

15_strim_progr_1

Основной способ решения задания № 15 – это программный способ.

В отличие от аналитического решения, программных решений несколько. Если аналитический процесс решения одинаковый, то в программном есть три разных подхода для разных вопросов. А именно, когда требуется найти число, множество или отрезок. Для каждого из этих случаев есть своя программа.

Основной случай программного решения, когда неизвестным является какое-то число.

Для начала разберем примитивную версию программы, чтобы понять логику решения, затем перейдем к той, которая будет использоваться, как основная, т.к. она является и более короткой и более удобной.

Задача (№370)

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Пример примитивного решения через циклы

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=1m50s

Для того, чтобы построить программное решение данной задачи нам нужно перебрать различные значения параметра A . Для каждого из них перебрать достаточно большой диапазон чисел « x ». И проверить, что во всех этих значениях « x » выражение будет истинным, т.е. будет равняться единице.

Необходимо, обратить внимание, что диапазон значений « x » действительно был достаточно велик, т.к. в противном случае есть вероятность, что в

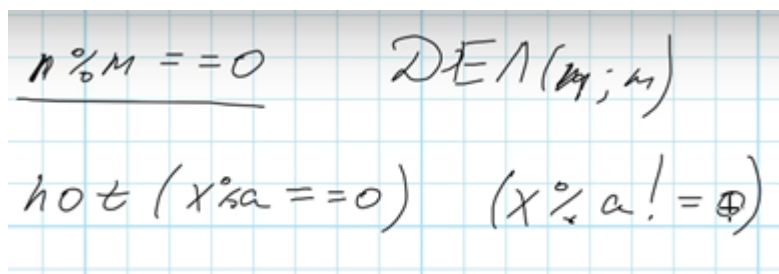
программу не попадет значение, в котором выражение будет ложно. Поэтому, есть такое правило, что числа «x» нужно перебирать хотя бы с десятикратным или, даже, стократным запасом. Т.е., если «a» проверяется до 100, то «x» следует проверять до 1000, или, что лучше до 10000.

Т.к. ДЕЛ(n, m) обозначает утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m» в Python это можно записать как:

$n \% m == 0$

Если в задаче требуется отрицание условия делимости $\neg \text{ДЕЛ}(n, m)$, это может быть записано, как

$n \% m != 0$



```
##Примитивное решение циклом
for a in range(1,101):
    #для каждого значения a проверяем много значений x
    #x проверяем с десятикратным запасом
    k = 0 #счётчик истинных значений x
    for x in range(1,10001):
        f = (x%a!=0) <= ((x%6==0) <= (x%4!=0))
        if f==1:
            k = k + 1
        else:
            break #если где-то ложь, то нет смысла проверять остальное
    #если во всех значениях x было 1, то значит можно считать, что a подходит
    if k==10000:
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
3
4
6
12

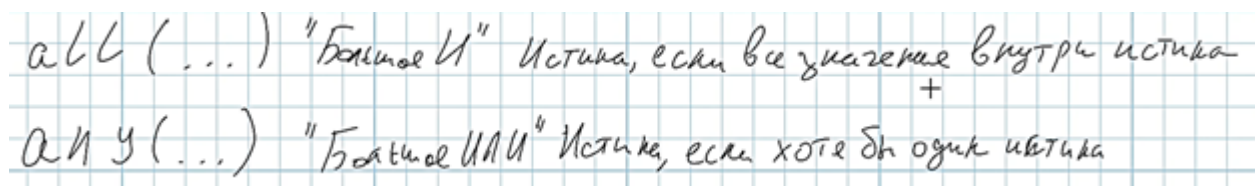
Актуальный алгоритм решения с помощью all

Для более удобной и компактной записи решения этой задачи выполним следующий шаг.

Во-первых, вынесем выражение для нахождения значения исходного логического высказывания в переменную в отдельную функцию, задача которой будет по значению «x» и по значению «a» выяснять значение выражения.

Эта функция будет брать значение «x» и значение «a» и возвращать значение заданного в задаче выражения, true или false. Т.е. нужно передать в функцию два параметра, чтобы вернуть значение исходного выражения.

Далее будем использовать метод, all. Метод all — можно назвать простым языком «большое И». «Большое И» выполняется, если при всех значениях внутри него значение выражения будет истина. Т.е. внутри этого метода есть список значений «true-false», «истина-ложь». Если при всех значениях «истина», «true», то условие выполняется. Если хотя бы в одном случае получено значение «ложь», «false», то условие не выполняется. При этом, если в какой-то момент возникает «false», то метод останавливается, и далее не проверяет остальные значения. Аналогично работает метод any, «большое или». Метод возвращает, истину, если хотя бы для одного «x» значение выражения истина.



all(...) "Большое И" Истина, если все указанные внутри истинны
+
any(...) "Большое ИЛИ" Истина, если хотя бы одно из истинно

Примечание Джобса: такие логические операции называются **многоместными** или **мультиарными**(мультиарными). Например, в электронных таблицах функция И имеет похожее свойство – в ней можно перечислить любое количество условий.

Т. е. этот метод работает, как счетчик с циклом. Он проходит по всем значениям чисел, и для каждого вычисляет значение выражения, если во всех случаях была получена «истина», то условие выполняется. Если хотя бы где-то была ложь, то он остановится и сообщит, что условие не выполняется.

Эта команда будет выглядеть:

```
if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000))
```

Прочитать ее можно следующим образом:

Если во всех значениях «x» возвращается «true» (т.е., если для всех чисел x от 1 до 10000, значение нашего выражения равно единице), то выполняется условие и идет выполнение следующей команды, в нашем случае печатается «a».

Код для решения задачи:

```
##Актуальное решение через all
```

```
def f(x,a):  
    return (x%a!=0) <= ((x%6==0) <= (x%4!=0))  
  
for a in range(1,100):  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

```
1  
2  
3  
4  
6  
12
```

Таким образом, для решения всех последующих задач мы будем записывать в отдельной функции логическое выражение. Перебирать значения «a», и с помощью all проверять, что для какого-то достаточно большого количества чисел «x» наше логическое выражение истинно.

Важно обратить внимание на то, что выбрать для перебора достаточно большой диапазон значений «x».

Задача № 1 (7481)

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 2) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 5)) \vee (x + A \geq 70)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=24m45s

Решение

Обратим внимание, что нужно найти наименьшее «а», для которого функция тождественная истина. Первым шагом, напомним функцию, `def f(x, a)`. Важно не перепутать местами переменные «х» и «а», т.к. в каком порядке записаны переменные, в том порядке они и будут в дальнейшем вызываться функцией. В результате работы программы будет получен довольно большой список чисел. Т.к. нам нужно найти наименьшее значение, это будет число 60.

Код для решения задачи:

```
def f(x,a):  
    # запишем логическое выражение на языке Python  
    return ((x%2==0) <= (x%5!=0)) or (x+a>=70)  
    # перебираем значения а  
for a in range(1,100):  
    # Если для всех 9999 «х», функция равна единице, то можно сказать, что выражение  
    #тождественно истинное.  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

```
60  
62  
...  
98  
99
```

Ответ: 60

Задача №2 (7559)

(ЕГЭ-2024) Обозначим через ДЕЛ(п, m) утверждение «натуральное число п делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа А формула

$$\text{ДЕЛ}(x, 33) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 242))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной х)?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=29m45s

Решение

Код для решения задачи:

```
def f(x,a):  
    return (x%33==0) <= ((x%a!=0) <= (x%242!=0))  
    # Первоначально организуем перебор значений «а» на диапазоне до 100:  
for a in range(1,100):  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,100000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
3
6
11
22
33
66

Кажется, что получен ответ 66, но давайте проверим этот ответ, увеличив диапазон чисел «а» до 10000.

```
def f(x,a):  
    return (x%33==0) <= ((x%a!=0) <= (x%242!=0))  
  
for a in range(1,10000):  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,100000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
3
6
11
22
33
66
121
242
363
726

Обратим внимание, что в результате работы программы чисел стало больше, появились числа 121, 242, 363, 726. Т.е. перебор до 100, являлся недостаточным, он давал какие-то числа, но это были не наибольшие числа. Поэтому следовало увеличить диапазон «а», при этом увеличив значение «х» с десятикратным запасом. 726 это будет ответом на данную задачу.

Ответ: 726

Задача № 3 (7525)

(А. Богданов) Обозначим через ДЕЛ(п, m) утверждение «натуральное число п делится без остатка на натуральное число m». Пусть на числовой прямой дан отрезок $B = [70, 90]$. Для какого наибольшего натурального числа А логическое выражение

$\text{ДЕЛ}(x, A) \vee ((x \in B) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 22))$

тождественно истинно (т.е. принимает значение 1) при любом натуральном значении переменной x ?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=34m10s

Решение

Главный здесь вопрос как записать выражение с отрезком, т.е. указать, что x находится в отрезке от 70 до 90. Самый простой способ записать отрезок – это двойное неравенство. То есть, если число x от 70 до 90, то оно находится внутри отрезка b .

```
def f(x,a):  
    return (x%a==0) or ((70<=x<=90) <= (x%22!=0))  
  
for a in range(1,100):  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
4
8
11
22
44
88

Наибольшее в этом списке 88.

Ответ: 88

Задача № 4 (5670)

(А. Кабанов) Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m »; и пусть на числовой прямой дан отрезок $B = [70; 80]$. Для какого количества различных натуральных значений числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, 12) \wedge (x \in B) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной x ?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=37m25s

Решение

Подход к решению этой задачи не имеет отличия от предыдущих, кроме того, что по условию задачи мы будем проверять, что функция во всех значениях будет равняться нулю, а не единице.

Код для решения задачи:

```
def f(x,a):  
    return (x%12==0) and (70<=x<=80) and (x%a!=0)  
  
for a in range(1,100):  
    if all(f(x,a)==0 for x in range(1,10000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
3
4
6
8
9
12
18
24
36
72

Ответ: 12

Задача №5 (7257)

Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n . Например, $14 \& 5 = 11102 \& 01012 = 01002 = 4$. Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$((x \& 156 \neq 0) \vee (x \& 436 \neq 0)) \rightarrow (x \& A > 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном значении переменной X)?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=44m30s

Решение

Обратим внимание на различия между натуральными и неотрицательными числами. Вспомним, что натуральные числа начинаются с единицы, а неотрицательные числа начинаются с нуля. И это может быть важно для ответа в задании. Поэтому если в задаче требуется указать неотрицательные значения

переменной x , то необходимо, при переборе значений « x », начинать перебор обязательно с нуля.

Код для решения задачи:

```
def f(x,a):  
    return ((x&156!=0) or (x&436!=0)) <= (x&a>0)  
for a in range(1,1000):  
    if all(f(x,a)==1 for x in range(0,10000)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

```
444  
445  
446  
447  
508  
509  
510  
511  
956  
957  
958  
959
```

Наименьшим число в списке будет являться число 444.

Ответ: 444

Задание №6 (3519)

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& A = 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0)) \vee (X \& A \neq 0) \vee (X \& 39 = 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=49m50s

Решение

Код для решения задачи:

```
def f(x,a):  
    return (((x&13!=0) or (x&a==0))<=(x&13!=0)) or (x&a!=0) or (x&39==0)  
  
for a in range(1,100):
```

```
if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000)):  
    print(a)
```

Результат работы программы:

34
35
...
98
99

Ответ: 34

Задание № 7(1047)

Укажите наименьшее целое значение A , при котором выражение

$$(3y + 2x < A) \vee (x > 8) \vee (y > 12)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y .

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=59m20s

Решение

В отличие от всех предыдущих задач, в этой задаче нужно проверить не какое-то одно число « x », а пары чисел « x » и « y ».

Обратим внимание, что для выяснения значения этого выражения, нам нужно создать функцию в которой будут участвовать три параметра « x », « y » и « a ». Поэтому функция будет принимать на вход значение « x », « y » и « a ».

После перебора разных значений « a » нужно проверить не просто « x » или « y », а именно пары x и y . Для этого потребуется двойной цикл. В методе `all` это будет выглядеть следующим образом:

```
if all(f(x,y,a)==1 for x in range(1,100) for y in range(1,100)):
```

Т.к. мы перебираем не отдельные значения « x » и « y », а их пары, этих пар будет почти 10 тысяч ($99 \cdot 99$). Поэтому количество значений для перебора будет достаточным.

Код для решения задачи:

```
def f(x,y,a):  
    return (3*y + 2*x < a) or (x>8) or (y>12)  
for a in range(0,100):  
    # проверка условия для пар «x», «y»  
    if all(f(x,y,a)==1 for x in range(1,100) for y in range(1,100)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

53
54
...
98
99

Ответ: 53

Задание №8 (5410)

(А. Богданов) Для какого наибольшего целого неотрицательного A выражение $(7y + 5x < 1000) \vee (x < y) \vee (A < x)$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=1h7m20s

Решение

Обратим внимание на то, что в этой задаче используется большое число, 1000 большое число. Поэтому диапазона перебора числе «а» до 100 будет недостаточно, увеличим этот диапазон до 300.

Примечание Джобса: например, потому что максимальное значение $5x$ равно 500, $7y$ равно 700. Наблюдение без доказательства, однако можно заметить, что при $x > 125$ первое выражение может быть ложным для любого значения y (что важно для исследования функции).

Код для решения задачи:

```
def f(x, y, a):  
    return (7*y + 5*x < 1000) or (x < y) or (a < x)  
# зададим достаточно большой диапазон чисел «а»  
for a in range(300):  
    # т.к. в задаче указано, что числа «неотрицательные» 0 будет включен в #диапазон перебора  
    if all(f(x, y, a) == 1 for x in range(300) for y in range(300)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

0
1

...

82

83

Ответ: 83

Задание №9(7560)

(ЕГЭ-2024) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A формула

$$(x + y \leq 30) \vee (y \leq x+2) \vee (y \geq A)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1) при любых целых положительных x и y .

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=1h12m45s

Решение

```
def f(x,y,a):  
    return (x+y<=30) or (y<=x+2) or (y>=a)  
for a in range(0,100):  
    if all(f(x,y,a)==1 for x in range(1,100) for y in range(1,100)):  
        print(a)
```

Результат работы программы:

0

1

...

16

17

Ответ: 17

Задание №10 (10717)

(Уровень: базовый)

Обозначим через $\text{ТРЕУГ}(n, m, k)$ утверждение «существует невырожденный треугольник с длинами сторон n , m и k ».

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg((\text{ТРЕУГ}(x, 11, 18) \equiv (\neg(\text{МАКС}(x, 5) > 68))) \wedge \text{ТРЕУГ}(x, A, 5))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1) при любом натуральном значении переменной x ?

Примечание. $\text{МАКС}(a, b) = a$, если $a > b$ и $\text{МАКС}(a, b) = b$, если $a \leq b$.

Ссылка на видео-разбор с таймингом: https://vk.com/video-205546952_456241196?t=1h14m30s

Задача из сборника ФИПИ.

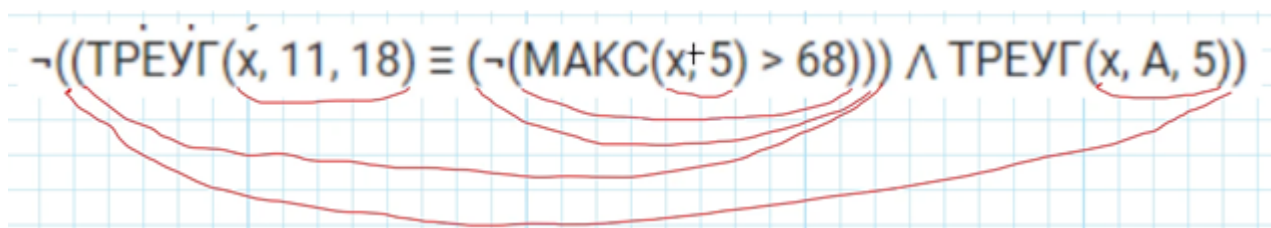
Первым шагом, создадим функцию, для проверки существования треугольника с заданными сторонами n , m , k . Треугольник существует тогда и только тогда, когда сумма любых двух его сторон больше третьей стороны

Другими словами, необходимым и достаточным условием существования треугольника является выполнение следующих неравенств:

$n+m>k$, $n+k>m$, $k+m>n$, ($m>0$, $n>0$, $k>0$), где m , n и k - длины сторон треугольника.

Далее, создадим функцию, принимающую параметры

« x » и « a » и возвращающую значение заданного логического выражения. Важно обратить внимание на корректную расстановку скобок в выражении для соблюдения порядка выполнения логических операций.


$$\neg((\text{ТРЕУГ}(x, 11, 18) \equiv (\neg(\text{МАКС}(x+5) > 68)))) \wedge \text{ТРЕУГ}(x, A, 5))$$

Важно увидеть, что внешние скобки задают отношения отрицания ко всему выражению(!!!)

Далее осуществляем перебор чисел в диапазоне предполагаемого искомого значения для тождественности выражения.

В результате работы программы должен быть выведен список числовых значений, максимальное из которых является ответом на задачу.

```
# функция для проверки существования треугольника со сторонами n, m, k.
def treug(n,m,k):
    return n+m>k and n+k>m and m+k>n
# возвращающую значение заданного логического выражения
def f(x,a):
    return not((treug(x,11,18)==(not(max(x,5)>68))) and treug(x,a,5))
for a in range(1,100):
    if all(f(x,a)==1 for x in range(1,10000)):
        print(a)
```

Результат работы программы:

1
2
...
63

64

Ответ : 64

Telegram: @fast_ege