

Exempelsamling i elektromagnetism

sammanställd av

Magnus Andersson och Lars Bergqvist

Tillämpad Fysik

Skolan för Teknikvetenskap, KTH

9 mars 2018

FÖRORD

Vi har med denna exempelsamling strävat att ta fram relevanta uppgifter inom elektromagnetism som har verklighetanknytning i någon form. Dels genomsyrar det problemfrämställningen som i flera fall kan tyckas vara otydliga och vaga eller innehålla för mycket information. Ett viktig egenskap hos en ingenjör är att plocka ut relevant information ur ett sammanhang och utnyttja denna information och vi försöker främja denna typ av träning med valet av uppgifter.

För att underlätta studenternas egna arbete med problemlösandet är svarsdelen av exempelsamlingen ordnad i tre delar. Dessa är i) ledtrådar till samtliga problem, ii) svar till samtliga problem och iii) fullständiga och detaljerade lösningar till hälften av problemen, nämligen de som har jämna nummer. Tanken med denna indelning är att stimulera studenten till att alltid först försöka att lösa problemet självständigt (eller tillsammans med andra studenter i en studiegrupp). Om detta inte lyckas inom rimlig tid, kan man titta på ledtrådarna och tänka efter om dessa ger några uppslag. Slutligen finns det fullständiga och detaljerade lösningar till hälften av problemen samt svar till samtliga problem. De problem som saknar detaljerade lösningar har dock valts på ett sådant sätt att det går att få viss vägledning genom att titta på lösningarna till problemet närmast efter eller närmast före i exempelsamlingen.

Innehåll

1	PROBLEM	1
	Elektrostatik	1
	Kondensatorer	2
	Resistans och likströmskretsar	5
	Magnetism	7
	Induktion	8
	Elektriska kretsar och jw-metoden	10
	Blandade uppgifter	13
2	LEDTRÅDAR	16
	Elektrostatik	16
	Kondensatorer	16
	Resistans och likströmskretsar	17
	Magnetism	17
	Induktion	18
	Elektriska kretsar och jw-metoden	18
	Blandade uppgifter	19
3	SVAR	21
4	LÖSNINGAR TILL JÄMNA PROBLEM	26
	Elektrostatik	26
	Kondensatorer	29
	Resistans och likströmskretsar	32
	Magnetism	34
	Induktion	37
	Elektriska kretsar och jw-metoden	39
	Blandade uppgifter	43

1 PROBLEM

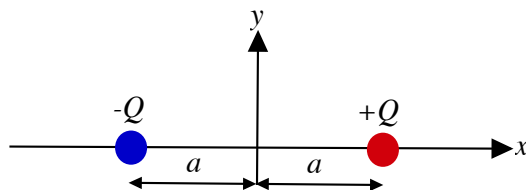
Elektrostatik

1. Två kopparkulor, vardera med massan 1,0 kg och lika stor positiv laddning Q , är upphängda i varsin 1,0 meter lång nylontråd. De båda nylontrådarna är festsatta i samma punkt i taket. Hur många kopparatomer (per kula) har avgett en elektron om vinkeln mellan trådarna är 30° ?

2. I åskmoln uppstår laddningsseparation, som i sin tur kan orsaka blixtar. I ett försök att ta reda på hur laddningsfördelningen uppstår mättes det elektriska fältet på två olika höjder vid botten i molnet. På 2150 m höjd var det 47.1 kV/m och på 2210 m höjd 36.4 kV/m. Fältet var i båda fallen riktade rakt uppåt. Hur stor är laddningstätheten i denna del av molnet?

3. En sfärisk vattendroppe med diametern 0,1 mm är negativt laddad och har potentialen - 80 V. Beräkna den elektriska fältstyrkan (till storlek och riktning) som håller droppen svävande!

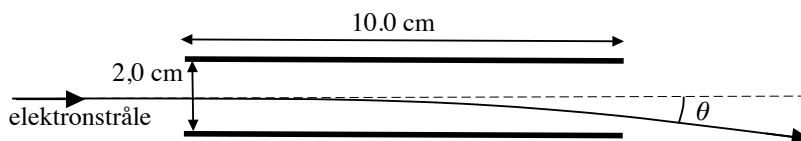
4. I bilden nedan visas en elektrisk dipol, där det finns en laddning $-Q$ i punkten $-a$ längs x -axeln samt en laddning $+Q$ i punkten a längs x -axeln.



a) Bestäm det elektriska fältet i alla punkter längs med x - och y -axeln hos dipolen (från $-\infty$ till $+\infty$)? För enkelhets skull får laddningarna anses vara punktförmade.

b) En molekyl av HCl kan beskrivas som en dipol. Molekylen har ett avstånd mellan väteatomen och kloratomen på 127,4 pm och den har vidare 17% jonkaraktär. Beräkna det elektriska fältet på ett avstånd av 800 pm från en HCl-molekyl i x - respektive y -riktningen enligt ovan?

5. I ett elektronstrålerör har elektroner accelererats till en fart av $2,5 \cdot 10^7$ m/s och får därefter passera in mellan två plana, parallella metallplattor enligt figuren nedan. Mellan plattorna finns en potentialskillnad på 40 V.



- a) Hur är det elektriska fältet riktat mellan plattorna?
 b) Beräkna strålens avbøjningsvinkel θ ?

6. Ett sfäriskt klot har radie a och konstant laddningstäthet ρ . a) Beräkna det elektriska fältet inuti klotet. b) Ett likadant klot med radie a men med motsatt laddningstäthet $-\rho$ placeras på avståndet d ($< 2a$) från första klotet. Bestäm det elektriska fältet i området där kloten överlappar.

7. I ett åsklaboratorium vill man på experimentell väg åstadkomma blixurladdningar. För att kunna uppnå detta krävs först att tillräckligt mycket laddning lagras, vilket vanligtvis sker på ett kopparklot som befinner sig i omgivande luft. Luft är en mycket god isolator och kan tåla elektriska fältstyrkor på upp till $3 \cdot 10^6$ V/m innan det sker ett överslag.

- a) Vilken är den maximala laddning som kan lagras på ett kopparklot med diametern 1,00 m innan den maximala fältstyrkan uppnås?
 b) Vilken potentialskillnad fås då mellan kopparklotet och jord?

8. Den snabba mekaniska hanteringen av garn gör att en hel del trådfragment slits loss och virvlar runt i lokalen vilket ger upphov till damm. Detta består ofta av trådar med längd runt en cm, diameter runt $20 \mu\text{m}$, densitet ca 500 kg/m^3 och får en statisk laddning till beloppet motsvarande ca en miljon elektronladdningar per tråd. En idé vore kanske att attrahera dem elektriskt. Vilken storleksordning på elektrisk fältstyrka behövs för att dessa ska styras av ett elektriskt fält med 100 ggr större kraft än tyngdkraften på dem? Går detta? (gör en uppskattning)

9. Många moderna bilar använder LED istället för vanliga lampor pga bättre livslängd och mindre energiförbrukning. Lysdioderna är sådana där en liten yta (ca $100 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m}$) strålar ljus i en kon med vinkel ≈ 25 grader från symmetriaxel. Ljuset i lysdioden bildar ett gränsskikt mellan två typer av halvledare. Det elektriska fältet kan där skrivas

$$E_x = \frac{b}{x^2 + a^2}, E_y = E_z = 0,$$

där $b = 9,6 \cdot 10^{-7} \text{ Vm}$ och $a = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Vilken blir spänningen över dioden?

10. En luftseparerad koaxialkabel som ofta används till att överföra data har en inre ledare med diameter på 0.5 cm och en tunnt yttre mantelformad ledare (skärm) med diameter 1.5 cm. De bägge ledarna är separerade med luft. Inre ledaren befinner sig på potentialen +8000 V och yttre ledaren är jordad. Vad är laddningen per meter på den inre ledaren samt hur stort är elektriska fältet på avståndet 1 cm från centrum på kabeln?

Kondensatorer

11. En plattkondensator med arean $5,0 \text{ cm}^2$ har ett avstånd på 1,0 cm mellan plattorna och laddas med spänningen 5.0 kV. En 0,5 cm tjock porslinsskiva med relativa dielektricitetskonstanten 6 skjuts in mellan plattorna.

- a) Beräkna det elektriska fältet dels i porslinet och dels i luften mellan plattorna?
b) Beräkna kondensatorns kapacitans när porslinsskivan är inskjuten mellan plattorna?

12. Inuti en antennkabel finns det en ledande kopparkärna med diametern 0,8 mm och ett ledande cylindriskt ytterhölje med innerdiametern 2,0 mm, allt omslutet av isolerande plast. Mellan ledarna finns det i en viss antennkabel, två lika tjocka isolationslager med relativa dielektricitetskonstanterna 4,0 samt 3,0 räknat inifrån och ut. Hur stor kapacitans har koaxialkabeln per meter kabel?

13. När man diskuterar lagring av energi är energitätheten (lagrad energi per volym) en av de viktigaste jämförelsefaktorerna när man jämför olika metoder för energilagring. Hur stor kan energitätheten i en plattkondensator som använder polystyren som dielektrikum som högst bli om kondensatorn designas så att det elektriska fältet i dielektrikat får vara högst 80 % av det maximalt tillåtna?

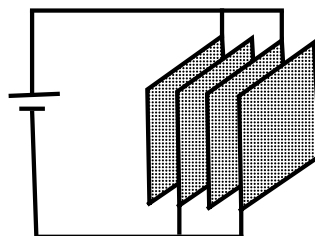
14. Nervceller hos levande organismer består delvis av långa så kallade axoner, vilkas funktion är att överföra elektriska signaler från en punkt till en annan i exempelvis människokroppen. Ett typiskt axon kan vara 10,0 cm långt och ha en tvärsnittsytta med diametern 10,0 μm . Axonet omslutes sedan av ett tunt cellmembran med en typisk tjocklek av 10,0 nm och en relativ dielektricitetskonstant, $\epsilon_r = 3,0$. Membranet är positivt laddat på ena sidan och negativt laddat på den andra sidan. Om spänningen över membranet är 70 mV, hur stor laddning finns då totalt ansamlad på den positivt laddade sidan av membranet längs hela axonet?

15. För att kunna miniaturisera elektriska kretsar och minska materialåtgången (tänk på miljön!), bör kommersiella kondensatorer förena stor kapacitans med liten volym. En metod för att åstadkomma detta är att varva två lager av en metalliserad plastfilm (enkelsidig metallisering) och sedan rulla ihop dessa båda lager till en cylinder. Därefter ansluts en anslutningsledning till vardera metallfilmen (så att det efteråt går att kontaktera kondensatorn) och de hoprullade lagren gjutes slutligen in i ett lämpligt plastmaterial. Man har då tillverkat en så kallad plastfilmskondensator. Anta att man tillverkar en sådan kondensator av två stycken 1,0 cm breda och 50 cm långa band av metalliserad mylar (tjockleken hos vardera filmen är 25 μm). Hur stor kapacitans har denna kondensator?

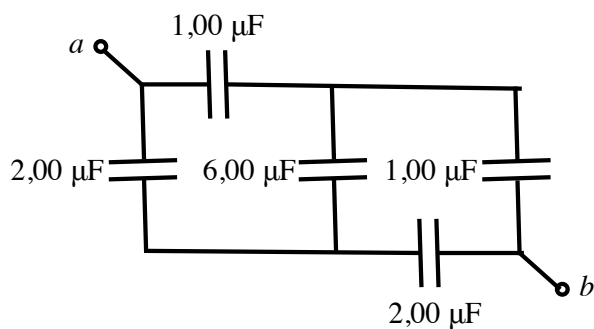
16. När man vill mäta hur full en oljetank är gör man det ofta genom att i tanken montera ett par parallella plattor och sedan mäta hur kapacitansen mellan dem förändras när utrymmet mellan dem är mer eller mindre fyllt med olja. Antag att plattavståndet är 10 mm, plattbredden 120 mm och plattornas höjd är 8 m. $\epsilon_r = 5,6$ för oljan. Hur beror kapacitansen mellan plattorna av oljenivån?

17. Ett sätt att designa kondensatorer är att placera ett antal plattor efter varandra och sedan ansluta varannan platta till positiv spänning och varannan platta till negativ spänning. Om plattornas area är 4,0 cm^2 och det inbördes

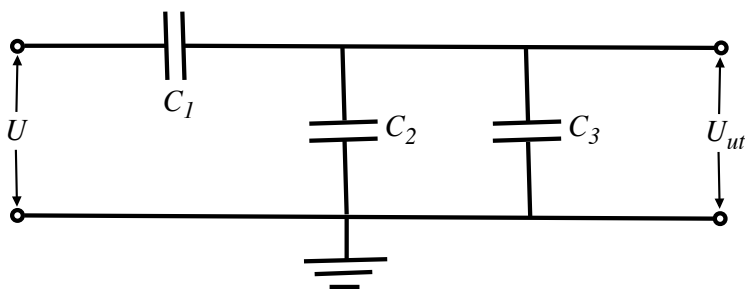
avståndet mellan dem är 1,2 mm, vilken blir då den totala kapacitansen för 4 plattor som är kopplade enligt figuren nedan?



18. Betrakta kondensatorkretsen nedan. Om alla kondensatorer i kretsen skulle ersätta med en enda kondensator mellan punkterna a och b , vilken kapacitans skulle den kondensatorn ha?



19. Tre kondensatorer med kapacitanserna $C_1 = 4,0 \mu\text{F}$, $C_2 = 6,0 \mu\text{F}$ och $C_3 = 2,0 \mu\text{F}$ är kopplade enligt figuren nedan.



Vad blir spänningen U_{ut} när kretsen matas med en konstant spänning $U = +12 \text{ V}$ och hur mycket laddning finns det då på vardera kondensatorn?

20. Vid ett experiment för att bestämma kapacitansen hos en okänd kondensator, laddades den okända kondensatorn först upp från en spänningskälla på 80 V. Sedan ersattes spänningskällan med en oladdad kondensator på $20 \mu\text{F}$ utan att låta laddningen försvinna bort. Spänningen över de båda kondensatorerna uppmättes slutligen till 30 V. Hur stor var kapacitansen hos den okända kondensatorn?

Resistans och likströmskretsar

21. En elkabel avsedd för 10 A måste enligt elsäkerhetsspecifikationer ha en minsta tvärsnittsytta på $1,5 \text{ mm}^2$ i kopparledningarna. Anta att en 50 m lång elkabel ansluts till en likströmskälla som avger spänningen 200 V vid ledningens anslutningspunkter och att det går 10 A genom ledningen. Vilken spänning kommer då att uppmätas i ledningens förbrukningsända?

22. För att mäta ledningsförmågan i saltvatten (och därigenom indirekt salthalten) använder man sig av två koncentriska cylindrar där den inre har diametern 1,0 cm och den yttre har diametern 6,0 cm. Båda cylindrarna är 5,0 cm långa och man mäter upp en resistans mellan dem på $1,14 \Omega$ när de är nedsänkta i havsvatten. Vilken ledningsförmåga (uttryckt i S/m) har havsvattnet?

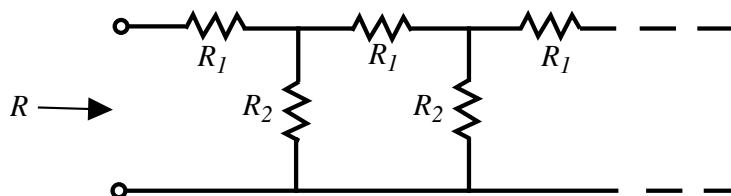
23. En 75 cm lång koaxialkabel har en innerledare med diametern 1,0 mm och en ytterledare med diametern 4,0 mm. I normala fall är mellanrummet mellan ledarna fyllt med ett material med mycket hög resistans, men den specifika kabeln har av misstag blivit utsatt för alltför höga temperaturer och isolermaterialets egenskaper har därvid försämrats, så att det nu i medeltal har en resistivitet på $2,0 \cdot 10^6 \Omega \text{cm}$. Ledningen ansluts nu till en likströmskälla som ger spänningen 100 V mellan innerledare och ytterledare.

a) Hur stor är den totala läckströmmen genom isolationen?

b) Hur stor effekt alstras i kabeln (och bidrar till dess uppvärmning)?

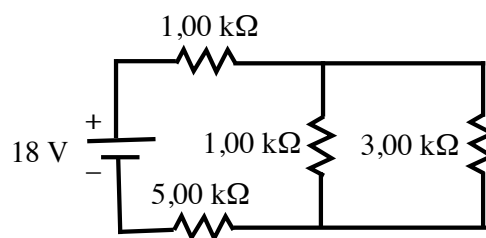
24. Tjuvstartssensorerna (som vållat mycket diskussion och vredesutbrott på idrottstävlingar) är ofta kapacitiva, dvs den tävlande trycker med foten på startblocket som därvid trycker ihop plattorna i en plattkondensator som hålls vid konstant spänning. Om foten rör sig ändras plattavståndet och en ström går då genom ledningen fram till kondensatorn. Antag ett plattavstånd på 4,0 mm obelastad, 3,0 mm då foten trycker mot plattan och 2,0 mm då foten gör avstamp samt en plattarea på $4,0 \text{ cm}^2$. Hur stor ström (i genomsnitt) går det då i ledningen om foten trycker till (3 mm till 2 mm) på 0,01 s)? Det är luft mellan plattorna. Spänningen är hela tiden 10V och RC-konstanten för kretsen är sådan att den inte spelar någon roll för resultatet.

25. En dålig elektrisk ledare som leder ström kan ha en icke försumbar läckresistans mellan ledare och jord. En sådan ledare kan då modelleras som ett oändligt nätverk av resistanser enligt figuren nedan (R_1 är ledarens resistans och R_2 är läckresistansen, vilka oftast anges per meter av ledaren). Hur stor är den ekvivalenta resistansen R för denna krets?

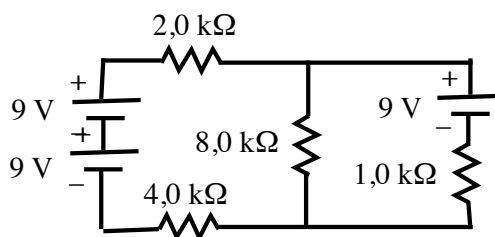


26. För att belägga ett föremål med ett tunt lager av guld, kan man använda sig av elektroplätering. Man lägger då på en spänning mellan en guldelektrod och det föremål som ska pläteras med guld och guldatomerna går från elektroden via en vätska till föremålet. Det har räknats fram att 2,4 g guld är tillräckligt för att ge den tjocklek på guldlagret som man önskar på föremålet. Hur stor ska den elektriska strömmen vara om pläteringen ska vara klar på 1,5 timme?

27. Resistorerna i kretsen nedan är kopplade till ett 18 V batteri. Hur stor effekt utvecklas i varje resistor?



28. Beräkna strömmen genom resistorn på 8,0 kΩ i kretsen nedan.

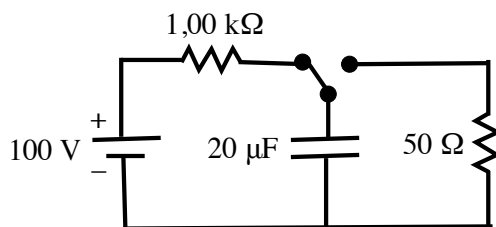


29. Elektronisk utrustning kan vara känslig för elektrostatiska urladdningar (ESD, electrostatic discharges). Dessa kan t.ex. uppkomma när du rör vid elektroniken med ditt finger. För att modellera detta brukar man använda sig av den så kallade "Human Body Model", vilken betraktar kroppen som en uppladdad kondensator med kapacitansen 100 μF (mellan finger och jord), vilken urladdas genom en resistans på 1,5 kΩ mellan fingret och den utrustning som ska testas. Könsligheten för elektrostatiska urladdningar beskrivs med olika känslighetsklasser, vilka definieras enligt följande tabell

Känslighetsklass	Spänningsområde
0	< 250 V
1A	250 - 500 V
1B	500 - 1000 V
1C	1000 - 2000 V
2	2000 - 4000 V
3A	4000 - 8000 V
3B	> 8000 V

Vilken känslighetsklass tillhör en elektronisk utrustning som har ingångsresistansen 5,0 kΩ och som klarar av en högsta strömpuls på 0,25 A?

30. Switchen i figuren nedan har varit i sin position under en lång tid. Därefter byter den till andra läget och slås slutligen tillbaka till ursprungsläget efter 1,5 ms. Hur mycket energi har då urvecklats i $50\ \Omega$ -resistorn?



Magnetism

31. Magnetfältet från en rak oändlig ledare är

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

där r är avståndet från ledaren, men hur bra är denna formel egentligen för en verklig, ändlig rak ledare? För att få en uppfattning om detta, beräkna hur lång en rak ledare måste vara för att fältet inte ska avvika med mer än 1% från det värde som gäller för en oändlig ledare vid ledarens mittpunkt och på avståndet $r = 1,0$ m.

32. Metalldetektorer finns av flera olika typer, men en vanligt förekommande vid säkerhetskontrollen på flygplatser består av ett rektangulärt valv som man går igenom. Detta är en rektangulär spole som man alstrar ett magnetfält igenom och som man sedan letar efter störningar pga metallföremål. Uppskatta storleksordningen på fältet i mitten av denna rektangel om antal varv är 1200, strömmen 2.75 A och valvet 2 m x 1 m x 0.2 m.

33. Antag att jordens magnetfält alstras av en liten cirkulär strömslinga placerad i centrum av jorden. Jordens magnetfält vid dess poler är ungefär $80\ \mu\text{T}$ och jordradien $R=6\ 000$ km. Uppskatta hur stort magnetisk moment den lilla strömslingan ger upphov till.

34. En tunn cirkulärt formad skiva med radien R är laddad med den totala laddningen Q som är jämnt fördelad över skivan. Skivan får sedan rotera med vinkelhastigheten ω . Hur stort blir magnetfältet i skivans mittpunkt?

35. Elektriska ledare kan ha andra tvärsnitt än rent cirkulära. Exempelvis kan de utgöras av ett metallband, vilket då påverkar hur magnetfältet kring ledaren ser ut. Låt ett rakt, långt metallband ha bredden $2a$, en försumbar tjocklek $t \ll a$ och genomflytas av strömmen I . Bestäm magnetfältets styrka som funktion av avståndet från mitten av metallbandet i två olika fixa punkter.

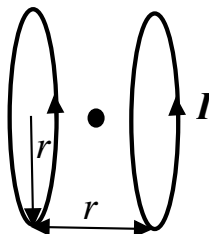
a) Punkten x_0 som ligger i metallbandets plan på ett avstånd $x_0 > a$ från centrum av metallbandet.

b) Punkten y_0 som ligger vinkelrätt rakt ovanför mitten av metallbandet på avståndet y_0 från centrum av metallbandet.

c) Med vilken faktor skiljer sig fältstyrkan åt i dessa båda riktningar på avståndet $2a$ respektive på avståndet $10a$ från mitten av metallbandet?

36. En supraledare är ett material som vid låga temperaturer (oftast nära absoluta nollpunkten) kan leda elektrisk ström utan energiförluster, dvs. resistansen i materialet är identiskt lika med noll! Supraledningen förstörs dock om strömmen genom materialet ger upphov till ett magnetfält på ytan av supraledaren som överstiger det så kallade kritiska fältet. Betrakta en tråd av bly med diametern 2,0 mm som ska hållas supraledande vid temperaturen 4,2 K (flytande heliums temperatur vid normalt tryck). Vid denna temperatur är det kritiska fältet 52 mT för bly. Vilken är den största ström som kan skickas genom blytråden under dessa förutsättningar?

37. Med hjälp av en så kallad Helmholtzspole som består av två cirkulära lindningar (se figur nedan) går det att på ett enkelt sätt kompensera för det jordmagnetiska fältet. En viss Helmholtzspole består av 20 varv koppartråd i vardera lindningen och har radien 50 cm samt avståndet 50 cm mellan de båda lindningarna. Hur stor ström behöver skickas genom spolen för att kompensera bort det jordmagnetiska fältet på Stockholms breddgrad (storlek $52 \mu\text{T}$) i mitten av spolen (representerad av den svarta punkten i figuren)? Det förtusatts att spolen har lutats i rätt vinkel mot jordytan, vilken för Stockholms del betyder en inklinations vinkel på $56,5^\circ$ i riktning mot den magnetiska nordpolen.



38. En supraledande magnet i form av en solenoid matas med en likström på 100 A genom en dubbelriktad kabel som ligger horisontellt på en kabelränna. Ledaren i vardera kabeln har en cirkulär tvärsnittsarea på 30 mm^2 och de båda ledarna ligger parallellt bredvid varandra på ett avstånd av 2,0 cm (mätt från centrum av ledarna). Det jordmagnetiska fältet har styrkan $52 \mu\text{T}$ och har vinkeln $56,5^\circ$ mot jordytan (gäller för Stockholms horisont) och kabelrännan är orienterad i riktning mot magnetiska nordpolen. Beräkna den totala magnetiska kraften per meter av ledaren till styrka och riktning ifall vi befinner oss långt ifrån den supraledande magneten?

Induktion

39. En spole (utan magnetisk kärna) är lindad med med 1000 varv koppartråd över längden 18 cm och med radien 6,0 mm. Hur stor spänning induceras över

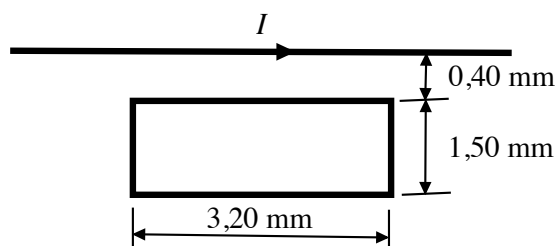
spolen om strömmen genom spolen minskar från 6 A till 1 A under tiden 1,0 ms?

40. All utrustning i en bil måste dimensioneras för att tåla de magnetfält som alstras runt generatorer, tändsystem mm. Vilken spänning alstras maximalt i en kvadratisk strömkrets med sidan 5 cm om den påverkas av ett magnetfält med amplitud 0.17 A och frekvensen 200 Hz ?

41. Vid ett berömt experiment den 12 januari 1832, lät Michael Faraday sänka ned två stora kopparskivor i vattnet vid vardera ändan av den 300 m långa bron Waterloo bridge i London. Om tidvattnets strömningshastighet var 1,7 m/s och den vertikala komponenten av det jordmagnetiska fältet var $40 \mu\text{T}$ i London, hur stor spänning skulle man då förvänta sig att han skulle ha uppmätt? (Experiment misslyckade dock, eftersom kemiska effekter gav upphov till ett för stort brus i hans mätningar, men principen som han försökte att påvisa har senare visats vara korrekt vid andra mätningar.)

42. I specifikationerna till en supraledande magnet (resistansen är lika med noll i en supraledare!) kan man läsa att förhållandet mellan fältet inuti spolen och strömmen genom densamma är 8,14 A/T, att maximala fältet är 12,0 T vid temperaturen 4,2 K samt att spolens induktans är 25 H. Hur lång tid tar det att öka fältet från 0,0 T till 12,0 T i konstant takt om säkerhetskravet är att spänningen över spolen inte får vara större än 4,0 V?

43. På ett kretskort finns en relativt lång ledare i närheten av en rektangulär slinga som figuren nedan visar. Bestäm den ömsesidiga induktansen mellan ledaren och slingan?

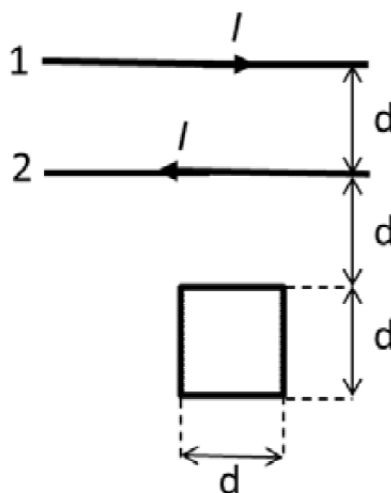


44. Vid så kallad tröghetsnavigering mäter man ut en färdriktning som båten ska ha och ställer sedan in denna med ett gyro som alltså inte vrider sig i förhållande till jorden. Kopplat till detta gyro finns en kort spole (som inte är fixt i förhållande till gyroten/jorden). Runt denna spole finns en annan kort spole som är fix i förhållande till båten. Man mäter sedan den ömsesidiga induktansen (M) mellan dem. Hur stor vridning motsvarar en ändring av M med 1/10000 om vinkeln mellan spolarnas axlar från början är 45° resp. om den är 0° ?

45. I moderna kreditkort finns det ofta ett inbyggt RFID-chip (RFID står för radio frequency identification) som både lagrar och överför information. Ef-

tersom kortet i sig inte har något inbyggd energikälla, behöver det få energi utifrån. Detta sker genom att hålla kortet nära ett oscillerande magnetfält. Anta att kortet hålls mot en sändare som skapar ett magnetfält $B(t) = B_{max} \sin \omega t$, där B_{max} är 5,0 mT och där den radiofrekvens som används av sändaren är 13,56 MHz. Hur stor måste produkten NA vara på kortet (här är N antalet varv i lindningen och A är arean som omsluts av lindningen) för att ge ett spänningstoppvärde på 4,0 V (vilken i sin tur krävs för att kortets elektronik ska fungera)?

46. Två oändligt långa parallella ledare med avståndet d mellan dem leder strömmen I i motsatt riktning. En fyrkantig formad krets med sidan d är placerad på avstånd d från en av ledarna (se figur). Beräkna den inducerade EMK i kretsen.



Elektriska kretsar och jw-metoden

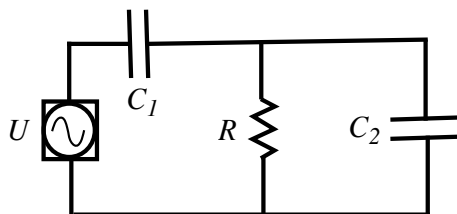
47. En kondensator på $2,0 \mu\text{F}$ parallellkopplas med en spole som har resistansen 70Ω och induktansen 40 mH . Kretsen ansluts till en växelspanningsaggregat som ger ut spänningen 40 V (effektivvärde) och frekvensen 400 Hz . Hur stor är strömmen som går ut från spänningsaggregatet?

48. En växelströmskrets har en kondensator (kapacitans C), en spole (induktans L) och en resistor (resistans R) kopplade i serie och matas med en AC-källa ($V(t) = V_0 e^{j(\omega t)}$).

a) Bestäm strömmen genom kretsen, både amplitud och fasen. b) Beräkna resonansfrekvensen i kretsen om $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, $L = 50 \text{ mH}$ och $C = 0,2 \mu\text{F}$.

49. Kretsen nedan är designad för att anslutas till vårt vanliga växelströmsnät och komponenternas värden ska vara $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$, $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$ och $R = 10 \text{ k}\Omega$. För att välja ut verkliga komponenter till själva kretsen, behöver även effektutvecklingen i resistorn beaktas. För olika resistorer på $10 \text{ k}\Omega$, finns följande

maximalt tillåtna effektutvecklingar att välja mellan: 0,1 W, 0,2 W, 0,3 W, 0,4 W, 0,5 W, 0,6 W, 1 W, 2 W, 3 W, 4 W, 5 W, 6 W, 7 W, 9 W, 15 W, 20 W, 30 W, 40 W, 50 W och 100 W. Vilken av dessa resistorer bör väljas?



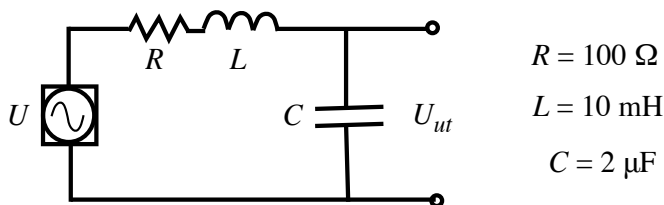
50. För att experimentellt bestämma induktansen och resistansen hos en okänd spole kan man ansluta den i serie med en vridkondensator och sedan ändra kondensatorns kapacitans. Vid ett sådant experiment matades kretsen med en växelspanning 2 V(rms) och frekvensen 1200 Hz. Strömmen i kretsen hade ett högsta effektivvärde på 4,5 mA när kondensatorns kapacitans var 6,0 μF . Hur stor var spolens induktans och resistans?

51. Startkretsen till en enfas motor är avsedd att matas med 230 V / 50 Hz växelström och består av en motorkondensator på 40 μF och en spole med induktansen 10 mH kopplade i serie med varandra. En driftig teknolog vill dock försöka fyrdubbla motorns arbetsfrekvens till 200 Hz (vid spänningen 230 V), men inser att det nog skulle vara bra att först kontrollera att kondensatorns märkspänningen på 450 V inte överskrider innan motorn körs igång. Teknologen mäter därför upp resistansen hos spolens lindning.

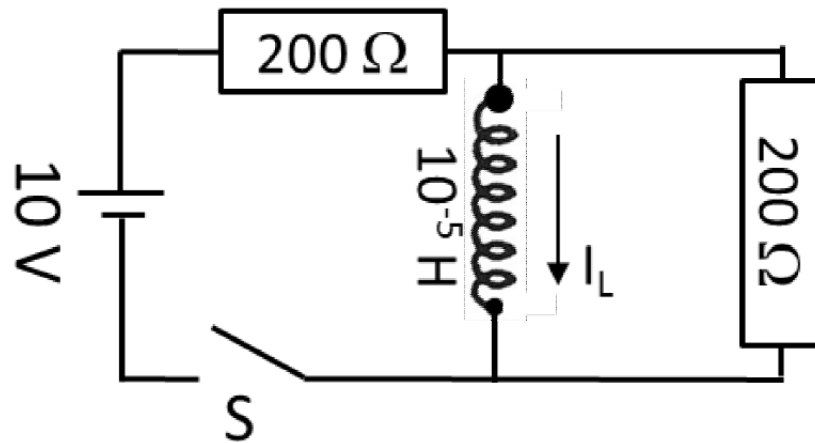
- Vilket krav ska ställas på resistansen i spolen för att spänningen över kondensatorn inte ska bli större än 450 V?
- Vilka andra risker finns det med att köra igång motorn vid denna frekvens?

52. Betrakta växelströmskretsen nedan vilken drivs med växelspänningen $U = 40\text{ V}$ och en variabel frekvens, f .

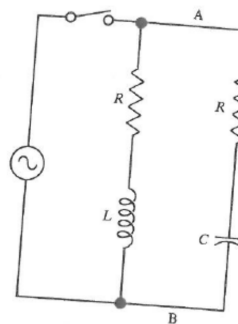
- Finn ett uttryck som visar hur spänningen över kondensatorn ändras när frekvensen ändras?
- Beräkna spänningen för några vitt skilda frekvenser och fundera över vad kretsen skulle kunna användas till?



53. Brytaren S i kretsen i figuren nedan har varit öppen en lång tid. Vid $t = 0$ sluts brytaren plötsligt. Beräkna strömmen genom spolen, I_L , som funktion av tiden.

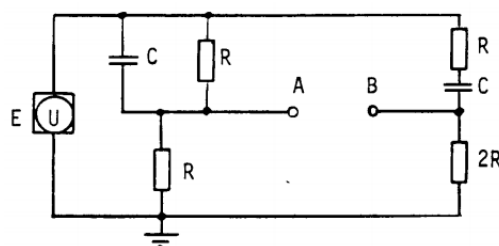


54. För att eliminera plötsliga strömtoppar och skydda övrig elektronik tillsätter man ofta skyddskretsar. Figuren nedan visar en möjlig sådan krets, om denna krets matas med en AC-källa, visa att reaktansen mellan A och B är lika med



noll om kapacitansen väljs till $C = L/R^2$

55. Finns det någon frekvens hos E där potentialen mellan A och B är lika med noll i kretsen nedan ?

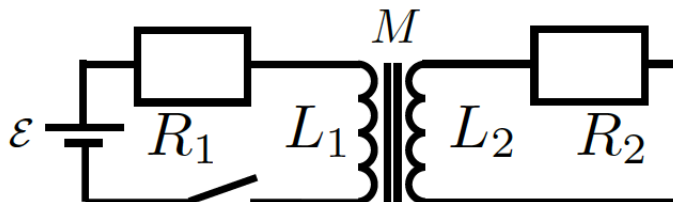


$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

$$E = 10 \sin \omega t$$

56. I kretsen nedan finns två st spolrar med självinduktans L_1 och L_2 och två st resistorer med resistans R_1 och R_2 . De bägge spolarna har en ömsesidig induktans M . I kretsen finns även ett batteri (se figuren). Vid tid $t = 0$ sluts strömbry-



turen i krets ett.

Ställ upp generellt uttryck för hur strömmarna I_1 och I_2 varierar i kretsen för $t > 0$. För att lösa dessa uttryck, kan ni för enkelhetens skull sedan sätta $R_2 = 0$ för beräkningar.

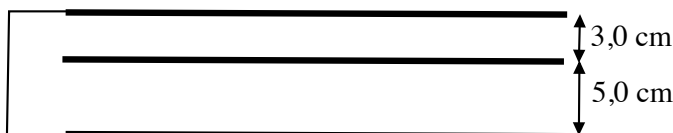
Blandade uppgifter

57. En värmeplatta förbrukar 1050 W när den ansluts till 230 V likspänning. Om den däremot ansluts till det vanliga elnätet blir effektutvecklingen endast 960 W. Beräkna induktansen hos lindningen i plattan?

58. Ett elektriskt laddat klot med den positiva laddningen $+Q$ och massan 100 g är fäst i ett snöre och ska dras upp ur en hål som har en cirkulär öppning med diametern 40 cm. Den tunna ringen kring hålet har dock en lika stor negativ laddning. För att kunna dra bort klotet från hålet krävs en största kraft som är dubbelt så stor som tyngdkraften när snöret är placerat koncentriskt kring hålets mittpunkt. Hur stor är laddningen Q ?

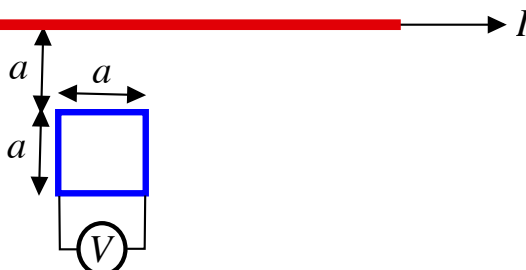
59. Betrakta ett tunt rör med tjockleken t och med en radie R som är mycket större än rörets tjocklek ($R \gg t$). Om det går en ström I i rörets längdriktning, bestäm ett uttryck för det tryck som verkar på röret?

60. Tre ledande, lika stora parallella plattor befinner sig på de avstånd från varandra som visas i figuren nedan. De två yttre plattorna är förbundna med varandra via en kopparledning, medan den mellersta plattan är fristående och har en laddning per area som är $2,50 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2$. Beräkna hur stor laddningstätheten är på den mellersta plattans ovansida respektive undersida?

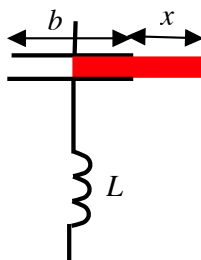


61. För att kunna uppskatta strömmen i en lång rak växelströmsledning (50 Hz), placerar man en kvadratisk lindad spole med 1000 varv och sidlängden $a = 5,0 \text{ cm}$ på avståndet 5,0 cm från ledningen på det sätt som visas i figuren

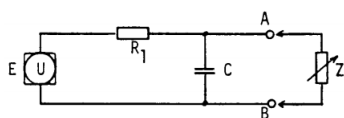
nedan. Hur stor var amplituden hos strömmen i växelströmsledningen när den maximalt uppmätta spänningen var 0,60 V?



62. Betrakta en förenklad resonanskrets (som används vid kanalval) hos en radiomottagare och som visas i figuren nedan. Den består av en kondensator med bredden $b = 10,0$ cm och ett avstånd mellan plattorna på 2,5 mm kopplat i serie med en spole med induktansen 2,0 mH. När ett dielektrikum med relativa dielektricitetskonstanten 4,8 skjuts in halvvägs i kondensatorn ($x = b/2$) har kretsen en resonansfrekvens på 90 MHz. Vilken är den högsta respektive den lägsta resonansfrekvens som kan erhållas i kretsen genom att dra ut eller skjuta in dielektrikat i kondensatorn?



63. Mellan punkterna A och B i kretsen nedan skall en impedans Z anslutas. Hos Z kan man välja resistans och reaktans var för sig på önskat sätt. Beräkna hur Z skall se ut för att man skall få maximal effektutveckling i Z . Hur stor blir denna effekt?



$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

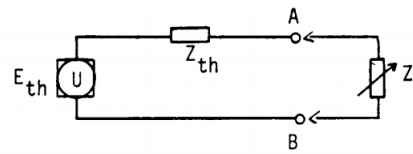
$$C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

$$f = 1 \text{ kHz}$$

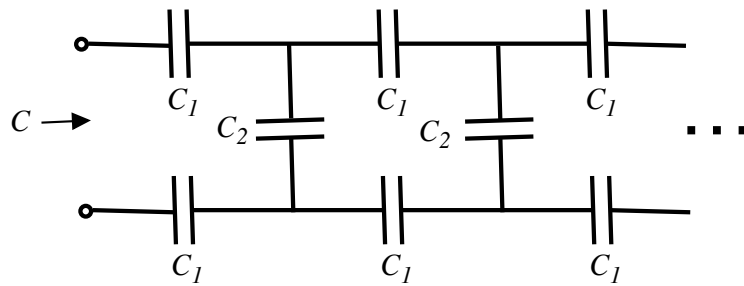
$$E = 10 \text{ V (mätt med voltmeter i AC-läge)}$$

Ledning: detta problem löses bäst med kretsteori som går utanför kursen (Thevenin ekvivalentkrets) så här ges en ledtråd.

Kretsen kan göras om till nedanstående där Z_{th} är impedansen av parallellkopplad R och C från ursprungskretsen och E_{th} är spänningen över kondensatorn i ursprungskretsen.



64. Beräkna ersättningskapacitansen C för en oändlig kedja av kapacitanser C_1 och C_2 , vilken visas i figuren nedan.



2 LEDTRÅDAR

Elektrostatik

1. Ställ upp kraftekvationerna och beräkna laddningen på vardera kopparklotet.
2. Använd en vertikal cylinder som gaussyta.
3. Ställ upp kraftekvationen för vattendroppen.
4. Hur adderas elektriska fält?
5. Spänningen mellan plattorna ger upphov till ett homogent elektriskt fält som accelererar elektronerna nedåt.
6. a) Använd Gauss lag och b) superpositionsprincipen för elektriska fält.
7. Geometrin är sfärisk, varför det är lämpligt att använda Gauss lag.
8. Beräkna nödvändig fältstyrka och fundera om denna kan upprätthållas i luft.
9. Spänningen fås genom att integrera E-fältet.
10. Använd Gauss lag och beräkna elektriska fältet som ger upphov till potentialen.

Kondensatorer

11. a) Hur beräknar du potentialskillnaden mellan plattorna?
b) Kondensatorn med porslinsskiva är ekvivalent med två kondensatorer i serie med varandra!
12. Hur är kapacitanserna hos de båda skikten kopplade?
13. Hur ser uttrycket för energitätheten ut och vad behöver du i så fall känna till?
14. Ansmling av laddning medför att membranet kommer att fungera som en kondensator.
15. Vad blir konsekvensen av att den metalliserade mylarfilmen rullas till en cylinder?

16. Dela upp den totala kapacitansen i två delar, en fylld med olja och en med luft.
17. Hur ser den ekvivalenta kretsen ut?
18. Det går inte att förenkla kretsen rakt av, utan du behöver först fundera lite kring potentialskillnader.
19. Kondensatorerna C_2 och C_3 är parallellkopplade och kan lätt räknas om till en ersättningskondensator.
20. Vad är det som förblit oförändrat vid experimentet?

Resistans och likströmskretsar

21. Hur stort elektriskt motstånd är det i ledningen?
22. Finn ett uttryck för resistansen i cylindrisk geometri.
23. Tänk efter hur stor resistansen är längs med kabeln jämfört med hur stor den är mellan innerledare och ytterledaren. Hur kan detta förhållande utnyttjas för att förenkla lösandet av uppgiften?
24. Strömmen är förändring i laddning per tidsenhet.
25. Dra en tänkt lodrät linje rakt genom kretsen precis till höger om den första läckresistansen R_2 . Hur stor är den ekvivalenta resistansen för kretsen till höger om denna linje?
26. Strömmen genom en likströmskrets kan skrivas som förändringen av laddning per tidsenhet.
27. Hur stor är strömmen genom vardera resistorn?
28. Använd Kirchhoffs lagar!
29. Hur ser den ekvivalenta elektriska kretsen ut?
30. Hur varierar strömmen genom resistorn under urladdningen av kondensatorn?

Magnetism

31. Hur ser formeln för en ändlig ledare ut?

- 32. Approximera som en kort spole och beräkna fältet i mitten.
- 33. Använd Biot-Savarts lag för att ta fram strömstyrkan på slingan.
- 34. Vad är det som skapar magnetfältet i detta fallet?
- 35. Bortse från randeffekter och räkna med Biot-Savarts lag.
- 36. Hur beräknar du fältet på ytan av den supraledande tråden?
- 37. Uppgiften blir lätt att lösa om du känner till magnetfältet längs central-linjen från en cirkulär strömslinga.
- 38. Det finns flera bidrag till de magnetiska krafterna på ledarna i uppgiften. Vilka är dessa bidrag?

Induktion

- 39. Hur stor är spolens induktans?
- 40. Beräkna först det magnetiska flödet genom kretsen.
- 41. Vad är det som skulle kunna inducera en spänning mellan kopparplattorna?
- 42. Vad är det som skapar en spänning över spolen trots att den består av supraledare med resistansen noll?
- 43. Vad behöver du känna till för att beräkna den ömsesidiga induktansen?
- 44. Hur stor vridning av spolarna från startläget behövs för att ändra den ömsesidiga induktansen till önskad grad ?
- 45. Hur skapas spänningen som används till att driva kortets elektronik?
- 46. Beräkna det magnetiska flödet och tillämpa Lenz lag.

Elektriska kretsar och $j\omega$ -metoden

- 47. Rita upp kretsen och använd $j\omega$ -metoden samt Kirchhoffs lagar.
- 48. Beräkna först impedansen i kretsen och studera när denna är minimal.

49. Du behöver veta strömmen genom resistorn!
50. Rita upp kretsen och använd $j\omega$ -metoden.
51. Spänningen över kondensatorn respektive över spolen är motriktade mot varandra och dessutom fasförskjutna gentemot spänningskällan. Därför kan spänningen över kondensatorn, U_C , faktiskt bli större än spänningen från spänningskällan, U . Låt därför inte det som skulle gälla för en likströmskrets (utan spolar och kondensatorer) lura dig till att tro något annat i den här uppgiften! Efter den insikten kan uppgiften lösas genom att rita upp kretsen och använda $j\omega$ -metoden för att spänningsdela.
52. Använd $j\omega$ -metoden och bestäm först strömmen i kretsen och sedan spänningen över kondensatorn.
53. Använd Kirshhoffs lagar för att ställa upp en differentialekvation för strömmen.
54. Beräkna impedansen i kretsen med $j\omega$ -metoden, reaktansen är imaginärdelen av impedansen.
55. $V_{AB} = V_A - V_B = 0$ gäller om man för det komplexa uttrycket för V_{AB} var för sig kan ta realdelen och imaginärdelen lika med noll.
56. Använd Kirshhoffs lagar på de bägge kretsarna och lös de resulterande differentialekvationerna.

Blandade uppgifter

57. Vad i kretsen gör att effektutvecklingen blir olika stor i de båda fallen?
58. På vilket avstånd från hålet är den nedåtriktade elektriska kraften som störst?
59. Om det ska uppstå ett tryck behövs det en kraft - varifrån kan den komma?
60. Låt spänningen i plattans mitt vara U och fundera på hur den elektriska kretsen ser ut!
61. Hur uppkommer spänningen över spolen?
62. Hur stor blir kapacitansen hos kondensatorn i de olika fallen?

63. Maximal effektutveckling fås om reaktanserna tar ut varandra, dvs imaginärdelarna av impedanserna.

64. Drag en tänkt lodrät linje till höger om den första kondensatorn C_2 . Vad är den resulterande kapacitansen för alla kapacitanser som ligger till höger om denna linje?

3 SVAR

1. Laddningen på kloten ska vara $8,85 \mu\text{C}$, vilket betyder att $5,5 \cdot 10^{13}$ atomer har avgivit en elektron. Detta motsvarar att en atom av 170 miljarder atomer har lämnat ifrån sig en elektron!

2. $\rho = -1,6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$

3. Den elektriska fältet som får vattendroppen att sväva är ritat nedåt och har fältstyrkan $11,5 \text{ kV/m}$.

4. Längs med x -axelns fås följande uttryck för det elektriska fältet

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{x}} & x > a \\ \mathbf{E} &= \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{x}} & -a < x < a \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{x}} & x < -a \end{aligned}$$

Längs med y -axeln får det elektriska fältet endast en komponent längs med x -axeln, vilken blir

$$E_x = \frac{-Qa}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)^{3/2}}$$

5. a) Det elektriska fältet är riktat uppåt mellan plattorna.

b) Avböjningsvinkeln är $3,2^\circ$.

6. a) $E = \frac{\rho r \hat{r}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$ b) $\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{d}}{3\epsilon_0}$, $\mathbf{d} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$

7. a) Den största laddning som sfären kan ha utan att det blir överslag är $83,4 \mu\text{C}$.

b) Detta motsvarar en potentialskillnad på $1,5 \text{ MV}$.

8. $qE = 100mg \Rightarrow E = \frac{100 \cdot 1,57 \cdot 10^{-9} \cdot 9,81}{10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ V/m} = 9,6 \text{ MV/m}$.

Fältet måste vara ca 10 MV/m , vilket skall jämföras med överslagsfältet i luft som är ca 2 MV/m . Det går inte att upprätthålla nödvändig fältstyrka.

9. $U = 1,5 \text{ V}$

10. $\lambda = 4,05 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$ och på avståndet 1 cm är fältet lika med noll.

11. a) Det elektriska fältet är 143 kV/m i porslinet och 857 kV/m i luften mellan plattorna.
b) Kondensatorns kapacitans är 0,76 pF.
12. Kapacitansen är 0,21 nF/m av kabeln.
13. Energitätheten kan som högst bli 2,9 kJ/m³. Detta kan exempelvis jämföras med energitätheten i bensin (34 GJ/m³) eller i ett litiumjonbatteri (1-3 GJ/m³).
14. Laddningen på den positivt laddade sidan kommer att vara +0.58 nC.
15. Kondensatorn har kapacitansen 11 nF.
16. $C = \frac{\epsilon_0 b h}{d} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) b}{d} x$, dvs en rät linje från 0.85 nF till 4.76 nF beroende på höjden x på oljan.
17. Den totala kapacitansen blir 8,9 pF.
18. Ersättningskapacitansen är 1,50 μ F.
19. Utspanningen är 4.0 V och laddningarna på kondensatorerna är 32 μ C på C_1 , 24 μ C på C_2 och 8 μ C på C_3 .
20. Den okända kapacitansen var 12 μ F.
21. Den uppmätta spänningen blir cirka 189 V.
22. Ledningsförmågan hos havsvattnet är 5,0 S/m.
23. a) Läckströmmen är 17 mA.
b) Den utvecklade effekten är 1,7 W.
24. $I=0.59\text{nA}$
25. Den ekvivalenta resistansen är $R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}$.
26. Strömmen under elektroplätningen ska vara 0.22 A.
27. Effekterna som utvecklas i resistorerna är 7,1 mW, 4,0 mW, 1,3 mW samt 35,6 mW.

- 28.** Strömmen genom resistorn på $8,0 \text{ k}\Omega$ är $1,2 \text{ mA}$.
- 29.** Elektroniken tillhör känslighetsklassen 1C.
- 30.** Energin som utvecklas i $50 \text{ }\Omega$ -resistorn är 95 mJ .
- 31.** Den raka ledaren måste vara minst 14 m lång för att avvikelserna i fältet ska understiga 1% på avståndet $1,0 \text{ m}$ från dess mitt.
- 32.** Fältet är i storleksordningen 4 mT (för $r=0,5\text{m}$, varierar något med val av avstånd).
- 33.** $\mu = 8,64 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2 \approx 0,8\mu_B$.
- 34.** Magnetfältet i mitten av skivan är $B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$.
- 35.** a) Magnetfältet i punkten x_0 är
- $$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a} \right)$$
- b) Magnetfältet i punkten y_0 är
- $$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \arctan \frac{a}{y_0}$$
- c) Förhållandet mellan magnetfälten blir på avståndet $2a$ från metallbandet 1.185 och på avståndet $10a$ från metallbandet är förhållandet 1.007 . Fältet blir således alltmer cirkulärt ju längre från metallbandet som vi befinner oss.
- 36.** Den största strömmen som kan skickas genom blytråden är 260 A .
- 37.** Strömmen genom Helmholtzspolen ska vara $1,45 \text{ A}$.
- 38.** Det finns två magnetiska krafter som verkar på ledarna, dels en attraktiv kraft på $0,0043 \text{ N/m}$ orsakad av det jordmagnetiska fältet och dels en repulsiv kraft på $0,08 \text{ N/m}$ orsakad av fältet från den andra ledaren.
- 39.** Den inducerade spänningen är 4 V .
- 40.** Den inducerade maximala spänningen är 0.53 V .
- 41.** Den uppmätta spänningen borde ha varit 20 mV .

42. Det tar lite drygt 10 minuter att öka fältet i den supraledande magneten från 0 till 12 T.

43. Den ömsesidiga induktansen 1,0 nH.

44. För 0° utgångsläge 0.81° och för 45° utgångsläge 0.006° .

45. Produkten NA ska minst vara $9,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ för att kortet ska fungera.

46.
$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \cdot \frac{dI}{dt}$$

47. Strömmen ut från spänningsaggregatet är 0,20 A.

48. a) Amplitud på strömmen:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)}}$$

och fasen

$$\Phi = \omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right),$$

b) $\omega_0 = 10000 \text{ Hz}$.

49. Resistorn med en maximal effektutveckling på 3 W bör väljas.

50. Resistansen är 444Ω och induktansen är 2,9 mH.

51. Den inre resistansen hos spolen måste minst vara $7,1 \Omega$.

52. a) Den sökta relationen (med $\omega = 2\pi f$ är

$$U_{ut} = \frac{U}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

b) Kretsen fungerar som ett filter som släpper igenom signaler med låga frekvenser men tar bort höga frekvenser (ett så kallat lågpassfilter). Sådana filter kan till exempel användas för att ta bort oönskade högfrekventa signaler i en mätsignal.

53.
$$I_L(t) = \frac{\epsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{2L}} \right) = 0,05(1 - e^{-10^7 t}) \text{ A}$$

54. Reaktansen blir

$$X = \frac{-(R^2 + (L/C))(\omega L - (1/\omega C)) + 2R(\omega LR - (R/\omega C))}{4R^2 + (\omega L - (1/\omega C))^2} = 0, \forall \omega,$$

55. Potentialen mellan A och B är lika med noll då frekvensen $f = 160\text{Hz}$.

56.

$$\begin{aligned} \epsilon - L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} &= I_1 R_1 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} &= I_2 R_2 \end{aligned}$$
$$I_1(t) = \frac{\epsilon}{R_1} \left(1 - e^{-\left(\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}\right)t} \right),$$

samt för strömmen I_2

$$I_2(t) = \frac{M\epsilon}{L_2 R_1} \left(1 - e^{-\left(\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}\right)t} \right),$$

57. Induktansen hos värmeplattan är 49 mH.

58. Laddningen är 3,4 μC .

59. Trycket är $p = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi R)^2}$ riktat mot centrum av röret.

60. Ytladdningstätheten på plattans undersida är $0,94 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2$ och på plattans ovansida är den $1,56 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2$.

61. Strömmen i ledningen är 275 A.

62. Resonansfrekvensen kan varieras mellan 70 MHz och 153 MHz.

63. Z skall bestå av en spole med resistans $R=25\Omega$ och induktans $L=25\text{mH}$. Maximal effektutveckling i spolen blir då 25mW.

64. Den resulterande kapacitansen är $C = \frac{C_2}{2} \left(\sqrt{1 + 2\frac{C_1}{C_2}} - 1 \right)$.

4 LÖSNINGAR TILL JÄMNA PROBLEM

Elektrostatik

2. Fältet antas vara vertikalt och bara bero av höjden. Vi använder ytan på en vertikal cylinder S som gaussyta. Den undre ändytan är på höjd $h_1 = 2150$ m och den övre på $h_2 = 2210$ m. E-fälten är på dessa ytor $E_1 = 47,1$ kV/m respektive $E_2 = 36,4$ kV/m. Gauss sats ger

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

där Q är laddningen innesluten av ytan S . Bidraget till integralen från mantelytan är 0 eftersom fältet där är vinkelrätt mot ytan. Det som är kvar är alltså bara bidraget från de två ändytorna

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_2 A - E_1 A,$$

där A är arean på ändytorna. Laddningstätheten blir då

$$\rho = \frac{Q}{A(h_2 - h_1)} = \frac{\epsilon_0(E_2 A - E_1 A)}{A(h_2 - h_1)} = \epsilon_0 \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = -1,6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3,$$

4. a) Det elektriska fältet beräknas genom att summera bidragen från de båda källorna. Generellt gäller att

$$\mathbf{E} = \sum \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}$$

där $r_{1,2}$ är avståndet från källpunkten (1) till fältpunkten (2) och $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ är enhetsvektorn från vardera källpunkten till fältpunkten. Längs med x -axeln behöver vi dela upp beräkningarna i tre olika delar beroende på läget i förhållande till de båda laddningarna. Vi börjar med fallet då $x > a$, då vektorerna från källpunkterna till fältpunkten båda är längs med den positiva x -axelns riktning. Det elektriska fältet blir då (en eventuell komponent längs med y -axeln måste vara noll på grund av inversionssymmetri och kontinuitet i det elektriska fältet)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{x}}$$

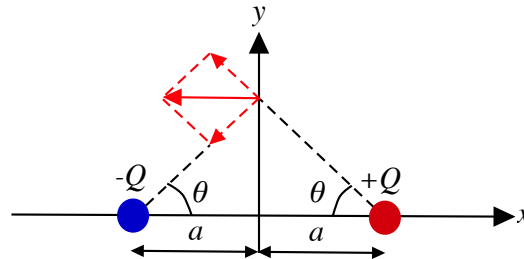
När $-a < x < a$ är riktningsvektorn från $+Q$ längs med den negativa x -axelns riktning medan riktningsvektorn från $-Q$ fortfarande är längs med den positiva x -axelns riktning. Detta ger oss att

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a-x)^2} (-\hat{\mathbf{x}}) + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2(x^2 + a^2)}{(a^2 - x^2)^2} \hat{\mathbf{x}}$$

vilket betyder att det elektriska fältet ligger i den negativa x -axelns riktning. Slutligen betraktar vi fallet när $x < -a$ och båda riktningsvektorerna ligger längs med negativa x -axelns riktning. Detta ger att

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} (-\hat{\mathbf{x}}) + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} (-\hat{\mathbf{x}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{\mathbf{x}}$$

När det gäller det elektriska fältet längs y -axeln då $x = 0$, fås endast en komponent hos det elektriska fältet som ligger längs den negativa x -axelns riktning. Detta förstås av figuren nedan eftersom de båda laddningarna har både samma absolutbelopp och samma avstånd till y -axeln oberoende av läget längs med y -axeln (avståndet är $\sqrt{a^2 + y^2}$ enligt Pythagoras sats).



Om vi börjar med y -komponenten av det elektriska fältet, ser vi att den resulterande y -komponenten blir

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)} \sin \theta - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta = 0$$

vilket stämmer överens med symmetriargumentet ovan. För x -komponenten av det elektriska fältet blir det resulterande elektriska fältet

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)} \cos \theta - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)} \cos \theta = \frac{-2Q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)}$$

Ur geometrin fås vidare att

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \Rightarrow E_x(y) = \frac{-Qa}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)^{3/2}}$$

vilket betyder att det elektriska fältet ligger i den negativa x -axelns riktning längs med hela y -axeln.

b) Att molekylerna har 17% jonkaraktär, betyder att varje atom i molekylerna har en laddning på $Q = 0,17 \cdot e$ (väteatomen har positiv laddning och kloratomen har negativ laddning). Eftersom avståndet mellan atomerna är 127,4 pm, får vi att $a = 63,7$ pm i formlerna ovan. Insättning av $x = 800$ pm ger oss att det elektriska fältet längs x -riktningen blir

$$E_x = \frac{0,17 \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19}}{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{63,7 \cdot 10^{-12} \cdot 800 \cdot 10^{-12}}{((800 \cdot 10^{-12})^2 - (63,7 \cdot 10^{-12})^2)^{3/2}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 123 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

och att det elektriska fältet längs y -axeln (riktat längs x -riktningen) blir

$$E_x = \frac{-0,17 \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19} \cdot 63,7 \cdot 10^{-12}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot ((63,7 \cdot 10^{-12})^2 + (800 \cdot 10^{-12})^2)^{3/2}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = -60 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

6. a) Använd Gauss lag:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Sfär, radiell symmetri och endast radiella bidrag till fältet. För $r < a$ ger Gauss lag

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi r^2 E_r \\ \frac{q_{in}}{\epsilon_0} &= \frac{4\pi r^3}{3}, \end{aligned}$$

vilket ger det elektriska fältet

$$E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

eller $\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$.

b) Med superpositionsprincipen kan fältet från de bägge kloten adderas. Det andra klotet har samma fält som det första klotet men med omvänt tecken. Låt \mathbf{r}_+ vara en vektor från första klotet till överlappande området och \mathbf{r}_- motsvarande vektor från andra klotet. Vektoranalys ger

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-,$$

där \mathbf{d} är vektorn som förbinder de bägge kloten. Totala elektriska fältet i en punkt P i det överlappande området ges då av:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\rho \mathbf{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \mathbf{r}_-}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \mathbf{d}}{3\epsilon_0},$$

dvs fältet är konstant i området.

8. Fragmenten har densitet $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ och volym

$$V = \frac{\pi L d^2}{4} \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 0,01 \cdot (20 \cdot 10^{-6})^2}{4} \text{ m}^3 = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3$$

vilket ger massan $m = \rho V$ och tyngdkraften

$$F_g = mg = \rho V g,$$

där $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ är tyngdaccelerationen. Kraften från ett elektriskt fält E blir $F_E = 10^6 e E$, där $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ är elementarladdningen. Från $F_E = 100 F_g$ fås

$$10^6 e E = 100 \rho V g \Rightarrow E = \frac{\rho V g}{10^4 e} \approx 10 \text{ MV/m},$$

Luften har ett överslagsfält på ca 2MV/m så nödvändig fältstyrka kan inte upprätthållas.

10. Låt radien på den inre ledaren vara a och på yttre ledaren b . $a=0.25$ cm och $b=0.75$ cm. Beräkna först elektriska fältet kring en ledare med Gauss sats. Som Gaussyta används lämpligen en cylinder med radie r och längd L , pga symmetri kommer elektriska fältet endast ha radiella bidrag, E_r . Vi erhåller därmed på avstånd r ett elektriskt fält

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint E_r dS = E_r \iint dS = E_r \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

eller

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

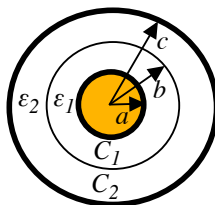
Potentialen mellan inre och yttre ledaren ges av

$$V_{ab} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_{ab}}{\ln \frac{b}{a}} = 4,05 \cdot 10^{-7} \text{ C/m},$$

Avståndet $r = 1$ cm ligger inte på någon av ledarna (utanför) så fältet är lika med noll (eftersom då $\lambda=0$ och tillämpning av Gauss lag ger $E = 0$ V/m).

Kondensatorer

12. Vi börjar med att rita upp koaxialkabeln i genomskärning, vilken visas i figuren nedan.



Med hjälp av uppgiftsformuleringen och figurens beteckningar, inses att radierna $a = 0,4$ mm, $b = 0,7$ mm och $c = 1,0$ mm samt att relativa dielektricitetskonstanterna $\epsilon_1 = 4$ och $\epsilon_2 = 3$. Vi börjar med att betrakta det elektriska fältet, E_r , innanför det enkla höljet på radien b från centrum. Gauss lag ger att den inneslutna laddningen Q

$$Q = \iint_S \epsilon_r \epsilon_0 E(r) dS = 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r L E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r L}$$

där r är radien och L är längden av koaxialkabeln. Potentialskillnaden mellan detta hölje och mittledaren i koaxialkabeln kan nu tecknas

$$V_a - V_b = \oint_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 L}$$

Kapacitansen C_1 för den inre delen av kabeln blir då

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

På analogt sätt fås att kapacitansen C_2 för den yttre delen av kablén blir

$$C_2 = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_b - V_c} = \frac{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 L}{\ln(c/b)}$$

Då dessa båda kapacitanser är seriekopplade i förhållande till varandra, får vi att ersättningskapacitansen C för hela koaxialkablén ges av

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 2\pi\epsilon_0 L \left(\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 \cdot \ln(c/b) + \epsilon_2 \cdot \ln(b/a)} \right)$$

Insättning av numeriska värden ger slutligen att kapacitansen per längdenhet av koaxialkablén är

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot \ln\left(\frac{1,0}{0,7}\right) + 3 \cdot \ln\left(\frac{0,7}{0,4}\right)} \text{ F/m} = 0,21 \text{ nF/m}$$

14. Eftersom det handlar om ansamling av laddning mellan membranets båda sidor, inser vi att membranet fungerar som en kondensator. Av geometrin inser vi vidare att membranets tjocklek ($d = 10,0 \text{ nm}$) är mycket mindre än radien hos axonet ($r = 5,0 \mu\text{m}$). Axonet kan därför beskrivas som ett tunt rör, där rörets tjocklek är försumbar i förhållande till radien $d \ll r$. I denna gräns behöver vi inte explicit ta hänsyn till cylindergeometrin, utan kan betrakta membranet som en plattkondensator med tjockleken d och arean $A = 2\pi r \cdot L$, där $L = 10,0 \text{ cm}$ är axonets längd. Vi får således att axonets kapacitans är

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r L}{d} \Rightarrow Q = C \cdot U = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r L U}{d}$$

Insättning av värden ger att

$$Q = \frac{2\pi \cdot 3,0 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5,0 \cdot 10^{-6} \cdot 0,10 \cdot 0,070}{10,0 \cdot 10^{-9}} \text{ C} = 0,58 \text{ nC}$$

16. Låt plathöjden vara h , oljans höjd x , bredden b och plattavstånd d . Systemet kan ses som två parallellkopplade kondensatorer och den totala kapacitansen är summan av kapacitansen för delen av plattkondensatorn som är i oljan och delen i luften. Kapacitansen för delen i oljan är

$$C_o = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_o}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{xb}{d},$$

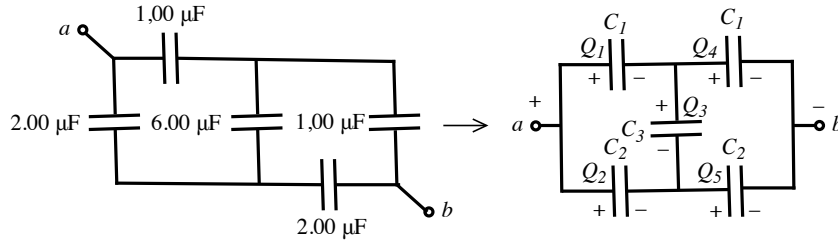
och för delen i luft

$$C_l = \epsilon_0 \epsilon_{r,luft} \frac{A_l}{d} = \epsilon_0 \frac{(h-x)b}{d},$$

Totala kapacitansen $C = C_o + C_l$ blir då

$$C = \frac{\epsilon_0 b h}{d} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) b}{d} x$$

18. Börja med att betrakta potentialskillnaden mellan punkterna a och b . För att underlätta inför vi beteckningarna $C_1 = 1,00 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,00 \mu\text{F}$ and $C_3 = 6,00 \mu\text{F}$. Dessutom inför vi laddningarna Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 och Q_5 för vardera kondensatorn.



Potentialskillnaden kan då tecknas (om vi väljer fyra olika vägar mellan punkterna a och b och antar att laddningarna på kondensatorerna fördelar sig som i figuren)

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_1} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_5}{C_2} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_5}{C_2} = \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_1}$$

Vidare kräver laddningsbalans i de båda inneslutna delarna av kretsen att

$$-Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0 \Rightarrow Q_4 = Q_1 - Q_3$$

$$-Q_2 - Q_3 + Q_5 = 0 \Rightarrow Q_5 = Q_2 + Q_3$$

Beräknar vi spänningen över den mittersta kondensatorn, Q_3/C_3 från ekvationerna ovan, får vi att

$$\frac{2Q_3}{C_3} = \frac{Q_2 - Q_5}{C_2} + \frac{Q_4 - Q_1}{C_1} = \frac{Q_2 - Q_2 - Q_3}{C_2} + \frac{Q_1 - Q_3 - Q_1}{C_1} = \frac{-Q_3}{C_2} + \frac{-Q_3}{C_1}$$

Således har vi att

$$Q_3 \cdot \left(\frac{2}{C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) = 0 \Rightarrow Q_3 = 0$$

Spänningen över kondensatorn C_3 är således noll och potentialen på vardera sidan av kondensatorn är densamma. (vilket vi faktiskt kan inse direkt av symmetrin i figuren ovan!). Således kan vi utesluta C_3 ur kretsen. Därvid får vi en krets med två parallellkopplade grenar. I den ena grenen finns två seriekopplade kondensatorer med kapacitansen C_1 , vilka kan ersättas av kapacitansen $C_1/2 = 0,50 \mu\text{F}$. I den andra grenen finns två seriekopplade kondensatorer med kapacitansen C_2 , vilka kan ersättas av kapacitansen $C_2/2 = 1,00 \mu\text{F}$. Dessa båda ersättningsresistanser är parallellkopplade med varandra, varför den totala ersättningsresistansen blir $C = C_1 + C_2 = 1,50 \mu\text{F}$.

20. När den okända kondensatorn (kapacitans C_x) har laddats upp, har den fått laddningen $Q = C_x \cdot U_1$, där $U_1 = 80$ V. Spänningskällan ersätts sedan med en kondensator $C = 20 \mu\text{F}$, vilket betyder att kretsen består av två parallellkopplade kondensatorer. Eftersom kondensatorn C var oladdad, kommer den ursprungliga laddningen över C_x att delas mellan de båda kondensatorerna i kretsen. När spänningen $U_2 = 30$ V sedan mäts över dessa båda parallellkopplade kondensatorer, kommer det att gälla att den totala laddningen

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_x U_2 + C U_2 = (C_x + C) U_2$$

Vi har nu två uttryck för totala laddningen Q , varför det gäller att

$$C_x U_1 = (C_x + C) U_2 \quad \Rightarrow \quad C_x = \frac{U_2}{U_1 - U_2} \cdot C$$

Insättning ger slutligen att

$$C_x = \frac{30}{80 - 30} \cdot 20 \mu\text{F} = 12 \mu\text{F}$$

Resistans och likströmskretsar

22. Eftersom resistansen är uppmätt mellan två koncentriska cylindrar, måste vi först finna ett uttryck för resistansen i cylindergeometri. Bidraget till resistansen från elementet dr på radien r från centrum av cylindrarna, kan tecknas

$$dR = \frac{\rho dr}{A} = \frac{\rho dr}{2\pi r L}$$

där L är längden av cylindrarna. Den totala resistansen fås nu genom att summerna dessa element via integration (seriekoppling av resistanser!) från den inre radien $a = 0,5$ cm till den yttre radien $b = 3,0$ cm, vilket ger

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Eftersom konduktiviteten σ är inversen av resistiviteten ρ , får vi att

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi R L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2\pi \cdot 1,14 \cdot 0,05} \ln\left(\frac{3,0}{0,5}\right) \text{ S/m} = 5,0 \text{ S/m}$$

24. Vi har här en kondensator där C vid konstant spänning.

Förändring i laddning över kondensatorn

$$\Delta Q = U \Delta C = U \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = 5,9 \cdot 10^{-12} \text{ As}$$

ger strömmen

$$I = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 0,59 \text{ nA},$$

26. Elektroplätningen sker via en elektrisk krets där en ström av joniserade guldatomer går från elektroden till objektet. Strömmen kan tecknas som

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

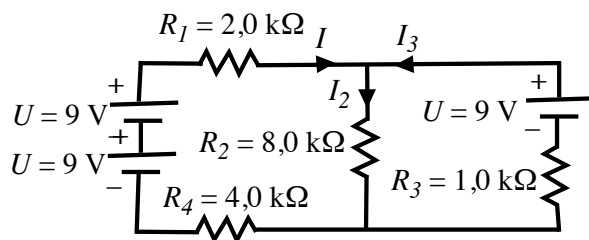
där ΔQ är den totala laddning som överförs från elektroden till förmålet under tiden Δt . Eftersom guldjoner är enkelt joniserade Au^+ , är $\Delta Q = Ne$, där N är antalet guldatomer som överförs och e är elementarladdningen. Antalet guldatomer kan beräknas ur massan m enligt följande

$$N = \frac{mN_A}{M} \Rightarrow I = \frac{mN_A e}{M \Delta t}$$

där N_A är Avogrados tal och M är molmassan för guld. Numeriskt får vi att

$$I = \frac{2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19}}{196,97 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 3600} \text{ A} = 0,22 \text{ A}$$

28. Inför beteckningar enligt nedanstående figur.



Kirchhoffs strömlag ger att

$$I + I_3 - I_2 = 0 \Rightarrow I = I_2 - I_3$$

Kirchhoffs spänningslag ger att

$$U + U - R_1 I - R_2 I_2 - R_4 I = 0$$

samt

$$R_2 I_2 - U + R_3 I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{U - R_2 I_2}{R_3}$$

Vi vill bestämma I_2 , så vi behöver eliminera I och I_3 . Den första av Kirchhoffs spänningslagar ger oss att

$$R_2 I_2 = 2U - I(R_1 + R_4) = 2U - (I_2 - I_3) \cdot (R_1 + R_4)$$

vilket kan skrivas om som

$$R_2 I_2 + (R_1 + R_4) I_2 = 2U + (R_1 + R_4) \cdot \frac{U - R_2 I_2}{R_3}$$

där vi har utnyttjat resultatet från den andra av Kirchhoffs spänningssatser ovan. Ytterligare omskrivningar ger att

$$\left(R_2 + R_1 + R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_4)}{R_3}\right) I_2 = \left(2 + \frac{R_1 + R_4}{R_3}\right) U$$

Detta ger oss att strömmen I_2 genom resistorn med resistansen $8,0 \text{ k}\Omega$ blir

$$I_2 = \frac{2R_3 + R_1 + R_4}{R_3(R_2 + R_1 + R_4) + R_2(R_1 + R_4)} \cdot U$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$I_2 = \frac{2 \cdot 1,0 + 2,0 + 4,0}{1,0 \cdot (8,0 + 2,0 + 4,0) + 8,0 \cdot (2,0 + 4,0)} \cdot 9 \text{ mA} = 1,2 \text{ mA}$$

30. Effekten P som utvecklas i resistorn är $P = RI^2$, där I är strömmen genom resistorn $R = 50 \text{ }\Omega$. För en urladdning i en RC -krets, ges strömmen $I(t)$ av

$$I(t) = \frac{U}{R} e^{-t/RC}$$

där U är den ursprungliga spänningen över kondensatorn, vilken är $U = 100 \text{ V}$ eftersom den vänstra delen av kretsen har laddat upp kondensatorn under en lång och därför kan vi anta att det inte längre går någon ström genom denna del av kretsen och att kondensatorn därför är fullt uppladdad. Den energi som utvecklas i resistorn kan nu tecknas som

$$E = \int_0^{t_0} P dt = \int_0^{t_0} RI^2 dt = \frac{U^2}{R} \int_0^{t_0} e^{-2t/RC} dt$$

där $t_0 = 1,5 \text{ ms}$. Beräkning av integralen ger att

$$E = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{RC}{2} \left[-e^{-2t/RC}\right]_0^{t_0} = \frac{CU^2}{2} \left[1 - e^{-2t_0/RC}\right]$$

Insättning av värden ger att

$$E = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 50}\right)\right] \text{ J} = 95 \text{ mJ}$$

Magnetism

32. Det gäller att uppskatta storleksordningen så vi måste anta vissa approximationer. Man kan anse att den rektangulära buren är en kort spole och fältet i mitten i en sådan spole varierar enligt

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r},$$

Om vi antar avstånd $r=0.5$ m (allt mellan 0.3 m till 0.7 m är rimligt) får vi ett fält på ca 4 mT.

34. Magnetfältet uppkommer på grund av att laddningarna på skivan är i rörelse. Enligt Biot-Savarts lag gäller att bidraget till magnetfältet ges av

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}'}{r^2}$$

där $\hat{\mathbf{r}}$ är enhetsvektorn från källpunkterna (på skivan) till fältpunkten (i skivans mitt). Den vektor som används i Biot-Savarts lag pekar därför in mot centrum, vilket betyder att $\hat{\mathbf{r}}' = -\hat{\mathbf{r}}$, där $\hat{\mathbf{r}}$ är en enhetsvektor i radiell riktning. Av symmetriskäl inses att alla laddningar som roterar på avståndet r från centrum kommer att ge ett likartat bidrag till magnetfältet. Vi börjar därför med att skriva om vektorprodukten i Biot-Savarts lag

$$I d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}' = I dt \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \times (-\hat{\mathbf{r}}) = -dq \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} = -dq \omega r \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{r}} = \omega r dq$$

där vi har utnyttjat att hastigheten hos de laddade partiklar som befinner sig på avståndet r från centrum är $\mathbf{v} = \omega r \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Vidare är bidraget till laddningen $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$ från det cirkulära elementet med bredden dr på avståndet r från centrum. Ytladdningstätheten σ kan beräknas från att laddningarna är jämnt utspridda över skivan, vilket betyder att

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

där R är skivans radie. Sätter vi samman allt detta får vi att bidraget till magnetfältet från laddningarna på avståndet r från centrum är

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \omega r \cdot \frac{Q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} dr$$

Slutligen integrerar vi över alla bidragen till magnetfältet och får att

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

36. Enligt uppgiften är blytråden supraledande och supraledningen förstörs när fältet på ytan av supraledaren överstiger det kritiska fältet $B_c = 52$ mT. Vi behöver således finna ett uttryck som relaterar fältet på ytan av supraledaren (med radien $r = 1,0$ mm) till strömmen genom supraledaren. Eftersom det handlar om en tråd, är det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Enligt Ampere's lag, faller det dessutom att strömmen I som passerar genom en yta som omsluts av den slutna slingan C kan tecknas via en linjeintegral

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Med cylindergeometri är det lämpligt att välja en slinga med konstant radie r . På grund av symmetri, blir då $\mathbf{B} = B\hat{\phi}$ konstant längs med slingan. Detta betyder att B kan ut ur integralen och eftersom $\hat{\phi} // d\mathbf{l}$, så blir integralen lika med längden av slingan. Vi får således att

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B \cdot 2\pi r}{\mu_0}$$

Eftersom kravet för supraledning var att strömmen inte skulle ge upphov till ett större magnetfält än det kritiska fältet B_c på ytan av supraledaren $r = 1,0$ mm, får vi att maximala strömmen genom blytråden blir

$$I = \frac{52 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \text{ A} = 260 \text{ A}$$

Anmärkning: Notera att detta ger en mycket stor strömtäthet (ström per tvärsnittsytta) jämfört med vad som är tillåtet att skicka genom en vanlig kopparledning vid rumstemperatur. Denna stora skillnad gör att supraledande magneter blir betydligt mindre (mindre materialåtgång) än magneter som lindas av koppartråd.

38. Vi börjar med att identifiera de olika möjliga bidragen till krafterna på ledarna. Krafterna är magnetiska och beror därför på vilka magnetfält som finns närvarande. Dessa är:

- i) Det jordmagnetiska fältet.
- ii) Fältet som skapas av strömmen genom den andra ledaren.
- iii) Fältet från den supraledande magneten.

Det sistnämnda kan vi inte beräkna enligt data i uppgiften, men eftersom det anges att vi befinner oss långt från den supraledande magneten, får vi anta att detta fältet kan försummas (i praktiken avtar fältet från solenoiden som r^{-3} där r är avståndet från solenoiden och om $r > 5,0$ m bör det vara en bra approximation. Återstår således att beräkna krafterna per meter av ledaren från de två första bidragen.

- i) Bidraget från det jordmagnetiska fältet.

Kabelrännan ligger i riktning mot magnetiska nordpolen, vilket betyder att vinkeln mellan ledarna och det jordmagnetiska fältet är inklinationen. Kryssprodukten blir då

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}_j \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{L} = IB \sin \theta$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\frac{F}{L} = 100 \cdot 52 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 56,5^\circ \text{ N/m} = 0,0043 \text{ N/m}$$

Kraften kommer att vara vinkelrät mot båda \mathbf{L} och \mathbf{B}_j , varför den kommer att vara riktad mot den andra ledaren.

- ii) Bidraget från kraften mellan ledarna.

Magnetfältet som genereras av strömmen I från en rak ledare är

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

där r är avståndet från ledaren och fältet är riktat cirkulärt runt ledaren.

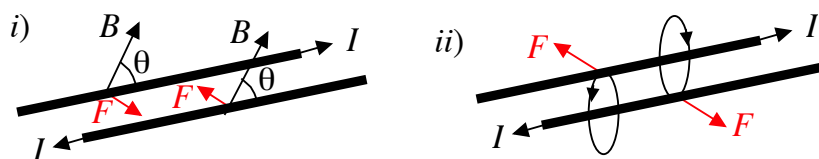
Kraften på ledare 2 från fältet som genereras av ledare 1 ges av $\mathbf{F} = I_2 \mathbf{L} \times \mathbf{B}_1$, vilket i vårt fall ger en kraft som får ledarna att repellera varandra (då $I_2 = -I$ går åt motsatt håll). Eftersom strömmen $I_2 \mathbf{L}$ och fältet \mathbf{B}_1 är vinkelräta mot varandra, ger kryssprodukten att

$$F = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 I_2 I L}{2\pi r} \Rightarrow \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_2 I}{2\pi r}$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\frac{F}{L} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2}{2\pi \cdot 0,025} \text{ N/m} = 0,08 \text{ N/m}$$

För att förtydliga att krafterna är attraktiva i första fallet och repulsiva i andra fallet, har de två ledarna och krafterna på dem ritats ut i figuren nedan.



Induktion

40. Magnetfältet är givet från uppgiften med följande data:

$$B = B_0 \sin(2\pi f t + \phi),$$

där $B_0 = 0.17 \text{ T}$ och $f = 200 \text{ Hz}$.

Arean av kretsen $A = 5^2 (\text{cm})^2$ vilket ger det magnetiska flödet

$$\Phi = AB,$$

vilket i sin tur ger en inducerad spänning

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = AB_0 2\pi f \cos(2\pi f t + \phi) \Rightarrow U_{\max} = AB_0 2\pi f = 0,53 \text{ V},$$

42. Spolen är supraledande, så den har ingen resistans. Därför kan spänningen över spolen endast orsakas av en inducerad spänning som uppkommer när strömmen ändras genom spolen. Vi behöver således beräkna hur snabbt strömmen kan ändras genom spolen utan att ge upphov till en alltför stor inducerad spänning. Vi har att:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = -\frac{L \Delta I}{\varepsilon}$$

där den sista likheten kommer av att fältet och därigenom även strömmen ändras konstant under det att magnetfältet ökar från 0 T till 12 T. Eftersom magnetfältet ska ökas från 0 T till 12 T och specifikationerna till magneten angav förhållandet 8,14 A/T för magneten, får vi att den största strömmen genom spolen ska vara $8,14 \cdot 12 \text{ A} = 97,68 \text{ A}$. Insättning ger att

$$\Delta t = \left| \frac{25 \cdot 97,68}{4,0} \right| \text{ s} = 10,2 \text{ min}$$

dvs det tar lite drygt 10 minuter.

44. Den ömsesidiga induktansen mellan spolarna beror på vinkeln emellan dem enligt

$$M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{N_1 A_1 B_1 \cos \theta}{I_2} = M_0 \cos \theta,$$

där M_0 är den ömsesidiga induktansen när vinkeln är 0° . Vi måste ta reda på hur stor vinkeländring som ger en förändring av M med $1/10000$. Vid 45° för vi vinkelskillnaden $\Delta\theta_{45}$ enligt

$$\begin{aligned} M_{45} &= M_0 \cos(45^\circ) \\ M_{45+} &= \left(1 + \frac{1}{10000}\right) M_0 \cos(45^\circ) = M_0 \cos(45^\circ + \Delta\theta_{45}) \\ \Rightarrow \Delta\theta_{45} &= -45 + \arccos(1,0001 \cos(45^\circ)) = 0,1 \text{ mrad} = 0,006^\circ, \end{aligned}$$

På liknande sätt, för 0° utgångsläge fås

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0 \cos(0^\circ) \\ M_{0-} &= \left(1 - \frac{1}{10000}\right) M_0 = M_0 \cos(0^\circ + \Delta\theta_0) \\ \Rightarrow \Delta\theta_0 &= \arccos(0,9999) = 14 \text{ mrad} = 0,81^\circ, \end{aligned}$$

46. Enligt högerhandsregeln går magnetfältet från övre ledaren in i pappret och från undre ledaren ut från pappret. Magnetfält från en oändligt lång ledare på avståndet r ges av uttrycket

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

Magnetiskt flöde ges av

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \int \frac{dr}{r},$$

Flödet från övre ledaren:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \int_{2d}^{3d} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

Motsvarande flöde inducerat av undre ledaren:

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \int_d^{2d} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln 2,$$

Totala flödet ges då av $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ och inducerad EMK av Lenz lag, $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$.
Instoppning och förenkling ger slututtrycket:

$$\epsilon = -\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Elektriska kretsar och jw-metoden

48. Den komplexa impedansen är:

$$Z = R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j(1/\omega C),$$

Amplitud och fas på impedansen

$$\begin{aligned} Z &= |Z|e^{j\phi} \\ |Z| &= (R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)^{1/2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \end{aligned}$$

Vi har en AC-källa för spänningen, dvs $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$. Den komplexa strömmen ges av sambandet

$$\tilde{I} = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z|e^{j\phi}} = \frac{V_0 e^{j(\omega t - \phi)}}{|Z|},$$

Omräkning till reell ström $I = \text{Re}[\tilde{I}]$ med dess amplitud och fas ger

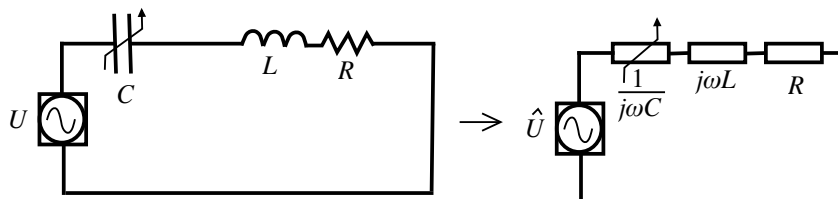
$$\begin{aligned} I &= \frac{V_0}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)}} \\ \Phi &= \omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right), \end{aligned}$$

b) Resonans inträffar då Z är minimal, då är I maximal. Detta inträffar då spolen och resistansen tar ut varandra, dvs när $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$, eller

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Med insatta värden på L och C fås $\omega_0 = 10000\text{Hz}$.

50. Vi börja med att rita upp kretsen (se figur nedan).



Den komplexa impedansen i kretsen är

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

Detta betyder att strömmen i kretsen är

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

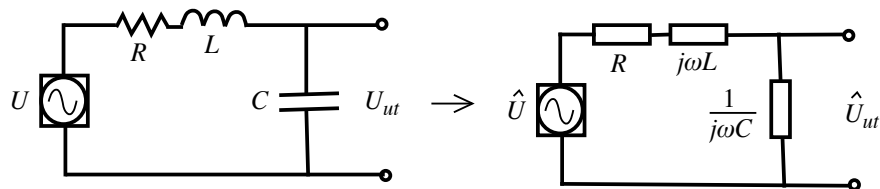
Av denna ekvation inser vi att den maximala strömmen i kretsen fås när

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} \Rightarrow L = \frac{1}{(2400\pi)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-6}} \text{ H} = 2,9 \text{ mH}$$

vilket även betyder att

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow R = \frac{U}{I} \Rightarrow R = \frac{2}{4,5 \cdot 10^{-3}} \Omega = 444 \Omega$$

52. a) För att enkelt kunna analysera kretsen, går vi över till en ekvivalenta krets med komplexa storheter i enlighet med $j\omega$ -metoden (se figur nedan).



Den komplexa strömmen genom kretsen kommer att bli ($\omega = 2\pi f$)

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Detta betyder att den komplexa utspänningen över kondensatorn är

$$\hat{U}_{ut} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I} = \frac{\hat{U}}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Går vi nu tillbaka till reella storheter får vi att

$$U_{ut} = |\hat{U}_{ut}| = \frac{U}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

b) Låt oss nu se vad som händer för några olika val av frekvenser. I ekvationen ovan har vi att

$$LC = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ HF} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ HF}$$

samt

$$RC = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega\text{F} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega\text{F}$$

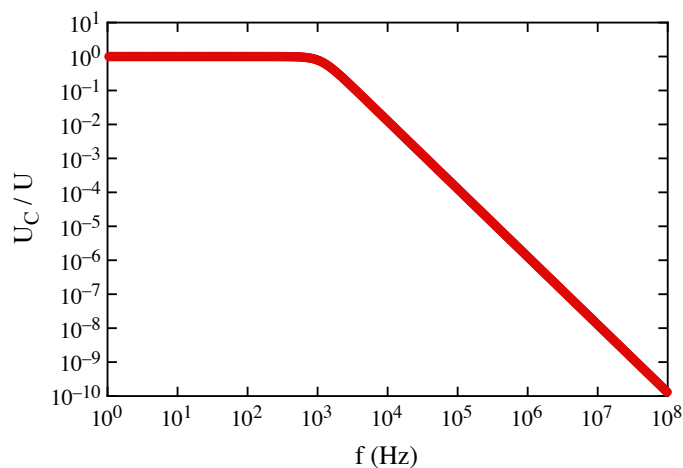
vilket med en spänning $U = 40 \text{ V}$ betyder att

$$U_{ut} = \frac{40}{\sqrt{(1 - 8\pi^2 \cdot 10^{-8} \cdot f^2)^2 + (4 \cdot 10^{-4}\pi f)^2}} \text{ V}$$

Insättning i denna ekvation ger nu följande tabell vid några utvalda frekvenser

Frekvens f (Hz)	Utspanning U (V)
10	40
50	40
100	40
500	39,2
1000	31,4
5000	2,0
10000	0,5
50000	0,002

Om vi istället använder dator för att rita upp hur den reducerade utspänningen U_c/U beror av frekvensen fås följande figur.



Av dessa data är det uppenbart att kresten släpper igenom låga frekvenser (ett så kallat lågpassfilter) och att gränshfrekvensen ligger vid ungefär 1000 Hz. Detta betyder bidraget från höga frekvenser i insignalen kommer att avsevärt försvagas i utsignalen och kommer således att filtreras bort.

54. Vi beräknar först impedansen Z och tar imaginärdelen av denna. Använd $j\omega$ -metoden för kretsen för att beräkna Z :

$$Z = \frac{(R + j\omega L)(R + (1/j\omega C))}{2R + j\omega L + (1/j\omega C)} = \frac{(R^2 + (L/C) + j[\omega LR - (R/\omega C)])(2R - j[\omega L - (1/\omega C)])}{4R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}$$

Reaktansen är imaginärdelen av Z :

$$X = \frac{-(R^2 + (L/C))(\omega L - (1/\omega C)) + 2R(\omega LR - (R/\omega C))}{4R^2 + (\omega L - (1/\omega C))^2} = 0, \forall \omega,$$

Täljaren är lika med 0 för alla frekvenser. Realdelen av Z är lika med R .

56. Två kretsar, gör spänningsvandring och tillämpa Kirshhoffs lagar.

$$\begin{aligned} \epsilon - L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} &= I_1 R_1 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} &= I_2 R_2 \end{aligned}$$

Två kopplade (linjära) differentialekvationer som kan vara lite pyssliga att lösa så vi nöjer oss med fallet då $R_2 = 0$. Då kan den undre ekvationen skrivas som

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{L_2} \frac{dI_1}{dt},$$

Insättning av detta i första ekvationen ger differentialekvation i endast I_1 .

$$\frac{dI_1}{dt} \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \right) + I_1 R_1 = \epsilon$$

Differentialekvation av första ordning, lösning ges av partikulärlösning + homogen lösning. Homogen lösning är lösning i fallet I_1 är konstant, $I_1^h(t) = \frac{\epsilon}{R_1}$.

Partikulärlösning ges av (se tex Beta kap 9.3)

$$I_1^p(t) = C e^{-\left(\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}\right)t}$$

där konstanten C fås ur randvillkoret $I_1(0) = 0$. Total lösning för strömmen I_1 ges då av följande uttryck

$$I_1(t) = \frac{\epsilon}{R_1} \left(1 - e^{-\left(\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}\right)t} \right),$$

samt för strömmen I_2

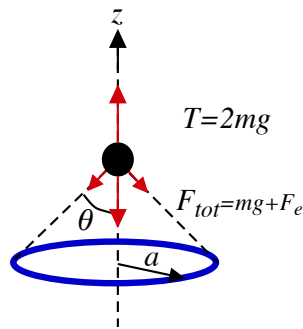
$$I_2(t) = \frac{M\epsilon}{L_2 R_1} \left(1 - e^{-\left(\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}\right)t} \right),$$

Blandade uppgifter

58. Klotet påverkas dels av tyngdkraften och dels av en attraktiv elektrisk kraft mellan laddningen på klotet och laddningen på den cirkulära ringen runt hålet. Om den maximala totala kraften för att dra upp klotet ut hålet är dubbelt så stor som tyngdkraften, $\mathbf{T} = 2mg\hat{\mathbf{z}}$, måste den maximala elektriska kraften på klotet vara lika stor som tyngdkraften. Vi behöver således beräkna den elektriska kraften på klotet som funktion av avståndet mellan klotet och hålet. Vi börjar med att formellt teckna kraftekvationen i z -led

$$\mathbf{T} - mg\hat{\mathbf{z}} + F_e\hat{\mathbf{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{e,max} = QE_{z,max} = -mg$$

(Notera att vi i denna ekvation använder de formella definitionerna av den elektriska kraften, så att kraften blir positiv när laddningarna har samma tecken). Geometrin i problemet är sådan att ju längre upp från hålet som klotet kommer, desto stabilare blir klotets position längs med centrallinjen, så maximal kraft kommer att fås då klotet befinner längs med centrallinjen.



Med beteckningar enligt figur, får vi att det elektriska fältet från varje segment av den cirkulära ringen kan delas upp i en radiell komponent och en komponent längs med z -riktningen. Eftersom klotet hänger längs med centrallinjen i problemet, kommer den radiella komponenten från ett segment av ringen alltid att motsvaras av en motriktad och exakt lika stor radiell komponent från den motsatta delen av ringen. Därför kommer den totala radiella komponenten av det elektriska fältet att vara noll. Återstår således att beräkna det elektriska fältets bidrag längs med z -riktningen. Eftersom det elektriska fältet alltid är riktat från källpunkt till fältpunkt, får vi att bidraget till det elektriska fältet ska summeras som alla bidrag från varje del av ringen. Ett litet segment dr av ringen ger således upphov till ett elektriskt fält som är (segmentet har laddningen $-dq$, eftersom ringens totala laddning $-Q$ är negativ enligt uppgiften)

$$dE_z = \frac{-dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Enligt Pythagoras sats är $r^2 = z^2 + a^2$ och enligt geometrin är

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

vilket betyder att

$$dE_z = \frac{-z dq}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Eftersom alla segment på ringen befinner sig lika långt från klotet, är det enkelt att beräkna det totala elektriska fältet längs z -riktningen.

$$E_z = \int \frac{-z dq}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int dq = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Den elektriska kraften på klotet med laddning Q är $F_e = QE_z$ och för att dra loss klotet behöver vi först hitta den punkt där den elektriska kraften har ett extremvärde (störst negativt värde i uppgiftens geometri). Extremvärden ges av att derivatan är noll, varför vi har att

$$\frac{dF_e}{dz} = 0 = \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{-\frac{3}{2} \cdot 2z^2}{(z^2 + a^2)^{5/2}} \right] \Rightarrow z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Den maximala elektriska kraften blir nu ($z > 0$ enligt geometrin i figuren).

$$F_{e,max} = \frac{-Q^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{2} + a^2 \right)^{3/2}} = \frac{-Q^2}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}$$

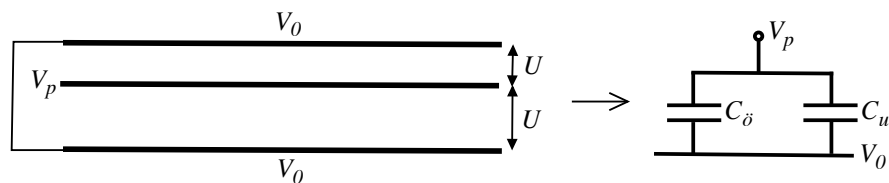
Slutligen sätter vi $F_{e,max} = -mg$ och löser ut laddningen

$$Q = \sqrt{mg \cdot 6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}$$

vilket ger att

$$Q = \sqrt{0,100 \cdot 9,81 \cdot 6\sqrt{3}\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,20^2} \text{ C} = 3,4 \text{ } \mu\text{C}$$

60. Eftersom de båda yttre plattorna är förbundna med varandra via en kopparledning, har de samma potential, V_0 . Låt vidare potentialen i mitten av den mellersta plattan vara V_p , vilket ger att potentialskillnaden mellan den mittersta plattan och de båda yttre plattorna kan tecknas $U = V_p - V_0$. Om den mellersta plattan hade haft en potentialkontakt, skulle vi då få den ekvivalenta krets som visas i den högra delen av figuren nedan (där C_δ är kapacitansen hos den övre plattkondensatorn och C_u är kapacitansen hos den undre plattkondensatorn).



Eftersom spänningen över de båda kapacitanserna måste vara densamma (medan ytladdningstätheten på plattans ovansida respektive undersida kan vara olika), får vi att

$$U = V_p - V_0 = \frac{Q_{\ddot{o}}}{C_{\ddot{o}}} = \frac{Q_u}{C_u}$$

Ur formlerna för kapacitansen hos en plattkondensator (där avstånden $d_{\ddot{o}} = 3,0$ cm och $d_u = 5,0$ cm) gäller vidare att

$$C_{\ddot{o}} = \frac{\epsilon_0 A}{d_{\ddot{o}}} \quad \text{samt} \quad C_u = \frac{\epsilon_0 A}{d_u}$$

Slutligen är den mellersta plattan isolerad från övriga plattor, så den kommer att behålla sin totala laddning, vilket betyder att $Q_{tot} = Q_{\ddot{o}} + Q_u$. Sätter vi samman dessa ekvationer, får vi att

$$Q_{\ddot{o}} = \frac{C_{\ddot{o}}}{C_u} Q_u = \frac{d_u}{d_{\ddot{o}}} Q_u \quad \Rightarrow \quad Q_u = Q_{tot} - \frac{d_u}{d_{\ddot{o}}} Q_u \quad \Rightarrow \quad Q_u = \frac{Q_{tot}}{1 + \frac{d_u}{d_{\ddot{o}}}}$$

Insättning ger nu (med ytladdningstätheten $\sigma = Q/A$ istället för totala laddningen) att

$$\sigma_u = \frac{2,50 \cdot 10^{-9}}{1 + \frac{5,0}{3,0}} \text{ C/cm}^2 = 0,94 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2$$

och vidare att $\sigma_{\ddot{o}} = (2,50 - 0,94) \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2 = 1,56 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2$

62. Eftersom vi känner både induktansen hos spolen och den resonansfrekvensen som fås när dielektrikat till hälften fyller ut mellanrummet i kondensatorn, kan vi beräkna kapacitansen i detta fallet. För en resonanskrets (LC -krets) gäller att

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{(2\pi \cdot 90 \cdot 10^6)^2 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3}} \text{ F} = 1,56 \text{ fF}$$

Vidare inses att minsta respektive högsta resonansfrekvensen fås när dielektrikat antingen helt fyller upp mellanrummet i kondensatorn eller är helt utraget ur kondensatorn. I dessa båda fall kan vi teckna kapacitanserna

$$C_{min} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{samt} \quad C_{max} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

där A är arean av plattkondensatorn, $d = 2,0$ mm är avståndet mellan plattorna och $\epsilon_r = 4,8$ är den relativa dielektricitetskonstanten för dielektrikat. Dessutom gäller att när dielektrikat till hälften fyller mellanrummet i kondensatorn, kan vi betrakta det som om det finns två parallellkopplade kondensatorer (en med

$\epsilon_r = 1,0$ och en med $\epsilon_r = 4,8$). Vid parallellkoppling blir den totala kapacitansen summan av dessa båda kapacitanser och vi får ($A_1 = A_2 = A/2$ eftersom $x = b/2$ i detta fallet)

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon A}{2d} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2d} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{2C}{\epsilon_r + 1}$$

Insättning av detta i ekvationerna ovan för C_{min} och C_{max} ger att

$$C_{min} = \frac{2C}{\epsilon_r + 1} \Rightarrow C_{min} = \frac{2 \cdot 1,56 \cdot 10^{-15}}{4,8 + 1,0} \text{ F} = 0,54 \text{ fF}$$

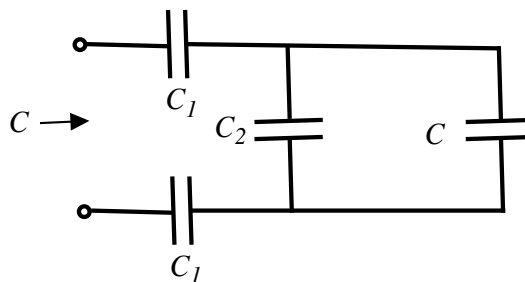
$$C_{max} = \frac{2\epsilon_r C}{\epsilon_r + 1} \Rightarrow C_{min} = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 1,56 \cdot 10^{-15}}{4,8 + 1,0} \text{ F} = 2,59 \text{ fF}$$

När vi nu känner den lägst och den högst kapacitansen, kan vi beräkna motsvarande resonansfrekvenser

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{min}}} \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,54 \cdot 10^{-15}}} \text{ Hz} = 153 \text{ MHz}$$

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{max}}} \Rightarrow f_{min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 2,59 \cdot 10^{-15}}} \text{ Hz} = 70 \text{ MHz}$$

64. För att lösa problemet, drar vi en tänkt lodrät linje till höger om den första kondensatorn C_2 i kretsen. Eftersom det rör sig om en oändlig kedja av kapacitanser, kommer ersättningskapacitansen för den del av kondensatorkedjan som ligger till höger om denna linje att vara C . Detta ger nedanstående ekvivalenta krets.



Eftersom parallellkopplade kondensatorer summeras, blir ersättningskondensatorn $C_x = C + C_2$ för de parallellkopplade kondensatorerna C_2 och C . Enligt formeln för seriekoppling av kondensatorer har vi då att

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C + C_2} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow \frac{1}{C + C_2} = \frac{1}{C} - \frac{2}{C_1} = \frac{C_1 - 2C}{C_1 C}$$

Korsmultiplikation ger nu att

$$C_1C = C_1C + C_1C_2 - 2C^2 - 2C_2C \Rightarrow C^2 + C_2C - \frac{C_1C_2}{2} = 0$$

Den allmänna lösningen till andragradsekvationen är

$$C = -\frac{C_2}{2} \pm \frac{C_2}{2} \sqrt{1 + 2\frac{C_1}{C_2}}$$

Eftersom kapacitansen måste vara positiv, får vi att ersättningskapacitansen är

$$C = \frac{C_2}{2} \left(\sqrt{1 + 2\frac{C_1}{C_2}} - 1 \right)$$