Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Учебная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

II семестр 2016-2017 учебного года

Домашнее задание №5:

Специальная теория относительности

Автор:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
8 мая 2017 года

1. Вопрос №1

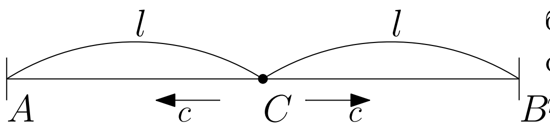


Рис. 1: Синхронизация часов

Поскольку скорость света конечна, возникает проблема синхронизации часов в каждой из двигающихся различных образующих систем. Вместо *абсолютного времени* возникает *местное время.*

Ввиду того, что из принципа относительности скорость света в каждой инерциальной системе отсчета равна c, возникает естественный способ синхронизации часов, предложенный Эйнштейном.

Рассмотрим часы, находящие в точках A и B отрезка длиной $2l$. Из точки С : $AC = CB = l$ пустим световой луч, движущийся со скоростью c. Тогда часы будут называться **синхронными** в инерциальной системе K, если этот луч дойдет до них в одинаковый момент по их показаниям.

2. Задача №1

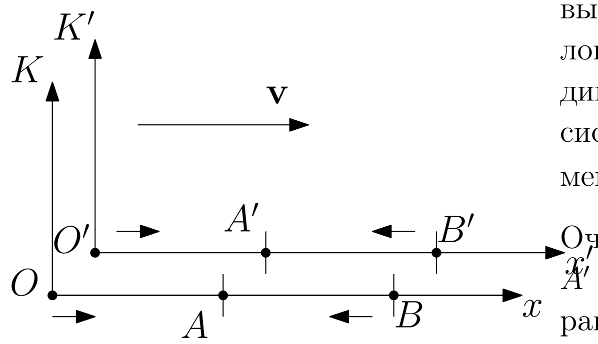


Рис. 2: Разность показания часов

Итак, по условию задачи в системе K в момент времени $t = 0$ из точек O и B вылетают 2 световых луча, которые встречаются в точке A. Аналогичные условия и обозначения для K' Координата $B = (x), A = (\frac{x}{2})$. Тогда понятно, что в системе K наши лучи встретятся в момент времени $t = \dfrac{x}{2c}$.

Очевидно, что наблюдатель, сидящий в точке A' в системе K' увидит луч, вылетевший из B$'$ раньше, чем тот, что вылетел из O' (действительно, ведь он движется навстречу B' со скоростью V и удаляется от O' с той же скоростью). Т.е. если мы обозначим время встречи с первым и вторым лучами за t'_1, t'_2 соответственно, то $t'_1 \neq t'_2$.

Из второго постулата СТО, свет в системе K' движется со скоростью c (как и в любой другой ИСО). Понятно, что $O'A' = c\tau$, где τ — время встречи лучей в системе K' (мы считаем, что в движущейся системе лучи также встретились в середине отрезка $O'B'$ в силу 1 постулата СТО, при это разница относительно K достигается за счёт неодновременности выпуска лучей). Однако путь, пройденный левым сигналом, равен $O'A' = \dfrac{x'}{2} + V\tau = c\tau$.

Обозначим за $\Delta t'$ время, в момент которого свет испускается из точки B', и понятно, что это и есть искомое время разности часов. Тогда из аналогичных соображений $O'B' = \dfrac{x'}{2} - V(\tau - \Delta t') = \mathrm{c}(\tau - \Delta t')$. Запишем систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{x'}{2} + V\tau = c\tau \\
\dfrac{x'}{2} - V(\tau - \Delta t') = \mathrm{c}(\tau - \Delta t') \\
x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ (Релятивистское сокращение длины)}
\end{cases} \tag{1}
$$

Решая эту систему, мы получаем:

$$
\Delta t' = \frac{Vx'}{c^2 - v^2} = \frac{Vx\sqrt{c^2 - v^2}}{c(c^2 - v^2)} = \frac{Vx}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}
$$

$$
\boxed{\text{Ответ: } \Delta t' = \frac{Vx}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}}
$$

3. Задача №2

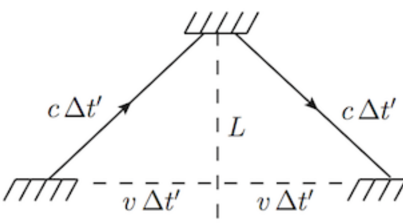


Рис. 3: Растяжение времени

Понятно, что в покоящейся системе K время пробега $\tau = 2\Delta t = \frac{2L}{c}$. Однако в движущейся K' это не так, и $\tau' = 2\Delta t' \neq \tau$.

Дело в том, что хотя часы проходят, конечно, расстояние $2c\Delta t'$, оно не равно расстоянию $2L$. За время $\Delta t'$ часы смещаются на расстояние $V\Delta t'$ по направлению движения стержня, ну а по вертикали наш сигнал смещается, естественно, на L (см. рисунок). Тогда можно записать теорему Пифагора:

$$
c^2\Delta t'^2 = v^2\Delta t'^2 + L^2 \tag{3}
$$

$$
(c^2 - v^2)\Delta t'^2 = L^2
$$

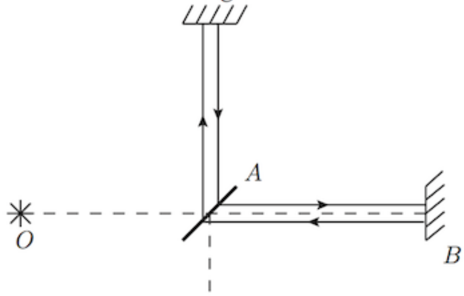
$$
\Delta t' = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}
$$

Учитывая $\tau' = 2\Delta t'$, получаем ответ:

$$
\boxed{\text{Ответ: } \tau' = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}
$$

4. Задача №3

Рассмотрим опыт Майкельсона-Морли. В движущейся системе K' рассмотрим движение света от зеркала A к B и C соответственно.



Понятно, что при движении в горизонтальном направлении время между уходом сигнала из точки A в B и приходом обратно равно

$$\tau_{\text{г}} = \frac{AB}{c+v} + \frac{AB}{c-v} \tag{4}$$

А при движении в вертикальном направлении происходит смещение часов, и согласно задаче №2,

$$\tau_{\text{в}} = \frac{2AC}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{5}$$

Из первого постулата СТО следует, что в системе K' должны происходить те же явления, что и в $K \Rightarrow \tau_{\text{в}} = \tau_{\text{г}}$. Так мы получаем:

$$AB\frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{2AC}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow AB = AC\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{6}$$

Если в системе $K \hookrightarrow AB = AC = L$, то в системе K' происходит сокращение Лоренца-Фицжеральда.

$$\boxed{\text{Ответ: } L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

5. Задача №4

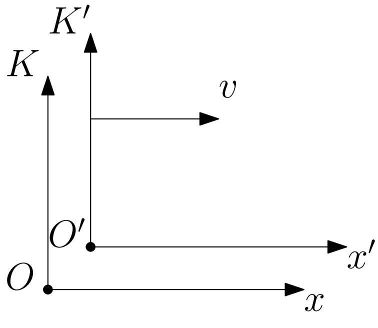


Рис. 5: Движение ИСО

В нерелятивистском случае ($v \ll c$) верны преобразования Галлилея:

$$\begin{cases} x' = x + vt' \\ t = t' \end{cases} \tag{7}$$

Когда скорость движения K' сравнима со скоростью света, они переходят в преобразования Лоренца.

Как было показано в задаче №3, $x \longrightarrow x\sqrt{1 - v^2/c^2}$, а из задачи №2 $t \longrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Кроме того, появляется эффект относительности одновременности, или же «отставание часов»: $\Delta t' = \dfrac{Vx}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, который добавляется ко времени t'

Так мы приходим к искомым преобразованиям Лоренца:

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2} + vt' \\ t = \dfrac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \dfrac{Vx}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{8}$$

Преобразуем и выразим все через «нештрихованные» координаты:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{9}$$

Это и есть искомые преобразования Лоренца.