



سیگنال و سیستم

تمرین کامپیوتری سری دوم

ترم بهار ۱۴۰۳-۰۴

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر خلیج

مهلت تحویل: 1404/02/15

(*) مسائلی که با ستاره مشخص شده‌اند امتیازی هستند و حل کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

۱ فیلتر گسسته

در این بخش می‌خواهیم عملکرد فیلترهای مختلف را بررسی کنیم برای این کار یک سیگنال را به عنوان سیگنال پایه در نظر گرفته و سیگنالی دیگر را ابتدا مدوله کرده و سپس با سیگنال اولیه جمع می‌کنیم سپس با استفاده از فیلترهای پایین گذر متفاوت سیگنال باند پایه را بازیابی می‌کنیم و عملکرد فیلترها را ارزیابی می‌کنیم.

۱.۱ آماده‌سازی سیگنال

۱.۱.۱ مدولاسیون

سیگنال پایه signal1 و سیگنالی که باید مدوله و با آن جمع شود signal2 میباشد. ابتدا دو سیگنال را لود کنید و با ضرب سیگنال ۲ در $(-1)^n$ آن را به فرکانس‌های بالاتر ببرید و توضیح دهید چرا این عمل ضرب باعث شیف‌ت فرکانسی میشود.

۲.۱.۱ جمع دو سیگنال

حال دو سیگنال را باهم جمع کنید .

۲.۱ اعمال فیلترها

حال فیلترهای زیر را پیاده سازی کنید و سیگنال مجموع را با استفاده از آنها فیلتر کنید.

۱.۲.۱ فیلتر میانگین‌گیر

$$y[n] = \frac{1}{\gamma} (x[n] + x[n - 1])$$

۲.۲.۱ فیلتر پاسخ محدود FIR

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c(n-\gamma)}{\pi}\right) & 0 \leq n < \gamma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۳.۲.۱ ۲ فیلتر پاسخ محدود FIR

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c(n)}{\pi}\right) & 0 \leq n < 7 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴.۲.۱ فیلتر IIR

فیلتر زیر را به دو صورت پیاده سازی کنید.

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1})^2}$$

یکبار با استفاده از معادله تفاضلی و فرض مقدار اولیه برای خروجی و یکبار با استفاده از کانولوشن. در استفاده از کانولوشن پاسخ ضربه را با چند جمله ابتدایی آن تقریب بزنید ۲۰ جمله کافیست.

۵.۲.۱ استفاده از fft

حال از یک فیلتر ایده آل در حوزه فرکانس استفاده کنید یعنی از سیگنال fft بگیرید و سپس فرکانس های مربوط به ویس فرکانس بالا را به طور کامل صفر کنید و بعد تبدیل وارون بگیرید

۳.۱ نتایج

توجه کنید سیگنال نهایی ممکن است از نظر توان با سیگنال ۱ تفاوت داشته باشد یعنی برای مقایسه آن با سیگنال ۱ باید تغییر دامنه و توان را لحاظ کنیم تا در معیارهایی مثل MSE دچار خطا نشویم. حال با معیار MSE و اعمال نرمالیزیشن مناسب خروجی فیلترهای مختلف را از نظر کیفیت مقایسه کنید همچنین پیچیدگی محاسباتی روش های مختلف را باهم مقایسه کنید.

۴.۱ کانولوشن بلوکی برای محاسبات real time

همانطور که میدانید در صورتی که پاسخ ضربه طولانی باشد عمل کانولوشن بسیار زمان بر و پر محاسبه است و اگر بخواهیم از fft استفاده کنیم باید کل سیگنال را در اختیار داشته باشیم که در محاسبات همزمان ممکن نیست برای همین از روش کانولوشن بلوکی استفاده میکنیم که در آن قسمت هایی با طول مشخص از سیگنال ورودی را با پاسخ ضربه و با استفاده از fft کانوالو میکنیم تا هم سرعت مناسبی داشته باشیم و هم تاخیر زیادی نداشته باشیم. حال فیلتر IIR بخش قبل را با این روش پیاده سازی کنید. و پیچیدگی محاسبات را با روش قبلی مقایسه کنید.

۵.۱ شرح الگوریتم Overlap-Add

طول سیگنال ورودی L طول فیلتر M سائز بلوک N

۱.۵.۱ آماده سازی اولیه

- محاسبه طول بلوک پردازش:

$$L_{\text{block}} = N + M - 1$$

- صفرگذاری فیلتر:

$$h_{\text{pad}} = [h[0], h[1], \dots, h[M-1], \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1-\text{صفر}}]$$

- محاسبه تبدیل فوریه فیلتر:

$$H[k] = \text{FFT}(h_{\text{pad}})$$

- مقداردهی اولیه سیگنال خروجی:

$$y[n] = \text{طول بردار صفر به } L + M - 1$$

۲۰.۵.۱ حلقه پردازش بلوک‌ها

برای هر بلوک r از $\lceil L/N \rceil$ بلوک:

۱. استخراج بلوک جاری:

$$x_r = x[rN : (r+1)N - 1]$$

۲. صفرگذاری بلوک:

$$x_{r,\text{pad}} = [x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-1-\text{صفر}}]$$

۳. محاسبه تبدیل فوریه:

$$X_r[k] = \text{FFT}(x_{r,\text{pad}})$$

۴. ضرب در حوزه فرکانس:

$$Y_r[k] = X_r[k] \cdot H[k]$$

۵. تبدیل فوریه معکوس:

$$y_r[n] = \text{IFFT}(Y_r[k])$$

۶. جمع همپوشانی:

$$y[rN : rN + L_{\text{block}} - 1] = y[rN : rN + L_{\text{block}} - 1] + y_r[n]$$

۲ تخمین سیستم با نویز

میدانیم چگالی توان نویز سفید در حوزه فرکانس مقداری ثابت است و نویز سفید در تمام فرکان ها نولفه دارد از این موضوع میتوان برای شناسایی سیستم ها استفاده کرد. در این بخش میخواهیم با استفاده از پاسخ یک سیستم مرتبه ۱ به ورودی نویز سفید در حوزه فرکانس سیستم را تخمین بزنیم.

۱.۲ سیستم

سیستم مرتبه اول با معادله تفاضلی زیر داده شده است:

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

که در آن:

- α : پارامتر مجهول سیستم
- $x[n]$: سیگنال ورودی (نویز سفید گاوسی)
- $y[n]$: سیگنال خروجی مشاهده شده

۲.۲ روش تخمین α با استفاده از طیف توان

۱.۲.۲ مبانی نظری

برای یک سیستم مرتبه اول، تابع انتقال در حوزه Z برابر است با:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

طیف توان خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_y(\omega) = P_x(\omega) |H(e^{j\omega})|^2$$

۲.۲.۲ مراحل تخمین

۱. تولید سیگنال ورودی:

$$x[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (\text{نویز سفید گاوسی})$$

۲. محاسبه طیف توان تجربی خروجی:

$$\hat{P}_y(\omega) = \frac{1}{K} \left| \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\omega n} \right|^2$$

۳. تخمین α با کمینه کردن خطای مربعات:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \sum_{\omega} \left(\hat{P}_y(\omega) - \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-j\omega}|^2} \right)^2$$

۳.۲ تخمین

حال تابعی بنویسید که پاسخ سیستم را به نویز سفید با واریانس ۱ را به عنوان ورودی دریافت میکند و مقدار a را تخمین میزند.

۴.۲ تست

حال برای $a = 0.5, 0.1$ تابع خود را تست کنید.

۳ جنگ لاپلاس و زد

۱.۳ الف) خودنمایی زد

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.05z^{-3}}$$

۱.۱.۳ تجزیه به کسرهای جزئی

با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی، پاسخ ضربه سیستم را محاسبه کنید. (با دستور residue یا residuez) پاسخ ضربه سیستم را در حوزه زمان ترسیم کرده و مقدار هر یک از قطبها را بیان کنید.

۲.۱.۳ پایداری سیستم

- موقعیت قطبها و صفرهای سیستم را در Z-plane رسم کنید.
- پایداری سیستم را بر اساس موقعیت قطبها بررسی کنید. آیا سیستم پایدار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۳.۱.۳ اثر تغییرات پارامترها

- اثر تغییر مقادیر پارامترهای تابع تبدیل را بر پاسخ ضربه و پایداری سیستم بررسی کنید.
- برای هر پارامتر، مقادیر مختلفی را امتحان کنید و تأثیر آن را بر موقعیت قطبها و صفرها و همچنین پایداری سیستم بررسی کنید.

۴.۱.۳ تحلیل رفتار سیستم در فرکانسهای مختلف

- پاسخ فرکانسی سیستم را برای فرکانسهای مختلف با استفاده از تبدیل Z محاسبه کنید.
- از دستور freqz در متلب برای محاسبه و رسم پاسخ فرکانسی سیستم استفاده کنید.
- رفتار سیستم را در فرکانسهای پایین، میانه و بالا مقایسه کنید. چه تغییراتی در تقویت یا افت سیگنالها مشاهده می کنید؟

۵.۱.۳ بازسازی سیستم از قطب‌ها و صفرها

- پس از یافتن قطب‌ها و صفرها، سیستم را از ابتدا (با استفاده از همان قطب‌ها و صفرها) بازسازی کنید.
- سیستم بازسازی شده را با سیستم اولیه مقایسه کنید. آیا پاسخ ضربه‌ها یکسان است؟

۲.۳ ب) خودنمایی لاپلاس

در این تمرین چند سیستم خطی را در محیط شبیه‌سازی تحلیل کرده و پاسخ‌های آن‌ها را برای ورودی‌های مختلف بررسی خواهیم نمود. سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$H_1(s) = \frac{3s + 4}{s^2 + 5s + 6}$$

$$H_2(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 9}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

۱.۲.۳ تعریف سیستم‌ها در متلب

هر سیستم را به صورت تابع تبدیل زیر در متلب تعریف کنید. برای این کار از دستور tf استفاده کنید.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

۲.۲.۳ محاسبه و ترسیم پاسخ سیستم‌ها

برای هر سیستم پاسخ به ورودی‌های مختلف زیر را محاسبه کرده و ترسیم کنید:

- ورودی پله واحد $u(t)$
- ورودی نمایی e^{-t}
- ورودی ضربه $\delta(t)$
- ورودی سینوسی $\sin(2\pi t)$

۳.۲.۳ تحلیل رفتار سیستم‌ها

تحلیل پایداری سیستم‌ها

- با استفاده از دستور pole، موقعیت قطب‌ها را پیدا کنید.
- بررسی کنید که آیا سیستم پایدار است یا خیر.

مقایسه پاسخ‌ها

- پاسخ‌های سیستم‌ها را برای ورودی‌های مختلف مقایسه کنید.
- تحلیل کنید که کدام سیستم سریع‌تر به حالت پایدار می‌رسد.

نمودارهای پاسخ فرکانسی

- از دستور bode برای رسم نمودار بود استفاده کنید.
- رفتار سیستم‌ها را در فرکانس‌های مختلف بررسی کنید.

شبیه‌سازی ورودی‌های ترکیبی

- برای هر سیستم ورودی ترکیبی مانند مجموع پله، نمایی و سینوسی وارد کنید.
- پاسخ سیستم‌ها را تحلیل کنید.

۴.۲.۳ تأثیر تغییر پارامترها

- یکی از پارامترهای سیستم‌ها را تغییر دهید (مثلاً ضرایب معادله).
- تأثیر آن را بر روی پاسخ سیستم‌ها بررسی کنید.

۴ یه کوچولو صفحه کلید

۱.۴ مکانیزم کار

در مخابرات معمولاً دو فرکانس مشخص ترکیب می‌شوند تا هر رقم مشخص شود. این فرکانس‌ها نمایانگر ردیف و ستون از صفحه کلید هستند. زمانی که یک کلید خاص از صفحه کلید تلفن فشار داده می‌شود، سیگنالی متشکل از جمع دو موج سینوسی تولید می‌شود:

$$k_r(t) = \cos(2\pi \cdot 1336 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 697 \cdot t)$$

۲.۴ جدول فرکانس‌های DTMF

Freq.	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

شکل ۱: جدول فرکانس‌های DTMF

۱.۲.۴ سیگنال تولیدی

برای مثال هنگامی که کلید شماره ۲ فشار داده می‌شود، سیگنال زیر تولید خواهد شد:

$$k_r(t) = \cos(2\pi \cdot 1336 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 697 \cdot t)$$

۳.۴ پیاده‌سازی و تحلیل

۱.۳.۴ تولید سیگنال

با فرض اینکه:

- طول فشرده شدن هر کلید: ۱۰۰۰ نمونه
- فاصله بین فشردن کلیدها: ۱۰۰۰ نمونه

سیگنال حاصل از شماره‌گیری شماره دانشجویی را در فایل StudentID.wav ذخیره کنید. برای شماره فرضی ۱۳۳۴:

$$S = [d_1 \text{ space } d_2 \text{ space } d_3 \text{ space } d_4]$$

۲.۳.۴ تحلیل فرکانسی

۱. با استفاده از تابع `fft`، سیگنال‌های d تا d_4 را در حوزه فرکانس تحلیل کنید.
۲. نمودارها را با محور فرکانس بر حسب هرتز و حول صفر رسم کنید.
۳. نتایج را با انتظارات تئوریک مقایسه کنید.

۴.۴ تشخیص شماره

۱.۴.۴ تشخیص سیگنال‌های استاندارد

تابعی بنویسید که فایل‌های صوتی dialing1.wav، dialing2.wav و dialing3.wav را خوانده و شماره‌های گرفته شده را تشخیص دهد. فرضیات:

- هر رقم: ۱۰۰۰ نمونه
- فاصله بین ارقام: ۱۰۰۰ نمونه

۲.۴.۴ نمایش گرافیکی

با استفاده از تصاویر موجود در فولدر Numbers، تابع را توسعه دهید تا خروجی را به صورت گرافیکی نمایش دهد. مثال:



شکل ۲: نمونه‌ی خروجی به شماره‌ی ۹۶۷۸۴۵

۵.۴ بخش پیشرفته (امتیازی)

۱.۵.۴ تشخیص سیگنال‌های واقعی

تابعی بنویسید که بتواند شماره‌گیری‌های واقعی را از فایل‌های realDialing1.wav، realDialing2.wav و realDialing3.wav تشخیص دهد. تفاوت‌ها:

- زمان فشرده شدن کلیدها متغیر است
- فاصله بین ارقام ثابت نیست (کمتر از ۱۰۰۰ نمونه)