Задание 1. ЯЗЫК ПАСКАЛЬ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С заданной точностью ε вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми, уравнения которых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и $y = f_3(x)$ определяются вариантом задания.

При решении задачи необходимо:

- с некоторой точностью *eps1* вычислить абсциссы точек пересечения кривых, используя предусмотренный вариантом задания метод приближенного решения уравнения $F(x)=0$; отрезки, где программа будет искать точки пересечения и где применим используемый метод, определить вручную;
- представить площадь заданной фигуры как алгебраическую сумму определенных интегралов и вычислить эти интегралы с некоторой точностью *eps2* по квадратурной формуле, предусмотренной вариантом задания.

Величины ε_1 и ε_2 подобрать вручную так, чтобы гарантировалось вычисление площади фигуры с точностью ε.

1.2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Во всех вариантах $\varepsilon = 0.001$.

А. Уравнения кривых

$y = f_i(x)$:

1)	$f_1 = 2^x + 1$	$f_2 = x^5$	$f_3 = (1 - x)/3$
2)	$f_1 = 3\big(0.5/(x + 1) + 1\big)$	$f_2 = 2.5x - 9.5$	$f_3 = 5/x \quad (x > 0)$
3)	$f_1 = \exp(-x) + 3$	$f_2 = 2x - 2$	$f_3 = 1/x$
4)	$f_1 = \exp(x) + 2$	$f_2 = -1/x$	$f_3 = -2(x + 1)/3$
5)	$f_1 = 0.35x^2 - 0.95x + 2.7$	$f_2 = 3^x+1$	$f_3 = 1/(x + 2)$
6)	$f_1 = 0.6x + 3$	$f_2 = (x - 2)^3 - 1$	$f_3 = 3/x$
7)	$f_1 = \ln(x)$	$f_2 = -2x + 14$	$f_3 = 1/(2 - x)+6$
8)	$f_1 = \exp(x) + 2$	$f_2 = -2x + 8$	$f_3 = -5/x$
9)	$f_1 = 3/\big((x - 1)^2 + 1\big)$	$f_2 = \mathrm{sqrt}\,(x + 0.5)$	$f_3 = \exp(-x)$
10)	$f_1 = 1 + 4/\big(x^2 + 1\big)$	$f_2 = x^3$	$f_3 = 2^{-x}$

Б. Методы приближенного решения уравнений:

1) метод деления отрезка пополам;
2) метод хорд (секущих);
3) метод касательных (Ньютона);

4) комбинированный метод (хорд и касательных).

В. Квадратурные формулы:

1) формула прямоугольников;
2) формула трапеций;
3) формула Симпсона (парабол).

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ПРОГРАММЕ

1. В программе предусмотреть печать как площади заданной фигуры, так и абсцисс точек пересечения кривых.
2. Описать в программе процедуру *root* (*f, g, a, b, eps1, x*), вычисляющую с точностью ε_1 корень x уравнения $f(x) = g(x)$ на отрезке $[a, b]$. (Если используется метод касательных или комбинированный метод, то у *root* должны быть еще параметры f_1 и g_1 — производные функций f и g.)
3. Описать в программе функцию *integral* (*f, a, b, eps2*), вычисляющую с точностью ε_2 величину определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
4. Процедуру *root* и функцию *integral* следует предварительно протестировать.

1.4. ЛИТЕРАТУРА

[1]. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т.1 — М.: Наука, 1985.

[2]. Абрамов В.Г., Трифонов Н.П., Трифонова Г.Н. Введение в язык Паскаль. — М.: Наука, 1988.

[3]. Епанешников А.М., Епанешников В.А. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0 — М.: «ДИАЛОГ-МИФИ», 2000.

1.5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для корректного применения предложенных методов приближенного решения уравнения $F(x) = 0$ (где $F(x) = f(x) - g(x)$) необходимо найти отрезок $[a, b]$, на котором уравнение имеет ровно один корень. Достаточное условие для этого таково: на концах отрезка функция $F(x)$ имеет разные знаки и на всем отрезке производная функции не меняет знак. Кроме того, для методов хорд и касательных, а также комбинированного метода обязательно требуется, чтобы на данном отрезке первая и вторая производные функции не меняли свой знак (не обращались в ноль).
2. В *методе деления отрезка пополам* определяется средняя точка c отрезка $[a, b]$ и из двух отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выбирается тот, на концах которого функция $F(x)$ имеет разные знаки. К выбранному отрезку применяется та же процедура. Процесс деления отрезков прекращается, когда длина очередного отрезка станет меньше требуемой точности ε; за корень уравнения можно принять любую точку этого отрезка.
3. В остальных трех методах следует различать два случая:

   случай 1 — первая и вторая производные функции $F(x)$ имеют одинаковый знак ($F'(x)F''(x) > 0$);

   случай 2 — эти производные имеют разные знаки.

В *методе хорд* концы $(a, F(a))$ и $(b, F(b))$ кривой $y = F(x)$ соединяются прямой линией и определяется точка пересечения этой линии с осью абсцисс:

$$c = \frac{aF(b) - bF(a)}{F(b) - F(a)}.$$

Далее выбирается отрезок $[c, b]$ в случае 1 или отрезок $[a, c]$ в случае 2 и к нему применяется та же процедура. Тем самым происходит постепенное приближение к искомому корню слева (в случае 1) или справа (в случае 2).

В *методе касательных* проводится касательная к кривой $y = F(x)$ в точке $(b, F(b))$ в случае 1 или в точке $(a, F(a))$ в случае 2 и определяется точка c пересечения этой касательной с осью абсцисс:

$$c = d - \frac{F(d)}{F'(d)},$$

где $d = b$ в случае 1 и $d = a$ в случае 2. Далее проводится касательная к кривой в точке $(c, F(c))$ и процедура повторяется. Тем самым происходит приближение к искомому корню справа (в случае 1) или слева (в случае 2).

В методах хорд и касательных можно использовать следующий критерий завершения процесса приближения к корню. Если приближение «идет» слева, то на очередном шаге надо сравнить величины $F(c)$ и $F(c + \varepsilon)$: если они одного знака, то процесс продолжается, иначе на отрезке $[c, c + \varepsilon]$ имеется корень и потому процесс завершается. При приближении справа надо проверять знаки $F(c - \varepsilon)$ и $F(c)$.

В *комбинированном методе* одновременно применяется метод хорд и метод касательных, в связи с чем приближение к корню происходит с двух сторон. Критерий окончания — длина очередного отрезка меньше ε.

4. При использовании метода хорд, метода касательных или комбинированного метода процедура *root* должна самостоятельно распознавать, какой из двух случаев, указанных в п. 2, имеет место при текущем обращении к ней. Это можно сделать проверкой следующих двух условий:

   — функция возрастает или убывает;

   — график функции расположен выше хорды, соединяющей концы графика, или ниже.

   Поскольку производные $F'(x)$ и $F''(x)$ на отрезке $[a, b]$ не меняют знак, для проверки первого условия достаточно сравнить $F(a)$ с 0 (при $F(a) < 0$ функция возрастает). Для проверки же второго условия надо сравнить в какой-то внутренней точке отрезка значения функции и хорды; например, если взять среднюю точку $(a + b)/2$ отрезка, то соотношение $F\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{F(a) + F(b)}{2}$ означает, что график функции расположен выше хорды. Если функция возрастает и ее график расположен ниже хорды или если функция убывает и ее график расположен выше хорды, то имеет место случай 1, иначе — случай 2.

5. Квадратурные формулы для приближенного вычисления интеграла I от функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеют следующий вид (n — число разбиений отрезка $[a, b]$):

   Формула прямоугольников:

   $I \cong I_n = h(F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1})$, где $F_i = F(a + (i + 0.5)h)$, $h = (b - a)/n$

Формула трапеций:

$I \cong I_n = h\,(0.5F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + 0.5F_n)$,   где $F_i = F(a + ih)$, $h = (b - a)/n$

Формула Симпсона (n — чётное):

$I \cong I_n = h/3\,(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + \ldots + 4F_{n-3} + 2F_{n-2} + 4F_{n-1} + F_n)$,

где $F_i = F(a + ih)$, $h = (b - a)/n$

6. Для обеспечения требуемой точности ε при приближенном вычислении интеграла I по квадратурной формуле нужно подобрать соответствующее число n разбиений отрезка интегрирования. Известны формулы, выражающие n через ε, но в эти формулы входят производные подынтегральной функции, что неудобно на практике. Поэтому для достижения требуемой точности обычно используется следующий метод: берется некоторое начальное число разбиений n_0 (например, 10 или 20) и последовательно вычисляются значения I_n при n, равном $2n_0$, $4n_0$, $8n_0$ и т.д. Известно *правило Рунге*

$$| I - I_n | \cong p\,| I_n - I_{2n} |$$

(для формул прямоугольников и трапеций $p = 1/3$, для формулы Симпсона $p = 1/15$). Согласно этому правилу, когда на очередном шаге величина $p\,|I_n - I_{2n}|$ окажется меньше ε, в качестве приближенного значения для I можно взять I_n или, что лучше, I_{2n}.

7. При реализации функции *integral* следует учитывать, что в формулах трапеций и Симпсона в сумму I_{2n} входят значения F_i, вычисленные ранее для суммы I_n, поэтому их не следует перевычислять заново.

8. В процедуре *root* и функции *integral* используются параметры-функции (*f*, *g* и др.). В языке Турбо Паскаль такие параметры описываются следующим образом.

   В разделе типов необходимо описать т.н. функциональный тип:

```
type TF = function (x: real): real;
```

   (вместо *TP* и *x* можно использовать любые другие имена), в который автоматически включаются все описанные в программе вещественные функции от одного вещественного аргумента, а затем имя данного типа нужно указать в спецификации формального параметра-функции, например:

```
procedure root (f, g: TF;  a, b, eps1: real; var x: real);
```

   При обращении же к процедуре *root* или функции *integral* указываются, как обычно, имена фактических функций (не стандартных!), например:

```
root(f1, f2, -0.1, 3.5, 0.0001, x12);
```

   Что касается самих фактических функций (f_1, f_2 и др.), то перед их описанием необходимо разместить директиву {$F+} транслятору:

```
{$F+}
function f1 (x: real): real;  begin f1:=ln(x) end;
function f2 (x: real): real;  begin f2:=2*x+14 end;
. . .
```