Задача 1.4

Рассмотрим следующую задачу для уравнения в частных производных:

$$
\begin{aligned}
& k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\
& u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \\
& u(0,y) = 0, \quad y \in [0,1], \\
& u(x,1) = sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \\
& u(1,y) = 0, \quad x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Аналитическим решением данной задачи является функция $u(x,y) = \frac{sh(\pi y/\sqrt{k_y})}{sh(\pi/\sqrt{k_y})} sin(\pi x)$ при $k_x = 1$. Аппроксимируем данную задачу следующей разностной схемой:

$$
\begin{aligned}
& k_x \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + k_y \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0, \quad i = \overline{1,N-1}, j = \overline{1,N-1}, \\
& u_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0,N}, \\
& u_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0,N}, \\
& u_{i,N} = sin(\pi x_i), \quad i = \overline{0,N}, \\
& u_{N,j} = 0, \quad j = \overline{0,N},
\end{aligned}
$$

где $u_{ij} \approx u(x_i,y_j)$, $x_i = \frac{i}{N}$, $y_j = \frac{j}{N}$, $h = \frac{1}{N}$. Получается СЛАУ относительно $(N+1)^2$ неизвестных u_{ij}. Требуется решить данную СЛАУ с помощью итерационного метода Якоби для $N = 100$. Рассмотреть следующие случаи:

1. $k_x = k_y = 1$,
2. $k_x = 1$, $k_y = 10^6$.

Итерации продолжать пока $\max_{ij} |u_{ij}^{(n)} - u(x_i, y_j)| > 10^{-6}$. В качестве начального приближения взять нулевой вектор неизвестных $u_{ij}^{(0)} = 0$. Сравнить результаты по количеству выполненных итераций. Дополнительно построить поверхности $z(x_i,y_j) = u_{ij}$.

Подобрать более эффективный численный метод решения СЛАУ для второй задачи.

Указание. Обзор проводить по методу Якоби, а не по задаче для уравнения в частных производных.