Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Образовательная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

III семестр 2017-2018 учебного года

Домашнее задание №1:

Элементы классической теории поля, Лагранжев формализм

Автор:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
15 сентября 2017 года

1. Вопросы

Лагранжиан, или функция Лагранжа — величина, характеризующая систему, является функцией обобщённых координат $q_i(t)$, их производных $\dot{q}_i(t)$ и самого времени t:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_i(t), \dot{q}_i(t), t\right), \qquad i = 1, 2, \dots N$$

В механике ее физическим смыслом является разность кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m\dot{q_i}^2}{2} - U \tag{1}$$

Уравнения Лагранжа являются аналогом 2 закона Ньютона и получаются простым дифференцированием (1) и подстановкой в 2 ЗН:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{2}$$

По определению **действием** называют интеграл вида

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)dt \tag{3}$$

Действие — это функционал, физический смысл которого можно трактовать как «количество движения».

Введем некую функцию $I = I(q(t), \dot{q}(t)$, и будем называть ее **интегралом движения**, если

$$\frac{dI(q(t), \dot{q}(t))}{dt} = 0 \Rightarrow I(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const} \tag{4}$$

2. Упражнения

2.1 Упражнение 1

Принцип наименьшего действия заключается в том, что если у нас есть определённые положения системы $q(t_1)$ и $q(t_2)$, то между двумя этими положениями система движется так, чтобы интеграл (3) имел минимальное (или экстремальное в более общем случае) значение.

Произведём вариации, т.е. добавим к координате бесконечно малый член δ, т.е. $q(t) \longrightarrow q(t) + \delta q(t)$. При этом наложим граничное условие

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{5}$$

Тогда математически принцип наименьшего действия формулируется как

$$\delta S = S(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - S(q, \dot{q}) = 0 \tag{6}$$

Подставим в (6) определение действия (3):

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - \mathcal{L}(q, \dot{q})\right] dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right] dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q\right] dt$$

Теперь проинтегрируем по частям и воспользуемся условием (5):

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right] dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q \,\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] \delta q dt = 0$$

Отсюда мы и получаем исходные уравнения Лагранжа (2).

2.2 Упражнение 2

Пусть у нас координата $q(t)$ варьируется как $q(t) \longrightarrow q(t) + \varepsilon h(t)$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда существование

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t) + \varepsilon h(t)) - \mathcal{L}(q(t)) = 0 \tag{7}$$

называется симметрией системы. **Теорема Нетер** утверждает, что если существует симметрия (7), то будет существовать и интеграл движения (4).

Док-во. Предположим, что наше действие из (6) зависит от некой функции, подобной лагранжиану, умноженной на некую добавку $\dot{\varepsilon}$, зависящую в общем случае от времени:

$$\delta S = 0 = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(q, \dot{q})\dot{\varepsilon} dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(q, \dot{q}) d\varepsilon = I(q, \dot{q})\varepsilon \,\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} I(q, \dot{q}) dt = 0$$

Из физического смысла понятно, что согласно определениям из (5) и (7) это равносильная запись принципа наименьшего действия (6). Пользуясь для ε условием (5), мы обнуляем первый член и получаем требуемое доказательство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} I(q, \dot{q}) dt = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dI(q, \dot{q})}{dt} = 0 \Rightarrow I(q, \dot{q}) = 0$$

3. Задачи

3.1 Задача 1

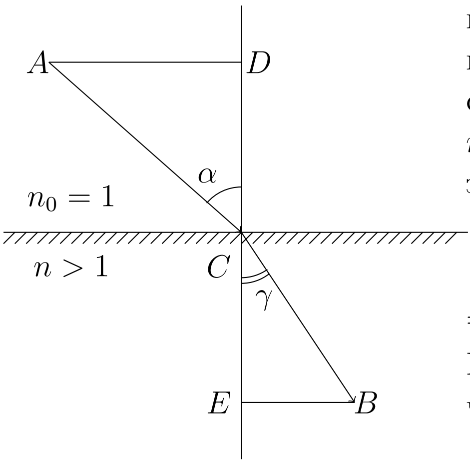

Рис. 1: Преломление света

Выведем закон преломления света, опираясь на предположение, что луч света бежит по пути, занимающему наименьшее время.. Нам известно, что свет идет из среды с показателем преломления $n_0 = 1$ в среду с показателем $n > 1$. Он проходит через точку C так, чтобы его путь занимал наименьшее время.

Он проходит путь $AC + CB$ за время $\tau = \frac{AC}{c} + \frac{BC}{v} = = \frac{AC + nCB}{c}$. Пусть мы знаем $AD + EB = L, DC, CE$. Будем считать $EB = x$ – переменной, и тогда очевидно, что $AD = L - x$. Из теоремы Пифагора получаем

$$\tau = \frac{1}{c}\left(\sqrt{DC^2 + (L-x)^2} + n\sqrt{CE^2 + x^2}\right)$$

Возьмем производную по времени от переменной x и приравняем ее к нулю для нахождения экстремума:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{c}\left(n\frac{x}{\sqrt{CE^2 + x^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{DC^2 + (L-x)^2}}\right) = 0 \ \Rightarrow \ n\frac{EB}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

Так как из геометрии $\sin\alpha = \frac{AD}{AC}, \sin\gamma = \frac{x}{CB}$, получаем искомый закон преломления света:

$$\sin\alpha = n\sin\gamma$$

3.2 Задача 2

В сферических координатах известно, что

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Здесь $(r, \varphi, \theta) \Leftrightarrow (q_1, q_2, q_3)$. Легко получить и выражение для скоростей и кинетической энергии системы: $v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}, v_\theta = r\dot{\theta}$, тогда

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Отсюда мы получаем запись Лагранжиана:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$$

Тогда продифференцируем $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}, \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$ и запишем систему из трех уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = \dfrac{k}{r^2} \\ 2\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi} = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$$

3.3 Задача 3

Будем решать задачу в декартовых координатах, где Лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{8}$$

Будем считать поворот как композицию поворотов вокруг осей x, y, z. Например, повернув на угол α вокруг оси z, мы получаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x'} = \dot{x}\cos\alpha - \dot{y}\sin\alpha \\ \dot{y'} = \dot{x}\sin\alpha + \dot{y}\cos\alpha \\ \dot{z'} = \dot{z} \end{cases}$$

Простой подстановкой в (8) нетрудно убедиться в инвариантности вида Лагранжиана в штрихованных координатах. Аналогично проверятся для 2 и 3 поворота вокруг осей x, y.

Бесконечно-малые преобразования получаются, если мы считаем $\alpha \ll 1 \;\Rightarrow\; \cos\alpha \approx \approx 1, \sin\alpha \approx \alpha$:

$$\begin{cases} x' = x - y\alpha \\ y' = x\alpha + y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x'} = \dot{x} - \dot{y}\alpha \\ \dot{y'} = \dot{x}\alpha + \dot{y} \\ \dot{z'} = \dot{z} \end{cases}$$

Запишем теперь в матричном виде для всех трех поворотов:

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad M_y(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_z(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Тогда единая матрица поворота будет произведением этих трех. Запишем ее, отбрасывая порядки малости больше первого:

$$M(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & -\beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & -\beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$