$$o(1) < o(\log n) < o(n) < o(n.\log n) < o(n^2) < o(2^n) < o(n!) < o(n^n)$$

تذکر: تعداد تکرار حلقه زیر برابر $\left\lceil \frac{b-a+1}{k} \right\rceil$ می باشد:

```
for (i=a ; i<= b; i=i+k )
        ....
```

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 را بدست آورید؟

```
i= n;
while (i >=1){
     x = x+1;
     i = i % 2;
  }
```

حل:

حلقه به ازای هر n بزرگتر یا مساوی 1، یک یا دو مرتبه اجرا می‌شود.چون باقیمانده تقسیم صحیح هر عدد بر دو، یا صفر است و یا یک. بنابراین مرتبه اجرایی $O(1)$ می باشد.

تذکر: اگر به جای عدد 2 در دستور i=i % 2 ، از هر عدد دیگری نیز استفاده شود، مرتبه اجرایی باز هم $O(1)$ خواهد بود. چون تعداد اجرای حلقه به پارامتر n وابسته نمی باشد.

## خواص سیگما

در بعضی از مسائل نیاز است که خواص $\sum$ را بدانید. این خواص در زیر آورده شده است:

$$\sum_{i=a}^{b} c = (b-a+1)\times c$$

$$\sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1}+2$$

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^i = \frac{k^n-1}{k-1}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} ik^{i-1} = \frac{nk^{n-1}}{k-1}+\frac{1-k^n}{(k-1)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(n-i) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

- رشد مجانبی تابع $\sum_{i=1}^{n} i^k$ برابر $\theta(n^{k+1})$ می باشد.
- رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} k^i$ برابر $\theta(k^n)$ می باشد.
- رابطه مقابل در تابع آکرمان برقرار است: $f(1,n)=n+2$

## بررسی چند مثال از کاربرد سیگما

| | |
|---|---|
| `for (i=1; i<= n ; i++)`<br>`  for (j=1; j<= n ; j++){`<br>`      x=x+1;`<br>`      x=x+1;`<br>`  }` | $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1=2\sum_{i=1}^{n}n=2n\sum_{i=1}^{n}1=2n\times n=2n^2$ |
| `for (i=1; i<= n ; i++)`<br>`  for (j=1; j<= i ; j++)`<br>`      x=x+1;` | $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}i=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ |
| `for (k=0; k<= n-1 ; k++)`<br>`  for (i=1; i<= n-k ; i++)`<br>`       x=x+1;` | $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}1=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)=\sum_{k=0}^{n-1}n-\sum_{k=0}^{n-1}k=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ |
| `for ( i=1; i<=n^3; i++)`<br>`  for ( j=1; j<=i ; j++)`<br>`      x=x+1;` | $\sum_{i=1}^{n^3}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n^3}i=\frac{n^3(n^3+1)}{2}\in O(n^6)$ |
| `for ( i=1; i<=n^2; i++)`<br>`  for ( j=1; j<=log n ; j++)`<br>`       x=x+1;` | $\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{\log n}1=\sum_{i=1}^{n^2}\log n=\log n\sum_{i=1}^{n^2}1=n^2\times\log n$ |

تعداد اجرای دستور ;x=x+1 در t حلقه وابسته برابر $\binom{n+t-1}{t}$ است که از مرتبه $n^t$ می باشد.

### مثال

تعداد اجرای دستور ;x=x+1 کدام است؟

```
for (i=1;  i<=3 ; i++)
  for (j=1; j<= i ; j++)
    for (k=1; k<= j ; k++)
       for (m=1; m<=k ; m++)
            x=x+1;
```

حل: دستور در داخل چهار حلقه وابسته قرار دارد، بنابراین تعداد اجرای آن برابر است با:

$$\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!\times4!}=15$$

## قضیه اصلی (Master)

اگر داشته باشیم: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ و با فرض $a \ge 1, b > 1$، آنگاه :

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^{\log_b^a}) & f(n) < n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n).\lg n) & f(n) = n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n)) & f(n) > n^{\log_b^a} \end{cases}$$

## تبصره قضیه اصلی

در قضیه اصلی ، اگر $\frac{f(n)}{n^{\log_b^a}} < n^{\varepsilon}$ باشد، (یعنی f(n) به صورت چند جمله ای از $n^{\log_b^a}$ بزرگتر نباشد) آنگـاه نمـی تـوان از قضیه اصلی استفاده کرد. در این حالت اگر f(n) از مرتبه $n^{\log_b^a}.\lg^k n$ باشد، آنگاه مرتبه T(n) برابر $n^{\log_b^a}.\lg^{k+1} n$ اسـت.

در زیر چند مثال آورده شده است:

| رابطه بازگشتی | مرتبه اجرایی |
|---|---|
| $\frac{n \lg n}{n} = \lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n \lg^2 n)$ | $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg n$ |
| $\frac{n^2 \lg n}{n^2} = \lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^2 n)$ | $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$ |
| $\frac{n^2 \lg^3 n}{n^2} = \lg^3 n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^4 n)$ | $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg^3 n$ |