Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Вопрос по выбору в 3 семестре

(Общая физика: электричество и магнетизм)

Свойства и приложения уравнений Максвелла

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2018 год

1. Введение

Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \oint\limits_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \oint\limits_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} + \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

В курсе общей физики МФТИ эти уравнения изучаются и рассматриваются в основном именно в такой форме. Попробуем посмотреть на них немного по-другому и получить из этого какие-то полезные результаты.

2. Потенциалы электромагнитного поля

2.1 Определение потенциалов

При изучении электростатического поля мы говорили о его потенциальном характере и вводили **скалярный потенциал электрического поля**:

$$\int\limits_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = -d\varphi = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

Отсюда получаем равенство поля градиенту потенциала (здесь и далее будем использовать векторный оператор «набла» ∇):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{5}$$

Похожий потенциал, только векторный, можно ввести и для магнитного поля. При помощи математических преобразований из закона Био-Савара-Лапласа можно получить (например, как в учебном пособии Н.А. Кириченко) равенство

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

где $\mathbf{A}$ — **векторный потенциал магнитного поля**, определяемый по формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_1})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}dV_1$$

2.2 Потенциал в уравнениях Максвелла

Докажем теперь следующее: уравнения Максвелла (2) и (3) выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выражены через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{6}$$

Здесь в электрическом поле по сравнению с (5) есть добавка, зависящая от переменного по времени магнитного поля (что весьма естественно, учитывая физический смысл закона Фарадея).

В векторном анализе существует такая математическая теорема: любое дифференцируемое векторное поле может быть разложено на две составляющих, равных градиенту скалярного потенциала и ротору векторного потенциала поля (теорема Гельмгольца). Воспользовавшись ей, мы получаем из (2) равенство $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (ведь скалярного потенциала у вихревого поля $\mathbf{B}$ нет).

Теперь введем $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, тогда ротор этого вектора равен нулю. В самом деле:

$$\nabla \times \mathbf{E}' = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Здесь мы воспользовались (3) и только что полученным определением $\mathbf{B}$. Тогда из равенства нулю этого ротора мы по теореме Гельмгольца получаем $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi$, откуда и следует искомое определение через потенциалы (6).

В обратную сторону все доказывается аналогично: из (6) мы получаем (2) по свойству равенства нулю смешанного произведения с двумя равными векторами («набла»), а для (3) мы также получаем ноль у смешанного произведения со скалярным потенциалом и производную $\mathbf{B}$ по времени из его определения через ротор $\mathbf{A}$.

Таким образом, так как мы считаем верными уравнения Максвелла, то мы всегда можем выразить электрическое и магнитное поля через их потенциалы.

2.3 Калибровка потенциала

Заметим теперь, что при определении полей (6) наши потенциалы заданы неоднозначны. В самом деле, если мы совершим следующие «сдвиги» (преобразования) потенциалов:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi, \qquad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{7}$$

где некая функция $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, то наши поля в (6) не изменятся. В самом деле, для $\mathbf{B}$ это следует из свойства векторного произведения, а для $\mathbf{E}$ наши добавки в виде $\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$ сократятся.

Такие преобразования играют важную роль в теоретической физике (а именно, в квантовой электродинамике они лежат в основе локальной калибровочной симметрии электромагнитного воздействия). Например, это дает возможность с помощью теоремы Нётер получить закон сохранения заряда.

Весьма удобным способом задать однозначность потенциалов является наложение дополнительных условий (которые называются **калибровкой потенциалов**). Точнее говоря, удобным является то, что мы можем выбрать их так, чтобы они удовлетворяли произвольному условию, которое мы можем менять в зависимости от наших целей. Рассмотрим, например, лоренцеву калибровку:

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Понятно, что при преобразовании (7) это уравнение уже не будет выполнятся, что нам и требовалось. Калибровка Лоренца позволяет нам получить очень важный результат, который мы приведем без вывода (в силу математической сложности выражения полей через 4-мерный потенциал и тензор электромагнитного поля). А именно, система уравнений Максвелла (1) – (4) (8 уравнений, т.е. 2 скалярных и 2 векторных) может быть заменена на эквивалентную систему из двух уравнений (1 скалярное и одно векторное, т.е. всего 4):

$$\triangle \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Box \varphi = -4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\triangle \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \Box \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}$$

Здесь использованы обозначения $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, $\Box = \triangle - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Д'Аламбера.