

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Факультет общей и прикладной физики

Общая физика: ГКЭ

Вопрос по выбору

## **Модовый состав лазерного излучения**

Работу выполнил:  
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный  
2019 год

# 1. Введение

**Лазер** — источник квазимонохроматического и узконаправленного высококогерентного потока излучения, работающий за счёт квантово-механического эффекта вынужденного (индуцированного) излучения.

Главными элементами лазера являются **оптический резонатор** и расположенная в нём **активная среда**, способная усиливать проходящее через неё излучение.

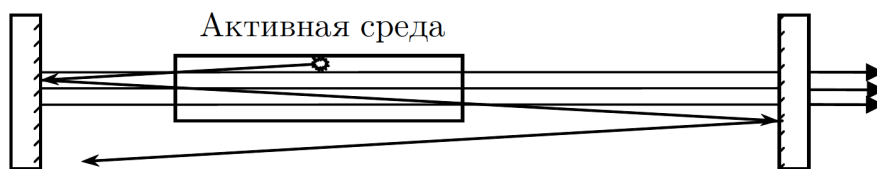


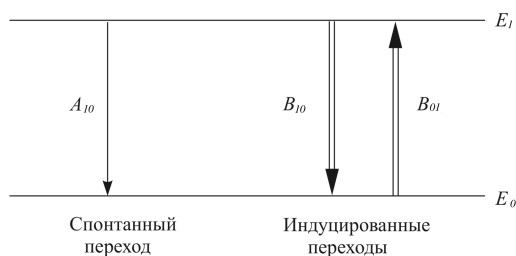
Рис. 1: Схема лазера

## 1.1 Квантово-механическое введение

Попробуем кратко описать основные квантовые принципы работы лазера, не останавливаясь, однако, на них подробно, так как основная тема работы заключается в исследовании модового состава излучения. Главная цель введения — объяснить необходимость и роль резонатора в лазере с целью последующего изучения его оптических свойств.

Также стоит отметить, что все вводимые понятия и термины не являются строгими определениями в общем смысле и даются постольку, поскольку помогают, по мнению автора, пониманию смысла изучаемого вопроса.

### 1.1.1 Спонтанные и вынужденные переходы



Энергия атомов в активной среде лазера может принимать только дискретные значения. Рассмотрим основной уровень энергии  $E_0$  (нижний) и возбужденный  $E_1$  (верхний). Переход между уровнями связан излучением (поглощением) фотона с энергией  $E_\omega = \hbar\omega = E_1 - E_0$  (т.е. электромагнитным полем частоты  $\omega$ ). Существует два разных типа перехода — спонтанный (самопроизвольный) и вынужденный (индуцированный).

Рис. 2: Переходы между уровнями энергии

**Самопроизвольный** переход, как следует из его названия, не зависит от каких-то внешних факторов, и является переходом возбужденного атома в основное состояние с испусканием фотона  $E_\omega$ . Вероятность такого перехода пропорциональна времени:

$$dW_c = A_{10}dt \Rightarrow w_c = \frac{dW_c}{dt} = A_{10} \quad (1)$$

Важно, что этот переход возможен только сверху вниз. Таким образом, заселение верхнего уровня (наполнение среды возбужденными атомами) может произойти только за счет другого типа перехода — **вынужденного** (т.е. индуцированного внешним полем частоты  $\omega$ ), являющимся поглощением фотона такого поля. Эйнштейн установил, что возможно также индуцированное испускание сверху вниз.

Он постулировал, что вероятность вынужденных переходов в единицу времени пропорциональна спектральной объемной плотности энергии  $\rho_\omega$  с коэффициентами  $B_{10}, B_{01}$  для испускания и поглощения соответственно (в отличие от константы (1)). При этом эти коэффициенты связаны соотношениями

$$A_{10} = \frac{h}{\pi^2 c^3} \omega^3 B_{10} = \frac{h}{\pi^2 c^3} \omega^3 B_{01}$$

### 1.1.2 Число фотонов вынужденного излучения

Таким образом, мы получаем, что для числа переходов в единицу времени сверху вниз у нас верно

$$N_{10} = \rho_\omega B_{10} + A_{10} = \left( \rho_\omega \frac{\pi^2 c^2}{\hbar \omega^3} + 1 \right) A_{10} \quad (2)$$

Это можно интерпретировать как прямую пропорциональность зависимости числа квантов  $n$  вероятности индуцированного излучения, причем связь числа квантов с плотностью задается, очевидно, из (2) как  $n = \rho_\omega \frac{\pi^2 c^2}{\hbar \omega^3} = \rho_\omega \frac{B_{10}}{A_{10}}$ . В таком случае, мы получаем, что отношение вероятности вынужденного и спонтанного перехода равно  $n$ , и в случае одного фотона эти вероятности равны.

Пусть теперь в системе есть  $N_1, N_0$  атомов в возбужденном и основном состоянии. В таком случае, запишем условие равновесия системы, т.е. равенство числа переходов сверху вниз и снизу вверх (которые пропорциональны, конечно, числу атомов):

$$N_1(\rho_\omega B_{10} + A_{10}) = N_0 \rho_\omega B_{01} \Rightarrow N_1(n + 1) = N_2 n$$

Интересно, что отсюда можно получить (так как заселенность уровней при температуре  $T$  определяется распределением Больцмана):

$$\frac{n}{n + 1} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_0}{kT}}} = e^{-\frac{E_1 - E_0}{kT}} \Rightarrow n = \frac{1}{e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

Таким образом, среднее число фотонов при переходах подчиняется распределению Бозе-Эйнштейна. Также важно, что отношение заселенностей уровней пропорционально экспоненте  $e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$ .

### 1.1.3 Интенсивность излучения, инверсная населенность

Теперь рассмотрим изменение интенсивности электромагнитной волны в нашей среде. Понятно, что в силу равенства  $B_{10} = B_{01}$  вероятность излучения фотона или его поглощения одинакова, тогда при прохождении через вещество (пусть волна движется по оси  $x$ ) эта вероятность пропорциональна одному и тому же сечению поглощения  $\sigma$  и, конечно же, числу атомов, способных поглотить или испустить фотон. Тогда для потока с большой интенсивностью ( $n \gg 1$ , т.е. спонтанными переходами пренебрегаем) запишем

$$dI = dI_{\text{изл}} + dI_{\text{погл}} = \sigma N_1 I dx - \sigma N_0 I dx \Rightarrow I = I_0 e^{\sigma(N_1 - N_0)x} \quad (3)$$

Таким образом, в случае термодинамически равновесной среды, где  $N_1 < N_0$ , наша волна будет затухать. Однако, если искусственно создать инверсную заселенность уровней  $N_1 > N_0$ , то получим усиление излучения при прохождении через активную среду. Именно это и делается в лазере.

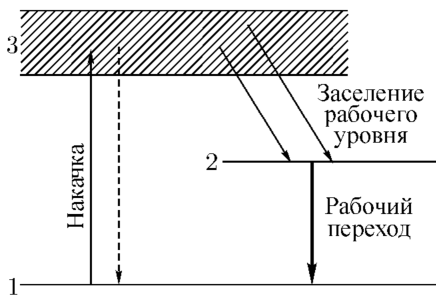


Рис. 3: Трехуровневая схема создания инверсной населенности

на узком уровне  $E_2$  атомы будут накапливаться в силу большого времени жизни, и получаем искомую инверсную населенность для  $N_2 > N_1$ .

Рассмотрим простейший пример создания инверсной населенности в среде с тремя возможными уровнями возбуждения с определенными требованиями к этим уровням. Пусть у нас есть процесс накачки — внешнее излучение с энергией  $\hbar\omega_{13} = E_3 - E_1$ , которое переводит атомы с основного состояния на возбужденный и причем широкий уровень  $E_3$ . Ширина  $E_3$  необходима для обеспечения короткого времени жизни атомов на этом уровне (из соотношения неопределенностей  $\Delta E \tau = \hbar$ ).

Уровень  $E_2$  должен быть очень узким, и заселение этого рабочего уровня (переход на  $E_2$ ) должно быть намного более вероятным, чем переход обратно на  $E_1$ . В таком случае

### 1.1.4 Обратная связь, резонатор

Для генерации излучения в лазере, активное вещество (например, кристалл) помещается в резонатор, который в простейшем случае представляет собой **интерферометр Фабри–Перо**, состоящий из двух плоских зеркал с высокими коэффициентами отражения, размещённых параллельно друг другу на фиксированном расстоянии. Этот резонатор реализует обратную связь — при самопроизвольном переходе  $E_2 \rightarrow E_1$  излучившийся квант света отражается от зеркал и возвращается к кристаллу, создавая в нем вынужденное излучение таких же квантов. Таким образом, многократно проходя через активную среду в силу отражения от зеркал, электромагнитная волна с частотой  $\omega_{21}$  экспоненциально (согласно (3)) усиливается.

Важно заметить, что для усиления исходного света отраженным он должен иметь с ним кратную  $2\pi$  фазу, т.е. на оптической длине резонатора укладывается целое число полувольт (для  $\lambda_{21}$ ), в системе при этом образуются стоячие волны.

Таким образом, резонатор обеспечивает создание положительной обратной связи в лазере и превращает его в генератор излучения. Также в резонаторе происходит накопление энергии из-

лучения и отбор узких резонансных линий из спектра излучения, рождающегося в среде. Одно из зеркал резонатора обычно имеет несколько меньший коэффициент отражения, что позволяет выпускать через него часть излучения в виде узконаправленного высокомонохроматического пучка (лазерное излучение).

## 1.2 Естественная ширина линии

Конечно, нужно понимать, что в реальности генерируемое лазером излучение и выделяемые резонатором волны являются не монохроматическими с бесконечно узкой линией поглощения/излучения  $\omega$ , а обладают конечной шириной. Немонохроматичность излучения волны частоты  $\omega$  (равной  $\omega_{21}$  для примера выше) характеризуется величиной  $\Delta\omega$ , которая называется шириной спектра усиления активной среды лазера (**спектра генерации**). Она определяется из различных явлений: помехи, потери на зеркалах, флуктуации полей и т.д. Основным эффектом обычно является эффект Доплера, возникающий при движении излучающих атомов навстречу волне.

Вывод показывает, что итоговая зависимость интенсивности лазерного излучения от частоты имеет форму гауссовой функции со спектром в интервале  $\omega \pm \Delta\omega$ .

## 2. Модовый состав лазерного излучения

**Модами** называют стационарные типы колебаний электромагнитного поля в резонаторе, различающиеся частотой и пространственным распределением амплитуды поля.

Рассмотрим моды в открытом резонаторе Фабри–Перо с плоскими зеркалами, расстояние между которыми равно  $L$ . Будем считать, для простоты вычислений и наглядности примера, что активная среда заполняет весь резонатор и имеет показатель преломления  $n = 1$ .

### 2.1 Продольные моды

Будем рассматривать **продольные моды**, т.е. волны, бегущие вдоль оси системы (пусть это будет  $x$ ). В результате отражения от зеркал мы получаем стоячие волны (см. рис. 4). Они задаются формулой  $E \propto \sin \omega t \sin kx$ .

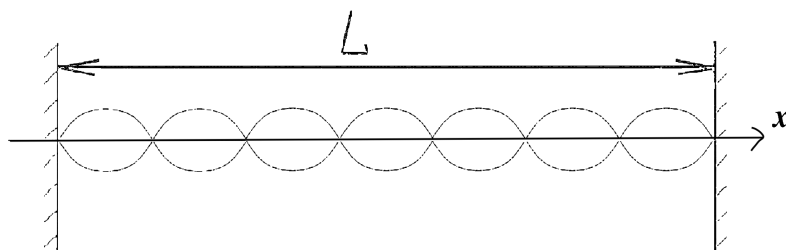


Рис. 4: Стоячие волны в плоскопараллельном резонаторе Фабри–Перо

В случае металлических (проводящих) зеркал, электрическое поле на них (т.е. на границе системы, в точках  $x = 0, x = L$ ) обращается в ноль. Из этого условия и формулы выше мы

получаем  $\sin kx = 0 \Rightarrow kL = \pi m$ , где  $m$ , конечно же, пробегает значения  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Подставляя волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , мы получаем условие на длину волны:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{m} \quad (4)$$

Тогда нетрудно найти частоты, удовлетворяющие (4). Так как частота световой волны  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda}$ , получаем

$$\omega_m = m \frac{\pi c}{L} \quad (5)$$

Таким образом, мы получаем, что из всей ширины спектра генераций резонатор выделяет дискретный набор узких спектральных линий  $\omega_m$ , соответствующих колебаниям продольных мод. Эти частоты также называются **собственными**.

## 2.2 Ширина спектральных линий

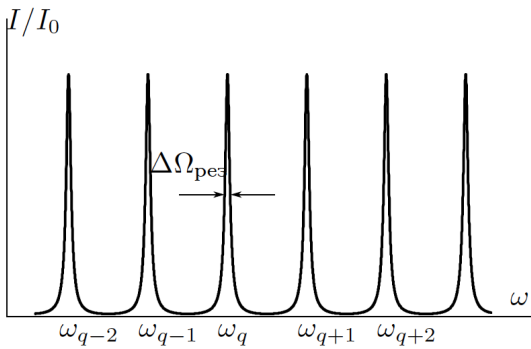


Рис. 5: Спектральная ширина собственных частот

Важно заметить, что эти линии не являются монохроматическими, а содержат в себе узкий спектр в интервале  $\omega_m \pm \Delta\Omega$ , где полуширина резонансного пика  $\Delta\Omega$  согласно теории колебаний определяется через добротность системы:  $\Delta\Omega \sim \frac{\omega_m}{Q}$ .

В силу определения добротности резонатора Фабри-Перо, мы получаем

$$Q \sim \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{1}{1 - \rho} \Rightarrow \Delta\Omega \sim \frac{\omega_m}{Q} \quad (6)$$

График распределения интенсивности мод от частоты представлен на рис. 5. Заметим, что ввиду наличия усиления в активной среде, реальная ширина генерируемых лазером спектральных линий может быть и значительно меньше полученной нами ширины линии пропускания резонатора.

Обратим внимание на то, что из-за квантово-механических эффектов, а также в силу дифракции, поглощения, отражения и других потерь энергии на зеркалах существует такое понятие как **уровень потерь**. Помещая полученные нами спектральные линии под гауссову кривую, упомянутую в пункте 1.2, мы оставляем лишь те из них, которые больше этого уровня (рис. 6).

Такой спектр излучения лазера достаточно типичен и называется **многомодовым**. Количество генерируемых мод зависит от соотношения усиления и потерь. Если усиление лишь немного выше уровня потерь, то возможна ситуация, когда будет возбуждена только центральная линия и режим работы лазера будет **одномодовым**. Также одномодовый режим можно получить и иначе, о чем пойдет речь в дальнейшем.

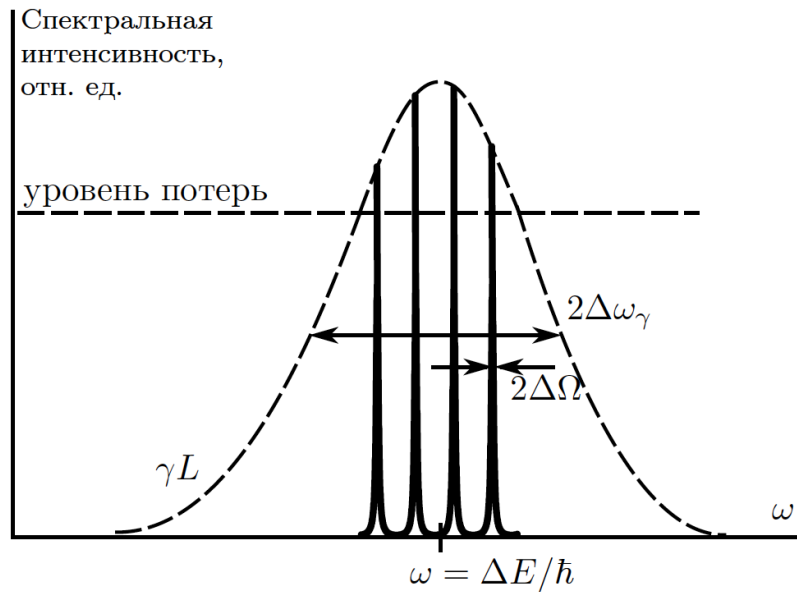


Рис. 6: Многомодовый спектр излучения лазера

### 3. Экспериментальный подсчет числа мод

Используем результаты выполненной в 4 семестре **лабораторной работы № 4.5.2 «Интерференция лазерного излучения»** для экспериментальной оценки числа продольных мод в гелий-неоновом лазере с длиной резонатора порядка  $0,2 \div 1$  м и средней длиной волны  $\lambda = 632,8$  нм (т.е. «несущая» частота  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 3 \cdot 10^{15}$  с).

Не вдаваясь в подробности лабораторной работы, объясним ее краткую суть (в части, интересной для нашего рассмотрения). С помощью экспериментальной установки мы расщепляем лазерное излучение и затем создаем между двумя полученными лучами геометрическую разность хода. Изучая зависимость видности интерференционной картины, которая задается формулой

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi l}{2L} N}{\sin \frac{\pi l}{2L}}, \quad (7)$$

от разности хода  $l$ , мы находим базу интерферометра  $L$  как расстояние  $2L$  между двумя главными максимумами картины. Определяя разность хода с помощью непосредственного измерения, а видность (7) с помощью сигналов, приходящих от экрана на фотодиод, из полученных в лабораторной данных построим график зависимости видности от разности хода.

Видно, что у нас наблюдается 2 максимума по краям области измерения и некоторые колебания в промежуточной области. А именно, максимумы в области  $x_1 \approx 10$  см и в области  $x_2 \approx 75$  см. Оценивая погрешности определения максимумов как примерно 2 см, получаем следующий результат:

$$L = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = (32,5 \pm 1,4) \text{ см}$$

Отсюда нетрудно получить и значение  $\Delta\nu_m$  — расстояние между модами.

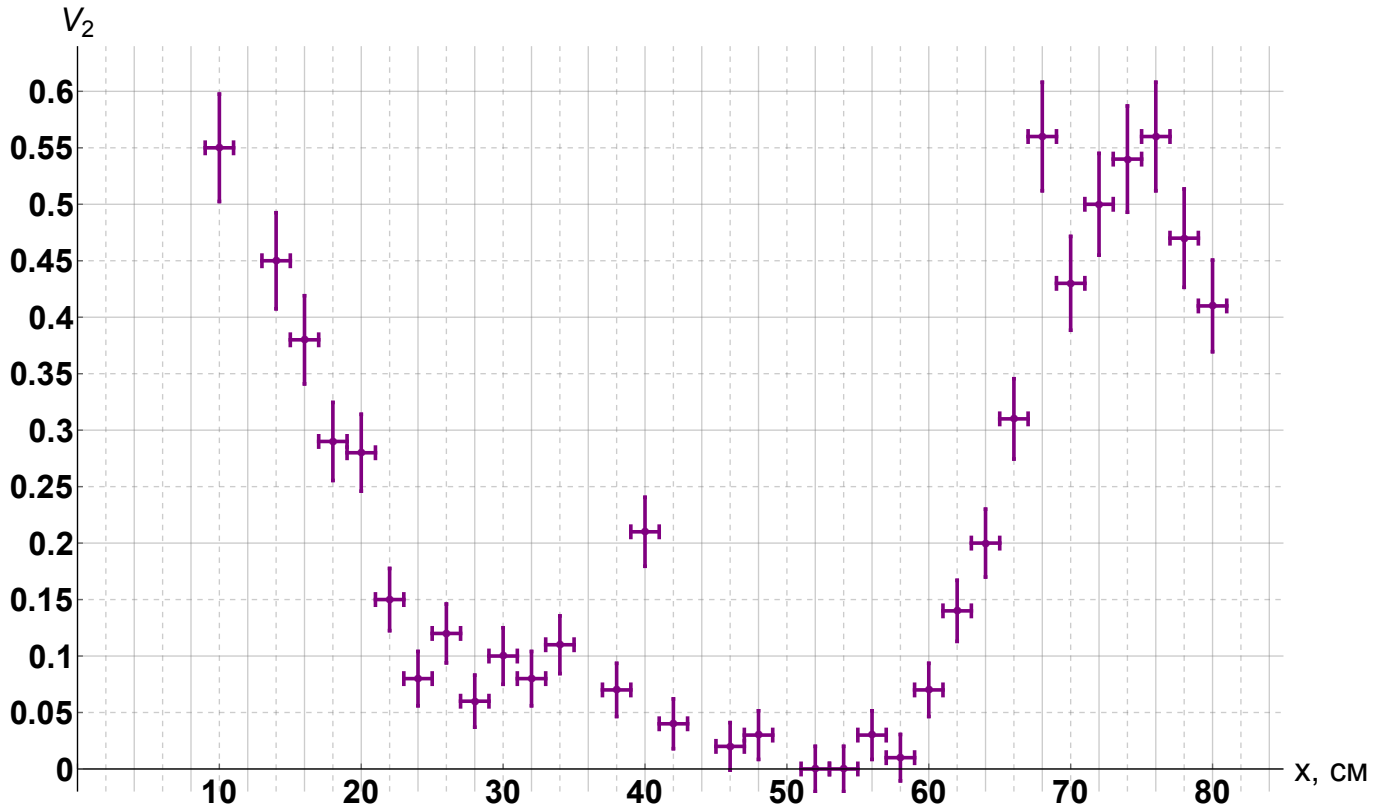


Рис. 7: Экспериментальный график видности интерференционной картины лазера

$$\Delta\nu_m = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2L} \approx (4,6 \pm 0,2) \cdot 10^8 \text{ Гц} \quad (8)$$

Кроме того, при уменьшении видности картины в 2 раза мы можем замерить соответствующую координату  $l_{1/2}$  и подсчитать время когерентности  $\tau_k = l_{1/2}/c$ . Тогда из принципа неопределённости  $\tau_k \Delta f \sim 1$  мы можем получить ширину спектра генерации  $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sim \frac{1}{\tau_k} = \frac{c}{l_{1/2}}$ . С учетом более точного анализа кривых, определяемых (7), можно уточнить формулу для  $\Delta f$  и получить интересующую нас формулу подсчета числа мод в виде

$$\Delta f \approx 0,6 \frac{c}{l_{1/2}}, \quad N \approx 1 + \frac{\Delta f}{\Delta\nu_m} = 1 + 1,2 \frac{L}{l_{1/2}} \quad (9)$$

Оценим  $l_{1/2} \approx 18 - 10 = 8 \pm 2$  см, откуда по формуле (9) получаем

$$\Delta f = 0,6 \frac{c}{l_{1/2}} \approx (22,5 \pm 5,6) \cdot 10^8 \text{ Гц}$$

Тогда для числа генерируемых лазером продольных мод можно провести оценку:

$$N \approx 1 + 1,2 \frac{L}{l_{1/2}} \approx 6 \pm 1$$

Такой результат вполне соотносится со типовыми показателями многомодовых гелий-неоновых лазеров.



Попробуем проверить, кстати, как соотносятся расстояние между модами  $\Delta\omega_m = 2\pi\Delta\nu_m \approx 28,9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  и ширина резонансного пика  $\Delta\Omega$ . Оценив добротность системы по формуле (6) и частоту резонансного пика из (5) (полагая  $m \sim 10^6$  для лазеров такого типа), мы получаем

$$Q \simeq 3,2 \cdot 10^8, \quad \omega_m \simeq 2,9 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\omega_m}{Q} \simeq 0,9 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$$

Видно, что исследуемые частоты отличаются на пару порядков. Все полученные величины хорошо соответствуют стандартным техническим характеристикам лазеров.

## 4. Селекция продольных мод

Зададимся вопросом селекции продольных мод, т.е. установлением **одномодового** режима работы лазера.

Как мы говорили выше, расстояние между модами задается формулой (8). Понятно, что если  $\Delta\nu > \Delta f/2$ , то у нас останется только одна мода (уже ближайшие соседи вышли за границу естественной ширины линии). Этого можно достичь при использовании короткого резонатора с малым значением  $L$ . Математически это условие формулируется неравенством

$$L \leq \frac{c}{\Delta f} \quad (10)$$

Например, расчёт для случая, полученного для лазера выше, будет составлять  $L \leq 13,3 \text{ см}$ . Однако для многих типов лазера с большей шириной спектра генерации (например, твердотельных) необходимая длина будет слишком мала (миллиметры или даже меньше), что крайне тяжело технически реализовать на практике. Поэтому мы рассмотрим следующий оптический метод.

### 4.1 Эталон Фабри-Перо для селекции продольных мод

Обычно селекция продольных мод осуществляется путем размещения внутри резонатора одного или нескольких интерферометров Фабри-Перо, которые состоят из плоскопараллельной пластины из прозрачного материала.

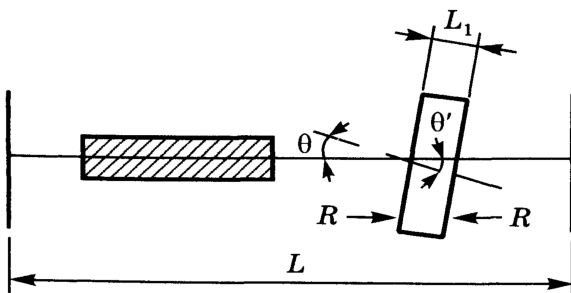


Рис. 8: Схема для селекции продольных мод, использующая эталон Фабри-Перо, работающий на пропускание.

Рассмотрим случай, когда в резонаторе используется один эталон Фабри-Перо, наклонённый под углом  $\theta$  к оси резонатора (рис. 8). В соответствии с формулой (5), максимумы этого эталона можно найти как

$$\nu_m = m \frac{c}{2L_1 \cos \theta'}$$

Поскольку  $L' = L_1 \cos \theta$  намного меньше длины резонатора  $L$ , в этом случае очень небольшого изменения угла  $\theta$  (и  $\theta'$ ) будет достаточно, чтобы

настроить максимум пропускания эталона на центральную частоту контура усиления лазера. Понятно также, что т.к. все величины частот  $\nu \propto \frac{1}{L}$ , то частотные характеристики эталона больше аналогичных для изначального резонатора.

Если теперь наложить на расстояние между модами резонатора  $\Delta\nu$  условие, что оно больше полуширины пика эталона  $\Delta\nu_c$ , то мы получаем следующий результат — пик пропускания эталона оставляет лишь одну моду изначального резонатора, т.е. он селектирует ее. Таким образом, мы получаем столько мод, сколько пиков пропускания эталона находится внутри спектра генерации. Наглядная картинка представлена на рис. 9.

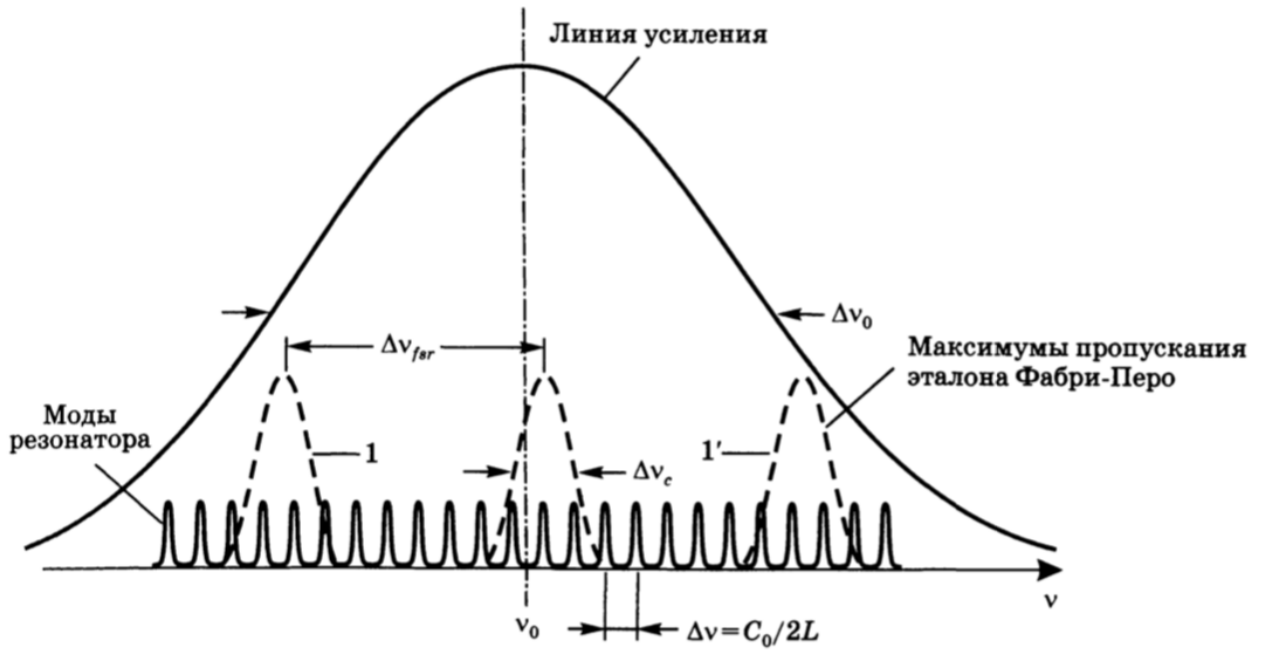


Рис. 9: Максимумы пропускания эталонов, наложенные на обычное модовое излучение лазера

Введем характеристику «резкость» эталона  $F = \frac{\Delta\nu_f}{\Delta\nu_c}$  — аналог добротности, который связывает расстояние между пиками  $\Delta\nu_{fsr}$  с их шириной  $\Delta\nu_c$ . Тогда сформулированное выше условие мы запишем как

$$\Delta\nu \geq \frac{\Delta\nu_c}{2} = \frac{\Delta\nu_{fsr}}{2F} \quad (11)$$

Так мы уменьшаем число продольных мод излучения лазера до числа пиков эталона, которые находятся внутри гауссовой кривой линии усиления. Чтобы сократить это число до единицы, нам, очевидно, нужно оставить лишь один максимум пропускания эталона внутри диапазона  $\Delta f$ . Это условие формулируется в виде  $\Delta\nu_f \geq \Delta f/2$ . Совместно с (11) мы получаем следующее:

$$2F\Delta\nu \geq \Delta\nu_{fsr} \geq \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow 2F\Delta\nu \geq \frac{\Delta f}{2}$$

Подставляя значение  $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ , мы получаем итоговый результат для длины резонатора  $L$ :

$$L \leq 2F \frac{c}{\Delta f}$$

Сравнивая это неравенство с (10), мы замечаем, что ограничение на длину резонатора увеличилось в  $2F$  раз. Стандартное значение резкости эталона Фабри-Перо  $F \sim 30$ . **Т.е. один эталон дает возможность увеличить длину резонатора примерно в 60 раз.**

Часто может не получиться оставить лишь одну моду с использованием одного эталона. В таком случае применяют два из них разной толщины. При использовании двух эталонов для разделения соседних продольных мод резонатора задействуется эталон, имеющий большее значение толщины. Второй, более тонкий эталон должен разделять соседние максимумы пропускания первого эталона. В таком случае, последовательно применяя вышеописанные рассуждения, мы получаем возможность увеличения до  $(2F)^2$  раз.

## 5. Заключение

Таким образом, мы изучили принципы работы лазеров и рассмотрели модовый состав их излучения (а именно, продольные моды). После теоретического описания многомодового режима работы мы экспериментально подсчитали основные характеристики модового спектра для гелий-неонового лазера с длиной резонатора 30 см и длиной волны 630 нм.

Очень важен бывает вопрос о селекции мод, т.е. получение одномодового излучения лазера. Работать с таким практически монохроматическим светом намного удобнее, чем учитывать вклад нескольких различных мод. Одним из популярных способов является использование эталонов Фабри-Перо внутри основного резонатора лазера. Это позволяет увеличивать длину резонатора при выделении одной продольной моды, что очень важно для практической реализации лазеров.

## Использованная литература

- Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Оптика / А.В. Максимычев, Д.А. Александров, Н.С. Берюлёва и др.; под ред. А.В. Максимычева. — М.: МФТИ, 2014. — 446 с.
- Звелто О. «Принципы лазеров/ Пер. под науч. ред. Т.А. Шмаонова. 4-е изд. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 720 с.: ил. — (Учебные пособия для вузов. Специальная литература).
- Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Начальные главы квантовой механики. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2016. — 360 с.
- Гольдин Л.Л., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988. — 496 с.
- Ципенюк Ю.М. Квантовая микро- и макрофизика. М.: Физматкнига, 2006. — 640 с.