1 Описание задачи

Постановка задачи. Рассматриваются гармонические колебания изотропного слоя толщины h, занимающего в системе координат (x, y, z) полубесконечную область $D : \{-\infty < x, y < \infty, -h \le z \le 0\}$. Источником колебаний служит тонкий вертикально поляризованный пьезоактуатор, контактирующий с поверхностью $z = 0$ по области Ω с центром в начале координат. С использованием принципа суперпозиции и обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}_t^{-1}$ нестационарные перемещения слоя $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ могут быть выражены через гармонические $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ (частотный спектр), причём комплексная амплитуда перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \{u_x, u_y, u_z\}$ удовлетворяет уравнению Ляме:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ — оператор Ляме:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu)\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u},$$

λ, μ — константы Ляме.

Внешние поверхности волновода $z = 0$ и $z = -h$ предполагаются свободными от напряжений $\tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$ за исключением области Ω, где действие актуатора моделируется нагрузкой $\mathbf{q}$. С использованием полуаналитического интегрального подхода поле $\mathbf{u}$, возбуждаемое пьезоактуатором в волноводе без препятствий (поле источника), при фиксированной частоте ω представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_\Omega k(\mathbf{x} - \zeta)\mathbf{q}(\zeta)d\zeta = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z)Q(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{2}$$

где $K(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ — Фурье-символы матрицы Грина $k(\mathbf{x})$ для слоистой упругой среды с заданными на поверхности $z = 0$ напряжениями и нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ соответственно.

Матрица K представима в следующем виде:

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \begin{pmatrix} -i\left(M\alpha_1^2 + N\alpha_2^2\right)/\alpha^2 & -i(M - N)\alpha_1\alpha_2/\alpha^2 & -iP\alpha_1 \\ -i(M - N)\alpha_1\alpha_2/\alpha^2 & -i\left(M\alpha_2^2 + N\alpha_1^2\right)/\alpha^2 & -iP\alpha_2 \\ S\alpha_1/\alpha^2 & S\alpha_2/\alpha^2 & R \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, P, R, M, S, N$ — некоторые комплексные функции, зависящие от α и z. Алгоритм их построения приводится в работах [1, 2].

Переход к полярным координатам. Поскольку указанные функции зависят только от переменной α (а не отдельно от α_1, α_2), интеграл (2) можно свести к однократному. Для этого осуществляется переход в полярную систему координат ([1]), что позволяет после некоторых преобразований представить равенство (2) в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2, z)Q(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+}(K * J)(\alpha, x, y, z)Q(\alpha)\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+}(K * J * \alpha)(\alpha, x, y, z)Q(\alpha)d\alpha,\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$(K * J * \alpha)(\alpha, x, y, z) = \begin{pmatrix} i\left(M\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\alpha} & i(M - N)\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y}\frac{1}{\alpha} & P\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x}\alpha \\ i(M - N)\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y}\frac{1}{\alpha} & i\left(M\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2} + N\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\alpha} & P\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y}\alpha \\ iS\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x}\frac{1}{\alpha} & iS\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y}\frac{1}{\alpha} & RJ_0(\alpha r)\alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

и производные функций Бесселя с учётом соотношения

$$J'_\nu(z) = \frac{\nu}{z}J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}J_\nu(z) \tag{6}$$

получаются:

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial x} = -J_1(\alpha r)\frac{\alpha x}{r}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial y} = -J_1(\alpha r)\frac{\alpha y}{r}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\left(\alpha J_0(\alpha r)x^2 - \frac{1}{r}J_1(\alpha r)(x^2-y^2)\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\left(\alpha J_0(\alpha r)y^2 - \frac{1}{r}J_1(\alpha r)(y^2-x^2)\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial x \partial y} = -\frac{\alpha x y}{r^2}\left(\alpha J_0(\alpha r) - 2\frac{J_1(\alpha r)}{r}\right). \tag{11}$$

Контур Γ^+ в уравнении (4) представляет собой положительную действительную полуось с отклонением в соответствии с принципом предельного поглощения ([4]) таким образом, чтобы обходить полюса функции $K * J * \alpha$ (уравнение 5) снизу.

Представление u через вычеты. Наряду с прямым вычислением интеграла (4) в дальней от источника зоне (т.е. при $r \gg \operatorname{diam}\Omega$) использовались соответствующие асимптотические представления ([1]), полученные с применением теории вычетов. В результате

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{i}{2}\sum_i \bar{K}(\zeta_i)Q(\zeta_i) \approx$$

$$\frac{i}{2}\sum_i \frac{\varepsilon}{2}\left((K*J*\alpha)(\zeta_i+\varepsilon,x,y,z) - (K*J*\alpha)(\zeta_i-\varepsilon,x,y,z)\right)Q(\zeta_i), \tag{12}$$

где ζ_i — полюса функции $K*J*\alpha$, ε — некоторая погрешность, большая погрешности поиска полюсов, $\bar{K}(\zeta_i)$ — вычет функции $K * J * \alpha$ в полюсе ζ_i.

Вид функции q. Поскольку в области низких частот нагрузка $\mathbf{q}$ концентрируется в основном на границе пьезоэлемента, допустима аппроксимация $\mathbf{q}$ по нормальным модам, центрированным на точечных источниках $\mathbf{x}_j$, в следующем виде ([5]):

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{N_q} p_j \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\begin{pmatrix}\cos\varphi_j\\ \sin\varphi_j\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N_q}\mathbf{q}_j \tag{13}$$

где N_q — число точечных источников, $\mathbf{x}_j$ — координата j-го источника (располагается на границе пьезоэлемента), p_j — весовой коэффициент, φ_j — угол между осью X и нормалью к $\mathbf{x}_j$ от центра пьезоэлемента, δ — дельта-функция, определяемая соотношением:

$$2\pi\int_0^\infty f(r)\delta(r-a)rdr = f(a).$$

В таком случае для функции $\mathbf{u}$ из уравнения (2) верно:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{N_q}\mathbf{u}_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_q} k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\mathbf{q}_j, \tag{14}$$

где $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ — такая же функция из (4) или (12) с той разницей, что $r = r_j = |\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|$.

2 Результаты

При численной реализации интегралы типа (4) считались по квадратурам Гаусса-Кронрода, кривая Γ^+ совпадала с лучом $(0,\infty)$ везде, кроме отрезка $[\frac{1}{2}\min\{\zeta_i\}, \frac{3}{2}\max\{\zeta_i\}]$, где $\{\zeta_i\}$ — множество положительный вещественных полюсов подынтегральной функции, искавшихся на достаточно большом отрезке Brent-методом в качестве корней уравнения $\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha,\omega) = 0$, в котором Δ — общий знаменатель функций P, R, M, S, N. На самом отрезке $[\frac{1}{2}\min\{\zeta_i\}, \frac{3}{2}\max\{\zeta_i\}]$ контур Γ^+ деформировался в нижнюю комплексную полуплоскость. При подсчёте искомой функции по формуле (12) сумма бралась по всем положительным вещественным полюсам Δ. Расчёты проводились для поверхности пластины $(z = 0)$.

Интерес представляли функции $u_z = u_z(x,y,z), u_r = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$, где φ — угол между осью X и нормалью к $\mathbf{x}$ от центра пьезоэлемента. На рисунках показано, как функции u_z, u_r, посчитанные по вычетам, аппроксимируют те же функции, посчитанные через интегралы.

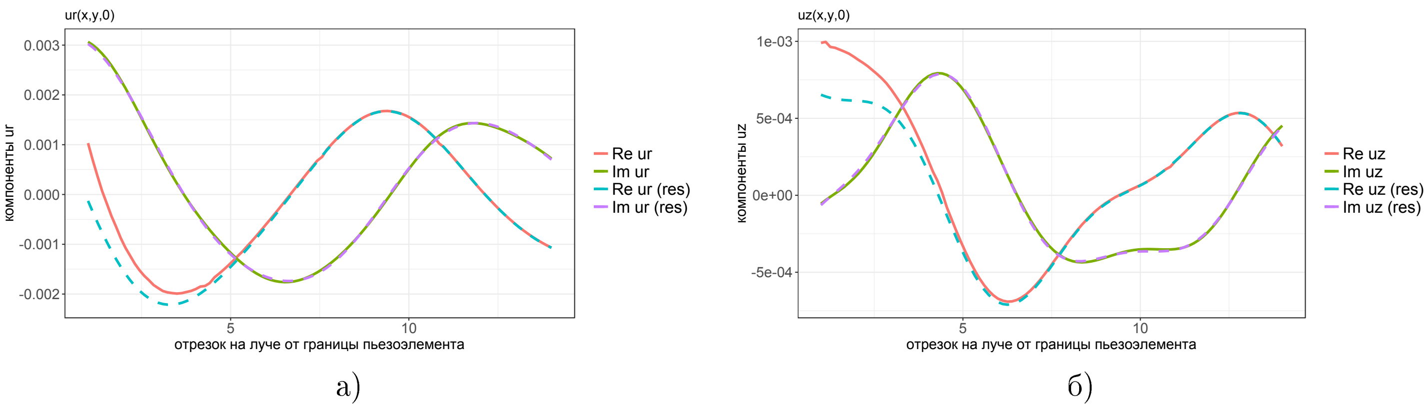

Рис. 1: Действительная и мнимая части функций u_z, u_r, посчитанных через интегралы и по вычетам, при удалении от пьезоэлемента по нормали. Центр пьезоэлемента — $(1;1)$, радиус $r = 3$, угол наклона $\varphi = \frac{\pi}{6}$, частота $\omega = 3$, число источников $N_q = 80$.

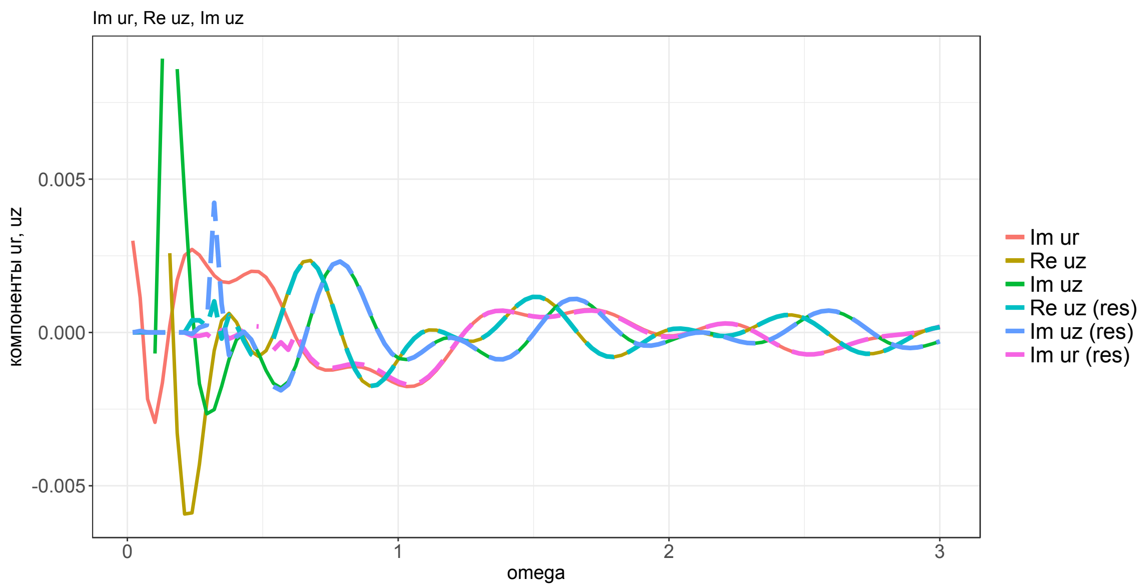

Рис. 2: Функций u_z, u_r, посчитанные на расстоянии 20 от точечного источника при меняющейся частоте. Центр пьезоэлемента — $(0;0)$, $r = 10$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\omega \in [0.02, \ldots, 3]$, $N_q = 40$.

3 Общая схема эксперимента

Изучаемый образец представляет собой пластину сплава АМг2М толщиной 2мм, размером 1000мм на 500мм. В качестве источника колебаний к образцу приклеены тонкие пьезоактивные элементы, далее обозначаемые ПЭ, размера 16мм в диаметре, 0.25мм толщиной изготовленные из материала Pic151 и размещенные в координатах (450,150), (450,350), (450,550), (650,150), (650,350), (650,550) (рисунок 3) считая от левого нижнего угла в мм. Для возбуждения колебаний на пьезоэлементы по-

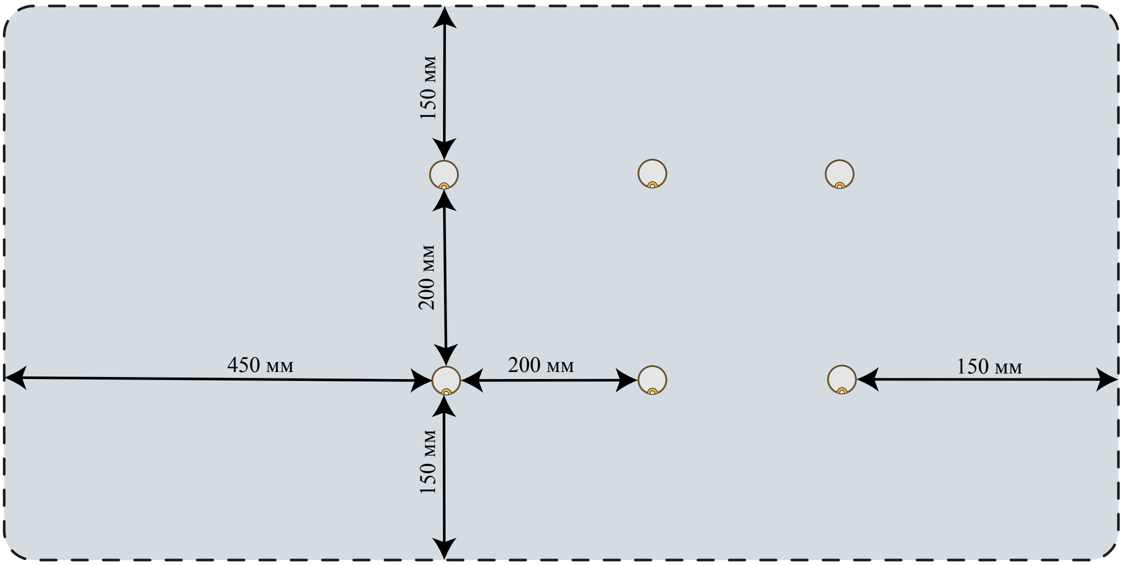

Рис. 3: Схема расположения датчиков

дается нестационарное электрическое напряжение в форме тональных посылок $f(t)$ подается сигнал с центральной частотой 100 КГц (рисунок 4).

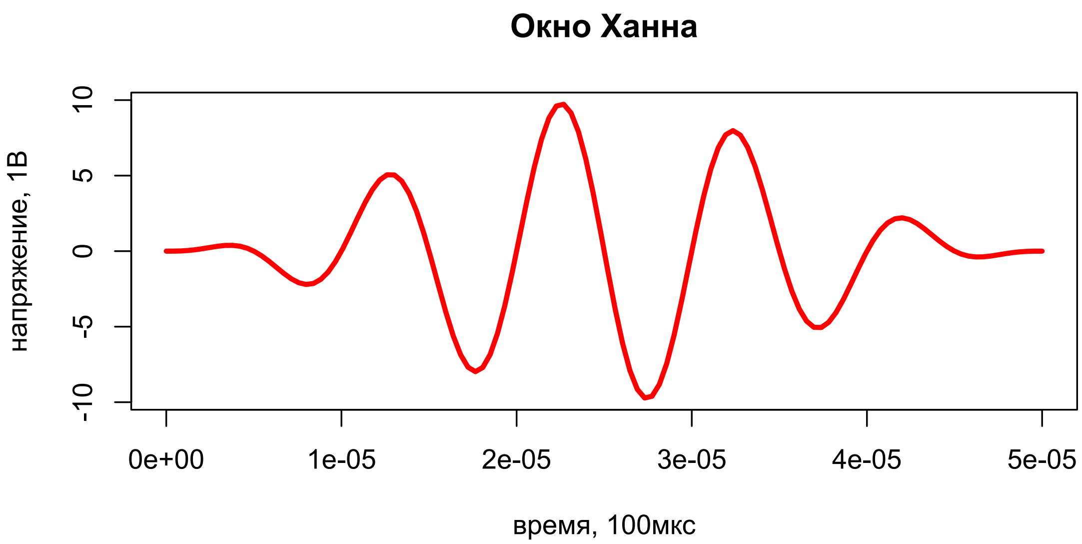

Рис. 4: Функция $f(t) = 10\sin(2\pi f_c t)\sin^2(\pi f_c \frac{t}{n}), n = 5, f_c = 10^5$ на отрезке $[0, \frac{n}{f_c}]$.

Реализована программа, производящая сбор данных с осциллографа Tektronix TDS2014C. Образцовый сигнал генерируется генератором Tektronix AFG3021B – 5 циклов синуса, модулированных окном Ханна, с центральной частотой 100 КГц. Для сбора сигнала используется многоканальная система авторского изготовления, производящая выбор излучающего и принимающего сигнала.

Программа производит следующую обработку измеренных данных. Производится дополнительное усреднение данных и взятие численного Фурье преобразования от них.

Выбираются 4 датчика, окружающие дефект. Далее производится посылка сигнала произвольным датчиком и ее поочередный прием остальными тремя. Затем производится Фурье-преобразование сигнала.

4 Новые формулы

Исходная функция возмущения от источника j:

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathbf{u}_j(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\ \mathbf{w}_j(\mathbf{x},t) \approx \sum_\omega f(\omega)\cdot\mathbf{u}_j(\mathbf{x},\omega)\cdot\varphi(\omega,t),$$

где $j \in 1\ldots N$, N— число источников, $t \in \{T_1,\ldots,T_n\}$, $T_i = t_{\min} + (i-1)\dfrac{t_{\max}-t_{\min}}{n-1}$, $\varphi(\omega_j,t) = \varphi^+(\omega_j,t)+\varphi^-(\omega_j,t)$,

$$\varphi^-(\omega_j,t) = \int_{\omega_j-\Delta\omega}^{\omega_j}\left(1+\frac{\omega-\omega_j}{\Delta\omega}\right)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{i}{t}e^{-i\omega_j t}\left(1-\frac{i}{t\Delta\omega}\left(1-e^{i\Delta\omega t}\right)\right), \tag{15}$$

$$\varphi^+(\omega_j,t)\int_{\omega_j}^{\omega_j+\Delta\omega}\left(1-\frac{\omega-\omega_j}{\Delta\omega}\right)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{i}{t}e^{-i\omega_j t}\left(-1-\frac{i}{t\Delta\omega}\left(1-e^{-i\Delta\omega t}\right)\right). \tag{16}$$

Возможные метрики:

$$S_1(\mathbf{x}) = \sum_{t\in\{T_1,\ldots,T_n\}}\left(\sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j(\mathbf{x},t)\right)^2, \tag{17}$$

$$S_2(\mathbf{x}) = \sum_{t\in\{T_1,\ldots,T_n\}}\left|\sum_{j=1}^N \mathbf{w}_j(\mathbf{x},t)\right|, \tag{18}$$

$$S_3(\mathbf{x}) = \max_{t\in\{T_1,\ldots,T_n\}}\left|\sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j(\mathbf{x},t)\right|. \tag{19}$$

Список литературы

[1] Бабешко В. А, Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М., 1989;

[2] Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования в теории упругости. — Кр., 1990;

[3] Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования и волновые процессы. — Кр., 2017;

[4] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. О принципе излучения. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948, т. 18, вып. 2;

[5] Evgeny Glushkov, Natalia Glushkova, Rolf Lammering, Artem Eremin, Mirko N Neumann. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies. Smart Mater. Struct. 20 (2011) 015020 (11pp).