

Введение в Численные Методы

Семестровые проекты

2 курс, 2-3 поток

29 октября 2024 г.

В ходе выполнения семестрового проекта участники смогут применить изученные на лекциях численные методы к решению практических задач. Задачи составлены таким образом, что указанный в задании численный метод не всегда применим или не всегда эффективно работает. Предлагается самостоятельно проанализировать данные в выданных им задачах и выбрать более эффективный численный метод для их решения. **Успешное выполнение задания упрощает сдачу экзамена.**

Темы для семестровых проектов

Для выполнения проекта каждый желающий может выбрать задачу на одну из следующих тем:

1. Методы решения СЛАУ.
2. Приближение функций.
3. Численное интегрирование.
4. Численное решение ОДУ.

Содержание задания

Каждое задание включает в себя:

1. Конкретную задачу (например, решить СЛАУ);
2. Численный метод для решения поставленной задачи (например, метод прогонки);
3. 2 набора входных данных, для которых надо решить задачу (например, 2 различных СЛАУ);

4. Критерий, по которому надо сравнить работу метода на разных входных данных (например, количество операций).

На одном из предложенном наборов входных данных указанный метод будет показывать более плохие (по данному критерию) результаты, чем на другом наборе. Необходимо **самостоятельно выбрать другой численный метод**, с помощью которого задача будет эффективно решаться на «плохом» наборе данных. Дополнительный метод можно выбрать как из курса, так и из других источников.

Выполнение задания предполагает **самостоятельную программную реализацию** используемых численных методов на любом языке программирования (предпочтительнее на $C++$). Использование готовых пакетов и библиотек, а также заимствование кода не допускаются.

Задание сдается в системе Google Classroom в виде отчета в формате Word или PDF (предпочтительнее PDF, сгенерированный с помощью \LaTeX), а также **исходных файлов кода**, написанного для решения всего задания.

Содержание отчета

Отчет, загруженный в Google Classroom, должен содержать:

1. Постановку задачи, обзор численных методов решения этой задачи (как классических, так и по возможности новых) со ссылками на литературу; желательно привести пример практического применения этой задачи (например, где задача приближения таблично заданной функции возникает в физике или IT и т.д.).
2. Подробное описание с формулами и основными свойствами используемых в задании численных методов (как основного, данного в задании, так и дополнительного, выбранного самостоятельно);
3. Анализ применимости данного в задании численного метода к обоим наборам входных данных, сравнение результатов по данному критерию;
4. Анализ применимости самостоятельно выбранного численного метода к обоим наборам входных данных, сравнение результатов по данному критерию на 2 наборах данных и с данным в задании численным методом;
5. Графическое и/или табличное представление результатов;
6. Реализация обоих численных методов в виде полного кода, который должен компилироваться и выдавать приведенные в отчете результаты;
7. Заключение с выводами о достоинствах и недостатках обоих численных методов.

Порядок получения и сдачи проекта

Желающим получить вариант задания необходимо направить письмо с ФИО, номером группы и номером темы на **petr.a.mayorov@gse.cs.msu.ru** (и копию на **pavel.a.mayorov@gse.cs.msu.ru**) .

Проекты принимаются на протяжении всего семестра вплоть до конца зачетной сессии. До **8 декабря** на **petr.a.mayorov@gse.cs.msu.ru** и **pavel.a.mayorov@gse.cs.msu.ru** можно один раз прислать черновой вариант отчета или основные идеи и выбранный численный метод, чтобы мы Вам сказали, по правильному пути решения Вы пошли или нет.

Основной текст отчета будет проверяться не более 2 раз. После первой загрузки отчета в Google Classroom работа проверяется и либо принимается, либо Вам высылаются замечания по отчету и коду, которые надо исправить. Отправленный после этого исправленный отчет считается окончательным и будет проверен до экзамена.

Очные консультации по выполнению проекта доступны каждую среду с 12:30 до 15:00 и в пятницу с 10:30 до 12:30 в аудитории 797.

Дедлайны

1. Желающим выполнить семестровый проект необходимо выбрать тему и написать соответствующее письмо **до 23:59 1 декабря 2024 года**.
2. **До 23:59 8 декабря 2024 года** есть возможность прислать черновой вариант отчета или основные идеи выполнения задания, чтобы получить обратную связь.
3. **До 23:59 22 декабря 2024 года** необходимо загрузить в Google Classroom первый вариант проекта. В течении 1-2 дней Вам придет ответ с замечаниями.
4. **До 23:59 29 декабря 2024 года** необходимо загрузить в Google Classroom второй (окончательный) вариант проекта. Он будет проверен до экзамена.

Бонусы

При успешной сдаче семестрового проекта студент получает следующие бонусы:

1. Освобождение от задач на экзамене;
2. + 1 балл к оценке на экзамене при условии, что экзамен сдан не на «неудовлетворительно»;
3. Подтверждение вашего успешного участия в "Практикуме по курсу Введение в численные методы" для вашего портфолио.

Типы задач

Ниже представлены примеры задач на каждую тему. Формулировка конкретной задачи может отличаться от приведенных примеров.

Задача 1

Решить СЛАУ $A_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ методом Гаусса для двух пар A_i и \mathbf{b}_i (определены вариантом). Провести сравнение решений двух задач на основе следующих критериев:

1. Норма невязки $\|\mathbf{r}_i\|_2 = \|A_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i\|_2$.

Оценить количество операций (умножений и делений) относительно размерности матриц. Подобрать более эффективный численный метод решения СЛАУ для второй задачи.

Задача 2

Построить полином Лагранжа для следующих функций $f_i(x)$ (определены вариантом).

В качестве узлов интерполяции использовать узлы равномерной сетки для количества узлов $n = 3, 5, 9, 17$. Исследовать сходимость интерполяции. Найти максимальные отклонения $\max |P_n(x) - f_i(x)|$ на равномерной сетке из 1001 узла. Построить графики исходных функций и их интерполянтов.

Задача 3

Найдите приближенное значение интеграла методом трапеций, разбив интервал интегрирования на n равных частей, где $n = 16, 32, 64$.

Интеграл: $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ определено вариантом.

Рассмотрите два отрезка интегрирования (определены вариантом).

Сравните результаты с аналитическим значением интеграла.

Подберите более эффективный численный метод вычисления интеграла для второй задачи.

Задача 4

Рассмотрим следующую задачу для уравнения в частных производных:

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1],$$

$$u(x, 1) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(1, y) = g(y), \quad y \in [0, 1].$$

Аналитическое решение $u_{anl}(x, y)$ задано. Аппроксимируем данную задачу следующей разностной схемой:

$$\begin{aligned} k_x \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + k_y \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} &= 0, \quad i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N-1}, \\ u_{i,0} &= 0, \quad i = \overline{0, N}, \\ u_{0,j} &= 0, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_{i,N} &= f(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \\ u_{N,j} &= g(y_j), \quad j = \overline{0, N}, \end{aligned}$$

где $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $x_i = \frac{i}{N}$, $y_j = \frac{j}{N}$, $h = \frac{1}{N}$. Получается СЛАУ относительно $(N+1)^2$ неизвестных $u_{i,j}$. Требуется решить данную СЛАУ с помощью итерационного метода Якоби для $N = 100$. Рассмотреть разные значения k_x и k_y (определены вариантом). Итерации продолжать пока $\max_{ij} |u_{ij}^{(n)} - u_{anl}(x_i, y_j)| > 10^{-6}$. В качестве начального приближения взять нулевой вектор неизвестных $u_{ij}^{(0)} = 0$. Сравнить результаты по количеству выполненных итераций. Дополнительно построить поверхности $z(x_i, y_j) = u_{i,j}$.

Подобрать более эффективный численный метод решения СЛАУ для второй задачи.