری $N = ۱۰۰$، بهره حاصل از این مکانیزم را شبیه‌سازی و نمودار امید بهره مورد انتظار بر حسب r را رسم کنید.

۲. مقدار بهینه r را برای N های متفاوت را پیدا کنید و آن را رسم کنید.

این مکانیزم، با استفاده از ترکیب مشاهده و تخمین، می‌تواند به کاهش عدم قطعیت و بهبود تصمیم‌گیری در مقایسه با روش‌های ثابت کمک کند.

۴ تحلیل با توزیع نمایی و مکانیزم پیشنهادی

حال فرض کنید قیمت‌های پیشنهادی $v_1, v_2, \ldots, v_N$ از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می‌کنند:

$$\mathcal{D} = \text{Exp}(\lambda).$$

در اینجا λ یک مجهول است، برای تولید داده های خود در شبیه‌سازی ها از $\lambda = 0/1$ استفاده کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۵. مکانیزم‌های مختلف را با توزیع نمایی مقایسه کنید.

۱. مکانیزم مسئله منشی (توقف بهینه) را در این سناریو شبیه‌سازی کنید و امید بهره را بر حسب N بدست آورید.

۲. مکانیزمی که در آن ابتدا بخشی از داده‌ها مشاهده و سپس مقدار آستانه تنظیم می‌شود را بررسی کنید. امید بهره را بر اساس آستانه محاسبه کنید. فرض کنید $r = \frac{N}{2}$ باشد، میتوانید انتخاب های دیگر را نیز امتحان کنید.

۳. دو مکانیزم فوق را از نظر بهره مقایسه کنید. کدام مکانیزم عملکرد بهتری دارد؟ باند بالا و باند پایینی که در قسمت های قبل معرفی شد را نیز شبیه‌سازی و مقایسه کنید.

پرسش امتیازی: مکانیزم خود را طراحی کنید.

۱. مکانیزمی جدید برای فروش کالا پیشنهاد دهید که بر اساس تحلیل شما بتواند عملکرد بهتری داشته باشد.

۲. فرض کنید اطلاعات اضافی درباره پارامتر λ دارید. چگونه می‌توانید از این اطلاعات استفاده کنید؟

۳. مکانیزم پیشنهادی خود را با مکانیزم‌های پیشین مقایسه کنید.

۴. در حالت $N = 25$، امید ریاضی، و واریانس، پاسخ بهره خود را تخمین زده و اعلام کنید.

موفّق باشید!