

Exempelsamling
i
vågrörelselära
med lösningar till vissa problem

Magnus Andersson

Materialfysik

Institutionen för Tillämpad Fysik

Skolan för Teknikvetenskap, KTH

24 oktober 2017

©Magnus Andersson

Ingen del av denna publikation får på något sätt mångfaldigas eller spridas utan att först ha inhämtat ett skriftligt godkännande av författaren. Studenter som går kurser på KTH där materialet används som en del av kurslitteraturen samt övningsassistenter och lärare som undervisar i dessa kurser på KTH, äger dock rätt att för eget personligt bruk och utan kostnad ladda ned en digital version av materialet samt att för eget personligt bruk skriva ut detsamma på papper. Det är emellertid uttryckligen förbjudet för dessa personer att på något sätt överföra materialet till tredje part.

FÖRORD

Min tanke bakom detta arbete har varit att skapa en exempelsamling där den ingenjörsmässiga aspekten på vågrörelselära tydligare kommer fram. Som ingenjör ställs man många gånger inför problem som är muntligt formulerade och som kan tyckas vara både otydliga och vaga. Den kan då vara svårt att ta sig vidare mot att faktiskt lösa problemet. Detta är emellertid en fundamental egenskap hos en god ingenjör och är något som måste övas under en ingenjörsutbildning. Det handlar om att bygga upp en kompetens i att tolka problemet, översätta det till en beräkningsbar modell och sedan utföra de nödvändiga beräkningarna. Därefter måste ingenjören kunna tolka resultaten på ett vettigt sätt för att få djupare insikter i problemställningen och ibland även för att testa olika lösningar mot varandra. Det är således viktigt att få öva på denna typ av problemställningar och därigenom bygga upp en erfarenhet som kan komma till nytta i framtiden.

En utgångspunkt vid urvalet av problem har varit att finna problemställningar som både har stark verklighetsanknytning och har en problemtext som är skriven för att efterlikna en verklig situation. De allra flesta problemen i denna exempelsamling är formulerade på detta sätt. Dock skiljer sig detta lite från vad man vanligen träffar på i traditionella läroböcker i fysik, där det många gånger handlar om att lösa idealiserade problem baserade på antaganden som sällan (eller aldrig) uppfylls i verkligheten. Sådana problem har i någon mån också sin betydelse för lärandet, men det torde i detta fallet mest handla om att tydliggöra den fysikaliska förståelsen och att öva upp räknefärdigheten beträffande de mest grundläggande principerna. Även om det inte är möjligt att få till en exempelsamling helt utan sådana problem, utgör de endast en liten andel av det totala antalet problem.

För att underlätta studenternas egna arbete med problemlösandet är svarsdelen av exempelsamlingen ordnad i tre delar. Dessa är i) ledtrådar till samtliga problem, ii) svar till samtliga problem och iii) fullständiga och detaljerade lösningar till hälften av problemen, nämligen de som har jämna nummer. Tanken med denna indelning är att stimulera studenten till att alltid först försöka att lösa problemet självständigt (eller tillsammans med andra studenter i en studiegrupp). Om detta inte lyckas inom rimlig tid, kan man titta på ledtrådarna och tänka efter om dessa ger några uppslag. Slutligen finns det fullständiga och detaljerade lösningar till hälften av problemen samt svar till samtliga problem. De problem som saknar detaljerade lösningar har dock valts på ett sådant sätt att det går att få viss vägledning genom att titta på lösningarna till problemet närmast efter eller närmast före i exempelsamlingen.

LISTA ÖVER BETECKNINGAR

Tabell 1: Tabell över de beteckningar som har använts i exempelsamlingen.

Beteckn.	Storhet	Beteckn.	Storhet
a	acceleration	r	avstånd (radiellt)
a	spaltbredd	R	allmänna gaskonstanten
A	amplitud	R	krökningsradie
A_r	amplitudkonstant (sfärisk våg)	s	elongation
B	kompressionsmodul	s	objektavstånd
B	magnetiskt fält	s'	bildavstånd
c	ljusfarten	S	tvärsnittsarea
C_p	värmekapacitet, konstant tryck	t	tid
C_V	värmekapacitet, konstant volym	t	tjocklek
d	gitterparameter	T	periodtid
D	diameter	T	temperatur
E	elektriskt fält	U	spänning
E	elasticitetsmodul	v	utbredningsfart
f	frekvens	v_p	partikelfart
f	fokalavstånd	V	volym
F	kraft	x, y, z	koordinater
h	höjd	Z	akustisk impedans
I	intensitet	α	vinkel
k	vågtal	β	ljudintensitetsnivå
L	längd	γ	C_p/C_V
m	heltal	λ	våglängd
m	lateral förstoring	η	verkningsgrad
m	massa	Φ	fasvinkel
M	molmassa	ρ	densitet
n	brytningsindex	θ	vinkel
p	(ljud)tryck	θ_i	infallsvinkel
p_{eff}	tryck, effektivvärde	θ_b	brytningsvinkel
p_{max}	tryckamplitud	ω	vinkelfrekvens
P	effekt		

Innehåll

1	PROBLEM	1
	Grundläggande begrepp	1
	Akustik	2
	Vågfenomen	4
	Interferens och diffraktion	7
	Elektromagnetiska vågor och polarisation	8
	Brytning i sfäriska ytor	11
	Blandade problem	13
2	LEDTRÅDAR	18
	Problem efter ämnesområde	18
	Blandade problem	22
3	SVAR	24
	Problem efter ämnesområde	24
	Blandade problem	29
4	LÖSNINGAR TILL VISSA PROBLEM	30
	Grundläggande begrepp	30
	Akustik	32
	Vågfenomen	35
	Interferens och diffraktion	39
	Elektromagnetiska vågor och polarisation	41
	Brytning i sfäriska ytor	45
	Blandade problem	48

1 PROBLEM

Grundläggande begrepp

1. En harmonisk våg längs ett snöre beskrivs av ekvationen

$$s = 0,05 \cdot \sin(2\pi(2,0x - 5,0t)) \text{ m}$$

där x anges i meter och t i sekunder. Bestäm a) våglängden, b) frekvensen, c) periodtiden och d) vågens utbredningsfart.

2. En plan ultraljudvåg med frekvensen 1,50 MHz utbreder sig med farten 340 m/s i luft. Vågen rör sig i den negativa x -axelns riktning och har vid tiden $t = 0$ sitt maximala tryck, 5,0 μPa i origo. Ge en matematisk beskrivning av tryckvågen.

3. En harmonisk ljudvåg med frekvensen 200 Hz rör sig sfäriskt ut från en punktlignande ljudkälla. Ljudets utbredningsfart är 340 m/s. Teckna vågen om man vet att amplituden är $2,5 \cdot 10^{-8}$ m på avståndet 1,0 m från ljudkällan.

4. En harmonisk vågrörelse har frekvensen 6,0 Hz, utbredningsfarten 10,0 m/s och amplituden A . I en viss punkt och vid en viss tidpunkt är elongationen $+0,5A$. Hur stor är elongationen 0,15 s senare i en punkt på avståndet 2,0 m från den förra i vågens utbredningsriktning?

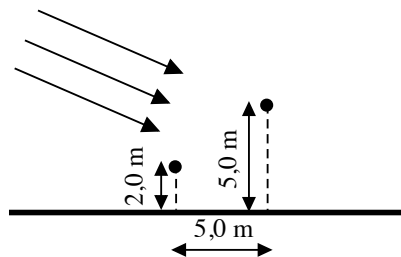
5. För elektronikkomponenter i exempelvis terränggående fordon och maskiner krävs oftast att de klarar ganska stora påfrestningar i form av skakningar och vibrationer. Vid testning av sådan elektronik sätts den fast på ett vibrerande bord, där man kan variera amplituden och frekvensen hos vibrationerna. En vanlig specifikation i sammanhanget är att elektroniken ska klara maximala krafter i vibrationerna som är 10 gånger större än tyngdkraften.

a) Om vibrationerna hos bordet har amplituden 2,0 cm, vilken frekvens ska man då använda vid testet för att motsvara specifikationerna?

b) Om amplituden hos bordets vibrationer halveras, hur mycket måste man då ändra frekvensen för att motsvara specifikationerna?

6. En högtalare placeras med membranet horisontellt och ansluts till en 50 Hz växelströmskälla. Ovanpå högtalarmembranet placeras ett litet föremål och strömmen (volymen) ökar tills dess att föremålet börjar att skallra. Vilken amplitud har då svängningarna i membranet?

7. En radiovåg med frekvensen 150 MHz sänds ut från en geostationär satellit och infaller med infallsvinkeln 60° mot jordytan. Två antennelement är placerades som figuren nedan visar. Hur stor är fasskillnaden mellan antennsignalerna och vilken antenn ligger före i fas?



8. En radiosändare som sänder ut vågor med frekvensen 200 MHz är belägen i närheten av havet. 2000 m från den (i horisontell ledd) befinner sig en båt som tar emot vågorna. Båtens antenn, som är 8,0 m över havsytan, träffas dels av vågor som gått direkt från sändaren och dels av vågor som har reflekterats i vattnet. Beräkna fasskillnaden mellan dessa vågor när de träffar båtens antenn. Sändarantennen befinner sig 18,0 m ovanför vattenytan.

9. Två identiska högtalare som är placerade i ett rum kopplas båda med lika långa sladdar till en och samma frekvensgenerator. När frekvensen successivt ökas från 500 Hz och uppåt noterar en åhörare som befinner sig i en viss punkt i rummet att ljudet blir starkt försvagat vid 800 Hz för att därefter förstärkas och sedan försvagas igen vid 1120 Hz.

a) Vid vilken närmast högre frekvens kommer åhöraren att nästa gång höra en försvagning?

b) Finns det någon eller några frekvenser under 500 Hz när en försvagning skulle kunna uppträda? I så fall vilken eller vilka frekvenser? Vi bortser från eventuella reflektioner mot rummets väggar.

10. Två identiska bashögtalare till en stereanläggning vid en utomhuskonsert är placerade på avståndet 6,00 m från varandra. Vid en testning av anläggningen skickas en signal med frekvensen 200 Hz till de båda högtalarna. a) Hur många minimum i ljudintensiteten kommer en person som från början befinner sig långt borta framför den ena av högtalarna och sedan vandrar mot densamma att uppfatta? b) Hur långt från högtalaren befinner sig personen i dessa fallen?



Akustik

11. En högtalarsiren matas med en elektrisk effekt på 15 W och man kan anta att ljudet sprids likformigt åt alla håll. På 100 m avstånd från sirenen uppmäts ljudintensitetsnivån 60 dB. Vilken är den akustiska verkningsgraden i sirenen?

12. När man anger ett värde uttryckt i dB för en ljudvåg gör man normalt sett ingen skillnad mellan ljudintensitetsnivån $\beta_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ med referensvärdet $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ och ljudtrycksnivån $\beta_p = 20 \log \left(\frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \right)$ med referensvärdet $p_{\text{eff},0} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$. Dessa båda nivåer korrelerar dock bara ungefärligen med varandra, eftersom både lufttrycket och temperaturen kan ändras. Betrakta luft med molmassan $28,8 \text{ g/mol}$ vid trycket $1,00 \text{ bar}$ (normalt lufttryck) och beräkna den temperatur vid vilken de båda värden är exakt lika, dvs. den temperatur då $\beta_I = \beta_p$?

13. Två identiska högtalare som vardera avger den totala ljudeffekten 1 mW lika fördelat över alla riktningar i rummet står placerade på ett avstånd av $5,0 \text{ m}$ från varandra. En person står på avståndet $3,0 \text{ m}$ från den enda och $7,0 \text{ m}$ från den andra. Vilken blir ljudintensitetsnivån (uttryckt i dB relativt I_0) där personen befinner sig om

a) om högtalarna sänder ut musik från två olika stereoanläggningar?

b) ljudfarten i rummet är 344 m/s och högtalarna avger en ton med frekvensen 387 Hz samt är kopplade med lika långa sladdar till samma funktionsgenerator?

14. Det upplevda bullret från vindkraftverk kan ibland vara ett problem för boende i närheten. Ett normalt vindkraftverk avger ett svischande ljud med en ungefärlig ljudnivå på 95 dB på $1,0 \text{ meters}$ avstånd från rotorbladen. Enligt en forskningsstudie av Pedersen et al (J. Acoust. Soc. Am. 126 (2009), 634) tycker färre än 5% av de boende att ljudet är irriterande om ljudnivån är högst 30 dB , medan ca. 20% känner sig irriterade på ljudet vid det rekommenderade värdet på maximalt 40 dB utomhus. Hur lång från ett hus kan en vindkraftspark med 10 vindkraftverk placeras som närmast om bullret inte tillåts överstiga rekommendationerna på 40 dB ? Du får för enkelhets skull anta att avståndet från varje vindkraftverk till huset är detsamma.

15. Vid fotbollsmatcher kan spelarna ha svårt att uppfatta domarens visselsignaler på grund av publikens högljudda sång. En domarpipa avger en ljudnivå på 105 dB på $1,0 \text{ m}$ avstånd och en entusiastisk supporter i publiken sjunger i medeltal med en effekt av $20 \mu\text{W}$. Anta att när domaren blåser i pipan, så befinner sig en spelare 40 m från domaren och i medeltal 20 m från den sjungande publiken. Hur många sjungande supportrar behövs för att överrösta ljudet från domarpipan om vi antar att ljudintensiteten från publiken måste vara dubbelt så stor som ljudintensiteten från domarpipan för att det ska bli svårt att uppfatta signalerna?

16. Man ska installera en ny maskin i en processindustri och vill då kontrollera ljudintensitetsnivån från maskinen. Eftersom övriga maskiner måste vara igång när man gör mätningen, mäter man först upp ljudintensitetsnivån $81,0 \text{ dB}$ när den nya maskinen är avslagen och därefter mäter man upp ljudintensitetsnivån $85,2 \text{ dB}$ när den är påslagen. Vilken ljudintensitetsnivå avger den nya maskinen ensam?

17. Under sommaren kan man bli överraskad av plötsligt uppdykande åskmoln. En typisk åskblix i Sverige motsvarar en elektrisk ström på 20 kA över en potential på 30 MV under en tidsperiod på 3 gånger $0,1 \text{ ms}$ (varje urladdning varar i ca $0,1 \text{ ms}$ och det sker i medeltal 3 urladdningar i varje åskblix, med ett tidsmellanrum mellan varje urladdning på i storleksordningen 30 ms). Avståndet mellan moln och mark är i medeltal

1500 m. Antag att en sådan blixtnedslagsrätt faller rakt ned mot marken på avståndet 200 m från den punkt där du befinner dig. Uppskatta den ljudintensitetsnivå som du kommer att uppfatta? Ett rimligt antagande är att ca 1 % av energin i urladdningen går åt till att skapa ljudvågen.

18. En ljudvåg med frekvensen 400 Hz faller in vinkelrätt från luft mot vatten. a) Beräkna förhållandet mellan den transmitterade vågens och den infallande vågens intensiteter, $\frac{I_t}{I_i}$, samt b) beräkna förhållandet mellan den transmitterade vågens tryck och den infallande vågens tryck, $\frac{p_t}{p_i}$. Ljudfarten i luft är 340 m/s och i vatten är den 1500 m/s. Densiteterna är 1,29 kg/m³ respektive 1000 kg/m³.

19. En plan longitudinell ultraljudsvåg med frekvensen 2,00 MHz utbreder sig i vatten och träffar stålskrovet hos en fartyg under vinkelrätt infall. Effektivvärdet av det akustiska trycket hos vågen är 1,0 kPa i vattnet. Hur mycket kommer atomerna i fartygsskrovet att maximalt förflyttas på grund av vågen, dvs hur stor är vågens amplitud i skrovet? De akustiska impedanserna är $1,46 \cdot 10^6 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ för vatten och $4,03 \cdot 10^7 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ för stålet i fartygsskrovet. Ljudfarten i vatten är 1500 m/s och i stål är den 3800 m/s.

20. En glasvägg omgiven av luft träffas från ena sidan av en ljudvåg med ljudintensitetsnivån 70 dB (motsvarar ungefär vanligt samtal). Vågen faller in vinkelrätt mot glasväggen.

a) Beräkna ljudintensitetsnivån på andra sidan glasväggen? För enkelhets skull kan multipelreflektioner och absorption i glaset försummas.

b) Hörbarhetsnivån för det mänskliga örat är i bästa fall någon dB (för frekvenser runt 1 – 2 kHz), varför man inte borde kunna uppfatta ljudet från andra sidan glasväggen enligt det resultat som man får i första deluppgiften. Försök att förklara varför man trots detta kan föra ett samtal med en person på andra sidan av ett vanligt fönster.

Luft har densiteten 1,29 kg/m³ och glas har densiteten 2500 kg/m³. Ljudvågornas fart är 340 m/s i luft och 4700 m/s i glaset.

Vågfenomen

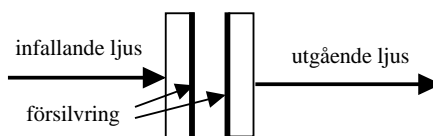
21. Kristaller av kvarts används ofta som frekvensgivare i olika tillämpningar som kräver en stabil klockfrekvens, t.ex. radiosändare och klockor. Kvarts är ett piezoelektriskt material, vilket innebär att kvartskristaller kommer att förlängas eller förkortas beroende på den pålagda spänningens polaritet när de placeras i ett elektriskt fält. Om det yttre fältet är ett växelströmsfält kommer kristallen att vibrera i takt med fältet. Vibrationsamplituderna blir särskilt stora när växelströmsfältets frekvens överensstämmer med någon av kristallens resonansfrekvenser. Köper man en kristall, stämplad 100 MHz, är denna frekvens vanligtvis inte grundfrekvensen utan andra övertonen hos den longitudinella svängningen. Hur tjock måste kristallen då vara? Kvarts har elasticitetsmodulen $7,7 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ och densiteten är 2,7 kg/dm³.

22. En ultraljudssändare sänder longitudinella ljudvågor in i kortändan av en fritt upphängd 7,5 cm lång metallstav via ett kopplingsmedium (som kan vara vatten eller olja). När frekvensen varieras över frekvensområdet 100 – 200 kHz blir det resonans vid

frekvenserna 120 kHz, 141 kHz, 165 kHz samt 190 kHz. Beräkna ur dessa data ett värde på ljudfarten för longitudinella vågor i metallstaven?

23. Man ska bestämma dämpningsförmågan hos ett material och placerar det därför i ena ändan av ett rör. I röret alstras ljudvågor av en högtalare som befinner sig i andra ändan av röret. Det akustiska trycket mäts längs rörets mittaxel med hjälp av en sond som är kopplad till en mikrofon. Man justerar förstärkningen på signalen från mikrofonen så att tryckets maximivärde blir 100 skaldelar. Med dessa inställningar får man att tryckets minimivärde blir 28 skaldelar. Beräkna absorptionskoefficienten $\alpha = \frac{I_i - I_r}{I_i}$ hos materialet, där I_i är infallande intensitet och I_r är reflekterad intensitet.

24. En metod för att mycket noga välja ut och studera en specifik våglängd i ett spektrum går ut på att man låter det infallande ljuset falla in mot en så kallad Fabry-Perot etalong (se figur). Denna består av två helt parallella och tunt försilvrade plana glasytor med hög reflektans (dock inte total, typiskt värde är en reflektionskoefficient, R , på cirka 98 %). Antag att avståndet mellan glasplattorna är exakt 0,550 mm och att luften mellan ytorna har brytningsindex 1,000280. Låt ljuset falla in vinkelrätt mot glasytorna. Uppskatta skillnaden i våglängd mellan två våglängder som släpps igenom i det synliga området ($\lambda = 500$ nm)?



25. Två ljudvågor med något olika frekvens sänds ut från två olika högtalare. Med hjälp av en ljudnivåmätare registrerar en åhörare en största ljudtrycksnivå på 80 dB och en minsta nivå på 55 dB i en fix punkt i rummet. Från ett minimum till det tionde därpå följande minimumet dröjer det 25,0 s. Beräkna förhållandet mellan vågornas tryckamplituder samt beräkna den andra vågens frekvens om man vet att den förstas är 880,0 Hz.

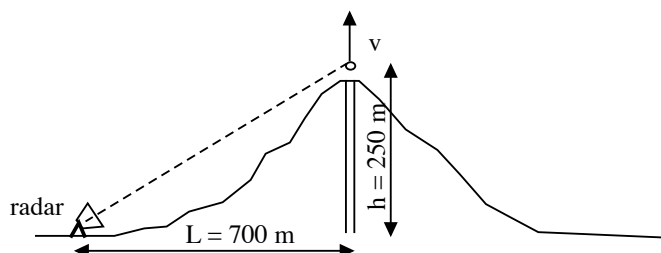
26. En pianostämmare använder sig av en stämgafl med tonen 256 Hz för att stämma en pianosträng. Beskriv den ljudsignal som han hör när han slår i stämgafln och samtidigt slår an tangenten ifall strängen är 3% mer spänd än den borde vara?

27. Ett flygplan passerar med konstant hastighet och på låg höjd en observatör på ett flygfält en tidig vårdag då termometern visar +5 °C. Vilken fart ska planet ha för att frekvensen hos bullret ska tyckas dubbelt så högt före passagen som efter?

28. Fladdermöss använder ultraljud både för att orientera sig och för att finna byten i form av flygande insekter. Olika arter av fladdermöss använder olika frekvenser - en vanlig nordisk fladdermus använder sig t.ex. av frekvenser runt 30 kHz. Antag att en fladdermus rör sig med farten 5 m/s i riktning mot en insekt som den vill fånga. Då fladdermusen skickar ut en kortvarig ultraljudsvåg med frekvensen 30,0 kHz, får den tillbaka en signal från den flygande insekten med frekvensen 30,4 kHz. Med vilken fart rör sig insekten mot eller bort från fladdermusen?

29. Vid en fartkontroll för bilar på en väg med 70 km/h som högsta tillåtna fart använder sig polisradarn av mikrovågor med frekvensen 2,0 GHz. Mikrovågorna sänds ut av en sändare vid sidan av vägen och man mäter frekvensen hos de vågor som har reflekterats mot bilen. För en bil som närmar sig rakt mot radarkontrollen uppmäter man att frekvensen blir 315 Hz högre jämfört med den utsända frekvensen. Kommer bilföraren att klara sig undan utan påföljd, blir han bötfälld eller mister han körkortet? En bilförare mister körkortet om han överträder hastighetsbegränsningen med mer än 30 km/h.

30. En metod för att studera hur lava och andra större partiklar sprids vid ett vulkanutbrott går ut på att ställa en radarstation på behörigt avstånd från den aktiva vulkanen och mäta de reflekterade radarsignalerna (se figur nedan). Man använder sig då av en riktad antenn som endast tar emot radarsignaler från ett litet område ovanför vulkanens topp (i praktiken 0-150 m ovanför). Frekvensen hos radarn är 1274 MHz, eftersom denna frekvens inte sprids eller absorberas särskilt mycket av dimma, moln, regn eller små partiklar av aska. Genom att analysera den reflekterade signalen med hjälp av dator, kan man skapa sig en bild av hur själva utbrottet går till. För en bit lava som sprutar rakt upp från toppen av vulkanen mäter man upp att den mottagna frekvensen har minskat med 120 Hz jämfört med den utsända signalens frekvens. Beräkna den fart v med vilken lavabiten rör sig?



31. Betrakta en fiskgjuse som från 8,0 meters höjd påbörjar en dykning i 30° vinkel mot vattenytan och i rak riktning mot en fisk som han ser. Fisken befinner sig 2,0 m under vattenytan. Anta att vår fiskgjuse fortsätter i samma riktning även efter att ha passerat vattenytan. Vilket är det kortaste avståndet under dykningen till den punkt där fisken befinner sig?

32. En fiskebåt sänder ut ultraljudsekon för att lokalisera fiskstim. Antag att man observerar ett starkt eko efter 0,460 s i en riktning med vinkeln $10,0^\circ$ gentemot horisontalplanet. Kaptenen antar att vattnets temperatur hela tiden är $15,0^\circ\text{C}$ och beräknar utifrån detta avståndet till det förmodade fiskstimmet och hur djupt under vattenytan det befinner sig. Vattentemperaturen är emellertid skiktad och sjunker snabbt till $7,0^\circ\text{C}$ på djupet 5,0 m under sändaren. Hur stort fel gör kaptenen vid beräkningen av avståndet till stimmet i höjd- respektive längdled? En god approximation för ljudfartens temperaturberoende i vatten är $v = 1412,0 + 4,0 \cdot T$, där T är vattnets temperatur uttryckt i $^\circ\text{C}$.

Interferens och diffraktion

33. Ett antireflexskikt med brytningsindex 1,38 ska läggas på glas med brytningsindex 1,60.

a) Hur tjockt ska skiktet minst vara för att den reflekterade intensiteten ska bli minimal för våglängden 520 nm?

b) Hur stor del reflekteras för denna våglängd? Ljuset faller in vinkelrätt mot ytan.

34. Betrakta en glasyta (brytningsindex 1,60) som är belagd med ett antireflexskikt (brytningsindex 1,38) som inte är tunnast möjliga utan istället för en tjocklek som motsvarar $\frac{\lambda}{4}$ har en tjocklek som motsvarar $\frac{3\lambda}{4}$. Skiktet ger minimal reflektion vid vinkelrätt infall av gult ljus (590 nm). Antag att man istället vinklar glasytan. Vid vilken infallsvinkel kommer man att se maximal reflektans för rött ljus med våglängden 650 nm?

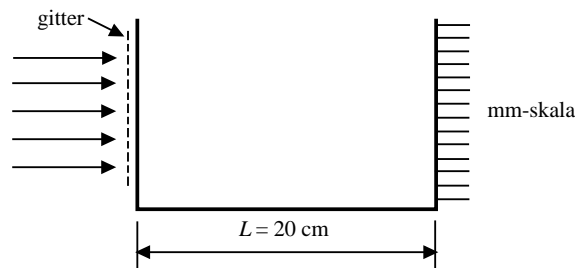
35. En tunn oljehinna flyter ovanpå en vattenyta. En liten del av oljehinnan belyses med en laser (våglängd 632,8 nm) samtidigt som intensiteten i det reflekterade ljuset studeras som funktion av infallsvinkeln. Intensiteten hos den reflekterade strålen blir nära noll när laserljusets infallsvinkel mot oljehinnan är 25° och när den är 57° , men inte annars. Hur tjock är oljehinnan? Oljan har brytningsindex $n = 1,56$ och vattnet har $n = 1,33$.

36. Om man vill mäta den linjära längdutvidgningskoefficienten α för ett material (enligt definition är $\alpha = \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta T}$, där L är längden av materialet, ΔL är längdändringen och ΔT är ändringen i temperatur), kan man använda en Michelsoninterferometer. Vid en sådan mätning fäster man materialet som man vill undersöka bakom en av speglarna i interferometern (så att spegeln endast är i kontakt med materialet som ska undersökas) och ändrar sedan temperaturen. Vid en mätning av längdutvidgningskoefficienten hos zink använde man sig av en He-Ne-laser med våglängden 632,8 nm som ljuskälla samt en zinkbit med längden 1,00 cm. När temperaturen ändrades från 20°C till 40°C räknade man till att 18,70 fransar förflyttades när zinkbiten satt bakom spegeln samt att 2,14 fransar förflyttades när det inte fanns någon zinkbit bakom spegeln.

a) Beräkna α för zink utgående från mätdata?

b) Förflyttningarna har angivits med en noggrannhet på en hundraedels frans. Förklara hur detta i princip kan vara möjligt?

37. Med hjälp av ett transmissionsgitter och ett tunnväggigt rektangulärt glaskärl kan man bestämma brytningsindex för vätskor. Gittret placeras kort framför kärleväggen (se figur nedan) och en mm-skala fästs på motstående sida av kärlet. Gittret belyses vinkelrätt med en He-Ne-laser med våglängden 632,8 nm. Med tomt kärl blir avståndet mellan centralmaximum och första sidomaximum 14,0 mm och med fyllt kärl 10,0 mm. Beräkna vätskans brytningsindex samt gitterets gitterkonstant.



38. Om man betraktar en punktformig ljuskälla på 40 m avstånd genom ett stycke väv ser man ett kvadratisk mönster av ljusa punkter. Det ser ut som om det i lampans plan satt lampor i ett rutnät med 48 cm sidor. Beräkna antalet trådar/cm i väven? ögat har sin största känslighet vid våglängden 560 nm, varför beräkningen kan göras för denna våglängd.

39. Antag att man riktade det rymdbaserade Hubble-teleskopet (med diameter 2,4 m) mot månen. Skulle det vara då vara möjligt att se en månsten med 1,0 m diameter på månens yta? Månen befinner sig på ett avstånd av cirka 350 000 km från jorden.

40. En halvledarlaser av galliumarsenid sänder ut vågor med våglängden 900 nm från en rektangulär yta med dimensionerna $3,0 \mu\text{m} \times 10,0 \mu\text{m}$. På grund av de små dimensionerna finns det inga speglar i en sådan laser, utan det räcker med att brytningsindex ändras vid gränssytan för att det ska bli tillräcklig reflektans. Hur ser intensitetsvariationerna ut på en skärm 6,0 dm framför lasern?

Elektromagnetiska vågor och polarisation

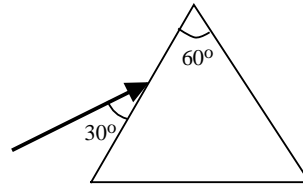
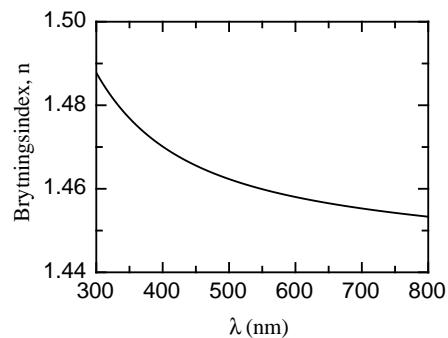
41. Det elektriska fältets komponenter hos en elektromagnetisk våg som utbreder sig längs x -axeln inuti ett material kan i ett speciellt fall tecknas:

$$E_x = 0 ; E_y = E_z = 2,0 \cdot \cos(3,04 \cdot 10^{15}t - 1,58 \cdot 10^7 x) \text{ Vm}^{-1}$$

a) Beräkna brytningsindex n för det material i vilket vågen utbreder sig?

b) Beskriv hur vågen är polariserad?

42. I diagrammet nedan visas hur brytningsindex, n , för ett optiskt glasmaterial beror av våglängden, λ . Antag att vitt ljus faller in mot ett prisma av materialet enligt figuren. över vilken vinkel kommer ljus av olika våglängder inom det synliga området (mellan 400 - 700 nm) att sprida sig efter passagen av prismet?



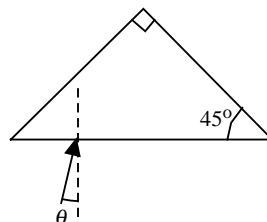
43. Två polarisatorer är orienterade relativt varandra så att inget ljus transmittteras genom den andra polarisatorn (analysatorn). Mellan polarisatorerna placeras ytterligare en vridbar polarisator. Härled den formel som visar hur det transmitterade ljusets intensitet varierar med orienteringen av den mellersta polarisatorn. För vilka vinklar erhålls intensitetsmaximum?

44. Optiskt aktiva material har egenskapen att de roterar polarisationsplanet hos allt ljus som transmittteras genom materialet. Den vinkel som polarisationsplanet vrids beror på materialet ifråga, hur lång sträcka som ljuset går genom materialet samt på koncentrationen av materialet om det befinner sig i lösning. Beskriv hur man med hjälp av enkla optiska komponenter kan skapa en utrustning för att mäta vridningar av polarisationsplanet ($< 90^\circ$ får antas) hos ett optiskt aktivt material. Din lösning ska innehålla

- en figur med strålgång
- en förklaring av hur ljusets polarisation ändras efter vardera komponenten i det optiska systemet
- en förklaring hur man praktiskt ska genomföra mätningen på ett bra sätt

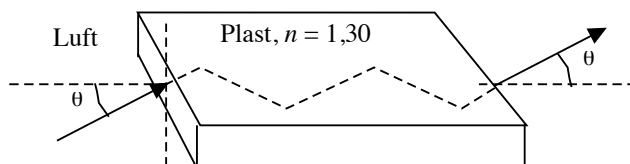
45. I många optiska instrument finns det ett $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$ glasprisma som ändrar strålriktningen. Antag att ljus faller in med infallsvinkeln $\theta = 7,00^\circ$ mot hypotenusan som figuren nedan visar.

- Vilken är riktningen på det ljus som kommer ut från hypotenusan?
- Beräkna förhållandet mellan intensiteterna för utgående och infallande ljus i de två fallen då det infallande ljuset är polariserat i infallsplanet respektive då det är polariserat vinkelrätt mot infallsplanet. Glaset har brytningsindex 1,60.



46. Anta att en ljusstråle faller in med vinkeln θ mot kortändan av en tunn, platt plastbit med plana ytor (se figur nedan).

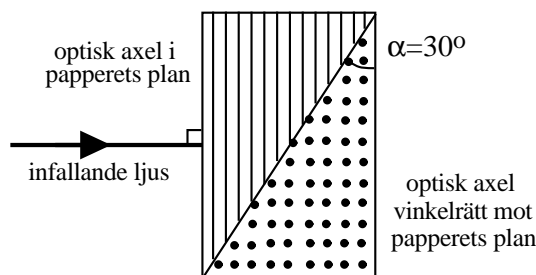
- a) Beräkna den största vinkel θ som ljuset får falla in med för att det ska bli totalreflektion av ljusstrålen när den passerar genom plattan?
- b) Om $\theta = 25^\circ$ och det infallande ljuset är opolariserat, vad blir då förhållandet mellan ljus polariserat i respektive vinkelrätt mot strålens infallsplan när det kommer ut på andra sidan av plattan?



47. Opolariserat ljus träffar en glasplatta under en infallsvinkel som gör att det reflekterade ljuset är linjärpolariserat. Hur många procent av den infallande intensiteten transmittas in i plattan om plattan har brytningsindex 1,50 och omges av luft?

48. Om du är ute och seglar en solig dag, kan det reflekterade ljuset från havet vara irriterande. För att minska ljuset som når ögonen, kan du ta på sig ett par polariserande glasögon, som består av ett polarisationsfilter som bara släpper igenom vertikalt polariserat ljus. Anta att det direkta solljuset i ett visst ögonblick faller in med en infallsvinkel på 35° mot vattenytan och sedan reflekteras mot ditt öga. Hur stor andel av det infallande ljuset når ditt öga om du har på dig glasögonen respektive om du inte har det?

49. I ett dubbelbrytande material är brytningsindex olika beroende på ljusets polarisering. Ljus polariserat längs med den så kallade optiska axeln har brytningsindex $n_{eo} = 1,490$ medan det däremot har värdet $n_o = 1,650$ för riktningar vinkelrätt mot den optiska axeln. Detta gör det möjligt att använda dubbelbrytande material för diverse tillämpningar där man vill kontrollera ljusets polarisation. En sådan komponent är ett Wollastonprisma som består av två sammanfogade prismor av ett dubbelbrytande material med de optiska axlarna i de båda prismorna så som visas i figuren nedan. Beräkna vinkeln mellan den infallande strålen och den utgående strålen från det sammansatta prismet för de båda fallen när ljuset är polariserat i papperets plan respektive när ljuset är polariserat vinkelrätt mot papperets plan?



50. Linjärpolariserat ljus med våglängden 589 nm faller in vinkelrätt mot en tunn platta av glimmer, som är ett dubbelbrytande material. Plattan är kluven med den optiska axeln i ytans plan. Vid den givna våglängden är brytningsindex 1,5997 för ljus

polariserat längs med den optiska axeln samt 1,5941 för ljus polariserat vinkelrätt mot den optiska axeln. Anta att det infallande linjärpolariserade ljusets polarisationsriktning bildar vinkeln 45° mot den optiska axeln i kristallens plan. Beskriv polarisationen hos det ljus som lämnar plattan om plattans tjocklek är a) $52,6 \mu\text{m}$ eller b) $26,3 \mu\text{m}$?

Brytning i sfäriska ytor

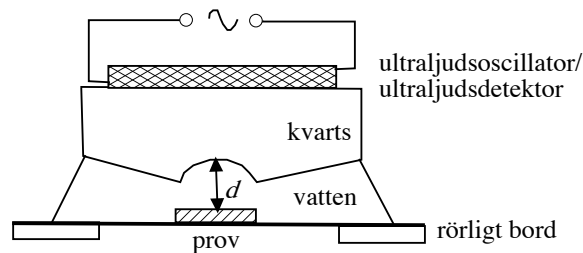
51. Ett mycket tidigt sätt att göra förstoringsglas är med vattendroppar på en plan glasbit. Dropparnas ovansida kan få sfärisk form. Antag att vi har en glasplatta som är 2,0 mm tjock och en vattendroppe som är 2,0 mm tjock och har krökningsradien 2,0 mm. Vilken fokallängd får systemet glasplatta-vattendroppe? Vatten har brytningsindex 1,33 och glas har brytningsindex 1,55.

52. Man bör inte vattna sina blommor när solen skiner som skarpast på dagen, eftersom vattendroppar som hamnar på blombladen kan koncentrera solljuset och därmed döda bladcellerna, vilket ger bruna fläckar på bladen. Anta att en halvsfärisk vattendroppe med radien 2,0 mm av misstag hamnar på ett blomblad. Beräkna ökningen (i procent) av intensiteten hos det solljus som lokalt träffar blombladets yta under vattendroppen jämfört med om det inte hade funnits någon vattendroppe alls på bladet? Solljuset kan antas falla in vinkelrätt mot bladet (och därmed även mot översta delen av vattendroppen).

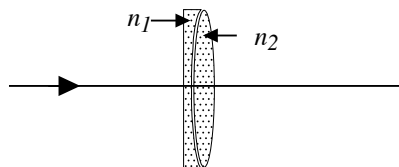
53. En "ultraljudskniv" avsedd för demolering av gallstenar på plats, består av en stav med längd 20 mm och diameter 4 mm som avslutas med en sfärisk yta (som får krökningsradien 2 mm). Ljudets hastighet i staven är 1980 ms^{-1} och i kroppsvätskan 1100 ms^{-1} . Frekvensen hos ultraljudet är 22 MHz. Hur långt från staven är ljudkoncentrationen som störst? (Ljudet leds från stavens plana ände mot den sfäriska).

54. Ultraljudsmikroskop används inom elektronikindustrin för att kontrollera lödningen av komponenter på kretskort, eftersom ultraljud kan användas för att hitta håligheter både i lödningarna och i de enskilda komponenterna. I ett sådant mikroskop i reflektionsmod (se principskissen nedan) fokuseras den utsända ultraljudsvågen via en sfärisk yta mot ett prov som vanligtvis befinner sig i ett kontaktmedium (vatten) för att inte förlora för mycket intensitet vid mätningen och signalen reflekteras sedan tillbaka till sändaren som nu fungerar som detektor. Hur stor krökningsradie ska den sfäriska ytan ha ifall man vill att strålen ska fokuseras på avståndet $d = 6,0 \text{ mm}$ nedanför ytan?

Material	Ljudfart (m/s)	Akustisk impedans ($\text{kg/m}^2\text{s}$)
Vatten	1480	$1,46 \cdot 10^6$
Kvarts	5800	$15,7 \cdot 10^6$



55. Bilden visar en så kallad akromatisk dubblett, vilken är konstruerad för att kunna minimera effekterna av våglängdsberoendet hos glasets brytningsindex ($n_1(\lambda)$ och $n_2(\lambda)$). Den första linsen (med brytningsindex n_1) har en plan första yta och en konkav andra yta med krökningsradien R . Den andra linsen (brytningsindex n_2) ligger tätt emot den första (inget utrymme emellan) och har krökningsradien R på båda sidor.



a) Visa att fokallavståndet f för hela linssystemet (tunna linser antas) kan tecknas

$$f = \frac{R}{2n_2 - n_1 - 1}$$

b) Anta att den första linsen är tillverkad av flintglas med brytningsindex 1,632 för blått ljus och brytningsindex 1,616 för rött ljus. Om den andra linsen ska tillverkas av ett kronglas med ett brytningsindex på 1,525 för blått ljus, vilket brytningsindex bör detta glas i så fall ha för rött ljus?

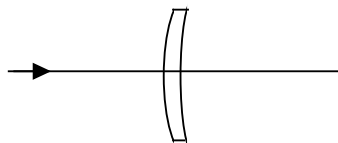
56. Brytningsindex för kisel ges i det infraröda området av följande uttryck (formel hämtad från C.D. Salzberg, J. Opt. Soc. Am. 47 (1957), 244):

$$n = A + BL + CL^2 + D\lambda^2 + E\lambda^4 \quad ; \quad L = \frac{1}{(\lambda^2 - 0,028)}$$

där våglängden λ anges i enheten mikrometer och konstanterna A , B , C , D och E har värdena:

$$A = 3,41696 \quad , \quad B = 0,138497 \quad , \quad C = 0,013924 \quad , \quad D = -2,09 \cdot 10^{-5} \quad , \quad E = 1,48 \cdot 10^{-7}$$

Betrakta en tunn lens av kisel enligt figuren nedan med krökningsradien 13,0 mm hos den första linsytan och krökningsradien 20,0 mm hos den andra linsytan. Hur stor blir skillnaden i fokallavståndet hos linsen när den fokuserar strålarna från antingen en laserdiod med våglängden 1550 nm eller en laserdiod med våglängden 1300 nm?



57. Tubkikare av den typ som avbildas i sjörövarfilmer hade oftast inga prismor för att göra bilden rättvänd, utan man använde istället ett system med en mellanlins vilket resulterar i två mellanbilder. Vilken vinkelförstoring får man i en kikare med följande linser och avstånd (numrerat från objektivet)?

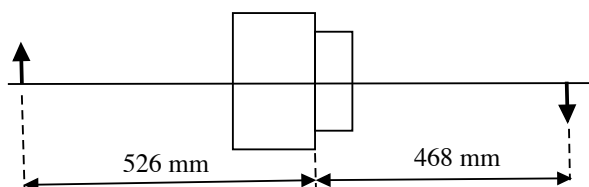
$$f_1 = 150 \text{ mm}, d_{12} = 180 \text{ mm}, f_2 = 20 \text{ mm}, d_{23} = 90 \text{ mm}, f_3 = 30 \text{ mm}$$

58. Ett teleobjektiv består av två tunna linser, en med brännvidden 130 mm och en med brännvidden -50 mm. Avståndet mellan linserna är 85 mm.

- Beräkna teleobjektivets brännvidd,
- Objektivet riktas mot solen, som upptar vinkeln $0,532^\circ$. Hur stor blir bilden av solen?

59. Ett sätt att komma över skriven information på olagligt sätt är att med kikare läsa den genom ett fönster. Anta att vi har en normal text med linjeavståndet 5 mm som vi vill kunna läsa på 50 m håll med hjälp av en kamera med teleskoptillsats. Första linsen har fokallängden 400 mm. 446,0 mm bakom denna placeras en lins med fokallängden 40 mm. Filmen placeras sedan där en skarp bild av det 50 m avlägsna objektet hamnar. Hur stort blir linjeavståndet i bilden?

60. Man vill använda ett objektiv med flera linser och som är märkt $f = 245 \text{ mm}$ (utan att mer information finns tillgänglig) för att göra en avbildning där ett föremål förminskas med en faktor 3,0. För att först få en uppfattning om objektivets egenskaper, sätter man upp det i en försöksuppställning och konstaterar att det blir en avbildning i skala 1:1 om objektets och bildens avstånd till objektfattningens plan är de som anges i figuren nedan. Hur ska objektplan och bildplan placeras om man vill få den sökta förminskningen på en faktor 3,0 (räknat från objektinfattningens plan)?



Blandade problem

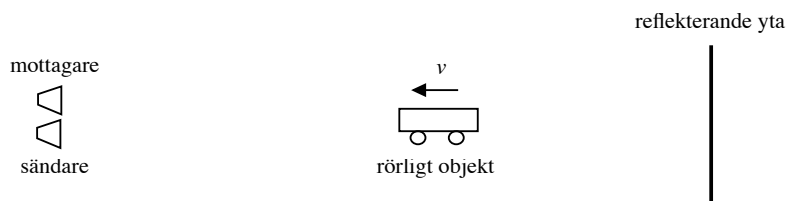
61. Elefanter kommunicerar med hjälp av lågfrekvent ljud i frekvensområdet 10-420 Hz. Dessa ljud kan ha en så pass hög ljudintensitetsnivå som 117 dB på 1,0 m avstånd från en trumpetande elefant, vilket gör elefanten till ett av de mest högljudda djuren i naturen. Anta att en högljutt trumpetande elefant ger ifrån i sig ljud med frekvensen 20 Hz och ljudintensitetsnivån 117 dB en vacker dag på savannen då temperaturen är 35°C . Luft har molmassan $28,8 \text{ g/mol}$ och densiteten $1,14 \text{ kg/m}^3$.

- Ta fram en fullständig matematiskt beskrivning av den ljudvåg som elefanten ger ifrån sig?
- Hur stor blir ljudintensitetsnivån på 100 m avstånd från elefanten?

62. För att minimera reflektionerna i kopplingen mellan en fiberkärna och en vågledare, kan man belägga kopplingsytan mellan dem (ingen luft i detta fallet) med ett tunt skikt

av något material. I ett typiskt fall är fibern gjord av kvarts och har brytningsindex $n = 1,50$ medan vågledaren är gjord av ett kristallint material med $n = 2,23$. Vilket brytningsindex bör materialet i det tunna skiktet ha i det ideala fallet?

63. En metod för att mäta farten hos ett rörligt objekt går ut på att sända mikrovågor mot objektet och sedan detektera den sammansatta signal som man får genom att mikrovågorna dels reflekteras mot objektet och dels reflekteras mot en stillastående reflekterande yta (se figur). Antag att de utsända mikrovågorna har frekvensen 10,0 GHz och att man detekterar en signal från mottagaren med en periodtid på 6,0 ms. Vilken fart har det rörliga objektet i detta fallet?



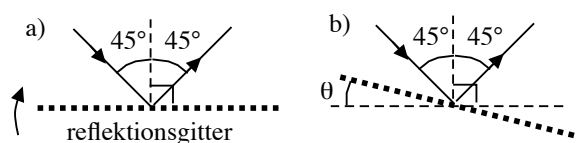
64. Övertrycket hos en akustisk våg i ett visst medium beskrivs matematiskt med:

$$\Delta p = 5,0 \cdot \cos(251 \cdot 10^3 t - 49,3 \cdot x) \text{ Pa}$$

a) Avgör ifall detta rör sig om infraljud, hörbart ljud eller ultraljud samt ge rimliga argument för om mediet som vågen rör sig genom troligtvis är en gas, en vätska eller ett fast material?

b) Om övertrycket vid tiden $t = 0$ s och i punkten $x = 0$ m fixeras till 5,0 Pa, vad blir då övertrycket 1,0 ms senare i en punkt som befinner sig 1,0 m från origo i vågens utbretningsriktning?

65. Figuren visar strålgången i en spektrometer där man använder ett roterbart reflektionsgitter för att bestämma vilken ljusvåglängd som man vill studera. Anta att gittret har 1200 ritsar/mm och att man vill studera våglängden 540 nm. Vilken vinkel θ bör man vrida gittret för att enbart få ut ljuset från denna våglängd?



66. En öronpropp som stoppas in i hörselgången minskar det ljud som når fram till örats trumhinna och kan därmed bidra till att förhindra hörselskador. En speciell sådan öronpropp har följande specifikationer:

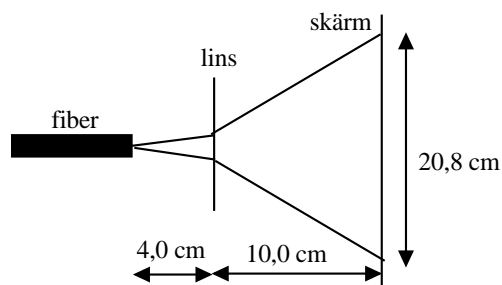
Frekvens (Hz)	125	250	500	1000	2000	4000	8000
Dämpning (dB)	18.8	15.6	16	18.5	27.7	23.9	22

En ljudvåg med intensiteten $1,0 \text{ mW/m}^2$ träffar ytterörat. Vilken är den högsta intensiteten (i W/m^2) som kan nå fram till örats trumhinna om öronproppen är korrekt instoppad i hörselgången?

67. Betrakta en Michelsoninterferometer där ljuskällan utgörs av en ljuslampa som sänder ut två mycket närliggande våglängder med $\lambda = 589 \text{ nm}$. När den rörliga spegeln förflyttas med hjälp av en mikrometerskruv upptäcker man en periodisk förändring av interferensmönstret. Mönstret försvinner ibland helt för att åter bli som tydligast efter att man med hjälp av mikrometerskruvens har åstadkommit en förskjutning på $144,5 \mu\text{m}$. Hur stor är våglängdsskillnaden mellan de båda våglängderna?

68. En högtalare är monterad utomhus $5,0 \text{ m}$ över marken. På ett avstånd av $12,0 \text{ m}$ i horisontell ledd från högtalaren står en person och lyssnar på musiken som spelas. Anta att avståndet mellan mark och öra är $1,70 \text{ m}$ och att ljudfarten är 340 m/s . Vissa frekvenser hörs extra starkt på grund av att en del av ljudet reflekteras i mot marken. Vilka är dessa frekvenser?

69. Det utgående ljuset från en multimod stegindexfiber sprids i en tunn konvex lens med fokallängd $2,4 \text{ cm}$ (se figur). Beräkna gränsvinkeln för totalreflektion inuti fiber om mantelns brytningsindex är $1,490$?



70. En fladdermus är ute och flyger en sommarnatt och de ljudpulser som den sänder ut kan beskrivas med ekvationen

$$\Delta p = \frac{A_r}{r} \cdot \sin(3,456 \cdot 10^5 t - 1007,5r) \text{ Pa}$$

där r är avståndet från fladdermusen och t är tiden. Den maximala ljudnivån som en fladdermus kan alstra är ca 100 dB på $1,0 \text{ meters}$ avstånd.

a) Bestäm ett ungefärligt värde på konstanten A_r i ekvationen ovan?

b) Vilken var temperaturen i luften denna sommarnatt?

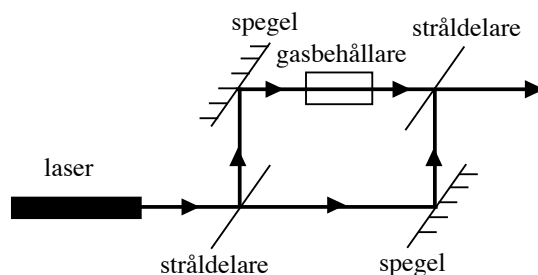
71. Figuren nedan visar en så kallad Mach-Zehnderinterferometer, vilken utgörs av en laser, två stråldelare (halvgenomskinliga speglar) och två vanliga speglar. I en av armarna till interferometern går strålen genom en gasbehållare (effektiv längd genom gasen är $5,0 \text{ cm}$) där man kan ändra trycket på den gas som finns i behållaren.

a) Utgå från skissen nedan och beskriv hur interferometern fungerar samt vad man förväntar sig att se i den utgående strålen

b) Beskriv med ord vad som händer i interferometern ifall man pumpar vakuum i gasbehållaren och sedan långsamt släpper in klorgas upp till trycket $1,50 \text{ atm}$ i behållaren.

c) Beräkna numeriskt vad som observeras i detta fall om lasern är en He-Ne-laser med våglängden $632,8 \text{ nm}$ och temperaturen i rummet är $20 \text{ }^\circ\text{C}$? Ur tabell kan man hämta att

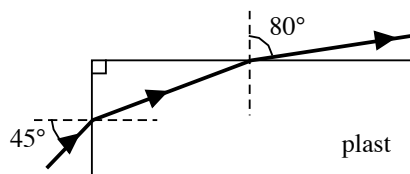
klor har brytningsindex 1,000773 vid trycket 1,00 atm och temperaturen 0 °C. Ledning: För brytningsindex n gäller att $n - 1$ är proportionell mot gasens densitet.



72. En ljusstråle som är polariserad vinkelrätt mot papperets plan faller in från luft och passerar en rektangulär plastbit på det sätt som visas i figuren.

a) Vilket brytningsindex har plasten?

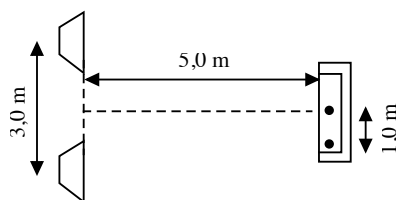
b) Hur stor andel av det infallande ljusets intensitet kommer att transmittas till den utgående strålen i figuren?



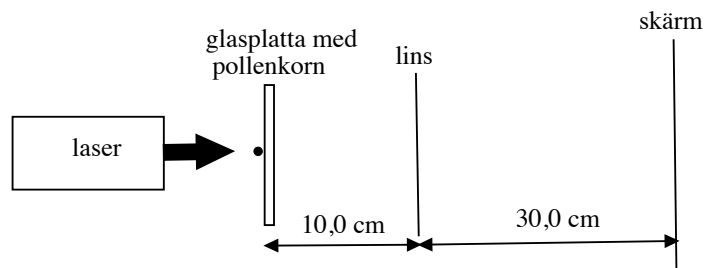
73. Två högtalare till en hemmabioanläggning svänger i fas med frekvensen 750 Hz. De är på avståndet 3,0 m från varandra. En soffa är placerad 5,0 m mitt framför högtalarna (se figur). Vardera högtalaren kan anses avge ljudnivån 80,0 dB överallt i soffan.

a) Hur hög är ljudnivån i soffans mitt när båda högtalarna är påslagna?

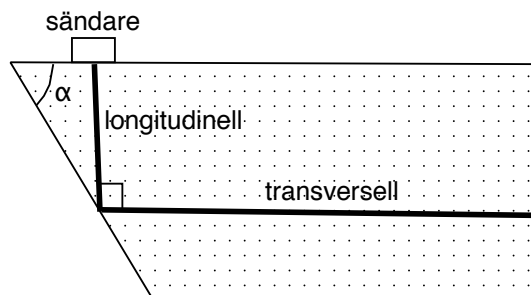
b) Hur hög är ljudnivån längst ut i soffan, 1,0 m från mittlinjen?



74. Ett pollenkorn läggs på ett objektglas och belyses med en He-Ne-laser som avger ljus med våglängden 632,8 nm som figuren nedan visar. Laserstrålens diameter är 5,0 mm. Bakom glasplattan förstoras den resulterande strålen av en lins med fokallängden -1,8 cm. På skärmen ser man då ett ringformat mönster som är ljus i mitten och sedan har en första mörk ring med diametern 38 mm. Hur stort var pollenkornet?



75. Det är enkelt att skapa en longitudinell våg inuti ett fast material. Man lägger en piezoelektrisk sändare (vilket är ett material som ändrar sin längd när det utsätts för en elektrisk spänning) ovanpå det fasta materialet och ser till att det eventuella mellanrummet mellan sändare och fast material är fyllt med olja eller någon annan trögflytande vätska. Det senare tjänar bara som syfte att se till att en stor del av ljudvågen från sändaren kommer in i det fasta materialet. Om den spänning som läggs på är sinusformad, kommer det att bildas en longitudinell våg inuti det fasta materialet. Det går dock att även skapa en transversell våg genom att låta den longitudinella vågen träffa en sned yta (se figur nedan). Vilken vinkel ska den sneda ytan ha om man vill att den utgående transversella vågen ska vara vinkelrät mot den infallande longitudinella vågen när materialet är aluminium som har en dubbelt så hög ljudutbredningsfart för longitudinella vågor som för transversella vågor?



2 LEDTRÅDAR

Problem efter ämnesområde

1. En harmonisk våg som rör sig längs den positiva x -axeln kan allmänt tecknas $s = A \sin(kx - \omega t + \Phi)$, där k är vågtalet, ω är vinkelfrekvensen och Φ är fasvinkeln.
2. En harmonisk våg som rör sig längs den negativa x -axeln kan allmänt tecknas $s = A \sin(kx + \omega t + \Phi)$, där k är vågtalet, ω är vinkelfrekvensen och Φ är fasvinkeln.
3. En harmonisk sfärisk våg kan allmänt tecknas $s = \frac{A_r}{r} \sin(kr - \omega t + \Phi)$, där r är avståndet från vågkällan, k är vågtalet, ω är vinkelfrekvensen och Φ är fasvinkeln.
4. Teckna den allmänna vågen, sätt startpunkten till origo samt tiden till noll och lös ut fasvinklarna (observera att det finns två möjliga lösningar).
5. Översätt kraftvillkoret till ett villkor för svängningens acceleration.
6. Föremålet börjar skallra när det inte längre kan följa med i membranets rörelser, dvs när accelerationen blir för stor.
7. Det går att lösa uppgiften antingen med hjälp av trigonometri eller genom att använda vektorer och teckna fasskillnaden mellan antennerna för en plan våg i tre dimensioner.
8. Vägskillnaden mellan de båda vågorna beräknas enklast genom att anta en plan havsyta och spegla sändarantennen i densamma, men du måste även tänka på vad som händer vid reflektionen i havsytan.
9. Ställ upp villkoren för destruktiv interferens i de båda fallen och antag att det rör sig om minimum för m respektive $m + 1$. Lös ut m .
10. Ställ upp villkoret för fasskillnaden mellan de båda vågorna. Bestäm mellan vilka värden den kan variera och hur många minimum det finns i detta intervall.
11. I likhet med definitionen av verkningsgrad i andra sammanhang, är den akustiska verkningsgraden lika med den totalt utsända akustiska effekten dividerat med den tillförda elektriska effekten.
12. Den akustiska impedansen $|Z| = \rho \cdot v$.
13. I ett av fallen är ljudvågorna koherenta och i det andra fallet är de inkoherenta. Interferensfenomen uppträder endast då vågorna är koherenta.

14. Ljudet från de olika vindkraftverken är oberoende av varandra.
15. De sjungande supptrarna är oberoende av varandra, samtidigt som det är olika avstånd mellan ljudkällorna och spelaren.
16. Ställ upp relationerna för ljudintensitetsnivån i de båda mätningarna och fundera hur man kan lösa ut den sökta ljudintensitetsnivån ur dessa relationer.
17. Det rimligaste antagandet är att ljudenergin från åskblixten kommer att spridas över en cylinderformad yta.
18. Den transmitterade vågens intensitet är den intensitet som inte reflekteras. Utnyttja att intensiteten kan tecknas $I = \frac{p^2}{2|Z|}$.
19. Beräkna först den intensitet som transmittas in i fartygsskrovet. Notera att det är effektivvärdet av vågens amplitud som anges i uppgiften. Utnyttja sedan att intensiteten kan beräknas utgående från amplituden, vinkelfrekvensen och den akustiska impedansen.
20. a) Det blir reflektion i två ytor (luft-glas respektive glas-luft).
b) Det finns ett annat sätt att transmitta vågen genom fönsterrutan!
21. Vid resonans bildas det en stående våg i kvartskristallen.
22. Resonans uppträder när man har en stående våg i staven. Vid verkliga mätningar av fysikaliska storheter finns det osäkerheter i mätvärdena.
23. Man får en stående våg med olika amplitud hos infallande och reflekterad ljudvåg. Vid maximalt utslag adderas tryckamplituderna och vid minimalt utslag subtraheras de från varandra.
24. Det är endast våglängder som uppfyller stående vågvillkoret inuti interferometern som kommer att transmittas.
25. Fenomenet uppkommer på grund av svävningar. Högsta ljudnivån får man när ljudtrycken adderas och lägsta ljudnivån får man när ljudtrycken subtraheras. Börja med att teckna ljudintensitetsnivån i de båda fallen och lös sedan ut förhållandet mellan trycken, $\frac{p_1}{p_2}$.
26. När strängen är för hårt spänd kommer ljudet från strängen att ha högre frekvens än den frekvens som pianostämmaren har i sin stämgaaffel.
27. Ändringen i bullrets frekvens kommer från Dopplereffekten.

- 28.** Läg in ett koordinatsystem och antag att insekten rör sig med farten v längs positiva (alternativt negativa) x -axeln i detta koordinatsystem. Följ vågen och ta med alla Dopplerändringar i frekvensen som sker under det att ljudvågen sänds ut från fladdermusen tills dess att den tas emot.
- 29.** Radarn sänder ut elektromagnetiska vågor varför vi kan utnyttja att bilens fart $v \ll c$, där c är ljusfarten i vakuum, för att approximera (ej nödvändigt, men ger något enklare räkningar).
- 30.** Radarn sänder ut elektromagnetiska vågor varför vi kan utnyttja att lavabitens fart $v \ll c$, där c är ljusfarten i vakuum. Tänk även på geometrin i problemet.
- 31.** Brytning i plan yta för ljuset.
- 32.** Brytning av ultraljudsvågen sker i gränsskiktet mellan vatten av olika temperatur.
- 33.** Vid antireflexbehandling vill man minimera intensiteten hos det reflekterade ljuset genom destruktiv interferens i tunna skikt.
- 34.** Det rör sig uppenbarligen om interferens i tunna skikt med snett infall.
- 35.** Ställ upp interferensvillkoret för de båda fallen. Det rör sig om konsekutiva minima.
- 36.** a) En förflyttning på en frans i interferensmönstret motsvarar en längdförändring på $\frac{\lambda}{2}$ hos zinkbiten. b) Det räcker att mäta intensiteten i 100 punkter mellan två fransar. Hur ska det gå till?
- 37.** I den tomma behållaren sker gitterreflektionerna i luft (glasväggarnas tjocklek försummas). Med vätska i behållaren ändras våglängden i gitterekvationen.
- 38.** Väven fungerar som ett gitter.
- 39.** Upplösningen begränsas av diffraktion.
- 40.** De små dimensionerna ger upphov till diffraktion i ytan (mer spridning i den kortare dimensionens riktning).
- 41.** Brytningsindex för ett material definieras som $n = c_0/v$, där c_0 är ljusfarten i vakuum och v är ljusfarten i materialet.
- 42.** Läs av brytningsindex ur figuren. Snells brytningslag och geometrin ger resten.
- 43.** Utnyttja Malus lag två gånger om.

44. Vilken typ av polarisation bör ljuset som fallet in mot provet ha för att det ska bli enkelt att tolka vad som händer i det optiskt aktiva materialet?
45. Följ ljusets gång i prismet och använd Fresnels formler.
46. a) Vad är villkoret för totalreflektion?
b) Använd Fresnels formler.
47. Eftersom det reflekterade ljuset är linjärpolariserat, måste ljuset falla in under polarisationsvinkeln (Brewstervinkeln).
48. Använd Fresnels formler och tänk på vad infall under Brewstervinkeln skulle kunna betyda.
49. Vad blir brytningsindex i de olika delarna av prismet i vardera fallet?
50. Den komponent av det linjärpolariserade ljuset som faller in längs med optiska axeln kommer att fasförskjutas i förhållande till den komponent som faller in vinkelrätt mot optiska axeln eftersom de har olika brytningsindex.
51. Fokalavståndet beräknas utgående från parallella ingående strålar som bryts ihop till en punkt. Om du gör ett smart val beträffande vilken yta som träffas först av strålarna, blir uppgiften enkel att lösa! I det andra fallet behöver du ta hänsyn till var huvudplanet är beläget i systemet.
52. Förutom att ljuset koncentreras ned mot blomladet, kommer även en del att reflekteras. Rita upp geometrin!
53. Vågens kommer att brytas i den sfäriska ytan eftersom den har olika fart i de båda medierna. Denna brytning av ultraljudsvågen är analog med den brytning som sker av ljusvågor i en sfärisk yta. Vad är det som motsvarar "brytningsindex" i detta fallet?
54. Vågen kommer att brytas i den sfäriska ytan eftersom den har olika fart i de båda medierna.
55. a) Börja med att beräkna fokalavstånden för vardera linsen separat med hjälp av linsmakarformeln.
b) Vad är det man vill uppnå med en akromatisk dubblett?
56. Du behöver veta brytningsindex för de båda våglängderna för att kunna gå vidare.
57. Ansätt att synvinkeln är α radianer in mot kikaren och räkna på vinkelförstoringsarna.

58. Brännvidden hos ett sammansatt linssystem räknas från fokalpunkten till huvudplanet (det plan i vilken en tänkt förlängning av ingående och utgående stråle möts). Utnyttja linsformeln och likformighet.

59. Beräkna först förstoringen i linssystemet.

60. Objektivets märkning anger fokalavståndet från huvudplanen, så du måste först bestämma deras lägen.

Blandade problem

61. Det är rimligt att anta att elefanten ger ifrån sig en harmonisk sfäriskt våg. Teckna en sådan!

62. För att släcka ut varandra ska reflektionerna vara lika starka (om vi bortser från multipelreflektioner).

63. Vad händer när de båda vågorna interfererar med varandra efter att den ena har reflekterats mot ett rörligt objekt?

64. Detta är en harmonisk våg beskriven med cosinusrepresentationen. Vad är det som särskiljer de olika vågorna och vågutbredningen i de olika materialen?

65. Hur ser vägskillnaden ut när det är olika vinklar?

66. När kommer den högsta ljudintensiteten fram till örats trumhinna?

67. De båda våglängderna ger oberoende av varandra upphov till interferensfransar i Michelsoninterferometern. Dessa fransar kan antingen hamna över varandra eller vara fasförskjutna i förhållande till varandra.

68. Ett mänskligt öra registrerar ljudtrycket och det blir ingen fasförskjutning av ljudtrycket vid reflektionen!

69. Utnyttja geometrin, linsformeln samt fiberns numeriska apertur (ger spridningsvinkeln ut från fibern).

70. a) Ljudnivåmätningen ger effektivvärdet av ljudtrycket.

b) Ljudutbredningsfarten beror av temperaturen.

71. a) Vad händer när två strålar möts?

b) Vad händer när gasens tryck ändras?

c) Börja med att kompensera för temperaturen genom att beräkna brytningsindex för klorgasen vid 20 °C och lufttrycket 1,00 atm.

72. a) Teckna brytningslagen i båda fallen.

b) Använd Fresnels formler.

73. a) Vågorna från de båda högtalarna är i fas.

b) Det finns en fasskillnad mellan vågorna från de båda högtalarna.

74. Pollenkornets diffraktionsmönster blir detsamma som för en öppning med samma diameter (Babinets princip).

75. Vinkeln är inte 45° ! Ljudfarterna är ju olika för longitudinella och transversella vågor.

3 SVAR

Problem efter ämnesområde

1. a) Våglängden är 0,50 m.
b) Frekvensen är 5 Hz.
c) Periodtiden är 0,2 s.
d) Utbredningsfarten är 2,5 m/s.

2. Tryckvågen kan tecknas $\Delta p = 5,0 \cdot \sin\left(27720 \cdot x + 9,425 \cdot 10^6 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \mu\text{Pa}$
eller alternativt $\Delta p = 5,0 \cdot \cos\left(27720 \cdot x + 9,425 \cdot 10^6 \cdot t\right) \mu\text{Pa}$

3. Vågen kan tecknas $s = \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{r} \cdot \sin(2\pi \cdot (0,588x - 200t)) \text{ m}$

4. Elongationen (utslaget) blir $+0,67 \cdot A$ eller $-0,98 \cdot A$

5. a) Frekvensen ska vara 11,2 Hz.
b) Frekvens behöver ökas med en faktor $\sqrt{2}$, dvs. till 15,8 Hz.

6. Amplituden är minst 0,1 mm.

7. Fasskillnaden blir 8,89 radianer (509°) och den lägsta antennen ligger före i fas.

8. Fasskillnaden blir 3,75 radianer (214°).

9. a) Nästa minimum inträffar vid 1440 Hz.
b) Det borde även finnas minimum vid 160 Hz samt vid 480 Hz.

10. a) Beträktaren kommer att uppfatta 4 minimum i ljudintensiteten.
b) Dessa inträffar på avstånden 21,4 m, 6,0 m, 2,3 m respektive 0,23 m från högtalaren.

Anm: I praktiken kommer man troligtvis inte att kunna uppfatta det sista minimumet. Det finns många skäl till detta:

- i) ljudet från den ena högtalaren är i detta fallet mycket starkare än från den andra
- ii) vinkeln mellan de båda vågorna är såpass stor att tryckvariationerna i luften sker nästan vinkelrätt mot varandra, vilket inte ger någon utsläckning av ljudtrycket
- iii) man befinner sig så nära den ena högtalaren att man hamnar i ett område där detaljerna hos ljudutbredningen från densamma beror på högtalarmembranets storlek och utformning

Detta är ett praktiskt exempel på att man alltid kritiskt måste granska de resultat som man får från sin fysikaliska modell.

11. Den akustiska effekten är cirka 0,8 %, dvs en mycket liten del av den totalt tillförda energin till högtalarsirenen övergår till energi i ljudvågen.

12. Temperaturen är 30 °C.

13. a) $\beta = 70,2$ dB.

b) $\beta = 64,6$ dB.

14. Huset får som närmast ligga 1,8 km från vindkraftverken.

15. Det krävs åtminstone 5000 supportrar.

16. Maskinen ger ensam ifrån sig 83,1 dB.

17. Ljudintensitetsnivån från blixten kan uppskattas till 120 dB.

18. a) $\frac{I_t}{I_i} = 0,0012$ och b) $\frac{p_t}{p_i} = 2$.

Anm: Det vid första anblicken något förvånande resultatet att tryckamplituden hos den transmitterade vågen är större än den hos den infallande vågen kommer av att reflektionen i uppgiften sker mot ett mycket tätare medium, $|Z_{\text{vatten}}| \gg |Z_{\text{luft}}|$. Den reflekterade vågen kommer att fasförskjutas med π radianer vid reflektionen och ligger således i motfas mot den infallande vågen. Eftersom reflektionen i denna uppgift är nästan total, ger den reflekterade vågen upphov till ett nästan lika stort tryck mot gränsytan som den infallande vågen, vilka på grund av fasförskjutningen hos den reflekterade vågen verkar åt samma håll. Tryckets kontinuitet i gränsytan leder sålunda här till att den transmitterade vågens amplitud blir nästan dubbelt så stor som den infallande vågens.

19. Vågens amplitud i fartygsskrovet är $5,4 \cdot 10^{-12}$ m.

20. a) Ljudintensitetsnivån blir -6,5 dB, dvs man borde inte kunna uppfatta ljudet.

b) Glaset i fönstret är såpass tunt att det kommer att svänga fram och tillbaka på grund av ljudtrycket, dvs fönsterrutan fungerar som ett membran vilket följer med i tryckvariationerna och därigenom skapar en tryckvåg på andra sidan rutan.

21. Kvartskristallen ska vara 80 μm tjock.

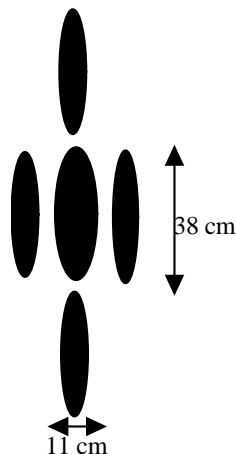
22. Ljudutbredningsfarten för longitudinella vågor i materialet är 3560 m/s.

Anm: Detta exempel visar även på ett vanligt problem vid fysikaliska mätningar, nämligen att det alltid finns en viss mätosäkerhet i alla uppmätta värden. I uppgiften ligger de förväntade fysikaliska värdena inom en område på ± 2 kHz från de uppmätta.

23. Absorptionskoefficienten blir 0,68.

24. Skillnaden mellan de våglängder som släpps igenom är 0,227 nm.
25. a) Förhållandet mellan tryckamplituderna blir $\frac{p_1}{p_2} = 1,12$.
b) Frekvensen hos den andra vågen är $880,0 \pm 0,4$ Hz.
26. Han kommer att höra en svävning med svävningsfrekvensen 3,8 Hz.
27. Flygplanets fart är 112 m/s.
28. Insekten flyger med farten 2,75 m/s i samma riktning som fladdermusen.
29. Bilföraren kör 15 km/h för fort och blir bötfälld.
30. Lavabiten rör sig uppåt med farten 42 m/s.
31. Fiskgjusen missar fisken med 0,87 m.
32. Felet är 13,1 m i horisontell ledd och 27,4 m i vertikal ledd.
33. a) Tjockleken ska vara 94,2 nm.
b) Endast 0,8 % av det infallande ljuset reflekteras.
34. Det röda ljuset kommer att ha maximal reflektans vid infallsvinkeln $69,6^\circ$.
35. Oljehinnans tjocklek är $1,69 \mu\text{m}$.
36. a) Längdutvidningskoefficienten blir $2,62 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.
b) Förstora interferensmönstret så att intensiteten kan mätas i minst 100 punkter när man går från en frans till en annan.
37. Vätskans brytningsindex är 1,40 och gitterkonstanten är $9,0 \mu\text{m}$.
38. Väven har 214 trådar/cm.
39. Nej, det är inte möjligt. Minsta objekt som kan observeras är ca 100 m i diameter.

40. I diffraktionsmönstret kommer det att vara 38 respektive 11 cm mellan första diffraktionsminimum på båda sidor om centralmaximum och mönstret kommer att se ut på följande sätt.



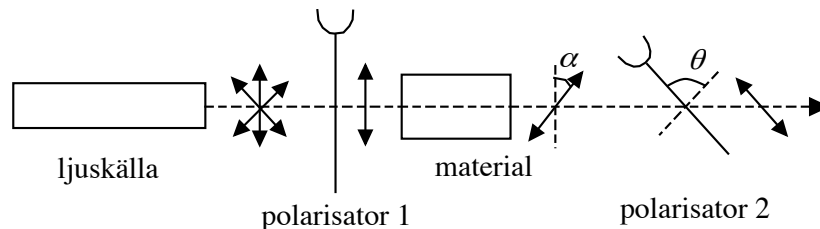
41. a) Brytningsindex i materialet är 1,56.

b) Vågen är linjärpolariserad.

42. Det synliga ljuset kommer att spridas över vinkeln $1,13^\circ$.

43. Intensiteten blir $I = I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ med maximum då $\theta = 45^\circ + m \cdot 90^\circ$ och $m = 1, 2, 3 \dots$

44. Låt först ljuset från ljuskällan polariseras av en linjärpolarisator innan det når det optiskt aktiva materialet (provet). Sätt en vridbar linjärpolarisator efter provet och börja med att ställa in denna så att det inte kommer ut något ljus innan mätningen på det optiskt aktiva materialet påbörjas. När det optiskt aktiva materialet nu sätts in mellan dessa båda polarisatorer, kommer polarisationen att vridas. Vridningen bestäms genom att vrida den vridbara polarisatorn tills ljuset försvinner. Vinkelskillnaden mellan nollläget och det nu avlästa värdet är den vinkel som det optiskt aktiva materialet har vridit polarisationsplanet. Se även figuren nedan.



45. a) Det utgående ljuset är motriktat det infallande.

b) Förhållandet mellan intensiteterna blir i fallet med infallande ljus i infallplanet 0,898 och med infallande ljus vinkelrätt mot infallsplanet 0,894.

46. a) Infallsvinkel får maximalt vara $56,1^\circ$.
b) Förhållandet blir 1,023.
47. 92,6 % av ljuset transmittas.
48. När du har på dig glasögonen når 0.27% ditt öga och när du tar av dem är motsvarande andel 5.5%.
49. Ljus polariserat i papperets plan bryts nedåt med vinkeln $5,2^\circ$ gentemot det infallande ljuset medan ljus polariserat vinkelrätt mot papperets plan bryts uppåt med vinkeln $5,4^\circ$ gentemot det infallande ljuset.
50. a) Ljuset kommer att vara linjärpolariserat i en riktning som är vinkelrät mot det infallande ljuset polarisationsriktning ($\lambda/2$ -platta).
b) Ljuset kommer att vara cirkulärpolariserat ($\lambda/4$ -platta).
51. Fokallavståndet blir 6,1 mm.
52. Intensiteten ökar med 74%.
53. Ljudkoncentrationen är som störst 4,5 mm framför staven.
54. Krökningsradien ska vara 4.5 mm.
55. a) Linsmakarformeln ger att $f_1 = -\frac{R}{n_1-1}$ och att $f_2 = \frac{R}{2n_2-2}$. Därefter antas parallella strålar in och linsformeln används på båda linserna för att få den eftersökta formeln.
b) Brytningsindex för rött ljus bör vara 1.517.
56. Skillnaden i fokallavstånden är 0.2 mm.
57. Förstoringen är 10 gånger.
58. a) Brännvidden är 1300 mm.
b) Bilden av solen blir 1,2 cm.
59. Linjeavståndet i bilden blir 0,58 mm.
60. Avståndet mellan objektet och objektinfattningens plan ska vara 1016 mm och avståndet från objektinfattningens plan till bilden ska vara 305 mm.

Blandade problem

- 61.** a) Elefantens ljudvåg tecknas $s = \frac{0,397 \cdot 10^{-3}}{r} \cdot \sin(125,7t - 0,356r)$ m
b) Ljudintensitetsnivån på 100 m från elefanten blir 77 dB.
- 62.** Brytningsindex bör idealt vara 1,83.
- 63.** Det rörliga objektet har farten 2,5 m/s.
- 64.** a) Det rör sig om en ultraljudsvåg ($f > 20$ MHz) och den rör sig troligtvis genom ett fast material ($v > 2000$ m/s).
b) Vid den givna positionen och tiden blir övertrycket 4,0 Pa.
- 65.** Gittret ska vridas $27,27^\circ$
- 66.** Ljudintensiteten på örats trumhinna blir högst $2,75 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.
- 67.** Skillnaden i våglängd är 0,6 nm.
- 68.** Frekvenserna som förstärks blir $m \cdot 261,9$ Hz, där m är ett positivt heltal.
- 69.** Gränsvinkeln är $12,1^\circ$.
- 70.** a) $A_r = 2,8 \text{ Pa} \cdot \text{m}$
b) Temperaturen är 18°C .
- 71.** a) De båda strålarna går olika väg och möts sedan i interferometern, vilket betyder att vi får ett interferensmönster i den utgående strålen.
b) Då trycker ändras, ändras den optiska våglängden i den ena armen av interferometern, varför interferensmönstret börjar att "vandra".
c) Interferensmönstret förflyttar sig 85,3 steg.
- 72.** a) Plastens brytningsindex är 1,212.
b) 61,6% av ljuset transmittas.
- 73.** a) Ljudnivån mitt i soffan blir 86,0 dB.
b) Ljudnivån i kanten av soffan blir 83,1 dB.
- 74.** Pollenkornet har en diameter på $85 \mu\text{m}$.
- 75.** Vinkeln ska vara $63,4^\circ$.

4 LÖSNINGAR TILL VISSA PROBLEM

Grundläggande begrepp

2. Eftersom vågen utbreder sig i negativa x -axelns riktning, skall argumenten till sinusfunktionen i den allmänna lösningen ha samma tecken. Vi kan därför ansätta att vågen generellt kan tecknas som

$$s = A \cdot \sin(kx + \omega t + \Phi)$$

där vinkelfrekvensen ω och vågtalet k enligt definitionerna bestäms ur

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 9,425 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} \Rightarrow k = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6}{340} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} = 27720 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ur uppgiften fås direkt att amplituden $A = 5,0 \mu\text{Pa}$. Fasvinkeln Φ bestäms ur startvillkoret att amplituden skall vara maximal då $x = 0$ och $t = 0$, vilket ger att

$$5,0 = 5,0 \sin(\Phi) \Rightarrow \sin(\Phi) = 1 \Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

Detta ger nu att vågen kan tecknas som (där vi har ersatt s med övertrycket Δp för att markera att det är ett tryck som beskrivs):

$$\Delta p = 5,0 \cdot \sin\left(27720 \cdot x + 9,425 \cdot 10^6 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \mu\text{Pa}$$

Anm: Det går givetvis lika bra att beskriva vågen via cosinusrepresentationen. I detta fallet blir fasvinkeln $\Phi = 0$ och man får att:

$$\Delta p = 5,0 \cdot \cos(27720 \cdot x + 9,425 \cdot 10^6 \cdot t) \mu\text{Pa}$$

4. Den allmänna vågen kan tecknas

$$s = A \cdot \sin(kx - \omega t + \Phi) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft + \Phi\right) = A \sin\left(2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) + \Phi\right)$$

Sätt startpunkten till origo ($x = 0$) samtidigt som tiden sätts till noll ($t = 0$). Detta ger villkoret

$$0,5 \cdot A = A \sin(\Phi) \Rightarrow 0,5 = \sin(\Phi) \Rightarrow \Phi_{1,2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

dvs det finns nu två principiellt olika lösningar. Insättning av dessa båda lösningar i ekvationen för den allmänna vågen ger elongationerna

$$s_1 = A \sin\left(2\pi \cdot 6 \left(\frac{2,0}{10} - 0,15\right) + \frac{\pi}{6}\right) = +0,67 \cdot A, \quad \Phi_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$s_2 = A \sin\left(2\pi \cdot 6 \left(\frac{2,0}{10} - 0,15\right) + \frac{5\pi}{6}\right) = -0,98 \cdot A, \quad \Phi_2 = \frac{5\pi}{6}$$

6. Föremålet börjar skallra när det inte längre kan följa med i högtalarmembranets vibrationsrörelser. Detta sker när accelerationen hos membranets rörelser överstiger tyngdaccelerationen, eftersom det då bildas en liten luftsprunga mellan membranet och föremålet. Det är således föremålets hoppande som ger upphov till det skallrande ljudet. För en harmonisk vågrörelse har vi att utslaget

$$s = A \sin(\omega t)$$

vilket ger att accelerationen

$$a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A \cdot \omega^2 \sin(\omega t)$$

Den maximal accelerationen motsvarar tyngaccelerationen när föremålet börjar att skallra, vilket ger att

$$g = A \cdot \omega^2 \Rightarrow A = \frac{g}{(2\pi f)^2} \approx 0,1 \text{ mm}$$

8. Båtens antenn kommer att träffas av två vågor, dels den våg som har gått direkt från sändarantennen till båtens antenn och dels den våg som har reflekterats i vattnet. Genom att försumma vattenytans krökning fås den geometri som visas i figuren nedan. Man inser då att den reflekterade vågen har gått samma sträcka som en tänkt våg vilken har sänts ut från en spegling av antennen på land i en förlängd vattenyta (detta beror på att infallsvinkel och reflektionsvinkel är desamma vid reflektionen i vattenytan).

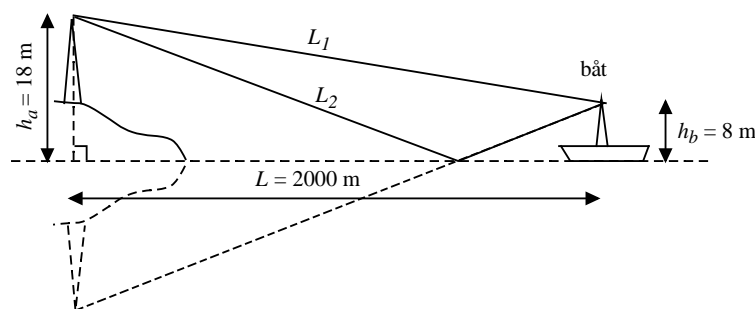
Med hjälp av Pythagoras sats kan man nu beräkna vägskillnaden mellan den reflekterade vågen och den direkta vågen.

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \sqrt{L^2 + (h_a + h_b)^2} - \sqrt{L^2 + (h_a - h_b)^2}$$

Insättning av numeriska värden ger att $\Delta L = 0,144 \text{ m}$. Då vågen reflekteras mot vattenytan sker ett fasskift på π radianer eftersom reflektionen sker mot tätare medium. Den totala fasskillnaden blir

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L + \pi = \frac{2\pi f}{v} \Delta L + \pi$$

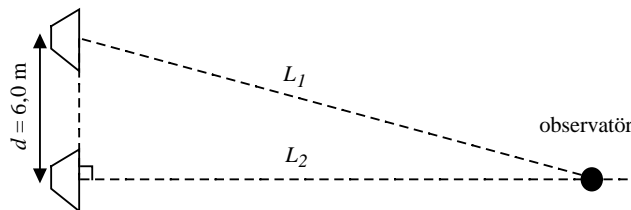
$$\Rightarrow \Delta\Phi = \frac{2\pi \cdot 200 \cdot 10^6}{2,998 \cdot 10^8} \cdot 0,144 + \pi = 3,75 \text{ rad}$$



Anm: Det går även att beräkna det avstånd x från radiosändaren där vågen reflekteras i havet. Det görs enklast genom att betrakta liksidiga trianglar och man får då att:

$$\frac{h_a}{x} = \frac{h_b}{L - x} \Rightarrow x = \frac{h_a \cdot L}{h_a + h_b}$$

10. Anta att betraktaren befinner sig på avståndet L (L_2 i figuren nedan) framför den ena högtalaren. Pythagoras sats ger oss att vägskillnaden mellan vågorna från de båda högtalarna kan tecknas



$$\Delta L = L_1 - L_2 = \sqrt{L^2 + d^2} - L$$

Detta ger att fasskillnaden mellan vågorna kan tecknas

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$$

där våglängden $\lambda = \frac{v}{f} = 1,65$ m. $\Delta\phi$ är en monoton funktion av L som varierar mellan värdena $\Delta\phi = 0$ då $L = \infty$ och $\Delta\phi = \frac{2\pi}{1,65} (\sqrt{0^2 + 6^2} - 0) = 7,27\pi$ då $L = 0$. Interferensminimum (destruktiv interferens) fås då $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$ och m är ett heltal. Följdaktligen kommer minimum att inträffa då $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi$ och 7π (motsvarande att $m = 0, 1, 2$ och 3), vilket ger fyra minimum i ljudintensiteten när betraktaren förflyttar sig mot högtalaren.

För att beräkna avstånden från högtalaren när dessa minimum inträffar, löser man ut L ur villkoret för destruktiv interferens

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} (\sqrt{L^2 + d^2} - L) = (2m + 1)\pi \Rightarrow \sqrt{L^2 + d^2} - L = \frac{2m+1}{2}\lambda \\ \Rightarrow L^2 + d^2 &= \left(\frac{2m+1}{2}\lambda + L\right)^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 + (2m + 1)\lambda L + L^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{d^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{(2m + 1)\lambda} \end{aligned}$$

Avstånden från högtalaren erhålls nu genom insättning av de olika m som ger minimum. Vi får att $L(m = 0) = 21,4$ m, $L(m = 1) = 6,0$ m, $L(m = 2) = 2,30$ m samt $L(m = 3) = 0,23$ m.

Akustik

12. Vid den sökta temperaturen ska det enligt uppgiften gälla att

$$\beta_I = \beta_p \Rightarrow 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \Rightarrow \frac{I_0}{p_{\text{eff},0}^2} = \frac{I}{p_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{|Z|}$$

där Z är den akustiska impedansen, vilken i sin tur bestäms av

$$Z = \rho \cdot v = \frac{pM}{RT} \cdot \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = p \cdot \sqrt{\frac{\gamma M}{RT}}$$

där densiten $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_{\text{luft}} M}{RT}$ enligt allmänna gaslagen, p_{luft} är det totala lufttrycket, M är molmassan för luft, R är allmänna gaskonstanten, T är temperaturen och $\gamma = C_p/C_V = 1,40$ är förhållandet mellan värmekapaciteterna vid konstant tryck och konstant volym (för luft) och v är ljudutbredningsfarten. Sätter vi samman dessa uttryck fås att

$$\left(\frac{I_0}{p_{\text{eff},0}^2}\right)^2 = \frac{RT}{p_{\text{luft}}^2 \cdot \gamma M} \Rightarrow T = \frac{p_{\text{luft}}^2 \cdot \gamma M}{R} \cdot \left(\frac{I_0}{p_{\text{eff},0}^2}\right)^2$$

Insättning av numeriska värden ger:

$$T = \frac{(10^5)^2 \cdot 1,40 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,314} \cdot \left(\frac{10^{-12}}{(2,0 \cdot 10^{-5})^2} \right) \text{ K} = 303 \text{ K} (30^\circ \text{C})$$

14. Den totala ljudnivå som maximalt får nå huset är

$$\beta_{\text{hus}} = 10 \log \left(\frac{I_{\text{hus}}}{I_0} \right) \Rightarrow \beta_{\text{hus}} = I_0 \cdot 10^{L_{\text{hus}}/10}$$

$$\Rightarrow I_{\text{hus}} = 10^{-12} \cdot 10^{40/10} \text{ Wm}^{-2} = 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}$$

Eftersom ljudkällorna är oberoende av varandra (varje vindkraftverk ger upphov till en våg som saknar fasrelation med vågorna från de andra vindkraftverken), kommer ljudet att vara inkoherent. Vi får således summera intensiteterna. Varje vindkraftverk i vindkraftsparken får således bidra med högst en tiondel av denna ljudnivå vid huset, vilket betyder att bidraget från ett enskilt vindkraftverk högst får vara $I = 10^{-9} \text{ Wm}^{-2}$. Bullret sprids sfäriskt från ett vindkraftverk och den totala energin (effekten) i vågen bevaras, vilket betyder att

$$P_{ut} = I_{ut} \cdot A_{ut} = I \cdot A_{\text{hus}} \Rightarrow I_{ut} \cdot 4\pi r_0^2 = I \cdot 4\pi r_{\text{hus}}^2$$

$$\Rightarrow r_{\text{hus}} = r_0 \cdot \sqrt{\frac{I_0 \cdot 10^{\beta_{ut}/10}}{I}}$$

Insättning av värden ger

$$r_{\text{hus}} = 1,0 \cdot \sqrt{\frac{10^{-12} \cdot 10^{95/10}}{10^{-9}}} \text{ m} = 1780 \text{ m (dvs. minst 1,8 km)}$$

16. Eftersom det rör sig om oberoende ljudkällor (buller) kan vi addera intensiteterna från vågkällorna vid beräkningarna. Om maskinen ensam har ljudintensitetsnivån β_m och bakgrunden har ljudintensitetsnivån β_b , får vi för de båda mätningarna att

$$\beta_b = 10 \log \left(\frac{I_b}{I_0} \right) \text{ samt } \beta_{\text{tot}} = 10 \log \left(\frac{I_{\text{tot}}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_b + I_m}{I_0} \right)$$

Detta betyder att vi kan skriva maskinens intensiteten som

$$I_m = (I_m + I_b) - I_b = I_{\text{tot}} - I_b = I_0 \cdot (10^{\beta_{\text{tot}}/10} - 10^{\beta_b/10})$$

Från definitionen av dB-skalan får vi att

$$\beta_m = 10 \log \left(\frac{I_m}{I_0} \right) = 10 \log (10^{\beta_{\text{tot}}/10} - 10^{\beta_b/10})$$

Numeriskt blir detta slutligen

$$\beta_m = 10 \log (10^{8,52} - 10^{8,10}) \text{ dB} \approx 83,1 \text{ dB}$$

18. a) När ljudvågen träffar vattenytan kommer en del av intensiteten att reflekteras och en del att transmittas. Med hjälp av reflektionskoefficienten R för en våg som träffar en yta och villkoret att intensiteten (effekten per yta) ska vara kontinuerlig i gränsytan ($I_i = I_r + I_t$), får vi att

$$I_t = I_i - I_r = I_i - R \cdot I_i = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{Z_l - Z_v}{Z_l + Z_v} \right)^2 \right] = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_l v_l - \rho_v v_v}{\rho_l v_l + \rho_v v_v} \right)^2 \right]$$

där Z_l och Z_v är de akustiska impedanserna för luft respektive vatten, ρ_l och v_l är densiteten respektive ljudfarten i luft och ρ_v och v_v är motsvarande storheter för vatten. Det sökta förhållandet blir nu

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[1 - \left(\frac{1,29 \cdot 340 - 1000 \cdot 1500}{1,29 \cdot 340 + 1000 \cdot 1500} \right)^2 \right] \approx 1,17 \cdot 10^{-3}$$

b) Intensiteterna hos den infallande, den reflekterade och den transmittade vågen kan allmänt tecknas som

$$I_i = \frac{(\Delta p)_i^2}{2|Z_i|} = \frac{(\Delta p)_i^2}{2\rho_l v_l}$$

$$I_r = \frac{(\Delta p)_r^2}{2|Z_r|} = \frac{(\Delta p)_r^2}{2\rho_l v_l}$$

$$I_t = \frac{(\Delta p)_t^2}{2|Z_t|} = \frac{(\Delta p)_t^2}{2\rho_v v_v}$$

där Δp är motsvarande övertryck orsakat av vågen. Om vi i dessa ekvationer dividerar den transmittade vågens intensitet med den infallande vågens intensitet får vi att

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{(\Delta p)_t}{(\Delta p)_i} \right)^2 \cdot \frac{2\rho_l v_l}{2\rho_v v_v} \Rightarrow \frac{\Delta p_t}{\Delta p_i} = \pm \sqrt{\frac{I_t}{I_i} \cdot \frac{\rho_v v_v}{\rho_l v_l}}$$

Eftersom den transmittade vågen med nödvändighet måste ha samma fas som den infallande, ska vi välja plustecknet framför rottecknet. Med insatta numeriska värden fås det sökta förhållandet

$$\frac{\Delta p_t}{\Delta p_i} = \sqrt{1,17 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1,29 \cdot 340}{1000 \cdot 1500}} \approx 2$$

20. Energins bevarande i första ytan mellan luft och glas ger att den intensitet som transmittas in i glaset blir

$$I_g = I_i - I_r = I_i \cdot (1 - R_1) = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{|Z_l| - |Z_g|}{|Z_l| + |Z_g|} \right)^2 \right]$$

På samma sätt gäller för den andra gränsytan mellan glas och luft att den intensitet som kommer ut på andra sidan kan tecknas

$$I_t = I_g - I_{r,g} = I_g \cdot (1 - R_2) = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{|Z_g| - |Z_l|}{|Z_g| + |Z_l|} \right)^2 \right]$$

Genom att utnyttja att akustiska impedansen $|Z| = \rho v$ för respektive material kan de båda ovanstående ekvationerna sättas samman till

$$I_t = I_i \cdot (1 - R_2) \cdot (1 - R_1) = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_g v_g - \rho_l v_l}{\rho_g v_g + \rho_l v_l} \right)^2 \right]^2$$

vilket ger numeriskt att

$$I_t = I_i \cdot \left[1 - \left(\frac{2500 \cdot 4700 - 1,29 \cdot 340}{2500 \cdot 4700 + 1,29 \cdot 340} \right)^2 \right]^2 = 2,2 \cdot 10^{-8} \cdot I_i$$

Ljudintensitetsnivån för den transmittade vågen är enligt definition

$$\begin{aligned} \beta_I &= 10 \log \left(\frac{I_t}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{2,2 \cdot 10^{-8} \cdot I_i}{I_0} \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{I_i}{I_0} \right) + 10 \log (2,2 \cdot 10^{-8}) \text{ dB} = 70 - 76,5 \text{ dB} = -6,5 \text{ dB} \end{aligned}$$

b) Detta värde är uppenbarligen lägre än hörnivågränsen för vårt öra, varför man kan ledas till att tro att det inte är möjligt att föra ett samtal med en person på andra sidan av ett fönster. Av erfarenhet vet vi dock att detta är möjligt (förutsatt att glaset i fönstret inte är för tjockt - jämför med anställda i en bank eller på ett postkontor som sitter bakom ett tjockt säkerhetsglas och ibland kan ha svårt att uppfatta vad man säger). I

en vanlig fönsterruta är emellertid glaset såpass tunt att ljudet kan transmittas via en böjvåg, dvs glasrutan kommer att fungera som ett membran och rutan kommer att följa med i ljudvågens tryckvariationer. Detta ger naturligtvis en mycket högre transmittans än den som har beräknats ovan.

Vågfenomen

22. Resonans i staven uppträder då villkoret för en stående våg är uppfyllt i staven. I ändytorna kopplar metallstaven till olja respektive till luft, vilka båda har lägre akustisk impedans än metallen. Den stående vågen har därför bukar i båda ändytorna. Villkoret för resonans blir

$$L = m \cdot \frac{\lambda}{2} = m \cdot \frac{v}{2f} \Rightarrow v = \frac{2fL}{m} ; m = 1, 2, 3 \dots$$

De olika frekvenserna motsvarar olika på varandra följande heltalsvärden av m . Således gäller för två närliggande resonansfrekvenser att

$$\frac{f_m}{f_{m+1}} = \frac{m}{m+1} \Rightarrow f_m \cdot (m+1) = f_{m+1} \cdot m \Rightarrow m = \frac{f_m}{(f_{m+1} - f_m)}$$

För de olika resonansfrekvenserna har vi enligt detta att

$$m_{120 \text{ Hz}} = \frac{120}{141 - 120} = 5,71$$

$$m_{141 \text{ Hz}} = \frac{141}{165 - 141} = 5,88$$

$$m_{165 \text{ Hz}} = \frac{165}{190 - 165} = 6,6$$

vilket inte ger någon entydig bild (även om man kanske kan gissa att heltalen ska vara $m = 5, 6, 7$). För att försäkra sig om att så är fallet, tittat vi även på fallet med varannan frekvens, då det uppenbarligen måste gälla att

$$\frac{f_m}{f_{m+2}} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow f_m \cdot (m+2) = f_{m+2} \cdot m \Rightarrow m = \frac{2f_m}{(f_{m+2} - f_m)}$$

vilket ger att

$$m_{120 \text{ Hz}} = \frac{2 \cdot 120}{165 - 120} = 5,33$$

$$m_{141 \text{ Hz}} = \frac{2 \cdot 141}{190 - 141} = 5,75$$

Antagandet verkar således vara korrekt. Vi beräknar nu ljudfarten för vardera av mät-punkterna

$$v_5 = \frac{2 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 0,075}{5} \text{ m/s} = 3600 \text{ m/s}$$

$$v_6 = \frac{2 \cdot 141 \cdot 10^3 \cdot 0,075}{6} \text{ m/s} = 3525 \text{ m/s}$$

$$v_7 = \frac{2 \cdot 165 \cdot 10^3 \cdot 0,075}{7} \text{ m/s} = 3536 \text{ m/s}$$

$$v_8 = \frac{2 \cdot 190 \cdot 10^3 \cdot 0,075}{8} \text{ m/s} = 3562 \text{ m/s}$$

Medelvärdet av dessa mätvärden blir 3556 m/s

Anm: Det finns även andra sätt att lösa uppgiften. En snabbare, men mindre exakt metod är att beräkna medelvärdet av skillnaderna mellan frekvenserna i mätningarna,

Δf_m , vilken motsvarar en skillnad på $\frac{\lambda}{2}$ i våglängd eftersom detta är avståndet mellan två bukar i en stående våg. Då den längsta våglängden som ger resonans också är $\frac{\lambda}{2}$ ($m = 1$), får man direkt att $v = 2 \cdot \Delta f_m \cdot L$. En annan metod där alla mätdata utnyttjas är att rita en graf över frekvensen som funktion av m , där första värdet är okänt (m_0) och sedan beräkna lutningskoefficienten ($k = \frac{2L}{v}$) med hjälp av minsta kvadratmetoden. Från minsta kvadratmetoden får man att ljudfarten är 3560 m/s med en standardavvikelse av 60 m/s.

24. För att olika vågor inte ska interferera destruktivt när de lämnar interferometern, måste de vara i fas. Eftersom reflektionskoefficienten är hög vid gränssytorna leder detta till att det bildas stående vågor i interferometern för de våglängder som släpps igenom medan alla andra våglängder släcks ut. Med reflektion mot tätare medium i båda ändrar av interferometern, blir stående vågvillkoret att

$$L = m \cdot \frac{\lambda_{\text{luft}}}{2} = m \cdot \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow m = \frac{2nL}{\lambda}$$

där m är ett heltal, n är brytningsindex för mediet (luft i detta fallet) och λ är våglängden i vakuum (ett ekvivalent och vanligare sätt att uttrycka det hela är att vi ska använda den optiska vägen, $L_{\text{opt}} = nL$, istället för den verkliga vägen, L , i problem som rör elektromagnetiska vågor). För att få en uppfattning om ett lämpligt värde på heltalet m vid den givna våglängden, beräknar vi

$$m \approx \frac{2 \cdot 1,000280 \cdot 0,550 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} \approx 2200,6$$

Lämpliga heltal m för två närliggande våglängder som släpps igenom är således $m_1 = 2200$ samt $m_2 = 2201$. Dessa ger oss våglängderna

$$\lambda_i = \frac{2nL}{m_i} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 \cdot 1,000280 \cdot 0,550 \cdot 10^{-3}}{2200} \text{ nm} = 500,140 \text{ nm}$$

$$\text{samt } \lambda_2 = \frac{2 \cdot 1,000280 \cdot 0,550 \cdot 10^{-3}}{2201} \text{ nm} = 499,913 \text{ nm}$$

Skillnaden i våglängd blir $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \text{ nm} = 0,227 \text{ nm}$.

26. En korrekt spänd sträng ska svänga med samma frekvens som stämgafln. När strängen enligt uppgiften nu är hårdare spänd än vad den skulle vara, kommer den att avge en något annorlunda frekvens, eftersom ljudfarten i strängen beror på hur hårt spänd den är enligt uttrycket

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

där F är spännkraften i strängen och μ är massan per längd av strängen. Om vi antar att den optimalt spända strängen är spänd med spännkraften F_{opt} , kan vi teckna förhållandet mellan stämgaflns frekvens, f_{opt} och den verkliga frekvensen hos strängen som

$$\frac{f_{\text{opt}}}{f} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_{\text{opt}}}{\mu}} \cdot \lambda \sqrt{\frac{\mu}{F}} = \sqrt{\frac{F_{\text{opt}}}{F}} \Rightarrow f = f_{\text{opt}} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_{\text{opt}}}}$$

Notera att strängens inspänningspunkter inte ändras, varför våglängden inte ändras. Pianosträngen är 3% mer spänd än den borde vara, vilket betyder att $F = 1,03F_{\text{opt}}$, vilket i sin tur ger att frekvensen från strängen blir

$$f = 256 \cdot \sqrt{1,03} \text{ Hz} = 259,8 \text{ Hz}$$

Pianostämmaren kommer således att höra en blandning av två ljud, stämgaaffeln med frekvensen 256 Hz och strängens med frekvensen 259,8 Hz. Två ljudvågor med näraliggande frekvenser ger upphov till en svävning som har en svävningsfrekvens

$$f_{beat} = f - f_{opt} \Rightarrow f_{beat} = 3,8 \text{ Hz}$$

28. Frekvensändringen hos ultraljudsvågen visar att det handlar om Dopplereffekten. Låt oss anta att både fladdermusen och insekten rör sig längs positiva x -axelns riktning (medför ingen begränsning vid lösandet av problemet eftersom vi kommer att få en negativ fart, v , ifall insekten istället rör längs negativa x -axeln). Med fladdermusens fart, $v_s = 5,0 \text{ m/s}$, får vi att den utsända frekvensen från fladdermusen Dopplerförskjuts och blir

$$f_1 = \left(\frac{v_l}{v_l - v_s} \right) f$$

där $v_l = 340 \text{ m/s}$ är ljudfarten i luft. Denna vågrörelse fortplantar sig genom luften och når insekten, vilken på grund av sin rörelse med farten v kommer att uppfatta frekvensen

$$f_2 = \left(\frac{v_l - v}{v_l} \right) f_1$$

Vid reflektionen kommer insekten nu att verka som en vågkälla som sänder ut en frekvens i den negativa x -axelns riktning. På grund av insektens rörelser blir denna frekvens

$$f_3 = \left(\frac{v_l}{v_l + v} \right) f_2$$

Slutligen når den reflekterade vågen tillbaka till fladdermusen, vilken är i rörelse och kommer att uppfatta frekvensen

$$f_4 = \left(\frac{v_l + v_s}{v_l} \right) f_3$$

Sammantaget får vi alltså att

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{v_l + v_s}{v_l + v} \cdot \frac{v_l - v}{v_l - v_s} \cdot f \\ \Rightarrow \frac{f_4}{f} (v_l^2 - v_l v_s + v(v_l - v_s)) &= v_l^2 + v_l v_s - v(v_l + v_s) \\ \Rightarrow v &= \frac{v_l^2 + v_l v_s - \frac{f_4}{f} (v_l^2 - v_l v_s)}{v_l + v_s + \frac{f_4}{f} (v_l - v_s)} = v_l \cdot \frac{v_l \left(1 - \frac{f_4}{f}\right) + v_s \left(1 + \frac{f_4}{f}\right)}{v_l \left(1 + \frac{f_4}{f}\right) + v_s \left(1 - \frac{f_4}{f}\right)} \end{aligned}$$

Insättning av numeriska värden ger att $v = 2,75 \text{ m/s}$, dvs insekten försöker att flyga bort från fladdermusen.

Anm: Eftersom både fladdermusens och insektens farter är mycket mindre än ljudfarten kan man finna en approximativ lösning till problemet genom att ignorera mediet i vilket ljudet utbreder sig och endast betrakta den relativa farten mellan fladdermus och insekt. I ett rörligt koordinatsystem där fladdermusen alltid befinner sig i origo, kommer den utsända frekvensen att vara f . Antag att insekten rör sig bort från fladdermuset i det rörliga koordinatsystemet. Den frekvens som insekten tar emot blir då

$$f_I = \left(\frac{v_l - v}{v_l} \right) f$$

där v nu är insektens fart i det rörliga koordinatsystemet. Vid reflektionen kommer den återsända frekvensen i det rörliga koordinatsystemet att bli

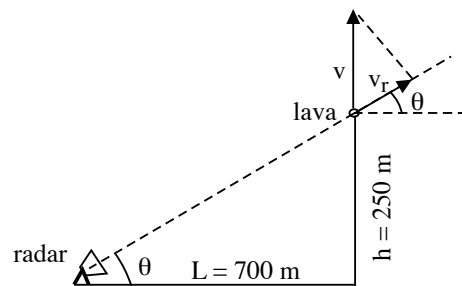
$$f_{II} = \left(\frac{v_l}{v_l + v} \right)$$

vilket också är den frekvens som fladdermusen uppfattar. Detta ger oss att

$$f_{II} = \left(\frac{v_l - v}{v_l + v} \right) f \Rightarrow v = \frac{v_l - \frac{f_{II}}{f} v_l}{1 + \frac{f_{II}}{f}}$$

I detta fallet ger insättning att $v = -2,25$ m/s, vilket således är den fart med vilken fladdermusen närmar sig insekten (eftersom v är negativ). Insektens fart relativt det stillastående koordinatsystemet blir slutligen $5 + (-2,25) = 2,75$ m/s, dvs detsamma som ovan.

30. Eftersom partikeln befinner sig i rörelse och frekvensen hos den mottagna signalen är en annan än hos den utsända signalen, måste det röra sig om Dopplereffekt då denna effekt är den enda som ändrar frekvensen hos vågen. Detta är även rimligt när man tittar på figuren nedan, eftersom partikeln har en hastighetskomponent längs med radarns riktning.



Lavabiten rör sig relativt radarn med farten v_r (se figur). För små farten kan vi approximera uttrycket för Dopplereffekt hos elektromagnetiska vågor med motsvarande uttryck för vanliga ljudvågor. Den frekvens med vilken radiosignalen träffar lavabiten är

$$f_1 = f_0 \cdot \frac{1 - \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}} \approx f_0 \cdot \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)$$

Den reflekterade radarvågens frekvens som registreras av mottagaren kan då tecknas:

$$f_2 = f_1 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = f_0 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2 \approx f_0 \left(1 - 2\frac{v_r}{c}\right)$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{c}{2} \cdot \left(1 - \frac{f_2}{f_0}\right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f_0}$$

Detta ger oss numerisk (med $\Delta f = f_0 - f_2 = 120$ Hz) att

$$v_r = \frac{2,9979 \cdot 10^8}{2} \cdot \frac{120}{1274 \cdot 10^6} \text{ m/s} = 14,1 \text{ m/s}$$

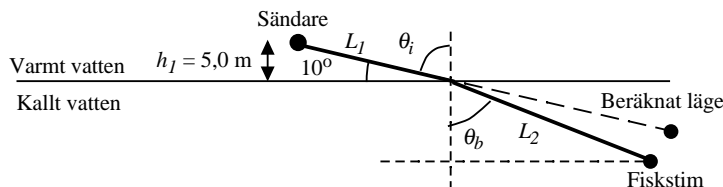
Från geometrin i problemet får vi att

$$\tan \theta = \frac{h}{L} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{250}{700} \right) = 19,65^\circ$$

vilket slutligen ger att

$$v = \frac{14,1}{\cos(90 - \theta)} \text{ m/s} = 41,9 \text{ m/s}$$

32. Felet vid bestämningen av fiskstimmets position beror på att det sker en brytning av ultraljudsvågen i gränsskiktet mellan det varmare och det kallare vattnet. Ljudutbredningsfarten i det varmare ytvattnet är $v_1 = 1412,0 + 4,0 \cdot 15 = 1472,0$ m/s och i det kallare vattnet längre ned är den $v_2 = 1412,0 + 4,0 \cdot 7 = 1440,0$ m/s.



Avståndet till fiskstimmets antagna läge beräknas med hjälp av den antagna farten och tiden för ekot att gå fram och tillbaka, enligt

$$L = \frac{1}{2} v_1 t_{\text{eko}} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \cdot 1472,0 \cdot 0,460 = 338,56 \text{ m.}$$

Därför följer att fiskstimmets beräknade läge i höjd- och längdled blir

$$h_b = 338,56 \cdot \sin 10^\circ = 58,8 \text{ m} \quad \text{sam} \quad l_b = 338,56 \cdot \cos 10^\circ = 333,4 \text{ m}$$

I den verkliga situationen bryts ultraljudsvågen. Den tid som det tar för ekot att komma tillbaka kan i detta fallet tecknas

$$t_{\text{eko}} = 2 \cdot \left(\frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} \right) \Rightarrow L_2 = v_2 \cdot \left(\frac{t_{\text{eko}}}{2} - \frac{L_1}{v_1} \right)$$

där $L_1 = \frac{5,0}{\sin 10^\circ} = 28,8$ m enligt geometrin, vilket ger att

$$L_2 = 1440,0 \cdot \left(\frac{0,460}{2} - \frac{28,8}{1472,0} \right) = 303,0 \text{ m}$$

Brytningslagen applicerad på gränssytan mellan det varmare och det kallare vattnet ger

$$\frac{\sin \theta_b}{\sin \theta_i} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \theta_b = \arcsin \left(\frac{v_2 \cdot \sin \theta_i}{v_1} \right)$$

$$\Rightarrow \theta_b = \arcsin \left(\frac{1440,0 \cdot \sin 80^\circ}{1472,0} \right) = 74,45^\circ$$

Fiskstimmets verkliga läge kan nu beräknas ur geometrin i problemet:

$$h_f = h_1 + L_2 \cdot \cos \theta_b \Rightarrow h_f = 5,0 + 303,0 \cdot \cos 74,45^\circ = 86,2 \text{ m}$$

$$l_f = L_1 \cdot \sin \theta_i + L_2 \cdot \sin \theta_b \Rightarrow l_f = 28,8 \cdot \sin 80^\circ + 303,0 \cdot \sin 74,45^\circ = 320,3 \text{ m}$$

Kaptenen missbedömer således avstånden med $86,2 - 58,8 \text{ m} = 27,4 \text{ m}$ i höjdled och $333,4 - 320,3 \text{ m} = 13,1 \text{ m}$ i längdled.

Interferens och diffraction

34. Enligt uppgiften ska skiktets tjocklek vara $t = \frac{3\lambda}{4}$, där λ givetvis ska tolkas som våglängden inuti antireflexskiktet, Vi får att

$$t = \frac{3 \cdot 590}{4 \cdot 1,38} = 320,7 \text{ nm}$$

När glasytan istället vinklas har vi att interferensvillkoret vid snett infall kan skrivas $2nt \cos \theta_b = m\lambda$, vilket med det minsta värdet på m ($m = 1$) ger med insatta värden att

$$\theta_b = \arccos \left(\frac{650}{2 \cdot 1,38 \cdot 320,7} \right) = 42,74^\circ$$

Infallsvinkeln beräknas sedan ur brytningslagen

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_b \Rightarrow \theta_i = \arcsin(1,38 \sin 42,74^\circ) = 69,50^\circ$$

36. a) Eftersom en förflyttning på en frans i interferensmönstret motsvarar en förflyttning av den ena spegeln i Michelsoninterferometern på en halv våglängd ($\frac{\lambda}{2}$) samt att mätresultatet utan zinkbit bakom spegeln uppenbarligen är en kalibrering av mätningarna som talar om för oss hur mycket av längdförändringen som orsakas av själva mätutrustningen, får vi att längdförändringen hos zinkbiten är

$$\Delta L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta L = (18,70 - 2,14) \cdot \frac{632,8}{2} \text{ nm} = 5,240 \text{ } \mu\text{m}$$

Detta ger att längdutvidgningskoefficienten blir

$$\alpha = \frac{1}{0,0100} \cdot \frac{5,240 \cdot 10^{-6}}{20} \text{ K}^{-1} = 2,62 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

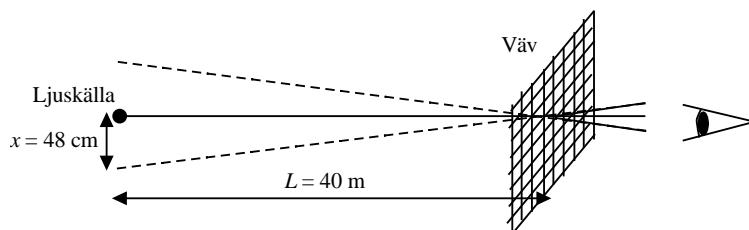
b) Det finns flera sätt att uppnå en noggrannhet på 0,01 frans eller bättre i mätningarna. I samtliga fall börjar man med att förstora interferensmönstret genom att exempelvis låta det gå genom en lins. I det förstörade mönstret mäter man sedan ljusets intensitet som funktion av avståndet vinkelrätt mot fransarna i mönstret. Noggrannheten i mätningarna avgörs nu i princip av hur tätt man kan mäta dessa punkter och med vilken noggrannhet man kan mäta intensiteterna. Genom att på ett exakt sätt bestämma två punkter i mönstret där man har maximal intensitet går det att bestämma förskjutningen på bråkdelar av en frans. Med en fix sensor som mäter intensiteten i 100 punkter motsvarande avståndet mellan två fransar i interferensmönstret är det enkelt att bestämma i vilken punkt som man har maximum samt få en upplösning på 1/100 frans.

38. Ljuset från ljuskällan träffar mellanrummet mellan trådarna i väven och sprids på samma sätt som i ett gitter. Detta ger virtuella bilder av ljuskällan på ekvidistanta avstånd x från varandra i ljuskällans plan (se figur nedan).

Gitterekvationen ger $d \sin \theta = m \cdot \lambda$, där d nu är avståndet mellan trådarna i väven. Med $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{L}$ fås att ($m = 1$ för två närliggande bilder)

$$d = \frac{\lambda L}{x} \Rightarrow d = \frac{560 \cdot 10^{-9} \cdot 40}{0,48} \text{ m} = 4,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Antalet trådar/cm blir således $\frac{0,01}{4,67 \cdot 10^{-5}} \text{ cm}^{-1} = 214 \text{ cm}^{-1}$



40. Intensitetsfördelningen bestäms av att vågorna böjs av på grund av diffraktion i den rektangulära öppningen. Eftersom avstånden är olika stora, kommer de att böjas av mest i vertikal riktning (med det minsta avståndet, $3,0 \text{ } \mu\text{m}$). Vinkeln θ till första minimum ges av $\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$, vilket ger i vertikal respektive i horisontell ledd

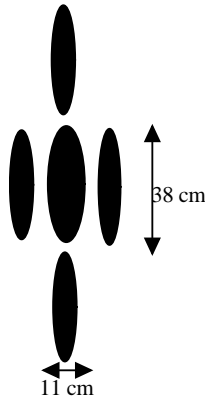
$$\theta_v = \arcsin\left(\frac{900 \cdot 10^{-9}}{3,0 \cdot 10^{-6}}\right) = 17,46^\circ$$

$$\theta_h = \arcsin\left(\frac{900 \cdot 10^{-9}}{10,0 \cdot 10^{-6}}\right) = 5,16^\circ$$

På avståndet $L = 60$ cm från halvledarlaserna hamnar första minimum på avståndet $x = L \tan \theta$ från centrum, vilket ger

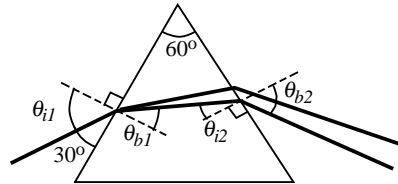
$$x_v = 60 \cdot \tan 17,46^\circ = 18,9 \text{ cm} \quad \text{samnt} \quad x_h = 60 \cdot \tan 5,16^\circ = 5,4 \text{ cm}$$

Intensitetsmönstret kommer att se ut som följer



Elektromagnetiska vågor och polarisation

42. Vitt ljus består av alla våglängder och dessa kommer att spridas olika mycket på grund av glasets dispersion, $n(\lambda)$. Diagrammet ger oss att brytningsindex $n_v = 1,470$ för violett ljus ($\lambda = 400$ nm) samt att $n_r = 1,455$ för rött ljus ($\lambda = 700$ nm).



Med beteckningar enligt figur, får vi ur geometrin att $\theta_{i1} = 60^\circ$, vilket tillsammans med Snells brytningslag, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_b$, ger för de båda våglängderna längst ut i det synliga spektrat

$$\lambda_1 = 400 \text{ nm:} \quad \theta_{b1,\lambda_1} = \arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1,470}\right) = 36,10^\circ$$

$$\lambda_2 = 700 \text{ nm:} \quad \theta_{b1,\lambda_2} = \arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1,455}\right) = 36,53^\circ$$

Infallsvinklarna mot den andra ytan beräknas ur geometrin. För den översta triangeln i figuren (innefattande toppvinkeln 60°) ger oss vinkelsumman i en triangel att:

$$(90^\circ - \theta_{b1}) + 60^\circ + (90^\circ - \theta_{i2}) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_{i2} = 60^\circ - \theta_{b1}$$

$$\text{vilket resulterar i } \theta_{i2,\lambda_1} = 23,90^\circ \text{ samt } \theta_{i2,\lambda_2} = 23,47^\circ$$

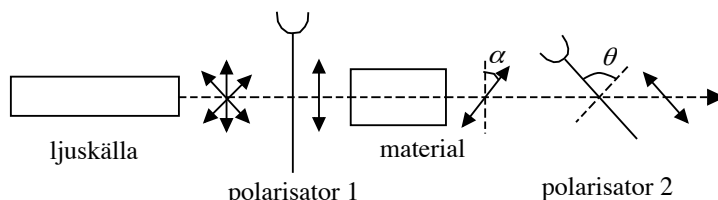
Brytningslagen vid den andra ytan ger nu

$$\theta_{b2,\lambda_1} = \arcsin(1,470 \cdot \sin 23,90^\circ) = 36,55^\circ$$

$$\theta_{b2,\lambda_2} = \arcsin(1,455 \cdot \sin 23,47^\circ) = 35,42^\circ$$

Vinkelskillnaden mellan det röda och det violetta ljuset är således $1,23^\circ$.

44. Det optiskt aktiva materialet roterar polarisationsplanet hos det ljus som transmitteras. För att observera en sådan effekt är det enklast om det infallande ljuset har ett fixt polarisationsplan, dvs. det infallande ljuset bör vara linjärpolariserat. Vi börjar således med att sätta en linjärpolarisator framför ljuskällan som vanligtvis avger opolariserat ljus. Därefter placeras det optiska aktiva materialet (provet) som kommer att vrida ljuset en vinkel α , vilket blir den nya polarisationsriktningen. Detta ljus kan nu analyseras av ytterligare en polarisator (polarisator 2). Intensiteten efter polarisator 2 ges av Malus lag, $I = I_0 \cos^2 \theta$, där θ är vinkeln mellan ljusets polarisationsriktning efter att det har passerat provet och den inställda polarisationsriktningen hos polarisator 2. Ljuset som kommer ut efter polarisator 2 kommer att vara polariserat längs med genomsläppsriktningen hos polarisator 2.

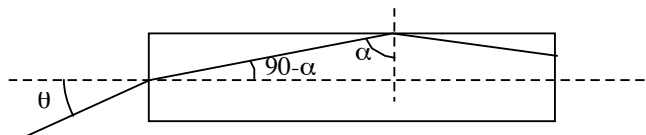


Vid själva mätningen gäller det att få så exakta mätresultat som möjligt. En god strategi att följa i detta sammanhang är att dela upp mätningen i två delar

- i) En kalibrering av mätutrustningen
- ii) Själva mätningen

Kalibreringen utförs enklast genom att ta bort provet ur strålgången och vrida polarisator 2 tills dess att inget ljus kommer bakom polarisator 2 (korsade polarisatorer) och vinkeln noteras. Därefter sätts provet in i strålgången och strålen kommer att vridas på ett sådant sätt att det kommer ut ljus efter polarisator 2. Polariserat 2 vrids sedan återigen tills dess att intensiteten blir noll efter polarisator 2. Den uppmätta vinkelvidningen ger direkt vinkeln α .

46. a) Ljuset ska totalreflekteras genom plattan, varför vi behöver gränsvinkeln α .



Totalreflektion betyder enligt brytningslagen att

$$n \sin \alpha = n_0 \sin 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{n_0}{n}$$

Tillämpas nu brytningslagen på första ytan, erhålls

$$n_0 \sin \theta = n \sin (90^\circ - \alpha) = n \cos \alpha = n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

där vi har utnyttjat den trigonometriska ettan, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Sätter vi nu ihop dessa båda ekvationer får vi att den största vinkeln θ_{\max} ges av

$$n_0 \sin \theta_{\max} = \sqrt{n^2 - n_0^2} \Rightarrow \theta_{\max} = \arcsin \left(\frac{1}{n_0} \sqrt{n^2 - n_0^2} \right)$$

Plastens brytningsindex är $n = 1,30$ och luftens brytningsindex är $n_0 = 1,00$, vilket ger

$$\theta_{\max} = \arcsin \left(\frac{1}{1,00} \sqrt{1,30^2 - 1,00^2} \right) = 56,1^\circ$$

b) Vi har två ytor, varför den totala transmittansen är

$$T_{\text{tot}} = \frac{I_{\text{ut}}}{I_{\text{in}}} = T_1 \cdot T_2 = (1 - R_1)(1 - R_2)$$

Dessutom ger brytningslagen att:

$$n_0 \sin \theta = n \sin \theta_b \Rightarrow \theta_b = \arcsin \left(\frac{1,00 \cdot \sin 25^\circ}{1,30} \right) = 18,97^\circ$$

Opolariserat ljus som faller in mot ytan betyder att halva intensiteten är polariserad i infallsplanet och halva intensiteten är polariserad vinkelrätt mot infallsplanet. Fresnels formler ger nu för de två olika komponenterna

Polariserat i infallsplanet:

$$I_p = \frac{I_0}{2} \left(1 - \frac{\tan^2(\theta - \theta_b)}{\tan^2(\theta + \theta_b)} \right) \left(1 - \frac{\tan^2(\theta_b - \theta)}{\tan^2(\theta_b + \theta)} \right) \Rightarrow \frac{I_p}{I_0} = 0,488$$

Polariserat vinkelrätt mot infallsplanet:

$$I_s = \frac{I_0}{2} \left(1 - \frac{\sin^2(\theta - \theta_b)}{\sin^2(\theta + \theta_b)} \right) \left(1 - \frac{\sin^2(\theta_b - \theta)}{\sin^2(\theta_b + \theta)} \right) \Rightarrow \frac{I_s}{I_0} = 0,477$$

Det sökta förhållandet blir slutligen

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{0,488}{0,477} = 1,023$$

48. Effekten av ett par polarisationsglasögon är att de filtrerar bort det reflekterade ljus vars polarisationsriktning har högst intensitet efter reflektion, vilket är det ljus som är horisontellt polariserat (jämför med Brewstervinkeln som gör att det ljus som är parallellt polariserat med infallsplanet har minst intensitet efter reflektionen). På detta sätt kan det totala ljus som når ögat minimeras i två steg - först genom att reflektionen i vattnet ger mindre intensitet hos det vertikalt polariserade ljuset och sedan genom att filtrera bort det horisontellt polariserade ljuset i glasögonens polarisationsfilter. Innan vi börjar att räkna på Fresnels formler, behöver vi dock känna till brytningsvinkeln θ_b för det ljus som bryts ned i vattnet. Brytningslagen ger att

$$n_0 \sin \theta_i = n \sin \theta_b \Rightarrow \theta_b = \arcsin \left(\frac{1,00 \cdot \sin 45^\circ}{1,33} \right) = 32,1^\circ$$

där vi har utnyttjat att brytningsindex för luft är $n_0 = 1,00$ och för vatten har vi att $n = 1,33$. Det infallande solljuset kan antas vara opolariserat och därför ha halva intensiteten i vardera polarisationsriktningen. Vi får då för det ljus som är polariserat i infallsplanet (vertikal ledd) att

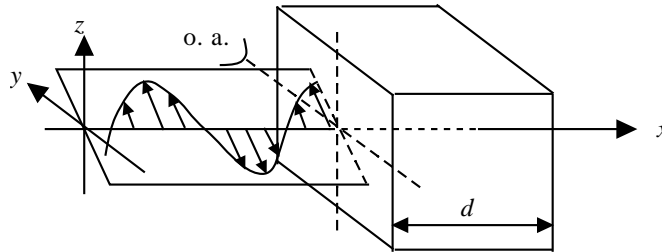
$$I_p = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\tan^2(\theta - \theta_b)}{\tan^2(\theta + \theta_b)} \Rightarrow \frac{I_p}{I_0} = 2,7 \cdot 10^{-3}$$

samt för det ljus som är polariserat vinkelrätt (horisontell ledd) mot infallsplanet

$$I_s = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\sin^2(\theta - \theta_b)}{\sin^2(\theta + \theta_b)} \Rightarrow \frac{I_s}{I_0} = 0,052$$

När glasögonen är på, passerar enbart $I_p = 2,7 \cdot 10^{-3}$ av intensiteten in till ögat, medan när de är avtagna passerar $I_{\text{tot}} = I_p + I_s = 0,055$ av intensiteten till ögat. Det senare är nästan 20 gånger mer än när glasögonen används.

50. Eftersom ljuset kommer att påverkas av två olika brytningsindex i det dubbelbrytande materialet måste vi betrakta dess komponenter parallellt med respektive vinkelrätt mot optiska axeln separat.



Med x -axeln i vågens utbredningsriktning och y -axeln längs med den optiska axeln (o. a. i figuren ovan), kan vi dela upp den linjärpolariserade vågen i två komponenter, den ena längs med y -axeln (optiska axeln) och den andra längs med z -axeln (vinkelrätt mot optiska axeln). Med en vinkel på 45° mellan det infallande ljusets polarisation och den optiska axeln, blir komponenterna av det elektriska fältets amplitud $E_0/\sqrt{2}$ längs både y - och z -axeln, där E_0 är amplituden hos den linjärpolariserade vågen. Eftersom intensiteten hos en våg är proportionell mot amplituden i kvadrat, betyder detta att vi får halva intensiteten längs y -axeln och halva intensiteten längs z -axeln, dvs de båda komponenterna har samma intensitet. Det elektriska fältet före plattan kan tecknas

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

Eftersom de båda komponenterna känner av olika brytningsindex, kommer de att röra sig olika fort genom materialet. Detta leder till att de är fasförskjutna i förhållande till varandra när de lämnar det dubbelbrytande materialet. För att avgöra hur vågen som kommer ut från plattan ser ut, behöver vi känna till hur stor denna fasskillnad är. Fasskillnaden beräknas på sedvanligt sätt utgående från den optiska vägskillnaden mellan vågorna

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_1 t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_2 t$$

där t är tjockleken på plattan. Vi får nu för de båda fallen att

$$\text{a) } \Delta\Phi = \frac{2\pi}{589 \cdot 10^{-9}} \cdot 52,6 \cdot 10^{-6} \cdot (1,5997 - 1,5941) \approx \pi$$

Detta ger oss att det elektriska fältet bakom plattan kan tecknas

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \\ -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

vilket betyder att det utgående ljuset fortfarande är linjärpolariserat, men med en polarisationsriktning som är vinkelrät mot den polarisationsriktning som det ingående ljuset

hade.

$$b) \Delta\Phi = \frac{2\pi}{589 \cdot 10^{-9}} \cdot 26,3 \cdot 10^{-6} \cdot (1,5997 - 1,5941) \approx \frac{\pi}{2}$$

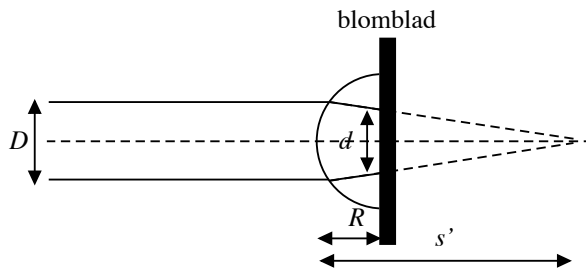
Det elektriska fältet bakom plattan blir i detta fallet

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t) \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Detta betyder att y -komponenten har maximum när z -komponenter är noll och vice versa, dvs den utgående vågen är cirkulärpolariserad.

Brytning i sfäriska ytor

52. När solljuset träffar den halvsfäriska vattendroppen, kommer ljuset att brytas. För att beräkna avståndet till den punkt där ljuset bryts ihop, låter vi avståndet $s = \infty$, eftersom ljuskällan befinner sig mycket långt borta. Formeln för brytning i sfärisk yta ger att



$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow s' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

där $n_1 = 1,00$ är brytningsindex för luft och $n_2 = 1,33$ är brytningsindex för vatten. Insättning ger

$$s' = \frac{1,33}{1,33 - 1,00} \cdot 2,0 \text{ mm} = 8,06 \text{ mm}$$

Betrakta infallande ljus över den centralt belägna ytan av vattendroppen. Låt detta ljus ha diametern D innan det träffar vattendroppen. I gränssytan mellan vattendroppen och blombladet, kommer ljuset att uppta diametern d . Liksidiga trianglar ger oss nu att

$$\frac{d}{D} = \frac{s' - R}{s'} \Rightarrow d = \frac{8,06 - 2,0}{8,06} D \approx \frac{3}{4} D$$

Då vi endast är intresserade av näst intill vinkelrätt infallande ljus, kan vi beräkna reflektionen i ytan mellan luft och vattendroppe och därmed den andel ljus som kommer in i vattendroppen enligt

$$\frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad \text{ger} \quad \frac{I_t}{I_0} = \frac{I_0 - I_r}{I_0} = \left[1 - \left(\frac{1,33 - 1,00}{1,33 + 1,00} \right)^2 \right] = 0,98$$

Det ljus som transmittas in i vattendroppen med diametern D , kommer att brytas ihop till en diameter d när det träffar bladet. Eftersom den totala energin inte har ändrats, kommer den intensitet som träffar bladet att bli

$$I_{\text{blad}} = \frac{\pi D^2}{\pi d^2} \cdot I_t \Rightarrow \frac{I_{\text{blad}}}{I_0} = \left(\frac{4}{3} \right)^2 \cdot 0,98 = 1,742$$

Intensiteten som träffar blombladet har således ökat med 74%.

54. Av konstruktionen ser vi att ultraljudsoscillatorn sänder ut en plan våg in i kvartsplattan. Denna träffar sedan den undre ytan hos kvartsbiten och det är enbart den del av vågen som träffar den sfäriska ytan som fokuseras mot provet (övriga delar av vågen sprids bort från provet). För att beräkna krökningsradien hos den sfäriska ytan, behöver vi således tänka oss att en plan infallande våg ska fokuseras på avståndet $d = 6,0$ mm från centrum av den sfäriska ytan. Vid brytning i en sfärisk yta gäller inom optiken att:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

där n_1 och n_2 är brytningsindex för de båda materialen, s är avståndet till objektet ($a = \infty$ här, eftersom den infallande vågen är plan), s' är avståndet till bilden ($s' = d = 6,0$ mm här) och R är den sökta krökningsradien. Återstår således enbart att bestämma brytningsindex i detta fallet. Eftersom brytningsindex n är omvänt proportionellt mot utbredningsfarten v ($n = \frac{c_0}{c}$ för ljus) kan vi skapa oss ett fiktivt brytningsindex i vårt fall genom att normera alla farter till $v_0 = 5800$ m/s (ljudfarten för kvarts), vilket ger att $n_1 = 1,00$ samt $n_2 = \frac{5800}{1480} = 3,92$. Insättning i ekvationen ovan ger nu att

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{d} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow R = \frac{3,92 - 1,00}{3,92} \cdot 6,00 \text{ mm} = 4,47 \text{ mm}$$

Krökningsradien ska således vara 4.5 mm.

56. Enligt den givna formeln är brytningsindex vid våglängden $\lambda_1 = 1550 \text{ nm} = 1,55 \mu\text{m}$:

$$n_1 = 3,42696 + \frac{0,138497}{1,55^2 - 0,028} + \frac{0,013924}{(1,55^2 - 0,028)^2} - 2,09 \cdot 10^{-5} \cdot 1,55^2 + 1,48 \cdot 10^{-7} \cdot 1,55^4 = 3,4777$$

samt vid våglängden $\lambda_1 = 1300 \text{ nm} = 1,30 \mu\text{m}$:

$$n_1 = 3,42696 + \frac{0,138497}{1,30^2 - 0,028} + \frac{0,013924}{(1,30^2 - 0,028)^2} - 2,09 \cdot 10^{-5} \cdot 1,30^2 + 1,48 \cdot 10^{-7} \cdot 1,30^4 = 3,5053$$

Enligt linsmakarformeln gäller att:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f = \frac{1}{(n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

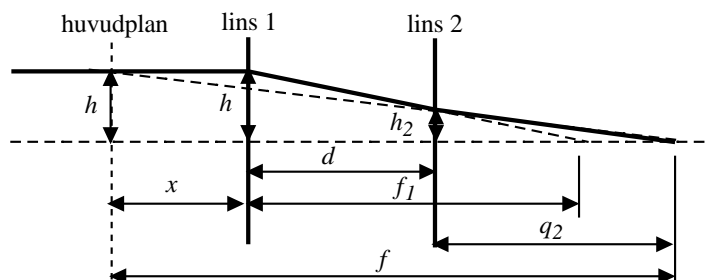
Vi har en lins där båda krökningsradierna har sitt centrum till höger om ytorna, varför krökningsradierna i linsmakarformeln är $R_1 = +13,0$ mm samt $R_2 = +20,0$ mm. Detta kan nu sättas in i linsmakarformeln för att beräkna fokalavståndet för de båda våglängderna, vilket ger

$$f_1 = \frac{1}{(3,4777 - 1) \left(\frac{1}{13,0} - \frac{1}{20,0} \right)} \text{ mm} = 15,0 \text{ mm}$$

$$f_1 = \frac{1}{(3,5053 - 1) \left(\frac{1}{13,0} - \frac{1}{20,0} \right)} \text{ mm} = 14,8 \text{ mm}$$

Skillnaden i fokalavstånden är således 0,2 mm.

58. a) När man beräknar totala brännvidden hos ett linssystem måste man ha i åtanke att brännvidden definieras utgående från den punkt i vilken parallella inkommande strålar sammanfaller i systemet. I praktiken betyder detta att man ska bestämma avståndet mellan fokalpunkten och det plan i vilket inkommande strålar samt utgående strålar verkar att mötas. Detta plan kallas för huvudplan och befinner sig vanligtvis på olika läge i linssystemet beroende på från vilket håll man betraktar strålgången. För en tunn lins sammanfaller huvudplanen med linsytorna varför man i dessa fall inte behöver göra någon distinktion dem emellan. I figuren nedan har avstånd och vinklar endast ritats schematiskt för att åskådliggöra principerna i beräkningarna.



Med parallellt infallande strålar kommer den första linsen att ge en mellanbild i sin fokalpunkt, eftersom linsformeln ger att

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow s'_1 = f_1 = 130 \text{ mm}$$

Bilden från första linsen är objekt till andra linsen. Linsformeln för den andra linsen ger således

$$\frac{1}{-(f_1 - d)} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow s'_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{-50} - \frac{1}{-(130 - 85)}\right)} \text{ mm} = 450 \text{ mm}$$

Likformiga trianglar ger för två olika likformigheter att

$$\frac{h}{h_2} = \frac{f}{s'_2} = \frac{f_1}{f_1 - d} \Rightarrow f = 450 \cdot \frac{130}{45} \text{ mm} = 1300 \text{ mm}$$

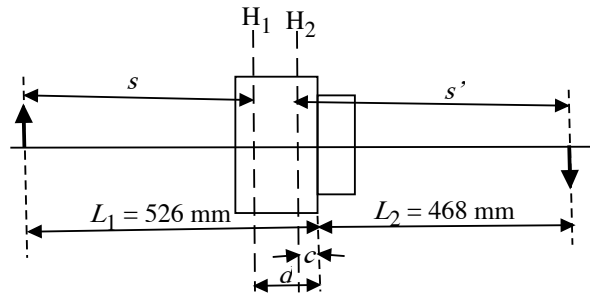
b) För avlägsna objekt faller bilden i fokalplanet. Om föremålet upptar vinkeln α radianer blir bildens storlek $f \cdot \alpha$, vilket i detta fallet ger att bildens storlek blir

$$h' = 1300 \cdot 0,532 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ mm} = 1,2 \text{ cm}$$

60. Eftersom objektivet har flera linser, kan vi inte använda linsformeln rätt av, utan vi måste först bestämma var de båda huvudplanen ligger i systemet. Detta kan göras utifrån mätningen i försöksuppställningen. Vi vet att denna avbildning sker i skala 1:1, varför förstoringen $M = -\frac{s'}{s} = -1$ (omvänd bild enligt figuren i uppgiften) och därför gäller det att $s' = s$. Insatt i linsformeln ger detta

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = s' = 2f = 2 \cdot 245 \text{ mm} = 490 \text{ mm}$$

Vi noterar att $L_2 < s$, $s' < L_1$, vilket ger huvudplanens lägen enligt figuren nedan. Med beteckningar enligt figur får vi att



$$c = s' - L_2 \Rightarrow c = (490 - 468) \text{ mm} = 22 \text{ mm}$$

$$d = L_1 - s \Rightarrow d = (526 - 490) \text{ mm} = 36 \text{ mm}$$

Vid en förminskning av bilden med en faktor 3,0 (omvänd bild) ska det gälla att

$$M = -\frac{s'}{s} = -\frac{1}{3} \Rightarrow s' = \frac{s}{3}$$

Insättning i linsformeln ger

$$\frac{1}{s} + \frac{3}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = 4f = 980 \text{ mm} \quad \text{sam} \quad s' = \frac{s}{3} = 327 \text{ mm}$$

De nya avstånden från objektfattningens plan blir

$$L_1 = s + d = 1016 \text{ mm} \quad \text{och} \quad L_2 = s' - c = 305 \text{ mm}$$

Blandade problem

61. a) Ljudet kommer uppenbarligen att utbreda sig åt alla håll, varför den utgående vågen blir sfärisk. En godtycklig sfärisk våg kan alltid skrivas $s = \frac{A_r}{r} \cdot \sin(\omega t - kr + \Phi)$, så det gäller nu bara att identifiera de olika konstanterna. Fasvinkeln Φ kan sättas till noll, eftersom vi har frihet att välja starttidpunkt för vågen. Vidare ges ljudfarten av:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,314 \cdot (273,15 + 35)}{28,8 \cdot 10^{-3}}} \text{ ms}^{-1} = 352,9 \text{ ms}^{-1}$$

vilket betyder att

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 125,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

samt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} \Rightarrow k = \frac{2\pi \cdot 50}{352,9} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} = 0,356 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Återstår således enbart att bestämma A_r . Den totala ljudintensiteten som sänds ut från elefanten ges av uttrycket

$$I = \frac{1}{2} \rho v \cdot \left(\omega \frac{A_r}{r} \right)^2 \Rightarrow A_r = \frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2I_0 \cdot 10^{\beta_I/10}}{\rho v}}$$

där vi har utnyttjat att ljudintensitetsnivån

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta_I/10}$$

Insättning av värden ger att

$$A_r = \frac{1,0}{125,7} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{117/10}}{1,14 \cdot 352,9}} \text{ m}^2 = 0,397 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Detta betyder att den matematiska beskrivningen av vägen blir:

$$s = \frac{0,397 \cdot 10^{-3}}{r} \cdot \sin(125,7 \cdot t - 0,356 \cdot r) \text{ m}$$

b) På avståndet 100 m från elefanten, får vi då att intensiteten

$$I = \frac{1}{2} \cdot 1,14 \cdot 352,9 \cdot \left(2\pi \cdot 20 \cdot \frac{0,397 \cdot 10^{-3}}{100} \right)^2 \text{ Wm}^{-2} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}$$

vilket i sin tur ger att ljudintensitetsnivån

$$\beta = 10 \log \left(\frac{5,0 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} \right) \text{ dB} = 77 \text{ dB}$$

62. För att få minimal total reflektans ska den våg som reflekteras i första ytan vara i motfas med den som reflekteras i andra ytan. Dessutom ska de i det ideala fallet också ha samma intensitet (vilket ger $I_r \equiv 0$). Således måste gälla att:

$$I_{r1} = I_{r2} \Rightarrow R_1 I_i = (1 - R_1)^2 R_2 I_i \Rightarrow R_1 \approx R_2$$

Om vi försummar multipelreflektioner (leder till alltför krångliga räkningar), kan detta villkor formuleras som att de båda reflektionskoefficienterna ska vara lika stora, vilket ger

$$R_1 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = R_2 = \left(\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \right)^2 \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

där n_1 är brytningsindex för fiberkärnan, n_2 är brytningsindex för materialet i det tunna skiktet och n_3 är brytningsindex för vågledaren. Korsmultiplikation ger att

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 - n_2^2 - n_2 n_3 = n_1 n_2 - n_1 n_3 + n_2^2 - n_2 n_3 \Rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

Insättning av värden ger slutligen att $n_2 = \sqrt{1,50 \cdot 2,23} = 1,83$

63. Av uppgiften framgår det tydligt att den utsända vågen dels kommer att reflekteras mot det rörliga objektet och dels mot den stillastående reflekterande ytan. Den våg som reflekteras mot den stillastående ytan kommer att ha samma frekvens f_0 som den utsända vågen, medan den våg som reflekteras mot det rörliga objektet kommer att Dopplrförskjutas, dvs den vågen får en något annorlunda frekvens. Den frekvens f_1 som kommer att uppfattas hos det rörliga objektet (elektromagnetiska vågor) beror av objektets fart v och av ljusfarten c enligt följande

$$f_1 = f_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

där vi har antagit att objektet rör sig i riktning mot sändaren som visas i figuren (i realiteten kan vi inte avgöra riktningen hos objektets rörelse från de data som ges i uppgiften, men detta har ingen betydelse för beräkningarna eftersom vi endast söker absolutvärdet av farten). På motsvarande sätt fås att den reflekterade vågen från objektet kommer att Dopplrförskjutas enligt

$$f_2 = f_1 \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = f_0 \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx f_0 \left(1 + 2\frac{v}{c}\right)$$

där vi har utnyttjat att farten v är mycket mindre än ljusfarten, så att de kvadratiske termerna kan försummas. Sammantaget betyder detta att den reflekterade våg som träffar detektorn består av två delar: i) En direktreflekterad våg med frekvensen f_0 och ii) en Dopplrförskjuten våg med frekvensen f_2 . Eftersom $v \ll c$, gäller vidare att $\Delta f =$

$f_2 - f_0 \ll f_0$, dvs den signal som detekteras i detektorn kommer att vara sammansatt av två närliggande frekvenser, vilket betyder att vi kommer att få en svävning. Med tanke på den korta periodtiden hos vågen ($f_0 = 8,0$ GHz ger en periodtid på $T = 1/f_0 = 125$ ps) som detekteras, är det uppenbarligen periodtiden för svävningsfrekvensen som man mäter. För en svävning ges svävningsfrekvensen av

$$f_{\text{beat}} = |f_2 - f_0| = |\Delta f| = \frac{1}{T_{\text{beat}}}$$

varför det måste gälla att ($f_2 > f_0$ enligt vårt antagande att objektet rör sig mot sändaren)

$$\Delta f = f_2 - f_0 = 2f_0 \frac{v}{c} = \frac{1}{T_{\text{beat}}} \Rightarrow v = \frac{c}{2f_0 T_{\text{beat}}}$$

vilket med insatta värden ger att

$$v = \frac{3,0 \cdot 10^8}{2 \cdot 10,0 \cdot 10^9 \cdot 6,0 \cdot 10^{-3}} \text{ m/s} = 2,5 \text{ m/s}$$

64. a) För att kunna få information om vilken typ av våg det handlar om behöver vi först bestämma dess våglängd, frekvens och utbredningsfart. Eftersom vågen är beskriven med en cosinusfunktion, är det lämpligt att utgå från dess cosinusrepresentation vid identifieringen. En våg kan i cosinusrepresentationen allmänt tecknas

$$s = A \cdot \cos(\omega t - kx + \Phi)$$

där A är amplituden, $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ är vågvektorn och Φ är fasvinkeln. Vi ser direkt genom att jämföra med den givna vågen att amplituden $A = 5,0$ Pa och att fasvinkeln $\Phi = 0$. Identifiering med vinkelfrekvensen ω och vågtalet k ger nu att

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{251 \cdot 10^3}{2\pi} \text{ Hz} = 39,9 \text{ kHz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{49,3} \text{ m} = 0,127 \text{ m}$$

Minustecknet framför termen kx hjälper bara till att ange vågens rörelseriktning (olika tecken framför termerna ωt och kx betyder bara att vågen utbreder sig längs med den positiva x -riktningen) och påverkar inte värdet på våglängden som alltid är större än noll. Från frekvensen och våglängden kan vi nu beräkna vågens utbredningsfart.

$$v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{251 \cdot 10^3}{49,3} \text{ ms}^{-1} = 5100 \text{ ms}^{-1}$$

Från dessa värden ser vi nu att frekvensen är högre än 20 kHz, vilket betyder att vågen är en ultraljudsvåg. Vi ser även att ljudfarten är såpass hög som 5100 m/s, vilket betyder att det med största sannolikhet rör sig genom ett fast material, eftersom typiska ljudfarter för fasta material ligger i storleksordningen 2000-6000 m/s, för vätskor ligger i storleksordningen 1000-2000 m/s och för gaser ligger i storleksordningen 300-700 m/s.

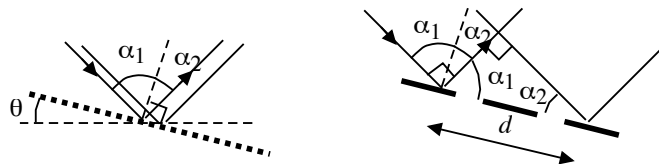
b) Vi har tidigare konstaterat att fasvinkeln $\Phi = 0$. Detta betyder att övertrycket 1,0 ms senare i en punkt 1,0 m i vågens utbredningsriktning kan tecknas via direkt insättning i ekvationen:

$$\Delta p(t = 10^{-3}; x = 1,0) = 5,0 \cos(251 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} - 49,3 \cdot 1,0) \text{ Pa} = 4,0 \text{ Pa}$$

65. I ett reflektionsgitter med olika infalls- och utfallsvinklar, tecknas vägskillnaden

$$\Delta L = d \cdot (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = m \cdot \lambda$$

vid konstruktiv interferens, vilket kan inses ur den högra figuren nedan.



Med beteckningar enligt figur, ger jämförelser med figuren i uppgiftsformuleringen att:

$$\alpha_1 = 45^\circ + \theta \quad \text{samnt} \quad \alpha_2 = 45^\circ - \theta$$

Sätts detta samman, får vi att

$$d \cdot [\sin(45^\circ - \theta) - \sin(45^\circ + \theta)] = m \cdot \lambda$$

Den minsta vinkel som gittret ska vridas fås då $m = -1$ (vänsterledet är negativt). Med hjälp av trigonometriska samband för summan och differensen av sinusvinklar får vi nu att:

$$d \cdot [\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta - \sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta] = -\lambda$$

vilket kan förenklas till

$$2d \cos 45^\circ \sin \theta = \lambda \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2d \cos 45^\circ} \right) = \arcsin \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}d} \right)$$

Med 1200 ritsar/mm är gitterkonstanten $d = \frac{10^{-3}}{1200} \text{ m} = 833 \text{ nm}$, vilket ger

$$\theta = \arcsin \left(\frac{540}{\sqrt{2} \cdot 833} \right) = 27,27^\circ$$

66. Den högsta intensiteten får man när dämpningen är som lägst, dvs. vid frekvensen 250 Hz då dämpningen är 15,6 dB. Ljudsignalen utanför örat har intensiteten $I = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$, vilket omräknat till ljudintensitetsnivå ger att:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \Rightarrow \quad \beta = 10 \log \left(\frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} \right) \text{ dB} = 90 \text{ dB}$$

Med dämpningen 15,6 dB, är den ljudintensitetsnivå som når trumhinnan:

$$\beta_2 = (90 - 15,6) \text{ dB} = 74,4 \text{ dB}$$

varvid ljudintensiteten som når örat kan beräknas enligt

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{\beta_2/10} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 10^{-12} \cdot 10^{74,4/10} \text{ W/m}^2 = 2,75 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

67. Vi har två separata våglängder, vilka ger upphov till varsitt separat interferensmönster. Det är kombinationen av dessa båda interferensmönster som utgör det observerade interferensmönstret. Vid en förflyttning d av ena spegeln i en Michelsoninterferometer, blir vägskillnaden $\Delta L = 2nd$, eftersom ljuset går fram och tillbaka. Med brytningsindex $n = 1$ som för luft, blir interferensvillkoren för konstruktiv respektive för destruktiv interferens

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d = \begin{cases} 2m \cdot \pi & \text{max} \\ (2m + 1) \pi & \text{min} \end{cases}$$

När man ser ett tydligt interferensmönster betyder detta att de båda interferensmönstren överlappar, dvs har max och min samtidigt. På motsvarande sätt försvinner det sammantagna interferensmönstret nästan helt när interferensmönstret för den ena våglängden har max när interferensmönstret för den andra våglängden har minimum. Vid

en förflyttning d av spegeln från ett otydligt mönster till närmaste tydliga mönster, motsvarar detta uppenbarligen en förflyttning mellan två maximum hos den ena våglängden samt en förflyttning från minimum till maximum hos den andra våglängden. Närliggande förskjutningar ger att vi har samma m , vilket betyder att interferensvillkoren för de båda våglängderna blir $2d = m \cdot \lambda_1$ samt $2d = (m + \frac{1}{2}) \lambda_2$, vilket ger att

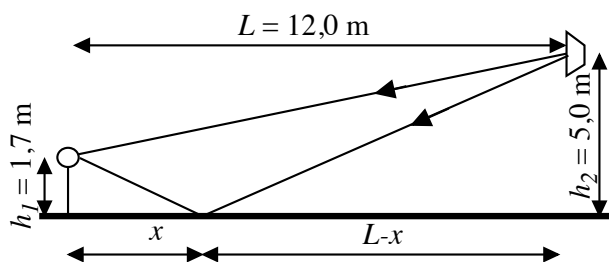
$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow m = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\Rightarrow 2d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4d}$$

där $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ är skillnaden i våglängd. Insättning ger slutligen att

$$\Delta\lambda = \frac{589^2}{4 \cdot 144500} \text{ nm} = 0,6 \text{ nm}$$

68. Vi behöver först beräkna vägskillnaden ΔL mellan de båda vågorna (den som reflekteras och den som går direkt till åhöraren). En figur över vågutbredningen ser ut på följande sätt.



Likformighet hos trianglarna i figuren ger att (infallsvinkel = reflektionsvinkel vid reflektionen) ger att

$$\frac{x}{h_1} = \frac{L-x}{h_2} \Rightarrow x = \frac{h_1 L}{h_1 + h_2} \Rightarrow x = \frac{1070 \cdot 12,0}{1,70 + 5,0} \text{ m} = 3,04 \text{ m}$$

Detta betyder att vägskillnaden ΔL kan tecknas med hjälp av Pythagoras sats

$$\Delta L = \sqrt{(L-x)^2 + h_2^2} + \sqrt{x^2 + h_1^2} - \sqrt{L^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \sqrt{8,96^2 + 5,0^2} + \sqrt{3,04^2 + 1,7^2} - \sqrt{12,0^2 + 3,3^2} \text{ m} = 1,30 \text{ m}$$

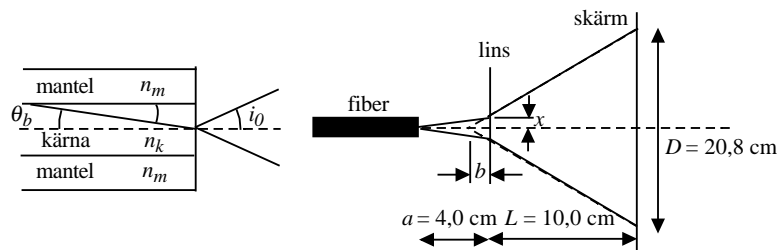
Vid förstärkning har vi konstruktiv interferens och samtidigt är det inget fasskift hos en tryckvåg när den reflekteras mot ett medium. Detta beror på att molekylerna inte samtidigt kan vara ihoppressade i den ingående vågen och bortpressade från varandra i den utgående vågen (däremot blir vågen i sig färförskjuten vid reflektioner, men vårt öra uppfattar trycket, inte vågen!). Villkoret för konstruktiv interferens blir således

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{2\pi f}{v} \Delta L = m \cdot 2\pi \Rightarrow f = m \cdot \frac{v}{\Delta L} \Rightarrow f = m \cdot 261,9 \text{ Hz}$$

69. Avståndet från linsen till bilden av öppningen hos fibern beräknas med linsformeln ($s = a$ och $s' = b$ enligt figurens beteckningar).

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{4,0 \text{ cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-2,4 \text{ cm}} \Rightarrow b = -1,5 \text{ cm}$$

Ljuset som träffar skärmen kommer således från en punkt som verkar att befinna sig 1,5 cm framför linsen (se figur).



Likformiga trianglar ger nu att:

$$\frac{x}{b} = \frac{D/2}{L+b} \Rightarrow x = \frac{Db}{2(L+b)} \Rightarrow x = 1,36 \text{ cm}$$

Geometrin ger att

$$\tan i_0 = \frac{x}{a} \Rightarrow i_0 = \arctan\left(\frac{1,36}{4,0}\right) = 18,7^\circ$$

Slutligen ger ljuset brytning vid utgången ur fibern samt fiberns numeriska apertur att

$$\sin i_0 = NA = \sqrt{n_k^2 - n_m^2} = n_k \sin \theta_b \Rightarrow \begin{cases} n_k = \sqrt{\sin^2 i_0 + n_m^2} = 1,524 \\ \theta_b = \arcsin(\sin i_0 / n_k) = 12,1^\circ \end{cases}$$

70. a) Ljudtrycksnivån ges av ekvationen $\beta_p = 20 \log\left(\frac{p_{\text{eff}}}{p_0}\right)$, där p_{eff} är effektivtrycket hos ljudvågen och $p_0 \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ är referenstrycket vid ljudnivåmätningar (detta är dock svagt temperaturberoende, men vi sökte bara ett ungefärligt värde för A_r i ekvationen). Således fås vid jämförelse med den givna ekvationen att:

$$\frac{A_r}{r_0} = \sqrt{2} \cdot p_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot p_0 \cdot 10^{\beta_p/20}$$

Insättning av värden vid $r_0 = 1,0 \text{ m}$ ger att

$$A_r = \sqrt{2} \cdot 1,0 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{\frac{100}{20}} \text{ Pa} \cdot \text{m} = 2,8 \text{ Pa} \cdot \text{m}$$

b) För att kunna beräkna temperaturen, behöver vi fundera lite kring vad som beror av temperaturen i uppgiften. Det mest uppenbara är att ljudfarten har ett känt temperaturberoende. Låt oss därför först bestämma ljudfarten utifrån den givna beskrivningen av vågen. Övertrycket hos en sfärisk våg kan generellt tecknas

$$\Delta p = \frac{A_r}{r} \cdot \sin(\omega t - kr + \Phi)$$

vilket med $\omega = 2\pi f$ och $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ger att ljudutbredningsfarten blir

$$v = f \cdot \lambda = 2\pi f \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Identifiering med den givna ekvationen ger

$$v = 55,0 \cdot 10^3 \cdot 6,236 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-1} = 343,0 \text{ ms}^{-1}$$

Ljudfartens temperaturberoende i luft ges av ekvationen

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow T = \frac{Mv^2}{\gamma R}$$

där M är molmassan för luft, R är allmänna gaskonstanten, T är temperaturen och $\gamma = C_P/C_V = 1,40$ är förhållandet mellan värmekapaciteterna vid konstant tryck och vid konstant volym för en tvåatomig gas (luft). Temperaturen blir då

$$T = \frac{28,8 \cdot 10^{-3} \cdot (343,0)^2}{1,40 \cdot 8,314} \text{ K} = 291,1 \text{ K (ungefär } 18^\circ \text{C)}.$$

71. a) Interferometern har stora likheter med Michelsoninterferometern. En laserstråle delas upp i två lika stora delar med hjälp av en stråldelare (halvgenomskinlig spegel) och vardera av dessa strålar träffar varsin spegel under vinkeln 45° . Därigenom ändras den reflekterade strålens riktning med 90° jämfört med den infallande strålen. Med denna geometri kommer de båda utgående strålarna att mötas vinkelrätt mot varandra i en punkt. I denna punkt har man dock satt in ytterligare en stråldelare (halvgenomskinlig spegel), vilket betyder att vardera av dessa båda korsande strålar delas upp i två delar (en som reflekteras och en som transmittas av stråldelaren). Ut från stråldelaren får vi således två strålar (den ena är utritad i figuren, den andra går rakt uppåt ut från stråldelaren) där vardera strålen utgör ett överlagring av de båda strålar som gick ut från den första stråldelaren. Mera precist får vi ett interferensmönster ut från interferometern.

b) När trycket i gasbehållaren ändras, ändras brytningsindex för gasen och således även den optiska vägen hos den ena strålen och därigenom ändras även fasskillnaden mellan strålarna. Detta gör att interferensmönstret kommer att förskjutas på liknande sätt som i en Michelsoninterferometer, dvs det börjar att "vandra".

c) Vi börjar med att räkna fram brytningsindex för 1,00 atm klorgas vid 20°C . Enligt ledningen i uppgiften är $n - 1$ proportionellt mot densiteten ρ . Enligt allmänna gaslagen har vi dessutom att

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \Rightarrow n - 1 \propto \rho \propto \frac{p}{T}$$

Vi låter nu trycket p vara konstant och beräknar brytningsindex vid $T = 20^\circ \text{C}$ enligt följande

$$(n_0 - 1)T_0 = (n_{20} - 1)T_{20} \Rightarrow n_{20} = \frac{273,15}{293,15} \cdot (1,000773 - 1) = 1,000720$$

Men vid fix temperatur är trycket proportionellt mot densiteten (enligt allmänna gaslagen ovan), så brytningsindex vid givna experimentella förutsättningar blir:

$$n = 1 + \frac{1,50}{1,00} \cdot (1,000720 - 1) = 1,001080$$

Strålen går genom behållaren en enda gång, varför förändringen i den optiska vägskillnaden vid ändringen av brytningsindex kan tecknas:

$$\Delta L = \Delta n \cdot L = m \cdot \lambda$$

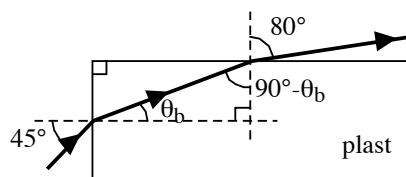
där λ är förändringen uttryckt i antal våglängder. Detta ger oss direkt att:

$$m = \frac{(1,001080 - 1) \cdot 0,050}{632,8 \cdot 10^{-9}} = 85,3$$

dvs. interferensmönstret kommer att förflytta sig 85,3 steg.

72. a) Brytningslagen ger vid de båda ytorna att (se figur för geometrin)

$$\begin{cases} n_0 \sin 45^\circ = n_1 \sin \theta_b \\ n_0 \sin 80^\circ = n_1 \sin (90^\circ - \theta_b) = n_1 \cos \theta_b \end{cases}$$



Division av dessa båda ekvationer med varandra ger direkt att

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin 80^\circ} = \tan \theta_b \Rightarrow \theta_b = \arctan \left(\frac{\sin 45^\circ}{\sin 80^\circ} \right) = 35,68^\circ$$

varur brytningsindex hos plasten n_1 exempelvis kan bestämmas från brytningslagen i den första ytan

$$n_1 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 35,68^\circ} = 1,212$$

b) För ljus som är polariserat vinkelrätt mot infallsplanet gäller enligt Fresnels formler att reflektansen (andelen ljus som reflekteras)

$$R = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_b)}{\sin(\theta_i + \theta_b)} \right)^2$$

Andelen ljus som transmittas genom en yta blir således $T = 1 - R$. Eftersom det sker transmittans i båda ytorna, får vi att andelen ljus som transmittas ut genom andra ytan blir

$$T_2 = T_1 (1 - R_2) = (1 - R_1) (1 - R_2)$$

Numeriskt ger detta

$$T_2 = \left[1 - \frac{\sin^2(45^\circ - 35,68^\circ)}{\sin^2(45^\circ + 35,68^\circ)} \right] \left[1 - \frac{\sin^2(90^\circ - 35,68^\circ - 80^\circ)}{\sin^2(90^\circ - 35,68^\circ + 80^\circ)} \right] = 0,616$$

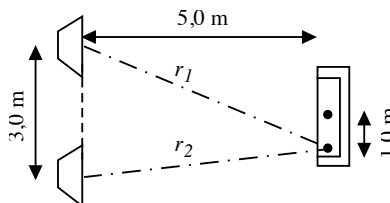
73. a) I mittpunkten är båda vågorna i fas. Det resulterande ljudtrycket är då $p_{res} = 2p$, där p är ljudtrycket från en högtalare. Vi får att:

$$\beta = 10 \log \frac{I_{res}}{I_0} = 10 \log \frac{p_{res}^2}{p_0^2} = 10 \log \frac{4p^2}{p_0^2} = 10 \log 4 + 10 \log \frac{p^2}{p_0^2}$$

Vi har att ljudnivån från en högtalare är

$$\beta_0 = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{p^2}{p_0^2} \Rightarrow \beta = 10 \log 4 + 80,0 \text{ dB} = 86,0 \text{ dB}$$

b) I detta fallet har vi en fasskillnad mellan vågorna som kommer från de båda högtalarna, eftersom avståndet till de två högtalarna är olika.



Denna fasskillnad kan tecknas (anta att ljudfarten är 340 m/s, vilket är rimligt vid inomhustemperaturen 20 °C).

$$\Delta\Phi = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{2\pi f}{v} \cdot (r_1 - r_2)$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = \frac{2\pi \cdot 750}{340} \cdot \left(\sqrt{5,0^2 + 2,5^2} - \sqrt{5,0^2 + 0,5^2} \right) \text{ rad} = 7,834 \text{ rad}$$

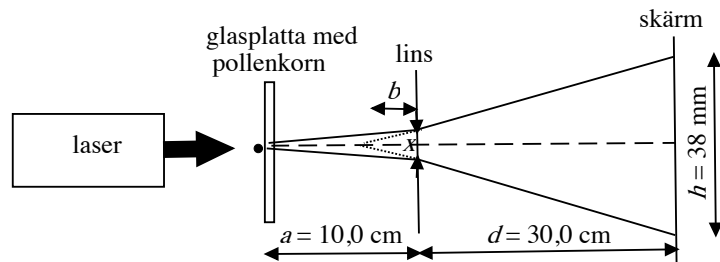
Om vi inte tar hänsyn till att vågorna sprids sfäriskt och därför har något olika amplitud när de når soffan (ungefär samma avstånd från vardera högtalaren), kommer den resulterande tryckamplituden att blir.

$$p_{res}^2 = p^2 + p^2 + 2p^2 \cos \Delta\Phi \Rightarrow p_{res}^2 = 2p^2 \cdot (1 + \cos 7,834) = 2,04 \cdot p^2$$

Insättning av detta i uttrycket för ljudnivån på samma sätt som ovan ger att:

$$\beta = 10 \log \frac{2,04p^2}{p_0^2} \Rightarrow \beta = (10 \log 2,04 + 80,0) \text{ dB} = 83,1 \text{ dB}$$

74. Först måste vi förstå vad som händer här. Eftersom det syns ringar och ljuset enbart sprids via pollenkornet, är det rimligt att anta att vi har att göra med någon typ av diffraktionsfenomen. Enligt Babinets princip kommer pollenkornets diffraktionsmönster bli detsamma som för ett hål med samma diameter som pollenkornet. Avståndet till första minimum för diffraktion genom ett hål ges av



$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1,22\lambda}{\sin \theta}$$

Det gäller således att först finna utgångsvinkeln till första maximum bakom pollenkornet. Med beteckningar enligt figur får vi enligt linsformeln ($s = a$ och $s' = b$) att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{1}{\left(\frac{1}{-1,8} - \frac{1}{10,0} \right)} \text{ cm} = -1,53 \text{ cm}$$

Ur geometrin i figuren ser vi med hjälp av likformiga trianglar att:

$$\frac{h}{x} = \frac{d+b}{b} \Rightarrow x = \frac{h \cdot b}{d+b} \Rightarrow x = \frac{3,0 \cdot 1,53}{30,0 + 1,53} \text{ cm} = 0,184 \text{ cm}$$

Vinkeln till första minimum ges således av:

$$\theta = \arctan \left(\frac{x/2}{a} \right) \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{0,184}{2 \cdot 10,0} \right) = 0,527^\circ$$

vilket betyder att vi får att pollenkornets diameter blir

$$D = \frac{1,22 \cdot 632,8 \cdot 10^{-9}}{\sin 0,527^\circ} \text{ m} = 84 \mu\text{m}$$

75. Vid reflektionen i den vinklade ytan kommer det dels att bildas en reflekterad longitudinell våg (som har samma infallsvinkel som utfallsvinkel) och dels en transversell våg som har en utfallsvinkel som skiljer sig från infallsvinkeln hos den longitudinella vågen (eftersom longitudinella och transversella vågor har olika ljudutbredningsfart). För att kunna räkna på det hela behöver vi även förstå att reflektionen fungerar på

samma sätt som om vågorna hade brutits mot en yta vid snett infall. Således måste brytningslagen gälla och vi har att

$$\frac{\sin \theta_l}{v_l} = \frac{\sin \theta_t}{v_t} \Rightarrow \frac{v_l}{v_t} = \frac{\sin \theta_l}{\sin \theta_t} = 2$$

där v_l är ljudutbredningsfarten för longitudinella vågor, v_t är ljudutbredningsfarten för transversella vågor, $\theta_l = \alpha$ är infallsvinkeln för longitudinella vågor och θ_t är utfallsvinkeln för transversella vågor. Dessutom angavs i uppgiften att $v_l = 2v_t$ (ljudutbredningsfarten för longitudinella vågor var dubbelt så stor som för transversella vågor hos aluminium). I vårt fall kräver vi dessutom att $\theta_l + \theta_t = 90^\circ$. Då får vi att

$$\frac{v_l}{v_t} = 2 = \frac{\sin \theta_l}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan 2 = 63,4^\circ$$