1. Задача 1.

Пусть система отсчета К двигается относительно системы К$*$ со скоростью v_1. А система К$*$ двигается относительно системы К $**$ со скоростью v_2. Предполагая , что координаты (x$*$,$t*$) с (x,t), как и (x$**$,$t**$) с (x$*$,$t*$) связаны стандартными соотношениями Лоренца, проверить следует ли из этого, что (x $**$,t $**$) выражаются через (x,t) аналогичными соотношениями , в которых роль скорости системы отсчета К относительно К $**$ играет u(v1,v2)–функция от v1 и v2.

Найти эту функцию. Утвердительный ответ для этой задачи означает, что преобразования Лоренца образуют группу.

2. Задача 2.

Используя вид уравнений Максвелла в терминах электрического $\text{E}_\text{к}$ и магнитного $H_\text{к}$ полей (к = 1,2,3) (то есть не переходя к векторному и скалярному потенциалам) , проверить , что, если функции координат и времени $\text{E}_\text{к}$ и $H_\text{к}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла, то и $\text{E}*_\text{к}$ и $H*_\text{к}$ –некоторые определенные линейными комбинации полей $\text{E}_\text{к}$ и $H_\text{к}$, взятых в точке пространства-времени с координатами (x $*$,$y*$,$z*$,$t*$), которые выражаются через (x,y,z,t) формулами преобразования Лоренца, для случая движения одной системы отсчета относительно другой со скоростью в вдоль оси x.

Найти явно коэффициенты в этих линейных комбинациях. Утвердительный ответ для этой задачи означает, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца .

3. Задача 3.

Пусть A(N) -алгебра Клиффорда с образующими g_n, где $n = 1,...,N$, которые удовлетворяют соотношениям$g_n g_m + g_m g_n = 2d_{n,m}$, или $g_n g_m$,$g_m g_n = 2d_{n,m}$ где $d_{n,m}$-символ Кронекера. В качестве базиса A(N) как векторного пространства можно взят e-единицу в алгебре E, а также мономы $g_{n_1}...g_{n_k}$, где $n_1 < ... < n_\text{к} <$ H.

Найти число элементов этого базиса, то есть размерность алгебры A(N) как векторного пространстваю

4. Задача 4.

Преставление алгебры A(N) для четного N матрицами $2^{N/2}$x$2^{N/2}$ можно построить следующим образом. Пусть V-векторное пространство размерности $2^{N/2}$. Поставим в соответствие элементам алгебры A(N) линейные операторы, действующие в пространстве V. Очевидно, что достаточно сделать это для генераторов g_n. Удобно от g_n перейти к их линейным комбинациям $b^+_\text{к}$и $b^-_\text{к}$,где к = 1,...,$N/2$.

$$b_{\text{к}}^{+} = (g_{2\text{к}-1} + ig_{2\text{к}})/2$$
$$b_{\text{к}}^{-} = (g_{2\text{к}-1} - ig_{2\text{к}})/2.$$

Новые генераторы удовлетворяют соотношениям операторов "рождения"и уничтожения"

$$b_{\text{к}}^{+},b_{m}^{+} = b_{\text{к}}^{-},b_{m}^{-} = 0,$$
$$b_{\text{к}}^{+},b_{m}^{-} = d_{k,m}$$

Поскольку операторы рождения $b_{\text{к}}^{+}$ антикоммутируют между собой, как и операторы уничтожения $b_{\text{к}}^{-}$, то в пространстве Vсуществует вектор $|v>$, который удовлетворяет условиям

$b_{\text{к}}^{-}|v>= 0.$

Действие на в операторов $b_{\text{к}}^{+}$ определяет вектора

$$v(s_1,...,s_{N/2}) = (b_1^{+})_1^{s}...(b_{\text{к}}^{+})s_{N/2}|v>,$$

где $s_i = 0,1\forall i.$

Покажите, что вектор $|v>$ существует. Покажите, что вектора $v(s_1,...,s_{N/2})$ линейно независимы, а их число равно $2^{N/2}$.

Таким образом вектора $v(s_1,...,s_{N/2}$ задают базис в пространстве V. В этом базисе операторам $b_{\text{к}}^{-}$ и $b_{\text{к}}^{-}$, а значит и операторам g_n соответствуют матрицы $2^{\text{Н}/2}$x$2^{\text{Н}/2}$. Матрицы, соответствующие g_n, называются матрицами Дирака,обозначим их G_n, определяются из соотношений

$$g_n v(s_1,...,s_{N/2}) = (G_n)_{s_1,...,s_{N/2}}^{t_1,...,t_{N/2}} v(t_1,...,t_{N/2}).$$

kоэффициенты $(G_n)_{s_1,...,s_{N/2}}^{t_1,...,t_{N/2}}$ являются матричными элементами матрицы G_n.

Найти матрицы Дирака G_n явно для случаев $N = 2$ и $N = 4$.