

基于间接法的最优小推力逃逸轨道设计

黄镐 韩潮

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

摘要 目前, 小推力逃逸轨道优化的大部分研究限于平面内逃逸或对发动机模型做无约束简化处理。通过在性能指标中引入一个待定参数, 采用间接法将系统两点边值问题的待定参数约束在多维单位球里; 同时结合同伦思想和曲线拟合技术, 由短时间无约束平面内燃料最优逃逸问题开始, 逐步求解长时间有约束平面外燃料最优逃逸问题。数值仿真结果表明该方法收敛性好, 能求解复杂逃逸问题, 是一种高效的逃逸轨道设计方法。

关键词 小推力 逃逸轨道 燃料最优 星际探测

DOI: 10.3780/j.issn.1000-758X.2013.02.005

1 引言

在小推力星际探测任务中, 逃逸捕获阶段因其多圈螺旋轨道的特性而在整个任务过程中最为复杂。目前, 基于小推力的轨道优化设计方法可归结为直接法和间接法。直接法采用离散配点法将最优控制问题转化成高维非线性参数规划问题, 鲁棒性较好, 对于单圈或圈数较少的轨道转移问题比较适用; 但对于多圈 (大于 50 圈) 螺旋逃逸轨道设计, 采用直接法将形成庞大的非线性参数规划问题, 导致求解难度非常大^[1]。间接法利用庞特里亚金极值原理将最优控制问题转化成两点边值问题, 未知协状态量维数较少, 而且求解的精度高, 但两点边值问题对协状态量初值非常敏感, 对于多圈长时间逃逸问题, 该问题尤甚, 要得到收敛解需要提供非常好的初值猜测, 然而协状态变量没有实际物理意义, 初值很难猜测, 甚至其量级都无法界定, 由此给间接法的应用带来了不小困难。目前, 国内外已有一些利用间接法进行逃逸螺旋轨迹优化的研究^[2-5], 也有一些研究在求解整个星际探测任务中考虑了逃逸阶段^[5-6]。这些研究中, 普遍采用了一种协状态控制转换技术 (ACT)^[3]来降低两点边值问题初值的敏感性, 且大部分都只研究了控制无约束的平面内逃逸问题, 或者采用逃逸时间^[2]或逃逸能量^[5]作为优化性能指标。

本文采用间接法^[7]求解小推力燃料最优逃逸问题, 通过引入一个待定参数, 求解了复杂的长时间控制有约束的三维燃料最优逃逸问题。

2 地心球惯性坐标系下轨道动力学方程

在地心惯性系中的位置、速度矢量用 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 表示; \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 分别表示地心直角惯性系中 x , y , z 方向上的单位矢量; \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_ϕ 分别为地心球惯坐标系各正交轴单位矢量, 如图 1 所示。

地心球惯性坐标系下航天器轨道动力学系统状态量为 $\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi]^T$, 动力学方程为

收稿日期: 2012-05-28。收修改稿日期: 2012-10-25

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_r \\ \dot{v}_\theta \\ \dot{v}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta/(r\cos\phi) \\ v_\phi/r \\ (v_\theta^2 + v_\phi^2)/r - \mu/r^2 + au_r \\ v_\theta(v_\phi\tan\phi - v_r)/r + au_\theta \\ -(v_r v_\phi + v_\theta^2\tan\phi)/r + au_\phi \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}\mathbf{u} \quad (1)$$

式中 r 和 a 分别为位置和推力加速度幅值; μ 为地球引力常数; \mathbf{u} 为推力方向矢量, 可由角 α 和角 β 来描述。

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}$$

对于变比冲小推力发动机模型, 航天器加速度模型可表示为

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a}\mathbf{u} = \frac{2\epsilon P}{m_0 m I_{spmax} I_{sp} g_n} \mathbf{u}$$

式中 \mathbf{F} 和 \mathbf{a} 分别表示航天器推力和推力加速度矢量; ϵ 为发动机效率; P 为固定的发动机功率; g_n 为标称重力加速度; m_0 和 I_{spmax} 分别表示航天器初始质量和发动机最大比冲; m 和 I_{sp} 则为对应的归一化处理后的系数, $m \in [(m_0 - m_{fuel})/m_0, 1]$, $I_{sp} \in [I_{spmin}/I_{spmax}, 1]$; m_{fuel} 为航天器燃料总质量; I_{spmin} 为变比冲发动机能提供的最小比冲。质量导数方程为

$$\dot{m} = -\frac{2\epsilon P}{m_0 I_{spmax}^2 I_{sp}^2 g_n^2} \quad (2)$$

3 燃料最优控制问题

对于变比冲发动机燃料最优逃逸问题, 可描述为在初始轨道给定的情况下, 在固定时间通过控制发动机比冲 I_{sp} 的大小以及推力矢量方向, 使得航天器轨道能量在达到逃逸能量的同时, 所消耗的燃料最少。对应的性能指标和初始条件的数学描述为

$$\min J = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_f} \frac{2\epsilon P}{m_0 I_{spmax}^2 I_{sp}^2 g_n^2} dt, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad m(t_0) = m_0$$

式中 t_0 和 t_f 分别为逃逸始末时刻; λ_0 为引入性能指标函数中大于零的待定参数, 若 $\lambda_0 = 1$ 即为原问题; 若 $\lambda_0 \neq 1$, 只要 $\lambda_0 > 0$, 就不会改变系统燃料最优的本质。下标 0、f 分别表示初始时刻和终点时刻对应的参量。

由庞特里亚金极小值原理^[8], 推导系统 Hamilton 函数及最优控制为

$$H = \lambda_0 \frac{2\epsilon P}{m_0 I_{spmax}^2 I_{sp}^2 g_n^2} + \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_v^T \frac{2\epsilon P}{m_0 m I_{spmax} I_{sp} g_n} \mathbf{u} - \lambda_m \frac{2\epsilon P}{m_0 I_{spmax}^2 I_{sp}^2 g_n^2}$$

式中 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_{v_r}, \lambda_{v_\theta}, \lambda_{v_\phi}]^T$ 为与状态量 \mathbf{x} 相对应的协状态量向量; $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{v_r}, \lambda_{v_\theta}, \lambda_{v_\phi}]^T$ 为与速度 \mathbf{v} 对应的协状态量向量; λ_m 为与 m 对应的协状态量。

由 $\partial H / \partial \mathbf{u} = 0$, 推导系统最优控制方向矢量为

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{\lambda}_v^T / \|\boldsymbol{\lambda}_v\| \quad (3)$$

将公式(3)代入 Hamilton 函数得:

$$H = -(-\lambda_0 + \lambda_m) \frac{2\epsilon P}{m_0 I_{spmax}^2 I_{sp}^2 g_n^2} - \frac{2\epsilon P \|\boldsymbol{\lambda}_v\|}{m_0 m I_{spmax} I_{sp} g_n} + \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x})$$

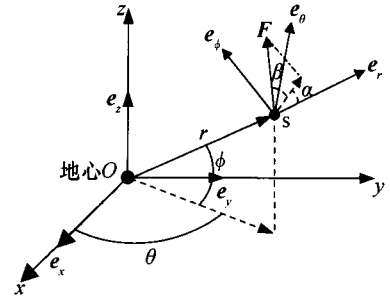


图1 直角坐标系与球坐标系之间关系
Fig. 1 Relation between cartesian and spherical system

进一步推导最优 I_{sp} 控制为

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_0 + \lambda_m > 0 &\Rightarrow \frac{1}{I_{sp}} = \frac{I_{spmax}}{I_{spmin}} \\ -\lambda_0 + \lambda_m < 0 &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -\frac{\|\lambda_v\| I_{spmax} g_n}{2(-\lambda_0 + \lambda_m)m} < 1 &\Rightarrow \frac{1}{I_{sp}} = 1 \\ -\frac{\|\lambda_v\| I_{spmax} g_n}{2(-\lambda_0 + \lambda_m)m} > \frac{I_{spmax}}{I_{spmin}} &\Rightarrow \frac{1}{I_{sp}} = \frac{I_{spmax}}{I_{spmin}} \\ \frac{I_{spmax}}{I_{spmin}} > -\frac{\|\lambda_v\| I_{spmax} g_n}{2(-\lambda_0 + \lambda_m)m} > 1 &\Rightarrow \frac{1}{I_{sp}} = -\frac{\|\lambda_v\| I_{spmax} g_n}{2(-\lambda_0 + \lambda_m)m} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

系统协状态方程为

$$\dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_\theta v_\theta + \lambda_\phi v_\phi \cos \phi}{r^2 \cos \phi} + \lambda_{vr} \left[\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} \right] + \frac{\lambda_{v\theta} v_\theta (v_\phi \tan \phi - v_r)}{r^2} - \frac{\lambda_{v\phi} (v_r v_\phi + v_\theta^2 \tan \phi)}{r^2} \\ 0 \\ \frac{(\lambda_{v\phi} v_\phi^2 - \lambda_{v\theta} v_\theta v_\phi) \sec^2 \phi}{r} - \frac{\lambda_\theta v_\theta \tan \phi}{r \cos \phi} \\ -\lambda_r + \frac{\lambda_{v\theta} v_\theta + \lambda_{v\phi} v_\phi}{r} \\ [\lambda_{v\theta} (v_r - v_\phi \tan \phi) + 2\lambda_{v\phi} v_\theta \tan \phi - \lambda_\theta / \cos \phi - 2\lambda_{vr} v_\theta] / r \\ (\lambda_{v\phi} v_r - \lambda_\phi - 2\lambda_{vr} v_\phi - \lambda_{v\theta} v_\theta \tan \phi) / r \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\frac{2\epsilon p \|\lambda_v\|}{m_0 m^2 I_{spmax} I_{sp} g_n} \quad (6)$$

燃料最优逃逸问题的终端约束为终点时刻 t_f 时的轨道能量 ϵ_f 达到抛物线逃逸轨道能量值 ϵ_{tar} 。

$$\epsilon_f = v_f^2 / 2 - \mu / r_f = \epsilon_{tar}$$

抛物线逃逸轨道的能量 $\epsilon_{tar} \equiv 0$ 。由文献 [8] 得到系统增广约束为

$$G = v \left(\frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu}{r_f} - \epsilon_{tar} \right)$$

式中 v 为引入的增广系数。对应的系统横截条件为

$$\lambda_f = \frac{\partial G}{\partial x_f} = [v\mu/r_f^2, 0, 0, v v_{rf}, v v_{\theta f}, v v_{\phi f}]^T \quad (7)$$

$$\lambda_{mf} = \frac{\partial G}{\partial m_f} = 0 \quad (8)$$

对于燃料最优逃逸问题, 由公式(5)、(7)可知 $\dot{\lambda}_\theta = 0$, 且 $\lambda_{\theta f} = 0$, 所以 $\lambda_\theta \equiv 0$ 。公式 (1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8) 共同构成两点边值问题。若 $\lambda_0 = 1$, 即为原问题, 则由系统 Hamilton 函数推导出的两点边值问题待定参数向量为 $[\lambda_{r0}, \lambda_{\phi0}, \lambda_{vr0}, \lambda_{v\theta0}, \lambda_{v\phi0}, \lambda_{m0}, v]$, 由于这些变量的取值范围没有任何先验的初始判断, 所以对于其初值的猜测难度非常大; 若在性能指标函数中引入的正数 λ_0 为待定参量, 则系统待定参数向量为 $[\lambda_0, \lambda_{r0}, \lambda_{\phi0}, \lambda_{vr0}, \lambda_{v\theta0}, \lambda_{v\phi0}, \lambda_{m0}, v]$, 虽然比原问题维数增加了一维, 但却在不改变原优化问题的前提下使得系统 Hamilton 函数中各加减项同质^[7], 若将系统 Hamilton 函数除以大于零的比例系数 K , 将在不改变 Hamilton 函数的极值属性前提下得到新系统 Hamilton 函数, 定义 K 为待确定参数向量的模值, 即

$$K = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_{r0}^2 + \lambda_{\phi0}^2 + \lambda_{vr0}^2 + \lambda_{v\theta0}^2 + \lambda_{v\phi0}^2 + \lambda_{m0}^2 + v^2}$$

则由新系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题的解向量 $[\lambda_0^*, \lambda_{r0}^*, \lambda_{\phi 0}^*, \lambda_{vr0}^*, \lambda_{v\theta 0}^*, \lambda_{v\phi 0}^*, \lambda_{m0}^*, v^*]$ 便为原系统待确定参数向量除以比例系数 K , 即为原系统待确定参数向量的单位化:

$$[\lambda_0^*, \lambda_{r0}^*, \lambda_{\phi 0}^*, \lambda_{vr0}^*, \lambda_{v\theta 0}^*, \lambda_{v\phi 0}^*, \lambda_{m0}^*, v^*] = [\lambda_0, \lambda_{r0}, \lambda_{\phi 0}, \lambda_{vr0}, \lambda_{v\theta 0}, \lambda_{v\phi 0}, \lambda_{m0}, v]/K$$

由此可知新系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题的待定参数向量将被约束在一个多维的单位球里。相对于原系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题, 待定参数向量取值范围无任何先验判断, 而由引入未知变量 λ_0 和比例系数 K 构成的新系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题, 每个待确定参数的初值猜测范围将被约束在区间 $[-1, 1]$ 中, 由此将大大提高两点边值问题的初值猜测效率, 进而提高问题的收敛性。在求解出由新系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题待定参数向量之后, 通过除以 λ_0^* , 即 $[\lambda_0^*, \lambda_{r0}^*, \lambda_{\phi 0}^*, \lambda_{vr0}^*, \lambda_{v\theta 0}^*, \lambda_{v\phi 0}^*, \lambda_{m0}^*, v^*]/\lambda_0^*$, 将得到原问题系统 Hamilton 推导的两点边值问题的解向量。

对于由新系统 Hamilton 函数推导的两点边值问题共有 8 个待确定变量, 对应的约束条件也为 8 个:

$$c = \begin{bmatrix} \epsilon_f - \epsilon_{tar} \\ \lambda_{rf}^* - v^* \mu / r_f^2 \\ \lambda_{\phi f}^* \\ \lambda_{vrf}^* - v^* v_{rf} \\ \lambda_{v\theta f}^* - v^* v_{\theta f} \\ \lambda_{v\phi f}^* - v^* v_{\phi f} \\ \lambda_{mf}^* \\ \lambda_0^{*2} + \lambda_{r0}^{*2} + \lambda_{\phi 0}^{*2} + \lambda_{vr0}^{*2} + \lambda_{v\theta 0}^{*2} + \lambda_{v\phi 0}^{*2} + \lambda_{m0}^{*2} + v^{*2} - 1 \end{bmatrix} = 0$$

式中 $\lambda_{rf}^*, \lambda_{\phi f}^*, \lambda_{vrf}^*, \lambda_{v\theta f}^*, \lambda_{v\phi f}^*, \lambda_{mf}^*$ 为以 $\lambda_{r0}^*, \lambda_{\phi 0}^*, \lambda_{vr0}^*, \lambda_{v\theta 0}^*, \lambda_{v\phi 0}^*, \lambda_{m0}^*$ 为初值, 对公式(5)和公式(6)进行积分, 得到的 t_f 时刻的协状态量。如果是平面内的逃逸问题, 新系统两点边值问题的设计变量和对应的约束将减少为 6 个。

在通过打靶法求解上述待定参数后, 对公式(1)、(2)、(5)、(6)积分可求得各时刻轨道状态量和协状态, 由公式(3)和公式(4)可求得发动机推力矢量和最优 I_{sp} 控制。

4 仿真算例

设地球逃逸的初始停泊轨道为半径为 7 500 km 的赤道平面内圆轨道, 由于设计参数与 θ 无关, 可以假设初始轨道的真近点角为 0° , 航天器总质量为 100 000 kg, 发动机固定功率为 5 MW, 效率为 1。

4.1 平面内控制有约束长时间燃料最优地球逃逸

直接采用间接法求解平面内控制有约束长时间燃料最优地球逃逸非常困难, 为此, 将问题分解为两步: 首先由短时间控制无约束最优逃逸逐步求解长时间控制无约束最优逃逸; 其次由长时间控制无约束最优逃逸逐步求解长时间控制有约束最优逃逸。

以 30 天 $I_{sp} \in [3600 \text{ m/s}, 6600 \text{ m/s}]$ 区间的燃料最优逃逸问题为例, 先以 0.05 天为间隔, 分别求解出 0.1~5 天的燃料最优逃逸的收敛解; 采用数值曲线拟合技术对 0.1~5 天的收敛解进行拟合, 用于外推猜测 5~10 天的未知参量初值, 进而求解 5~10 天燃料最优逃逸的收敛解; 有了 10 天的收敛解, 拟合形成 10~30 天的初值猜测; 当采用该拟合曲线给出的初值不能收敛的时候,

则利用该发散时刻以前的所有已收敛结果,重新拟合出新的曲线,重新计算该点初值,然后重新打靶计算。在仿真试验过程中,通过求解最初 1~5 天燃料最优逃逸问题发现,协状态量 λ_{vr0} 变化较大,规律不明显,曲线拟合难度较大。为此,借鉴文献[3]的方法,令 $b_0^2=\lambda_{vr0}^2+\lambda_{v\theta0}^2$,在协状态量 λ_{vr0} 随逃逸时间 t_f 变化规律性出现之前,采用拟合 b_0 和 $\lambda_{v\theta0}$,然后计算 λ_{vr0} 的初值猜测。

根据 0.1~30 天的仿真试验数据,结合曲线拟合技术,得出在采用如下曲线拟合公式时,能最好地拟合出各待定参数随逃逸时间 t_f 的变化关系

$$f(t_f)=\frac{p_1t_f+p_2}{t_f^2+q_1t_f+q_2}$$

(9)

式中 p_1, p_2, q_1, q_2 为相应的拟合系数。各待定参数的拟合系数如表 1 所示,各待定参数对应的拟合曲线与其收敛解之间的关系如图 2、图 3 所示。图 2、3 中“◇”为各待定参数的收敛解,实线为各待定参数的拟合曲线。可以看出,采用曲线拟合公式(9)和表 1 中的参数,对各待定参数拟合效果非常好。

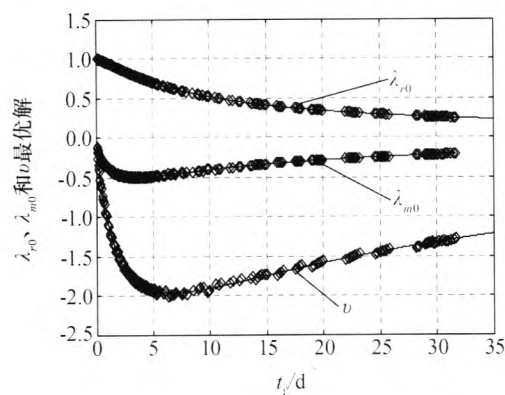


图 2 λ_{r0} 、 λ_{m0} 和 v 最优解与逃逸时间关系
Fig.2 Optimal solution and escape time of λ_{r0} , λ_{m0} and v

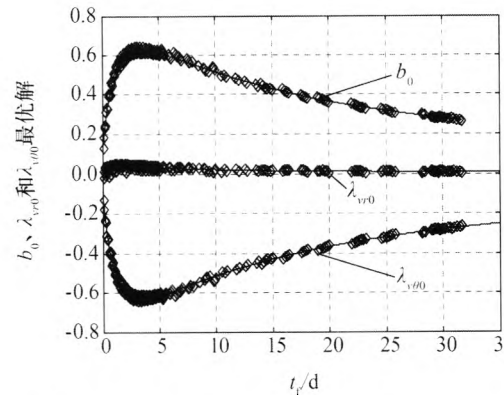


图 3 b_0 、 λ_{vr0} 和 $\lambda_{v\theta0}$ 最优解与逃逸时间关系
Fig.3 Optimal solution and escape time of b_0 , λ_{vr0} and $\lambda_{v\theta0}$

表 1 平面内 I_{sp} 无约束地球逃逸初值猜测拟合曲线系数 ($a=7\,500\text{ km}$, $e=0$)

Tab.1 Estimation coefficients for earth escape without I_{sp} constraints ($a=7\,500\text{ km}$, $e=0$)

系数	p_1	p_2	q_1	q_2	和方差	均方根
b_0	11.850 0	1.320 000	11.800	14.690	0.024 610 0	0.992 8
λ_{r0}	-9.120 0	-0.948 800	11.030	14.570	0.004 759 0	0.997 9
λ_{vr0}	0.284 6	0.005 226	2.968	4.452	0.016 410 0	0.609 9
$\lambda_{v\theta0}$	-11.850 0	-1.309 000	11.820	14.730	0.023 510 0	0.993 0
λ_{m0}	9.858 0	7.851 000	9.825	7.882	0.000 174 8	1.000 0
v	-73.400 0	-2.138 000	23.970	46.190	0.090 140 0	0.996 8

采用拟合公式(9)和表 1 中的系数,拟合得到 t_f 为 30 天燃料最优逃逸问题各待定参数的初值猜测,迭代打靶求解平面内 30 天 I_{sp} 无约束燃料最优逃逸问题。在得到平面内 30 天 I_{sp} 无约束燃料最优逃逸问题收敛解的基础上,以此为初值,利用同伦思想逐步将 I_{sp} 控制约束从[3 000 m/s, 10 000 m/s]区间调整为实际的[3 600 m/s, 5 400 m/s]区间,最终求得 I_{sp} 属于[3 600 m/s, 5 400 m/s]区间的有约束平面内逃逸问题的收敛解。结果表面,航天器在 30 天中绕地球飞行 118 圈后达到地球逃逸速度,整个过程共消耗燃料 13 634 kg,占总质量的 13.6%。 I_{sp} 无约束、 $I_{sp} \in [3\,600\text{ m/s}, 6\,600\text{ m/s}]$ 和 $I_{sp} \in [3\,600\text{ m/s}, 5\,400\text{ m/s}]$ 的 30 天燃料最优平面内逃逸轨道如图 4 所示,相应的 I_{sp} 随

转移时间变化的曲线如图5所示。由图4可以看出, I_{sp} 控制从无约束到最终约束在 $[3\,600\text{ m/s}, 5\,400\text{ m/s}]$ 区间的过程中, 逃逸圈数没有变, 依然为118圈, 只是逃逸轨迹上有些微小的变化; 图5则清晰地反映了 I_{sp} 控制由无约束到约束逐步变严, 到最终约束在 $[3\,600\text{ m/s}, 5\,400\text{ m/s}]$ 区间的过程。

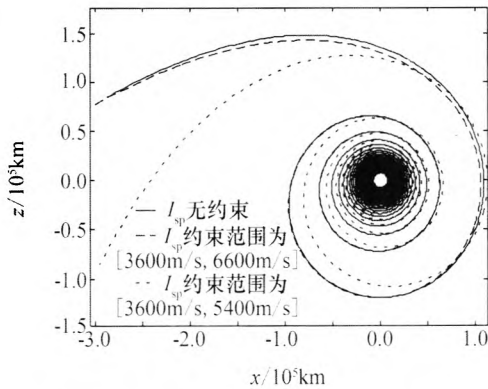


图4 平面内30天燃料最优地球逃逸轨迹
Fig. 4 Fuel optimal earth escape trajectory for 30days in planar

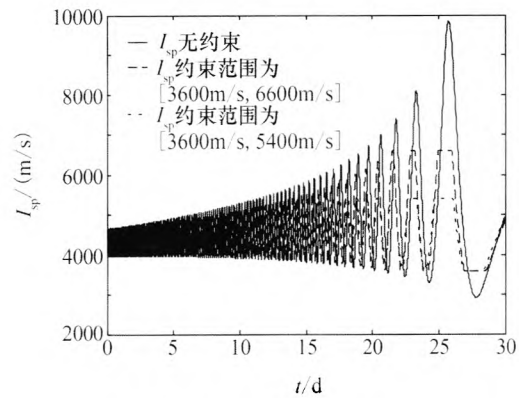


图5 I_{sp} 随时间变化曲线
Fig. 5 Relations between I_{sp} and transfer time

4.2 三维控制有约束长时间燃料最优地球逃逸

对于三维逃逸问题, 在逃逸点加上轨道倾角约束, 假定航天器相对于地球以特定的轨道倾角逃逸。轨道倾角在球坐标系中可表示为

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -rv_\phi \\ rv_\theta \end{bmatrix}, \quad \cos i = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_z}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{v_\theta \cos \phi}{\sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}}$$

式中 \mathbf{h} 为航天器的角动量; i 为轨道倾角。在逃逸点加上倾角约束之后, 燃料最优逃逸问题的增广约束方程为

$$G = v \left(\frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu}{r_i} - \varepsilon_{tar} \right) + \gamma \left(\cos i_{tar} - \frac{v_{\theta i} \cos \phi_i}{\sqrt{v_{\theta i}^2 + v_{\phi i}^2}} \right)$$

式中 γ 为由加入倾角约束而引入的待确定增广系数; i_{tar} 为三维逃逸问题的目标倾角要求。

利用 I_{sp} 无约束平面内燃料最优逃逸问题的解作为初值猜测, 可逐步求得 I_{sp} 无约束三维燃料最优逃逸问题的解; 有了 I_{sp} 无约束三维燃料最优逃逸问题的解, 逐步加入 I_{sp} 控制约束, 进而最终求解 I_{sp} 有约束三维燃料最优逃逸问题。仿真同样以半长轴为 $7\,500\text{ km}$ 的地球赤道圆轨道为初始停泊轨道, 假定要求30天后达到逃逸能量, I_{sp} 约束范围为 $[2\,700\text{ m/s}, 6\,500\text{ m/s}]$, 且逃逸点轨道倾角为 30° 。以 I_{sp} 无约束平面内30天燃料最优逃逸的最优解为初值, 将终端轨道倾角约束由 3° 开始, 逐步加大到最终设计的逃逸倾角, 即 30° , 上一步得到的最优解作为下一步计算的初值猜测, 最终求解 I_{sp} 无约束、末端 30° 倾角的燃料最优逃逸问题。在得到 I_{sp} 无约束 30° 燃料最优逃逸收敛解之后, 以此为初值, 逐步加严 I_{sp} 控制约束, 同样利用上一步得到的最优解作为下一步计算的初值猜测, 最终求得 $I_{sp} \in [2\,700\text{ m/s}, 6\,500\text{ m/s}]$ 的 30° 燃料最优逃逸轨道。图6给出了逃逸倾角为 30° 、 I_{sp} 约束范围为 $[2\,700\text{ m/s}, 6\,500\text{ m/s}]$ 的30天燃料最优逃逸轨迹, 航天器逃逸过程共绕地球飞行118圈, 消耗燃料 $14\,489.6\text{ kg}$, 约占总质量的 14.5% ; 图7给出了 30° 倾角逃逸, I_{sp} 无约束和有约束情况下 I_{sp} 随转移时间变化的关系曲线, 可以看出, I_{sp} 有约束和无约束随转移时间变化规律基本相同, 从另一个侧面说明了以无约束问题的收敛解作为有约束问题的初值猜测的合理性。

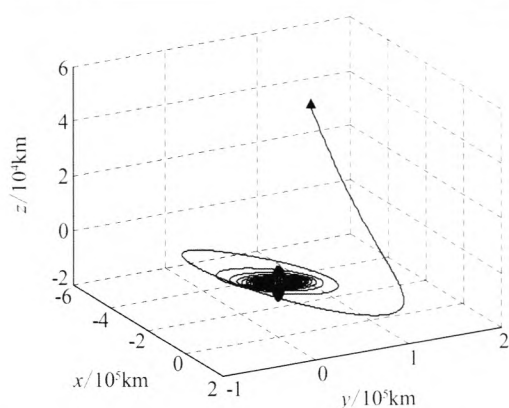


图 6 30 天 I_{sp} 有约束地球 30° 逃逸燃料最优逃逸轨迹
Fig. 6 30 days earth escape trajectory under 30°

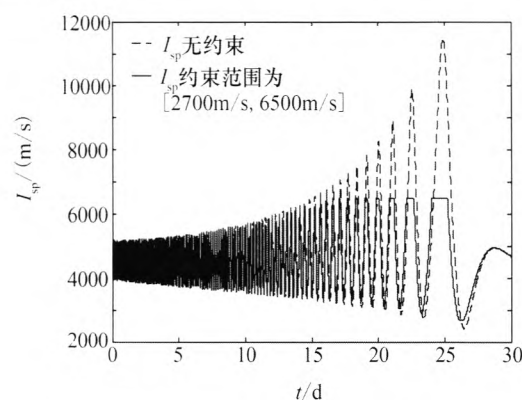


图 7 地球 30° 燃料最优逃逸 I_{sp} 随时间变化曲线
Fig. 7 Relations between I_{sp} and transfer time under 30°

5 结束语

本文通过在燃料最优性能指标中引入待定参数,使由此推导的两点边值问题的各待定参数初值约束在 $[-1, 1]$ 区间内,初值猜测范围缩小,大大提高了间接法的收敛性。数值仿真结果表明,改进的间接法结合同伦思想和曲线拟合技术,能提供较好的初值猜测,从而减少迭代次数,提高收敛速度,能有效地求解复杂的长时间控制有约束三维逃逸问题,是一种高效的小推力逃逸轨道设计方法。此外,本文以小于 0.5 天的时间间隔,计算并绘制了逃逸时间从 0.1~30 天的控制无约束平面内燃料最优逃逸问题的最优解,其呈现出的规律趋势不仅可以用曲线拟合技术外推产生较好的长时间最优逃逸初值猜测,也将为进一步探索其中的规律提供一定的参考。

参 考 文 献

- [1] BETTS J T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 120: 27-40.
- [2] 严辉, 吴宏鑫, 吴新珍. 小推力轨道优化研究 [J]. 中国空间科学技术, 1998, 18(2): 8-13
YAN HUI, WU HONGXIN, WU XINZHEN. Study on optimization of low-thrust trajectories [J]. Chinese Space Science and Technology, 1998, 18(2): 8-13.
- [3] RANIERI C L, OCAMPO C A. Indirect optimization of spiral trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(6): 1360-1366.
- [4] LEE D H, BANG H. Efficient initial costates estimation for optimal spiral orbit transfer trajectories design [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(6): 1943-1947.
- [5] NAH R S, VADALI S R. Fuel-optimal, low-thrust, three-dimensional earth-mars trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(6): 1100-1107.
- [6] RANIERI C L, OCAMPO C A. Indirect optimization of three dimensional finite-burning interplanetary transfers including spiral dynamics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(2): 444-454.
- [7] JIANG F H, BAOYIN H X, LI J F. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1): 245-258.
- [8] HULL D G. Optimal control theory for applications [M]. New York: Springer, 2003: 199-247.

作者简介

黄 鎬 1987 年生, 2008 年毕业于北京理工大学飞行器设计专业, 现为北京航空航天大学飞行器设计专业博士研究生。研究方向为深空探测轨道优化。

(下转第 40 页)

On-orbit Calibration Technique Based on the Two-step Moment of Inertia Identification of the Combination Spacecraft

Liu Weixia¹ Xiong Zhi¹ Yu Feng² Yao Xiaosong¹

(1 College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

(2 Academy of Frontier Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract On-orbit identification of the moment of inertia parameters is an important prerequisite to achieve high-precision attitude control of the combination which is combined by the active spacecraft and non-cooperative space target. With that combination, a method for on-orbit identification of inertia parameters in two steps was proposed. The first step, making the moment of inertia of X axis as a benchmark normalized the spacecraft moment of inertia matrix in order to get the special combination of inertia ratio matrix. Then the spacecraft combination attitude dynamics model was established. Based on the angular rate measurement information given by a star gyro, the extended Kalman filter method was proposed to identify all the inertia ratio parameters in about 100 s and overcome the shortcomings which the simple model cannot completely identify the rotational inertia parameters information. The second step, according to the identification of the inertia ratio matrix in the first step and using the least squares algorithm, the X axis moment of inertia was obtained. The simulation example verifies the effectiveness of the method, and the identification accuracy is about 1%.

Key words Combination spacecraft Moment of inertia On-orbit identification
Extended Kalman filter Least squares (编辑: 杨婵)

(上接第 31 页)

Indirect Optimization of Low Thrust Escape Trajectories

Huang Hao Han Chao

(School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract At present, most of the research on low thrust escape trajectory optimization were limited to planar escape or unconstrained engine model. Using the indirect method, the unknown parameters of the two-point-boundary-value-problem were bounded in a hyper unit sphere by multiplying a positive unknown parameter to the fuel optimal performance index. Firstly, the two-dimensional short-time fuel-optimal escape trajectory without control constraint was solved by the homotopy method and curve fits technology. Finally, the three-dimensional long-time fuel-optimal escape trajectory with control constraint was solved. This method is validated to be high-accuracy, good-convergence and efficient for low thrust escape trajectory optimization.

Key words Low thrust Escape trajectory Fuel optimization Interplanetary exploration
(编辑: 王晓宇)