Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Учебная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

II семестр 2016-2017 учебного года

Домашнее задание №6:

Преобразования Лоренца, уравнения Максвелла и алгебра Клиффорда

Автор:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
19 мая 2017 года

1. Задача №1

В прошлом задании были получены преобразования Лоренца:

$$K \xrightarrow{v_1} K' : \begin{cases} x' = \dfrac{x + v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t + v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \end{cases} \tag{1}$$

Из условий задачи запишем аналогичные преобразования для следующего перехода:

$$K' \xrightarrow{v_2} K'' : \begin{cases} x'' = \dfrac{x' + v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \\ t'' = \dfrac{t' + v_2 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \end{cases} \tag{2}$$

Сделаем прямую подстановку x', t' из (1) в (2):

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{(x + v_1 t) + v_2 (t + v_1 \frac{x}{c^2})}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \\ t'' = \dfrac{(t + v_1 \frac{x}{c^2}) + \frac{v_2}{c^2}(x + v_1 t)}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{x\left(1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}\right) + t(v_1 + v_2)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}} \\ t'' = \dfrac{t\left(1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}\right) + x\frac{v_1 + v_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}} \end{cases} \tag{3}$$

Введём напрашивающуюся замену:

$$\begin{cases} a = v_1 + v_2 \\ b = \dfrac{v_1 v_2}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = v_1^2 + 2bc^2 + v_2^2 \\ b^2 = \dfrac{v_1^2 v_2^2}{c^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = a^2 - 2bc^2 \\ -\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} = -\dfrac{a^2}{c^2} + 2b \end{cases} \tag{4}$$

Перепишем (3) в новых обозначениях:

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{x(1 + b) + ta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} + 3b}} \\ t'' = \dfrac{t(1 + b) + x\frac{a}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} + 3b}} \end{cases} \tag{5}$$

Тогда очевидно, что функция $u = u(v_1, v_2)$ должна иметь следующий вид:

$$u(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{a}{1 + b} \tag{6}$$

Подстановкой в (5) мы убеждаемся, что после элементарных алгебраических преобразований преобразования принимают искомый вид:

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{x+ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ t'' = \dfrac{t+x\frac{u}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, мы доказали, что преобразования Лоренца действительно образуют группу.

$$\boxed{\text{Ответ: } u(v_1,v_2) = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}}$$

2. Задача №2

Запишем уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathrm{j} \end{cases} \tag{8}$$

Так как дивергенцию и ротор можно определить в нашем пространстве как $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \cdot \mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$, то уравнения примут вид (базисы пространства $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$):

$$\begin{cases} 4\pi\rho = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \\ 0 = \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{J} = \left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{k} \end{cases} \tag{9}$$

Задача существенно упростится, если запишем уравнения в 4-мерном виде в вакууме:

$$\begin{cases} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Здесь мы используем обозначения:

$$\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$F_{0i} = E_i,\ F_{ik} = -\varepsilon_{ikl}H_l$$

Выпишем явно ковариантные коэффициенты (ведь мы работаем с ковариантными производными) антисимметричного тензора ЭМ поля $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Нам известно, что при преобразованиях Лоренца x, t изменяются согласно (1), а $y' = y$, $z' = z$. Это означает, что компоненты нашего тензора $F_{01} = E_x$ и $F_{32} = H_x$ сохраняются. (В самом деле, так как $y,z \equiv x^2, x^3 = \text{inv} \Rightarrow F^{23} = inv \Rightarrow F_{32} = inv$ согласно свойствам антисимметричного тензора, а $F_{01} = -F_{01} = inv$ (а так же нулевые $F_{00} = F_{11} = 0$) из-за неизменности по отношению к поворотам в двумерной системе, которые находятся во втором миноре 2×2 матричного представления нашего 4-тензора). Найдем теперь преобразования остальных компонент.

Согласно свойствам компонент 4-тензора, они преобразуются так же, как и произведение компонент двух 4-векторов. Выше мы нашли инвариантные компоненты, тогда мы понимаем, что компоненты F_{02}, F_{03} и F_{12}, F_{13} преобразуются так же, как $x^0, x^1 \equiv tc, x$ соответственно, т.е. по формулам, обратным (1). Это следует из того, что когда одна из цифр индекса переходит в себя (2 или 3), тогда компонента преобразуется как координата с нефиксированным индексом (0 или 1). Запишем явно:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow F_{02} = \gamma \left(F'_{02} - \frac{v}{c} F'_{12} \right), \ F_{12} = \gamma \left(F'_{12} - \frac{v}{c} F'_{02} \right) \tag{12}$$

Так же преобразуются и F_{02}, F_{13}. Здесь мы использовали релятивистский корень $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Подставив на место компонент тензора наши проекции E_i, H_i и выразив «штрихованные» компоненты через «обычные», мы получаем искомые линейные комбинации:

$$\begin{gathered} E'_x = E_x, \ \ E'_y = \gamma \left(E_y + \frac{v}{c} H_z \right), \ \ E'_z = \gamma \left(E_z - \frac{v}{c} H_y \right), \\ H'_x = H_x, \ \ H'_y = \gamma \left(H_y - \frac{v}{c} E_z \right), \ \ H'_z = \gamma \left(H_z + \frac{v}{c} E_y \right), \end{gathered} \tag{13}$$

Итак, мы нашли преобразованные проекции полей, выражающиеся в виде линейной комбинации изначальных, что означает утвердительный ответ на вопрос задачи.

3. Задача №3

Образующие g_n нашей алгебры Клиффорда $\mathscr{A}(N)$ такие, что $\{g_i, g_j\} = 2\delta_{ij}$, и в качестве базиса линейного пространства (которым является алгебра) можно взять единицу алгебры e и мономы $g_{n_1}, ...g_{n_k}$. Символ Кронекера $\delta_{ij} = 1\,(i = j), \delta_{ij} = 0\,(i \neq j)$.

Посмотрим на алгебру $\mathscr{A}(2)$:

$$\{g_1, g_1\} = g_1^2 + g_1^2 = 2\delta_{11} \Rightarrow g_1^2 = 1$$

$$\{g_2, g_2\} = g_2^2 + g_2^2 = 2\delta_{22} \Rightarrow g_2^2 = 1$$

$$\{g_1, g_2\} = g_1 g_2 + g_2 g_1 = 2\delta_{12} \Rightarrow g_1 g_2 = -g_1 g_2$$

Отсюда получаем, что независимых (в смысле обычной линейной зависимости векторов) мономов по типу указанных выше 3, т.е. базисом алгебры $\mathscr{A}(2)$ можно назвать следующую систему элементов алгебры:

$$\text{Базис } \mathscr{A}(2) : e,\ g_1,\ g_2,\ g_1 g_2 \Rightarrow \textbf{4 элемента} \tag{14}$$

Теперь посмотрим на алгебру $\mathscr{A}(4)$:

$$\{g_i, g_i\} = g_i^2 + g_i^2 = 2\delta_{ii} \Rightarrow g_i^2 = 1\,(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{g_i, g_j\} = g_i g_j + g_j g_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow g_i g_j = -g_j g_i\,(i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Будем искать независимые мономы произведений образующих.

- Понятно, что есть **4 «одиночных» мономов** g_i.
- Для поиска «двойного» монома зафиксируем номер второго элемента и будет пробегать значения первого, т.е.: есть 3 независимых $g_i g_1$, при $j = 2$ нам подходят только $g_3 g_2, g_4 g_2$, и при $j = 3$ мы берем только $g_4 g_3$, при $j = 4$ новых независимых произведений мы не получим $\Rightarrow$ всего **6 «двойных» мономов**.
- «Тройные» несложно перебрать явным образом: начнём с $g_1 g_2 g_3$, затем $g_1 g_2 g_4$, потом $g_1 g_3 g_4$ и наконец $g_2 g_3 g_4$. Понятно, что остальные будут линейны зависимы с этими, т.е. **4 «тройных» монома**.
- Наконец, нетрудно понять, что есть всего **1 «четвертной» моном**: $g_1 g_2 g_3 g_4$, ведь как и в случае с тремя, благодаря зависимости произведений $g_i g_j$ все остальные комбинации также будут зависимы.

Итак, получаем в качестве базиса следующую систему:

$$\text{Базис } \mathscr{A}(2) : e, 4\,g_i, 6\,g_i g_j, 4\,g_i g_j g_k, g_1 g_2 g_3 g_4 \Rightarrow \textbf{16 элемента} \tag{15}$$

Обобщая наши результаты для $\mathscr{A}(N)$, мы замечаем, что в обоих случая получился треугольник Паскаля из разнообразных типов элементов базиса для N-ой строчки:

$$1, 2, 1 \text{ для } N = 2$$
$$1, 4, 6, 4, 1 \text{ для } N = 4$$

Таким образом, нетрудно понять, что число элементов базисы алгебры Клиффорда $\dim \mathscr{A}(N) = 2^N$, что и выполняется для наших частных случаев.

$$\boxed{\text{Ответ: } \dim \mathscr{A}(N) = 2^N}$$

4. Задача №4

Будем работать с алгеброй Клиффорда $\mathscr{A}(N)$ в линейном пространстве $V : \dim V = 2^{N/2}$. Тогда введем следующие линейные комбинации образующих алгебры g_i, $i = 1, ..., N$:

$$b_k^{\pm} = \frac{g_{2k-1} \pm i g_{2k}}{2} \tag{16}$$

Так как образующие удовлетворяют соотношению $\{g_i, g_j\} = 2\delta_{ij}$, то несложно проверить, что одинаковые операторы равны нулю всегда, а противоположные удовлетворяют тому же соотношению, т.е.

$$\begin{cases} \{b_i^+, b_j^+\} = \{b_i^-, b_j^-\} = 0 \ \forall i, j \\ \{b_i^+, b_j^-\} = b_i^+ b_j^- + b_j^- b_i^+ = \delta_{ij} \end{cases} \tag{17}$$

В самом деле:

$$\{b_i^+, b_j^+\} = \frac{1}{4}\left((g_{2i-1} + ig_{2i})(g_{2j-1} + ig_{2j}) + (g_{2j-1} + ig_{2j})(g_{2i-1} + ig_{2j})\right)$$

$$\{b_i^+, b_j^+\} = \frac{1}{4}\left(g_{2i-1}g_{2j-1} + ig_{2i-1}g_{2j} + ig_{2i}g_{2j-1} - g_{2i}g_{2j} + g_{2j-1}g_{2i-1} + ig_{2i}g_{2j-1} + ig_{2j}g_{2i-1} - g_{2j}g_{2i}\right)$$

$$\{b_i^+, b_j^+\} = \frac{1}{4}\left(\{g_{2i-1}, g_{2j-1}\} - \{g_{2i}, g_{2j}\} + i\{g_{2i-1}, g_{2j}\} + i\{g_{2i}, g_{2j-1}\}\right)$$

Учитывая антикоммутирующие свойства g_k , получаем искомое равенство нулю, аналогично получаем ответ для остальных равенств системы (17).

4.1 Поиск базиса

Мы работаем с представлением алгебры, элементами являются матрицы размера $2^{N/2} \times 2^{N/2}$, и ставим в соответствие элементам алгебры (точнее, $b_k^{\pm}$) линейные операторы в пространстве V. То есть мы действуем на вектор v из V матрицами $b_k^{\pm}$ и получаем другой вектор. Рассмотрим существование такого вектора $|v\rangle$, который удовлетворяет условию:

$$b_k^- |v\rangle = 0 \tag{18}$$

Покажем, что такое вектор существует. В самом деле, пусть $\exists w \in V : w = b_k^- |v\rangle \neq 0$. Тогда подействуем на вектор w тем же оператором, т.е. рассмотрим $W \in V : W = b_k^- w = b_k^- b_k^- |v\rangle$. Тогда согласно (17) мы получаем, что $b_k^- b_k^- = 0 \Rightarrow W = 0$. Тогда просто переопределим $|v\rangle \equiv W$, **т.е. такой вектор всегда существует.**

Найдём частные случаи систем векторов типа

$$v(s_1, ..s_{N/2}) = (b_1^+)^{s_1} ... (b_k^+)^{s_{N/2}} |v\rangle, \ \ s_i = 0{,}1 \, \forall i \tag{19}$$

<u>**Посмотрим на алгебру $\mathscr{A}(2)$:**</u> у нее есть два элемента типа $b_k^{\pm}$, а именно b^+, b^-. Таким образом, $v(s_1) = (b^+)^{s_1} |v\rangle$. Понятно, что тогда есть два таких вектора:

$$|v\rangle \text{ и } b^+ |v\rangle$$

<u>У алгебры $\mathscr{A}(4)$</u> есть 4 ЛК типа (16): $b_1^\pm, b_2^\pm \Rightarrow v(s_1,s_2) = \left(b_1^+\right)^{s_1}\left(b_2^+\right)^{s_2}|v\rangle$ — 4 вектора, а именно

$$|v\rangle, b_1^+|v\rangle, b_2^+|v\rangle, b_1^+b_2^+|v\rangle$$

Покажем, что найденные вектора являются линейно независимыми. Например,предположим ЛЗ для трех векторов:

$$\begin{cases} b_1^+|v\rangle = |v\rangle, \\ b_2^+|v\rangle = b_1^+|v\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1^-b_1^+|v\rangle = b_1^-|v\rangle = 0 \\ b_1^-b_2^+|v\rangle = b_1^-b_1^+|v\rangle \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left((b_1^+b_1^- + b_1^-b_1^+) - b_1^+b_1^-\right)|v\rangle = \delta_{11}|v\rangle - b_1^+(b_1^-|v\rangle) = |v\rangle \neq 0 \\ \left((b_1^-b_2^+ + b_2^+b_1^-) - b_2^+b_1^-\right)|v\rangle = \delta_{21}|v\rangle - b_2^+b_1^-|v\rangle = 0 \neq b_1^-b_1^+|v\rangle = |v\rangle \end{cases} \tag{21}$$

Получаем противоречие $\Rightarrow$ эти комбинации — линейно независимы. Полученный результат нетрудно повторить и для других комбинаций всех 4-ех векторов, т.е. получаем, что найденные вектора действительно всегда образуют базис.

Доказательство, что базисов всегда $2^{N/2}$, весьма просто: у нас всегда в векторе типа $v(s_1,...,s_{N/2})$ стоит $N/2$ сомножителей, которые принимают по 2 возможных значений каждому, причём независимо друг от друга, тогда по комбинаторному правилу произведения получаем искомое число элементов — $2^{N/2}$.

Таким образом вектора $v(s_1,...,s_{N/2})$ задают базис в пространстве V. В этом базисе операторам b_k^- и b_k^-, а значит и операторам g_n соответствуют матрицы $2^{N/2}\times 2^{N/2}$.

4.2 Матрицы Дирака

Матрицы, соответствующие g_n, называются матрицами Дирака,обозначим их G_n, определяются из соотношений

$$g_n v(s_1,...,s_{N/2}) = (G_n)_{s_1,...,s_{N/2}}^{t_1,...,t_{N/2}} v(t_1,...,t_{N/2}) \tag{22}$$

Коэффициенты $(G_n)_{s_1,...,s_{N/2}}^{t_1,...,t_{N/2}}$ являются матричными элементами матрицы G_n.

<u>Найдём их для алгебры $\mathscr{A}(2)$</u> : в задаче №3 мы выяснили, что базисом алгебры является комбинация e, g_1, g_2, g_1g_2, причём из антикоммутатора получаем равенство $g_1^2 = g_2^2 = 1 = e$. Из свойств, полученных в (17) можно записать:

$$\begin{cases} b^\pm = \dfrac{g_1 \pm ig_2}{2} \\ (b^\pm)^2 = 0 \\ \left\{b^+, b^-\right\} = e \end{cases} \tag{23}$$

Рассмотрим наш вектор $|v\rangle : |v\rangle \neq 0,\ b^+|v\rangle \neq 0,\ b^-|v\rangle = 0$. Определим вектор $|s\rangle : |s\rangle \stackrel{def}{=} (b^+)^s|v\rangle,\ s = 0{,}1$. Тогда будет справедливо следующее:

$$|0\rangle = |v\rangle = 1\,|0\rangle\,,\ |1\rangle = b^+|v\rangle = 1\,|1\rangle \tag{24}$$

$$b^- \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle \tag{25}$$

$$b^- \left|1\right\rangle = b^- b^+ \left|0\right\rangle = (e - b^+ b^-)\left|0\right\rangle = 1\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle \tag{26}$$

$$b^+ \left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle + 1\left|1\right\rangle \tag{27}$$

$$b^+ \left|1\right\rangle = b^+ b^+ \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle \tag{28}$$

Из коэффициентов перед вектором $\left|s\right\rangle$ получаем искомые матрицы Дирака:

$$b^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Теперь посмотрим на алгебру $\mathscr{A}(4)$: Нам нужно найти 4 матрицы для $(b^{\pm})^2_1, (b^{\pm})^2_2$. Для этого мы выведем следующие равенства из (17):

$$\begin{cases} (b^{\pm}_{1,2})^2 = 0 \\ \left\{b^+_1, b^-_1\right\} = \left\{b^+_2, b^-_2\right\} = e \\ \left\{b^+_1, b^-_2\right\} = \left\{b^+_2, b^-_1\right\} = \left\{b^{\pm}_1, b^{\pm}_2\right\} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Опять рассмотрим вектор $|v\rangle : |v\rangle \neq 0,\ b^+_1|v\rangle \neq 0,\ b^+_2|v\rangle \neq 0,\ b^+_1 b^+_2|v\rangle \neq 0,\ b^-_1|v\rangle = b^-_2|v\rangle = 0$. Вектор $|s\rangle : |s\rangle \stackrel{def}{=} (b^+_1)^{s_1}(b^+_2)^{s_2}\,|v\rangle,\ s_1, s_2 = 0{,}1$. Тогда:

$$\left|0\right\rangle = |v\rangle = 1\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle = b^+_1|v\rangle = 1\left|1\right\rangle, \left|2\right\rangle = b^+_2|v\rangle = 1\left|2\right\rangle, \left|3\right\rangle = b^+_1 b^+_2|v\rangle = 1\left|3\right\rangle \tag{31}$$

$$b^-_1 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{32}$$

$$b^-_1 \left|1\right\rangle = (e - b^+_1 b^-_1)\left|0\right\rangle = 1\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{33}$$

$$b^-_1 \left|2\right\rangle = -b^+_2 b^-_1 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{34}$$

$$b^-_1 \left|3\right\rangle = (e - b^+_1 b^-_1)\left|2\right\rangle = 1\left|2\right\rangle - b^+_1(b^-_1\left|2\right\rangle) = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 1\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{35}$$

$$b^+_1 \left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle + 1\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{36}$$

$$b^+_1 \left|1\right\rangle = b^+_1 b^+_1 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{37}$$

$$b^+_1 \left|2\right\rangle = b^+_1 b^+_2 \left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 1\left|3\right\rangle \tag{38}$$

$$b^+_1 \left|3\right\rangle = b^+_1 b^+_1 b^+_2 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{39}$$

$$b^-_2 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{40}$$

$$b^-_2 \left|1\right\rangle = b^-_2 b^+_1 \left|0\right\rangle = -b^+_1 b^-_2 \left|0\right\rangle = 0 = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{41}$$

$$b^-_2 \left|2\right\rangle = (e - b^+_2 b^-_2)\left|0\right\rangle = 1\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{42}$$

$$b^-_2 \left|3\right\rangle = b^-_2 b^+_1 b^+_2 \left|0\right\rangle = -b^+_1 b^-_2 b^+_2 \left|0\right\rangle = -b^+_1(e - b^+_2 b^-_2)\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle - 1\left|1\right\rangle + 0\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{43}$$

$$b^+_2 \left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle + 0\left|1\right\rangle + 1\left|2\right\rangle + 0\left|3\right\rangle \tag{44}$$

$$b_2^+ |1\rangle = -b_1^+ b_2^+ |0\rangle = 0\,|0\rangle + 0\,|1\rangle + 0\,|2\rangle - 1\,|3\rangle \tag{45}$$

$$b_2^+ |2\rangle = 0 = 0\,|0\rangle + 0\,|1\rangle + 0\,|2\rangle + 0\,|3\rangle \tag{46}$$

$$b_2^+ |3\rangle = -b_1^+ b_2^+ |2\rangle = 0 = 0\,|0\rangle + 0\,|1\rangle + 0\,|2\rangle + 0\,|3\rangle \tag{47}$$

Получаем ответ:

$$b_1^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$b_2^- \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_2^+ \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$