1 Inlämningsuppgift 1.1

Elektroner har tillförts en ebonitstav med längden L och staven har därvid fått totala laddningen Q, vilken kan antas vara jämnt fördelad längs med stavens längd. Bestäm den elektriska potentialen i den röda punkten i figuren nedan som befinner sig på avståndet a från stavens ena ända, samt på avståndet b vinkelrätt mot staven. Referenspotentialen är 0 V långt bort från staven.

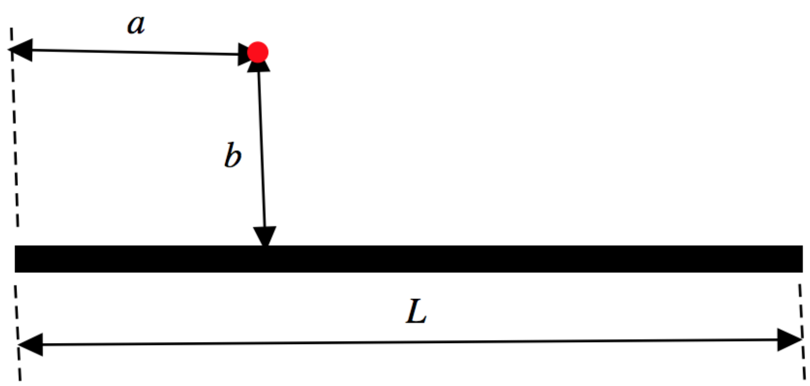

Figure 1

Givet: a = 1.0 + 0.5*4 cm = 0.03 m, b = 2.0 + 0.1*14 cm = 0.034 m, L = 15.0 + 4 cm = 0.19 m, Laddningen |Q| = 1 + 14 nC = 15 nC, se bild ovan.

Lösning: Vi inleder med att beteckna $\frac{Q}{L} = \lambda$. Från föreläsningarna vet vi att elektriska potentialen kring en punktladdning ges av:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{1}$$

Då vi har en referenspunkt som är ekvivalent till noll och ligger långt ifrån staven. Vi är dock intresserade av elektriska potentialen av flera punktladdningar och detta fås av:

$$V = \frac{Q}{4L\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{dx_i}{r}. \tag{2}$$

Genom att införa ett koordinatsystem med origo vid L-a (se bild nedan)

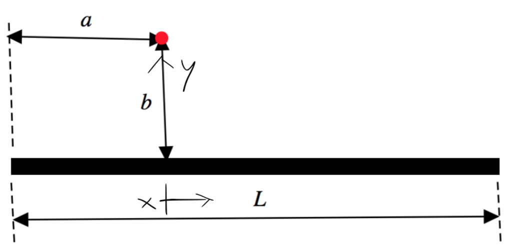

Figure 2

Där kan vi tillämpa Pythagoras sats så att vi får r till $\sqrt{x^2+b^2}$, detta ger oss:

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{dx_i}{\sqrt{x_i^2+b^2}}. \tag{3}$$

Då vi har kontinuerlig laddningsdistribution så kan vi dela upp laddningen som element av formen dq. Där dq är ekvivalent med $dq = \lambda dx$ Då blir vår summa till en integral som följer staven längst den positiva x-riktning. Våra integrationsgränser fås då till $x_1 = -0.03\text{m}$ och $x_2 = 0.16\text{m}$

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}}. \tag{4}$$

För integralen hänvisar vi till sida 1550 i kursboken "University Physics" skriven av Young och Freeman:

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}[ln(x+\sqrt{x^2+b^2}]_{x_1}^{x_2} = \frac{Q}{L}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ln(\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+b^2}}{x_1+\sqrt{x_1^2+b^2}}). \tag{5}$$

Sätter vi in våra värden i ekvationen (5) får vi med $\epsilon_0 \approx 8.85 * 10^{-12}\text{F/m}$:

$$\frac{-15*10^{-9}\text{C}}{0.19\text{m}}\frac{1}{4\pi * 8.85*10^{-12}\text{F/m}}\ln(\frac{0.16\text{m}+\sqrt{(0.16\text{m})^2+(0.034\text{m})^2}}{-0.03\text{m}+\sqrt{(-0.03\text{m})^2+(0.034\text{m})^2}}) = -2161.24\text{V}. \tag{6}$$

Svar: Vi får spänningen till -2.2 kV.

2 Inlämningsuppgift 1.2

Om de fem kondensatorerna i figuren nedan skulle ersättas med en enda kondensator mellan punkterna A och B, vilken kapacitans skulle den kondensatorn då ha?

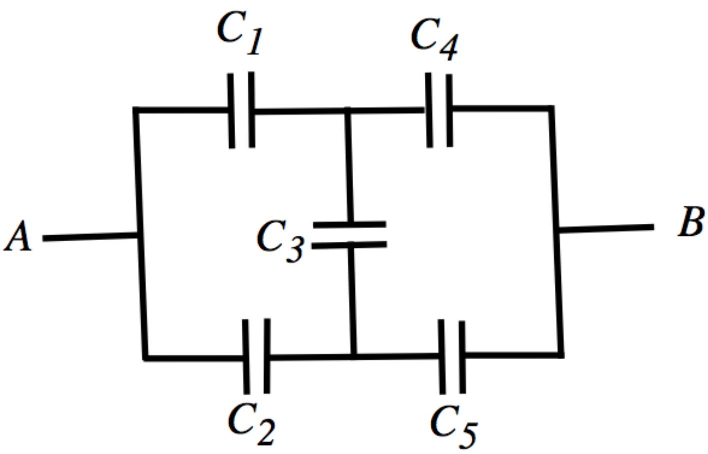

Figure 3

Givet: $C_1 = 1\text{nF} + 0.1 * 4\text{nF} = 1.4\text{nF}$, $C_2 = 1\text{nF} + 0.1 * 4\text{nF} = 1.4\text{nF}$, $C_3 = 2\text{nF} + 0.2 * 14\text{nF} = 4.8\text{nF}$, $C_4 = 3\text{nF} + 0.3 * 4\text{nF} = 4.2\text{nF}$, $C_5 = 3\text{nF} + 0.3 * 4\text{nF} = 4.2\text{nF}$, detta innebär $C_1 = C_2$ och $C_4 = C_5$ samt se bilden nedan:

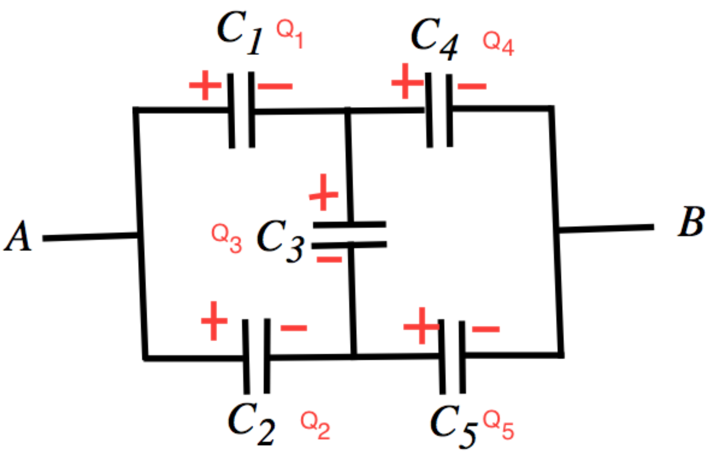

Figure 4 – Vi antar att kondensatorn i mitten har den givna laddningen för att kunna beräkna ersättningskapacitansen.

Lösning: Vi söker potentialen i kondensatorn C_3. Vi tillämpar potentialvandring. Då vi tillämpar potentialvandring finns det 4 givna vägar från A till B enligt (längst kanterna och sedan genom C_1->C_3->C_5 slutligen C_2->C_3->C_4 :

$$V_a - V_b = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4}. \tag{7}$$

Genom substitution får vi:

$$V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_5}{C_4} = \frac{Q_2}{C_1} + \frac{Q_5}{C_4} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_2}{C_1} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4}. \tag{8}$$

Det är känt att summan av alla potentialändringar i en sluten krets är noll. Vi är intresserade av spänningen i C_3 detta ger oss från ekvation (8):

$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_3}{C_3}+\frac{Q_5}{C_4}=\frac{Q_2}{C_1}-\frac{Q_3}{C_3}+\frac{Q_4}{C_4}. \tag{9}$$

Detta är ekvivalent med:

$$2\frac{Q_3}{C_3}=\frac{Q_2-Q_1}{C_1}+\frac{Q_4-Q_5}{C_4}. \tag{10}$$

Men vi har från (8) att

$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_4}{C_4}-\frac{Q_5}{C_4}-\frac{Q_2}{C_1}=0. \tag{11}$$

Alltså får vi:

$$\frac{Q_2}{C_1}-\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_4}{C_4}-\frac{Q_5}{C_4}. \tag{12}$$

Som vi sätter in i ekvationen (10), detta ger oss

$$\frac{Q_3}{C_3}=\frac{Q_2-Q_1}{C_1}. \tag{13}$$

Vi vet från föreläsningarna att parallellkopplade kondensatorer har samma potential, då kondensatorerna med kapacitansen $C_1 = C_2$ är parallellkopplade får vi att laddningarna Q_1 och Q_2 är ekvivalenta. Detta gör att vi får:

$$\frac{Q_3}{C_3}=0. \tag{14}$$

då är potentialen hos kondensatorn i mitten med kapacitansen C_3 är noll, detta gör att vi kan försumma den, alltså får vi att kretsen ser ut som bilden nedan:

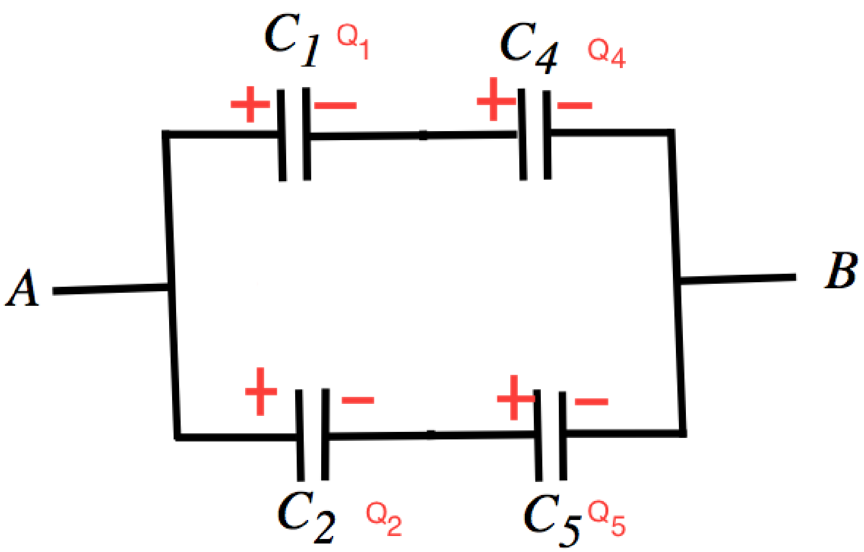

Figure 5

För att finna ersättningskapacitansen så tillämpar vi först seriekoppling mellan C_1 och C_4:

$$\frac{1}{C_x}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_4}. \tag{15}$$

$$C_x=\frac{C_1C_4}{C_1+C_4}=\frac{1.4\text{nF}*4.2\text{nF}}{1.4\text{nF}+4.2\text{nF}}. \tag{16}$$

Detta ger oss att $C_x = 1.05\text{nF}$. Sedan gör vi desamma för C_2 och C_5 enligt:

$$\frac{1}{C_y}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_5}. \tag{17}$$

$$C_y = \frac{C_2 * C_5}{C_2 + C_5} = \frac{1.4\text{nF} * 4.2\text{nF}}{1.4\text{nF} + 4.2\text{nF}}. \tag{18}$$

Då får vi $C_y = 1.05$nF, slutligen tillämpar vi parallellkoppling mellan C_x och C_y för att få ut den nya ersättningskapacitansen som då blir:

$$C_t = C_x + C_y = 1.05\text{nF} + 1.05\text{nF} = 2.1\text{nF}. \tag{19}$$

Svar: Den nya ersättningskapacitans blir slutligen till 2.1nF.