Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Вопрос по выбору в 3 семестре

(Общая физика: электричество и магнетизм)

Свойства и приложения уравнений Максвелла

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2018 год

1. Введение

Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \oint\limits_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \oint\limits_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} + \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

В курсе общей физики МФТИ эти уравнения изучаются и рассматриваются в основном именно в такой форме. Попробуем посмотреть на них немного по-другому и получить из этого какие-то полезные результаты.

2. Потенциалы электромагнитного поля

2.1 Определение потенциалов

При изучении электростатического поля мы говорили о его потенциальном характере и вводили **скалярный потенциал электрического поля**:

$$\int\limits_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = -d\varphi = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

Отсюда получаем равенство поля градиенту потенциала (здесь и далее будем использовать векторный оператор «набла» ∇, а также рассматривать только дифференциальный вид уравнений Максвелла с использованием вектора «набла»):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{5}$$

Похожий потенциал, только векторный, можно ввести и для магнитного поля. При помощи математических преобразований из закона Био-Савара-Лапласа можно получить (например, как в учебном пособии Н.А. Кириченко) равенство

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

где **A** — **векторный потенциал магнитного поля**, определяемый по формуле

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_1})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|}dV_1$$

2.2 Потенциал в уравнениях Максвелла

Докажем теперь следующее: уравнения Максвелла (2) и (3) выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выражены через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{6}$$

Здесь в электрическом поле по сравнению с (5) есть добавка, зависящая от переменного по времени магнитного поля (что весьма естественно, учитывая физический смысл закона Фарадея).

В векторном анализе существует такая математическая теорема: любое дифференцируемое векторное поле может быть разложено на две составляющих, равных градиенту скалярного потенциала и ротору векторного потенциала поля (теорема Гельмгольца). Воспользовавшись ей, мы получаем из (2) равенство $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ (ведь скалярного потенциала у вихревого поля $\mathbf{B}$ нет).

Теперь введем $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, тогда ротор этого вектора равен нулю. В самом деле:

$$\nabla\times\mathbf{E}' = \nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Здесь мы воспользовались (3) и только что полученным определением $\mathbf{B}$. Тогда из равенства нулю этого ротора мы по теореме Гельмгольца получаем $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi$, откуда и следует искомое определение через потенциалы (6).

В обратную сторону все доказывается аналогично: из (6) мы получаем (2) по свойству равенства нулю смешанного произведения с двумя равными векторами («набла»), а для (3) мы также получаем ноль у смешанного произведения со скалярным потенциалом и производную $\mathbf{B}$ по времени из его определения через ротор $\mathbf{A}$.

Таким образом, так как мы считаем верными уравнения Максвелла, то мы всегда можем выразить электрическое и магнитное поля через их потенциалы.

2.3 Калибровка потенциала

Заметим теперь, что при определении полей (6) наши потенциалы заданы неоднозначны. В самом деле, если мы совершим следующие «сдвиги» (преобразования) потенциалов:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi, \qquad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{7}$$

где некая функция $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, то наши поля в (6) не изменятся. В самом деле, для $\mathbf{B}$ это следует из свойства векторного произведения, а для $\mathbf{E}$ наши добавки в виде $\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$ сократятся.

Такие преобразования играют важную роль в теоретической физике (а именно, в квантовой электродинамике они лежат в основе локальной калибровочной симметрии электромагнитного воздействия). Например, это дает возможность с помощью теоремы Нётер получить закон сохранения заряда.

Весьма удобным способом задать однозначность потенциалов является наложение дополнительных условий (которые называются **калибровкой потенциалов**). Точнее говоря, удобным является то, что мы можем выбрать их так, чтобы они удовлетворяли произвольному условию, которое мы можем менять в зависимости от наших целей. Рассмотрим, например, лоренцеву калибровку (здесь и в следующем пункте работаем в вакууме, $\mu = \varepsilon = 1, \mathbf{D} = \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mathbf{H}$):

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Понятно, что при преобразовании (7) это уравнение уже не будет выполнятся, что нам и требовалось.

2.4 Волновые уравнения для потенциалов

Получим теперь оставшиеся уравнения Максвелла (1), (4) через наши потенциалы. Для этого возьмем ротор от уравнения (3) и раскроем его по правилу двойного векторного произведения:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B}$$

Используя обозначения $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, $\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Д'Аламбера, а также подставив вместо первого члена слева уравнение (1), а вместо последнего члена справа уравнение (4), мы получаем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \nabla \rho \;\Rightarrow\; \Box \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + 4\pi \nabla \rho \tag{9}$$

Аналогично получим и уравнение для магнитного поля (взяв ротор от (4) и подставив туда уравнения (3) и (2)):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c^2}\nabla \times \mathbf{j} \;\Rightarrow\; \Box \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{j} \tag{10}$$

Таким образом, мы всего лишь записали волновные уравнения электромагнитного поля, явно учитывая источники поля — заряды ρ и токи $\mathbf{j}$. Подставим теперь в наши уравнения (9) – (10) потенциалы (6) (опираясь на доказанное в пункте 2.2). Получаем:

$$\begin{aligned} &\Box \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + 4\pi \nabla \rho \\ &\Box \left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = \nabla \times -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{11}$$

Замечаем, что последнее уравнение будет верно тождественно, если положить следующее:

$$\Box \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{12}$$

Тогда с учётом (12) мы получаем для первого из (11) следующий вид уравнения:

$$\Box(\nabla\varphi) = -4\pi\nabla\rho$$

Аналогично (12) запишем:

$$\Box\varphi = -4\pi\rho \tag{13}$$

Таким образом, мы получили (12), (13) — волновые уравнения для потенциалов электромагнитного поля, которые вместе с определениями полей через потенциалы (6) полностью эквивалентны исходным уравнениям Максвелла (1) — (4). Полученные выше уравнения можно получить и по-другому, не делая допущений с ротором/градиентов для (11): сразу подставить в уравнения (1), (4) наши поля из (6) и затем воспользоваться Лоренц-калибровкой (8).

Кстати говоря, Лоренц-калибровка (8) задает здесь закон сохранения заряда (в виде уравнения непрерывности). В самом деле, применим к уравнению (12) дивергенцию, а к уравнению (13) дифференцирование $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ и сложим эти уравнения:

$$\begin{matrix} \Box(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\dfrac{4\pi}{c}\nabla\cdot\mathbf{j} \\ \Box\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\dfrac{4\pi}{c}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Box\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\left(\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

Так как выражение под оператором Д'Аламбера равно нулю в силу калибровки (8), отсюда получаем и равенство нулю правой части, где и записан закон сохранения заряда.