Московский физико-технический университет
Факультет общей и прикладной физики

Образовательная программа
«Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика»

III семестр 2017-2018 учебного года

Домашнее задание №2:

Элементы классической теории поля, Гамильтонов формализм

Автор:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
24 сентября 2017 года

1. Вопросы

В прошлом задании мы ввели функцию Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_i(t), \dot{q}_i(t), t\right) = T - U$. Аналогично вводится **функция Гамильтона**:

$$H = H(p_i, q_i, t) = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Физический смысл: для консервативных систем функция Гамильтона представляет полную энергию (выраженную как функция координат и импульсов), то есть — в классическом смысле — сумму кинетической и потенциальной энергий системы.

Теперь пусть у нас есть функция $f(p, q, t)$. Тогда вводится определение **скобок Пуассона** как

$$\{H, f\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{1}$$

По правилу Эйнштейна здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Перечислим свойства скобок Пуассона:

- $\{\mathrm{const}, f\} = 0$
- Линейность:
  - $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
  - $\{\alpha f, g\} = \{f, \alpha g\} = \alpha \{f, g\}\,, \quad \forall \alpha = \mathrm{const}$
- Антикоммутативность: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Одна из функций совпадает с импульсом или координатой:
  - $\{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$
  - $\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$
- Тождество Якоби: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

2. Упражнения

2.1 Упражнение №1

Из математики известно, что по определению, полный дифференциал функции $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ равен

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Импульс записывается через функцию Лагранжа как $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ (что напрямую следует из уравнений Лагранжа), тогда перепишем

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i$$

При этом можно записать $p_i d\dot{q}_i$ в виде $d(p_i\dot{q}_i) - dp_i\dot{q}_i$, тогда объединим два полных дифференциала

$$d(p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}) \equiv dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i$$

Отсюда сразу следуют искомые уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{2}$$

2.2 Упражнение 2

Доказать тождество Якоби можно просто подставив в искомое уравнение (3) определение скобок (1) и произведя расчеты:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0 \tag{3}$$

Попробуем доказать его более «умным» путем. Заметим, что скобки Пуассона зависят от производных первого порядка функций в скобках, и при «двойной» скобке, как в (3) — второго порядка. В целом же равенство (3) представляет собой линейную однородную функцию вторых производных от f,g,h. При этом в каждой из скобок есть вторые производные только функций «внутри» второй скобки. Запишем тогда вторые производные функции f (т.е. второй и третий члены (3)), введя линейные дифференциальные операторы $D_1 = \{g,\ \}$, $D_2 = \{h,\ \}$:

$$\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\} = \{g,\{h,f\}\}-\{h,\{g,f\}\} = D_1(D_2(f))-D_2(D_1(f)) = (D_1D_2-D_2D_1)(f)$$

В общем случае, линейный дифференциальный оператор имеет вид

$$D_i = \varphi_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

А φ_i — произвольная функция переменных $x_1, ..., x_k$. Тогда произведением этих операторов является сумма (по правилу дифференцирования):

$$D_iD_j = \varphi_{ik}\varphi_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} + \varphi_{ik}\frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

В нашем случае, разность произведений $D_1D_2 - D_2D_1$ уничтожает первый член из-за перестановки смешенной производной, оставляя только член вида:

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \left(\varphi_{1k} \frac{\partial \varphi_{2l}}{\partial x_k} - \varphi_{2k} \frac{\partial \varphi_{1l}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Таким образом, все вторые производные f сокращаются. Аналогично это действует и для h, g, и все выражение тождественно обращаются в нуль в силу симметрии задачи.

2.3 Упражнение 3

По определению, интеграл движения — это функция, зависящая от $q, \dot{q}, t$. Однако в Гамильтоновой механике мы осуществляем преобразования Лежандра – переход от одного набора независимых переменных к другому. В нашем случае это вывод уравнений Гамильтона (2).

Тогда и интеграл движения может быть представим как функция от координат и импульсов, а не скоростей. Распишем это явно:

$$\frac{dI(q,p)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial I}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0$$

Подставив сюда уравнений Гамильтона (2) мы получаем искомое тождество:

$$-\frac{\partial I}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{H, I\} = 0$$

2.4 Упражнение 4

Из предыдущего упражнения известно, что для интегралов движения I_1, I_2 выполнено соотношение $\{H, I_1\} = \{H, I_2\} = \{I_1, H\} = \{I_2, H\} = 0$. Тогда применим тождество Якоби для функций H, I_1, I_2:

$$\{H, \{I_1, I_2\}\} + \{I_2, \{H, I_1\}\} + \{I_1, \{I_2, H\}\} = 0$$

Из свойств скобок Пуассона получаем, что второй и третий член обращаются в ноль, но тогда и первый равен нулю, что и требовалось доказать.

Отсюда мы получаем, что скобка $\{I_1, I_2\}$ — тоже интеграл движения (ведь она удовлетворяет свойству, доказанному в прошлом упражнении.) Это свойство называется теоремой Пуассона.

3. Задача

Вычислим следующие скобки Пуассона:

$$\{q_i, q_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial q_j}{\partial p_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k}; \quad \{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k};$$

Однако q, p — независимый набор координат, т.е. $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0 \;\Rightarrow\; \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Скобка Пуассона между ними равна

$$\{p_i, q_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{ij}$$

Из свойств скобок Пуассона известно, что при умножении функции на импульс или координату мы получаем просто частную производную по другой переменной. Разберем на примере координаты и момента $M_i = \varepsilon_{ijk} p_j q_k$:

$$\{M_i, q_j\} = \frac{\partial M_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\varepsilon_{ijk} p_j q_k = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial p_j}{\partial p_j} q_k + \frac{\partial q_k}{\partial p_j} p_j\right) = q_k$$

Из определения символа Леви-Чевиты и простой подстановки понятно, что $\{M_i, q_k\} = -q_j,\ \{M_i, q_i\} = 0$. Аналогично получаются остальные скобки путем циклической перестановки символов i, j, k у компонент $M_i, M_j, M_k, p_i, p_j, p_k$.

Теперь вычислим скобку от двух моментов простой подстановкой в определение (1)

$$\{M_i, M_j\} = \frac{\partial M_i}{\partial p_k}\frac{\partial M_j}{\partial q_k} - \frac{\partial M_j}{\partial p_k}\frac{\partial M_i}{\partial q_k}$$

Но из прошлых вычислений мы знаем, чему равны эти частные производные! Подставим:

$$\{M_i, M_j\} = q_j p_i - q_i p_j = \varepsilon_{ijk} M_k$$