Московский физико-технический университет Факультет общей и прикладной физики

Учебная программа «Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

II семестр 2016-2017 учебного года Домашнее задание №7:

Уравнения Максвелла, матрицы Дирака

Автор: Иванов Кирилл, 625 группа

> г. Долгопрудный 21 мая 2017 года

1. Задача №1

Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0\\ \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} = 0 \end{cases}$$
 (1)

На лекциях нами были получены следующие правила преобразований координаты и электромагнитного тензора:

$$\begin{cases} x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Rightarrow \partial_{\mu} x \longrightarrow \partial'_{\mu} x' = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} x \\ F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta} \end{cases}$$
 (2)

Где Λ^{μ}_{ν} — матрица из группы преобразования Лоренца. Подставим из (2) в первое уравнение (1):

$$\partial'_{\mu}F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\pi}_{\mu}\partial_{\pi}F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\pi}_{\mu}\partial_{\pi}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta} = \partial^{\pi}_{\alpha}\partial_{\pi}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta} = \Lambda^{\nu}_{\beta} = \partial_{\alpha}F^{\alpha\beta} = 0 \quad (3)$$

Мы получили Λ , умноженную на такую же (по типу) производную, что и в первом уравнении (1) \Rightarrow она тоже равна нулю, и это уравнение инвариантно. Аналогично рассмотрим второе уравнение:

$$\Lambda_{\lambda}^{\pi} \partial_{\pi} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} \partial_{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \Lambda_{\lambda}^{\pi} F_{\beta\pi} + \Lambda_{\nu}^{\beta} \partial_{\beta} \Lambda_{\lambda}^{\pi} \Lambda_{\mu}^{\alpha} F_{\pi\alpha} = \Lambda_{\lambda}^{\pi} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} (\partial_{\pi} F_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} F_{\beta\pi} + \partial_{\beta} F_{\pi\alpha}) = 0 \quad (4)$$

Получилось все действительно абсолютно аналогично. Таким образом, мы доказали, что уравнения Максвелла (1) инварианты относительно преобразований Лоренца (2).

2. Задача №3

По условию, мы работаем с 4×4 матрицами $A_{\mu\nu}$ из группы Лоренца, т.е. для них верно:

$$A_{\mu\alpha}A_{\nu\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{5}$$

Где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика, т.е $.\eta_{\mu\nu}={\rm diag}(1,-1,-1,-1).$ Также мы используем 4×4 матрицы Дирака, для которых верно:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\eta_{\mu\nu}E \tag{6}$$

E — единичная матрица 4×4 . При этом рассмотрим следующее приближение:

$$A_{\mu\nu} = E + \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} \ll 1 \tag{7}$$

Мы задаем матрицу S(A) как удовлетворяющему следующему условию:

$$A_{\mu\nu}\gamma_{\nu} = S^{-1}(A)\gamma_{\mu}S(A) \tag{8}$$

Подставив условие (7) в (5), мы получаем, что $(E+\omega_{\mu\alpha})(E+\omega_{\nu\beta})\eta_{\alpha\beta} = (E+\omega_{\nu\beta})(\eta_{\alpha\nu}+\omega_{\nu\alpha}) = \eta_{\mu\nu}$, отсюда $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

Будем искать искомое S(A) в виде разложения

$$S(A) = C_0(A)E + C_{\mu}(A)\gamma_{\mu} + C_{\mu\nu}(A)[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] + \dots$$
 (9)

Причем в случае (7) это разложение приобретает вид

$$S(A) = E + \omega_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} \tag{10}$$

Где $\Gamma_{\mu\nu}$ – матрица 4×4 . Проверим это. Чтобы найти эти коэффициенты $C_i(A)$, мы будем исследовать разложение до i-того члена, пользуясь определение обратной матрицы:

$$i = 0, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow C_0(A)EC_0(A)E = E \Rightarrow C_0(A) = 1$$
 (11)

$$i = 1, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow (C_0(A)E - C_\mu(A)\gamma_\mu)(C_0(A)E + C_\mu(A)\gamma_\mu) = E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_\mu(A)\gamma_\mu - C_\mu(A)\gamma_\mu - C_\mu(A)\gamma_\mu C_\mu(A)\gamma_\mu = 0 \Leftrightarrow C_\mu(A)\gamma_\mu C_\mu(A)\gamma_\mu = 0 \Rightarrow C_\mu(A) = 0 \quad (12)$$

$$i = 2, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow (E - C_{\mu\nu}(A) [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}])(E + C_{\mu\nu}(A) [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (E - C_{\mu\nu}(E + \omega_{\mu\nu}) [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}])(E + C_{\mu\nu}(E + \omega_{\mu\nu}) [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]) = E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (E - \omega_{\mu\nu} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}])(E + \omega_{\mu\nu} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]) = E$$

$$(13)$$

Таким образом, мы получили, что при условии (7) разложение (9) действительно принимает вид (10), причём $\Gamma_{\mu\nu}$ является функцией от коммутатора $[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$. Теперь найдем уравнение для $\Gamma_{\mu\nu}$: подставим в наше условие (8) выражения из (7) и (10) и получаем:

$$(E - \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu})\gamma_{\mu}(E + \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}) = (E + \omega_{\mu\nu})\gamma_{\nu} \Leftrightarrow E\gamma_{\mu} + \gamma_{\mu}\omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}\gamma_{\mu} = E\gamma_{\nu} + \omega_{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\gamma_{\mu}, \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}] = \omega_{\mu\nu}\gamma_{\nu}$$
(14)

Это и есть искомое уравнение на $\Gamma_{\mu\nu}$. Преобразуем его:

$$\omega_{\mu\nu}\gamma_{\nu} = \omega_{\alpha\beta} \left[\gamma_{\mu}, \Gamma_{\alpha\beta} \right] = \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} (\eta_{\mu\alpha}\gamma_{\beta} - \eta_{\mu\beta}\gamma_{\alpha}) = \frac{1}{2} (\omega_{\mu\beta}\gamma_{\beta} + \omega_{\mu\alpha}\gamma_{\alpha}) = \omega_{\mu\alpha}\gamma_{\alpha}$$
 (15)

Можно заметить, что $[\gamma_{\mu}, \Gamma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\gamma_{\beta} - \eta_{\mu\beta}\gamma_{\alpha}) = \frac{1}{4}(\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\alpha}\}\gamma_{\beta} - \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\beta}\}\gamma_{\alpha})$. Тогда мы воспользуемся соотношением на антикоммутаторы (6) и подставим в полученное выражение:

$$\frac{1}{4}\left[\gamma_{\mu},\Gamma_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{4}(\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} + \gamma_{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\beta} - \gamma_{\mu}\gamma_{\beta}\gamma_{\alpha} - \gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}) = \frac{1}{4}(\gamma_{\mu}\left[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\right] - \left[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\right]\gamma_{\mu}) = \frac{1}{4}\left[\gamma_{\mu},\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\right]$$
(16)

Отсюда получаем искомый ответ:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta} \right] \tag{17}$$

Это и есть выражение матриц
 Γ через матрицы Дирака.