

1 Описание задачи

Постановка задачи. Рассматриваются гармонические колебания изотропного слоя толщины h , занимающего в системе координат (x, y, z) полубесконечную область $D : \{-\infty < x, y < \infty, -h \leq z \leq 0\}$. Источником колебаний служит тонкий вертикально поляризованный пьезоактуатор, контактирующий с поверхностью $z = 0$ по области Ω с центром в начале координат. С использованием принципа суперпозиции и обратного преобразования Фурье \mathcal{F}_t^{-1} нестационарные перемещения слоя $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ могут быть выражены через гармонические $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ (частотный спектр), причём комплексная амплитуда перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \{u_x, u_y, u_z\}$ удовлетворяет уравнению Ляме:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где \mathcal{L} — оператор Ляме:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu)\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u},$$

λ, μ — константы Ляме.

Внешние поверхности волновода $z = 0$ и $z = -h$ предполагаются свободными от напряжений $\tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$ за исключением области Ω , где действие актуатора моделируется нагрузкой \mathbf{q} . С использованием полуаналитического интегрального подхода получаем, что поле \mathbf{u} , возбуждаемое пьезоактуатором в волноводе без препятствий (поле источника), при фиксированной частоте ω представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} k(\mathbf{x} - \zeta)\mathbf{q}(\zeta)d\zeta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z)Q(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2)$$

где $K(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ — Фурье-символы матрицы Грина $k(\mathbf{x})$ для слоистой упругой среды с заданными на поверхности $z = 0$ напряжениями и нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ соответственно.

Матрица K представима в следующем виде:

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \begin{pmatrix} -i(M\alpha_1^2 + N\alpha_2^2)/\alpha^2 & -i(M - N)\alpha_1\alpha_2/\alpha^2 & -iP\alpha_1 \\ -i(M - N)\alpha_1\alpha_2/\alpha^2 & -i(M\alpha_2^2 + N\alpha_1^2)/\alpha^2 & -iP\alpha_2 \\ S\alpha_1/\alpha^2 & S\alpha_2/\alpha^2 & R \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, P, R, M, S, N — некоторые комплексные функции, зависящие от α и z . Алгоритм их построения приводится в работах [1, 2]. Конкретно для слоя конечной толщины получаем: $P = v_1 \cdot e_1$, $R = v_1 \cdot e_2$, $M = v_2 \cdot e_1$, $S = v_2 \cdot e_2$ и $N = \frac{i \operatorname{ch}(\sigma_2(z+h))}{\mu\sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h)}$,

$$e_1 = (\exp(\sigma_1 h), \exp(-\sigma_1(z+h)), \sigma_2 \exp(\sigma_2 z), -\sigma_2 \exp(-\sigma_2(z+h))),$$

$$e_2 = (\sigma_1 \exp(\sigma_1 h), -\sigma_1 \exp(-\sigma_1(z+h)), \alpha^2 \exp(\sigma_2 z), \alpha^2 \exp(-\sigma_2(z+h))),$$

$$\sigma_i = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_i^2}, \kappa_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{2\mu + \lambda}, \kappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

ρ — плотность материала, v_1, v_2 — первые два столбца матрицы A^{-1} , где

$$A = \begin{pmatrix} a & a \exp(-\sigma_1 h) & c & -c \exp(-\sigma_2 h) \\ -b & b \exp(-\sigma_1 h) & d & d \exp(-\sigma_2 h) \\ a \exp(-\sigma_1 h) & a & c \exp(-\sigma_2 h) & -c \\ -b \exp(-\sigma_1 h) & b & d \exp(-\sigma_2 h) & d \end{pmatrix},$$

в которой $a = 2\mu(\alpha^2 - \frac{1}{2}\kappa_2^2)$, $b = 2\mu\sigma_1 i$, $c = 2\mu\sigma_2 \alpha^2$, $d = -2\mu i \cdot a$.

Переход к полярным координатам. Поскольку указанные функции зависят только от переменной α (а не отдельно от α_1, α_2), интеграл (2) можно свести к однократному. Для этого осуществляется переход в полярную систему координат ([1]), что позволяет после некоторых преобразований представить равенство (2) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2, z) Q(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} (K * J)(\alpha, x, y, z) Q(\alpha) \alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} (K * J * \alpha)(\alpha, x, y, z) Q(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$(K * J * \alpha)(\alpha, x, y, z) = \begin{pmatrix} i \left(M \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\alpha} & i(M - N) \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y} \frac{1}{\alpha} & P \frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x} \alpha \\ i(M - N) \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y} \frac{1}{\alpha} & i \left(M \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2} + N \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\alpha} & P \frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y} \alpha \\ iS \frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x} \frac{1}{\alpha} & iS \frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y} \frac{1}{\alpha} & R J_0(\alpha r) \alpha \end{pmatrix} \quad (5)$$

и производные функций Бесселя с учётом соотношения

$$J'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \quad (6)$$

получаются:

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x} = -J_1(\alpha r) \frac{\alpha x}{r}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y} = -J_1(\alpha r) \frac{\alpha y}{r}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2} = -\frac{\alpha}{r^2} \left(\alpha J_0(\alpha r) x^2 - \frac{1}{r} J_1(\alpha r) (x^2 - y^2) \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{r^2} \left(\alpha J_0(\alpha r) y^2 - \frac{1}{r} J_1(\alpha r) (y^2 - x^2) \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y} = -\frac{\alpha xy}{r^2} \left(\alpha J_0(\alpha r) - 2 \frac{J_1(\alpha r)}{r} \right). \quad (11)$$

Контур Γ^+ в уравнении (4) представляет собой положительную действительную полуось с отклонением в соответствии с принципом предельного поглощения ([4]) таким образом, чтобы обходить полюса функции $K * J * \alpha$ (уравнение 5) снизу.

Представление \mathbf{u} через вычеты. Наряду с прямым вычислением интеграла (4) в дальней от источника зоне (т.е. при $r \gg \text{diam } \Omega$) использовались соответствующие асимптотические представления ([1]), полученные с применением теории вычетов. В результате

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \frac{i}{2} \sum_{\zeta} \bar{K}(\zeta) Q(\zeta) \approx \\ &\frac{i}{2} \sum_{\zeta} \frac{\varepsilon}{2} ((K * J * \alpha)(\zeta + \varepsilon, x, y, z) - (K * J * \alpha)(\zeta - \varepsilon, x, y, z)) Q(\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

где ζ — полюса функции $K * J * \alpha$, ε — некоторая погрешность, большая погрешности поиска полюсов, $\bar{K}(\zeta_i)$ — вычет функции $K * J * \alpha$ в полюсе ζ_i .

Вид функции \mathbf{q} . Поскольку в области низких частот нагрузка \mathbf{q} концентрируется в основном на границе пьезоэлемента, допустима аппроксимация \mathbf{q} по нормальным модам, центрированным на точечных источниках \mathbf{x}_j , в следующем виде ([5]):

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{N_q} p_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \begin{pmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N_q} \mathbf{q}_j \quad (13)$$

где N_q — число точечных источников, \mathbf{x}_j — координата j -го источника (располагается на границе пьезоэлемента), p_j — весовой коэффициент, φ_j — угол между осью X и нормалью к \mathbf{x}_j от центра пьезоэлемента, δ — дельта-функция, определяемая соотношением:

$$2\pi \int_0^\infty f(r) \delta(r - a) r dr = f(a).$$

В таком случае для функции \mathbf{u} из уравнения (2) верно:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{N_q} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_q} k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{q}_j, \quad (14)$$

где $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ — такая же функция из (4) или (12) с той разницей, что $r = r_j = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|$.

2 Сравнение вычетов и интегралов

При численной реализации интегралы типа (4) считались по квадратурам Гаусса-Кронрода, кривая Γ^+ совпадала с лучом $(0, \infty)$ везде, кроме отрезка $[\frac{1}{2} \min\{\zeta_i\}, \frac{3}{2} \max\{\zeta_i\}]$, где $\{\zeta_i\}$ — множество положительный вещественных полюсов подынтегральной функции, искавших на достаточно большом отрезке в качестве корней уравнения $\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha, \omega) = 0$, в котором Δ — общий знаменатель функций P, R, M, S, N . На самом отрезке $[\frac{1}{2} \min\{\zeta_i\}, \frac{3}{2} \max\{\zeta_i\}]$ контур Γ^+ деформировался в нижнюю комплексную полуплоскость. При подсчёте искомой функции по формуле (12) сумма бралась по всем положительным вещественным полюсам Δ . Расчёты проводились для поверхности пластины ($z = 0$).

Интерес представляли функции $u_z = u_z(x, y, z)$, $u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$, где φ — угол между осью X и нормалью к \mathbf{x} от центра пьезоэлемента. На рисунках показано, как функции u_z, u_r , посчитанные по вычетам, аппроксимируют те же функции, посчитанные через интегралы.

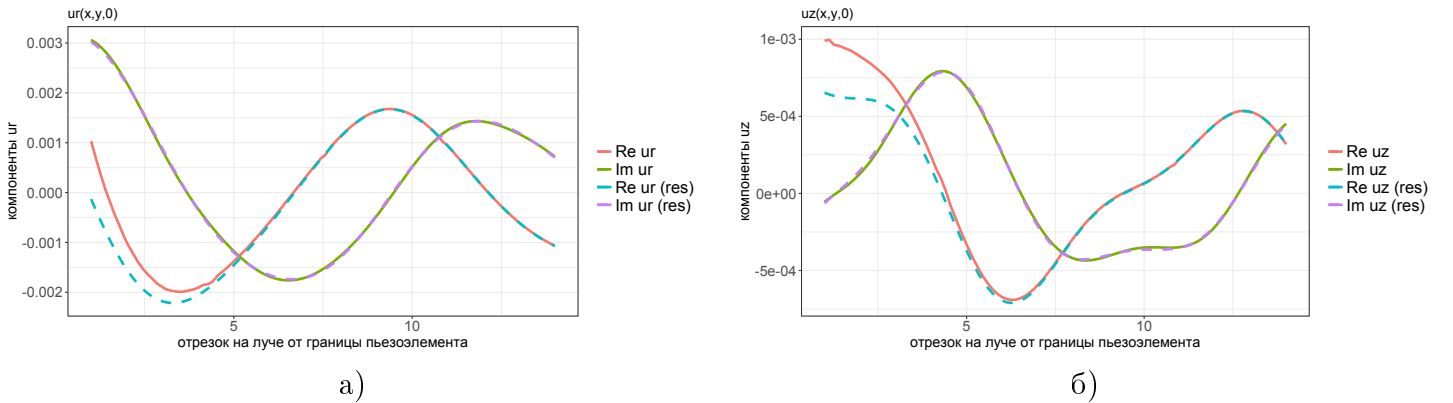


Рис. 1: Действительная и мнимая части функций u_z, u_r , посчитанных через интегралы и по вычетам, при удалении от пьезоэлемента по нормали. Центр пьезоэлемента — $(1; 1)$, радиус $r = 3$, угол наклона $\varphi = \frac{\pi}{6}$, частота $\omega = 3$, число источников $N_q = 80$.

3 Сравнение двух моделей точечных источников

Искомое возмущение аппроксимируется моделью касательных точечных сил. Ввиду особенностей пьезоактуатора (Рис. 2) имеется два варианта расстановки точечных источников: по внешней окружности и по внутреннему полумесяцу (Рис. 3). Технически вся разница заключается в координатах точек приложения нормалей, в направлении некоторых нормалей и в количестве точечных источников, необходимых для достижения требуемой точности аппроксимации, однако вариант с загнутым электродом лучше повторяет поведение искомой функции на "средних" дистанциях от источника (Рис. 4)



Рис. 2: Фотография пьезоактуатора

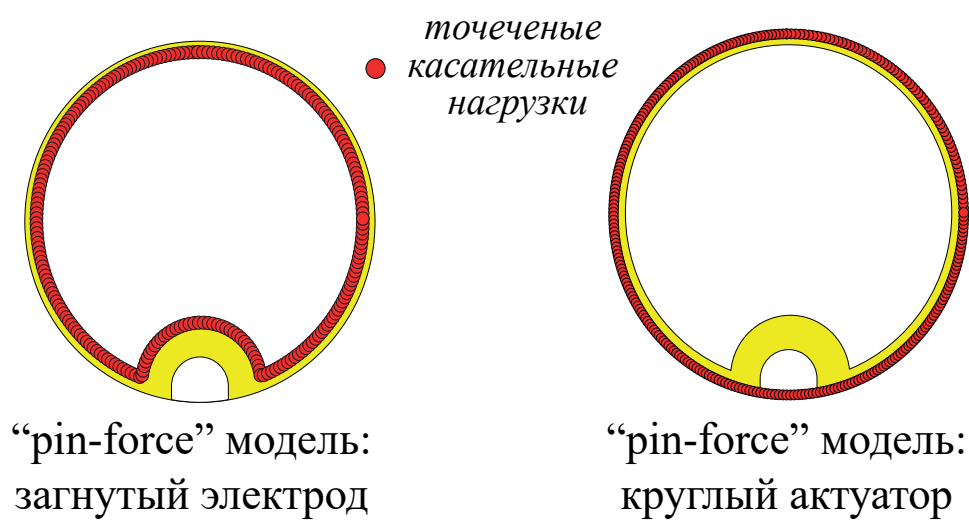


Рис. 3: Варианты расстановки точечных источников

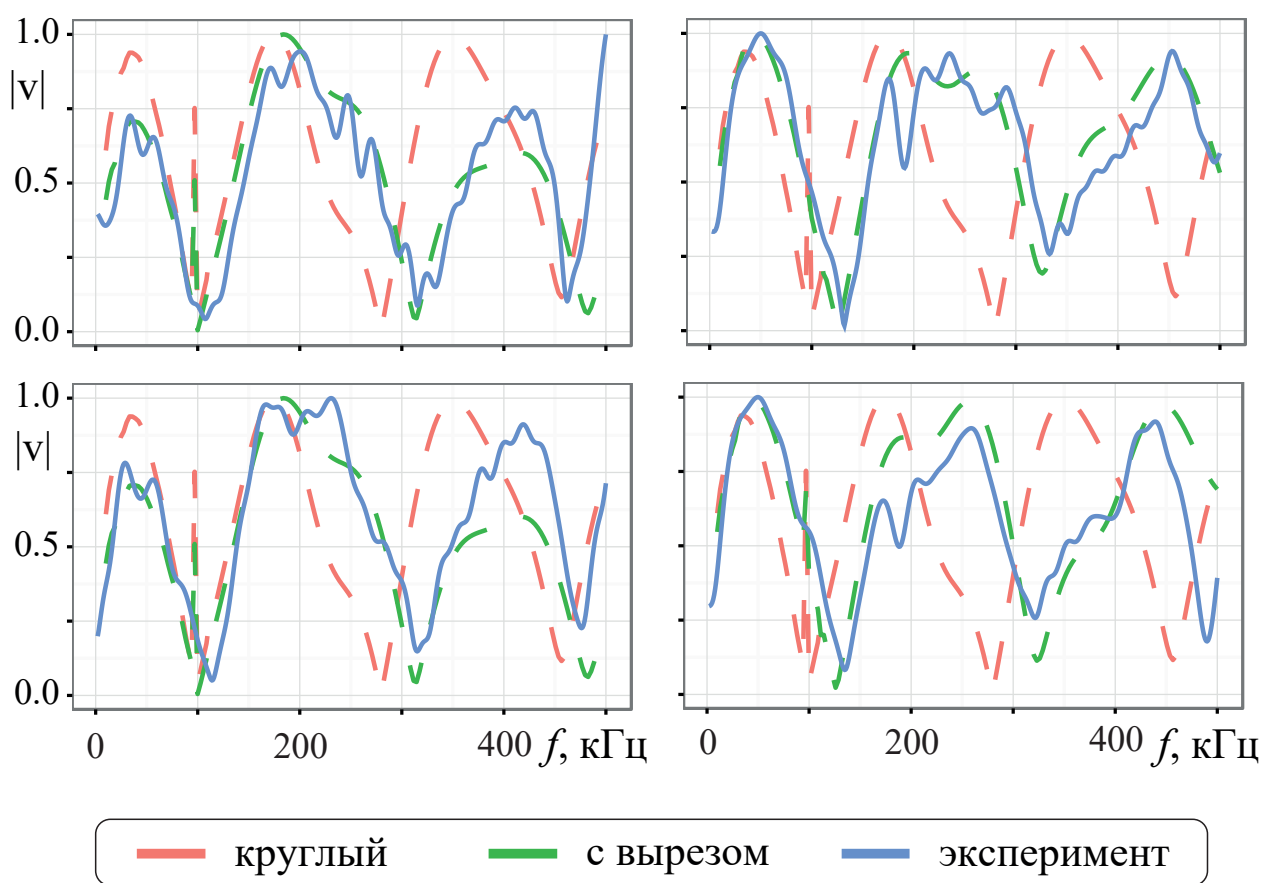


Рис. 4: Что-то там в разных точках

4 Общая схема эксперимента

Исзуемый образец представляет собой пластину сплава АМг2М толщиной 2мм, размером 1000мм на 500мм. В качестве источника колебаний к образцу приклеены тонкие пьезоактивные элементы, далее обозначаемые ПЭ, размера 16мм в диаметре, 0.25мм толщиной изготовленные из материала Ріс151 и размещенные в координатах (450,150), (450,350), (450,550), (650,150), (650,350), (650,550) (рисунок 5) считая от левого нижнего угла в мм. Для возбуждения колебаний на пьезоэлементы по-

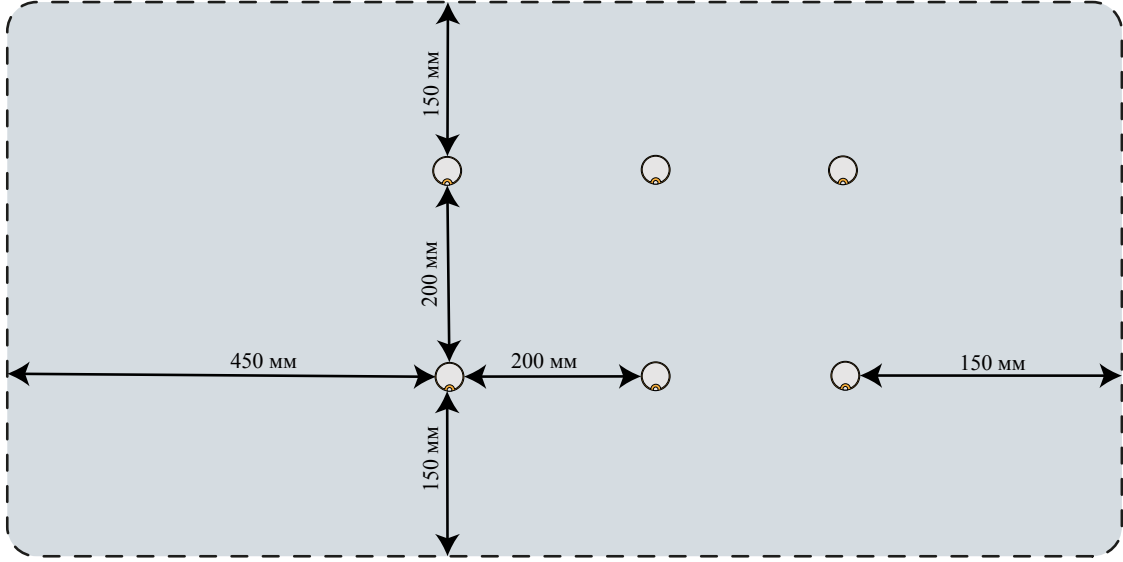


Рис. 5: Схема расположения датчиков

дается нестационарное электрическое напряжение в форме тональных посылок $f(t)$ подается сигнал с центральной частотой 100 КГц (рисунок 6).

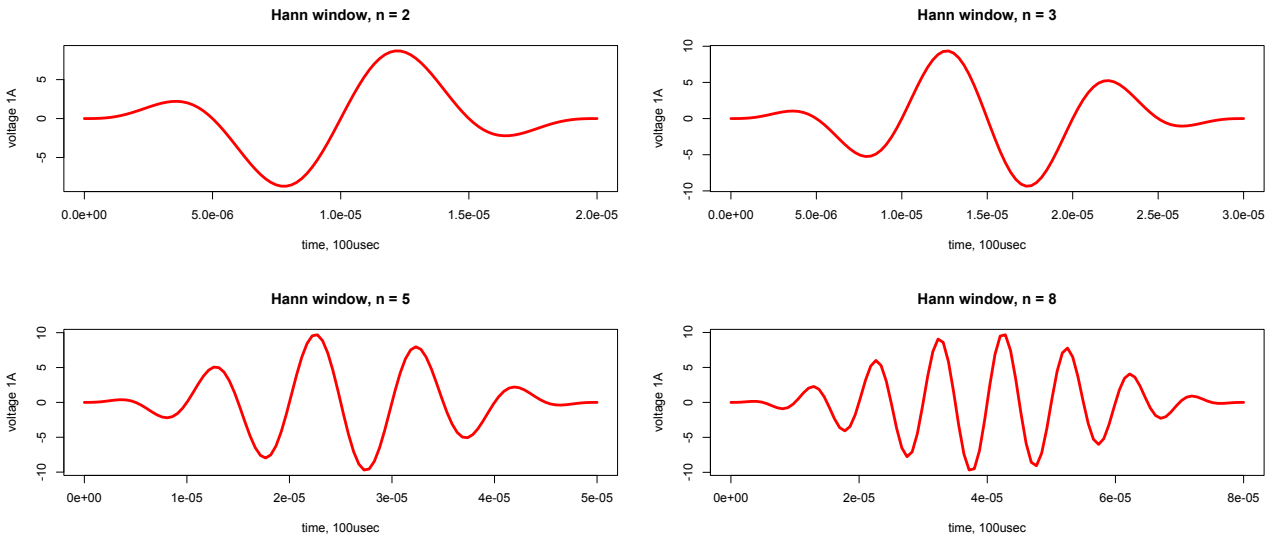


Рис. 6: Функция $f(t) = 10 \sin(2\pi f_c t) \sin^2(\pi f_c \frac{t}{n})$, $f_c = 10^5$ на отрезке $[0, \frac{n}{f_c}]$.

Реализована программа, производящая сбор данных с осциллографа Tektronix TDS2014C. Образцовый сигнал генерируется генератором Tektronix AFG3021B – n циклов синуса, модулированных окном Ханна, с центральной частотой 100 КГц. Для сбора сигнала используется многоканальная система авторского изготовления, производящая выбор излучающего и принимающего сигнала.

Программа производит следующую обработку измеренных данных. Производится дополнительное усреднение данных и взятие численного Фурье преобразования от них.

Выбираются 4 датчика, окружающие дефект. Далее производится посылка сигнала произвольным датчиком и ее поочередный прием остальными тремя. Затем производится Фурье-преобразование сигнала.

5 Полный алгоритм вычисления $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$

6 Новые формулы

Исходная функция возмущения от источника s представляется в виде:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \text{Re} \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{\omega} f(\omega) \cdot \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, \omega) \cdot \varphi(\omega, t),$$

где $s \in 1 \dots N$, N — число источников, $t \in \{T_1, \dots, T_n\}$, $T_i = t_{\min} + (i-1) \frac{t_{\max} - t_{\min}}{n-1}$, ω — частоты из некоторой сетки, $\varphi(\omega_j, t) = \varphi^+(\omega_j, t) + \varphi^-(\omega_j, t)$,

$$\varphi^-(\omega_j, t) = \int_{\omega_j - \Delta\omega}^{\omega_j} \left(1 + \frac{\omega - \omega_j}{\Delta\omega}\right) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{i}{t} e^{-i\omega_j t} \left(1 - \frac{i}{t\Delta\omega} (1 - e^{i\Delta\omega t})\right), \quad (15)$$

$$\varphi^+(\omega_j, t) = \int_{\omega_j}^{\omega_j + \Delta\omega} \left(1 - \frac{\omega - \omega_j}{\Delta\omega}\right) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{i}{t} e^{-i\omega_j t} \left(-1 - \frac{i}{t\Delta\omega} (1 - e^{-i\Delta\omega t})\right). \quad (16)$$

Возможные метрики:

$$S_1(\mathbf{x}) = \sum_{t \in \{T_1, \dots, T_n\}} \left(\sum_{s=1}^N \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \right)^2, \quad (17)$$

$$S_2(\mathbf{x}) = \sum_{t \in \{T_1, \dots, T_n\}} \left| \sum_{s=1}^N \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) \right|, \quad (18)$$

$$S_3(\mathbf{x}) = \max_{t \in \{T_1, \dots, T_n\}} \left| \sum_{s=1}^N \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \right|. \quad (19)$$

Список литературы

- [1] Бабешко В. А, Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М., 1989;
- [2] Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования в теории упругости. — Кр., 1990;
- [3] Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования и волновые процессы. — Кр., 2017;
- [4] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. О принципе излучения. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948, т. 18, вып. 2;
- [5] Evgeny Glushkov, Natalia Glushkova, Rolf Lammering, Artem Eremin, Mirko N Neumann. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies. Smart Mater. Struct. 20 (2011) 015020 (11pp).