

Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики
Учебная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

II семестр 2016-2017 учебного года

Домашнее задание №6:

Преобразования Лоренца, уравнения Максвелла и алгебра Клиффорда

Автор:

Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
19 мая 2017 года

1. Задача №1

В прошлом задании были получены преобразования Лоренца:

$$K \xrightarrow{v_1} K' : \begin{cases} x' = \frac{x + v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \\ t' = \frac{t + v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \end{cases} \quad (1)$$

Из условий задачи запишем аналогичные преобразования для следующего перехода:

$$K' \xrightarrow{v_2} K'' : \begin{cases} x'' = \frac{x' + v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \\ t'' = \frac{t' + v_2 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем прямую подстановку x', t' из (1) в (2):

$$\begin{cases} x'' = \frac{(x + v_1 t) + v_2(t + v_1 \frac{x}{c^2})}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \\ t'' = \frac{(t + v_1 \frac{x}{c^2}) + \frac{v_2}{c^2}(x + v_1 t)}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{x \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) + t(v_1 + v_2)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}} \\ t'' = \frac{t \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) + x \frac{v_1 + v_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}} \end{cases} \quad (3)$$

Введём напрашивающуюся замену:

$$\begin{cases} a = v_1 + v_2 \\ b = \frac{v_1 v_2}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = v_1^2 + 2bc^2 + v_2^2 \\ b^2 = \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = a^2 - 2bc^2 \\ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} = -\frac{a^2}{c^2} + 2b \end{cases} \quad (4)$$

Перепишем (3) в новых обозначениях:

$$\begin{cases} x'' = \frac{x(1 + b) + ta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} + 3b}} \\ t'' = \frac{t(1 + b) + x \frac{a}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} + 3b}} \end{cases} \quad (5)$$

Тогда очевидно, что функция $u = u(v_1, v_2)$ должна иметь следующий вид:

$$u(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{a}{1 + b} \quad (6)$$

Подстановкой в (5) мы убеждаемся, что после элементарных алгебраических преобразований преобразования принимают искомый вид:

$$\begin{cases} x'' = \frac{x + ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ t'' = \frac{t + x \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, мы доказали, что преобразования Лоренца действительно образуют группу.

Ответ: $u(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$

2. Задача №2

Запишем уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases} \quad (8)$$

Так как дивергенцию и ротор можно определить в нашем пространстве как $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$, то уравнения примут вид (базисы пространства $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$):

$$\begin{cases} 4\pi\rho = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ 0 = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} \end{cases} \quad (9)$$

Задача существенно упростится, если запишем уравнения в 4-мерном виде в вакууме:

$$\begin{cases} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Здесь мы используем обозначения:

$$\partial_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$F_{0i} = E_i, \quad F_{ik} = -\varepsilon_{ikl} H_l$$

Выпишем явно ковариантные коэффициенты (ведь мы работаем с ковариантными производными) антисимметричного тензора ЭМ поля $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Нам известно, что при преобразованиях Лоренца x, t изменяются согласно (1), а $y' = y$, $z' = z$. Это означает, что компоненты нашего тензора $F_{01} = E_x$ и $F_{32} = H_x$ сохраняются. (В самом деле, так как $y, z \equiv x^2, x^3 = \text{inv} \Rightarrow F^{23} = \text{inv} \Rightarrow F_{32} = \text{inv}$ согласно свойствам антисимметричного тензора, а $F_{01} = -F_{01} = \text{inv}$ (а так же нулевые $F_{00} = F_{11} = 0$) из-за неизменности по отношению к поворотам в двумерной системе, которые находятся во втором миноре 2×2 матричного представления нашего 4-тензора). Найдем теперь преобразования остальных компонент.

Согласно свойствам компонент 4-тензора, они преобразуются так же, как и произведение компонент двух 4-векторов. Выше мы нашли инвариантные компоненты, тогда мы понимаем, что компоненты F_{02}, F_{03} и F_{12}, F_{13} преобразуются так же, как $x^0, x^1 \equiv tc, x$ соответственно, т.е. по формулам, обратным (1). Это следует из того, что когда одна из цифр индекса переходит в себя (2 или 3), тогда компонента преобразуется как координата с нефиксированным индексом (0 или 1). Запишем явно:

$$\begin{cases} x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow F_{02} = \gamma \left(F'_{02} - \frac{v}{c} F'_{12} \right), \quad F_{12} = \gamma \left(F'_{12} - \frac{v}{c} F'_{02} \right) \quad (12)$$

Так же преобразуются и F_{02}, F_{13} . Здесь мы использовали релятивистский корень $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Подставив на место компонент тензора наши проекции E_i, H_i и выразив «штрихованные» компоненты через «обычные», мы получаем искомые линейные комбинации:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma \left(E_y + \frac{v}{c} H_z \right), & E'_z &= \gamma \left(E_z - \frac{v}{c} H_y \right), \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma \left(H_y - \frac{v}{c} E_z \right), & H'_z &= \gamma \left(H_z + \frac{v}{c} E_y \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, мы нашли преобразованные проекции полей, выражающиеся в виде линейной комбинации изначальных, что означает утвердительный ответ на вопрос задачи.

3. Задача №3

Образующие g_n нашей алгебры Клиффорда $\mathcal{A}(N)$ такие, что $\{g_i, g_j\} = 2\delta_{ij}$, и в качестве базиса линейного пространства (которым является алгебра) можно взять единицу алгебры e и мономы g_{n_1}, \dots, g_{n_k} . Символ Кронекера $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$), $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Посмотрим на алгебру $\mathcal{A}(2)$:

$$\{g_1, g_1\} = g_1^2 + g_1^2 = 2\delta_{11} \Rightarrow g_1^2 = 1$$

$$\{g_2, g_2\} = g_2^2 + g_2^2 = 2\delta_{22} \Rightarrow g_2^2 = 1$$

$$\{g_1, g_2\} = g_1g_2 + g_2g_1 = 2\delta_{12} \Rightarrow g_1g_2 = -g_1g_2$$

Отсюда получаем, что независимых (в смысле обычной линейной зависимости векторов) мономов по типу указанных выше 3, т.е. базисом алгебры $\mathcal{A}(2)$ можно назвать следующую систему элементов алгебры:

$$\text{Базис } \mathcal{A}(2) : e, g_1, g_2, g_1g_2 \Rightarrow 4 \text{ элемента} \quad (14)$$

Теперь посмотрим на алгебру $\mathcal{A}(4)$:

$$\{g_i, g_i\} = g_i^2 + g_i^2 = 2\delta_{ii} \Rightarrow g_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{g_i, g_j\} = g_i g_j + g_j g_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow g_i g_j = -g_j g_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Будем искать независимые мономы произведений образующих.

- Понятно, что есть **4 «одинокных» мономов** g_i .
- Для поиска «двойного» монома зафиксируем номер второго элемента и будем пробовать значения первого, т.е.: есть 3 независимых $g_i g_1$, при $j = 2$ нам подходят только $g_3 g_2, g_4 g_2$, и при $j = 3$ мы берем только $g_4 g_3$, при $j = 4$ новых независимых произведений мы не получим \Rightarrow всего **6 «двойных» мономов**.
- «Тройные» несложно перебрать явным образом: начнём с $g_1 g_2 g_3$, затем $g_1 g_2 g_4$, потом $g_1 g_3 g_4$ и наконец $g_2 g_3 g_4$. Понятно, что остальные будут линейны зависимы с этими, т.е. **4 «тройных» монома**.
- Наконец, нетрудно понять, что есть всего **1 «четвертной» моном**: $g_1 g_2 g_3 g_4$, ведь как и в случае с тремя, благодаря зависимости произведений $g_i g_j$ все остальные комбинации также будут зависимы.

Итак, получаем в качестве базиса следующую систему:

$$\text{Базис } \mathcal{A}(2) : e, 4 g_i, 6 g_i g_j, 4 g_i g_j g_k, g_1 g_2 g_3 g_4 \Rightarrow 16 \text{ элемента} \quad (15)$$

Обобщая наши результаты для $\mathcal{A}(N)$, мы замечаем, что в обоих случаях получился треугольник Паскаля из разнообразных типов элементов базиса для N -ой строки:

$$\begin{aligned} &1, 2, 1 \text{ для } N = 2 \\ &1, 4, 6, 4, 1 \text{ для } N = 4 \end{aligned}$$

Таким образом, нетрудно понять, что число элементов базиса алгебры Клиффорда $\dim \mathcal{A}(N) = 2^N$, что и выполняется для наших частных случаев.

Ответ: $\dim \mathcal{A}(N) = 2^N$

4. Задача №4

Будем работать с алгеброй Клиффорда $\mathcal{A}(N)$ в линейном пространстве $V : \dim V = 2^{N/2}$. Тогда введем следующие линейные комбинации образующих алгебры g_i , $i = 1, \dots, N$:

$$b_k^\pm = \frac{g_{2k-1} \pm i g_{2k}}{2} \quad (16)$$

Так как образующие удовлетворяют соотношению $\{g_i, g_j\} = 2\delta_{ij}$, то несложно проверить, что одинаковые операторы равны нулю всегда, а противоположные удовлетворяют тому же соотношению, т.е.

$$\begin{cases} \{b_i^+, b_j^+\} = \{b_i^-, b_j^-\} = 0 \quad \forall i, j \\ \{b_i^+, b_j^-\} = b_i^+ b_j^- + b_j^- b_i^+ = \delta_{ij} \end{cases} \quad (17)$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} \{b_i^+, b_j^+\} &= \frac{1}{4} ((g_{2i-1} + i g_{2i})(g_{2j-1} + i g_{2j}) + (g_{2j-1} + i g_{2j})(g_{2i-1} + i g_{2i})) \\ \{b_i^+, b_j^-\} &= \frac{1}{4} (g_{2i-1} g_{2j-1} + i g_{2i-1} g_{2j} + i g_{2i} g_{2j-1} - g_{2i} g_{2j} + g_{2j-1} g_{2i-1} + i g_{2i} g_{2j-1} + i g_{2j} g_{2i-1} - g_{2j} g_{2i}) \\ \{b_i^-, b_j^-\} &= \frac{1}{4} (\{g_{2i-1}, g_{2j-1}\} - \{g_{2i}, g_{2j}\} + i \{g_{2i-1}, g_{2j}\} + i \{g_{2i}, g_{2j-1}\}) \end{aligned}$$

Учитывая антикоммутирующие свойства g_k , получаем искомое равенство нулю, аналогично получаем ответ для остальных равенств системы (17).

4.1 Поиск базиса

Мы работаем с представлением алгебры, элементами являются матрицы размера $2^{N/2} \times 2^{N/2}$, и ставим в соответствие элементам алгебры (точнее, b_k^\pm) линейные операторы в пространстве V . То есть мы действуем на вектор v из V матрицами b_k^\pm и получаем другой вектор. Рассмотрим существование такого вектора $|v\rangle$, который удовлетворяет условию:

$$b_k^- |v\rangle = 0 \quad (18)$$

Покажем, что такое вектор существует. В самом деле, пусть $\exists w \in V : w = b_k^- |v\rangle \neq 0$. Тогда подействуем на вектор w тем же оператором, т.е. рассмотрим $W \in V : W = b_k^- w = b_k^- b_k^- |v\rangle$. Тогда согласно (17) мы получаем, что $b_k^- b_k^- = 0 \Rightarrow W = 0$. Тогда просто переопределим $|v\rangle \equiv W$, т.е. **такой вектор всегда существует**.

Найдём частные случаи систем векторов типа

$$v(s_1, \dots, s_{N/2}) = (b_1^+)^{s_1} \dots (b_k^+)^{s_{N/2}} |v\rangle, \quad s_i = 0, 1 \quad \forall i \quad (19)$$

Посмотрим на алгебру $\mathcal{A}(2)$: у нее есть два элемента типа b_k^\pm , а именно b^+, b^- . Таким образом, $v(s_1) = (b^+)^{s_1} |v\rangle$. Понятно, что тогда есть два таких вектора:

$$|v\rangle \text{ и } b^+ |v\rangle$$

У алгебры $\mathcal{A}(4)$ есть 4 ЛК типа (16): $b_1^\pm, b_2^\pm \Rightarrow v(s_1, s_2) = (b_1^+)^{s_1} (b_2^+)^{s_2} |v\rangle$ — 4 вектора, а именно

$$|v\rangle, b_1^+ |v\rangle, b_2^+ |v\rangle, b_1^+ b_2^+ |v\rangle$$

Покажем, что найденные вектора являются линейно независимыми. Например, предположим ЛЗ для трех векторов:

$$\begin{cases} b_1^+ |v\rangle = |v\rangle, \\ b_2^+ |v\rangle = b_1^+ |v\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1^- b_1^+ |v\rangle = b_1^- |v\rangle = 0 \\ b_1^- b_2^+ |v\rangle = b_1^- b_1^+ |v\rangle \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} ((b_1^+ b_1^- + b_1^- b_1^+) - b_1^+ b_1^-) |v\rangle = \delta_{11} |v\rangle - b_1^+ (b_1^- |v\rangle) = |v\rangle \neq 0 \\ ((b_1^- b_2^+ + b_2^+ b_1^-) - b_2^+ b_1^-) |v\rangle = \delta_{21} |v\rangle - b_2^+ b_1^- |v\rangle = 0 \neq b_1^- b_1^+ |v\rangle = |v\rangle \end{cases} \quad (21)$$

Получаем противоречие \Rightarrow эти комбинации — линейно независимы. Полученный результат нетрудно повторить и для других комбинаций всех 4-ех векторов, т.е. получаем, что найденные вектора действительно всегда образуют базис.

Доказательство, что базисов всегда $2^{N/2}$, весьма просто: у нас всегда в векторе типа $v(s_1, \dots, s_{N/2})$ стоит $N/2$ сомножителей, которые принимают по 2 возможных значений каждому, причём независимо друг от друга, тогда по комбинаторному правилу произведения получаем искомое число элементов — $2^{N/2}$.

Таким образом вектора $v(s_1, \dots, s_{N/2})$ задают базис в пространстве V . В этом базисе операторам b_k^- и b_k^+ , а значит и операторам g_n соответствуют матрицы $2^{N/2} \times 2^{N/2}$.

4.2 Матрицы Дирака

Матрицы, соответствующие g_n , называются матрицами Дирака, обозначим их G_n , определяются из соотношений

$$g_n v(s_1, \dots, s_{N/2}) = (G_n)_{s_1, \dots, s_{N/2}}^{t_1, \dots, t_{N/2}} v(t_1, \dots, t_{N/2}) \quad (22)$$

Коэффициенты $(G_n)_{s_1, \dots, s_{N/2}}^{t_1, \dots, t_{N/2}}$ являются матричными элементами матрицы G_n .

Найдём их для алгебры $\mathcal{A}(2)$: в задаче №3 мы выяснили, что базисом алгебры является комбинация $e, g_1, g_2, g_1 g_2$, причём из антикоммутатора получаем равенство $g_1^2 = g_2^2 = 1 = e$. Из свойств, полученных в (17) можно записать:

$$\begin{cases} b^\pm = \frac{g_1 \pm i g_2}{2} \\ (b^\pm)^2 = 0 \\ \{b^+, b^-\} = e \end{cases} \quad (23)$$

Рассмотрим наш вектор $|v\rangle$: $|v\rangle \neq 0$, $b^+ |v\rangle \neq 0$, $b^- |v\rangle = 0$. Определим вектор $|s\rangle$: $|s\rangle \stackrel{def}{=} (b^+)^s |v\rangle$, $s = 0, 1$. Тогда будет справедливо следующее:

$$|0\rangle = |v\rangle = 1 |0\rangle, |1\rangle = b^+ |v\rangle = 1 |1\rangle \quad (24)$$

$$b^- |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle \quad (25)$$

$$b^- |1\rangle = b^- b^+ |0\rangle = (e - b^+ b^-) |0\rangle = 1 |0\rangle + 0 |1\rangle \quad (26)$$

$$b^+ |0\rangle = 0 |0\rangle + 1 |1\rangle \quad (27)$$

$$b^+ |1\rangle = b^+ b^+ |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle \quad (28)$$

Из коэффициентов перед вектором $|s\rangle$ получаем искомые матрицы Дирака:

$$b^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Теперь посмотрим на алгебру $\mathcal{A}(4)$: Нам нужно найти 4 матрицы для $(b^\pm)_1^2, (b^\pm)_2^2$. Для этого мы выведем следующие равенства из (17):

$$\begin{cases} (b_{1,2}^\pm)^2 = 0 \\ \{b_1^+, b_1^-\} = \{b_2^+, b_2^-\} = e \\ \{b_1^+, b_2^-\} = \{b_2^+, b_1^-\} = \{b_1^\pm, b_2^\pm\} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Опять рассмотрим вектор $|v\rangle : |v\rangle \neq 0, b_1^+ |v\rangle \neq 0, b_2^+ |v\rangle \neq 0, b_1^+ b_2^+ |v\rangle \neq 0, b_1^- |v\rangle = b_2^- |v\rangle = 0$. Вектор $|s\rangle : |s\rangle \stackrel{def}{=} (b_1^+)^{s_1} (b_2^+)^{s_2} |v\rangle, s_1, s_2 = 0, 1$. Тогда:

$$|0\rangle = |v\rangle = 1 |0\rangle, |1\rangle = b_1^+ |v\rangle = 1 |1\rangle, |2\rangle = b_2^+ |v\rangle = 1 |2\rangle, |3\rangle = b_1^+ b_2^+ |v\rangle = 1 |3\rangle \quad (31)$$

$$b_1^- |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (32)$$

$$b_1^- |1\rangle = (e - b_1^+ b_1^-) |0\rangle = 1 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (33)$$

$$b_1^- |2\rangle = -b_2^+ b_1^- |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (34)$$

$$b_1^- |3\rangle = (e - b_1^+ b_1^-) |2\rangle = 1 |2\rangle - b_1^+ (b_1^- |2\rangle) = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 1 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (35)$$

$$b_1^+ |0\rangle = 0 |0\rangle + 1 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (36)$$

$$b_1^+ |1\rangle = b_1^+ b_1^+ |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (37)$$

$$b_1^+ |2\rangle = b_1^+ b_2^+ |0\rangle = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 1 |3\rangle \quad (38)$$

$$b_1^+ |3\rangle = b_1^+ b_1^+ b_2^+ |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (39)$$

$$b_2^- |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (40)$$

$$b_2^- |1\rangle = b_2^- b_1^+ |0\rangle = -b_1^+ b_2^- |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (41)$$

$$b_2^- |2\rangle = (e - b_2^+ b_2^-) |0\rangle = 1 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (42)$$

$$b_2^- |3\rangle = b_2^- b_1^+ b_2^+ |0\rangle = -b_1^+ b_2^- b_2^+ |0\rangle = -b_1^+ (e - b_2^+ b_2^-) |0\rangle = 0 |0\rangle - 1 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (43)$$

$$b_2^+ |0\rangle = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 1 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (44)$$

$$b_2^+ |1\rangle = -b_1^+ b_2^+ |0\rangle = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle - 1 |3\rangle \quad (45)$$

$$b_2^+ |2\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (46)$$

$$b_2^+ |3\rangle = -b_1^+ b_2^+ |2\rangle = 0 = 0 |0\rangle + 0 |1\rangle + 0 |2\rangle + 0 |3\rangle \quad (47)$$

Получаем ответ:

$$b_1^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b_1^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$b_2^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b_2^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$