# ДМ. Па. Свойства графов

Обозначения:

**p** – количество вершин в графе

**q** – количество рёбер в графе

**k** – количество компонент связности в графе

Определения:

Ребро **инцидентно** вершине, если хотя бы один конец ребра совпадает с вершиной. Ребро инцидентно ребру, если они оба инцидентны какой-то вершине. Вершины называются **смежными**, если они соединены ребром (имеют ребро, инцидентное им обеим).

**Валентность (степень) вершины** – количество рёбер, инцидентных вершине.

**Лемма о рукопожатиях:** в любом графе число вершин с нечётными степенями чётно.

**Регулярный граф** – граф, у которого все вершины имеют одинаковую валентность.

**Полный граф** – граф, у которого каждая вершина соединена со всеми остальными.

**Изоморфные графы** – графы, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие. Изоморфные графы – это один и тот же граф, только по-разному нарисованный.

**Дополнение графа** – граф, построенный на тех же вершинах, но ребро между любыми двумя вершинами в нём существует только тогда, когда в исходном графе между этими вершинами не существует ребра.

**Самодополнительный граф** – граф, изоморфный своему дополнению.

**Матрица смежности графа *G* с конечным числом вершин *n*** (пронумерованных числами от 1 до *n*) — это квадратная матрица *A* размера *n*, в которой значение элемента $a_{ij}$ равно числу рёбер из *i*-й вершины графа в *j*-ю вершину.

**Матрицей инцидентности** неориентированного графа называется матрица $I(|V|\times|E|)$I(|V|×|E|), для которой $I_{i,j}=1$Ii,j=1, если вершина $v_i$vi инцидентна ребру $e_j$ej, в противном случае $I_{i,j}=0$Ii,j=0.

## А

- **Ациклический граф** — граф без *циклов*.

## Б

- **Блок** — граф без *шарниров*.

## В

- **Валентность вершины** — см. *степень вершины*.
- **Вершина**, **узел** — базовое понятие: точка, где могут сходиться/выходить *рёбра* и/или *дуги*. Множество вершин графа G обозначается V(G).
- **Вес ребра** — значение, поставленное в соответствие данному *ребру взвешенного графа*. Обычно вес — вещественное число, в таком случае его можно интерпретировать как «длину» ребра.
- **Взвешенный граф** — граф, каждому *ребру* которого поставлено в соответствие некое значение (*вес ребра*).
- **Вполне несвязный граф** (**пустой граф**, **нуль-граф**) — *регулярный граф* степени 0, то есть граф без *рёбер*.

- **Высота дерева** — наибольшая длина пути от *корня* к *листу*.

# Г

- **Гамильтонов граф** — граф, в котором есть *гамильтонов цикл*.
- **Гамильтонов путь** — *простой путь* в графе, содержащий все *вершины* графа ровно по одному разу.
- **Гамильтонов цикл** — *простой цикл* в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.
- **Гомеоморфные графы** — графы, получаемые из одного графа с помощью последовательности подразбиений рёбер.
- **Грань** — область, ограниченная рёбрами в *плоском графе* и не содержащая внутри себя вершин и рёбер графа. Внешняя часть плоскости тоже образует грань.
- **Граф** — базовое понятие. Включает множество *вершин* и множество *рёбер*, являющееся подмножеством декартова квадрата множества вершин (то есть каждое ребро соединяет ровно две вершины).
- **Граф рода** *g* — граф, который можно изобразить без пересечений на поверхности рода *g* и нельзя изобразить без пересечений ни на одной поверхности рода *g*-1. В частности, планарные графы имеют род 0.

# Д

- **Двойственный граф**. Граф *A* называется двойственным к планарному графу *B*, если вершины графа *A* соответствуют *граням* графа *B*, и две вершины графа *A* соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие грани графа *B*имеют хотя бы одно общее ребро.
- **Двусвязный граф** — *связный граф*, в котором нет *шарниров*.
- **Дерево** — *связный граф*, не содержащий *циклов*.

- **Диаметр графа** — это максимум расстояния между вершинами для всех пар вершин. Расстояние между вершинами — наименьшее число рёбер *пути*, соединяющего две вершины.

- **Длина** *маршрута* — количество рёбер в маршруте (с повторениями). Если маршрут , то

  длина *M* равна *k* (обозначается ).
- **Длина** *пути* — число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы). Так для пути $v_1$, $v_2$, …, $v_n$ длина равна n-1.
- **Дуга** — это ориентированное *ребро*.
- **Дополнение графа** — граф над тем же множеством вершин, что и исходный, но вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда в исходном графе ребра нет.

# И

- **Изолированная вершина** — вершина, *степень* которой равна 0 (то есть нет ребер, *инцидентных* ей).
- **Изоморфизм**. Два графа называются **изоморфными**, если существует перестановка вершин, при которой они совпадают. Иначе говоря, два графа называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между их вершинами и рёбрами, которое сохраняет *смежность* и *инцидентность* (графы отличаются только названиями своих вершин).
- **Инвариант графа** — числовая характеристика графа или их упорядоченный вектор, характеризующая структуру графа инвариантно относительно перенумерации вершин.

# К

- **Клетка** — *регулярный граф* наименьшего *обхвата* для заданной степени вершин.
- **Клика** — подмножество вершин графа, полностью соединённых друг с другом, то есть подграф, являющийся *полным графом*.
  - **Кликовое число** (англ. *clique number*) — число (G) вершин в наибольшей клике. *Другие названия — густота, плотность.*
  - **Максимальная клика** — клика с максимально возможным числом вершин среди клик графа.
- **Колесо** (обозначается $W_n$) — это граф с *n* вершинами (n ≥ 4), образованный соединением единственной вершины со всеми вершинами (*n*-1)-цикла.

- **Компонента связности графа** — некоторое подмножество *вершин графа*, такое, что для любых двух вершин из этого множества существует *путь* из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.
- **Корень дерева** — выбранная *вершина дерева*; в *орграфе* — вершина с нулевой степенью захода.
- **Кратные рёбра** — несколько *рёбер*, *инцидентных* одной и той же паре вершин. Встречаются в *мультиграфах*.
- **Кубический граф** — регулярный граф степени 3, то есть граф, в котором каждой вершине инцидентно ровно три ребра.
- **k-дольный граф** — граф G, у которого *хроматическое число* c(G)=k
- **k-связный граф** — *связный граф*, в котором не существует набора из или менее *вершин*, такого, что удаление всех вершин и инцидентных им *рёбер* нарушает связность графа. В частности, *связный граф* является 1-связным, а *двусвязный* — 2-связным.

# Л

- **Лес** — неориентированный граф без циклов. *Компонентами связности* леса являются *деревья*.
- **Лист дерева** — *вершина дерева* с единственным *ребром* или входящей *дугой*.
- **Локальная степень вершины** — число рёбер, ей инцидентных. Петля дает вклад, равный «2», в степень вершины.

# М

- **Максимальное паросочетание** в графе. Паросочетание называется максимальным, если любое другое паросочетание содержит меньшее число ребер.
- **Маршрут** в графе — это чередующаяся последовательность вершин и рёбер , в которой любые два соседних элемента *инцидентны*. Если , то маршрут **замкнут**, иначе **открыт**.
- **Матрица достижимости** орграфа — это матрица, содержащая информацию о существовании путей между вершинами в орграфе.
- **Матрица инцидентности** графа — это матрица, значения элементов которой характеризуется инцидентностью соответствующих вершин графа (по вертикали) и его рёбер (по горизонтали). Для неориентированного графа элемент принимает значение **1**, если соответствующие ему вершина и ребро инцидентны. Для *ориентированного* графа элемент принимает значение **1**, если инцидентная вершина является началом ребра, значение **-1**, если инцидентная вершина является концом ребра; в остальных случаях (в том числе и для *петель*) значению элемента присваивается **0**.
- **Матрица смежности** графа — это матрица, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа. При этом значению элемента матрицы присваивается количество рёбер, которые соединяют соответствующие вершины (то есть которые *инцидентны* обоим вершинам). *Петля* считается сразу двумя соединениями для вершины, то есть к значению элемента матрицы в таком случае следует прибавлять **2**.
- **Множество смежности** вершины *v* — множество вершин, смежных с вершиной *v*. Обозначается .
- **Мост** — *ребро*, удаление которого увеличивает количество *компонент связности* в графе.
- **Мультиграф** — граф, в котором может быть пара вершин, которая соединена более чем одним ребром (ненаправленным), либо более чем двумя дугами противоположных направлений.

# Н

- **Направленный граф** — *ориентированный граф*, в котором две вершины соединяются не более чем одной дугой.
- **Независимое множество вершин** (известное также как **внутренне устойчивое множество**) — есть множество вершин графа G, такое, что любые две вершины в нём несмежны (никакая пара вершин не соединена ребром).
  - Независимое множество называется **максимальным**, когда нет другого независимого множества, в которое оно бы входило. Дополнение наибольшего независимого множества называется **минимальным вершинным покрытием** графа.

- Если Q является семейством всех независимых множеств графа G, то число a(G) = max |S| (где S принадлежит Q) называется **числом независимости графа** G, а множество S*, на котором этот максимум достигается, называется **наибольшим независимым множеством**.
- **Независимые вершины** — попарно несмежные вершины графа.[1]
- **Неразделимый граф** — связный, непустой, не имеющий точек сочленения граф.[2].
- **Нормированный граф** — *ориентированный граф* без *циклов*.
- **Нуль-граф** (**вполне несвязный граф**, **пустой граф**) — *регулярный граф* степени 0, то есть граф, не содержащий *рёбер*.

# О

- **Обхват** — длина наименьшего *цикла* в графе.
- **Объединение графов** (помеченных графов и ) — граф , множеством вершин которого является , а множеством рёбер — .
- **Орграф**, **ориентированный граф** G = (V,E) есть пара множеств, где V — множество вершин (узлов), E — множество дуг (ориентированных рёбер). Дуга — это упорядоченная пара вершин (v, w), где вершину v называют началом, а w — концом дуги. Можно сказать, что дуга v → w ведёт от вершины v к вершине w, при этом вершина w смежная с вершиной v.
- **Остовное дерево** (**остов**) (неориентированного) связного графа — всякий *частичный граф* , являющийся *деревом*.
- **Остовный подграф** — подграф, содержащий все вершины.

# П

- **Паросочетание** — это набор попарно несмежных ребер.
- **Петля** — ребро, начало и конец которого находятся в одной и той же вершине.
- **Пересечение графов** (помеченных графов и ) — граф , множеством вершин которого является , а множеством рёбер — .
- **Перечисление графов** — подсчет числа неизоморфных графов в заданном классе (с заданными характеристиками).
- **Периферийная вершина** — вершина, эксцентриситет которой равен диаметру графа.
- **Планарный граф** — граф, который может быть изображён (*уложен*) на плоскости без пересечения рёбер. *Изоморфен* плоскому графу, то есть является графом с пересечениями, но допускающий его плоскую укладку, поэтому может отличаться от *плоского графа* изображением на плоскости. Таким образом, может быть разница между плоским графом и планарным графом при изображении на плоскости.
- **Плоский граф** — *геометрический граф*, в котором никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины (не пересекаются). Является *уложенным* графом на плоскости.
- **Подграф** исходного графа — граф, содержащий некое подмножество вершин данного графа и некое подмножество *инцидентных* им рёбер. (ср. *Суграф*.) По отношению к подграфу исходный граф называется *суперграфом*
- **Полный граф** — граф, в котором для каждой пары вершин , существует ребро, инцидентное и инцидентное (каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной).
- **Полным двудольным** называется *двудольный граф*, в котором каждая вершина одного подмножества соединена ребром с каждой вершиной другого подмножества
- **Помеченный граф** — граф, вершинам или дугам которого присвоены какие-либо метки, например, натуральные числа или символы какого-нибудь алфавита.
- **Порождённый подграф** — подграф, порождённый множеством рёбер исходного графа. Содержит не обязательно все вершины графа, но эти вершины соединены такими же ребрами, как в графе.
- **Порядок графа** — количество вершин графа.[3]
- **Правильная раскраска графа** — раскраска, при которой каждый цветной класс является независимым множеством. Иначе говоря, в правильной раскраске любые две смежные вершины должны иметь разные цвета.

- **Произведение графов** — для данных графов и произведением называется граф , вершины которого — декартово произведение множеств вершин исходных графов.
- **Простая цепь** — *маршрут*, в котором все вершины различны.
- **Простой граф** — *граф*, в котором нет *кратных рёбер* и *петель*.
- **Простой путь** — *путь*, все рёбра которого попарно различны[4]. Другими словами, простой путь не проходит дважды через одно ребро.
  - **Простой цикл** — *цикл*, не проходящий дважды через одну вершину.
- **Пустой граф** (**вполне несвязный граф**, **нуль-граф**) — *регулярный граф* степени 0, то есть граф, не содержащий *рёбер*.
- **Путь** — последовательность *рёбер* (в неориентированном графе) и/или дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги (ребра) является началом другой дуги (ребра). Или последовательность вершин и дуг (рёбер), в которой каждый элемент инцидентен предыдущему и последующему[4]. Может рассматриваться как частный случай *маршрута*.
- **Путь в орграфе** — это последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для которой существуют дуги $v_1 \to v_2$, $v_2 \to v_3$, …, $v_{n-1} \to v_n$. Говорят, что этот путь начинается в вершине $v_1$, проходит через вершины $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$, и заканчивается в вершине $v_n$.

## Р

- **Радиус графа** — минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа; вершина, на которой достигается этот минимум, называется центральной вершиной.
- **Разбиение графа** — представление исходного графа в виде множества подмножеств вершин по определенным правилам.
- **Разделяющая вершина** — то же, что и *шарнир* и *точка сочленения*.
- **Развёртка графа** — функция, заданная на вершинах ориентированного графа.
- **Размеченный граф** — граф, для которого задано множество меток S, функция разметки вершин $f : A \to S$ и функция разметки дуг $g : R \to S$. Графически эти функции представляются надписыванием меток на вершинах и дугах. Множество меток может разделяться на два непересекающихся подмножества меток вершин и меток дуг.
- **Разрез** — множество *рёбер*, удаление которого делает граф несвязным.
- **Раскраска графа** — разбиение вершин на множества (называемые цветами). Если при этом нет двух смежных вершин, принадлежащих одному и тому же множеству (то есть две смежные вершины всегда разного цвета), то такая раскраска называется правильной.
- **Расстояние между вершинами** — длина кратчайшей цепи (в орграфе пути), соединяющей заданные вершины. Если такой цепи (пути) не существует, расстояние полагается равным бесконечности.
- **Ребро** — базовое понятие. Ребро соединяет две *вершины* графа.
- **Регулярный граф** — граф, *степени* всех вершин которого равны. Степень регулярности является инвариантом графа и обозначается . Для нерегулярных графов не определено. Регулярные графы представляют особую сложность для многих алгоритмов.
  - **Регулярный граф степени 0** (**вполне несвязный граф**, **пустой граф**, **нуль-граф**) — граф без *рёбер*.

## С

- **Самодвойственный граф** — граф, *изоморфный* своему *двойственному графу*.
- **Связность**. Две вершины в графе **связаны**, если существует соединяющая их (простая) *цепь*.
- **Связный граф** — граф, в котором все вершины связаны.
- **Сечение графа** — множество рёбер, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть тривиальным графом.
- **Сильная связность**. Две вершины в *ориентированном графе* **сильно связаны**, если существует путь из первой во вторую и из второй в первую.
  - **Сильно связный орграф** — *орграф*, в котором все вершины сильно связаны.
- **Смежность** — понятие, используемое в отношении только двух *рёбер* либо только двух *вершин*: Два ребра, *инцидентные* одной вершине, называются **смежными**; две вершины, *инцидентные* одному ребру, также называются **смежными**. (ср. *Инцидентность*.)
- **Смешанный граф** — граф, содержащий как ориентированные, так и неориентированные *рёбра*.
- **Совершенное паросочетание** — паросочетание, содержащее все вершины графа.

- **Соединением двух графов** и , не имеющих общих вершин, называется граф .[6]

Из определения видно, что соединение графов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности

- **Степень вершины** — количество рёбер графа *G*, *инцидентных* вершине *x*. Обозначается . *Минимальная* степень вершины графа *G* обозначается . а *максимальная* — .
- **Стягивание** ребра графа — замена концов ребра одной вершиной, соседями новой вершины становятся соседи этих концов. Граф **стягиваем** к , если второй можно получить из первого последовательностью стягиваний рёбер.

# Т

- **Точка сочленения** — то же, что и *шарнир* и *разделяющая вершина*.
- **Триангуляция поверхности** — *укладка* графа на поверхность, разбивающая её на треугольные области; частный случай топологической триангуляции.
- **Тривиальный граф** — граф, состоящий из одной *вершины*.

# У

- **Узел** — то же, что и *Вершина*.
- **Укладка**: граф укладывается на некоторой поверхности, если его можно нарисовать на этой поверхности так, чтобы *рёбра* графа при этом не пересекались. (См. *Планарный граф*, *Плоский граф*.)
- **Упорядоченный граф** — граф, в котором рёбра, выходящие из каждой вершины, однозначно пронумерованы, начиная с 1. Рёбра считаются упорядоченными в порядке возрастания номеров. При графическом представлении часто рёбра считаются упорядоченными в порядке некоторого стандартного обхода (например, против часовой стрелки).

# Х

- **Хроматическое число** графа — минимальное количество цветов, требуемое для раскраски вершин графа, при которой любые вершины, соединенные ребром, раскрашены в разные цвета.
- **Характеристический многочлен** графа— это характеристический многочлен его матрицы смежности.

# Ц

- **Центр графа** — множество вершин , для которых справедливо равенство: , где — это эксцентриситет вершины, а — радиус графа.
- **Цепь** в графе — *маршрут*, все рёбра которого различны. Если все *вершины* (а тем самым и рёбра) различны, то такая цепь называется **простой** (**элементарной**). В цепи вершины и называются **концами** цепи. Цепь с концами *u* и *v* **соединяет** вершины *u* и *v*. Цепь, соединяющая вершины *u* и *v*, обозначается . Для *орграфов* цепь называется орцепью.

  В некоторых источниках **простая цепь** — цепь, *рёбра* которой различны, что является более слабым условием.

- **Цикл** — замкнутая *цепь*. Для *орграфов* цикл называется *контуром*.
  - **Цикл** (**простой цикл**) в *орграфе* — это *простой путь длины* не менее 1, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
  - **Цикл Гамильтона** — то же, что и *Гамильтонов цикл*.

- **Цикломатическое число графа** — минимальное число рёбер, которые надо удалить, чтобы граф стал ациклическим. Для связного графа существует соотношение: где — цикломатическое число, — число *компонент связности* графа, — число *рёбер*, а — число *вершин*.

# Э

- **Эйлеров граф** — это граф, в котором существует *цикл*, содержащий все рёбра графа по одному разу (вершины могут повторяться).
- **Эйлерова цепь** (или **эйлеров цикл**) — это *цепь* (*цикл*), которая содержит все рёбра графа (вершины могут повторяться).
- **Эксцентриситет** вершины — максимальное расстояние из всех минимальных расстояний от других вершин до данной вершины.
- **Элементарный путь** — *путь*, вершины которого, за исключением, быть может, первой и последней, различны. Другими словами, простой путь не проходит дважды через одну вершину, но может начаться и закончиться в одной и той же вершине, в таком случае он называется *циклом* (элементарным циклом).
- **Элементарным стягиванием** называется такая процедура: берем *ребро* (вместе с инцидентными ему *вершинами*, например, u и v) и «стягиваем» его, то есть удаляем ребро и отождествляем вершины u и v. Полученная при этом вершина инцидентна тем ребрам (отличным от), которым первоначально были инцидентны u или v.