Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Учебная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

II семестр 2016-2017 учебного года

Домашнее задание №7:

Уравнения Максвелла, матрицы Дирака

Автор:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
21 мая 2017 года

1. Задача №1

Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

На лекциях нами были получены следующие правила преобразований координаты и электромагнитного тензора:

$$\begin{cases} x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Rightarrow \partial_\mu x \longrightarrow \partial'_\mu x' = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu x \\ F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \end{cases} \tag{2}$$

Где Λ^μ_ν — матрица из группы преобразования Лоренца. Подставим из (2) в первое уравнение (1):

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \Lambda^\pi_\mu \partial_\pi F'^{\mu\nu} = \Lambda^\pi_\mu \partial_\pi \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} = \partial^\pi_\alpha \partial_\pi \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^\nu_\beta = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \tag{3}$$

Мы получили Λ, умноженную на такую же (по типу) производную, что и в первом уравнении (1) $\Rightarrow$ она тоже равна нулю, и это уравнение инвариантно. Аналогично рассмотрим второе уравнение:

$$\Lambda^\pi_\lambda \partial_\pi \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F_{\alpha\beta} + \Lambda^\alpha_\mu \partial_\alpha \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\pi_\lambda F_{\beta\pi} + \Lambda^\beta_\nu \partial_\beta \Lambda^\pi_\lambda \Lambda^\alpha_\mu F_{\pi\alpha} = \Lambda^\pi_\lambda \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu (\partial_\pi F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\pi} + \partial_\beta F_{\pi\alpha}) = 0 \tag{4}$$

Получилось все действительно абсолютно аналогично. Таким образом, мы доказали, что уравнения Максвелла (1) инварианты относительно преобразований Лоренца (2).

2. Задача №3

По условию, мы работаем с 4×4 матрицами $A_{\mu\nu}$ из группы Лоренца, т.е. для них верно:

$$A_{\mu\alpha} A_{\nu\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{5}$$

Где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика, т.е .$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Также мы используем 4×4 матрицы Дирака, для которых верно:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} E \tag{6}$$

E — единичная матрица 4×4. При этом рассмотрим следующее приближение:

$$A_{\mu\nu} = E + \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} \ll 1 \tag{7}$$

Мы задаем матрицу $S(A)$ как удовлетворяющему следующему условию:

$$A_{\mu\nu}\gamma_\nu = S^{-1}(A)\gamma_\mu S(A) \tag{8}$$

Подставив условие (7) в (5), мы получаем, что $(E+\omega_{\mu\alpha})(E+\omega_{\nu\beta})\eta_{\alpha\beta} = (E+\omega_{\nu\beta})(\eta_{\alpha\nu}+\omega_{\nu\alpha}) = \eta_{\mu\nu}$, отсюда $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

Будем искать искомое $S(A)$ в виде разложения

$$S(A) = C_0(A)E + C_\mu(A)\gamma_\mu + C_{\mu\nu}(A)\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right] + ... \tag{9}$$

Причем в случае (7) это разложение приобретает вид

$$S(A) = E + \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu} \tag{10}$$

Где $\Gamma_{\mu\nu}$ – матрица 4×4. Проверим это. Чтобы найти эти коэффициенты $\mathrm{C}_i(A)$, мы будем исследовать разложение до i-того члена, пользуясь определение обратной матрицы:

$$i=0, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow C_0(A)EC_0(A)E = E \Rightarrow C_0(A) = 1 \tag{11}$$

$$\begin{gathered} i=1, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow (C_0(A)E - C_\mu(A)\gamma_\mu)(C_0(A)E + C_\mu(A)\gamma_\mu) = E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_\mu(A)\gamma_\mu - C_\mu(A)\gamma_\mu - C_\mu(A)\gamma_\mu C_\mu(A)\gamma_\mu = 0 \Leftrightarrow C_\mu(A)\gamma_\mu C_\mu(A)\gamma_\mu = 0 \Rightarrow C_\mu(A) = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} i=2, \quad S^{-1}(A)S(A) = E \Leftrightarrow (E - C_{\mu\nu}(A)\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right])(E + C_{\mu\nu}(A)\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (E - C_{\mu\nu}(E+\omega_{\mu\nu})\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right])(E + C_{\mu\nu}(E+\omega_{\mu\nu})\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]) = E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (E - \omega_{\mu\nu}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right])(E + \omega_{\mu\nu}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]) = E \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, мы получили, что при условии (7) разложение (9) действительно принимает вид (10), причём $\Gamma_{\mu\nu}$ является функцией от коммутатора $[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$. Теперь найдем уравнение для $\Gamma_{\mu\nu}$: подставим в наше условие (8) выражения из (7) и (10) и получаем:

$$\begin{gathered} (E - \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu})\gamma_\mu(E + \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}) = (E+\omega_{\mu\nu})\gamma_\nu \Leftrightarrow E\gamma_\mu + \gamma_\mu\omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}\gamma_\mu = E\gamma_\nu + \omega_{\mu_\nu} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\gamma_\mu, \omega_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}] = \omega_{\mu\nu}\gamma_\nu \end{gathered} \tag{14}$$

Это и есть искомое уравнение на $\Gamma_{\mu\nu}$. Преобразуем его:

$$\omega_{\mu\nu}\gamma_\nu = \omega_{\alpha\beta}\left[\gamma_\mu, \Gamma_{\alpha\beta}\right] = \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2}(\eta_{\mu\alpha}\gamma_\beta - \eta_{\mu\beta}\gamma_\alpha) = \frac{1}{2}(\omega_{\mu\beta}\gamma_\beta + \omega_{\mu\alpha}\gamma_\alpha) = \omega_{\mu\alpha}\gamma_\alpha \tag{15}$$

Можно заметить, что $[\gamma_\mu, \Gamma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\gamma_\beta - \eta_{\mu\beta}\gamma_\alpha) = \frac{1}{4}(\{\gamma_\mu,\gamma_\alpha\}\gamma_\beta - \{\gamma_\mu,\gamma_\beta\}\gamma_\alpha)$. Тогда мы воспользуемся соотношением на антикоммутаторы (6) и подставим в полученное выражение:

$$\frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \Gamma_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta - \gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha - \gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha) = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] - \left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]\gamma_\mu) = \frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta\right] \tag{16}$$

Отсюда получаем искомый ответ:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] \tag{17}$$

Это и есть выражение матриц Γ через матрицы Дирака.