



هوش مصنوعی

بهار ۱۴۰۴

استاد: احسان تن قطاری

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

طراحان: علی رحیمی، ارشیا ایزدیاری، امیرعلی رستمی، فرید محمودزاده، علیرضا میررکنی، علیرضا ملک حسینی

مهلت ارسال: ۱۶ اردیبهشت

شبکه های بیزی

تمرین سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه ی تمارین سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر ساعت تأخیر غیر مجاز نیم درصد از نمره ی تمرین کم خواهد شد.
- هم کاری و هم فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰+۱۰۰ نمره)

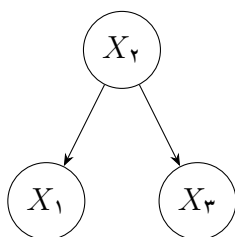
۱. (۱۸ نمره) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
(آ) شبکه بیزی مربوط به توزیع توأم زیر دارای یال هایی از گره A به C، از B به C، از B به E، از C به D و از C به E است و هیچ یال دیگری ندارد.

$$P(A) P(B) P(C | A, B) P(D | C) P(E | B, C)$$

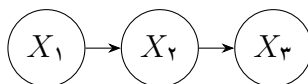
- ب) حاصل ضرب احتمالات شرطی زیر بیانگر یک شبکه بیزی معتبر بر روی متغیرهای A، B، C و D است.

$$P(A | B) P(B | C) P(C | D) P(D | A)$$

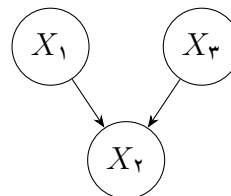
با توجه به شبکه های بیزی زیر، به دو سؤال بعدی پاسخ دهید.



A



B

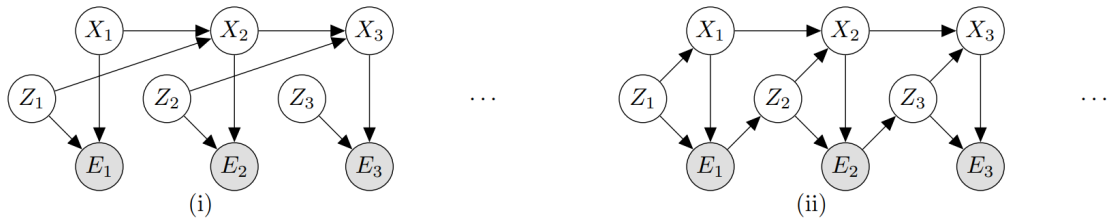


C

- ج) هر توزیع توأم $P(X_1, X_2, X_3)$ که با استفاده از توزیع های احتمال شرطی (CPD)^۱ در شبکه بیزی A قابل بیان باشد، با انتخاب مناسب CPD ها در شبکه بیزی B نیز قابل تولید است.

^۱ Conditional Probability Distributions

(د) هر توزیع توأم $P(X_1, X_2, X_3)$ که با استفاده از CPD در شبکه بیزی A قابل بیان باشد، با انتخاب مناسب CPD ها در شبکه بیزی C نیز قابل تولید است.
با توجه به مدل های مارکوف تغییر یافته ی زیر، به دو سؤال بعدی پاسخ دهید.



(ه) در مدل (i) معادله ی تغییر یافته ی Elapse Time برابر است با:

$$P(X_t, Z_t | e_{1:t-1}) = \sum_{x_{t-1}, z_{t-1}} P(x_{t-1}, z_{t-1} | e_{1:t-1}) P(X_t | x_{t-1}, z_{t-1})$$

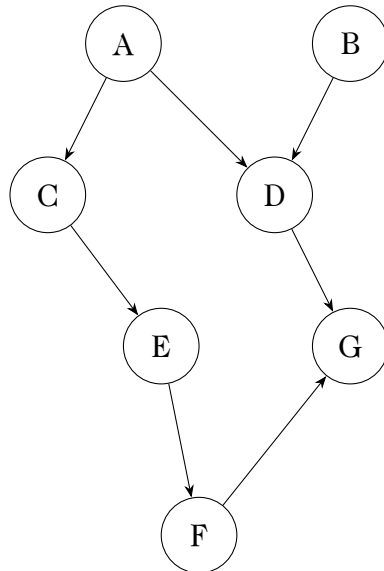
(و) در مدل (ii) معادله ی تغییر یافته ی Observe برابر است با:

$$P(X_t, Z_t | e_{1:t}) \propto P(X_t, Z_t | e_{1:t-1}) P(e_t | X_t, Z_t)$$

(ز) در یک مدل HMM استاندارد مقدار X_∞ مستقل از مقدار X_i به ازای هر i است.

۲. (۱۶ نمره) با توجه به شبکه های بیز هر بخش، به سوالات آن پاسخ دهید.

(آ) مطابق شبکه بیز زیر، مشخص کنید کدام یک از تساوی های زیر حتماً برقرار هستند. (برای پاسخ خود استدلال بیاورید.)



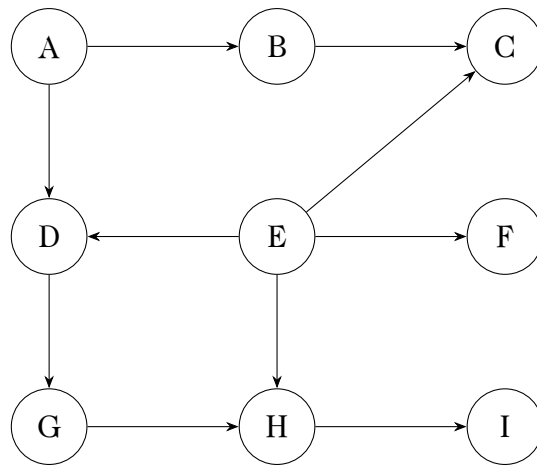
$$P(A, E | G) = P(A | G) * P(E | G) \bullet$$

$$P(A | B = b) = P(A) \bullet$$

$$P(E, G | D) = P(E | D) * P(G | D) \bullet$$

$$P(A, B | F) = P(A | F) * P(B | F) \bullet$$

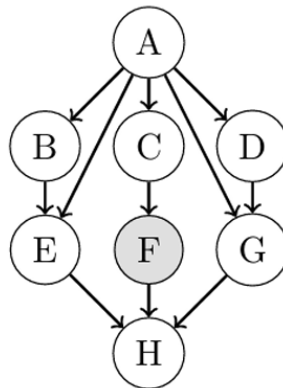
(ب) مطابق شبکه بیز زیر، مشخص کنید کدام یک از عبارات های زیر صحیح هستند. (برای پاسخ خود استدلال بیاورید.)



- $A \perp\!\!\!\perp F \mid \emptyset$ قطعا برقرار است.
- $A \perp\!\!\!\perp D \mid \emptyset$ قطعا برقرار است.
- $A \perp\!\!\!\perp I \mid E$ قطعا برقرار نیست.
- $C \perp\!\!\!\perp G \mid A, I$ قطعا برقرار است.

۳. (۲۴ نمره) به پرسش های زیر در مورد الگوریتم Elimination Variable پاسخ دهید.

(آ) در این قسمت باید طبق ترتیب مشخص شده در شبکه ی بیزی در شکل زیر متغیرها را حذف کنید. تمام متغیرهای این پرسش baniary هستند.



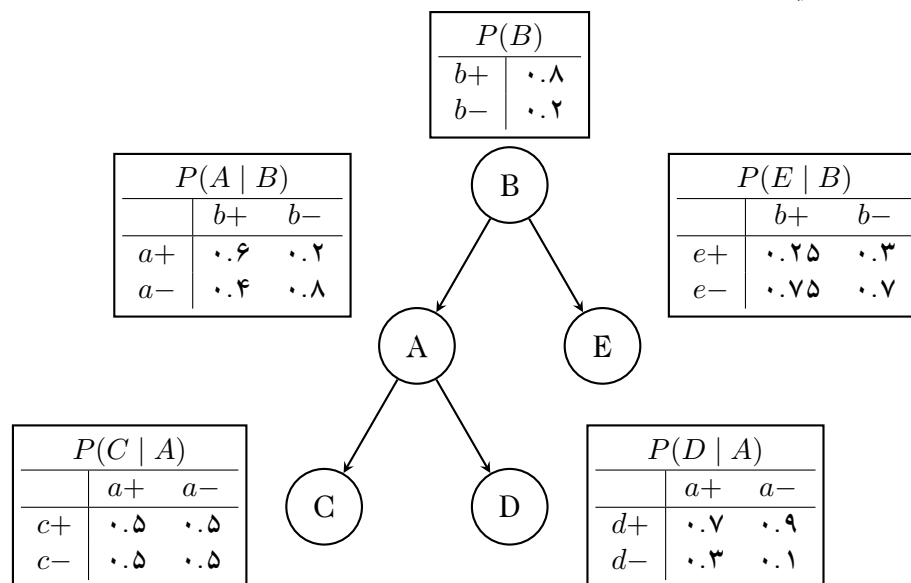
متغیرها را به ترتیبی که در ادامه آمده است حذف کنید. نوشتن به فرمت

$$f_{\setminus}(X, +y) = \sum_z p(z \mid +y) p(X \mid z).$$

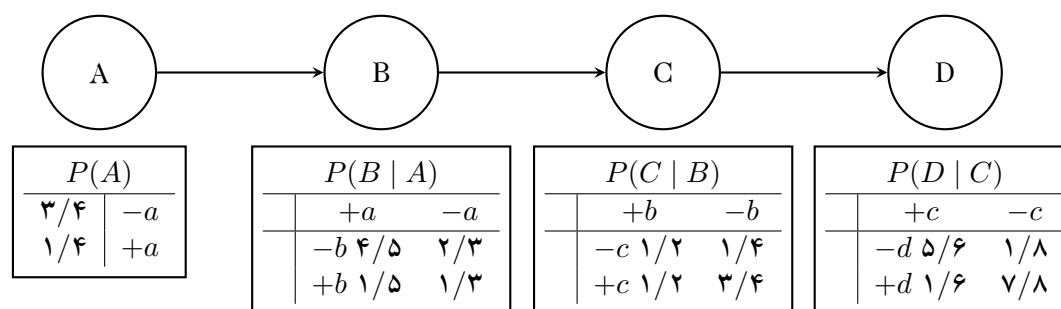
برای بخش های ۱ تا ۷ کافی است.

- (۱) پس از در نظر گرفتن شواهد چه فاکتورهایی در ابتدا داریم؟
- (۲) متغیر A را حذف کنید تا فاکتور جدید f_1 ساخته شود.
- (۳) متغیر B را حذف کنید تا فاکتور جدید f_2 ساخته شود.
- (۴) متغیر C را حذف کنید تا فاکتور جدید f_3 ساخته شود.
- (۵) متغیر D را حذف کنید تا فاکتور جدید f_4 ساخته شود.
- (۶) متغیر E را حذف کنید تا فاکتور جدید f_5 ساخته شود.
- (۷) متغیر G را حذف کنید تا فاکتور جدید f_6 ساخته شود.
- (۸) توضیح دهید به وسیله فاکتورهای محاسبه شده چگونه می توان $P(+h \mid +f)$ را محاسبه کرد.

(ب) شبکه‌ی بیزی زیر و جداول احتمالات آن را در نظر بگیرید. جدول احتمال $P(A | b+, c-)$ را به روش Elimination به دست آورید.



۴. (۲۰ نمره) شبکه‌ی بیزی زیر داده شده است و توزیع‌های مربوط به متغیرهای موجود در شبکه‌ی بیزی نیز مشخص شده‌اند.



(آ) شما نمونه‌های زیر را در اختیار دارید:

$+d$	$-c$	$-b$	$+a$	$-d$	$-c$	$+b$	$+a$
$-d$	$+c$	$+b$	$+a$	$-d$	$+c$	$-b$	$+a$
$+d$	$-c$	$+b$	$-a$	$-d$	$+c$	$+b$	$-a$
$-d$	$+c$	$-b$	$-a$	$-d$	$+c$	$-b$	$-a$

(i) فرض کنید این نمونه‌ها با استفاده از روش نمونه‌گیری پیشین (Prior Sampling) به دست آمده‌اند. برآورد نمونه‌ای $P(+c)$ را محاسبه کنید.

(ii) اکنون می‌خواهیم $P(+c | +a, -d)$ را برآورد کنیم. تمامی نمونه‌هایی را که در روش نمونه‌گیری حذفی (Rejection Sampling) برای این کار استفاده نخواهند شد، مشخص کرده و با علامت‌گذاری مناسب نشان دهید که کدام نمونه‌ها کنار گذاشته می‌شوند. سپس در نهایت $P(+c | +a, -d)$ را برآورد کنید.

(ب) در این بخش، از روش نمونه‌گیری با وزن‌دهی احتمالی (Likelihood Weighting Sampling) برای برآورد $P(-a | +b, -d)$ استفاده کرده‌ایم. نمونه‌های زیر حاصل شده‌اند. وزن مربوطه برای هر نمونه بنویسید.

$$\begin{array}{cccc}
 -d & +c & +b & -a \\
 -d & +c & +b & +a \\
 -d & -c & +b & +a \\
 -d & -c & +b & -a
 \end{array}$$

(ج) با استفاده از نمونه‌های وزنی در سؤال قبل، $P(-a \mid +b, -d)$ را برآورد کنید.

(د) استفاده از روش نمونه‌گیری با وزن‌دهی احتمالی (Likelihood Weighting Sampling) برای محاسبه‌ی $P(A \mid D)$ مناسب تر است یا $P(D \mid A)$ ؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(ه) فرض کنید تنها شواهد موجود $A = +a$ باشد. مشخص کنید کدام یک از توالی‌های زیر می‌تواند توسط نمونه‌گیری گیبس تولید شود، دلایل خود را توضیح دهید. (به خاطر داشته باشید که در طی نمونه‌گیری گیبس، نمونه‌ها از طریق یک پروسه‌ی iterative تولید می‌شوند.)

توالی ۲

$$\begin{array}{ll}
 +a & -b & -c & +d & : 1 \\
 +a & -b & -c & -d & : 2 \\
 -a & -b & -c & +d & : 3
 \end{array}$$

توالی ۱

$$\begin{array}{ll}
 +a & -b & -c & +d & : 1 \\
 +a & -b & -c & +d & : 2 \\
 +a & -b & +c & +d & : 3
 \end{array}$$

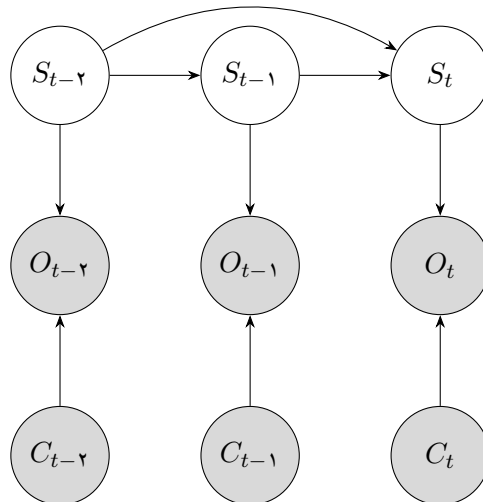
توالی ۴

$$\begin{array}{ll}
 +a & -b & -c & +d & : 1 \\
 +a & -b & -c & -d & : 2 \\
 +a & +b & -c & +d & : 3
 \end{array}$$

توالی ۳

$$\begin{array}{ll}
 +a & -b & -c & +d & : 1 \\
 +a & -b & -c & -d & : 2 \\
 +a & +b & -c & -d & : 3
 \end{array}$$

۵. (۱۶ نمره) پکمن در تلاش است تا یک روح را در راهرویی بی‌نهایت با موقعیت‌هایی مانند تصویر زیر شکار کند. او از حسگرهایی که نصب کرده استفاده می‌کند تا موقعیت واقعی روح یعنی S_t را پیدا کند. در هر گام زمانی، حسگرها مقدار نویزی از موقعیت روح به نام O_t می‌دهند. اما روح هم پیشرفت کرده و می‌تواند در هر زمان خودش را نامرئی کند که با C_t نمایش داده می‌شود و نویز بیشتری به داده‌های حسگر اضافه می‌کند.



مدل خطای حسگر در جدول زیر آمده است که بسته به اینکه روح نامرئی باشد یا نه تغییر می‌کند. همچنین پکمن یک مدل پویایی برای حرکت روح طراحی کرده که موقعیت‌های روح در دو گام زمانی گذشته را در نظر می‌گیرد.

Dynamics model:

$$P(S_t | S_{t-1}, S_{t-2}) = F(D_1, D_2)$$

$$D_1 = |S_t - S_{t-1}| \quad D_2 = |S_t - S_{t-2}|$$

D_2	D_1	$F(D_1, D_2)$
0	0	0.7
1	0	0.2
2	0	0.0
0	1	0.3
1	1	0.3
2	1	0.5

Observation model:

$$P(O_t | S_t, C_t) = E(C, D)$$

$$D = |O_t - S_t|$$

D	C	$E(C, D)$
0	+	0.4
1	+	0.2
2	+	0.1
0	-	0.6
1	-	0.2
2	-	0.0

(آ) فرض کنید در حال حاضر دو ذره داریم:

$$S_6 = 7, S_7 = 8 \quad \bullet$$

$$S_6 = 6, S_7 = 6 \quad \bullet$$

با فرض مشاهدات $C_6 = +, C_7 = -$ ، $O_6 = 5, O_7 = 8$ ، وزن هر ذره را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید پکمن دیگر نمی‌تواند ببیند که آیا روح نامرئی شده است یا نه، اما فرض می‌کند که در هر گام زمانی با احتمال ۰.۵ نامرئی است. وزن هر ذره را با فرض مشاهدات بالا محاسبه کنید.

(ج) برای جلوگیری از انتشار خطا، فرض کنید پس از وزن‌دهی و نمونه‌گیری مجدد، یک ذره جدید داریم: $(S_6 = 6, S_7 = 7)$

(i) احتمال اینکه پس از اعمال مدل پویایی به این ذره به $(S_7 = 6, S_8 = 6)$ برسیم چقدر است؟ (۲ نمره)

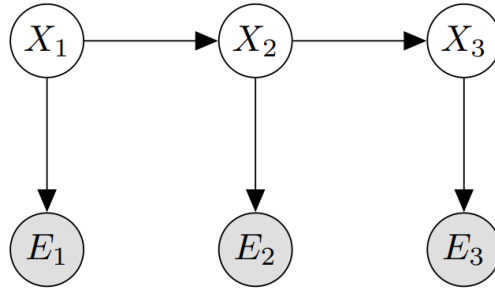
(ii) احتمال اینکه به $(S_7 = 7, S_8 = 8)$ برسیم چقدر است؟ (۲ نمره)

(د) فرض کنید سه ذره با وزن‌های مشخص در اختیار داریم:

Particle	weight
$(S_v = 5, S_\lambda = 6)$	0.1
$(S_v = 7, S_\lambda = 6)$	0.25
$(S_v = 7, S_\lambda = 7)$	0.3

با توجه به این ذرات، باور پکمن نسبت به موقعیت روح در زمان $t = 8$ را محاسبه کنید.

۶. (۱۶ نمره) ساختار HMM زیر را در نظر بگیرید.



می‌دانیم الگوریتم Forward یک الگوریتم دو مرحله‌ای بازگشتی است که برای تقریب توزیع احتمال $P(X_t|e_1, \dots, e_t)$ استفاده می‌شود. دو مرحله این الگوریتم به صورت زیر هستند:

• مرحله Elapse Time

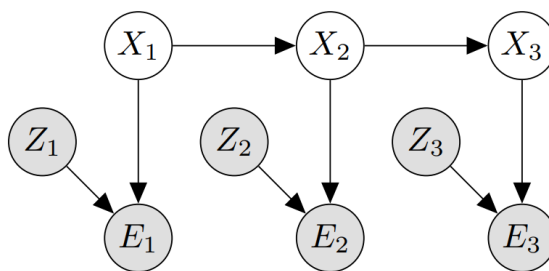
$$P(X_t|e_1, \dots, e_{t-1}) = \sum_{x_{t-1}} P(X_t|x_{t-1})P(x_{t-1}|e_1, \dots, e_{t-1})$$

• مرحله Observe

$$P(X_t|e_1, \dots, e_t) = \frac{P(e_t|X_t)P(X_t|e_1, \dots, e_{t-1})}{\sum_{x_t} P(e_t|x_t)P(x_t|e_1, \dots, e_{t-1})}$$

می‌خواهیم با اعمال تغییراتی روی ساختار گراف HMM الگوریتم Forward را تغییر دهیم. هدف ما همچنان طراحی الگوریتمی بازگشتی است که بتواند توزیع متغیرهای پنهان X_t را با توجه به تمام حالت‌های evidence موجود از زمان ۰ تا t محاسبه کند.

گراف زیر را در نظر بگیرید که در آن متغیرهای مشاهده‌شده جدیدی با نام Z_i معرفی شده‌اند و روی حالت‌های evidence تأثیر می‌گذارند.



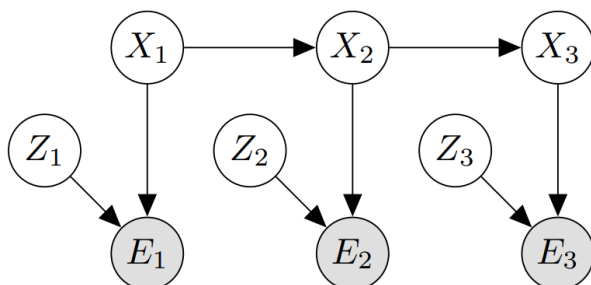
(\bar{A}) معادله‌ی تغییر یافته برای Elapse Time را بیان کنید:

$$P(X_t|e_1, \dots, e_{t-1}, z_1, \dots, z_{t-1}) = \dots$$

(ب) معادله‌ی تغییر یافته برای Observe را بیان کنید:

$$P(X_t | e_1, \dots, e_t, z_1, \dots, z_t) = \dots$$

حالا گراف زیر را در نظر بگیرید که متغیرهای Z_i مشاهده نشده‌اند.



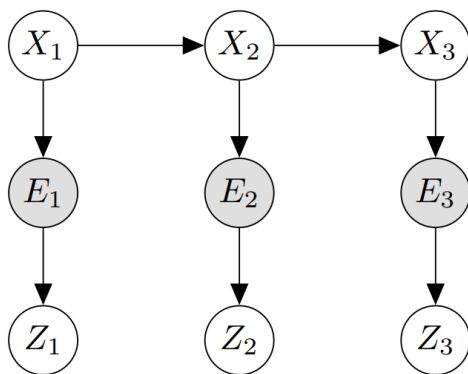
(ج) معادله‌ی تغییر یافته برای Elapse Time را بیان کنید:

$$P(X_t | e_1, \dots, e_{t-1}) = \dots$$

(د) معادله‌ی تغییر یافته برای Observe را بیان کنید:

$$P(X_t | e_1, \dots, e_t) = \dots$$

حالا گراف زیر را در نظر بگیرید که متغیرهای معرفی شده مشاهده نشده‌اند و حالت‌های evidence روی آن‌ها تاثیر می‌گذارند.



(ه) معادله‌ی تغییر یافته برای Elapse Time را بیان کنید:

$$P(X_t | e_1, \dots, e_{t-1}) = \dots$$

(و) معادله‌ی تغییر یافته برای Observe را بیان کنید:

$$P(X_t | e_1, \dots, e_t) = \dots$$