Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Вопрос по выбору в 3 семестре

(Общая физика: электричество и магнетизм)

Свойства и приложения уравнений Максвелла

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2018 год

1. Введение

Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \oint\limits_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \oint\limits_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} + \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

В курсе общей физики МФТИ эти уравнения изучаются и рассматриваются в основном именно в такой форме. Попробуем посмотреть на них немного по-другому и получить из этого какие-то полезные результаты.

2. Потенциалы электромагнитного поля

2.1 Определение потенциалов

При изучении электростатического поля мы говорили о его потенциальном характере и вводили **скалярный потенциал электрического поля**:

$$\int\limits_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = -d\varphi = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

Отсюда получаем равенство поля градиенту потенциала (здесь и далее будем использовать векторный оператор «набла» ∇, а также рассматривать только дифференциальный вид уравнений Максвелла с использованием вектора «набла»):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{5}$$

Похожий потенциал, только векторный, можно ввести и для магнитного поля. При помощи математических преобразований из закона Био-Савара-Лапласа можно получить (например, как в учебном пособии Н.А. Кириченко) равенство

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

где **A — векторный потенциал магнитного поля**, определяемый по формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_1})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}dV_1$$

2.2 Потенциал в уравнениях Максвелла

Докажем теперь следующее: уравнения Максвелла (2) и (3) выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выражены через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{6}$$

Здесь в электрическом поле по сравнению с (5) есть добавка, зависящая от переменного по времени магнитного поля (что весьма естественно, учитывая физический смысл закона Фарадея).

Док-во: В векторном анализе существует такая математическая теорема: любое дифференцируемое векторное поле может быть разложено на две составляющих, равных градиенту скалярного потенциала и ротору векторного потенциала поля (теорема Гельмгольца). Воспользовавшись ей, мы получаем из (2) равенство $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ (ведь скалярного потенциала у вихревого поля $\mathbf{B}$ нет).

Теперь введем $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, тогда ротор этого вектора равен нулю. В самом деле:

$$\nabla\times\mathbf{E}' = \nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\nabla\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Здесь мы воспользовались (3) и только что полученным определением $\mathbf{B}$. Тогда из равенства нулю этого ротора мы по теореме Гельмгольца получаем $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi$, откуда и следует искомое определение через потенциалы (6).

В обратную сторону все доказывается аналогично: из (6) мы получаем (2) по свойству равенства нулю смешанного произведения с двумя равными векторами («набла»), а для (3) мы также получаем ноль у смешанного произведения со скалярным потенциалом и производную $\mathbf{B}$ по времени из его определения через ротор $\mathbf{A}$.

Таким образом, так как мы считаем верными уравнения Максвелла, то мы всегда можем выразить электрическое и магнитное поля через их потенциалы.

2.3 Калибровка потенциала

Заметим теперь, что при определении полей (6) наши потенциалы заданы неоднозначно. В самом деле, если мы совершим следующие «сдвиги» (преобразования) потенциалов:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi, \qquad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{7}$$

где некая функция $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, то наши поля в (6) не изменятся. В самом деле, для $\mathbf{B}$ это следует из свойства векторного произведения, а для $\mathbf{E}$ наши добавки в виде $\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$ сократятся.

Такие преобразования играют важную роль в теоретической физике (а именно, в квантовой электродинамике они лежат в основе локальной калибровочной симметрии электромагнитного воздействия). Например, это дает возможность с помощью теоремы Нётер получить закон сохранения заряда.

Весьма удобным способом задать однозначность потенциалов является наложение дополнительных условий (которые называются **калибровкой потенциалов**). Точнее говоря, удобным является то, что мы можем выбрать их так, чтобы они удовлетворяли произвольному условию, которое мы можем менять в зависимости от наших целей. Рассмотрим, например, лоренцеву калибровку (здесь и в следующем пункте работаем в вакууме, $\mu = \varepsilon = 1, \mathbf{D} = \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mathbf{H}$):

$$\nabla\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Понятно, что при преобразовании (7) это уравнение уже не будет выполнятся, что нам и требовалось.

2.4 Волновые уравнения для потенциалов

Получим теперь оставшиеся уравнения Максвелла (1), (4) через наши потенциалы. Для этого возьмем ротор от уравнения (3) и раскроем его по правилу двойного векторного произведения:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{B}$$

Используя обозначения $\triangle = \nabla\cdot\nabla$ — оператор Лапласа, $\square = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Д'Аламбера, а также подставив вместо первого члена слева уравнение (1), а вместо последнего члена справа уравнение (4), мы получаем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \triangle\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi\nabla\rho \;\Rightarrow\; \square\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + 4\pi\nabla\rho \tag{9}$$

Аналогично получим и уравнение для магнитного поля (взяв ротор от (4) и подставив туда уравнения (3) и (2)):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \triangle\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c^2}\nabla\times\mathbf{j} \;\Rightarrow\; \square\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\nabla\times\mathbf{j} \tag{10}$$

Таким образом, мы всего лишь записали волновные уравнения электромагнитного поля, явно учитывая источники поля — заряды ρ и токи $\mathbf{j}$. Подставим теперь в наши уравнения (9) – (10) потенциалы (6) (опираясь на доказанное в пункте 2.2). Получаем:

$$\begin{aligned} &\square\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + 4\pi\nabla\rho \\ &\square\left(\nabla\times\mathbf{A}\right) = \nabla\times -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{11}$$

Замечаем, что последнее уравнение будет верно тождественно, если положить следующее:

$$\Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{12}$$

Тогда с учётом (12) мы получаем для первого из (11) следующий вид уравнения:

$$\Box(\nabla\varphi) = -4\pi\nabla\rho$$

Аналогично (12) запишем:

$$\Box\varphi = -4\pi\rho \tag{13}$$

Таким образом, мы получили (12), (13) — волновые уравнения для потенциалов электромагнитного поля, которые вместе с определениями полей через потенциалы (6) полностью эквивалентны исходным уравнениям Максвелла (1) — (4). Полученные выше уравнения можно получить и по-другому, не делая допущений с ротором/градиентов для (11): сразу подставить в уравнения (1), (4) наши поля из (6) и затем воспользоваться Лоренц-калибровкой (8).

Кстати говоря, Лоренц-калибровка (8) задает здесь закон сохранения заряда (в виде уравнения непрерывности). В самом деле, применим к уравнению (12) дивергенцию, а к уравнению (13) дифференцирование $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ и сложим эти уравнения:

$$\begin{aligned} \Box(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= -\frac{4\pi}{c}\nabla\cdot\mathbf{j} \\ \Box\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \Box\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\left(\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

Так как выражение под оператором Д'Аламбера равно нулю в силу калибровки (8), отсюда получаем и равенство нулю правой части, где и записан закон сохранения заряда.

3. Излучение диполя

С помощью полученных результатов для потенциалов можно исследовать электромагнитное излучение диполя.

Решение волновых уравнений (12), (13) можно записать как

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_1}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}dV_1$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r_1}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}dV_1$$

Здесь мы учитываем так называемые «запаздывающие потенциалы», т.е. берем момент времени, в который было произведено излучение, а не тот, когда волна достигла наблюдателя.

Для точечного диполя выразим ток как $\mathbf{j} = q\mathbf{v}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r_1}|/c) = q\mathbf{v}(t - r|/c)$ и будем суммировать (ведь заряды дискретны) по зарядам диполя, пренебрегая разницей расстояний от различных зарядов диполя. Тогда можно выразить $\sum_i q_i \mathbf{v_i} = \sum_i q_i \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} = \dot{\mathbf{p}}$, и получаем для потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr} \tag{14}$$

Для нахождения скалярного потенциала мы воспользуемся калибровкой (8), и подставив ее в векторный потенциал (14), и проинтегрировав по времени обе части выражения, мы получаем

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr} \ \Rightarrow \ \varphi = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}$$

По правилу дифференцирования проведения и сложной функции, мы получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{r}\nabla \cdot \mathbf{p}(t - r/c) - \mathbf{p}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r}\dot{\mathbf{p}}\left(-\frac{1}{c}\nabla r\right) + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}}{cr^2} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3}$$

Мы видим, что последний член совпадает с потенциалом статического поля диполя, при этом на большом расстоянии мы можем отбросить этот член, ведь он убывает как $\varphi_{\text{стат}} \sim r^{-2}$, в то время как первый член как раз таки описывает излучение диполя в дальней зоне, убывая как $\varphi_{\text{изл}} \sim r^{-1}$, т.е.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2}$$

Ну а теперь, подставив в определения полей через потенциалы (6) полученные выражения для потенциалов колеблющегося точечного диполя, несложно получить поле излучения точеченого диполя:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r}\nabla \times \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{c^2 r^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{cr^3}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr}\right) = \frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})\mathbf{r} - \ddot{\mathbf{p}}r^2}{c^2 r^3}$$

Здесь в выражении для $\mathbf{H}$ нам нужно отбросить второй член, убывающий как $\sim r^{-2}$, оставляя только описывающий излучение в волновой зоне член с $\sim r^{-1}$, и аналогично сделаем то же и для $\mathbf{E}$ сразу. Введя вектор направления от источника к наблюдателю $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, запишем наше поле в виде

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \qquad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})}{c^2 r}$$

Обратим внимание на то, что электрическое и магнитное поле в волне связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$$

Т.е. вектор электрической напряжённости и магнитной ортогональны.

4. Заключение

Таким образом, мы рассмотрели такие понятия, как скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля и их использование в уравнениях Максвелла. Как пример полезности применения такого взгляда в рамках курса общей физики мы вывели излучение диполя.

Намного большее применение этот подход имеет в теоретической физике, где при помощи математического аппарата тензоров вводится понятие 4-вектора и 4-потенциала $A = (\varphi, -\mathbf{A})$, а также тензор электромагнитного поля, выражающийся через производные по координатам и времени 4-мерного пространства.

Список литературы

1. Кириченко Н.А. «Электричество и магнетизм: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: МФТИ, 2017. – 378с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 7 изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1988. 512 с.