Краевая задача для ОДУ второго порядка. Сходимость разностной схемы.

Диф-я задача:
$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = -f(x) & 0<l<x \\ u(0)=u_1,\ u(l)=u_2, & q(x) \geqslant q_0 > 0. \end{cases}$$

Разн схема:
$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i \quad 1 \leq i \leq n-1$$
$$y_0 = u_1,\ y_n = y_2,\ x_i = ih,\ h = \frac{l}{n},$$
$$q_i = q(x_i) \geqslant q_0 > 0,\ f_i = f(x_i)$$

Сх-ть погрешность $z_i = u_i - y_i$, $y_i = u_i - z_i$

$$\underbrace{\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} - q_i u_i + f_i}_{\parallel} - \frac{z_{i+1}-2z_i+z_{i-1}}{h^2} + q_i z_i = 0$$

$-\Phi_i$ — погрешность аппроксимации,
$u_i = u(x_i)$, $\Phi_i = O(h^2)$

$$z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} - q_i z_i h^2 + \Phi_i h^2 = 0$$
$$z_i(2+q_i h^2) = z_{i+1} + z_{i-1} + \Phi_i h^2$$
$$\|z\|_c = \max_i |z_i| = |z_{i_0}|$$
$$|z_{i_0}|(2+q_i h^2) = \|z\|(2+q_i h^2) \leq |z_{i_0+1}| + |z_{i_0-1}| + |\Phi_i| h^2 \leq$$
$$\leq \|z\|_c + \|z\|_c + \|\Phi\| h^2 \quad \Downarrow$$
$$\|z\| q_i \leq \|\Phi\| \Rightarrow \|z\| \leq \frac{1}{q_i}\|\Phi\| < \frac{1}{q_0}\|\Phi\| = O(h^2)$$

т.е. $\|z\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ как h^2.