Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Факультет общей и прикладной физики

Вопрос по выбору в 6 семестре

(Основы современной физики)

Эффект Мессбауэра

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2019 год

1. Введение

В данной работе будет обсуждаться вопросы испускания и поглощения атомами твердого тела фотонов (которые возникают при переходе между возбужденными состояниями) и связанный с этим процессом **эффект Мессбауэра**, заключающийся в бесфононном снятии возбуждения или резонансном поглощении γ-квантов.

Для сравнения сначала будет кратко описан процесс взаимодействия γ-квантов и свободных атомов, а затем уже подробно для атомов, закреплённых в кристаллических решетке твердого тела. Будут приведены выкладки для рассчета эффекта Мессбауэра. В завершение работы будет проиллюстрирован эффект резонансного поглощения γ-лучей на примере возбужденных ядер олова ^{119} Sn в соединении $BaSnO_3$ при комнатной температуре. Экспериментальные результаты были получены автором в ходе выполнения лабораторной работы № 5.6.1 в 5 семестре.

2. Испускание и поглощение в свободных атомах

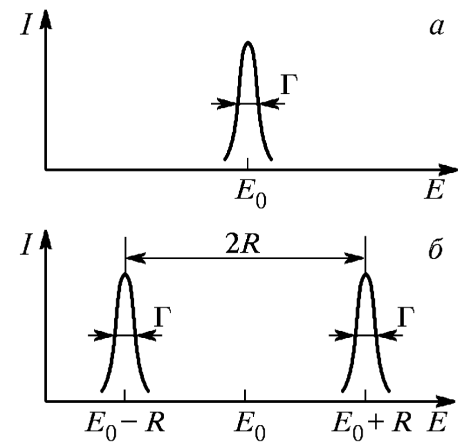

Рис. 1: Возбужденное состояние ядра (а), и сдвиг линий испускания/поглощения из-за отдачи(б)

Известно, что атомы могут находится в возбужденных состояниях на определенных (дискретных уровнях), и при переходе из одного состояния в другое они испускают или принимают квант энергии (или же фотон, он же γ-квант), равный разности энергий между уровнями. При этом в силу принципа неопределённости возбужденные уровни имеют конечную ширину $\Gamma \simeq \hbar\tau$.

При испускании (поглощении) фотона с импульсом $p_\gamma = E_\gamma/c$ ядро приобретает в силу ЗСИ импульс $p_я = p_\gamma$ и энергию отдачи R

$$R = \frac{P_я^2}{2M_я} = \frac{E_\gamma^2}{2M_я c^2} \tag{1}$$

В силу того, что обычно E_γ порядка десятков-сотен кэВ, а масса ядер измеряется в ГэВ, энергия отдачи оказывается порядков мэВ. Однако в силу малости Γ сдвинутые линии не перекрываются (рис. 1б).

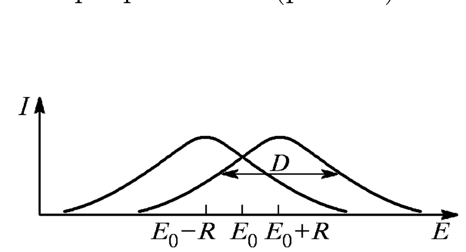

Рис. 2: Перекрытие линий в силу доплеровского уширения

При перекрытии же происходит как раз резонансное поглощение: проходя через невозбужденные атомы, γ-излучение соответствующей частоты переводит атомы в возбужденное состояние, которое затем испускает фотоны той же частоты. Однако сдвиг энергии отдачи не позволяет этому происходить.

В случае движении испускающих и поглощающих атомов со скоростью $v = c \cdot 2R/E_\gamma$ происходит доплеровское уширение линии $D = E\gamma \cdot v/c$ (рис. 2). Приведем численные оценки для ядра олова ^{119} Sn:

$$E_0 \approx E_\gamma = 23{,}8 \text{ кэВ}, \quad R \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}, \quad v \simeq 60 \text{ м/с}, \quad D \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{эВ}, \quad \Gamma \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$$

Таким образом, фотоны с энергией, попадающей в область перекрытия линий, могут создавать резонансное поглощение в свободных атомах.

3. Испускание и поглощение в твердых телах

3.1 Качественное объяснение

В случае взаимодействия фотонов с атомами, закреплёнными в кристаллической решетке, при поглощении или испускании фотонов импульс отдачи передается всему твердому телу как целому (считая, что энергия отдачи много меньше энергии связи). В силу этого возникают колебания решетки и рождение квантов этих колебаний — фононов.

Эффект Мессбауэра состоит в том, что при низких температурах и не очень больших энергиях возможно поглощение (испускание) фотонов без рождения фотонов. В таком случае энергия отдачи передается всему кристаллу, и в силу обратной пропорциональности массе мы получаем несмещенные линии испускания/поглощения.

В 2000 году в журнале Hyperfine Interactions[3] Мессбауэр привёл такую наглядную интерпретацию эффекта:

> *Ситуация … напоминает человека, прицельно бросающего камень из лодки. Большую часть энергии согласно закону сохранения импульса получает лёгкий камень, но небольшая часть энергии броска переходит в кинетическую энергию получающей отдачу лодки. Летом лодка просто приобретёт некоторое количество движения, соответствующее отдаче, и отплывёт в направлении, противоположном направлению броска. Однако зимой, когда озеро замерзнет, лодку будет удерживать лёд, и практически вся энергия броска будет передана камню, лодке (вместе с замерзшим озером и его берегами) достанется ничтожная доля энергии броска. Таким образом, отдача будет передаваться не одной только лодке, а целому озеру, и бросок будет производиться «без отдачи».*

3.2 Вычисление вероятности эффекта

Рассмотрим, как это происходит. В модели твердого тела Эйнштейна будем считать, что каждый атом колеблется независимо, подобно гармоническому осциллятору в потенциальной яме, образованной силой взаимодействия с соседями по решетке. В таком случае спектр возбуждений кристалла — уровни $E_n = (n+1/2)E_Д$, т.е. эти колебания распостраняются квантами-фононами с дебаевской энергией

$$E_Д = \hbar\omega_Д = \pi\hbar s/a = k_Б\Theta$$

где параметры кристалла: s — скорость звука, $a = \lambda_Д/2$ — расстояние между атомами, $\Theta = \hbar s k_Д$ — температура Дебая. Процесс взаимодействия с γ-квантом можно интерпретировать как случаный, в ходе которого вероятность случайной величины (переданной энергии в размере n фононов) распределена по Пуассону в силу независимости событий:

$$P(n) = \frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$$

Параметр μ — среднее число событий за заданный период времени — в нашем случае равен среднему числу квантов колебаний с энергией $\hbar\omega_Д$, возбужденных энергией отдачи R, т.е. $\mu = \frac{R}{\hbar\omega_Д}$. Нас интересует вероятность события, в котором родилось $n = 0$ фононов, т.е.

$$f = P(0) = \exp\left(-\frac{R}{\hbar\omega_Д}\right) \tag{2}$$

Преобразуем это выражение в следующий вид. Для частицы с массой M, колеблющейся с частотой ω, потенциальная энергия

$$\langle U\rangle = \frac{1}{2}M\omega^2\langle u^2\rangle = \langle K\rangle = \frac{1}{2}E_0 = \frac{1}{4}\hbar\omega \;\Rightarrow\; \langle u^2\rangle = \frac{\hbar}{2M\omega}$$

Здесь $\langle u^2\rangle$ — среднеквадратичное смещение, а для равенства $U = K = E/2$ была использована теорема вириала. Подставив (1) вместо R в формулу (2) и заменив $\lambda = 2\pi\hbar c/E_\gamma$, мы получаем

$$\frac{R}{\hbar\omega_Д} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2\hbar\omega_Д} = \frac{E_\gamma^2}{\hbar^2c^2}\frac{\hbar}{2M\omega_Д} = 4\pi^2\frac{\langle u^2\rangle}{\lambda^2} \;\Rightarrow\; f = \exp\left(-4\pi^2\frac{\langle u^2\rangle}{\lambda^2}\right) \tag{3}$$

Из этого выражения следует, что вероятность излучения кванта без потери на возбуждение колебаний решетки (рождения фононов) велика тогда, когда амплитуда колебаний атома в решетке мала по сравнению с длиной волны излучаемого ядром γ-кванта. Понятно, что амплитуда колебаний пропорциональна температуре, а длина волны γ-кванта обратна его энергии. Этим и обусловлены условия, при котором вероятность эффекта Мессбауэра f велика: низкие температуры и не слишком большие энергии фотонов.

3.3 Рассмотрение зависимости от температуры

Попробуем получить более явную зависимость от температуры в общем случае. В самом деле, запишем теорему вириала в виде

$$E_n = \hbar\omega(k)\left(n(k) + \frac{1}{2}\right) = 2\langle U\rangle = M\omega^2\langle u^2\rangle$$

С учетом того, что фононы — бозоны с тремя поляризациями (одна продольная и две поперечных), в модели $\omega = sk$ мы получаем

$$\langle u^2\rangle = 3V_я\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar}{skM}\left(\frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_Б T}) - 1} + \frac{1}{2}\right) = 3V_я\int\limits_0^{k_Д}\frac{k^2\,dk}{2\pi^2}\frac{\hbar}{sMk}\left(\frac{1}{\exp(\frac{\hbar sk}{k_Б T}) - 1} + \frac{1}{2}\right)$$

Сделав в первом члене замену $x = \frac{\hbar s k}{k_Б T}$, мы получаем

$$\langle u^2 \rangle = \frac{3V_я}{2\pi^2 s M} \left(\frac{k_Б^3 T^3}{\hbar^2 s^3} \int\limits_0^{\frac{\hbar s k_Д}{k_Б T}} \frac{x\,dx}{e^x - 1} + \frac{\hbar k_Д^2}{4} \right)$$

Таким образом, мы видим, что действительно амплитуда колебаний пропорциональная температуре в силу первого члена, и при низких температурах мы можем получить (пользуясь $\dfrac{(2\pi)^3}{V_я} = \dfrac{4}{3}\pi k_Д^3$)

$$\langle u^2 \rangle \xrightarrow{T \longrightarrow 0} \frac{3 \cdot 6\pi^2 \hbar k_Д^2}{8\pi^2 s M k_Д^3} = \frac{9\hbar^2}{4 M k_Б \Theta}$$

Подставляя это в наше выражение для эффекта Мэссбауэра (3) и возвращаясь к энергии E_γ, мы получаем

$$f = \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{E_\gamma^2}{Mc^2 k_Б \Theta} \right)$$

В задании была задача Т.5 для кристалла ^{193} Ir с энергией γ-кванта $E_\gamma = 129$ кэВ, $\Theta = 430$ К. Можно получить максимальную вероятность эффекта $f \approx 15\%$.

Если же не пользоваться приближение низких температур и оценить средную амлитуду колебаний просто из теплового движения

$$\langle u^2 \rangle \simeq \frac{k_Б T}{M\omega_Д} \;\Rightarrow\; f = \exp\left(-\frac{E_\gamma^2}{Mc^2} \frac{T}{k_Б \Theta^2} \right)$$

4. Экспериментальное наблюдение эффекта

4.1 Описание работы

В лабораторной работе № 5.6.1. изучается эффект Мессбауэра следующим образом. γ-излучение возбужденных ядер ^{119} Sn соединения BaSnO $_3$ пропускается через резонансный поглотитель со стабильными ядрами ^{119} Sn. Пройдя через него, излучение регистрируется сцинтилляционным спектрометром.

Наблюдение резонансного поглощения основано на методе доплеровского сдвига линий испускания и поглощения. Для этого поглотителю придается небольшая скорость $v = c \cdot 2\Gamma/E_\gamma$. Мессбауэровская линия очень узка, и для наблюдения резонанса хватает скорости порядка миллиметра в секунду.

Вообще говоря, при идентичных кристаллических решетках, линия испускания полностью перекрывается с линией поглощения, и максимальное поглощение наблюдается при нулевой скорости (рис. 3). Однако в химических сплавах (как наш $BaSnO_3$) из-за влияния электростатических сил происходит смещение максимума поглощения, и его можно «поймать» при

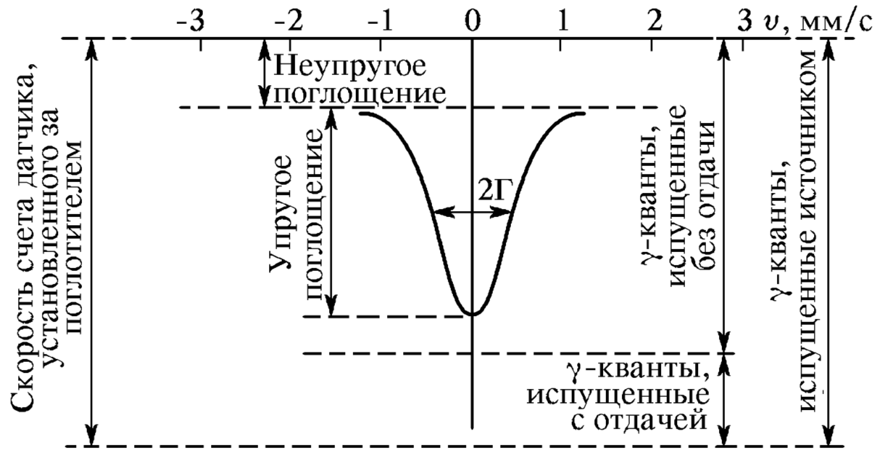

Рис. 3: Спектр упругого резонансного поглощения γ-квантов. Источник и поглотитель находятся в идентичных кристаллических решетках. Неупругое поглощение обусловлено главным образом взаимодействием γ-лучей с атомными электронами

отличной от нуля скорости. Такое смещение называется **химическим сдвигом**. Его можно рассчитать по формуле

$$v_p = \frac{\Delta E}{E_0} c \tag{4}$$

Для подсчета «амплитуды» эффекта Мессбауэра определяется безразмерная величина

$$\varepsilon(v) = \frac{N(\infty) - N(v)}{N(\infty) - N_\text{ф}} \tag{5}$$

где $N(v)$ — скорость счета квантов, прошедших через поглотитель при некоторой скорости v, $N(\infty)$ — скорость счета квантов при достаточно большой скорости, когда резонансное поглощение отсутствует, $N_\text{ф}$ — скорость счета радиоактивного фона.

Измеряемая на опыте ширина резонансной линии $\Gamma_\text{экс}$ — результат наложения линий источника и поглотителя. При тонких поглотителях и источниках и при отсутствии вибраций ширина линии равна удвоенной естественной ширине 2Γ (см. рис. 3).

На рис. 3 кривая задается формулой Брейта-Вигнера (лоренцева кривая):

$$\sigma(E) \propto \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

4.2 Экспериментальные результаты для разных поглотителей

Быри проведены измерения резонансного поглощения на 4-ех образцах: №1, №2, №3 — это олово разной толщины, а №4 — SnO_2. Экспериментальные точки и их фиты приведены на графиках. Результаты всех 4-ех фитов сведем в таблицу 1.

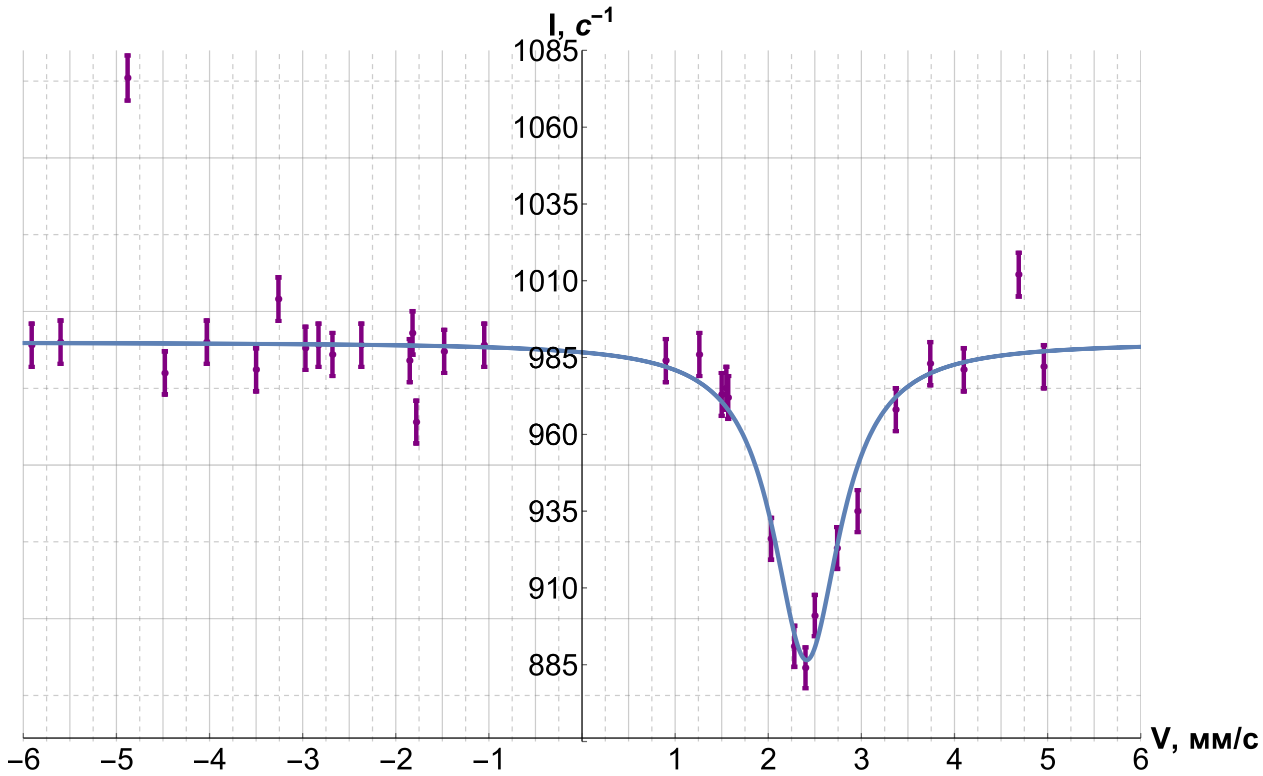

Рис. 4: Резонансное поглощение на 1-ом поглотителе

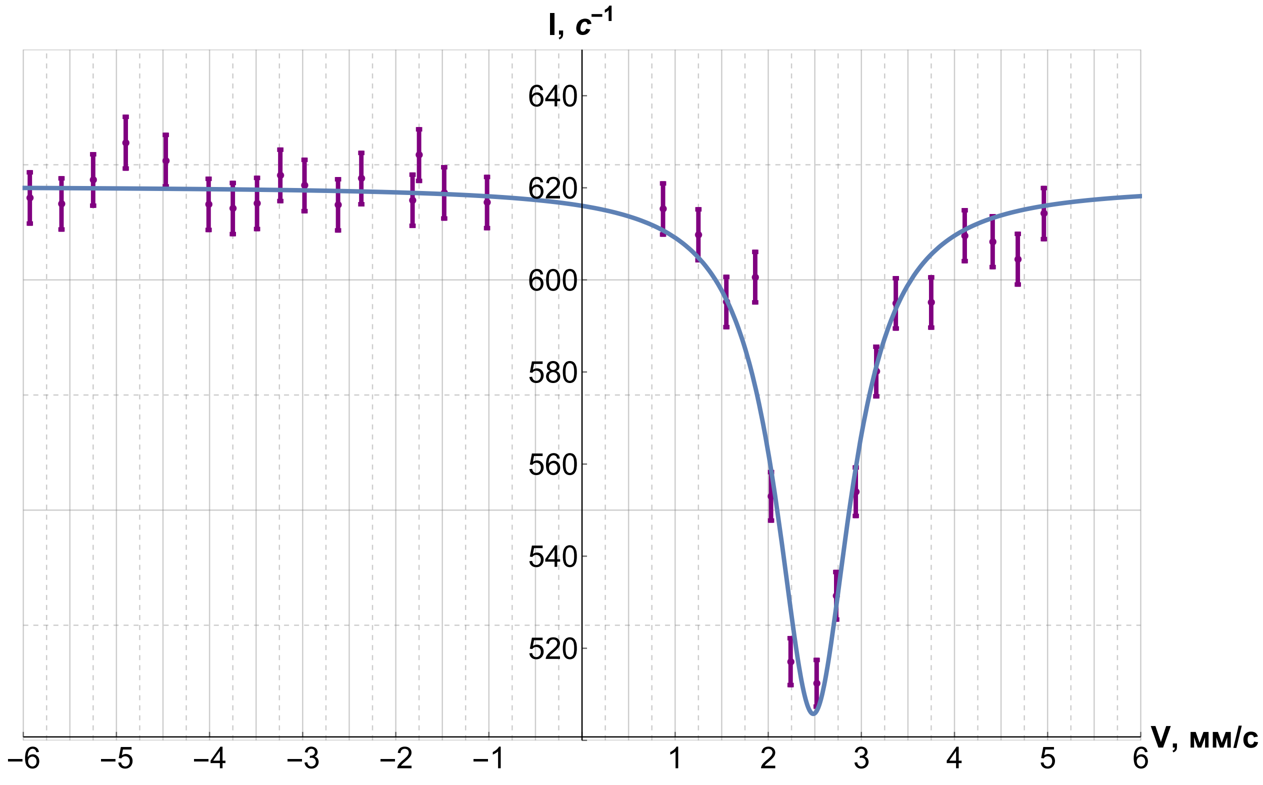

Рис. 5: Резонансное поглощение на 2-ом поглотителе

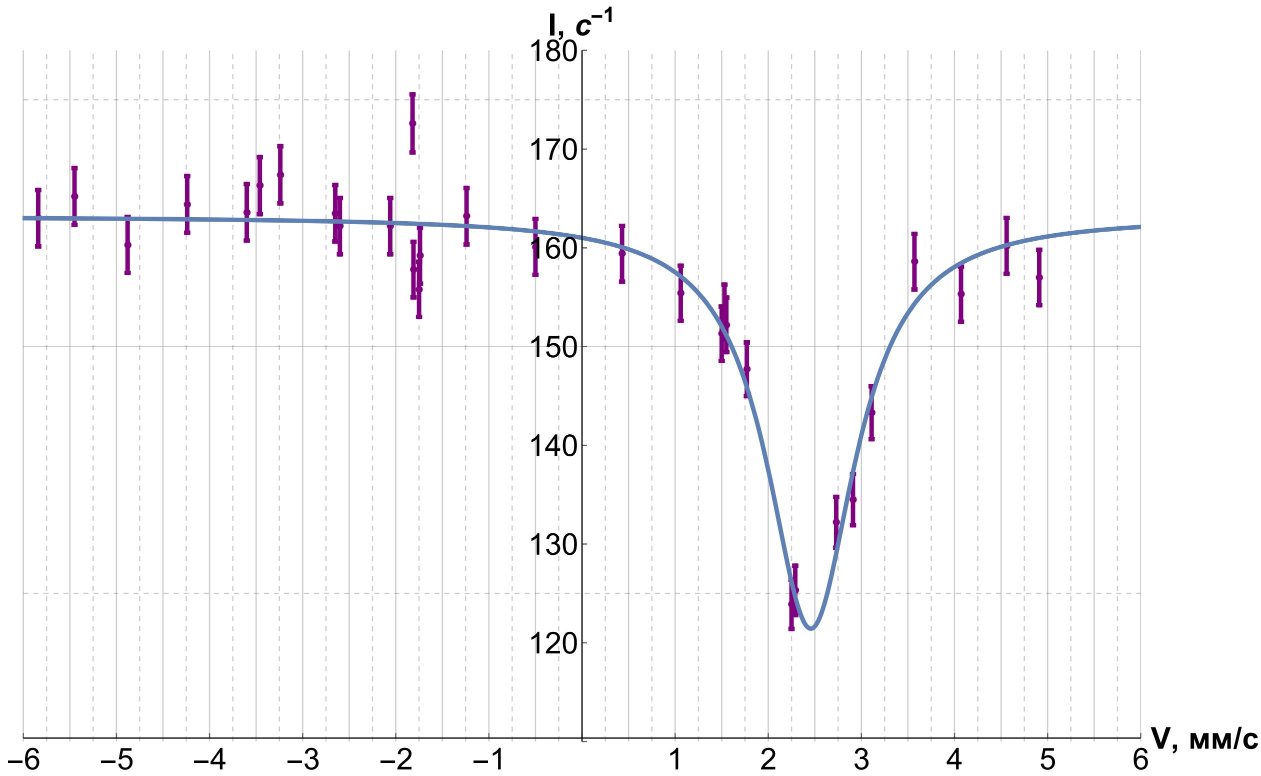

Рис. 6: Резонансное поглощение на 3-ом поглотителе

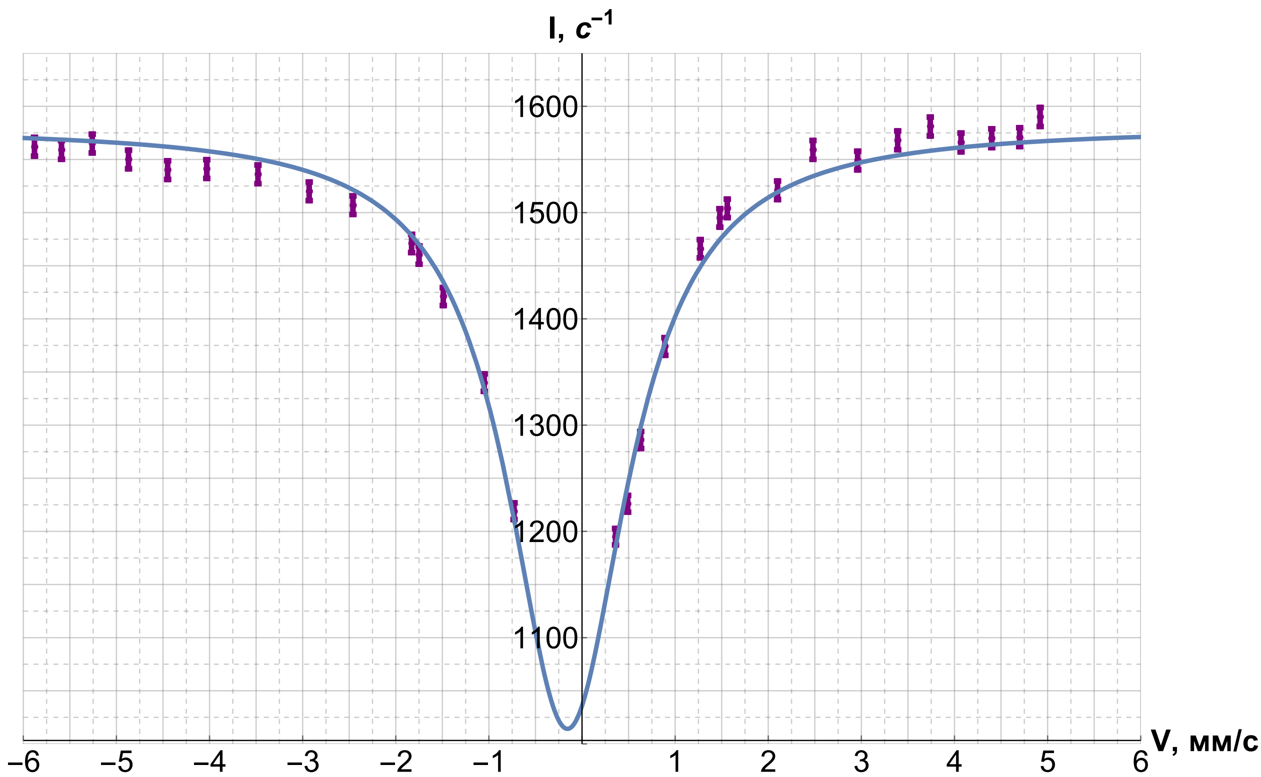

Рис. 7: Резонансное поглощение на 4-ом поглотителе

В полученных параметрах фита: b — величина фона, из которого мы «вычитаем» мэсбауэровский пик, 2c — ширина резонансной линии $\Gamma_{\text{экс}}$, а X — величина химического сдвига. Под χ^2_ν имеется ввиду критерий χ^2, отнесенный к числу степеней свободны.

Таблица 1: Результаты фитирования кривой резонансного поглощения

№	a	b, $с^{-1}$,	c, мм/c	X, мм/с	χ^2_ν
1	103 ± 6	990 ± 4	$0{,}43 \pm 0{,}04$	$2{,}41 \pm 0{,}03$	1,68
2	114 ± 5	620 ± 3	$0{,}49 \pm 0{,}04$	$2{,}48 \pm 0{,}02$	1,59
3	41 ± 3	163 ± 1	$0{,}58 \pm 0{,}06$	$2{,}46 \pm 0{,}03$	1,43
4	566 ± 31	1580 ± 5	$0{,}78 \pm 0{,}05$	$-0{,}156 \pm 0{,}015$	2,63

На основе полученных результатов фитов мы можем вычислить амплитуды поглощения по формуле (5).

С учетом того, что $N(\infty) = b$, $N(v) = y(X)$, мы можем подсчитать искомую величину. По формуле $\Gamma_{экс} = E_\gamma \cdot v/c$ мы можем оценить ширину уширения линии $\Gamma_{экс}$ в эВ, подставляя как $v = 2c, E_\gamma = 23{,}8$ кэВ (c — параметр фита). Также из (4) мы можем подсчитать химический сдвиг ΔE в эВ, подставляя в качестве $v_r = X$. Вычисление параметров для всех поглотителей сведено в таблицу.

Таблица 2: Результаты работы

№	ε_i, %	$\Gamma_{экс}$, мм/с	$\Gamma_{экс}$, $10^{-8}\cdot$ эВ	$v_р$, мм/с	ΔE, $10^{-7}\cdot$, эВ
1	$10{,}6 \pm 0{,}9$	$0{,}86 \pm 0{,}08$	$7{,}3 \pm 0{,}6$	$2{,}41 \pm 0{,}03$	$1{,}91 \pm 0{,}02$
2	$18{,}9 \pm 1{,}5$	$0{,}98 \pm 0{,}09$	$7{,}8 \pm 0{,}7$	$2{,}48 \pm 0{,}02$	$1{,}97 \pm 0{,}01$
3	$28{,}1 \pm 0{,}9$	$1{,}116 \pm 0{,}12$	$9{,}2 \pm 0{,}8$	$2{,}46 \pm 0{,}03$	$1{,}95 \pm 0{,}02$
4	$36{,}1 \pm 3{,}2$	$1{,}56 \pm 0{,}11$	$12{,}3 \pm 1{,}3$	$-0{,}156 \pm 0{,}015$	$-0{,}123 \pm 0{,}006$

Полученные результаты соотносятся с теоретическими расчетами. Уширение резонансной кривой по сравнению с $2\Gamma = 6 \cdot 10^{-8}$ эВ происходит при увеличении ширины поглотителя.

Использованная литература

[1] Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Оптика / А.В. Максимычев, Д.А. Александров, Н.С. Берюлёва и др.; под ред. А.В. Максимычева. — М.: МФТИ, 2014. — 446 с.

[2] Ципенюк Ю.М. Квантовая микро- и макрофизика. М.: Физматкнига, 2006. — 640 с.

[3] Rudolf L. Mössbauer. The discovery of the Mössbauer effect (англ.) // Hyperfine Interactions. — 2010. — Vol. 126. — P. 1—12. — DOI:10.1023/A:1012620106837.