

Задача 1.4

Рассмотрим следующую задачу для уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, y) &= 0, \quad y \in [0, 1], \\ u(x, 1) &= \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \\ u(1, y) &= 0, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Аналитическим решением данной задачи является функция $u(x, y) = \frac{\sin(\pi y)}{\sin(\pi)} \sin(\pi x)$. Аппроксимируем данную задачу следующей разностной схемой:

$$\begin{aligned} k_x \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + k_y \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} &= 0, \quad i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N-1}, \\ u_{i,0} &= 0, \quad i = \overline{0, N}, \\ u_{0,j} &= 0, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_{i,N} &= \sin(\pi x_i), \quad i = \overline{0, N}, \\ u_{N,j} &= 0, \quad j = \overline{0, N}, \end{aligned}$$

где $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $x_i = \frac{i}{N}$, $y_j = \frac{j}{N}$, $h = \frac{1}{N}$. Получается СЛАУ относительно $(N+1)^2$ неизвестных u_{ij} . Требуется решить данную СЛАУ с помощью итерационного метода Якоби для $N = 100$. Рассмотреть следующие случаи:

1. $k_x = k_y = 1$,
2. $k_x = 1$, $k_y = 10^6$.

Итерации продолжать пока $\max_{ij} |u_{ij}^{(n)} - u(x_i, y_j)| > 10^{-6}$. В качестве начального приближения взять нулевой вектор неизвестных $u_{ij}^{(0)} = 0$. Сравнить результаты по количеству выполненных итераций. Дополнительно построить поверхности $z(x_i, y_j) = u_{ij}$.

Подобрать более эффективный численный метод решения СЛАУ для второй задачи.

Указание. Обзор проводить по методу Якоби, а не по задаче для уравнения в частных производных.