

Е. В. ГЛУШКОВ, Н. В. ГЛУШКОВА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики, механики и информатики

Е. В. ГЛУШКОВ, Н. В. ГЛУШКОВА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Монография

Краснодар
2017

УДК 517.3:621.39(075.8)
ББК 22.161.1я73
Г 62

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
А.Н. Соловьев

Кандидат физико-математических наук, доцент
В.Ю. Барсукова

Глушков, Е. В., Глушкова, Н. В.

Г62 Интегральные преобразования и волновые процессы: моно-
графия / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. – Краснодар: Кубанский
гос. ун-т, 2017. – 201 с. – 500 экз. ISBN 978-5-8209-XXXX-X

Даются основы применения интегрального преобразования Фурье при решении задач математической физики, возникающих при моделировании процессов возбуждения и распространения бегущих волн. Приводятся основные свойства преобразования Фурье и необходимые сведения из комплексного анализа. Общая схема решения иллюстрируется на модельных примерах для полосового волновода. Монография предназначена для студентов, аспирантов и научных работников.

Издание выпущено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01191).

УДК 517.3:621.39(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-8209-XXXX-X

© Кубанский государственный
университет, 2017

© Глушков Е. В., Глушкова Н. В., 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание посвящено применению методов *интегрального подхода* к решению задач возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в упругих волноводах. Его цель – дать простое и наглядное описание основных идей и техники реализации этих методов, необходимое при разработке математических и компьютерных моделей для различных волноводных структур. Для достижения этой цели общая схема интегрального подхода дается на простых модельных задачах. Предварительно в первых трех главах, носящих вспомогательный характер, приводятся необходимые математические сведения.

Интегральный подход базируется на применении интегрального преобразования Фурье и работе с возникающими при этом контурными интегралами, требующей использования аппарата теории функций комплексной переменной (ТФКП). Поэтому в первой главе дается краткое описание свойств и техники применения преобразования Фурье, а в третьей – сводка требуемых сведений из комплексного анализа. Бóльшая часть этих сведений входит в базовый курс математического анализа. Кроме того, наряду со сведениями из теории упругости и математической физики, необходимыми для формулировки волновых задач, нам показалось полезным обсудить вопросы их корректной обобщенной постановки, которые приводят к понятию обобщенных функций и необходимости определения правил действия над ними, в том числе и применения интегральных преобразований. Эти вопросы рассматриваются во второй главе.

Для лучшего понимания физики волновых процессов, которые описываются решениями краевых задач, полученными в форме контурных интегралов обратного преобразования

Фурье, в главе 4 дается сводка сведений о волнах и волновых характеристиках, в то время как общая схема построения решения методами интегрального подхода описывается в главах 5 и 6 для задач в плоской и пространственной постановке. Наряду с демонстрацией общей схемы на модельных примерах большое внимание здесь уделяется таким специфическим, но важным для ее правильной реализации вопросам, как корректный выбор контура интегрирования и ветвей радикалов, поиск полюсов и вычисление вычетов, вывод асимптотических представлений, обеспечение численной устойчивости разрабатываемых алгоритмов, работа со специальными функциями и другие тонкие моменты использования интегральных преобразований при решении волновых задач.

Основы интегрального подхода в той форме, в которой он дается в настоящей монографии, были заложены нашим учителем, академиком РАН В.А. Бабешко [12]. Техника интегрального подхода была изложена в монографии [4], для учебных целей было выпущено учебное пособие [14]. За последующие годы сложилась оптимальная траектория обучения, базирующаяся на сочетании теоретической работы с выполнением индивидуальных заданий (мини-проектов) по компьютерной реализации решений для различных модельных волноводных структур. Соответственно назрела и необходимость в новом издании, учитывающем накопленный опыт.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1.1. Ряды Фурье

Из курса математического анализа известно, что любая кусочно-непрерывная функция $u(x)$, заданная на ограниченном отрезке $[-l, l]$, может быть представлена в виде ряда Фурье, т.е. разложена по тригонометрическим функциям (косинусам и синусам) [21, 27, 42, 48, 50]:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = n\pi/l. \quad (1.1)$$

Значения констант α_n , определяющих период осцилляции базисных функций $\cos \alpha_n x$ и $\sin \alpha_n x$, зависит от длины отрезка $2l$, а коэффициенты разложения a_n, b_n выражаются через интегралы от исходной функции $u(x)$, домноженной на соответствующие базисные функции:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x) \cos \alpha_n x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x) \sin \alpha_n x dx.$$

С точки зрения функционального анализа представление (1.1) – это частный случай разложения элемента гильбертова пространства $u \in H$ по системе базисных функций $\{\varphi_n\} \subset H$, являющейся его счетным всюду плотным подмножеством [24]:

$$u = \sum_j c_j \varphi_j. \quad (1.2)$$

В общем случае коэффициенты такого разложения c_j определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

возникающей при проектировании соотношения (1.2) на систему базисных функций φ_i . Элементы матрицы A и вектора правой части \mathbf{f} при этом имеют вид

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}, \quad a_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i),$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_i, \dots\}, \quad f_i = (u, \varphi_i).$$

Здесь $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_i, \dots\}$ – вектор-столбец коэффициентов разложения, (u, v) – скалярное произведение в рассматриваемом пространстве H . Компоненты вектор-столбцов здесь и далее даются в фигурных скобках.

Если базисные функции *ортонормальны*, т.е. $(\varphi_j, \varphi_i) = 0$ при $i \neq j$, то матрица A становится диагональной и для коэффициентов разложения получаются явные формулы

$$c_j = (u, \varphi_j) / \|\varphi_j\|^2, \quad \|\varphi_j\|^2 = (\varphi_j, \varphi_j). \quad (1.4)$$

В этом случае представление (1.2) называется *обобщенным рядом Фурье*. Классический ряд Фурье (1.1) получается из ряда (1.2), если в качестве H взято пространство вещественных функций $L_2[-l, l]$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2} = \int_{-l}^l u(x)v(x)dx,$$

а в качестве базиса – два набора тригонометрических функций: $\{\cos \alpha_n x\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n = n\pi/l$. Эти функции

ортогональны в $L_2[-l, l]$:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x dx &= \int_{-l}^l \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = \\ &= \int_{-l}^l \cos \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = 0 \quad \text{при } n \neq m, \end{aligned}$$

а квадрат нормы каждой из них равен l :

$$\|\varphi_n\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \int_{-l}^l \cos^2 \alpha_n x dx = \int_{-l}^l \sin^2 \alpha_n x dx = l.$$

Таким образом, для коэффициентов разложения a_n, b_n соотношение (1.4) дает известные представления

$$\begin{aligned} a_n &= (u, \cos \alpha_n x)/l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x) \cos \alpha_n x dx, \\ b_n &= (u, \sin \alpha_n x)/l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l u(x) \sin \alpha_n x dx. \end{aligned}$$

Представление (1.1), справедливое для любой вещественной функции $u \in L_2$, в свою очередь можно рассматривать как частный случай разложения комплексной функции $u = u_1 + iu_2$ (здесь и далее, как правило, i – мнимая единица: $i = \sqrt{-1} = e^{i\pi/2}$, кроме тех случаев, когда i используется для обозначения индексов: c_i, a_{ij} и т.п.). Принимая во внимание формулу Эйлера

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x,$$

нетрудно заметить, что n -й член ряда (1.1) совпадает с вещественной частью комплексной величины

$$(a_n + ib_n)e^{-i\alpha_n x} = a_n \cos \alpha_n x + b_n \sin \alpha_n x + i(-a_n \sin \alpha_n x + b_n \cos \alpha_n x).$$

Чтобы избавиться от мнимой части достаточно добавить к этому выражению комплексно-сопряженную величину

$$[(a_n + ib_n)e^{-i\alpha_n x}]^* = (a_n - ib_n)e^{i\alpha_n x}$$

(звездочкой здесь и далее обозначена операция комплексного сопряжения: если $z = x + iy$, то $z^* = x - iy$). Учитывая, что вещественная часть $\operatorname{Re} z$ любой комплексной величины $z = x + iy$ представима в виде полусуммы $(z + z^*)/2$, а также четность a_n и нечетность b_n и α_n по индексу n , приходим к комплексной форме записи ряда Фурье (1.1)

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\alpha_n x} \quad (1.5)$$

с коэффициентами разложения

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u(x) e^{i\alpha_n x} dx. \quad (1.6)$$

В частном случае $l = \pi$ (интервал длины 2π) $\alpha_n = n$ и

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{inx} dx.$$

Для вещественных функций $u(x)$ это представление эквивалентно классическому виду (1.1), но вдобавок оно справедливо и для комплексных $u \in L_2$. Его можно рассматривать как разложение по комплексному ортогональному базису

$$\varphi_n(x) = e^{-i\alpha_n x}, \quad \alpha_n = n\pi/l, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

в пространстве L_2 комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2} = \int_{-l}^l u(x)v^*(x)dx.$$

Ортогональность этого базиса видна из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (\varphi_n, \varphi_k) &= \int_{-l}^l e^{-i\alpha_n x} e^{i\alpha_k x} dx = \left. \frac{e^{i(\alpha_k - \alpha_n)x}}{i(\alpha_k - \alpha_n)} \right|_{-l}^l = \\ &= \frac{e^{i(k-n)\pi} - e^{-i(k-n)\pi}}{i(\alpha_k - \alpha_n)} = \frac{(-1)^{k-n} - (-1)^{k-n}}{i(\alpha_k - \alpha_n)} = 0 \quad \text{для } k \neq n, \end{aligned}$$

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_{-l}^l e^{-i\alpha_n x} e^{i\alpha_n x} dx = \int_{-l}^l 1 \cdot dx = 2l \quad \text{для } k = n.$$

Знак показателя во второй экспоненте подынтегральных выражений меняется на противоположный, так как второй сомножитель берется комплексно-сопряженным. То же самое и в представлении (1.6), которое в соответствии с формулой (1.4) для коэффициентов разложения c_n получается при проектировании (скалярном умножении) исходной функции $u(x)$ на ортогональные базисные функции $e^{-i\alpha_n x}$.

Из представления (1.6) и ортогональности базиса непосредственно следуют основные свойства коэффициентов ряда Фурье:

- 1) $u(x)$ вещественна $\Leftrightarrow c_{-n} = c_n^*$.
 - 2) $\|u\|^2 = (u, u) = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$;
 - 3) $u \in L_2 \Leftrightarrow \|u\| < \infty \Leftrightarrow \sum_n |c_n|^2 < \infty$
- $\Rightarrow c_n \sim o(1/\sqrt{n})$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. для $\forall u \in L_2$ (в том

числе и для разрывных функций) коэффициенты разложения убывают на бесконечности быстрее, чем $n^{-1/2}$;

4) для более гладких функций скорость убывания c_n при $|n| \rightarrow \infty$ увеличивается, в частности, для $u \in C[-l, l]$ (функция непрерывная на отрезке)

$$c_n \sim O(1/n) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Последнее свойство несложно получить с помощью интегрирования по частям в представлении (1.6). Считая, что гладкость функции $u(x)$ нарушается в конечном числе точек x_j , $j = 0, 1, \dots, N$ ($x_0 = -l$, $x_N = l$), формула интегрирования по частям применяется на каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$. В силу непрерывности $u(x)$ вклад внутренних граничных точек x_j , $j = 1, 2, \dots, N - 1$ во внеинтегральные слагаемые в сумме равен нулю. В результате приходим к представлению

$$c_n = \frac{1}{2li\alpha_n} u(x)e^{i\alpha_n x} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{2li\alpha_n} \int_{-l}^l u'(x)e^{i\alpha_n x} dx. \quad (1.7)$$

Учитывая, что $\alpha_n = \pi n/l$, а $u(\pm l)e^{\pm i\alpha_n l} = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$, первое слагаемое в (1.7) дает требуемое убывание $O(1/n)$, в то время как второе слагаемое убывает быстрее за счет стремления к нулю интеграла от $u'(x)e^{i\alpha_n x}$ при $\alpha_n \rightarrow \infty$ в соответствии с леммой Римана – Лебега для осциллирующих интегралов [49]:

Лемма Римана – Лебега. Если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, т.е. является интегрируемой на всей оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Интеграл в выражении (1.7) удовлетворяет условиям леммы, так как функция $u'(x)$, продолженная на всю ось нулем, принадлежит L_1 .

Если значения функции на концах отрезка совпадают: $u(-l) = u(l)$, то внеинтегральный член в (1.7) равен нулю и убывание c_n становится быстрее первой степени:

$$c_n \sim o(1/n) \quad \text{при} \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Если непрерывна и первая производная ($u \in C_1[-l, l]$), то возможно еще одно интегрирование по частям, что дает оценку

$$c_n \sim O(1/n^2) \quad \text{при} \quad |n| \rightarrow \infty,$$

и т.д.

Аналогично, скорость убывания Фурье-символа $U(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ определяется гладкостью исходной функции $u(x)$.

Следствие 1.1. Замена ряда Фурье конечной суммой слагаемых $|n| \leq N$ дает аппроксимацию функции $u(x)$ с точностью до вклада высших гармоник $e^{\pm i\alpha_n x}$, $n > N$, который стремится к нулю с ростом n .

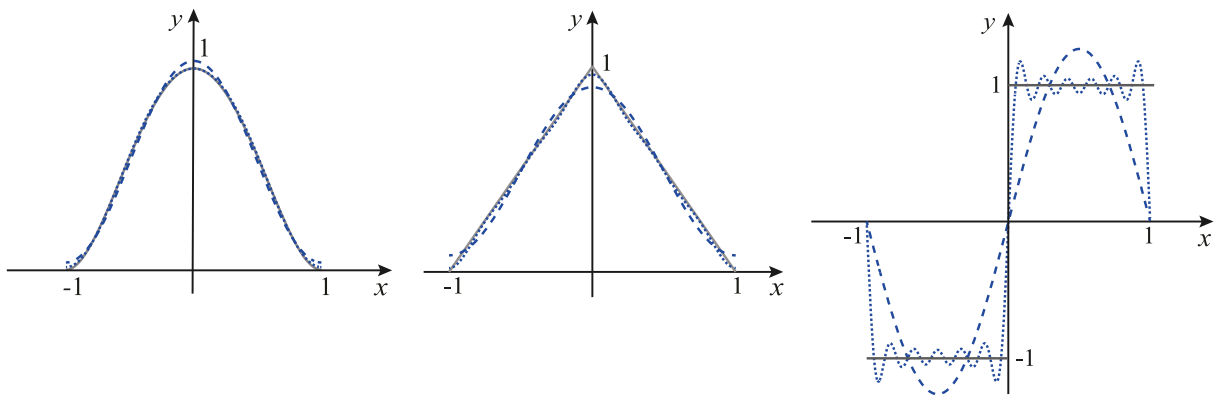


Рис. 1.1. Аппроксимация конечными отрезками ряда Фурье (1.5) (суммирование до $n = 3$ – пунктир, до $n = 5$ – точечные линии): а) гладкой функции $u(x) = (1 - x^2)^2$, б) непрерывной функции с разрывной первой производной $u(x) = 1 - |x|$ и в) разрывной функции $u(x) = \text{sign}(x)$

Очевидно, что чем выше гладкость функции, тем лучше она аппроксимируется конечным отрезком ряда Фурье (рис. 1.1).

1.2. ПЕРЕХОД ОТ РЯДОВ К ИНТЕГРАЛАМ ФУРЬЕ

Разложение в ряд Фурье (1.5), (1.6) получено для функции $u(x)$, заданной на ограниченном отрезке $[-l, l]$. Однако он сходится и для точек x , лежащих вне данного отрезка, обеспечивая тем самым продолжение исходной функции $u(x)$ на всю вещественную ось $-\infty < x < \infty$ (рис. 1.2). Полученная функция является периодической с периодом $2l$, так как все слагаемые ряда – периодические функции. Возникает вопрос: можно ли получить аналогичное разложение для непериодической функции, заданной на всей оси ?

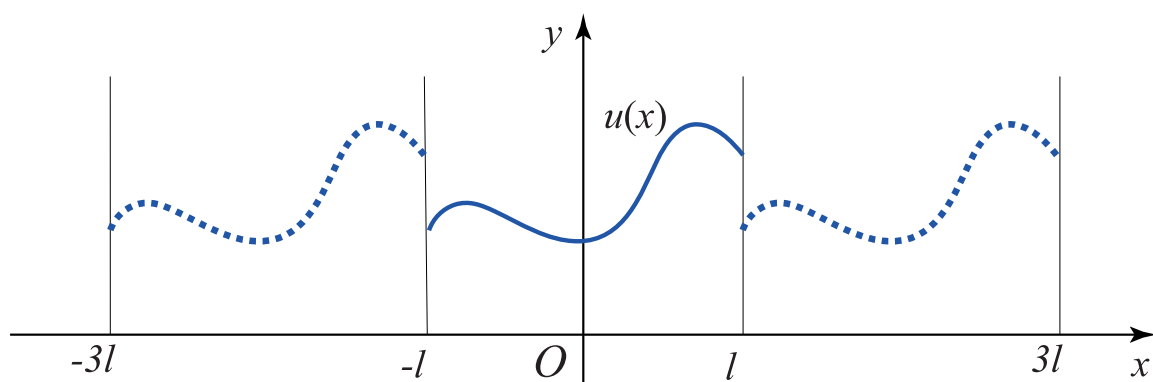


Рис. 1.2. Периодическое продолжение функции, заданной на отрезке $[-l, l]$, на всю ось x с помощью представления в виде ряда Фурье

Попробуем вывести его с помощью предельного перехода при $l \rightarrow \infty$. Заметим, что точки $\alpha_n = \pi n/l$, входящие в экспоненты $e^{-i\alpha_n x}$, покрывают вещественную ось α с равномерным шагом $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \pi/l$, стремящимся к нулю при $l \rightarrow \infty$. Далее введем функцию

$$U(\alpha) = \int_{-l}^l u(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (1.8)$$

Несложно заметить, что коэффициенты ряда c_n выражаются через значения этой функции в точках α_n :

$$c_n = \frac{1}{2l} U(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi} U(\alpha_n) \Delta\alpha.$$

Следовательно, ряд (1.5) можно трактовать как интегральную сумму, которая при $l \rightarrow \infty$ сходится к некоторому интегралу по $\alpha \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_n c_n e^{-i\alpha_n x} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_n U(\alpha_n) e^{-i\alpha_n x} \Delta\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (1.8) и (1.5) дают в пределе прямое и обратное *интегральное преобразование Фурье*

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\alpha x} dx \stackrel{Def}{=} \mathcal{F}[u], \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \stackrel{Def}{=} \mathcal{F}^{-1}[U], \end{aligned} \tag{1.9}$$

которое применимо к $\forall u \in L_2(-\infty, \infty)$, заданной на всей вещественной оси. Через \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} здесь и далее обозначены операторы этих преобразований. Функцию $U(\alpha)$ называют *образом, трансформантой, символом* или *спектром* оригинала $u(x)$. Далее, как правило, Фурье-символы обозначаются заглавными буквами, по возможности теми же, что и оригиналы.

Очевидно, принадлежность к L_2 накладывает определенные ограничения на функции $u(x)$, к которым применимо преобразование Фурье. В частности, для сходимости интегралов необходимо убывание на бесконечности быстрее, чем

корневое:

$$u(x) \sim o(1/\sqrt{|x|}) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

При этом по теореме Планшереля Фурье-символ $U(\alpha)$ также принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$ [24, 25]. Операторы \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} обеспечивают взаимно однозначное соответствие между функциями $u(x) \in L_2$ и пространством Фурье-образов $U(\alpha) \in L_2$.

Для функций $u(\mathbf{x})$ нескольких переменных x_j : $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ преобразование Фурье вводится аналогично

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u] &\equiv \int_{R^n} u(\mathbf{x}) e^{i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} = U(\alpha), \\ \mathcal{F}^{-1}[U] &\equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} U(\alpha) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha = u(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Интегрирование здесь ведется по всему n -мерному пространству R^n , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – вектор параметров преобразования. Угловыми скобками обозначена сумма попарных произведений $\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \sum_j \alpha_j x_j$, которая совпадает со скалярным произведением только для вещественных α и \mathbf{x} . Для комплексных α (появляющихся далее при переходе к контурным интегралам) $\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle \neq (\alpha, \mathbf{x})$, так как в $\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle$ нет комплексного сопряжения. Эта операция остается коммутативной для комплексных α : $\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$, в то время как $(\alpha, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \alpha)^*$. Угловые скобки используются здесь, чтобы не забывать об этом отличии от скалярного произведения.

В некоторых случаях преобразование применяется не во всем пространстве R^n , а по одной или нескольким переменным. Это будет указываться соответствующими индексами: \mathcal{F}_x , \mathcal{F}_x^{-1} , \mathcal{F}_t и т.д. Например, для функции двух перемен-

ных $u(x, z)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x[u] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, z), \\ \mathcal{F}_x^{-1}[U] &\equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha = u(x, z).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Или $U(x, y, \alpha_3) = \mathcal{F}_z[u]$, $U(\alpha_1, \alpha_2, z) = \mathcal{F}_{xy}[u]$ для $u(x, y, z)$ и т.п.

1.3. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1.3.1. Поведение на бесконечности

Поскольку Фурье-спектр $U(\alpha)$ тесно связан с коэффициентами ряда Фурье, скорость его убывания на бесконечности определяется теми же факторами, что и поведение c_n при $n \rightarrow \infty$, а именно: убывание тем быстрее, чем выше степень гладкости оригинала $u(x)$.

Для получения конкретной оценки, как и ранее, достаточно воспользоваться интегрированием по частям. Например, для кусочно-дифференцируемой $u(x)$ с единственной точкой разрыва x_0 имеем

$$U(\alpha) = \left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} \right) u(x) e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{i\alpha} (v_0 e^{i\alpha x_0} - \mathcal{F}[u']). \tag{1.12}$$

Штрихом здесь и далее обозначена производная по рассматриваемой переменной: $u'(x) \equiv \frac{du(x)}{dx}$; $v_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u(x_0 - \varepsilon) - u(x_0 + \varepsilon)]$ — скачок функции $u(x)$ в точке разрыва x_0 (рис. 1.3.1). Далее для скачка n -й производной $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n}$ используется общее обозначение $v_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u^{(n)}(x_0 - \varepsilon) - u^{(n)}(x_0 + \varepsilon)]$, v_0 — это его частный случай при $n = 0$.

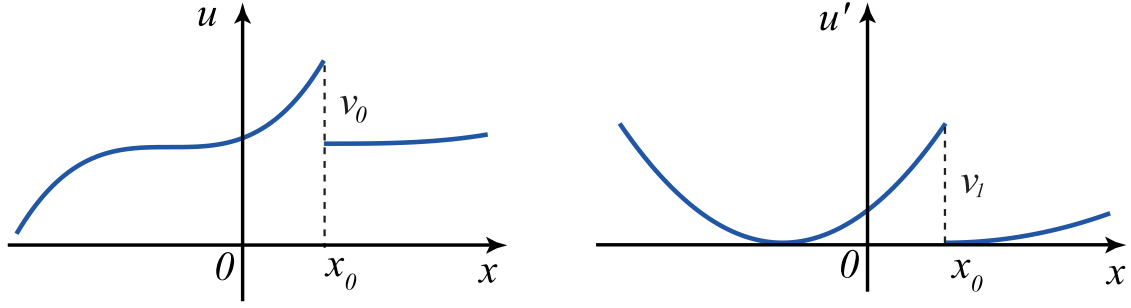


Рис. 1.3. Скачок функции v_0 и ее первой производной v_1 в точке разрыва x_0

В силу леммы Римана–Лебега $\mathcal{F}[u'] \rightarrow 0$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ для любой интегрируемой функции $u'(x)$. Следовательно, из представления (1.12) вытекает оценка

$$U(\alpha) \sim O(\alpha^{-1}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

При наличии большего числа точек разрыва каждая из них дает вклад того же порядка малости. В целом же справедливы следующие оценки:

1) Фурье-символ $U(\alpha)$ кусочно-дифференцируемой интегрируемой функции $u(x)$ (т.е. имеющей только точки разрыва первого рода и не имеющей слабых особенностей) убывает при $\alpha \rightarrow \infty$ как первая степень α ;

2) для $u \in C_n(-\infty, \infty)$ убывание $n + 1$ степени: $U(\alpha) \sim O(1/\alpha^{n+1})$ при $\alpha \rightarrow \infty$;

3) для $u \in C_\infty(-\infty, \infty)$ (бесконечно гладкая функция) убывание быстрее любой степени (экспоненциальное): $U(\alpha) \sim O(1/\alpha^\infty)$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Действительно, если все производные $u^{(k)}$ до степени n непрерывны, интегрирование по частям можно провести $n + 1$ раз, причем все внеинтегральные члены обращаются в нуль, так как $u^{(k)}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для $\forall k \leq n$. Отсюда следует свойство 2, а свойство 3 вытекает из того факта, что для бесконечно гладкой функции интегрирование по частям

можно проводить любое число раз, т.е. сделать степень убывания больше любого наперед заданного значения.

1.3.2. Преобразование производных

Рассмотрим $\mathcal{F}[u^{(n)}]$. Пусть $u \in C_n$, т.е. все производные $u^{(k)}$ до степени n — непрерывные функции, убывающие на бесконечности. Как уже отмечалось, это позволяет проводить интегрирование по частям n раз, причем первые n внеинтегральных членов обращаются в ноль. Каждое интегрирование по частям приводит к понижению порядка производной на единицу и появлению сомножителя $-i\alpha$:

$$\mathcal{F}[u^{(n)}] = u^{(n-1)}e^{i\alpha x}|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u^{(n-1)}(x)e^{i\alpha x} dx = -i\alpha \mathcal{F}[u^{(n-1)}].$$

Таким образом, после n -кратного интегрирования приходим к соотношению

$$\mathcal{F}[u^{(n)}] = (-i\alpha)^n \mathcal{F}[u] = (-i\alpha)^n U(\alpha), \quad (1.13)$$

определяющему *основное свойство преобразования Фурье от производных*: действие оператора производной порядка n на достаточно гладкую функцию $u(x)$ эквивалентно в области преобразования Фурье домножению трансформанты $U(\alpha)$ на множитель $(-i\alpha)^n$.

Следствие 1.2. Преобразование Фурье позволяет избавиться от производных, т.е. дает возможность сводить дифференциальные уравнения к алгебраическим.

Этот факт является одной из причин интереса к преобразованию Фурье как к эффективному инструменту для разработки методов построения аналитических и полуаналитических решений краевых задач для уравнений в частных

производных, в нашем случае – для функций, описывающих распространение колебаний в волноводных структурах.

Далее, применяя к соотношению (1.13) обратное преобразование \mathcal{F}^{-1} , приходим к интегральному представлению производной

$$u^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha)^n U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.14)$$

которое является частным случаем *псевдодифференциального оператора*

$$A u \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.15)$$

его действие на функцию $u(x)$ задается домножением ее Фурье-символа $U(\alpha)$ на некоторый множитель $A(\alpha)$, называемый *ядром*, или *Фурье-символом* этого оператора [52]. В представлении (1.15) $A(\alpha) = D^n(\alpha)$, где $D(\alpha) \equiv (-i\alpha)$ – Фурье-символ оператора дифференцирования $\partial/\partial x$, а $D^n(\alpha)$ – оператора $(\partial/\partial x)^n$. В этом контексте условно можно написать

$$D^n(\alpha) = \mathcal{F}[\partial^n/\partial x^n],$$

помня, однако, что оператор сам по себе не существует, а имеет смысл, только действуя на некоторый объект (функцию).

Замечание 1.1. Операторы с ядром $D^\gamma(\alpha)$, в котором показатель степени γ – дробная величина, можно трактовать как обобщение понятия классического оператора дифференцирования $(\partial/\partial x)^n$ на случай промежуточных, нецелых степеней:

$$(\partial/\partial x)^\gamma = \mathcal{F}^{(-1)}[D^\gamma(\alpha)].$$

Например, ядро $\sqrt{-i\alpha}$ задает производную половинного порядка

$$u^{(1/2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-i\alpha} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Пример 1.1. Наиболее эффективно правило (1.13) используется при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим в качестве примера обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка с некоторой заданной функцией f в правой части:

$$u''(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.16)$$

Это уравнение описывает одномерное распространение колебаний, возбуждаемых нагрузкой f (см. главу 4). Традиционным способом построения частного решения ОДУ является метод вариации постоянных [45], однако с помощью преобразования Фурье получить его можно намного проще, правда, в более общей интегральной форме. Последнее не является серьезным недостатком, так как с помощью техники замены контурных интегралов суммой вычетов данные представления также можно свести к явным аналитическим выражениям (см. параграф 2.4).

Действительно, применение преобразования Фурье к уравнению (1.16), т.е. домножение его левой и правой частей на $e^{i\alpha x}$ и интегрирование по всей оси x , приводит к простому алгебраическому уравнению

$$-\alpha^2 U(\alpha) + k^2 U(\alpha) = F(\alpha)$$

относительно трансформанты $U = \mathcal{F}[u]$ с известной функцией $F(\alpha) = \mathcal{F}[f]$ в правой части. Отсюда

$$U(\alpha) = G(\alpha)F(\alpha), \quad (1.17)$$

где $G(\alpha) = 1/(-\alpha^2 + k^2)$ – Фурье-символ *функции Грина* уравнения (1.16), а его знаменатель $\Delta(\alpha) = -\alpha^2 + k^2$ – Фурье-символ дифференциального оператора этого уравнения. Применяя к представлению (1.17) обратное преобразование Фурье, получаем искомое частное решение

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha)e^{-i\alpha x}}{-\alpha^2 + k^2}d\alpha. \quad (1.18)$$

Отметим, что решение (1.18) получено в форме псевдодифференциального оператора с ядром $G(\alpha)$, действующего на правую часть f :

$$u(x) = Gf.$$

Формальная подстановка в исходное уравнение показывает, что функция (1.18) действительно является его решением:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\alpha^2 + k^2) \frac{F(\alpha)e^{-i\alpha x}}{-\alpha^2 + k^2} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x). \end{aligned}$$

Эта проверка названа формальной, так как пока не обсуждаются вопросы сходимости, наличия полюсов $\alpha = \pm k$ на оси интегрирования при вещественных k , возможность внесения оператора дифференцирования под знак интеграла и т.п.

Пример 1.2. Рассмотрим произвольное линейное ОДУ с постоянными коэффициентами a_k :

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \right) u(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dx^k} = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.19)$$

Здесь $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ – полином степени n , задающий дифференциальный оператор. Очевидно, как и в предыдущем примере частное решение можно записать в виде обратного преобразования Фурье от произведения Фурье-символов функции Грина $G(\alpha) = 1/\Delta(\alpha)$ и правой части $F(\alpha)$, с тем отличием, что для уравнения (1.19) $\Delta(\alpha) = P_n(-i\alpha)$ – полином степени n с комплексными (в общем случае) коэффициентами $(-i)^k a_k$.

1.3.3. Преобразование производных от разрывных функций

Правило (1.13) применимо только для преобразования производных достаточно гладких функций $u(x)$. Однако для применения преобразования Фурье к уравнениям, заданным в ограниченной области Ω , необходимо искусственно продолжить искомую функцию на всю ось (или на все пространство R^n в случае функций нескольких переменных), доопределяя ее вне Ω нулем. Это формально позволяет применять преобразование Фурье, т.е. интегрировать по всему пространству R^n , однако доопределенная на все пространство функция $u(\mathbf{x})$ в общем случае становится разрывной. На границе области $\partial\Omega$ возникает разрыв первого рода со скачком, определяемым граничным значением $u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega}$. Если $u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = 0$, но не обращаются в ноль первые производные, то доопределенная функция непрерывна, но разрыв терпят первые производные, и т.д. Граница области – это множество, на котором в общем случае нарушается гладкость при доопределении исходной

функции на все пространство. Тем самым возникает необходимость вывода правил применения преобразования Фурье к производным от функций, не обладающих гладкостью, достаточной для использования основного свойства (1.13). В точках разрыва производные не существуют, а доопределяются значениями левых и правых пределов из области непрерывности.

Пусть x_0 – точка разрыва функции $u(x)$ и соответственно всех ее производных $u^{(n)}(x)$ со скачками $v_n = u^{(n)}(x_0^-) - u^{(n)}(x_0^+)$. Интегрирование по частям, использовавшееся для вывода (1.13), необходимо теперь проводить на каждой из полуосей $(-\infty, x_0)$ и (x_0, ∞) отдельно. Внеинтегральные члены, появляющиеся при этом как левые и правые предельные значения в точке x_0 , не приводятся, а собираются в скачки v_n :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u'] &= (u|_{-\infty}^{x_0} + u|_{x_0}^{\infty})e^{i\alpha x_0} - i\alpha\mathcal{F}[u] = v_0e^{i\alpha x_0} - i\alpha U(\alpha), \\ \mathcal{F}[u''] &= (u'|_{-\infty}^{x_0} + u'|_{x_0}^{\infty})e^{i\alpha x_0} - i\alpha\mathcal{F}[u'] = (v_1 - i\alpha v_0)e^{i\alpha x_0} - \\ &\quad - \alpha^2 U(\alpha) \quad \text{и т.д.}\end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u^{(n)}] &= [v_{n-1} - i\alpha v_{n-2} + \dots + (-i\alpha)^{n-1}v_0]e^{i\alpha x_0} + \\ &+ (-i\alpha)^n U(\alpha) = (-i\alpha)^n U(\alpha) + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-i\alpha)^{n-k-1} v_k \right] e^{i\alpha x_0}. \quad (1.20)\end{aligned}$$

Полученная формула отличается от (1.13) дополнительной суммой, описывающей вклад точки разрыва x_0 . Очевидно, в случае нескольких точек разрыва x_m главная часть сохраняется прежней (совпадающей с (1.13)), а каждая точка x_m дает такую же дополнительную сумму, как и в представлении (1.20), но с экспонентой $e^{i\alpha x_m}$ и скачками

$v_{m,k}$ в этой точке. Если все скачки равны нулю (функция достаточно гладкая), то формула (1.20) сводится к основному правилу (1.13).

Аналогично выводятся формулы для преобразования производных в случае двух и более переменных. Здесь возникают скачки производных по каждой из переменных x_j . Получающиеся выражения в общем случае довольно громоздки, поэтому мы ограничимся частными случаями, необходимыми для рассматриваемых в дальнейшем задач, по мере их появления.

Пример 1.3. Рассмотрим такое же уравнение, что и в примере 1.1, но заданное на ограниченном отрезке $(-a, a)$:

$$u''(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad |x| < a. \quad (1.21)$$

При его продолжении на всю ось нулем граничные точки $x = \pm a$ становятся точками разрыва со скачками $v_n^\pm, n = 0, 1$. Данные скачки выражаются через неизвестные значения функции и ее первой производной u_n^\pm , взятые в пределе при $x \rightarrow \pm a$ изнутри области:

$$v_n^\pm = \pm u_n^\pm, \quad \text{где} \quad u_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^{(n)}(\pm a \mp \varepsilon), \quad n = 0, 1. \quad (1.22)$$

В соответствии с правилом (1.20) применение преобразования Фурье к уравнению (1.21), продолженному на всю ось, приводит его к виду

$$(-\alpha^2 + k^2)U(\alpha) + (v_1^- - i\alpha v_0^-)e^{-i\alpha a} + (v_1^+ - i\alpha v_0^+)e^{i\alpha a} = F(\alpha),$$

откуда следует

$$U(\alpha) = G(\alpha)[F(\alpha) + (-v_1^- + i\alpha v_0^-)e^{-i\alpha a} + (-v_1^+ + i\alpha v_0^+)e^{i\alpha a}].$$

Далее,

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}[U] = u_p(x) + u_g^-(x) + u_g^+(x), \quad (1.23)$$

где $u_p(x) = \mathcal{F}^{-1}[GF]$ – частное решение (1.18), полученное в примере 1.1; $u_g^\pm(x) = -v_1^\pm g(x \mp a) - v_0^\pm g'(x \mp a)$ – решения, удовлетворяющие внутри интервала $(-a, a)$ однородному уравнению $u'' + k^2 u = 0$ (общие решения); они выражаются через функцию Грина рассматриваемого ОДУ

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}[G] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{-\alpha^2 + k^2} d\alpha \quad (1.24)$$

и ее первую производную $g'(x) = \mathcal{F}^{-1}[-i\alpha G]$.

Функции u_p и g выписаны в явном виде и поэтому считаются известными (далее будет показано, как перейти от интегральных представлений к более привычным аналитическим), а четыре неизвестные константы $v_n^\pm, n = 0, 1$ должны быть определены из дополнительных (обычно граничных) условий.

Для ОДУ второго порядка должно быть задано два граничных условия. Пусть для определенности это условия жесткого закрепления на краях:

$$u(-a) = u(a) = 0. \quad (1.25)$$

Подстановка решения (1.23) в эти условия дает два соотношения, связывающих неизвестные константы:

$$\begin{aligned} u(-a) = u_p(-a) - v_1^- g(-2a) - v_0^- g'(-2a) - v_1^+ g(0) - \\ - v_0^- g'(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$u(a) = u_p(a) - v_1^- g(0) - v_0^- g'(0) - v_1^+ g(2a) - v_0^- g'(2a) = 0.$$

Однако их недостаточно для однозначного определения четырех неизвестных v_n^\pm , $n = 0, 1$. Задача кажется недоопределенной, но в действительности неопределенности нет, так как константы v_n^\pm не являются полностью независимыми. В силу соотношения (1.22) они выражаются через значения одной и той же искомой функции $u(x)$ и ее производной $u'(x)$ в граничных точках $x = \pm a$.

Для получения дополнительных условий достаточно подставить решение (1.23) в любые два соотношения из четырех равенств (1.22). В рассматриваемом случае удобнее воспользоваться представлениями для скачков функции $v_0^\pm = \pm u_0^\pm$, которые в силу граничных условий сразу дают $v_0^\pm = 0$, т.е. оставляют в уравнениях (1.26) только две неизвестные константы v_1^\pm . Последние несложно выписать в явном виде, решив получающуюся из (1.26) систему алгебраических уравнений второго порядка

$$B \mathbf{v} = \mathbf{p}, \quad (1.27)$$

$$B = \begin{pmatrix} g^- & g_0 \\ g_0 & g^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1^- \\ v_1^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} u_p^- \\ u_p^+ \end{pmatrix},$$

$$g^\pm = g(\pm 2a), \quad g_0 = g(0), \quad u_p^\pm = u_p(\pm a).$$

Подстановка найденных констант в общее решение (1.23) дает единственное решение рассматриваемой задачи (1.21), (1.25), выраженное через выписанные в виде обратных преобразований Фурье частное решение $u_p(x)$ и функцию Грина $g(x)$:

$$u(x) = u_p(x) - v_1^- g(x + a) - v_1^+ g(x - a), \quad (1.28)$$

$$v_1^\mp = (u_p^\mp g^\pm - u_p^\pm g_0)/d, \quad d = \det B = g^- g^+ - g_0^2.$$

Отметим, что подстановка общего решения (1.23) в другие два соотношения (1.22) для производных $v_1^\pm = \pm u'(\pm a)$ приводит к тому же окончательному решению, но более громоздким путем через решение системы четвертого порядка, элементы матрицы и правой части которой выражаются не только через значения функций $u_p(x)$ и $g(x \pm a)$ в граничных точках $x = \pm a$, но и их производных $u'_p(x)$ и $g'(x \pm a)$. Отсюда видно, что удачным выбором дополнительных соотношений можно существенно упростить, а неудачным — усложнить построение решения.

Замечание 1.2. Домножение Фурье-символа на экспоненту $e^{i\alpha h}$ приводит к сдвигу аргумента оригинала на h :

$$\mathcal{F}^{-1}[U(\alpha)e^{i\alpha h}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha)e^{-i\alpha(x-h)} d\alpha = u(x-h).$$

По этой причине в общем решении u_g^\pm появляется функция g со сдвинутым аргументом:

$$\mathcal{F}^{-1}[G(\alpha)e^{\pm i\alpha a}] = g(x \mp a).$$

Замечание 1.3. Производные $g'(x \mp a)$ возникают в силу связи (1.13) между множителем $-i\alpha$ и производной оригинала, что в комбинации с предыдущим свойством дает

$$\mathcal{F}^{-1}[-i\alpha G(\alpha)e^{\pm i\alpha x}] = g'(x \mp a).$$

1.3.4. Преобразование Фурье свертки двух функций

1. *Свертка* функций $u(x)$ и $v(x)$, заданных на всей оси x , обозначается $u * v$ и вводится одним из следующих

интегральных представлений

$$s(x) = (u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)v(x - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \xi)v(\xi)d\xi.$$

Они эквивалентны, так как сводятся одно к другому заменой $\xi := x - \xi$. Поскольку свертка $s(x)$ является функцией от x , к ней можно применить преобразование Фурье:

$$S(\alpha) = \mathcal{F}[u * v] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)v(x - \xi)d\xi e^{i\alpha x} dx.$$

Считая, что функции $u(x)$ и $v(x)$ обладают свойствами, позволяющими менять порядок интегрирования (т.е. убывают на бесконечности достаточно быстро), рассмотрим интеграл по x . Замена $x - \xi = t$, $dx = dt$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x - \xi)e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\alpha(t+\xi)} dt = V(\alpha)e^{i\alpha\xi}.$$

Далее, учитывая появившуюся экспоненту $e^{i\alpha\xi}$ в интеграле по ξ , снова получаем трансформанту Фурье, но уже функции u :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)e^{i\alpha\xi} d\xi = \mathcal{F}[u] = U(\alpha).$$

В результате рассматриваемый двукратный интеграл сводится к произведению трансформант U и V :

$$\mathcal{F}[u * v] = U(\alpha)V(\alpha). \quad (1.29)$$

Другими словами, в пространстве Фурье-символов операции свертки соответствует произведение трансформант.

Следствие 1.3. Псевдодифференциальные операторы, которые вводятся через произведение Фурье-символов ядра и функции, на которую действует оператор (см. (1.15)), также можно записать в виде свертки

$$Au = \mathcal{F}^{-1}[A \cdot U] = \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \xi)u(\xi)d\xi. \quad (1.30)$$

Здесь $a(x) = \mathcal{F}^{-1}[A]$ – ядро псевдодифференциального оператора.

2. Одномерным интегральным *уравнением Винера – Хопфа* называется уравнение с разностным ядром следующего вида:

$$\mathcal{K}q \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi)q(\xi)d\xi = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.31)$$

Интегральный оператор \mathcal{K} , действующий на неизвестную функцию q , является сверткой ядра $k(x)$ с $q(x)$, а правая часть $f(x)$ – известная функция, заданная на некотором участке вещественной оси Ω :

$$\mathcal{K}q = (k * q)(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Следствие 1.4. Если уравнение (1.31) задано на всей оси x ($\Omega : -\infty < x < \infty$), то свойство (1.29) позволяет выписать его решение в явном виде:

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha)}{K(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.32)$$

где $F(\alpha) = \mathcal{F}[f]$ и $K(\alpha) = \mathcal{F}[k]$ – Фурье-символы правой части и ядра.

Действительно, в этом случае к уравнению (1.31) можно применить преобразование Фурье, которое в силу (1.29) сводит его к *функциональному уравнению*

$$K(\alpha)Q(\alpha) = F(\alpha)$$

относительно трансформанты неизвестной функции $Q = \mathcal{F}[q]$. Очевидно, $Q(\alpha) = F(\alpha)/K(\alpha)$, отсюда $q(x) = \mathcal{F}^{-1}[Q]$ имеет вид (1.32).

Следствие 1.5. Интегральный оператор \mathcal{K} уравнения Винера–Хопфа можно записать в альтернативной форме

$$\mathcal{K}q \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

1.3.5. Равенство Парсеваля

Для комплекснозначных функций, определенных на всей оси x , скалярное произведение элементов пространства $L_2(-\infty, \infty)$ вводится соотношением

$$(u, v)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v^*(x)dx. \quad (1.33)$$

Поскольку оператор \mathcal{F} отображает элементы L_2 в L_2 , к трансформантам U и V также можно применить операцию скалярного произведения:

$$(U, V)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha)V^*(\alpha)d\alpha. \quad (1.34)$$

Возникает вопрос, как эти скалярные произведения соотносятся между собой? Ответ можно получить, подставив $u = \mathcal{F}^{-1}[U]$ в интеграл (1.33) и поменяв порядок интегриро-

вания:

$$\begin{aligned}
 (u, v)_{L_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha v^*(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} v^*(x) e^{-i\alpha x} dx d\alpha.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Чтобы понять, чему равен внутренний интеграл от $v^*(x)$, рассмотрим, как действует операция комплексного сопряжения на $V(\alpha) = \mathcal{F}[v]$:

$$V^*(\alpha) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{i\alpha x} dx \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(x) e^{-i\alpha^* x} dx. \tag{1.36}$$

При выводе этого соотношения использованы следующие свойства операции комплексного сопряжения:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^* &= a^* + b^*, \\
 (ab)^* &= a^* \cdot b^* \Rightarrow (a^k)^* = (a^*)^k, \\
 a^* &= a \Leftrightarrow a - \text{вещественна}, \\
 (a^*)^* &= a.
 \end{aligned}$$

Для интегралов по вещественной оси операцию комплексного сопряжения можно вносить в подынтегральную функцию. Это правило несложно установить, вспомнив, что интеграл вводится как предел интегральной суммы:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^* &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_n f(x_n) \Delta x \right)^* = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_n f^*(x_n) \Delta x = \\
 &= \int_a^b f^*(x) dx.
 \end{aligned}$$

Аналогично можно внести операцию комплексного сопряжения в аргумент *голоморфной* функции, которая представима

в виде ряда. В частности, в рассматриваемом случае для комплексных α и вещественных x

$$(e^{i\alpha x})^* = \left(\sum_k \frac{(i\alpha x)^k}{k!}\right)^* = \sum_k \frac{(-i\alpha^* x)^k}{k!} = e^{-i\alpha^* x}.$$

Сравнивая интегралы (1.35) и (1.36), приходим к выводу, что внутренний интеграл в первом из них можно записать в виде $V^*(\alpha^*)$, а для вещественных α – в виде $V^*(\alpha)$. Таким образом, из (1.35) следует классическое *равенство Парсеваля*

$$(u, v)_{L_2} = \frac{1}{2\pi}(U, V)_{L_2}, \quad (1.37)$$

справедливое для любых комплекснозначных функций вещественного аргумента.

Замечание 1.4. Равенство Парсеваля справедливо также и для вектор-функций, для которых скалярное произведение в L_2 вводится через интеграл от скалярного произведения векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dx, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^m u_j v_j^*.$$

В этом случае оно принимает вид

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} = \frac{1}{2\pi}(\mathbf{U}, \mathbf{V})_{L_2}. \quad (1.38)$$

Замечание 1.5. Для вектор-функций многих переменных $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ скалярное произведение в $L_2(R^n)$ вводится через n -кратные интегралы по всему пространству R^n , что приводит к следующей более общей форме равенства

Парсевала:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(R^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathbf{U}, \mathbf{V})_{L_2(R^n)}. \quad (1.39)$$

Равенства (1.37), (1.38) являются его частным случаем при $m = n = 1$ и при $m \geq 2, n = 1$ соответственно.

Замечание 1.6. В классическом равенстве Парсевала интегрирование скалярного произведения Фурье-символов проводится по вещественной оси α (или по вещественному пространству $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ в случае многих переменных). Однако в волновых задачах нередко (или даже скорее – как правило) в операторе \mathcal{F}^{-1} приходится отклонять контур интегрирования в комплексную плоскость:

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}[U] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Здесь и далее Γ – контур, идущий вдоль вещественной оси и отклоняющийся от нее в комплексную плоскость α для обхода вещественных полюсов ζ_n подынтегральной функции $U(\alpha)$ (рис. 1.4).

Полюса появляются при наличии в рассматриваемом волноводе бегущих волн. Подробнее эти вопросы будут детально обсуждены далее в соответствующих параграфах, а в данный момент важен тот факт, что переменная интегрирования α может быть комплексной и поэтому звездочку над α в $V^*(\alpha^*)$ убирать нельзя!

Таким образом, при решении волновых задач необходимо использовать еще более общую форму равенства Парсевала

$$(u, v)_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} U(\alpha) V^*(\alpha^*) d\alpha \quad (1.40)$$

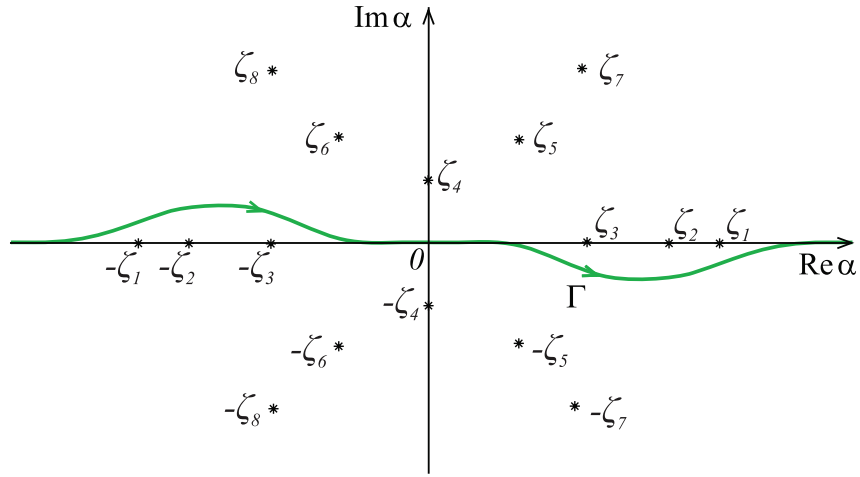


Рис. 1.4. Типичный вид контура интегрирования Γ , отклоняющегося в комплексную плоскость α при обходе вещественных полюсов ζ_n подынтегральной функции $U(\alpha)$

и соответствующие ее обобщения для вектор-функций и функций многих переменных. При проведении выкладок следует внимательно следить за этими звездочками, так как их потеря ведет не только к количественным и качественным ошибкам, но и к неверным физическим эффектам.

2. ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Динамические свойства упругих волноводов описываются уравнениями теории упругости, поэтому в настоящей главе дается краткая сводка используемых в дальнейшем соотношений (уравнения, граничные условия) и обсуждается обобщенная (вариационная) постановка краевых задач. Более подробно эти сведения излагаются в монографиях и учебниках по теории упругости и механики сплошной среды (см., например, [3, 30, 35, 36, 38, 40, 47]) и в курсах функционального анализа и математической физики [10, 24, 32, 43].

2.1. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В общем случае волновод представляет собой линейно-упругое тело, занимающее объем V (как правило, уходящий на бесконечность), ограниченный поверхностью S . В результате деформации под действием заданной системы поверхностных и объемных сил точки тела $\mathbf{x} \in V$ отклоняются от первоначального положения на величину, характеризующую *вектором перемещения* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. В предположении сплошности материала \mathbf{u} является непрерывной функцией пространственных координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ и времени t . Напряженно-деформированное состояние тела описывается при этом компонентами тензора деформации ε_{ij} и тензора напряжений σ_{ij} .

В линейной теории упругости перемещения, деформация и напряжения связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Здесь $\rho(\mathbf{x})$, $c_{ijmn}(\mathbf{x})$ – заданное распределение плотности и коэффициентов упругости материала; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1, f_2, f_3\}$ – распределение объемных сил.

Как обычно, в тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам, а для производных используется обозначение $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Жирным шрифтом обозначены *вектор-столбцы*. Их компоненты даются в фигурных скобках *в строку* либо с помощью индексной записи: $\mathbf{x} = \{x_i\}_i$, $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$ и т.п. Наряду с цифровой индексацией координат и компонент векторов и тензоров в дальнейшем будут использоваться их традиционные обозначения $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$, σ_{xx} , ε_{yz} и т. д.

В *изотропном* случае, когда упругие свойства среды одинаковы во всех направлениях, закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

где λ, μ – константы Ламе; $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемная деформация; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Вектор напряжений $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, возникающих в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$, выражается через компоненты тензора напряжений

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

С учетом соотношений (2.2), (2.3) вектор напряжений выражается через перемещения: $\boldsymbol{\tau} = T\mathbf{u}$, где T – линейный дифференциальный оператор напряжений. В изотропном случае

$$\boldsymbol{\tau} = T\mathbf{u} \equiv \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}). \quad (2.6)$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения для операторов векторного анализа: градиент – ∇ , оператор Лапласа – Δ , дивергенция – div , ротор – rot . В декартовых координатах $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ они принимают вид

$$\nabla \varphi \equiv \operatorname{grad} \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\},$$

$$\nabla^2 \varphi \equiv (\nabla, \nabla) \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

$$\Delta \mathbf{u} \equiv (\nabla, \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv (\nabla, \mathbf{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \nabla \times \mathbf{u} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right\},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные орты.

В силу соотношений (2.3), (2.4) компоненты тензора напряжений σ_{ij} выражаются через компоненты вектора смещений u_i , и уравнения движения (2.1) сводятся к уравнениям Ламе относительно перемещений \mathbf{u} . Для однородной изотропной среды уравнения Ламе принимают вид

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{f} = 0, \quad (2.7)$$

а в анизотропном случае

$$\frac{1}{2}c_{ijmn}(u_{m,nj} + u_{n,mj}) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

На всей поверхности тела S могут быть заданы либо перемещения (I краевая задача теории упругости)

$$\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in S} = \mathbf{p}, \quad (2.9)$$

либо напряжения (II краевая задача)

$$\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{x} \in S} = \mathbf{q}. \quad (2.10)$$

К *смешанным задачам*, или краевым задачам III типа, относятся те, в которых условия (2.9) заданы на некоторой части поверхности S_1 , а на остальной части S_2 – условия (2.10) ($S = S_1 \cup S_2$).

Наряду с краевыми условиями (2.9)–(2.10) решение должно удовлетворять некоторым *начальным* условиям

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2.11)$$

задающим первоначальное отклонение точек тела от положения равновесия \mathbf{u}_0 и их мгновенную скорость \mathbf{u}_1 в начальный момент времени $t = 0$.

Возмущение от локализованных в пространстве объемных сил \mathbf{f} , поверхностных нагрузок \mathbf{q} , смещений \mathbf{p} или даже от локализованного поля начальных смещений \mathbf{u}_0 и скоростей \mathbf{u}_1 распространяется с течением времени по всему объему V , поэтому данные характеристики используют для моделирования *источников* колебаний, приводящих к распространению волн в упругих волноводах.

В случае неограниченных тел (открытых волноводов), когда объем V включает бесконечно удаленные точки, фор-

мулируются также условия на бесконечности. Обычно предполагается, что

$$\mathbf{u} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

однако нулевые условия на бесконечности могут нарушаться, например, если рассматривается бесконечное время работы источника, за которое поле ненулевых смещений \mathbf{u} заполняет весь упругий объем V , достигая бесконечно удаленных точек. Такая ситуация характерна для задач об установившихся гармонических колебаниях, которые можно рассматривать как предельный режим, к которому приходит поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ при бесконечно длительной ($t \rightarrow \infty$) работе гармонического источника. При этом энергия волнового поля в бесконечном объеме также становится бесконечной, т.е. решение такой задачи в классическом энергетическом пространстве не существует.

Наряду с парадоксами бесконечности к отсутствию решения рассматриваемых задач в классическом смысле приводит наличие геометрических и физических сингулярностей, например, стремление поля напряжений к бесконечности в окрестности угловых точек тела, кромок трещин и т.п., нарушение гладкости на волновом фронте, возникающее при резком (ударном) воздействии и др.

Очевидно, что при наличии сингулярностей краевая задача не может быть поставлена в строго классическом смысле, так как производные, а тем самым уравнения и граничные условия в этих точках не определены. В этом случае используется *обобщенная* (или *вариационная*) постановка. Основная идея обобщенной постановки, предложенной в основополагающих работах Л.С. Соболева [43, 44] и развитая затем в приложении к различным конкретным задачам,

состоит в расширении класса допустимых функций и определении на них необходимых операций (в первую очередь дифференцирования) через замыкание (слабый предел) в гильбертовых пространствах.

2.2. ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА

1. Приведем кратко основные факты теории функций и функционального анализа, используемые при обобщенной постановке рассматриваемой задачи [13, 24]. Некоторые из них уже фигурировали в предыдущей главе.

Гильбертово пространство H – это линейное функциональное пространство L с введенной в нем для $\forall f, g \in H$ операцией скалярного произведения (f, g) , удовлетворяющей следующим трем аксиомам:

- 1) $(f, g) = (g, f)^*$;
- 2) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1 (f_1, g) + \lambda_2 (f_2, g)$;
- 3) $(f, f) \geq 0$; если $(f, f) = 0$, то $f \equiv 0$.

Результат скалярного произведения является комплексной величиной; звездочкой, как обычно, обозначается операция комплексного сопряжения, λ_1, λ_2 – комплексные скаляры.

Скалярное произведение порождает норму $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. В пространстве интегрируемых с квадратом вектор-функций $L_2(V)$ скалярное произведение вводится через интеграл

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{L_2} = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^* d\mathbf{x},$$

в котором V – (многомерная) область определения функций, а точкой обозначено обычное скалярное произведение векторов: $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^* = \sum_i f_i g_i^*$. Эта норма порождает новую метрику $\rho(f, g) = \|f - g\|$, замыкание в которой исходного

пространства L ($u \in H$, если $\exists u_n \in L : \|u_n - u\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) делает гильбертово пространство H *полным*.

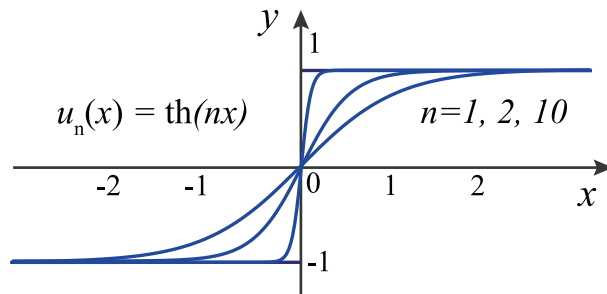


Рис. 2.1. Пример сходимости последовательности непрерывных функций $u_n(x) = \text{th}(nx)$ к разрывной $u(x) = \text{sign } x$ в метрике пространства L_2 ; $n = 1, 2, 10$

Для понимания природы обобщенной постановки важно отметить, что предельные элементы H могут не принадлежать к исходному множеству L . Например, возьмем в качестве L пространство $C(-a, a)$ — функций непрерывных на отрезке $[-a, a]$. Для $u_n(x) = \text{th}(nx) \in C(-a, a)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ справедливо $u_n(x) \rightarrow \pm 1$ при $nx \rightarrow \pm \infty$ и $u_n(0) = 0$ (рис. 2.2). Таким образом, $\|u_n - u\|_{L_2} \rightarrow 0$, где $u(x) = \text{sign } x$, т.е. в метрике L_2 последовательность сходится к разрывной функции, не принадлежащей к исходному пространству $C(-a, a)$, из элементов которого мы начали конструировать гильбертово пространство $L_2(-a, a)$ путем введения скалярного произведения и нормы. Получается, что класс элементов полного пространства существенно шире. Кроме непрерывных он включает в себя не только разрывные функции, но и функции со слабой (интегрируемой) особенностью, для которых $\|u\|_{L_2} < \infty$. При этом, поскольку дополнительные элементы включены в L_2 в результате замыкания C , они могут быть с любой точностью аппроксимированы непрерывными функциями в норме L_2 .

Множество $M \subset H$ называется *всюду плотным* в H , если $\forall u \in H$ может быть получен как предел элементов $u_n \in M$ в норме H . В рассмотренном примере множество $C(a, b)$ всюду плотно в $L_2(a, b)$. Если множество M – *счетное*, т.е. все его элементы могут быть пронумерованы, то пространство H называется *сепарабельным*. Так как в $C(a, b)$ имеется счетное всюду плотное подмножество (полиномы, тригонометрические функции и др.), то $L_2(a, b)$ также сепарабельно.

Среди всех возможных счетных всюду плотных подмножеств H можно выделить такие, элементы которых φ_j *линейно независимы*. Они обеспечивают однозначное разложение $\forall u \in H : \|u - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. являются *базисом*. Наличие базиса дает принципиальную возможность перейти от операций с элементами H (которые могут и не быть функциями в классическом смысле) к операциям с дискретным набором коэффициентов c_j , что уже осуществимо численно.

В уравнения теории упругости входят дифференциальные операторы второго порядка (см. (2.7), (2.8)), поэтому они определены на классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $C_2(V)$. Для обобщенной постановки представляется естественным расширить область определения дифференциальных операторов исходных уравнений и граничных условий путем замыкания $C_2(V)$ так, чтобы разрывные и даже сингулярные функции стали допустимыми в качестве решения. При этом необходимо определить операцию дифференцирования для новых элементов, не принадлежащих $C_2(V)$. Здесь имеются две возможности:

1) избежать этой необходимости путем разложения их по гладкому базису и сведения всех действий к операциям только с базисными функциями φ_k , на которых эти операции определены;

2) использовать обобщенные функции и правила действия над ними [9, 13].

В сущности, эти два подхода очень близки, так как действия над обобщенными функциями вводятся с помощью слабого предела операций над бесконечно гладкими пробными функциями. Рассмотрим кратко каждую из этих возможностей.

Важным следствием полноты гильбертова пространства является тот факт, что элементом, ортогональным всюду плотному подмножеству, может быть только нулевой элемент. В частности, пусть $A : G \rightarrow H$ — некоторый линейный оператор, действующий из пространства G в гильбертово пространство H , и невязка операторного уравнения

$$Au = f, \quad u \in G, \quad f \in H \quad (2.12)$$

ортогональна всем базисным функциям $\psi_j \in H$, называемым в данном случае *проекторами*:

$$(Au - f, \psi_i)_H = 0 \quad \text{для} \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

В этом случае невязка может быть только нулевым элементом пространства H , поэтому говорят, что $u \in G$ является *обобщенным* (или *вариационным*) решением операторного уравнения (2.12), удовлетворяющим ему в норме H .

Это определение естественным образом приводит к схеме Галеркина — Петрова, состоящей в разложении искомого

решения по базису пространства G

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j \quad (2.14)$$

с последующим определением неизвестных коэффициентов разложения c_j из линейной алгебраической системы, вытекающей из условий ортогональности (2.13):

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

$$a_{ij} = (A\varphi_j, \psi_i)_H, \quad f_i = (f, \psi_i)_H.$$

Формирование системы (2.15) предполагает действия только с базисными (гладкими) функциями, т.е. соответствует первой из указанных выше возможностей. Этого вполне достаточно как для корректной обобщенной постановки, так и для численного решения рассматриваемой задачи и поэтому указанный подход нашел широкое распространение, в частности, в форме метода конечных элементов (МКЭ) [?, 20, 46].

Однако сходимость разложения (2.14) по гладким базисным функциям для сингулярных решений может быть очень медленной. Намного эффективнее изучить аналитически свойства решения и выделить предварительно все «плохие» составляющие (сингулярность, сильную осцилляцию, экспоненциальное поведение и т.п.) в явном виде, существенно улучшив тем самым сходимость и точность получаемой в итоге численной схемы. Для этого требуется привлечение аппарата *обобщенных* функций [9, 13, 51], которые, не являясь функциями в строгом смысле, вводятся через замыкание сопряженного пространства линейных функционалов.

2.3. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Рассмотрим в качестве примера хорошо известную δ -функцию Дирака, удовлетворяющую свойству

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \forall f \in C, \quad (2.16)$$

т.е. задающую функционал $\delta(f) = f(0)$. В соответствии с теоремой Рисса об общем виде линейного функционала [24] он может быть представлен в виде скалярного произведения рассматриваемой функции f с некоторой функцией φ из пространства, называемого сопряженным. Поэтому наряду с исходным линейным пространством C , замыкание которого дает H , вводится *сопряженное* пространство C' , элементы которого определяют функционалы над C :

$$\varphi(f) = (f, \varphi)_H, \quad f \in C, \quad \varphi \in C'.$$

Интеграл, определяющий линейный функционал (2.16), является скалярным произведением в L_2 , поэтому по теореме Рисса входящая в него δ -функция должна принадлежать некоторому сопряженному пространству C' . Однако достаточно скоро после введения Дираком δ -функции было строго доказано, что никакая функция в классическом понимании не может удовлетворять свойству (2.16) для $\forall f \in C$. Сопряженное пространство C' не будет полным, если считать, что его элементы могут быть только функциями в классическом смысле. Для его пополнения необходимо добавить все предельные элементы в *слабой метрике*, порождаемой скалярным произведением. В частности, последовательность $\delta_\varepsilon(x)$, дающую $\delta(x)$ в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно задать в виде $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\omega(\frac{x}{\varepsilon})$, где $\omega(t)$ – любая *дельтаобразная функция*, т.е.

функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\omega(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \omega(0) \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) dt = 1, \quad (2.17)$$

$$\omega(t) = o(t^{-m}), \quad |t| \rightarrow \infty \quad \forall m > 0.$$

Это может быть, например, простая ступенька

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}, \quad (2.18)$$

остроконечная шапочка

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}, \quad (2.19)$$

бесконечно гладкая шапочка

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \quad (2.20)$$

и др.

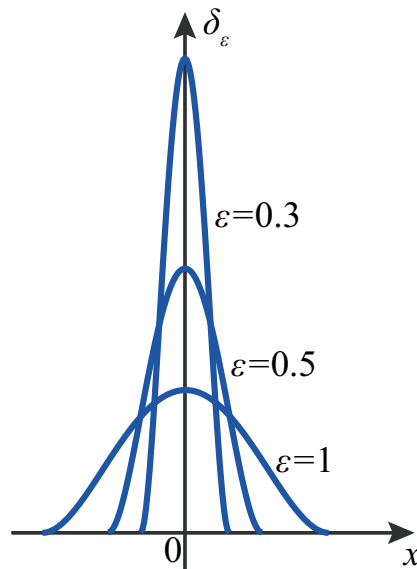


Рис. 2.2. Вид функций $\delta_\varepsilon(x)$ для функции формы (2.20) при различных ε

При любом выборе функции формы $\omega(t)$ с уменьшением ε носитель $\delta_\varepsilon(x)$ стягивается к началу координат, а значение в точке $x = 0$ растет вплоть до бесконечности при $\varepsilon = 0$ (рис. 2.2). Поэтому поточечный предел дает отличное от нуля значение только в одной точке, т.е. на множестве меры нуль:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Соответственно

$$\int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = 0.$$

С помощью замены $x = \varepsilon t$ несложно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) dt = 1,$$

т.е. в отличие поточечного слабый предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx \neq 0$ (по крайней мере для $f = \text{const}$).

Покажем, что для гладких $f(x)$ при любом выборе функции формы имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f, \delta_\varepsilon)_{L_2} = f(0). \quad (2.21)$$

Для этого разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f_k x^k + O(x^{N+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad f_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

и подставим его в рассматриваемый интеграл скалярного произведения (f, δ_ε) . Возникающие при этом интегралы от

степеней x^k заменой $x = \varepsilon t$ приводятся к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \delta_{\varepsilon}(x) dx = \varepsilon^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k \omega(t) dt.$$

По свойству $\omega(t)$ (см. (2.17)) данный интеграл при $k = 0$ равен единице, а для остальных степеней $k \geq 1$ он является величиной порядка $O(\varepsilon^k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, все члены разложения, кроме первого, дают при $\varepsilon = 0$ нулевой вклад, что доказывает справедливость соотношения (2.21).

Таким образом, определение δ -функции (2.16) можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f, \delta_{\varepsilon})_{L_2} = (f, \delta)_{L_2}, \quad \forall f \in C, \quad (2.22)$$

указывающем на то, что δ -функция является слабым пределом последовательности δ_{ε} при $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, δ -функция пополняет пространство обычных (регулярных) функций, задающих линейные функционалы, действующие на гладкие функции f .

Итак, δ -функция не может быть получена как обычный поточечный предел последовательности задающих функций, а только как слабый предел. Она не существует в явном виде, а только в подынтегральных выражениях для функционалов в L_2 . Такие элементы сопряженного пространства C' называются *сингулярными* в отличие от *регулярных*, совпадающих с обыкновенными функциями. В отечественной литературе сингулярные элементы обычно называют *обобщенными функциями*, а в иностранной — *распределениями* (distributions) [51], чтобы подчеркнуть их отличие от обычных функций.

Операции над сингулярными элементами также вводятся через слабый предел:

$$A\varphi : (f, A\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f, A\varphi_\varepsilon) = (\tilde{A}f, \varphi), \quad \forall f \in K. \quad (2.23)$$

Здесь K – класс функций, на которых определен сопряженный к A оператор \tilde{A} . Он может быть более узким, чем пространство непрерывных функций C . Например, при введении операции дифференцирования обобщенных функций в качестве K выбирается C_∞ – пространство бесконечно гладких функций, которое тем не менее плотно в L_2 . Использование сопряженного оператора \tilde{A} позволяет в соотношении (2.23) перебросить действие A с φ_ε (которые могут быть и не гладкими, как, например, (2.18) или (2.19)) на гладкие $f \in K$.

При определении производной от δ -функции сопряженный оператор выводится простым интегрированием по частям:

$$(f, \delta'_\varepsilon)_{L_2} = f\delta_\varepsilon|_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty f'(x)\delta_\varepsilon(x)dx = -(f', \delta_\varepsilon)_{L_2}.$$

Здесь учтено, что $f\delta_\varepsilon|_{-\infty}^\infty = 0$. Следовательно, для оператора $\frac{d}{dx}$ сопряженным является оператор $-\frac{d}{dx}$. Соответственно

$$\delta'(x) : (f, \delta') = -(f', \delta) = -f'(0).$$

Аналогично для n -й производной

$$\delta^{(n)}(x) : (f, \delta^{(n)}) = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

В общем случае сопряженный оператор \tilde{A} несложно получить в форме обратного преобразования Фурье, воспользовавшись равенством Парсеваля (1.40) и представлением оператора A в форме псевдодифференциального оператора

(1.15). В результате

$$(f, A\varphi)_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F(\alpha) A^*(\alpha^*) \Phi^*(\alpha^*) d\alpha = (\tilde{A}f, \varphi)_{L_2}, \quad (2.24)$$

откуда

$$\tilde{A}f = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} A^*(\alpha^*) F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Аналогично с помощью равенства Парсеваля несложно определить и преобразование Фурье сингулярных функций. Например, из сопоставления

$$(f, \delta^{(k)})_{L_2} = \frac{1}{2\pi} (F, D_k)_{L_2} = (-1)^k f^{(k)}(0) \quad \text{и}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha)^k F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

следует, что

$$D_k(\alpha) = \mathcal{F}[\delta^{(k)}] = [(-1)^k (-i\alpha^*)^k]^* = (-i\alpha)^k.$$

Формально можно написать

$$\delta^{(k)}(x) = \mathcal{F}^{-1}[D_k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha)^k e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2.25)$$

В частности, при $k = 0$ $D_0 = \mathcal{F}[\delta] = 1$ дает интегральное представление δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2.26)$$

В классическом смысле эти интегралы не существуют, так как подынтегральные функции не стремятся к нулю и

даже растут (как в (2.25)) при $\alpha \rightarrow \pm\infty$. Поэтому записать сингулярные (обобщенные) функции в виде обратного преобразования Фурье можно только формально, понимая, что такие интегралы определены только в подынтегральных выражениях скалярного произведения. Последнее с помощью равенства Парсеваля представимо в виде скалярного произведения Фурье-символов (как в (2.24)), в котором возможный рост $A(\alpha)\Phi(\alpha)$ гасится убыванием $F(\alpha)$. Для $f \in C_\infty$ трансформанта $F(\alpha)$ убывает при $\alpha \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой степени α . Поэтому допустимым является любой степенной рост Фурье-символов обобщенных функций на бесконечности. Тем самым переход к обобщенным функциям позволяет не останавливаться на вопросах сходимости интегралов, встречающихся в промежуточных выкладках.

В дальнейшем расходящиеся интегралы с растущими на бесконечности Фурье-символами всегда будут пониматься как интегральное представление обобщенных функций сингулярного типа, не оговаривая это особо. Главное, необходимо помнить, что они имеют смысл только в подынтегральных выражениях соответствующих функционалов. Это вполне согласуется и с понятием обобщенного решения, от которого требуется только удовлетворение вариационным соотношениям (2.13) (т.е., строго говоря, оно тоже существует только как подынтегральное выражение). В частности, δ -функции, входящие в состав встречающихся в дальнейшем формул и выражений (например, при описании сосредоточенного воздействия), автоматически указывают на то, что все выкладки с ними необходимо понимать только в обобщенном (вариационном) смысле, хотя внешне они выглядят как обычные действия (сложение, умножение, дифференцирование и т.д.).

Пример 2.1. Формула (1.20), полученная для преобразования Фурье производных от разрывной функций, фактически может использоваться только в обобщенном смысле, так как $\mathcal{F}[u^{(n)}]$ содержит слагаемые, растущие при $\alpha \rightarrow \infty$. Применяя к ней обратное преобразование Фурье и учитывая представление (2.25), приходим к обобщенному представлению производной от разрывной функции

$$u^{(n)} = \frac{d^n u(x)}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \delta^{(n-k-1)}(x - x_0). \quad (2.27)$$

Здесь $\frac{d^n u}{dx^n}$ – регулярная функция, результат обычного дифференцирования в тех точках, где $u(x)$ дифференцируема (т.е. на открытом множестве с выколотой точкой разрыва x_0), а слагаемые с производными δ -функции (сингулярная часть) – вклад производных в точке разрыва, понимаемых в обобщенном смысле.

При $n = 1$ из представления (2.27) следует, что производная в точке разрыва дает $v_0 \delta(x - x_0)$. Например, для производных от $|x|$ получаем

$$|x|' = \operatorname{sgn} x, \quad |x|'' = -2\delta(x), \quad |x|''' = -2\delta'(x) \quad \text{и т.д.} \quad (2.28)$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

В предыдущих главах уже встречались комплексные переменные и использовались некоторые сведения из комплексного анализа. В данной главе даются краткие, но достаточные для дальнейшего изложения сведения из комплексного анализа. Для более детального знакомства с теорией функций комплексных переменных (ТФКП) следует обратиться к классическим учебникам и монографиям [19, 28, 39, 41].

Хотя Фурье-символ $U(\alpha)$ был введен как функция комплексной переменной α , в этой главе, чтобы избежать дополнительных сложностей при изложении и восприятии классических сведений, используется традиционное обозначение для комплексной переменной $z = x + iy$.

3.1. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Графически комплексная величина $z = x + iy$ обозначается точкой на комплексной плоскости C , декартовыми координатами (x, y) которой являются ее вещественная и мнимая части $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ (рис. 3.1).

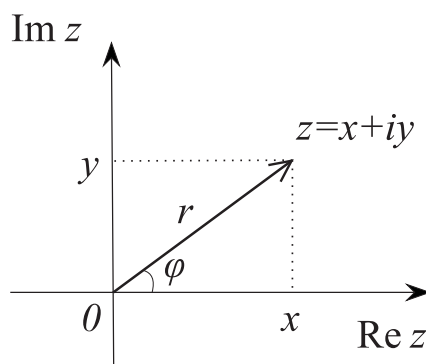


Рис. 3.1. Комплексная плоскость z

Наряду с декартовой используется также полярная форма записи: $z = re^{i\varphi}$, в которой (r, φ) – полярные координаты точки (x, y) , связанные с декартовыми координатами

соотношениями

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\y &= r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x,\end{aligned}$$

согласующимися с представлением Эйлера

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi}.$$

Полярный радиус r является абсолютной величиной или *модулем* комплексного числа $r = |z|$, а угол φ — его *аргументом*.

Пусть $w = f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ — некоторая комплекснозначная функция, отображающая точки комплексной плоскости $z \in C$ в комплексные величины $w = w_1 + iw_2$, а определяющие ее функции u, v — вещественные функции двух вещественных переменных x, y . *Производная* функции $f(z)$ в некоторой точке $z_0 \in C$ вводится, как и для вещественных функций, через предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z}, \quad (3.1)$$

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Однако в отличие от вещественной функции точка z , стремящаяся к z_0 , может приближаться к ней с различных направлений. Очевидно, что значение производной $f'(z_0)$ при этом меняться не должно. Это требование накладывает довольно жесткие ограничения на определяющие $f(z)$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Для вывода условий, которым они должны удовлетворять, достаточно рассмотреть предел (3.1) при стремлении $z \rightarrow z_0$ вдоль координатных осей x и y ($\Delta z = x - x_0$ и $\Delta z = i(y - y_0)$ соответственно). Для дифференцируемых в

точке (x_0, y_0) функций u и v в первом случае получаем

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

а во втором

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) / i = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сопоставление вещественных и мнимых частей этих представлений показывает, что функции u и v должны быть такими, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Условия (3.2) называются *условиями Коши – Римана*. Они являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы предел (3.1) не зависел от траектории движения точки z к точке z_0 , т.е. чтобы производная $f'(z_0)$ была определена однозначно. В этом случае функция $f(z)$ называется *дифференцируемой*, или *аналитической*, функцией комплексной переменной в некоторой окрестности точки z_0 .

Интересным следствием условия (3.2) является возможность записать производную аналитической функции в различных эквивалентных между собой формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Несложно убедиться, что условия Коши – Римана удовлетворяются и для вещественной и мнимой частей функции $f'(z)$. Следовательно, для аналитической в окрестности точки z_0 функции $f(z)$ аналитической является и ее производная $f'(z)$, для которой также существует производная $f''(z)$, и т.д. По индукции приходим к заключению, что аналитическая

функция *бесконечно дифференцируема* в любой точке z_0 из области ее аналитичности.

Очевидно, аналитическими могут быть далеко не все функции, даже из тех, которые можно записать с помощью явного выражения (т.е. задать некоторой формулой), однако класс их достаточно обширен. Исходя из того, что при работе с аналитическими функциями свойство аналитичности не нарушается при их домножении на число, сложении, умножении и делении (кроме точек, в которых знаменатель обращается в ноль), а также из того, что функции $w = \text{const}$ и $w = z$ являются аналитическими, несложно убедиться, что этим свойством обладают и получающиеся из них с помощью указанных операций полиномы, дробно-рациональные функции, а также функции, представимые в виде сходящегося степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (3.3)$$

К последним относится большинство специальных функций, таких как $\sin z$, $\cos z$, e^z , гамма-функция – $\Gamma(z)$, функции Бесселя – $J_n(z)$, функции Лежандра – $P_\nu(z)$, гипергеометрические функции – ${}_pF_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$ и др. [1].

В то же время такие простые операции, как комплексное сопряжение $z^* = x - iy$, вычисление модуля $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, определение вещественной и мнимой частей $\text{Re } z = x$ или $\text{Im } z = y$, не являются аналитическими функциями. Их наличие в сложных выражениях указывает на нарушение аналитичности. Например, функции $\sin z^*$, $\cos |z|$, $e^{\text{Re } z}$ уже не являются аналитическими в односвязной области, содержащей точку $z = 0$.

Функции, представимые в виде ряда (3.3), называются *голоморфными*. Из голоморфности функции $f(z)$ вытекает и ее аналитичность в круге $|z - z_0| < \rho$, где ρ — *радиус сходимости* ряда (3.3), который по этой причине называется также *радиусом аналитичности*. И наоборот, в силу бесконечной дифференцируемости аналитическая функция может быть разложена в некоторой окрестности точки z_0 в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho,$$

т.е. в сходящийся степенной ряд вида (3.3) с коэффициентами $c_k = f^{(k)}(z_0)/k!$. Таким образом, из аналитичности функции следует ее голоморфность. Следовательно, эти свойства эквивалентны. В некоторых книгах аналитическими называют функции, разложимые в ряд (*критерий Вейерштрасса*), а уже потом доказывают их дифференцируемость.

Существует также понятие *аналитичности по Коши*. Ею обладают функции, для которых

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

для любого замкнутого контура γ , целиком лежащего в некоторой односвязной области Ω . Его эквивалентность предыдущим условиям следует из интегральной теоремы Коши, в которой доказывается независимость значения интеграла от аналитической функции от пути интегрирования, в частности, равенство нулю интеграла по замкнутому контуру. Здесь необходимо обратить внимание на следующие замечания,

важные для практической работы с контурными интегралами.

Замечание 3.1. Пусть A и B – фиксированные точки, лежащие в односвязной области аналитичности Ω функции $f(z)$. Значение интеграла

$$I = \int_{\gamma_{AB}} f(z) dz -$$

одно и то же для любого контура интегрирования γ_{AB} , соединяющего эти точки и целиком лежащего в Ω (рис. 3.2, а). Другими словами, если концы контура A и B зафиксированы, то его можно непрерывно деформировать произвольным образом, не выходя из Ω . Значение интеграла I при этом не меняется.

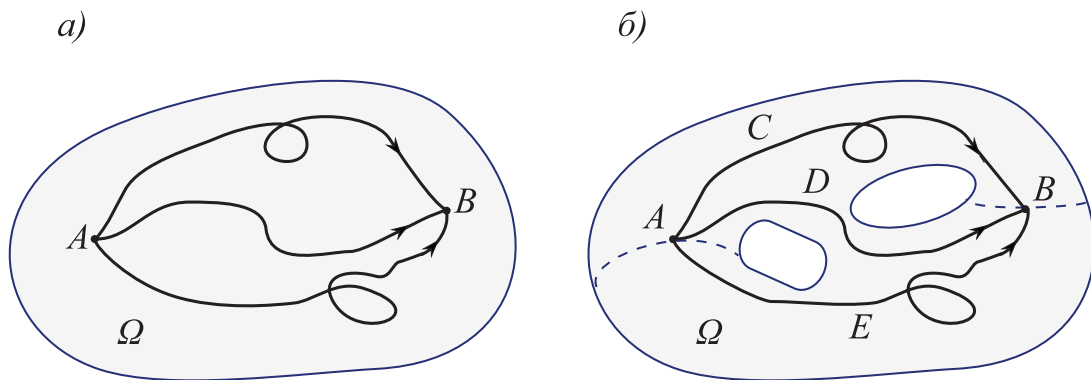


Рис. 3.2. Контурны интегрирования γ_{AB} в односвязной а) и многосвязной б) области аналитичности $f(z)$

Замечание 3.2. Требование односвязности Ω существенно. Если область многосвязна, то существуют контуры, соединяющие A и B (например, γ_{ACB} и γ_{ADB} на рис. 3.2 б, которые нельзя свести от одного к другому непрерывным деформированием, не пересекая границы Ω . В этом случае предыдущее замечание справедливо только для односвязной подобласти $V \in \Omega$, целиком содержащей γ_{AB} (пунктиром

на рис. 3.2, б показана дополнительная граница, делающая многосвязную область односвязной). Значение интеграла не меняется, если при деформировании контур не пересекает как исходные, так и эти дополнительные границы. В частности, если в односвязной области Ω имеются изолированные особые точки, в которых нарушается аналитичность, то эти точки должны быть исключены из Ω , что делает ее многосвязной.

Замечание 3.3. Если при непрерывном деформировании контура γ_{AB} он пересекает изолированный полюс ζ , то значение I меняется на строго определенную величину, равную вкладу *вычета* функции $f(z)$ в этом полюсе (см. следующий параграф).

3.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ, ПОЛЮСА, ВЫЧЕТЫ

1. Одним из удивительных свойств аналитической функции является возможность однозначно определить ее во всей области аналитичности V , исходя из ее значений в любой произвольно малой подобласти $V_0 \subset V$. Это похоже на то, как свойства живого организма определяются информацией, заключенной в одной молекуле ДНК.

Более формально единственность *аналитического продолжения* можно описать следующим образом. Пусть f_1 и f_2 — две аналитические функции, определенные в открытых областях V_1 и V_2 и совпадающие в их пересечении V_0 :

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{для} \quad z \in V_0 = V_1 \cap V_2.$$

Тогда аналитическая функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in V_1 \\ f_2(z), & z \in V_2 \end{cases}$$

однозначно определена в объединении этих областей $V = V_1 \cup V_2$ (рис. 3.3). Однозначность означает, что не существует аналитической функции $g(z)$, совпадающей с $f(z)$ в V_0 , но отличающейся от нее в V .

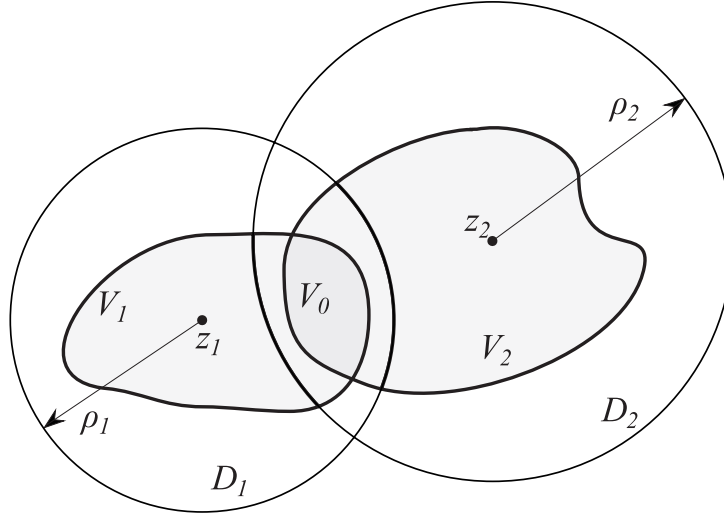


Рис. 3.3. Аналитическое продолжение функции $f(z)$ из области V_0 на область $V = V_1 \cup V_2$ с помощью ростков $f_1(z)$ и $f_2(z)$, заданных в кругах сходимости $|z| < \rho_n$, $n = 1, 2$

Функции f_1, f_2 могут быть заданы различными способами: явными формулами, интегралами, рядами. Последнее в силу их голоморфности всегда возможно. Пусть, например, это ряды с центрами в точках $z_n \in V_n$, $n = 1, 2$

$$f_n(z) = \sum_k a_{n,k} (z - z_n)^k, \quad (3.4)$$

сходящиеся в открытых круговых областях $D_n : |z - z_n| < \rho_n$, включающих V_0 , но не покрывающих всю область V . Ряды (3.4), называемые *аналитическими ростками*, обеспечивают аналитическое продолжение функции $f(z)$ из подобласти V_0 на всю область V (фактически на покрывающую ее область $D = D_1 \cup D_2$).

В общем случае возможно построение цепочки аналитических ростков из некоторой удаленной исходной области

Ω_0 , в которой функция $f(z)$ первоначально определена, до требуемой области Ω . Очевидно, что путь аналитического продолжения, определяемого цепочкой центров z_n , не может проходить через точки и пересекать линии или участки комплексной плоскости, в которых свойство аналитичности $f(z)$ нарушается. Поэтому главным фактором, ограничивающим радиус аналитичности ростков ρ_n , является расстояние от центра z_n до ближайшей точки такого множества, называемого множеством *сингулярных точек* рассматриваемой функции. Среди них для дальнейшего изложения наиболее важны полюса и точки ветвления.

2. Сингулярная точка ζ называется *изолированным полюсом* функции $f(z)$, если в некоторой ее окрестности V функция может быть представлена в виде

$$f(z) = g(z)/(z - \zeta)^m, \quad z \in V, \quad (3.5)$$

где $g(z)$ – функция аналитическая в V , $\zeta \in V$. Натуральное число m называется *кратностью* полюса, при $m = 1$ точка ζ – *однократный* изолированный полюс.

Функция $f(z)$ является аналитической в области $V \setminus \{\zeta\}$ (с выколотой точкой ζ), однако она не может быть представлена в этой области степенным рядом вида (3.3) с центром в ζ . Вместо этого она записывается в форме *ряда Лорана*, суммирование в котором начинается с отрицательного индекса $-m$:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z - \zeta)^k, \quad z \in K. \quad (3.6)$$

Ряд Лорана описывает функцию аналитическую в открытом кольце K : $0 < \varepsilon < |z - \zeta| < \rho$, где ε – произвольно малая величина; ρ – расстояние до ближайшей к ζ сингуляр-

ной точки. Коэффициенты ряда определяются контурными интегралами

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz \quad (3.7)$$

по любому замкнутому контуру $\gamma \in K$, обходящему полюс ζ против часовой стрелки (рис. 3.2).

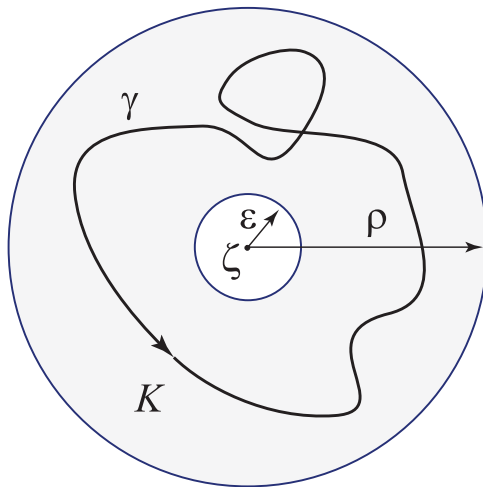


Рис. 3.4. Замкнутый контур γ в кольце аналитичности K

Эта формула остается справедливой и для *регулярной* точки z_0 (очевидно, с заменой ζ на z_0), определяя в этом случае коэффициенты ряда Тейлора (3.3). Для лучшего понимания того, как работает представление (3.7), рассмотрим интеграл

$$I_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - \zeta)^p dz, \quad (3.8)$$

в котором p может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. В силу теоремы Коши значение I_p не зависит от конкретной формы контура γ , поэтому в качестве γ зафиксируем окружность некоторого радиуса r :

$$\gamma: z - \zeta = re^{i\varphi}, \quad \varepsilon < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В этом случае интегрирование по γ сводится к интегралу по полярному углу φ , который, учитывая, что $z = \zeta + re^{i\varphi}$ и $dz = rie^{i\varphi}d\varphi$, принимает вид

$$I_p = \frac{r^{p+1}i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{i(p+1)\varphi} d\varphi.$$

В силу периодичности подынтегральной функции этот интеграл равен нулю для $\forall p$, кроме $p = -1$, когда он становится интегралом от единицы. Отсюда следует замечательное свойство интеграла (3.8)

$$I_p = \begin{cases} 1, & p = -1 \\ 0, & p \neq -1, \quad p - \text{целое число.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Согласно интегральной теореме Коши это свойство выполняется не только при интегрировании по окружности, но и для любого замкнутого контура $\gamma \in K$, обходящего точку ζ против часовой стрелки.

Подстановка ряда Лорана вида (3.6), но с индексом суммирования n , в представление (3.7) дает

$$c_k = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n I_{n-k-1}.$$

В этом ряду $I_{n-k-1} = 1$ только при $n - k - 1 = -1$, т.е. при $n = k$, а остальные слагаемые равны нулю. Отсюда приходим к тождеству $c_k = c_k$, подтверждающему справедливость формулы (3.7).

В этом контексте интеграл из определения аналитичности по Коши

$$I = \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (3.10)$$

можно считать частным случаем формулы (3.7) при $k = -1$. Если $f(z)$ – аналитическая функция во всех точках односвязной области, содержащей γ , в том числе и в точке ζ , то ряд Лорана (3.6) вырождается в ряд Тейлора (3.3) с суммированием только по положительным индексам ($m = 0$), т.е. интеграл (3.10), а с ним и коэффициент c_{-1} равны нулю, что согласуется с критерием Коши для аналитических функций. Если же ζ – единственный изолированный полюс внутри γ , то подстановка $f(z)$ в форму ряда Лорана (3.6) дает с учетом свойства (3.9) основной результат теории вычетов, который также называют *теоремой Коши*:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta}. \quad (3.11)$$

Здесь $\operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta} = c_{-1}$ – коэффициент слагаемого ряда Лорана с номером $k = -1$, который называется *вычетом* функции $f(z)$ в полюсе ζ .

Замечание 3.4. Вычет – это всегда только коэффициент c_{-1} независимо от кратности полюса m , т.е. вычислять остальные коэффициенты c_k для использования формулы (3.11) не надо.

При наличии нескольких полюсов ζ_n , лежащих внутри замкнутого контура γ , формула (3.11) принимает вид

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta_n}. \quad (3.12)$$

Это представление является главным инструментом техники вычисления контурных интегралов с помощью вычетов. Для его использования необходимо уметь вычислять сами вычеты.

3. В случае однократного полюса ζ ($m = 1$) для вычисления вычета достаточно домножить представление (3.6) на $z - \zeta$ и взять предел при $z \rightarrow \zeta$:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)(z - \zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - \zeta)^{k+1}.$$

При $z = \zeta$ все сомножители $(z - \zeta)^{k+1}$ в положительной степени (т.е. для $k \geq 0$) обратятся в нуль, а в нулевой степени (при $k = -1$) $(z - \zeta)^0 = 1$ для $\forall z$. В результате при $m = 1$

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)(z - \zeta). \quad (3.13)$$

Для многократных полюсов ($m \geq 2$) эта формула не работает, так как домножения на $z - \zeta$ недостаточно для устранения сингулярных членов с номерами $k \leq -2$. Для устранения такой сингулярности можно домножить ряд на $(z - \zeta)^m$:

$$f(z)(z - \zeta)^m = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - \zeta)^{k+m},$$

однако предел $z \rightarrow \zeta$ оставляет здесь только коэффициент c_{-m} , в то время как множитель при c_{-1} обращается в нуль, как и для всех остальных c_k , при $k \geq -m + 1$. Чтобы сделать этот ряд начинающимся с $k = -1$, достаточно продифференцировать его $m - 1$ раз:

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} [f(z)(z - \zeta)^m] = (m - 1)! c_{-1} + O(z - \zeta), \quad z \rightarrow \zeta,$$

что приводит к общей формуле для вычисления вычета в m -кратном полюсе

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta} = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} [f(z)(z-\zeta)^m]|_{z=\zeta}. \quad (3.14)$$

Формула (3.13) является частным случаем данного представления при $m = 1$.

Нередко функции, для которых необходимо вычислять вычеты, задаются в виде дроби:

$$f(z) = g(z)/d(z),$$

при этом полюс ζ — это один из нулей знаменателя: $d(\zeta) = 0$. В этом случае формула (3.13) для однократного полюса сводится к более удобному для вычислений виду

$$c_{-1} = g(\zeta)/d'(\zeta). \quad (3.15)$$

Для многократного полюса формулу (3.14) также можно свести к набору производных от числителя и знаменателя $g(z)$ и $d(z)$, но выражение получается слишком громоздким. Вместо этого удобнее воспользоваться их разложением в ряды, что позволяет вывести простые соотношения между коэффициентами, дающие в итоге алгоритм вычисления вычета c_{-1} .

В случае m -кратного полюса

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z-\zeta)^n, \quad d(z) = \sum_{j=m}^{\infty} d_j(z-\zeta)^j.$$

Коэффициенты g_n и d_j считаются здесь известными:

$$g_n = g^{(n)}(\zeta)/n!, \quad d_j = d^{(j)}(\zeta)/j!,$$

а суммирование во втором ряду начинается с $j = m \geq 1$, так как ζ — m -кратный нуль функции $d(z)$. Из разложения (3.6) следует

$$g(z) = d(z) \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - \zeta)^k$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - \zeta)^n &= \sum_{j=m}^{\infty} d_j (z - \zeta)^j \cdot \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - \zeta)^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n d_{m+i} c_{n-m-i} \right) (z - \zeta)^n. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(z - \zeta)^n$, приходим к цепочке соотношений

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad g_0 = d_m c_{-m} \\ n = 1 & \quad g_1 = d_m c_{1-m} + d_{m+1} c_{-m} \\ \dots & \quad \dots \\ n = p & \quad g_p = \sum_{i=0}^p d_{m+i} c_{p-m-i} \\ \dots & \quad \dots \\ n = m-1 & \quad g_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_{m+i} c_{-1-i}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Требуемый коэффициент c_{-1} появляется здесь только в последней строке при $n = m - 1$, поэтому он может быть выражен через коэффициенты c_{-1-i} для сингулярных слагаемых высших порядков, которые в свою очередь вычисляются с помощью следующих рекуррентных соотношений,

вытекающих из равенств (3.16):

$$\begin{aligned}
c_{-m} &= g_0/d_m \\
c_{1-m} &= (g_1 - d_m c_{1-m})/d_m \\
&\dots \\
c_{p-m} &= [g_p - \sum_{i=1}^p d_{m+i} c_{p-m-i}]/d_m
\end{aligned} \tag{3.17}$$

и т.д. для $p = 0, 1, \dots, m-1$. Последнее из них (при $p = m-1$) и дает требуемое значение c_{-1} . Здесь и далее, как обычно, считается, что $\sum_{i=k}^n a_i = 0$, если $k > n$, т.е. нижний предел суммирования больше верхнего. Такая ситуация встречается в (3.17) при $m = 1$. В этом случае $p = 0$ и $c_{-1} = g_0/d_1$, что совпадает с формулой (3.15).

3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Формула Коши (3.12) позволяет эффективно вычислять интегралы по замкнутому контуру, заменяя их явными аналитическими представлениями в виде суммы вычетов. Для приобретения опыта применения этой техники в конкретных ситуациях рекомендуется самостоятельно прорешать соответствующие примеры из популярных задачников по теории функций комплексного переменного, например из [11]. Далее разбирается несколько типичных примеров, в которых требуется вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

для различных функций $f(z)$ и контуров интегрирования γ при обходе против часовой стрелки.

Пример 3.1. $f(z) = z/(z^2 + 1)$, $\gamma = \gamma_n$ — окружности $|z - z_n| = r_n$, $n = 1, 2, 3, 4$ (рис. 3.3).

$$\gamma_1 : z_1 = 0, r_1 = 2, \quad \gamma_2 : z_2 = 0, r_2 = 0.5,$$

$$\gamma_3 : z_3 = 1 + i, r_3 = 2, \quad \gamma_4 : z_4 = -0.1i, r_4 = 1.$$

У данной подынтегральной функции числитель $g(z) = z$, а знаменатель $d(z) = z^2 + 1$. Из характеристического уравнения $d(z) = 0$ следует, что она имеет два однократных полюса $\zeta_1 = i$ и $\zeta_2 = -i$. Общее выражение для вычетов здесь сравнительно простое:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta} = \frac{g(\zeta)}{d'(\zeta)} = \frac{\zeta}{2\zeta} = \frac{1}{2},$$

поэтому вычисление сводится к анализу того, какие из полюсов попадают внутрь контура интегрирования и дают вклад в соответствии с формулой (3.12). Для различных z_n и r_n имеем

$n = 1$, оба полюса попадают внутрь контура γ_1 :

$$I = \frac{2\pi i}{2\pi i} (\operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta_1} + \operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta_2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$n = 2$, оба полюса вне контура $\gamma_2 \Rightarrow I = 0$;

$n = 3$ и $n = 4$, вклад дает только один из полюсов $\Rightarrow I = 1/2$.

Одним из этих трех значений $0, 1/2$ или 1 и исчерпываются все возможные значения этого интеграла при любом выборе замкнутого контура γ .

Пример 3.2. $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $\gamma : |z| = r$ — окружность радиуса r с центром в нуле. Здесь $g(z) = \cos z$, $d(z) = \sin z$; из характеристического уравнения $\sin z = 0$ следует наличие бесконечного набора полюсов $\zeta_n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, расположенных на вещественной оси с шагом π . Вычет

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta_n} = \frac{\cos z}{(\sin z)'}|_{z=\zeta_n} = 1 \quad \text{для} \quad \forall \zeta_n,$$

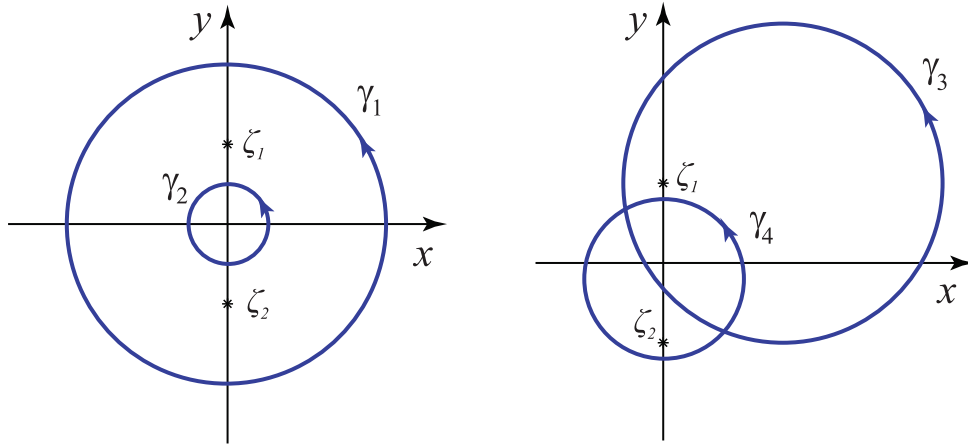


Рис. 3.5. Полюса ζ_1, ζ_2 и различные случаи расположения контура интегрирования γ_n в комплексной плоскости z

поэтому фактически I равно числу полюсов, попадающих внутрь контура. Для $r < \pi$ имеется только один полюс $\zeta_0 = 0$, т.е. $I = 1$, а для радиуса в пределах $\pi k < r < \pi(k + 1)$ добавляется k пар полюсов, т.е. $I = 2k + 1$.

Пример 3.3. $f(z) = \sin \pi z / (z^4 - 2z^2 + 1)$, $\gamma : |z| = 2$.

Характеристическое уравнение

$$d(z) = z^4 - 2z^2 + 1 = (z^2 - 1)^2 = 0$$

имеет два двукратных корня $\zeta_1 = -1$ и $\zeta_2 = 1$. На первый взгляд здесь необходимо воспользоваться общей формулой (3.14). Однако следует обратить внимание на то, что числитель $g(z) = \sin \pi z$ также обращается в нуль в этих точках, следовательно, фактическая кратность полюсов на единицу меньше и, как и в предыдущем случае, можно воспользоваться более простой формулой (3.15). Для этого необходимо перегруппировать выражения для $g(z)$ и $d(z)$, перенося из знаменателя в числитель сомножители $z - \zeta_n$, устранимые числителем:

$$g(z) = \sin \pi z / (z^2 - 1), \quad d(z) = z^2 - 1.$$

Хотя у функции $g(z)$ появился знаменатель, обращающийся в нуль при $z = \pm 1$, она определена в этих точках и не равна в них нулю:

$$g(\pm 1) = \lim_{z \rightarrow \pm 1} \frac{\sin \pi z}{z^2 - 1} = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Производная знаменателя $d'(z) = 2z$ и соответственно

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\pm 1} = \mp \frac{\pi}{2} \left(\pm \frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 3.4. $f(z) = \sin z/z^k$, $\gamma: |z| = 1$;

а) $k = 1$, б) $k = 10$, в) $k = 101$.

Здесь только один полюс $\zeta = 0$, но кратности $m = k - 1$ (на единицу меньше, чем k , так как одна кратность убирается нулем числителя). Таким образом, для $k = 1$ полюс устраним ($m = 0$, $\operatorname{res} f(z)|_{z=0} = 0$), т.е. в случае а) $I = 0$.

В случае б) $g(z) = \sin z/z$, $d(z) = z^9$ ($m = 9$) и для применения общей формулы (3.14) требуется восьмикратное дифференцирование, что довольно громоздко. Использовать соотношения (3.17) здесь намного удобнее, тем более, что разложение синуса в ряд хорошо известно:

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

следовательно,

$$g(z) = \sin z/z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad \text{где}$$

$$g_n = \begin{cases} (-1)^j/(2j+1)! & \text{для четных } n = 2j \\ 0 & \text{для нечетных } n = 2j+1, \end{cases}$$

а ряд для знаменателя исчерпывается одним членом: $d(z) = d_9 z^9$, $d_9 = 1$. Все старшие коэффициенты $d_{m+i} \equiv 0$, поэтому суммы в (3.17) пропадают и соотношения между ко-

эффициентами принимают предельно простой вид: $c_{p-9} = g_p$. В частности, при $p = 8$ имеем $c_{-1} = g_8 = 1/9!$, соответственно $I = c_{-1} = 1/9!$.

Аналогично в случае в) $m = 100$ и $p - m = -1$ при $p = 99$, т.е. $c_{-1} = g_{99} = 0$ и соответственно $I = 0$.

Вычисление вычета получается здесь таким простым, потому что в данном случае исходную функцию можно сразу разложить в ряд

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^k} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1-k}}{(2j+1)!}.$$

Отсюда видно, что коэффициент c_{-1} при z^{-1} имеется только при $2j+1-k = -1$, т.е. в слагаемом с номером $j = k/2 - 1$, который получается целым только при четных k , а при нечетных k такой степени в этом ряду нет ($c_{-1} = 0$).

Аналогичные рассуждения вместо использования общих формул помогают и в следующем примере.

Пример 3.5. $f(z) = (1 - e^{z-1})^p / \sin^q(z-1)$, $\gamma : |z-1| = 2$, p, q – натуральные числа;

а) $p = q$; б) $p > q$; в) $p = q - 1$.

Полюсами здесь могут быть только нули синуса: $z - 1 = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, т.е. точки $\zeta_n = 1 + \pi n$, распределенные вдоль вещественной оси с равномерным шагом π . Полюс $\zeta_0 = 1$ совпадает с центром окружности γ , и при заданном радиусе $r = 2 < \pi$ других полюсов внутри контура быть не может. Так как точка $z = 1$ является также и нулем числителя, кратность ζ_0 зависит от конкретных значений p и q .

Действительно, из представлений

$$e^{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}, \quad \sin(z-1) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-1)^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

следует, что

$$g(z) = (z - 1)^p + O((z - 1)^{p+1}), \quad z \rightarrow 1,$$

$$d(z) = (z - 1)^q + O((z - 1)^{q+1}), \quad z \rightarrow 1,$$

а для функции в целом

$$f(z) \sim (z - 1)^{p-q}, \quad z \rightarrow 1.$$

Теперь несложно видеть, что в случаях а) и б) ($p \geq q$) полюс ζ_0 устраним ($I = 0$), а в третьем случае $p - q = -1$, т.е. ζ_0 – однократный полюс с вычетом $c_{-1} = 1 \Rightarrow I = 1$.

Заметим, что в общем случае $p = q - m$ полюс ζ_0 m -кратный и при $m \geq 2$ полученных оценок недостаточно для вычисления вычета, так как в разложениях числителя и знаменателя для этого необходимо удерживать m слагаемых.

Пример 3.6. Рассмотрим интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+1}$, отличающийся от предыдущих тем, что контур интегрирования уходит на бесконечность и потому без дополнительных рассуждений нельзя решить, замкнут он или разомкнут. Здесь имеется всего два полюса $\zeta_1 = i$ и $\zeta_2 = -i$, лежащих по разные стороны от контура интегрирования, и, если считать контур замкнутым через бесконечность, то надо также определиться, в какую именно сторону он замкнут – вверх или вниз. От этого зависит, вычет в каком из этих двух полюсов дает вклад в значение интеграла.

Ответ на эти вопросы базируется на лемме Жордана.

3.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО БЕСКОНЕЧНОМУ КОНТУРУ

3.4.1. Лемма Жордана

1. Интеграл предыдущего примера, заданный на всей оси, можно считать пределом интеграла I_R , определенного

на конечном отрезке $[-R, R]$ при $R \rightarrow \infty$:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R, \quad I_R = \int_{-R}^R \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

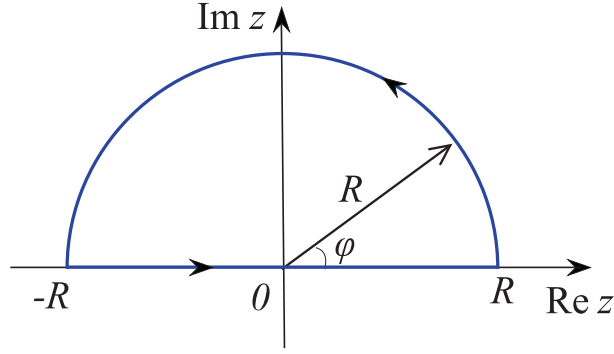


Рис. 3.6. Замкнутый контур $L = [-R, R] \cup C_R$

Рассмотрим интеграл I_L от той же функции, но по замкнутому контуру $L = [-R, R] \cup C_R$, получающемуся при добавлении к отрезку $[-R, R]$ верхней полуокружности C_R : $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (рис. 3.6):

$$I_L = \oint_L \frac{dz}{z^2 + 1} = I_R + I_{C_R}. \quad (3.18)$$

Внутри контура L попадает только полюс $\zeta_1 = i$, поэтому по теореме Коши

$$I_L = 2\pi i \operatorname{res} \frac{1}{z^2 + 1} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Этот результат справедлив для $\forall R > 1$, в частности, и при $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_L = I + \lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_R} = \pi.$$

Отсюда $I = \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_R}$, и для получения значения искомого интеграла I необходимо оценить I_{C_R} при $R \rightarrow \infty$. Учитывая, что интегрирование по полуокружности C_R сво-

дится к интегрированию по полярному углу φ :

$$dz = Rie^{i\varphi}d\varphi \Rightarrow I_{C_R} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi} + 1}d\varphi,$$

несложно получить оценку

$$I_{C_R} = O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_R} = 0.$$

Тем самым $I = \pi$, что совпадает со значением этого интеграла, получающимся через вычисление первообразной

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x|_{-\infty}^{\infty} = \pi/2 + \pi/2 = \pi.$$

Замечание 3.5. Такой же результат получается, если замкнуть контур в нижнюю полуплоскость, т.е. взять в качестве C_R полуокружность $z = Re^{-i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Хотя вычет в этом случае берется в другом полюсе $\zeta_2 = -i$ и отличается от предыдущего знаком, окончательный результат получается того же знака, так как при обходе контура по часовой стрелке вклад вычета берется со знаком минус:

$$I_L = -2\pi i \operatorname{res} \frac{1}{z^2 + 1} \Big|_{z=-i} = -2\pi i \left(-\frac{1}{2i}\right) = \pi.$$

Свойство $I_{C_R} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ сохраняется и на нижней полуокружности.

Продемонстрированная на данном простом примере техника вычисления несобственных интегралов с помощью замыкания контура в верхнюю или нижнюю полуплоскость комплексной плоскости существенно базируется на том факте, что добавляемый интеграл I_{C_R} в конечном счете равен

нулю. Условия применимости такой техники в общем случае формулируются следующим образом:

Лемма Жордана 1. Пусть C_R – верхняя или нижняя полуокружность радиуса R в комплексной плоскости C и $f(z)$ – функция, максимум которой на C_R убывает быстрее первой степени R :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R} |f(z)| R = 0, \quad \text{тогда} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Доказательство здесь не приводится, его можно найти в учебниках по комплексному анализу.

Лемма Жордана служит обоснованием для замыкания контура через бесконечность. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы и является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением счетного набора изолированных полюсов (т.е. не имеет точек ветвления), то интеграл по бесконечному контуру от $f(z)$ можно заменить суммой вычетов в полюсах, попадающих внутрь замкнутого через бесконечность контура:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_k \operatorname{res} f(z)|_{z=\zeta_k^{\pm}}. \quad (3.19)$$

Верхний знак здесь берется в случае замыкания контура вверх, нижний – вниз; ζ_k^+ и ζ_k^- – полюса, лежащие соответственно выше и ниже вещественной оси (точнее, контура Γ , который может отклоняться в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов).

2. При использовании леммы Жордана для вычисления интегралов обратного преобразования Фурье необходимо учесть наличие экспоненциального множителя, т.е. рассмотреть подынтегральную функцию $f(z) = g(z)e^{iaz}$. Дело в том,

что при степенном поведении $g(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ главным фактором, определяющим рост или убывание $f(z)$ на C_R , и тем самым допустимое направление замыкания контура вверх или вниз, является экспоненциальное поведение функции $|e^{iaz}|$ при $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$. Действительно, для комплексных $z = x + iy$ и вещественных a

$$|e^{iaz}| = |e^{iax}| |e^{-ay}| = e^{-ay} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad ay \rightarrow \infty.$$

Таким образом, замыкать контур можно в том направлении, где a и $y = R \sin \varphi$ одного знака:

- при $a > 0$ необходимо выбрать $y > 0 \Rightarrow C_R$ – верхняя полуокружность ($0 \leq \varphi \leq \pi$),
- при $a < 0$ – $y < 0$, C_R – нижняя полуокружность ($-\pi \leq \varphi \leq 0$).

При этом интеграл по контуру C_R стремится к нулю при более медленном убывании $g(z)$, чем $f(z)$ в условиях первой леммы Жордана. Этот результат формулируется как

Лемма Жордана 2. Если $\max_{z \in C_R} |g(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ (с любым порядком убывания), то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{iaz} dz = 0$$

для верхней полуокружности C_R при $a > 0$ или для нижней полуокружности C_R при $a < 0$.

При выполнении условий этой леммы также справедлива формула (3.19), в которой $f(z) = g(z) e^{iaz}$.

Замечание 3.6. При $ay < 0$ экспонента для $z \in C_R$ растёт: $|e^{iaz}| \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, т.е. нельзя замыкать контур вверх при $a < 0$ и вниз при $a > 0$. Необходимо следить за знаком показателя экспоненты при использовании

формулы (3.19), так как замена интеграла суммой вычетов в «неправильных» полюсах (например, в ζ_k^+ при $a < 0$) дает для $f(z) = g(z)e^{iaz}$ качественно неверный результат. В этом существенное отличие от случая $f(z)$ без экспоненциального поведения на бесконечности, когда направление замыкания контура не влияет на окончательный результат.

Замечание 3.7. Для обратного преобразования Фурье формула (3.19) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1}[U] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} U(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \begin{cases} i \sum_k \operatorname{res} U(\alpha) e^{-i\alpha x} \big|_{\alpha=\zeta_k^+}, & x < 0 \\ -i \sum_k \operatorname{res} U(\alpha) e^{-i\alpha x} \big|_{\alpha=\zeta_k^-}, & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(при условии, что $U(\alpha)$ удовлетворяет условиям второй леммы, в частности, не содержит сомножителей с экспоненциальным поведением и точек ветвления).

3.4.2. Примеры вычисления интегралов Фурье

Для выработки практического навыка полезно рассмотреть несколько примеров, в которых требуется найти преобразование Фурье некоторой заданной функции, а затем восстановить ее форму, взяв обратное преобразование Фурье по вычетам.

1. Функции, заданные на всей оси

Рассмотрим два примера.

1.1. $u(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \mathcal{F}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a+i\alpha)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-a+i\alpha)x} dx = \frac{1}{a+i\alpha} - \frac{1}{-a+i\alpha} = \frac{2a}{\alpha^2+a^2}. \end{aligned}$$

Фурье-символ $U(\alpha)$ имеет два однократных полюса $\zeta^+ = ia$ и $\zeta^- = -ia$, вычеты в которых в соответствии с правилом (3.15)

$$\text{res } U(\alpha)|_{\alpha=\zeta^\pm} = \frac{2a}{2\alpha}|_{\alpha=\pm ia} = \mp i.$$

Далее, формула (3.20) для данной функции $U(\alpha)$ дает

$$u(x) = \frac{2\pi i}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} (-i)e^{-i \cdot ia x} = e^{ax}, \quad x < 0 \\ -ie^{-i(-ia)x} = e^{-ax}, \quad x > 0 \end{array} \right\} = e^{-a|x|},$$

что совпадает с исходной функцией.

1.2. $v(x) = e^{-a|x|} \cos bx$, $a > 0$.

Вычисление $V(\alpha) = \mathcal{F}[v]$ не так сложно, как кажется на первый взгляд, поскольку с учетом представления $\cos bx = (e^{ibx} + e^{-ibx})/2$ оно сводится к интегралам предыдущего вида, в которых α заменяется на $\alpha \pm b$:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \frac{a}{(\alpha+b)^2+a^2} + \frac{a}{(\alpha-b)^2+a^2} = \frac{a}{(\alpha-\zeta_1^+)(\alpha-\zeta_1^-)} + \frac{a}{(\alpha-\zeta_2^+)(\alpha-\zeta_2^-)} \\ \zeta_1^\pm &= -b \pm ia, \quad \zeta_2^\pm = b \pm ia. \end{aligned}$$

Здесь имеются две пары полюсов ζ_n^+ и ζ_n^- , $n = 1, 2$, расположенных выше и ниже вещественной оси. Вычеты в этих полюсах имеют вид

$$\text{res } V(\alpha)|_{\alpha=\zeta_n^\pm} = \pm \frac{a}{\zeta_n^+ - \zeta_n^-} = \pm \frac{1}{2i}.$$

Для вычисления обратного преобразования $\mathcal{F}^{-1}[V]$ снова воспользуемся формулой (3.20), восстанавливающей исходный вид $v(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2\pi i}{2\pi} \sum_{n=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2i}(e^{-i\zeta_1^+ x} + e^{-i\zeta_2^+ x}), \quad x < 0 \\ -\frac{1}{2i}(-e^{-i\zeta_1^- x} - e^{-i\zeta_2^- x}), \quad x > 0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-a|x|} (e^{ibx} + e^{-ibx}) = e^{-a|x|} \cos bx. \end{aligned}$$

2. Случай кратных полюсов

В предыдущих примерах полюса ζ_n были однократными, поэтому в них определялись только вычеты функции $U(\alpha)$, которые домножались затем в соответствии с формулой (3.20) на экспоненты $e^{-i\zeta_n x}$. Фактически здесь использовалась возможность выносить сомножители, не содержащие полюсов, за рамки операции вычисления вычета:

$$\operatorname{res}(f(z)g(z))|_{z=\zeta} = f(\zeta) \operatorname{res} g(z)|_{z=\zeta},$$

если функция $f(z)$ – аналитическая в окрестности точки ζ , являющейся однократным полюсом функции $g(z)$.

Однако это свойство не сохраняется в случае многократного полюса. Типичной ошибкой вычисления $\mathcal{F}^{-1}[U]$ по вычетам является подстановка в формулу (3.20) вычетов $\operatorname{res} U(\alpha)|_{\alpha=\zeta_n}$, домноженных на $e^{-i\zeta_n x}$ и в случае кратных полюсов. Здесь необходимо вычислять вычет от всего подынтегрального выражения $\operatorname{res}(U(\alpha)e^{-i\alpha x})|_{\alpha=\zeta_n}$ по общей формуле (3.14) или через разложение в ряды по алгоритму (3.16)–(3.17).

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^n e^{-bt}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

с помощью которой можно описать действие короткого ударного импульса; ($b > 0$, n – натуральное число). Ее частотный спектр

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f] = \int_0^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \frac{i^{n+1}n!}{(\omega + ib)^{n+1}}$$

несложно получить с помощью интегрирования по частям. При рассмотрении обратного преобразования

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

сразу отмечаем, что $F(\omega)$ имеет единственный $(n+1)$ -кратный полюс $\zeta = -ib$, расположенный в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$ комплексной плоскости круговой частоты ω . Поэтому замыкание контура в верхнюю полуплоскость при $t < 0$ дает $f(t) \equiv 0$, что согласуется с исходной функцией.

Вычет в полюсе ζ дает ненулевой вклад при $t > 0$, когда контур замыкается в нижнюю полуплоскость. В соответствии с правилом (3.14)

$$\text{res } F(\omega)|_{\omega=\zeta} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n [i^{n+1}n!]|_{\omega=\zeta} = 0, \quad n \geq 1.$$

Отсюда видно, что замена интеграла (3.21) вкладом вычета функции $F(\omega)$, домноженного на $e^{-i\zeta t}$, никак не может дать исходной функции $f(t)$ при $t > 0$. Как уже отмечалось, необходимо брать вычет от всей подынтегральной функции:

$$\text{res } F(\omega)e^{-i\omega t}|_{\omega=\zeta} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n [i^{n+1}n!e^{-i\omega t}]|_{\omega=-ib} = it^n e^{-bt}.$$

В целом при $t > 0$ имеем

$$f(t) = \frac{-2\pi i}{2\pi} i t^n e^{-bt} = t^n e^{-bt},$$

что совпадает с исходной формой импульса.

Замечание 3.8. На практике обычно требуется вычислять не $\mathcal{F}^{-1}[F]$, а $\mathcal{F}^{-1}[FS]$, где $S(\omega)$ – частотный спектр динамической реакции системы или среды. Соответственно необходимо вычислять $\text{res}(FS e^{-i\omega t})|_{\omega=\zeta}$, а также дополнительные вычеты в полюсах $S(\omega)$.

3. Функции, заданные в ограниченной области

Спецификой таких функций является отсутствие полюсов у их Фурье-символов. Действительно, если функция $u(x)$ интегрируема в некоторой конечной области Ω , то интеграл

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} u(x) e^{i\alpha x} dx \equiv U(\alpha)$$

сходится при любом фиксированном α , т.е. $U(\alpha)$ не имеет особых точек в комплексной плоскости (кроме $\alpha = \infty$, но эта точка не принадлежит открытой комплексной плоскости). Такие функции, аналитические во всей комплексной плоскости, называются *целыми функциями*.

Если $U(\alpha)$ – целая функция, то на первый взгляд техника вычисления по вычетам интегралов $\mathcal{F}^{-1}[U]$ в этом случае неприменима, так как нет полюсов, а соответственно и самих вычетов. На самом деле они есть, но устранимы, и для использования теоремы Коши необходимо уметь выделять их ненулевой вклад. Рассмотрим основную идею на примере функций

$$\text{а) } q(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Их трансформанты

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{i\alpha x} dx = 2 \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \quad \text{и}$$

$$\Phi(\alpha) = \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{i\alpha x} dx = 2 \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2}$$

имеют устранимый полюс $\zeta = 0$, вычет подынтегральной функции в котором равен нулю.

Хотя он и лежит на контуре интегрирования по α , это не мешает вычислению $\mathcal{F}^{-1}[Q]$ и $\mathcal{F}^{-1}[\Phi]$, так как точка $\alpha = 0$ является *регулярной* для $Q(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ (все коэффициенты ряда Лорана c_i с отрицательными индексами $i \leq -1$, в том числе и c_{-1} , равны нулю).

1а. Для этих функций лемма Жордана непосредственно неприменима, так как они содержат экспоненциальные составляющие, которые необходимо выделить и собрать с $e^{-i\alpha x}$ для определения направления замыкания контура. Для функции $q(x)$

$$Q(\alpha) e^{-i\alpha x} = \frac{2(e^{ia\alpha} - e^{-ia\alpha})}{2i\alpha} e^{-i\alpha x} = \frac{1}{i\alpha} (e^{-i(x-a)\alpha} - e^{-i(x+a)\alpha}). \quad (3.22)$$

Для каждого из этих слагаемых $\alpha = 0$ уже является полюсом с ненулевым вычетом, поэтому применение теоремы Коши к каждому из них по отдельности дает ненулевой результат. Но предварительно надо сделать так, чтобы после замыкания контура полюс попадал строго внутрь или оставался снаружи очерчиваемой им области, но не лежал на границе. Для этого достаточно деформировать исходный контур, отклонив его от

точки $\alpha = 0$ вверх или вниз, что вполне допустимо, так как в исходном интеграле $Q(\alpha)$ – аналитическая функция.

Пусть для определенности контур Γ обходит точку $\alpha = 0$ снизу (рис. 3.7). Тогда в соответствии с (3.22) исходный интеграл представим в виде суммы интегралов I^\pm :

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = I^- - I^+, \quad I^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha(x \pm a)}}{i\alpha} d\alpha.$$

Направление замыкания контура Γ определяется знаком показателя экспоненты:

$$I^- : \begin{array}{l} x - a < 0 \Rightarrow x < a \text{ — вверх} \\ x - a > 0 \Rightarrow x > a \text{ — вниз} \end{array},$$

$$I^+ : \begin{array}{l} x + a < 0 \Rightarrow x < -a \text{ — вверх} \\ x + a > 0 \Rightarrow x > -a \text{ — вниз.} \end{array}$$

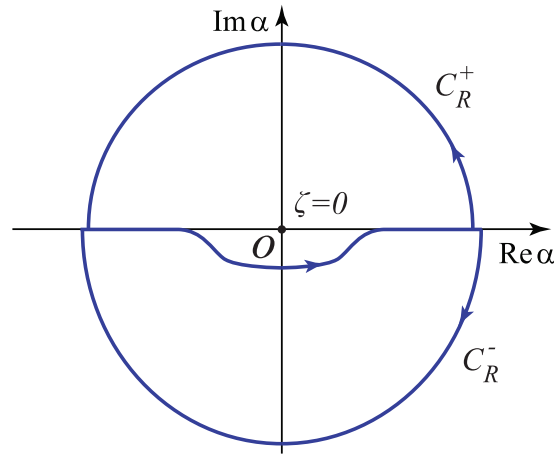


Рис. 3.7. Отклонение контура интегрирования для обхода устранимого полюса $\alpha = 0$ и применения леммы Жордана

Полюс $\zeta = 0$ попадает внутрь замкнутого контура и вычит

$$\text{res} \frac{e^{-i\alpha(x \pm a)}}{i\alpha} \Big|_{\alpha=0} = -i$$

дает вклад только при замыкании Γ вверх, поэтому

$$I^- = \begin{cases} 1, & x < a \\ 0, & x > a \end{cases}, \quad I^+ = \begin{cases} 1, & x < -a \\ 0, & x > -a \end{cases}. \quad (3.23)$$

В результате

$$I = I^- - I^+ = \begin{cases} 1 - 1 = 0, & x < -a \\ 1 - 0 = 1, & -a < x < a \\ 0 - 0 = 0, & x > a \end{cases}$$

что совпадает с исходным представлением $q(x)$.

Замечание 3.9. Если отклонить контур Γ вверх, то значения интегралов I^\pm изменятся, но окончательный результат для $q(x)$ останется прежним.

1б. Функция $\Phi(\alpha)$ отличается от $Q(\alpha)$ тем, что ее необходимо разбить на три слагаемых:

$$I = 2I_0 - I^+ - I^-, \quad I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^2} d\alpha, \quad I^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha(x\pm 1)}}{\alpha^2} d\alpha, \quad (3.24)$$

для каждого из которых полюс $\zeta = 0$ является двукратным. При том же выборе контура Γ вычеты

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} &= (e^{-i\alpha x})'_\alpha \Big|_{\alpha=0} = -ix \quad \text{и} \\ \operatorname{res} \frac{e^{-i\alpha(x\pm 1)}}{\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} &= [e^{-i\alpha(x\pm 1)}]'_\alpha \Big|_{\alpha=0} = -i(x \pm 1) \end{aligned}$$

также дают вклад только при замыкании его вверх:

$$I_0 = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \quad I^\pm = \begin{cases} x \pm 1, & x < \mp 1 \\ 0, & x > \mp 1 \end{cases}.$$

В итоге $I = 2I_0 - I^+ - I^-$ совпадает с исходной функцией $\varphi(x)$.

3.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для уверенного владения техникой интегральных преобразований и применения ее к волновым задачам кроме изложенных в предыдущих разделах сведений необходимы знания по таким темам, как:

- многозначные функции, точки ветвления и разрезы;
- асимптотика осциллирующих интегралов в дальней зоне;
- аналитические свойства трансформант в комплексной плоскости параметра Фурье α ;
- методы поиска комплексных полюсов и вычисления в них вычетов для функций, заданных численно;
- преобразования Ханкеля (Фурье–Бесселя), Лапласа и Меллина как частный случай преобразования Фурье.

Однако уже изложенных фактов достаточно для демонстрации техники интегрального подхода на ряде модельных примеров.

4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Волны и волновые уравнения

4.1.1. Волны

1. Однородные волны. Распространение возмущения в некотором физическом поле называется *однородной волной*, если в процессе распространения пространственная форма возмущения не меняется. Другими словами, если возмущение поля задается некоторой функцией $f(\mathbf{x}, t)$, то можно указать зависящие от времени пространственные многообразия $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, на которых сохраняется постоянное значение этой функции: $f(\mathbf{x}(t), t) = \text{const}$. Графики зависящих от пространственной переменной \mathbf{x} функций $\varphi_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t_j)$, получающиеся из $f(\mathbf{x}, t)$ для различных фиксированных моментов времени $t = t_j$, подобны, т.е. они могут быть совмещены при соответствующем сдвиге пространственных координат.

Пример 4.1. Одномерная однородная волна. Зафиксируем некоторую функцию одной переменной $\varphi(\xi)$, задающую форму возмущения (рис. 4.1.1, слева), и подставим в нее $\xi = \theta(x, t)$, где θ – непрерывная функция двух переменных. Очевидно, получившаяся функция $f(x, t) = \varphi(\theta(x, t))$ сохраняет постоянные значения на множестве точек $(x(t), t)$, определяемых уравнением $\theta(x, t) = \text{const}$. При линейной зависимости функции θ от x и t , например для $\theta = kx - \omega t$, закон $x = x(t)$ движения графика функции-формы φ вдоль оси x также будет линейным: $x = \frac{\omega}{k}t + x_0$, а скорость этого движения $c = \dot{x}(t) = \omega/k$ – постоянной; $x_0 = \xi_0/k$ – начальное положение точки $x(t)$ на оси x (при $t = 0$), соответствующее некоторой точке $\xi = \xi_0$ на графике функции-формы $\varphi(\xi)$. При этом $c = \Delta x / \Delta t$, где $\Delta x = x_2 - x_1$ – расстояние, на

которое смещается любая фиксированная точка функции-формы за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 4.1, справа).

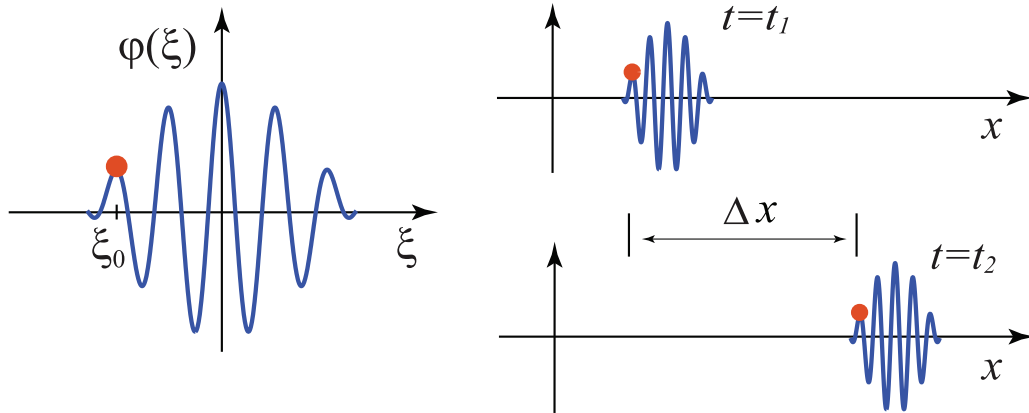


Рис. 4.1. Пример функции-формы однородной волны и ее распространения вдоль оси x

Функция $\theta(\mathbf{x}, t)$, подстановка которой в функцию формы $\varphi(\xi)$ задает волну, называется *фазовой функцией*, а уравнение $\theta(\mathbf{x}, t) = \text{const}$, определяющее зависимость $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ для множества точек, на которых сохраняется форма волны, — *фазовым уравнением*. Соответственно скорость c , с которой такое множество перемещается в пространстве, называется *фазовой скоростью*, а обратная к ней величина $s = 1/c$ — *медленностью* волны.

2. Плоские волны. В приведенном примере $\theta(x, t) = kx - \omega t$ и решение фазового уравнения $x = vt + x_0$ описывает движение точки по оси x с постоянной фазовой скоростью $v = \omega/k$; x_0 — положение точки в начальный момент времени $t = 0$.

В n -мерном пространстве аналогичная фазовая функция имеет вид

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$ — скалярное произведение *волнового вектора* $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ и радиус-вектора пространственной точки $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Для фиксированного

момента $t = t_0$ фазовое уравнение $\theta(\mathbf{x}, t_0) = \text{const}$ описывает линейное многообразие в R^n , называемое *волновым фронтом*. Для функции (4.1) волновой фронт на двумерной плоскости ($n = 2$) — это прямая линия $k_1 x_1 + k_2 x_2 = \text{const}$, а в пространстве ($n = 3$) — плоскость, поэтому волны, задаваемые данной фазовой функцией, называют *плоскими волнами*.

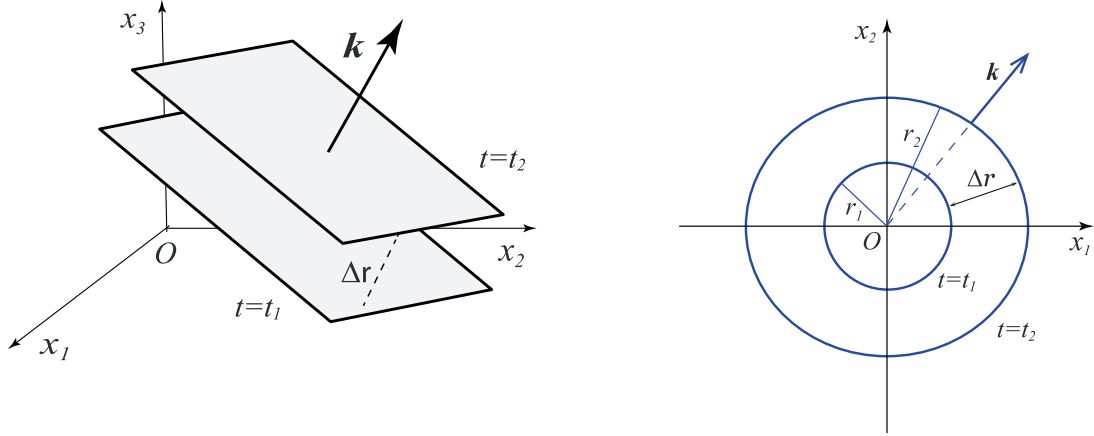


Рис. 4.2. Примеры движения фронта плоской волны в направлении волнового вектора \mathbf{k} (слева) и фронта цилиндрической волны (справа).

При изменении t волновой фронт сдвигается в направлении волнового вектора \mathbf{k} , который ортогонален к фронту (рис. 4.2, слева). Как и в одномерном случае, это смещение Δs пропорционально ω и обратно пропорционально *волновому числу* $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2}$:

$$k \Delta s = \omega \Delta t,$$

поэтому и в R^n фазовая скорость $c = \omega/k$.

3. Наряду с плоскими волнами рассматриваются также *цилиндрические* (рис. 4.2, справа) и *сферические* волны, задаваемые фазовыми функциями

$$\begin{aligned} \theta(r, t) &= kr - \omega t, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{и} \\ \theta(R, t) &= kR - \omega t, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Их волновыми фронтами являются цилиндрические и сферические поверхности, расширяющиеся с такой же фазовой скоростью $v = \omega/k$: $r = vt + r_0$ и $R = vt + R_0$.

4. Неоднородные волны. К сожалению, сформулированное в начале данного раздела строгое определение однородных волн слишком узкое, чтобы вместить все многообразие явлений, которые принято относить к волновым процессам. Так, амплитуда цилиндрических волн, распространяющихся по водной поверхности от центра возмущения (например, от брошенного камня), убывает как корень расстояния r :

$$u \sim f(kr - \omega t)/\sqrt{r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Таким образом, $u(r, t)$ не сохраняет постоянного значения на фронте $r = vt + r_0$, т.е. такие волны не подпадают под определение *однородных волн*, которые не меняют свою форму в процессе распространения. Очевидно, следует сформулировать более широкое определение, применимое ко всем динамическим процессам, которые обычно трактуются как распространение волн.

К волновым явлениям обычно относят процессы распространения возмущений в некотором континууме без пространственного переноса составляющих его частиц. Такое определение менее строго и существенно шире, но под него попадают и многие явления, которые не принято относить к волновым. Распространяющиеся возмущения, как правило, меняют со временем свою форму. В этом случае их называют *неоднородными волнами* и определяют как функции, из которых можно выделить составляющие, являющиеся однородными волнами:

$$u(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)f(\theta(\mathbf{x}, t)), \quad (4.4)$$

где $f(\theta(\mathbf{x}, t))$ описывает однородную волну с фазовой функцией $\theta(\mathbf{x}, t)$, а $A(\mathbf{x}, t)$ определяет изменение ее формы в процессе распространения. Для волны (4.3)

$$\theta = kr - \omega t, \quad A = 1/\sqrt{r}.$$

Понятно, что вариация формы возмущения, задаваемая функцией $A(\mathbf{x}, t)$, должна быть существенно медленнее, чем скорость его распространения, определяемого фазовым уравнением $\theta(\mathbf{x}, t) = \text{const}$, иначе, без ограничений на $A(\mathbf{x}, t)$, практически любое движение можно трактовать как суперпозицию неоднородных волн вида (4.4). Но это пожелание не поддается строгой формализации.

Тем не менее, функцию $u(\mathbf{x}, t)$, описывающую некоторый динамический процесс, можно разложить в ряд или представить интегралами Фурье как по пространственным переменным \mathbf{x} , так и по времени t . Каждый член ряда Фурье или подынтегральная функция $U(\boldsymbol{\alpha}, \omega)e^{-i(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + \omega t)}$ при фиксированном вещественном векторе $\boldsymbol{\alpha}$ является однородной плоской волной с фазовой функцией (4.1), в которой $-\boldsymbol{\alpha}$ играет роль волнового вектора \mathbf{k} . Поэтому, действительно, практически любой динамический процесс можно считать суперпозицией волновых процессов.

4.1.2. Волновое уравнение, упругие потенциалы и объемные волны

1. Несложно сформулировать уравнение, которому удовлетворяла бы любая функция

$$u(\mathbf{x}, t) = f(\theta(\mathbf{x}, t)), \quad \theta = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t,$$

описывающая плоскую волну. Считая f достаточно гладкой, рассмотрим производные по x_i и по t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^p u}{\partial x_i^p} &= k_i^p f^{(p)}(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial^p u}{\partial t^p} &= (-\omega)^p f^{(p)}(\theta).\end{aligned}$$

При $p = 2$ из этих выражений следует, что для любых \mathbf{k} и ω функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.5)$$

в котором

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2) f''(\theta) = k^2 f''(\theta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 f''(\theta), \quad c^2 = \omega^2 / k^2, \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2.\end{aligned}$$

Уравнение (4.5) – это хорошо известное *волновое уравнение*. Его решение может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся во всех направлениях с фазовой скоростью c . Следует отметить, что неплоские волны, например цилиндрические или сферические, бегущие с той же фазовой скоростью, также удовлетворяют уравнению (4.5) в цилиндрических или сферических координатах соответственно.

Волновые уравнения возникают при решении проблем, встречающихся в разных областях. Поэтому в зависимости от конкретных приложений их решения (функции $u(\mathbf{x}, t)$) могут описывать самые различные волновые процессы. В приведенной далее таблице дано несколько примеров физического смысла функции $u(\mathbf{x}, t)$ и соответствующих областей

практического приложения, в которых используются решения волнового уравнения.

$u(\mathbf{x}, t)$	Области науки и техники	Приложения
Акустическое давление в жидкости	Гидроакустика, нефтяная индустрия	Подводные сонары и эхолоты, акустический каротаж и импульсное воздействие на скважины для повышения нефтеотдачи
Акустическое давление в воздухе	Акустика, архитектурная акустика	Проектирование устройств воспроизведения музыки и речи, концертных залов, аудиторий и т.п.
Электромагнитные потенциалы	Электроника, радиотехника, оптика, оптоэлектроника, фотоника	Радио, телевидение, компьютеры, средства связи и глобального позиционирования, измерительные приборы и т.д.
Упругие потенциалы	инженерная механика, физическая акустика, мехатроника	Вибрация и колебания элементов конструкций, динамическая прочность, приборы на поверхностных акустических волнах, ультразвуковой неразрушающий контроль, пьезоустройства для прецизионного привода и систем волнового мониторинга
Движение грунта	Геофизика, сейсмология, строительная механика	Изучение строения Земли и поиск полезных ископаемых методами сейсморазведки, сейсмостойкое строительство

К волновым уравнениям сводится и уравнение Ляме (2.7), определяющее поле смещений в упругой среде.

4.1.3. Упругие волны

1. Для исследования упругих волноводов в первую очередь интерес представляют волновые уравнения относительно *упругих потенциалов*. Известно (см., например, [17]), что поле динамического смещения частиц упругой однородной среды относительно положения равновесия (или *волновое поле*) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ может быть представлено через скалярный и

векторный потенциалы $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$, называемые потенциалами Гельмгольца:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (4.6)$$

Представление (4.6) (декомпозиция Гельмгольца) справедливо для любого дифференцируемого векторного поля \mathbf{u} . Для нас важно, что его подстановка в уравнения Ламе (2.7) позволяет расщепить его на независимые волновые уравнения относительно потенциалов φ и $\boldsymbol{\psi}$

$$c_p^2 \Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + f_\varphi = 0, \quad (4.7)$$

$$c_s^2 \Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} + \mathbf{f}_\psi = 0. \quad (4.8)$$

Здесь $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость объемных P - и S -волн в этом материале; λ, μ — константы Ламе; ρ — плотность упругого изотропного материала; f_φ и \mathbf{f}_ψ — потенциалы Гельмгольца вектора заданных объемных сил $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{f} = \nabla f_\varphi + \text{rot } \mathbf{f}_\psi.$$

Уравнение (4.7) скалярное, а (4.8) — векторное, т.е. фактически это четыре волновых уравнения относительно φ и компонент вектора $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_x, \psi_y, \psi_z\}$. Для вывода этих уравнений из векторного уравнения (2.7) к нему применяются операторы div и rot и учитывается, что

$$\text{div rot } \boldsymbol{\psi} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \text{rot } \nabla\varphi \equiv 0.$$

2. Скорость и поляризация объемных волн. В соответствии с общим свойством волновых уравнений составляющие поля $\mathbf{u}_p = \nabla\varphi$ и $\mathbf{u}_s = \text{rot } \boldsymbol{\psi}$, выраженные через решения уравнений (4.7), (4.8), можно представить в виде суперпози-

ции волн, распространяющихся в упругом объеме с фазовыми скоростями c_p и c_s соответственно. Распространение возмущений, описываемое полями \mathbf{u}_p и \mathbf{u}_s , называют *объемными волнами*. Поскольку $c_p > c_s$, то волны \mathbf{u}_p приходят от источника возбуждения к приемнику первыми, а \mathbf{u}_s – вторыми. Отсюда их название: P (*primary*) и S (*secondary*) волны.

С точки зрения *поляризации*, т.е. направления смещения частиц при прохождении P - и S -волн, их также называют *продольными* и *поперечными*. Действительно, пусть \mathbf{k}_p и \mathbf{k}_s – волновые векторы, определяющие направление распространения плоских P - и S -волн, описываемых потенциалами

$$\varphi = \varphi(\mathbf{k}_p \mathbf{x} - \omega t) \equiv \varphi(\theta_p) \quad \text{и} \quad \psi = \psi(\mathbf{k}_s \mathbf{x} - \omega t) \equiv \psi(\theta_s).$$

Тогда

$$\mathbf{u}_p = \nabla \varphi = \mathbf{k}_p \varphi'(\theta_p), \quad \text{а} \quad \mathbf{u}_s = \text{rot } \psi = \mathbf{k}_s \times \psi'(\theta_s).$$

Видно, что смещение частиц в поле \mathbf{u}_p коллинеарно вектору \mathbf{k}_p , т.е. оно поляризовано в направлении распространения (продольная волна), а вектор \mathbf{u}_s ортогонален к \mathbf{k}_s , т.е. поле \mathbf{u}_s поляризовано в поперечном направлении (рис. 4.3).

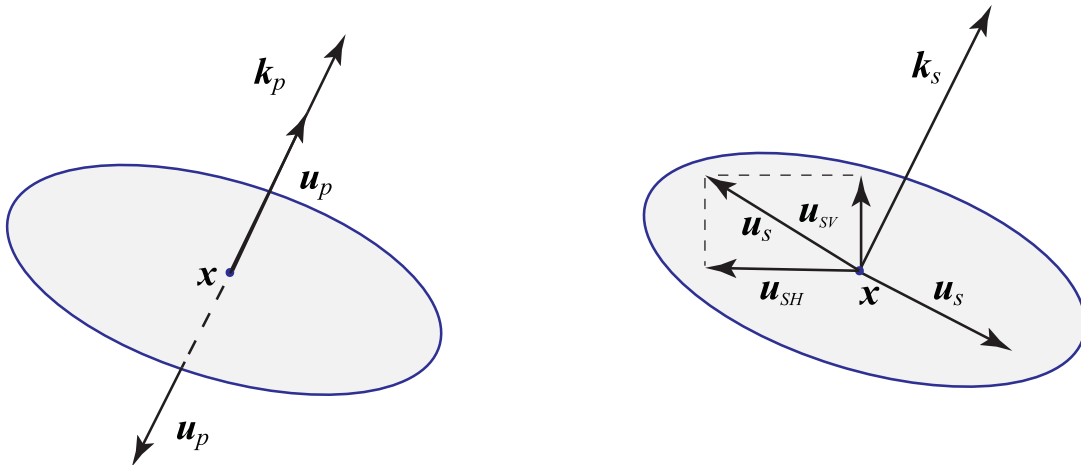


Рис. 4.3. Поляризация объемных волн

В то время как направление поляризации P -волны однозначно определяется направлением ее распространения \mathbf{k}_p , в качестве \mathbf{u}_s может выступать любой вектор, лежащий в плоскости, ортогональной к \mathbf{k}_s . Поэтому, зафиксировав на плоскости поляризации направление, которое считается вертикальным, и ортогональное ему – горизонтальное, среди S -волн выделяют вертикально (V) и горизонтально (H) поляризованные SV - и SH -волны,

Кроме того, поля \mathbf{u}_p и \mathbf{u}_s связаны с различным типом деформации среды. Поскольку справедливы тождества

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_p = \operatorname{rot} \nabla \varphi \equiv 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_s = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \equiv 0,$$

поле \mathbf{u}_p является безвихревым, а \mathbf{u}_s – бездивергентным. Так как вихревые составляющие описывают сдвиговую деформацию без изменения объема, а дивергентные – деформацию, вызванную расширением или сжатием объема без сдвиговых искажений, S -волны называют *сдвиговыми*, а P -волны – *волнами объемного расширения-сжатия* (дилатации).

Поскольку P - и S -волны описываются независимыми уравнениями (4.7), (4.8), в однородной среде они распространяются независимо друг от друга, т.е. при одновременном прохождении одной и той же области упругого объема они никак не взаимодействуют и не меняют своих характеристик. Однако граничные условия обычно не расщепляются на независимые соотношения относительно потенциалов φ и $\boldsymbol{\psi}$, поэтому в ограниченных телах или даже в бесконечной среде, но с локальными неоднородностями (препятствиями), P - и S -волны связаны между собой. Эта связь проявляется в хорошо известном эффекте преобразования (*конверсии*) упругих волн, когда при падении на границу P или S волны в отраженном поле появляются волны обоих типов. Детальное

описание законов отражения и прохождения упругих волн на границе раздела дано, например, в монографиях [2, 6, 17].

3. Антиплоские волны. Конверсия волн не наблюдается только в некоторых исключительных случаях. Наиболее известный среди них – отражение антиплоских S -волн от поверхностей, параллельных направлению поляризации вектора смещений \mathbf{u}_S .

Плоскими, или двумерными, обычно называют задачи, в которых решение зависит только от двух пространственных координат и не зависит от третьей. Например, если решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ зависит только от x и z , т.е. одинаково в любом сечении пространства R^3 , ортогональном оси y . *Антиплоскими* при этом называются колебания, вектор поляризации которых ортогонален плоскости (x, z) : $\mathbf{u}_S = \{0, u_y(x, z), 0\}$.

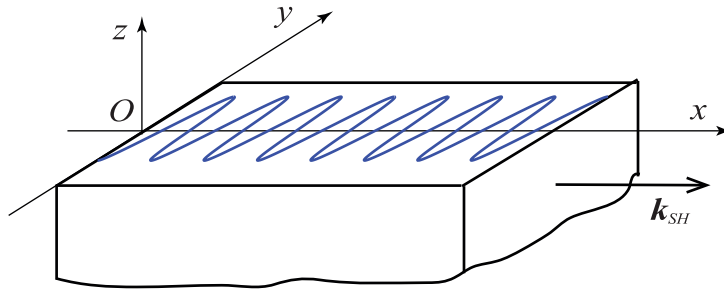


Рис. 4.4. Поляризация антиплоских SH волн в упругом слое

Очевидно, что антиплоскими могут быть только S -волны, всегда поляризованные ортогонально волновому вектору, в данном случае – вектору $\mathbf{k}_s = \{k_{s,x}, 0, k_{s,z}\}$, лежащему в плоскости (x, z) (рис. 4.4). При падении таких волн на цилиндрическую поверхность с образующей, перпендикулярной плоскости (x, z) , не возникает волн других типов, т.е. задача относительно $u_y(x, z)$ (скалярное волновое уравнение и граничные условия) выписывается независимо от других составляющих волнового поля \mathbf{u} .

В качестве заключительного замечания отметим, что методы решения волновых задач не зависят от конкретного физического смысла функций $u(\mathbf{x}, t)$. Поэтому общая схема интегрального подхода излагается далее на модельных краевых задачах, не фиксируя смысла неизвестных функций, а при обсуждении физических эффектов, как правило, предполагается, что рассматриваются упругие волны.

4.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.2.1. Комплексная амплитуда гармонических колебаний

1. Колебания точек среды называются *установившимися гармоническими*, если зависимость компонент u_i вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ от времени t описывается синусоидой или косинусоидой:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = A_i(\mathbf{x}) \cos(\omega t - \varphi_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Здесь $A_i \geq 0$ и φ_i — *амплитуда* и *сдвиг фазы* компоненты u_i ; ω — *круговая* или *угловая частота* колебаний.

Вещественные функции (4.9) могут быть записаны с помощью комплексных переменных. Если учесть, что

$$\cos(\omega t - \varphi_i) = \operatorname{Re} e^{i(\varphi_i - \omega t)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

и ввести обозначение $\hat{u}_i(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{x})e^{i\varphi_i}$, то для них справедливо представление

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} [\hat{u}_i(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]. \quad (4.10)$$

Вектор-функция $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ называется вектором *комплексных амплитуд* гармонического поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ вида (4.9). Далее шапочка в обозначении $\hat{\mathbf{u}}$, как правило, будет опущена. Во всех случаях, когда это не приводит к путанице, комплексные амплитуды будут обозначаться той же буквой,

что и соответствующие им гармонические сигналы, отличаясь только аргументом ω вместо t . В промежуточных выкладках этот параметр обычно опускается ($u(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}, \omega)$), что не должно приводить к путанице, так как смысл ясен из контекста рассматриваемой задачи.

Использование комплексной записи более удобно, так как $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ описывает сразу и амплитуду колебаний $A_i = |u_i|$, и сдвиг фазы $\varphi_i = \arg u_i$ каждой из компонент вещественного вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Общую амплитуду колебаний (длину вектора \mathbf{A}) также несложно выразить через комплексную амплитуду \mathbf{u} :

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = |\mathbf{u}|.$$

Кроме того, в комплексной форме действие производной по времени

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} [\mathbf{u} e^{-i\omega t}] = (-i\omega)^k \mathbf{u} e^{-i\omega t}$$

эквивалентно домножению на $-i\omega$, аналогично тому, как действие производной по пространственной координате эквивалентно домножению Фурье-символа на $-i\alpha$.

В линейных соотношениях *гармонический множитель* $e^{-i\omega t}$ обычно опускают, формулируя краевые задачи относительно комплексной амплитуды. В частности, подстановка $u(\mathbf{x}, t)$ в виде $u(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$ в волновое уравнение (4.5) приводит его к *уравнению Гельмгольца*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{4.11}$$

относительно комплексной амплитуды $u(\mathbf{x}, \omega)$ с волновым числом $k = \omega/c$. Для получения вещественных гармонических колебаний достаточно домножить его решение на $e^{-i\omega t}$ и взять вещественную часть в соответствии с (4.10).

2. Гармонические волны. Аргументы косинуса в представлении (4.9) фактически являются фазовыми функциями $\theta_i(\mathbf{x}, t) = \varphi_i(\mathbf{x}) - \omega t$, задающими однородные (при $A_i = \text{const}$) или в общем случае неоднородные волны вида (4.4). В частности, если зависимость θ_i от \mathbf{x} линейная, как в (4.1), с одним и тем же волновым вектором \mathbf{k} для каждой компоненты смещений u_i : $\theta_i = \mathbf{k}\mathbf{x} + \varphi_i^\circ - \omega t$, $\varphi_i^\circ = \varphi_i(0)$, то соответствующий вектор комплексной амплитуды гармонических колебаний

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{a}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad a_i = a_i e^{i\varphi_i^\circ}, \quad i = 1, 2, 3$$

задает поле неоднородных плоских волн, распространяющихся в направлении \mathbf{k} с фазовой скоростью $c = \omega/k$, $k = |\mathbf{k}|$.

Наряду с фазовой для гармонических волн вводится понятие групповой скорости $v = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}$, которая описывает скорость перемещения волнового пакета, образуемого при сложении двух гармонических волн с близкими частотами ω и $\omega + \Delta\omega$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$ [22]. С физической точки зрения групповая скорость характеризует перенос волновой энергии в поле гармонических колебаний. Если волновое число линейно зависит от частоты: $k = a\omega$, то фазовая и групповая скорости постоянны и равны между собой: $c = v = 1/a$.

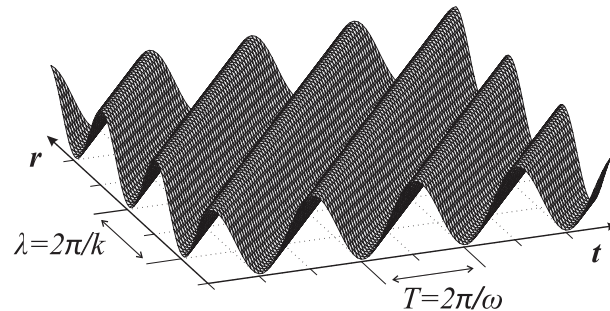


Рис. 4.5. Поверхность $z = \cos(kr - \omega t)$ как функция r и t , иллюстрирующая подобие понятий «период» и «длина волны» (T и λ)

Если \mathbf{A} не зависит от \mathbf{x} , то однородное волновое поле

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cos(\mathbf{k} \mathbf{x} - \omega t) \quad (4.12)$$

называют *гармоническим* не только по времени, но и в пространстве, так как изменение \mathbf{u} в направлении \mathbf{k} также имеет вид косинусоиды:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos(k r - \psi), \quad (4.13)$$

где r – изменение расстояния в направлении \mathbf{k} ($\mathbf{x} = r\mathbf{k}/k$); а $\psi = \omega t$ – пространственный сдвиг фазы в момент времени t . Сопоставление представлений (4.9) и (4.13) показывает, что для пространственных гармоник волновое число k играет ту же роль, что и круговая частота ω для гармонической зависимости от t . Соответственно *длина волны* $\lambda = 2\pi/k$ и *период колебаний* $T = 2\pi/\omega$ – это две родственные характеристики волнового поля в пространстве и во времени (рис. 4.5).

4.2.2. Принцип суперпозиции, преобразование Фурье – Лапласа

Установившиеся гармонические колебания, продолжающиеся бесконечное время, в реальной действительности не встречаются, т.е. являются абстрактным понятием. Поэтому может возникнуть вопрос: зачем рассматривать гармонические задачи, если в природе любое движение *нестационарно*? Главная причина в том, что любой динамический процесс может быть представлен в виде набора гармонических колебаний. Для линейных систем или сред исходная нестационарная задача распадается на независимые задачи относительно каждой гармоники. Этот факт обычно формулируется в форме *принципа суперпозиции*: любое движение линейной системы может быть представлено в виде суперпозиции (дис-

кретной или непрерывной) гармонических колебаний данной системы.

Возможность сведения нестационарной задачи к набору гармонических становится особенно наглядной, если применить к ней преобразование Фурье по t . Продемонстрируем это простым модельным примером, который будет также использоваться в дальнейшем для демонстрации общей схемы интегрального подхода.

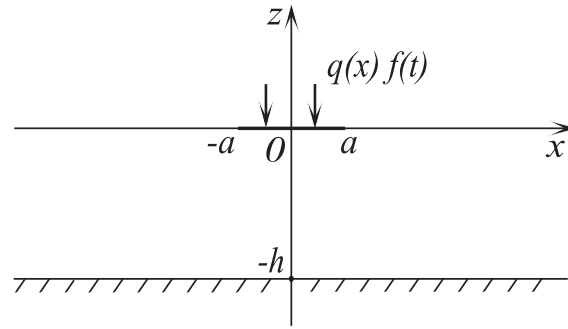


Рис. 4.6. Полосовой волновод

Рассмотрим двумерную полосу D толщины h : $-\infty < x < \infty$, $-h \leq z \leq 0$, нестационарное волновое поле в которой $u(x, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению (4.5). Источник моделируется ненулевым значением производной u'_z в ограниченной области $|x| < a$ на верхней границе $z = 0$, в то время как нижняя граница $z = -h$ фиксирована ($u = 0$) (рис. 4.6). Начальные условия и условия на бесконечности также предполагаются нулевыми.

Другими словами, рассматривается следующая модельная граничная задача:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (x, z) \in D, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \begin{cases} q(x)f(t), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad (4.15)$$

$$u|_{z=-h} = 0, \quad (4.16)$$

$$u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t < \infty \quad (4.17)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad (x, z) \in D. \quad (4.18)$$

Функции $q(x)$ и $f(t)$ описывают пространственные и временные характеристики источника, они считаются заданными и интегрируемыми.

При решении линейных нестационарных задач обычно используется *преобразование Лапласа* [18]

$$\begin{aligned} L[u] &\equiv \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt}dt = \hat{u}(p,) \\ L^{-1}[\hat{u}] &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{u}(p)e^{pt}dp = u(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

применение которого позволяет избавиться от производной по времени, т.е. снижает размерность задачи на единицу.

Интегрирование в обратном преобразовании L^{-1} ведется вдоль вертикальной прямой, лежащей в комплексной плоскости параметра преобразования p *правее* всех особенностей трансформанты $\hat{u}(p)$ (рис. 4.7, слева). Этим обеспечивается выполнение условий покоя при $t < 0$, т.е. до начального момента времени $t = 0$. Действительно, при $t < 0$ экспонента e^{pt} убывает при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$, т.е. вторая лемма Жордана применима для замыкания контура в правую полуплоскость

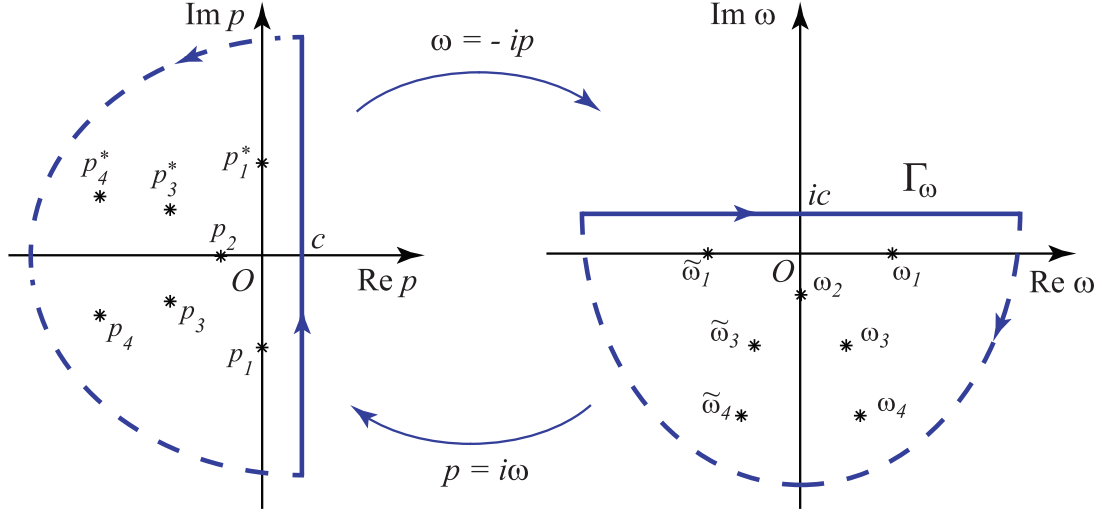


Рис. 4.7. Комплексные плоскости p и ω : вертикальный и горизонтальный контуры обратного преобразования Лапласа (слева) и Фурье (справа), пунктиром показано направление их замыкания при $t > 0$

$\text{Re } p \geq 0$. Отсутствие полюсов правее контура дает $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

В то же время вместо преобразования Лапласа к уравнениям и граничным условиям (4.14) – (4.17) можно применить преобразование Фурье по времени

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t[u] &\equiv \int_0^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt = u(\omega), \\ \mathcal{F}_t^{-1}[u] &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = u(t),\end{aligned}\tag{4.20}$$

считая, что функция $u(t)$ доопределена на всю ось t нулевым значением при $t < 0$.

Несложно убедиться, что преобразование Лапласа (4.19) сводится к преобразованию Фурье (4.20) и наоборот, если сделать замену переменных

$$\begin{aligned}p &= -i\omega \quad (L \rightarrow \mathcal{F}_t), \\ \omega &= ip \quad (\mathcal{F}_t \rightarrow L)\end{aligned}\tag{4.21}$$

и положить $u(\omega) = \hat{u}(-i\omega)$ или $\hat{u}(p) = u(ip)$. Замена (4.21) эквивалентна повороту на 90° и изменению направления интегрирования по контуру на противоположное при переходе из комплексной плоскости p в плоскость ω и наоборот (рис. 4.7). Соответственно, контур интегрирования для \mathcal{F}_t^{-1} проходит в плоскости ω параллельно вещественной оси *выше* всех особенностей трансформанты $u(\omega)$.

Замечание 4.2. Замена (4.21) показывает, что преобразование Лапласа можно считать частным случаем преобразования Фурье, но не наоборот, так как оно применимо только к функциям, заданным на полуоси. Более того, практически все известные интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Ханкеля и др.) могут быть получены из преобразования Фурье или сведены к нему с помощью различных замен переменных.

Для волновых задач преобразование \mathcal{F}_t предпочтительнее преобразования Лапласа L , так как оно переводит нестационарные задачи в физически более наглядную, чем плоскость p , частотную область ω . В силу доопределения $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ при $t < 0$ точка $t = 0$ в общем случае становится точкой разрыва со скачками

$$v_0(\mathbf{x}) = -u|_{t=0+} = -u_0(\mathbf{x}),$$

$$v_1(\mathbf{x}) = -\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0+} = -u_1(\mathbf{x}).$$

Здесь u_0 и u_1 – начальные значения функции $u(\mathbf{x}, t)$ и ее первой производной по времени. Поэтому в соответствии с правилом преобразования производных от разрывных функций (см. (1.20)) в общем случае

$$\mathcal{F}_t\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = -\omega^2 u(\mathbf{x}, \omega) + v_1(\mathbf{x}) - i\omega v_0(\mathbf{x}) =$$

$$= -\omega^2 u(\mathbf{x}, \omega) - u_1(\mathbf{x}) + i\omega u_0(\mathbf{x}). \quad (4.22)$$

Таким образом, преобразование \mathcal{F}_t переводит волновое уравнение (4.14) в неоднородное уравнение Гельмгольца относительно частотного спектра $u(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{F}_t[u(\mathbf{x}, t)]$:

$$\Delta u + k^2 u = [-u_1 + i\omega u_0]/v^2, \quad (x, z) \in D \quad (4.23)$$

с тем же волновым числом $k = \omega/c$, что и в уравнении (4.11). В рассматриваемом примере ввиду нулевых начальных условий (4.18) ($u_0 = u_1 = 0$) правая часть нулевая, т.е. уравнение (4.23) становится однородным, совпадающим с уравнением (4.11).

Преобразованные граничные условия (4.15) – (4.16) внешне почти не меняются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} &= \begin{cases} q(x)f(\omega), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \\ u|_{z=-h} &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь $f(\omega) = \mathcal{F}_t[f]$ – частотный спектр заданного импульса $f(t)$.

Что касается условий на бесконечности (4.17), их нельзя непосредственно преобразовать в частотную область, так как они сформулированы хоть и для любого, но ограниченного интервала времени ($0 \leq t < \infty$). С физической точки зрения это означает, что если среда идеальна (не поглощает волновой энергии), то за бесконечное время возмущения, вызванные источником, могут достичь любой точки. Поэтому нельзя просто потребовать $u(x, \omega) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, а во многих случаях такое условие хоть и выполняется, но не является достаточным для однозначной разрешимости гармонической задачи. Условия на бесконечности, обеспечивающие однозначную разрешимость, обычно формулируются

в форме *принципов излучения* [2, 6, 17, 22]. Подробнее они будут рассмотрены в пункте 5.1.3.

Пока же несложно убедиться, что краевая задача (4.23) – (4.24) по форме не отличается от задачи, получающейся из исходной при подстановке $u(\mathbf{x}, t)$ в виде установившихся гармонических колебаний (4.10) в уравнения и граничные условия (4.14) – (4.16) и замене импульса $f(t)$ его частотным спектром $f(\omega)$. Таким образом, решение гармонической задачи можно рассматривать как важный промежуточный этап решения соответствующей исходной нестационарной задачи, на котором строится частотный спектр $u(\mathbf{x}, \omega)$ искомого волнового поля $u(\mathbf{x}, t)$. Нередко частотный спектр $u(\omega)$ представляет даже больший практический интерес, чем сами колебания $u(t)$, например, при анализе распределения энергии по частотным гармоникам, при исследовании условий возникновения резонансов, при проектировании частотных фильтров и средств виброзащиты, систем передачи данных, обработки сигналов и т.п.

Прежде чем приступить к решению модельной гармонической задачи (4.23) – (4.24), рассмотрим общие свойства комплексной амплитуды $u(\mathbf{x}, \omega)$ как функции комплексной переменной ω .

4.2.3. Свойства частотного спектра

Внимательный анализ соотношений (4.20), связывающих $u(t)$ и $u(\omega)$, показывает, что далеко не всякая комплекснозначная функция может выступать в роли частотного спектра некоторого сигнала. Например, сразу же возникает вопрос: если $u(\omega)$ – комплексная, то почему $u(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[u(\omega)]$ получается вещественной? Очевидно, должны существовать

строгие ограничения на $u(\omega)$, обеспечивающие требуемые свойства $u(t)$.

1. Для вещественных $u(t)$ и ω замена ω на $-\omega$ дает комплексно-сопряженное значение спектра

$$u(-\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt = \left(\int_0^{\infty} u(t)e^{i\omega t} dt \right)^* = u^*(\omega). \quad (4.25)$$

Соответственно обратное преобразование \mathcal{F}_t^{-1} вида (4.20) можно свести к интегралу по полуоси от суммы комплексно-сопряженных величин, т.е. записать его в виде

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} u(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.26)$$

из которого следует, что $u(t)$ – вещественна. Это представление справедливо тогда и только тогда, когда выполняется условие (4.25).

2. Если $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то частотный спектр $u(\omega)$ является функцией, регулярной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \omega > 0$, т.е. не имеет там особых точек (полюсов). Это свойство является общим для Фурье спектров функций, заданных на положительной полуоси [34].

Действительно, если $u(t)$ интегрируема на полуоси $0 \leq t < \infty$, то для любого комплексного $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ ($\omega_1 = \operatorname{Re} \omega$, $\omega_2 = \operatorname{Im} \omega$), лежащего в верхней полуплоскости ($\omega_2 > 0$), интеграл прямого преобразования

$$u(\omega) = \mathcal{F}_t[u] = \int_0^{\infty} u(t)e^{i\omega_1 t} e^{-\omega_2 t} dt$$

также существует, так как его сходимость при $t \rightarrow \infty$ только улучшается за счет сомножителя $e^{-\omega_2 t}$.

По лемме Жордана контур интегрирования обратного преобразования \mathcal{F}_t^{-1} при $t < 0$ можно замкнуть в верхнюю полуплоскость. Ввиду отсутствия там особенностей это приводит к требуемому результату: $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

3. По этой же причине при наличии у спектра $u(\omega)$ вещественных особых точек для их обхода контур интегрирования можно отклонять от вещественной оси только вверх. Иначе при $t < 0$ особенности попадают внутрь замкнутого контура, что приводит к ненулевым значениям $u(t)$. Поэтому в дальнейшем считаем, что в общем случае интегрирование по ω в обратном преобразовании \mathcal{F}_t^{-1} ведется по контуру Γ_ω , отклоняющемуся вверх при обходе вещественных полюсов $\pm\omega_k$ или смещенному в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ω , как на рис. 4.7, справа. При $t > 0$ его можно замкнуть в нижнюю полуплоскость и заменить интеграл суммой вычетов в полюсах ω_k (при отсутствии точек ветвления).

4. Отклонение контура в комплексную плоскость и вычисление вычетов в комплексных полюсах возможно только после аналитического продолжения спектра $u(\omega)$ в комплексную плоскость ω . Для комплексных $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ свойство (4.25) принимает вид

$$u(\tilde{\omega}) = u^*(\omega). \quad (4.27)$$

Волной здесь и далее обозначена операция зеркального отображения точки ω относительно мнимой оси:

$$\tilde{\omega} = -\omega_1 + i\omega_2 = -\omega^*. \quad (4.28)$$

Аналитическое продолжение не должно нарушать свойства (4.27).

5. Соответственно представление (4.26) в общем случае имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_{\omega}^{+}} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.29)$$

где Γ_{ω}^{+} – часть контура Γ_{ω} , лежащая в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \omega > 0$. При его выводе вместо замены $\omega = -\omega$ используется замена $\omega = \tilde{\omega}$.

6. Из свойства (4.27) следует, что если ω_k – комплексный полюс, то симметричная относительно мнимой оси точка $\tilde{\omega}_k$ также является полюсом функции $u(\omega)$. Другими словами, аналитически продолженная в комплексную плоскость функция частотного спектра $u(\omega)$ может иметь только симметричные пары вещественных и не лежащих на мнимой оси комплексных полюсов ω_k и $\tilde{\omega}_k$. Полюса, лежащие на мнимой оси, очевидно, не имеют пары, так как для них $\tilde{\omega}_k = \omega_k$ (рис. 4.7, справа).

Сопоставляя разложения $u(\omega)$ в ряд Лорана в точках ω_k и $\tilde{\omega}_k$, несложно убедиться, что в силу свойства (4.27) вычеты в этих полюсах также обладают свойством симметрии относительно мнимой оси. Если обозначить $r_k = \operatorname{res} u(\omega)|_{\omega=\omega_k}$, то

$$\operatorname{res} u(\omega)|_{\omega=\tilde{\omega}_k} = -(\operatorname{res} u(\omega)|_{\omega=\omega_k})^* = -r_k^* = \tilde{r}_k.$$

В результате вклад каждой такой пары однократных полюсов в сумму вычетов всегда получается вещественным:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= -\frac{2\pi i}{2\pi} [\operatorname{res} (ue^{-i\omega t})|_{\omega=\omega_k} + \operatorname{res} (ue^{-i\omega t})|_{\omega=\tilde{\omega}_k}] = \\ &= -i(r_k e^{-i\omega_k t} + \tilde{r}_k e^{-i\tilde{\omega}_k t}) = -i[r_k e^{-i\omega_k t} - (r_k e^{-i\omega_k t})^*] = \\ &= 2\operatorname{Im} [r_k e^{-i\omega_k t}], \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Вычет в чисто мнимом полюсе $\omega_k = i\delta_k$ также является чисто мнимой величиной: $r_k = ir_{k,2}$ ($r_{k,1} = \text{Re } r_k = 0$), что в конечном счете снова приводит к вещественному вкладу

$$u_k(t) = -\frac{2\pi i}{2\pi} \text{res}(ue^{-i\omega t})|_{\omega=-i\delta_k} = r_{k,2}e^{-\delta_k t}. \quad (4.31)$$

Проанализируем форму сигналов $u_k(t)$. Для этого воспользуемся полярной формой записи для вычетов

$$r_k = |r_k|e^{i\varphi_k}$$

и обозначением для полюсов

$$\omega_k = \omega_{k,1} + i\omega_{k,2} = 2\pi f_k - i\delta_k, \quad \delta_k \geq 0. \quad (4.32)$$

В этих обозначениях представление (4.30) принимает вид

$$u_k(t) = -2|r_k|e^{-\delta_k t} \sin(2\pi f_k t - \varphi_k), \quad t \geq 0. \quad (4.33)$$

Таким образом, пара $\omega_k, \tilde{\omega}_k$ дает затухающие гармонические колебания с частотой f_k (круговой частотой $2\pi f_k = \text{Re } \omega_k$) и логарифмическим декрементом затухания $\delta_k = -\text{Im } \omega_k$, которые определяются вещественной и мнимой частью полюса ω_k , а начальная амплитуда и сдвиг фазы – модулем и аргументом вычета r_k . Здесь учтено, что полюс ω_k лежит в нижней полуплоскости ($\delta_k > 0$).

При выходе полюса на вещественную ось ($\delta_k = 0$) колебания становятся гармоническими установившимися (незатухающими), а при $\delta_k < 0$ – экспоненциально растущими при $t \rightarrow \infty$. Последнее возможно только в средах с самовозбуждением – метаматериалах (например, для световых сигналов в флюоресцентных средах, в материалах, используемых в лазерах и т.п.), но не в “обычных” акустических или упругих средах. Наличие чисто вещественных полюсов ω_k характерно

для конечных тел или систем, в которых отсутствует внутреннее трение, приводящее к поглощению волновой энергии или энергии колебаний (идеальные среды или системы с идеальными упругими связями).

В бесконечных или полубесконечных (т.е. неограниченных только в некоторых направлениях) телах распространение волн от источника на бесконечность приводит к оттоку волновой энергии, т.е. к уменьшению ее количества в ограниченном объеме среды и затуханию колебаний в фиксированных точках. Поэтому частотные спектры сигналов, регистрируемых в бесконечных (открытых) волноводах даже из идеальных материалов, обычно не имеют вещественных полюсов ω_k . Однако в волноводах с препятствиями в виде локальных неоднородностей (дефектов) возможен эффект формирования *ловушечных мод*, характеризующихся захватом и локализацией энергии набегающей волны в окрестности препятствий [53, 54, 57, 62]. Частота ω_0 , на которой происходит такая резонансная локализация волновой энергии, является вещественным полюсом частотного спектра или, что эквивалентно, вещественной точкой спектра соответствующей гармонической краевой задачи относительно комплексной амплитуды $u(\mathbf{x}, \omega)$.

Что касается чисто мнимых полюсов $\omega_k = -i\delta_k$, то они дают неосциллирующий ($f_k = 0$) экспоненциально затухающий вклад.

4.2.4. Примеры частотных спектров

1. Для лучшего понимания связи между особенностями частотного спектра и свойствами динамических систем полезно рассмотреть классическую модель простейшего механического осциллятора: твердого тела массы m , связанного

с недеформируемым основанием упругой и демпфирующими связями (рис. 4.8).

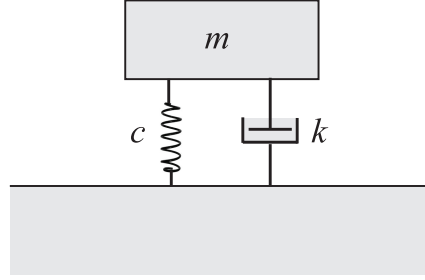


Рис. 4.8. Элементарный осциллятор

Вертикальное отклонение тела от положения равновесия $w(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$m\ddot{w} + k\dot{w} + cw = 0, \quad (4.34)$$

в котором c — жесткость упругой (пружинной) связи, k — коэффициент, описывающий демпфирование. Для определенности найдем смещения $w(t)$, вызванные отклонением от положения равновесия на величину w_0 при нулевой начальной скорости:

$$w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = 0. \quad (4.35)$$

Очевидно, они описываются решением задачи Коши (4.34) — (4.35), которая с помощью преобразования \mathcal{F}_t сводится к алгебраическому уравнению

$$(-m\omega^2 - i\omega k + c)w(\omega) = -i\omega w_0. \quad (4.36)$$

Правая часть появляется здесь, потому что продолженная на всю ось t функция $w(t)$ имеет разрыв в точке $t = 0$ со скачком $-w_0$ (см. (4.22)).

Из уравнения (4.36) сразу следует явное представление для частотного спектра

$$w(\omega) = G(\omega)w_0, \quad (4.37)$$

в котором

$$G(\omega) = i\omega/d(\omega), \quad d(\omega) = m\omega^2 + i\omega k - c \quad (4.38)$$

является Фурье-символом фундаментального решения $g(t)$ – функции Грина уравнения (4.34). Функция $g(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{g} + k\dot{g} + cg = \delta(t) \quad (4.39)$$

с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ в правой части.

Несложно убедиться, что $w(\omega)$ удовлетворяет описанным выше ограничениям (в частности, $w(\tilde{\omega}) = w^*(\omega)$) и имеет одну пару комплексных полюсов ω_0 и $\tilde{\omega}_0$, являющихся корнями характеристического уравнения $d(\omega) = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (\sqrt{-k^2 + 4mc} - ik)/(2m) = \omega_c - i\delta \\ \Rightarrow \omega_c &= \sqrt{c/m - \delta^2}, \quad \delta = k/(2m). \end{aligned}$$

Нестационарное решение $w(t)$ описывается вкладом вычетов в этих полюсах, который в соответствии с представлением (4.33) имеет вид

$$w(t) = -2Ae^{-\delta t} \sin(\omega_c t - \varphi), \quad t \geq 0, \quad (4.40)$$

$$A = w_0|r_0|, \quad \varphi = \arg r_0, \quad r_0 = \text{res } G|_{\omega=\omega_0} = \frac{i\omega_0}{2m\omega_0 + ik}.$$

При наличии трения ($k > 0$) оно описывает затухающие колебания с логарифмическим декрементом $\delta = k/2m > 0$. При отсутствии демпфирующей связи ($k = 0$) полюса ω_0 и $\tilde{\omega}_0$ выходят на вещественную ось, а колебания $w(t)$ становятся

незатухающими ($\delta = 0$) с круговой частотой $\omega_c = \sqrt{c/m}$, хорошо известной для идеального осциллятора такого вида (груз на пружинке) из начального курса физики. Для наглядности на рис. 4.9 показаны графики спектров $w(\omega)$ и соответствующих им колебаний $w(t)$ при наличии и при отсутствии демпфирования.

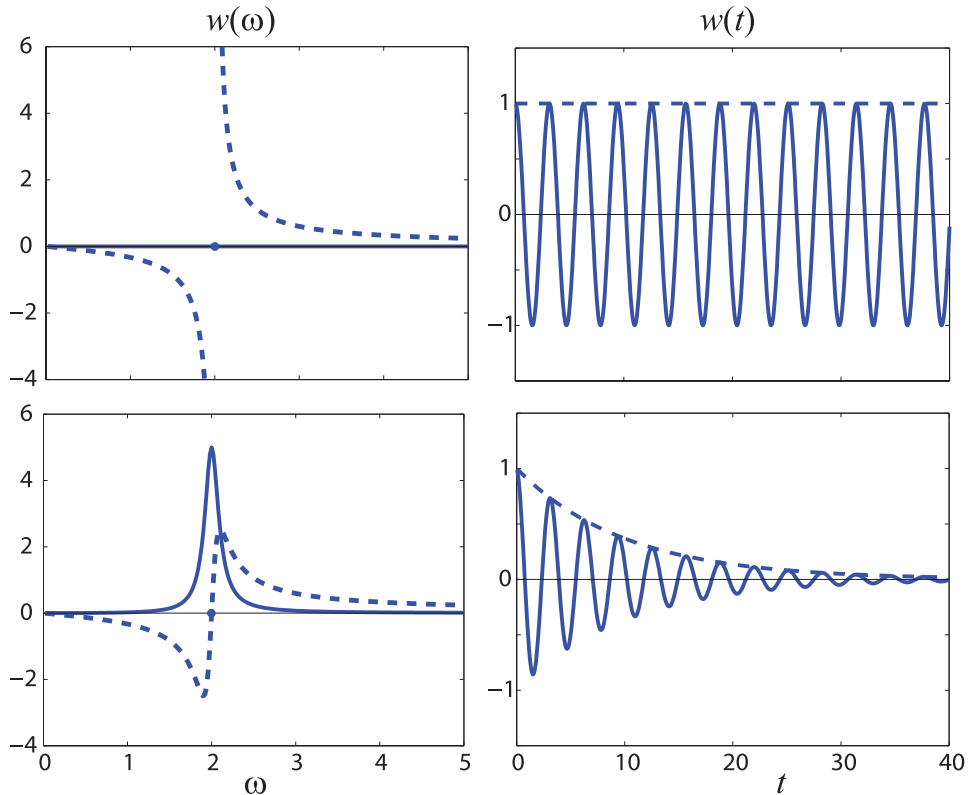


Рис. 4.9. Частотные спектры $w(\omega)$ (слева) и соответствующие им колебания $w(t)$ (справа) при отсутствии ($k = 0$, сверху) и наличии ($k = 0.2$, снизу) демпфирования; $m = 1$, $c = 4$; слева сплошными и пунктирными линиями показаны $\text{Re} w$ и $\text{Im} w$, а справа — сигналы $w(t)$ и их амплитудные огибающие соответственно.

Замечание 4.3. Нередко считается очевидным, что чем ближе сигнал к чисто гармоническому, тем сильнее его спектр концентрируется в окрестности частоты установившихся колебаний и наоборот. Однако в рассмотренном примере для идеального осциллятора ($k = 0$), хотя частота ω_c и является доминирующей ($w(\omega_c) = \infty$), спектр не сосредоточен в этой

точке, в нем присутствуют частоты из всего диапазона $-\infty < \omega < \infty$ (см. рис. 4.9).

Если же рассмотреть спектр, концентрирующийся в точках $\pm\omega_c$, например,

$$w_\delta(\omega) = \pi w_0 [\delta_\varepsilon(\omega - \omega_c) + \delta_\varepsilon(\omega + \omega_c)], \quad (4.41)$$

где δ_ε – любая из дельтаобразных функций (2.18)–2.20), то соответствующий сигнал несложно получить при $\varepsilon \rightarrow 0$ как сумму вклада двух δ -функций

$$\begin{aligned} w_\delta(t) &= \frac{\pi w_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= w_0 \cos \omega_c t, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Этот сигнал также является гармоническим установившимся с круговой частотой ω_c , а выбором амплитудного множителя πw_0 обеспечивается выполнение начальных условий (4.35). Получается, что $w_\delta(t)$ совпадает с решением (4.40) при $t \geq 0$! Но оно не удовлетворяет условию покоя $w \equiv 0$ при $t \leq 0$, которое обеспечивается спектром (4.38) при замыкании контура Γ_ω вверх. Таким образом, если не интересоваться предысторией (что обычно и имеет место на практике), то спектр решения начальной задачи может иметь самый различный вид. Условие покоя однозначно фиксирует один из этого множества спектров, все остальные варианты дают ненулевые колебания при $t < 0$, т.е. их спектр имеет особенности, дающие вклад при замыкании Γ_ω вверх.

2. Узкополосные сигналы. При численном обращении \mathcal{F}_t^{-1} намного проще работать со спектрами, локализованными в ограниченных интервалах, чем интегрировать по всей частотной оси, поэтому на практике при частотном анализе широко используется понятие *частотных окон* и сигналов с

узкополосным спектром. Узкополосным называется сигнал, спектр которого $F(\omega)$ отличается от нуля только в определенном интервале $|\omega - \omega_c| < d$. Он характеризуется *центральной частотой* $\omega_c = 2\pi f_c$ и полушириной окна d . Чем уже окно (меньше d), тем ближе сигнал $f(t)$ к гармоническому, но, безусловно, при этом не обеспечивается условие покоя при $t < 0$.

Простейшим примером частотного окна является узкополосной сигнал с кусочно-постоянным спектром

$$F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_c| < d \\ 0, & |\omega - \omega_c| > d \end{cases} \quad (4.43)$$

(Здесь и далее спектры даются для положительной полуоси $\omega \geq 0$, по умолчанию предполагается симметрия $F(-\omega) = F^*(\omega)$ при продолжении на отрицательную полуось $\omega < 0$.)

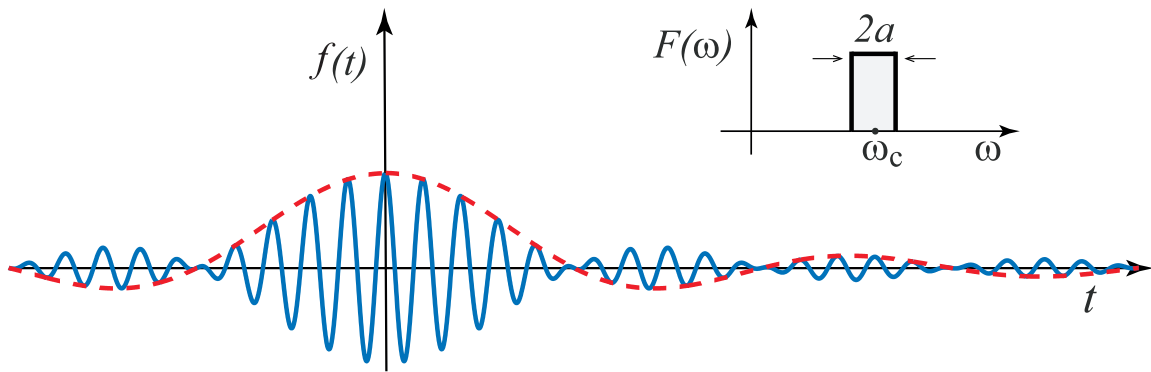


Рис. 4.10. Модулированный гармонический сигнал, соответствующий узкополосному спектру (4.43)

Во временной области спектру (4.43) соответствует сигнал

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_c - d}^{\omega_c + d} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \cos \omega_c t \sin dt/t, \quad -\infty < t < \infty$$

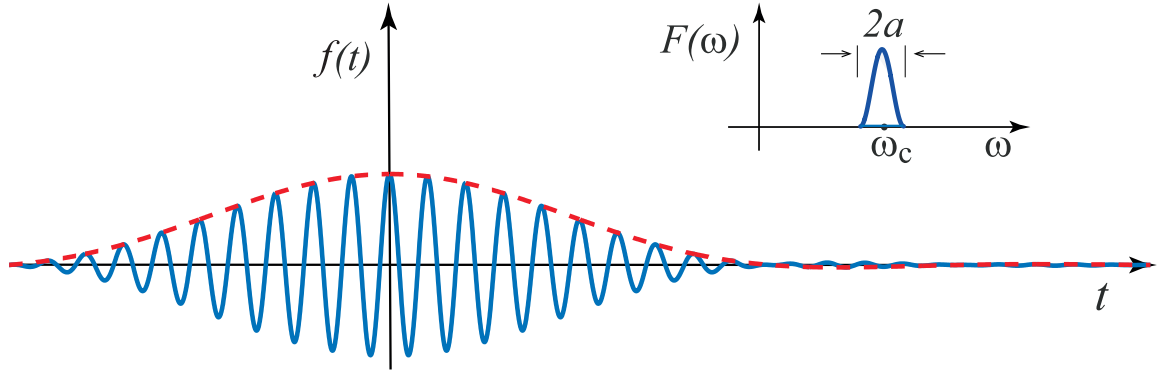


Рис. 4.11. Модулированные колебания, соответствующие частотному окну Ханна (4.44)

с несущей частотой ω_c , модулированный синусоидальным изменением амплитуды с существенно большим периодом $T_d = 2\pi/d \gg T_c = 2\pi/\omega_c$ и убывающим как t^{-1} амплитудным множителем (рис. 4.10). Медленное убывание сигнала при $|t| \rightarrow \infty$ обусловлено негладкостью кусочно-постоянного спектра $F(\omega)$, поэтому более популярны частотные окна с гладким спектром, такие как, например, окно Ханна (Hann window)

$$F(\omega) = \begin{cases} [1 + \cos \frac{\pi(\omega - \omega_c)}{d}]/2 = \cos^2 \frac{\pi(\omega - \omega_c)}{2d}, & |\omega - \omega_c| < d \\ 0, & |\omega - \omega_c| > d \end{cases}, \quad (4.44)$$

которому соответствует сигнал

$$f(t) = \pi \cos \omega_c t \sin dt / [t(\pi^2 - d^2 t^2)], \quad -\infty < t < \infty. \quad (4.45)$$

Он также представляет собой модулированные колебания с периодом $T_c = 2\pi/\omega_c$, определяемым центральной частотой ω_c , с максимумом при $t = 0$ и кубическим убыванием при $|t| \rightarrow \infty$ (рис. 4.11). За счет более быстрого убывания выделяется главный (центральный) пакет колебаний, ширина которого T_d и соответственно число пульсаций в нем также обратно пропорционально полуширине частотного окна d .

Еще раз отметим, что сигналы, задаваемые частотными окнами, определены на всей оси t , т.е. формально у них нет начала. Поэтому при интерпретации данных, например, при оценке скорости поверхностных волн, следят только за распространением центрального пакета.

5. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ

В настоящей главе на примере модельных гармонических задач для уравнения Гельмгольца демонстрируются основные этапы построения решения в рамках интегрального подхода, т.е. с помощью преобразования Фурье. Обсуждаются характерные особенности их практической реализации, такие как выбор контура и ветвей радикалов в соответствии с принципами излучения, выделение бегущих и объемных волн из интегрального представления, обеспечение численной устойчивости и др. Изложенная в главе общая схема в целом остается такой же и в более общем случае упругих волноводов [4, 14].

5.1. Полосовой волновод

5.1.1. Интегральное представление решения

Рассмотрим модельную задачу для полосового волновода с поверхностной нагрузкой, являющуюся частным случаем задачи (4.23) – (4.24) при $u_0 = u_1 = 0$, $f(\omega) = 1$ (рис. 4.6):

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x} = \{x, z\}, \quad \kappa = \omega/c, \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} q(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}, \quad u|_{z=-h} = 0, \quad |x| < \infty. \quad (5.2)$$

В силу линейности решение задачи (4.23) – (4.24) получается простым домножением решения данной задачи (5.1) – (5.2) на $f(\omega)$: $u(\mathbf{x}, \omega) := u(\mathbf{x}, \omega)f(\omega)$. Здесь мы перешли от стандартного обозначения волнового числа k к греческой букве κ , чтобы в дальнейшем оно не путалось с также традиционным обозначением функции или матрицы Грина волновода $k(\mathbf{x})$.

Геометрия области D (полоса $|x| < \infty$, $-h \leq z \leq 0$) позволяет применить преобразование \mathcal{F}_x к уравнениям и граничным условиям, т.е. уменьшить размерность задачи на единицу, избавившись от производных по x . В результате приходим к двухточечной граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения по z относительно Фурье-символа $U(\alpha, z) = \mathcal{F}_x[u]$:

$$U''_{zz} - (\alpha^2 - \kappa^2)U = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (5.3)$$

$$U'_z|_{z=0} = Q, \quad U|_{z=-h} = 0, \quad (5.4)$$

где $Q(\alpha) = \mathcal{F}_x[q]$ – Фурье-символ заданной функции $q(x)$, описывающей поверхностный источник колебаний.

Общее решение уравнения (5.3) имеет вид

$$U(\alpha, z) = t_1 e^{\sigma z} + t_2 e^{-\sigma z}, \quad (5.5)$$

где $\pm\sigma = \pm\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$ – корни характеристического уравнения; t_1, t_2 – неизвестные коэффициенты, которые определяются из линейной алгебраической системы, возникающей при подстановке общего решения (5.5) в граничные условия (5.4):

$$A \mathbf{t} = \mathbf{f}, \quad (5.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma \\ e^{-\sigma h} & e^{\sigma h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае ее решение несложно записать в явном виде

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} e^{\sigma h} \\ -e^{-\sigma h} \end{pmatrix} Q, \quad \Delta = \det A = 2\sigma \operatorname{ch} \sigma h.$$

Отметим, что Q входит в граничное условие и соответственно в \mathbf{t} линейным множителем. Это позволяет представить реше-

ние задачи (5.3) – (5.4) в виде

$$U(\alpha, z) = K(\alpha, z)Q(\alpha), \quad (5.7)$$

где

$$K(\alpha, z) = (e^{\sigma(z+h)} - e^{-\sigma(z+h)})/\Delta = \frac{\operatorname{sh} \sigma(z+h)}{\sigma \operatorname{ch} \sigma h} \quad (5.8)$$

– решение, получающееся при $Q = 1$, т.е. $k(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[K]$ соответствует *сосредоточенному источнику* $q(x) = \delta(x)$:

$$\partial k / \partial z|_{z=0} = \delta(\mathbf{x}).$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что частное решение $g(x)$ уравнения с δ -функцией в правой части: $Lg = \delta$ называется функцией Грина [29]. Отличительным свойством $g(x)$ является возможность выразить частное решение с произвольной правой частью $f(x)$ в виде свертки g и f :

$$Lu = f \quad \Rightarrow \quad u = g * f.$$

Аналогичным свойством обладает и функция $k(\mathbf{x})$, с той разницей, что при ее определении δ -функция входит не в правую часть, а в граничные условия рассматриваемой краевой задачи. Действительно, в силу свойства обратного преобразования Фурье от произведения трансформант (см. (1.29))

$$u(x, z) = \mathcal{F}^{-1}[KQ] = (k * q) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi, z)q(\xi)d\xi, \quad (5.9)$$

поэтому $k(\mathbf{x})$ также называется *функцией Грина*, но не уравнения Гельмгольца, а рассматриваемой краевой задачи

(5.1)–(5.2). Соответственно $K(\alpha, z) = \mathcal{F}_x[k]$ – Фурье-символ функции Грина.

Форма представления решения в виде (5.7), (5.9) сохраняется для линейных систем и сред самого общего вида. Она отражает тот факт, что возмущения, вызванные заданным воздействием (в нашем случае гармонические колебания $u(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$, вызванные источником $q(x)e^{-i\omega t}$), выражаются в виде интегральной суперпозиции (свертки) функции Грина $k(\mathbf{x})$, описывающей реакцию среды на элементарное сосредоточенное воздействие, и функции $q(x)$, задающей плотность распределения рассматриваемого воздействия. В случае, когда возможны элементарные воздействия нескольких видов, реакция среды описывается уже не скалярной, а матричной функцией (*матрицей Грина*), каждый столбец которой является решением для одного из элементарных воздействий.

Например, при рассмотрении упругих волноводов колебания среды описываются вектор-функциями смещений \mathbf{u} , а источник колебаний – вектором поверхностной нагрузки \mathbf{q} . Соответственно решение представимо в виде *матричной свертки* $\mathbf{u} = k * \mathbf{q}$, в которой столбцами матрицы Грина $k(\mathbf{x})$ являются решения, соответствующие сосредоточенным нагрузкам, заданным вдоль координатных ортов \mathbf{i}_n : $\mathbf{q} = \delta(\mathbf{x})\mathbf{i}_n, n = 1, 2, 3$.

Наряду с представлением (5.9) решение можно написать в виде

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (5.10)$$

который непосредственно следует из (5.7). Как обычно, контур Γ отклоняется от вещественной оси при обходе полюсов $K(\alpha, z)$ (направление обхода уточним далее в пункте 5.1.3).

Отметим, что $Q(\alpha)$ не имеет полюсов, так как по свойству преобразования Фурье от функций, заданных в ограниченной области (в данном случае на отрезке $[-a, a]$), она является целой функцией.

5.1.2. Полюса, вычеты и бегущие волны

1. Используя лемму Жордана и теорему Коши, контурный интеграл (5.10) можно представить в виде суммы вычетов в полюсах $\pm\zeta_n$, являющихся нулями знаменателя функции $K(\alpha, z)$, т.е. корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) = 2\sigma \operatorname{ch} \sigma h = 0. \quad (5.11)$$

В данном случае их несложно выписать в явном виде, исходя из общего представления нулей гиперболического косинуса:

$$\sigma h = i(\pi/2 + n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Возведя левую и правую части этого равенства в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \kappa^2 &= -a_n^2, \quad a_n = \pi(n - 1/2)/h, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \Rightarrow \quad \pm\zeta_n &= \pm\sqrt{\kappa^2 - a_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

В силу того, что характеристическое уравнение (5.11) четно по α (зависит от α^2), полюса также получаются расположенными в комплексной плоскости α симметрично относительно начала координат $\alpha = 0$. Поэтому для определенности здесь и далее через ζ_n обозначены полюса, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \alpha > 0$, включая вещественную ось $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$, а через $-\zeta_n$ — симметричные им полюса в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \alpha < 0$ и на отрицательной вещественной оси $\operatorname{Re} \alpha < 0$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$ (рис. 5.1).

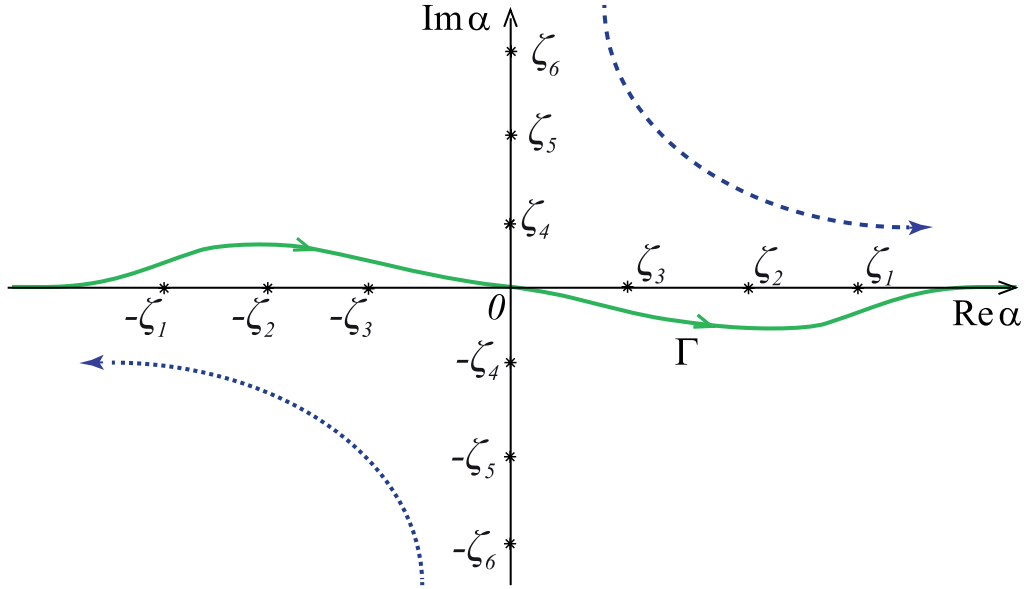


Рис. 5.1. Расположение полюсов $\pm\zeta_n$ вида (5.12) в комплексной плоскости α ; пунктирные линии со стрелками показывают направление движения полюсов в комплексной плоскости с ростом частоты

Замечание 5.1. Точка $\alpha = \kappa$ также является корнем уравнения (5.11), но не является полюсом! Во-первых (и это главное), соответствующий множитель $\alpha - \kappa$ входит в степени $1/2$:

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} = (\alpha - \kappa)^{1/2}(\alpha + \kappa)^{1/2},$$

а у полюса степень должна быть целой. Поэтому $\alpha = \kappa$ не полюс, а слабая особенность (точка ветвления).

Во-вторых, в данном случае эта особенность устранима:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \kappa} \text{sh } \sigma(z + h)/\sigma = z + h,$$

поэтому фактически у $K(\alpha, z)$ нет точек ветвления (это мероморфная функция) и при замыкании контура нет необходимости учитывать разрезы, выделяющие однозначную ветвь квадратного корня $\sigma(\alpha)$.

Последнее является общим свойством, присущим функции или матрице $K(\alpha, z)$ любого волновода конечной толщи-

ны h , в то время как в случае бесконечной глубины ($h = \infty$: полуплоскость, полупространство, многослойный пакет на полупространстве и т.п.) точки ветвления, вносимые подобными радикалами, становятся неустраняемыми, что приводит к необходимости проводить в плоскости α разрезы и обходить их по обоим берегам при замыкании контура интегрирования (см. параграф 5.3).

Легко видеть, что среди полюсов (5.12) только несколько первых могут быть вещественными, так как a_n увеличиваются с ростом n и, начиная с некоторого номера N_r , для $\forall n > N_r$ волновое число κ становится меньше a_n , а ζ_n чисто мнимыми:

$$\zeta_n = \begin{cases} \sqrt{\kappa^2 - a_n^2}, & n \leq N_r \quad (\kappa > a_n) \\ i\sqrt{a_n^2 - \kappa^2}, & n > N_r \quad (\kappa < a_n) \end{cases} \quad (5.13)$$

Таким образом, при любом фиксированном $\kappa = \omega/c$ (т.е. при любом фиксированном значении частоты ω), число вещественных полюсов конечно, в то время как остальное бесконечное счетное множество полюсов представляет собой комплексные величины, расположенные в верхней полуплоскости (в рассматриваемом случае на мнимой оси). В целом полюса ζ_n пронумерованы так, что значения вещественных полюсов уменьшаются с ростом n : $\zeta_{n+1} < \zeta_n$, а мнимая часть комплексных увеличивается: $\text{Im } \zeta_{n+1} \geq \text{Im } \zeta_n$. Это правило сохраняется и при нумерации полюсов в более общем случае для упругих волноводов, когда они не могут быть представлены явной формулой, а определяются численно.

Положение полюсов в комплексной плоскости α зависит от частоты, т.е. они являются функциями ω . Для $K(\alpha, z)$ вида

(5.8) они задаются с помощью выражения (5.13):

$$\zeta_n(\omega) = \frac{1}{c} \begin{cases} \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}, & \omega \geq \omega_n \\ i\sqrt{\omega_n^2 - \omega^2}, & \omega \leq \omega_n \end{cases}, \quad \omega_n = ca_n, \quad (5.14)$$

а в общем случае являются неявными функциями, определяемыми характеристическим уравнением

$$\Delta(\alpha, \omega) \equiv \det A(\alpha, \omega) = 0, \quad (5.15)$$

в котором A – матрица алгебраической системы, возникающей при подстановке общего решения в граничные условия. С ростом частоты вещественные полюса $\pm\zeta_n(\omega)$ движутся по вещественной оси от начала координат $\alpha = 0$, а комплексные – к началу координат, выходя по очереди на вещественную ось (рис. 5.1, см. также ниже рис. 5.2). Таким образом, число вещественных полюсов увеличивается с увеличением ω . Это правило остается справедливым для волноводов самого общего вида. Частоты ω_n , на которых появляется новая пара вещественных полюсов, называются *частотами отсечки*.

В рассматриваемом случае при $\omega = 0$ все полюса чисто мнимые ($\zeta_n = \sqrt{-a_n^2} = ia_n$). С ростом ω они движутся вдоль мнимой оси к вещественной, выходя на нее через начало координат $\alpha = 0$. На частотах отсечки $\omega_n = ca_n$ полюса $\pm\zeta_n(\omega)$ сливаются в двукратный полюс $\zeta_n = 0$, наличие которого приводит к тому, что интеграл (5.10) становится расходящимся (если только этот полюс не устраняется нулем функции $Q : Q(0) = 0$). Это означает, что $u(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_n$, т.е. частоты отсечки являются особыми точками частотного спектра $u(\mathbf{x}, \omega)$.

2. Как уже было показано в пунктах 4.2.3–4.2.4, если вещественная особенность ω_n является однократным полю-

сом, то она дает вклад в $u(t)$ в виде незатухающих гармонических колебаний с круговой частотой ω_n . Поэтому, чтобы выяснить вклад точек отсечки в нестационарное решение $u(t)$, необходимо предварительно определить порядок особенности, вносимой ими в $u(\omega)$.

Для этого рассмотрим вычеты подынтегральной функции (5.10) в однократных полюсах $\mp\zeta_n$

$$\operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha=\mp\zeta_n} Q(\mp\zeta_n) e^{\pm i\zeta_n x} \equiv r_n^{\pm}(z) e^{\pm i\zeta_n x} \quad (5.16)$$

с точки зрения их поведения при $\omega \rightarrow \omega_n$, когда $\zeta_n \rightarrow 0$. Очевидно, $Q(\mp\zeta_n) e^{\pm i\zeta_n x} \rightarrow Q(0) < \infty$ и особенность может содержаться только в вычете K . Выделив составляющую, несущую полюс,

$$K(\alpha, z) = \frac{K_0(\alpha, z)}{\alpha^2 - \zeta_n^2}, \quad |K_0(\mp\zeta_n, z)| < \infty,$$

несложно убедиться, что

$$\operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha=\mp\zeta_n} = \mp \frac{K_0(\mp\zeta_n, z)}{2\zeta_n} \sim \frac{\operatorname{const}}{\sqrt{\omega - \omega_n}} \quad \text{при } \omega \rightarrow \omega_n,$$

следовательно, ω_n является не полюсом, а слабой (корневой) особенностью составляющей спектра u_n , соответствующей вкладу вычета в полюсах $\mp\zeta_n$:

$$u_n(\mathbf{x}, \omega) \sim u_0(\mathbf{x}, \omega) / \sqrt{|\omega - \omega_n|}, \quad \omega \rightarrow \omega_n.$$

Вклад этой особенности в асимптотику $u(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно получить на основе оценки поведения эталонного интеграла, известной как

Лемма Эрдейи [49]. Пусть $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, $f(x) \in C^\infty[0, a]$, $f^{(k)}(a) = 0$ для $\forall k$. Тогда

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (5.17)$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k! \alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi(k+\beta)}{2\alpha}}, \quad \Gamma(x) - \text{гамма-функция [1]}.$$

На основе принципа локализации для осциллирующих интегралов [49] вклад каждой особой точки спектра ω_n можно рассматривать по отдельности, выделив ее ограниченную d -окрестность с помощью некоторой бесконечно гладкой финитной функции $\varphi_n(\omega)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u_n(\omega) e^{-i\omega t} d\omega &= \int_0^\infty u_n(\omega) (1 - \varphi_n(\omega)) e^{-i\omega t} d\omega + \\ &+ \int_{|\omega - \omega_n| < d} \varphi_n(\omega) u_n(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_n \in C_\infty$: $\varphi_n = 1$ при $|\omega - \omega_n| < d/2$ и $\varphi_n = 0$ при $|\omega - \omega_n| \geq d$, тогда первый из интегралов уже не содержит этой особенности, а второй с помощью замены $y = |\omega - \omega_n|$ сводится к эталонным интегралам леммы Эрдейи:

$$e^{-i\omega_n t} \int_0^{d/2} |y|^{-1/2} [u_0(\omega_n - y) e^{iyt} + u_0(\omega_n + y) e^{-iyt}] dy.$$

Сопоставление с интегралом (5.17) показывает, что в данном случае $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\lambda = t$, т.е. вклад частоты отсечки ω_n описывает медленно затухающие гармонические колебания с

частотой ω_n :

$$u_n(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} [u_0(\omega_n) e^{-i\omega_n t}] / \sqrt{t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

3. С точки зрения волнового анализа вещественные полюса ζ_n являются волновыми числами бегущих волн, возбуждаемых заданным источником $q(x)$, в то время как комплексным ζ_n соответствуют неоднородные волны, экспоненциально затухающие при удалении от источника. Действительно, при вещественных ζ_n экспоненты $e^{\pm i\zeta_n x}$, взятые в представлении (5.16) вместе с гармоническим множителем $e^{-i\omega t}$, представляют собой однородные плоские волны с фазовыми функциями $\theta_n = \pm \zeta_n x - \omega t$. Полюс ζ_n играет здесь роль волнового числа k (см. (4.1)), а множители $r_n^\pm(z)$ описывают зависимость амплитуды от глубины z . Эти волны распространяются вправо и влево вдоль оси x с фазовой скоростью $c_n = \omega / \zeta_n$. Поскольку амплитудные множители $r_n^\pm(z)$ не зависят от x , как и $|e^{i(\pm \zeta_n x - \omega t)}| = 1$, эти волны распространяются без затухания, т.е. являются классическими однородными волнами, определенными в начале главы 4.

С математической точки зрения функции $r_n^\pm(z) e^{\pm i\zeta_n x}$ являются собственными решениями рассматриваемой краевой задачи. Взятые с произвольным множителем они тождественно удовлетворяют уравнению (5.1) и однородным ($q \equiv 0$) граничным условиям (5.2). Эти решения называют также *нормальными модами* рассматриваемого волновода по аналогии с собственными (нормальными) колебаниями ограниченных стержней и балок Бернулли–Эйлера в одномерной модели.

В рамках классического модального анализа нормальные моды строят, не прибегая к интегральным преобразова-

ниям и вычетам. Решение в виде $u = te^{\sigma z} e^{i\zeta x}$ подставляется в однородное уравнение и однородные граничные условия. Первое дает связь между параметрами σ и ζ , а вторые – трансцендентное уравнение относительно параметра ζ , корни которого ζ_n являются точками спектра однородной задачи, так как при $\zeta = \zeta_n$ существуют ее ненулевые решения. В нашем случае из уравнения (5.1) следует $-\zeta^2 + \sigma^2 - \kappa^2 = 0$, т.е. каждому ζ соответствуют два значения $\sigma = \pm \sqrt{\zeta^2 - \kappa^2}$. Поэтому в однородные условия (5.2) подставляется решение в виде $(t_1 e^{\sigma z} + t_2 e^{-\sigma z}) e^{i\zeta x}$, что приводит к однородной системе $A\mathbf{t} = 0$, ненулевое решение которой существует только для $\zeta : \det A(\zeta) = 0$. В рассматриваемом примере данное уравнение совпадает с характеристическим уравнением (5.11).

Замечание 5.2. Как с помощью вычетов, так и с помощью модального анализа определяются дисперсионные характеристики нормальных мод $\zeta_n(\omega)$ и их собственные формы (зависимости амплитуды от глубины) $r_n^\pm(z)$, однако модальный анализ дает последние только с точностью до постоянных множителей, в то время как в рамках интегрального подхода вычеты дают однозначные амплитудно-частотные характеристики нормальных мод, возбуждаемых заданным источником q .

Для комплексных $\zeta_n = \zeta_{n,1} + i\zeta_{n,2}$, встречающихся, например, в случае упругих волноводов, наличие мнимой части $\zeta_{n,2} > 0$ приводит к экспоненциальному затуханию

$$|e^{\pm i\zeta_n x}| = |e^{\pm i\zeta_{n,1} x}| |e^{\mp \zeta_{n,2} x}| = e^{-\zeta_{n,2}|x|} \rightarrow 0, \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

В этом случае вычеты (5.16) описывают неоднородные волны, уходящие от источника с фазовой скоростью $c_n = \omega/\zeta_{n,1}$, экспоненциально затухая с декрементом $\zeta_{n,2}$.

Если ζ_n зависит от ω линейно: $\zeta_n(\omega) = s\omega$, то соответствующая фазовая скорость $c_n = \omega/\zeta_n = 1/s$ не зависит от частоты. Такие волны называются *бездисперсионными*. Классическим примером бездисперсионной бегущей волны является волна *Релея*, распространяющаяся вдоль поверхности упругого однородного полупространства. В решении соответствующей краевой задачи она описывается вкладом вычета в вещественном полюсе $\zeta_R = \omega/c_R$ (полюсе Релея), а ее фазовая скорость c_R не зависит от частоты [2–4, 17].

4. Бездисперсионные волны не меняют своей формы в процессе распространения. В этом несложно убедиться, исходя из общего представления для нестационарных волн (4.20). Пусть функция $K(\alpha, z)$ в представлении (5.10) решения гармонической задачи для некоторого волновода имеет бездисперсионные вещественные полюса $\pm\zeta_n = \pm\omega/c_n$. С учетом частотного спектра источника $f(\omega) = \mathcal{F}_t[f]$ вычеты (5.16) в этих полюсах дают частотный спектр соответствующих им бегущих волн

$$u_n^\pm(\mathbf{x}, \omega) = a_n^\pm(z, \omega)e^{\pm i\omega x/c_n}, \quad a_n^\pm = r_n^\pm(z, \omega)f(\omega).$$

Рассмотрим для определенности волну u_n^+ , бегущую вправо. Соответствующее нестационарное решение имеет вид

$$u_n^+(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_n^+(\omega)e^{-i\omega(t-x/c_n)}d\omega = a_n^+(t - x/c_n).$$

Очевидно, сигнал $u_n^+(t)$, зарегистрированный в любой фиксированной точке $x_0 = c_nt_0 > 0$ справа от источника, имеет одну и ту же форму $a_n^+(t - t_0)$, но со сдвигом на время t_0 , необходимое для того, чтобы волна, бегущая со скоростью c_n , пришла от точки возбуждения $x = 0$ к точке приема x_0 . При

этом форма сигнала $a_n^+(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[r_n^+ f] = (r_n^+ * f)(t)$ получается в результате свертки частотного спектра источника $f(\omega)$ с амплитудой вычета $r_n^+(z, \omega)$, описывающего амплитудно-частотную характеристику волны, возбуждаемой в рассматриваемой структуре мгновенным импульсом $q(x)\delta(t)$. Аналогично пространственная форма волны, зафиксированная в некоторый момент $t = t_0 = x_0/c_n$, определяется той же функцией a_n^+ :

$$a_n^+(t_0 - x/c_n) = a_n^+((x_0 - x)/c_n),$$

которая сдвинута на x_0 , отражена зеркально (x со знаком минус) и сжата или растянута в зависимости от величины коэффициента $1/c_n$.

5.1.3. Дисперсионные кривые

1. При нелинейной зависимости $\zeta_n(\omega)$ медленность $s_n = \zeta_n/\omega$, фазовая скорость волны $c_n = \omega/\zeta_n$ и групповая $v_n = d\omega/d\zeta_n$ также зависят от частоты, поэтому различные гармонические составляющие $u_n(\omega)e^{-i\omega t}$ нестационарного сигнала $u_n(t)$ приходят в точку приема в различное время, что приводит к искажению (зачастую весьма значительному) исходной формы сигнала. Это явление называется *волновой дисперсией*, а частотные зависимости $\zeta_n(\omega)$, $s_n(\omega)$, $c_n(\omega)$ и $v_n(\omega)$ – *дисперсионными зависимостями*. Графически они изображаются *дисперсионными кривыми*. Пример дисперсионных кривых для дисперсионных зависимостей (5.14) приводится на рис. 5.2. На левом графике этого рисунка сплошными линиями показаны вещественные ветви дисперсионных кривых (5.14), а пунктиром ниже оси ω – их чисто мнимые участки для $\omega < \omega_n$. Справа показаны соответствующие

зависимости фазовых и групповых скоростей

$$c_n = \omega / \zeta_n(\omega) \quad \text{и} \quad v_n = d\omega / d\zeta_n = c^2 \zeta_n(\omega) / \omega$$

(только вещественные участки). И те, и другие начинаются с частот отсечки ω_n и с ростом ω стремятся к значению скорости объемных волн c , определяемой параметром исходного волнового уравнения (4.5), но первые идут сверху из бесконечности, а вторые – снизу, выходя из нуля.

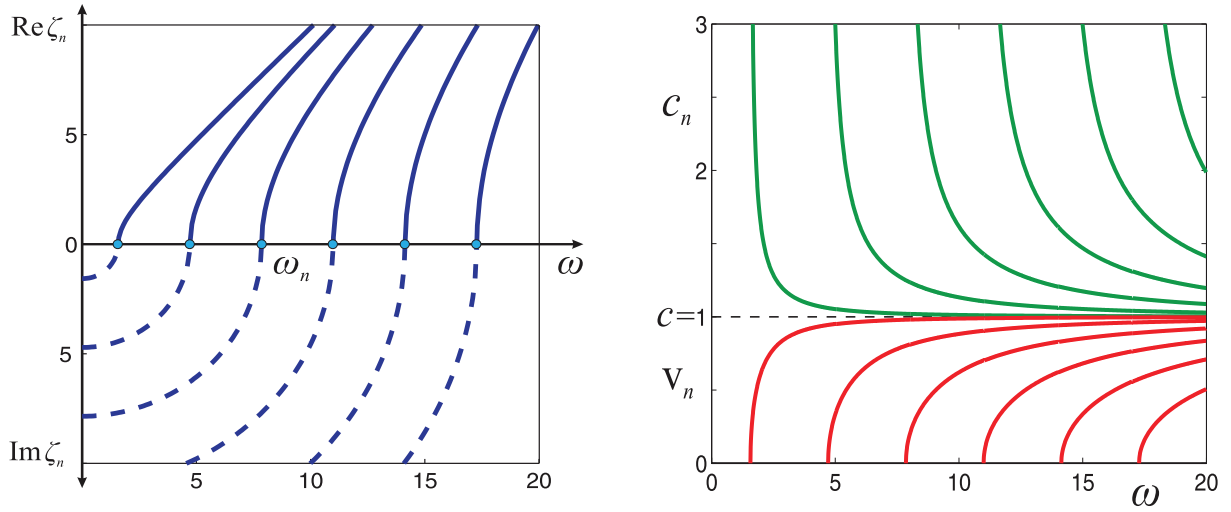


Рис. 5.2. Вещественные и комплексные ветви дисперсионных кривых $\zeta_n(\omega)$, заданных выражением (5.14) (слева), и кривые фазовых и групповых скоростей $c_n(\omega)$ и $v_n(\omega)$, соответствующие вещественным ветвям этих кривых (справа)

Тот факт, что групповая скорость v_n на частотах отсечки ω_n равна нулю, интерпретируется как формирование стоячих волн без переноса волновой энергии, которая накапливается в окрестности источника.

Наряду с зависимостями $\zeta = \zeta_n(\omega)$ дисперсионными часто (особенно в физике) называют и обратные зависимости частоты от волнового числа: $\omega = \omega_n(\zeta)$. В рассматриваемом примере это кривые

$$\omega = \omega_n(\zeta) = c\sqrt{\zeta^2 + a_n^2}.$$

Графически они получаются из левого рисунка 5.2 поворотом на 90° и зеркальным отражением относительно оси ω .

Ветви $\omega_n(\zeta)$ выходят из тех же самых точек — частот отсечки ω_n , расположенных на вертикальной частотной оси с шагом $\pi c/h$, стремясь далее к линейной асимптоте с угловым коэффициентом c : $\omega_n \sim c\zeta$ при $\zeta \rightarrow \infty$, сближаясь, но не пересекаясь и не касаясь друг друга. Такой вид и асимптотическое поведение дисперсионных кривых является типичным для всех волноводов конечной толщины, включая упругие слои, трубы, цилиндры, многослойные композитные структуры и т.п.

2. В качестве примера дисперсионных кривых для упругого волновода на рис. 5.3 приведены комплексные и вещественные ветви частотных зависимостей $\zeta_n(\omega)$ для классических волн Лэмба, распространяющихся вдоль свободного упругого слоя [56]. Безразмерная круговая частота вводится здесь следующим образом: $\omega = 2\pi f h / c_s$, где f — размерная частота, h — толщина слоя и c_s — скорость S -волн в упругом материале слоя; значения волновых чисел ζ_n отнесены к h^{-1} , скоростей — к c_s ; коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$.

В соответствии с характером движения частиц слоя бегущие волны Лэмба подразделяют на симметричные (продольные) и антисимметричные (изгибные), а соответствующие ветви дисперсионных кривых обозначают S_0, S_1, S_2, \dots и A_0, A_1, A_2, \dots (см. рис. 5.3). Собственные формы колебаний, описываемые вычетами в полюсах ζ_n (как в представлении (5.16)), называют также *нормальными модами* волн Лэмба. Нумерация мод традиционно начинается с нуля [8]; моды S_0 и A_0 называют *фундаментальными*, а остальные — *высшими*. Волновые числа $\zeta_n(\omega)$ фундаментальных мод вещественны для всех ω , т.е. они являются незатухающими бегущими

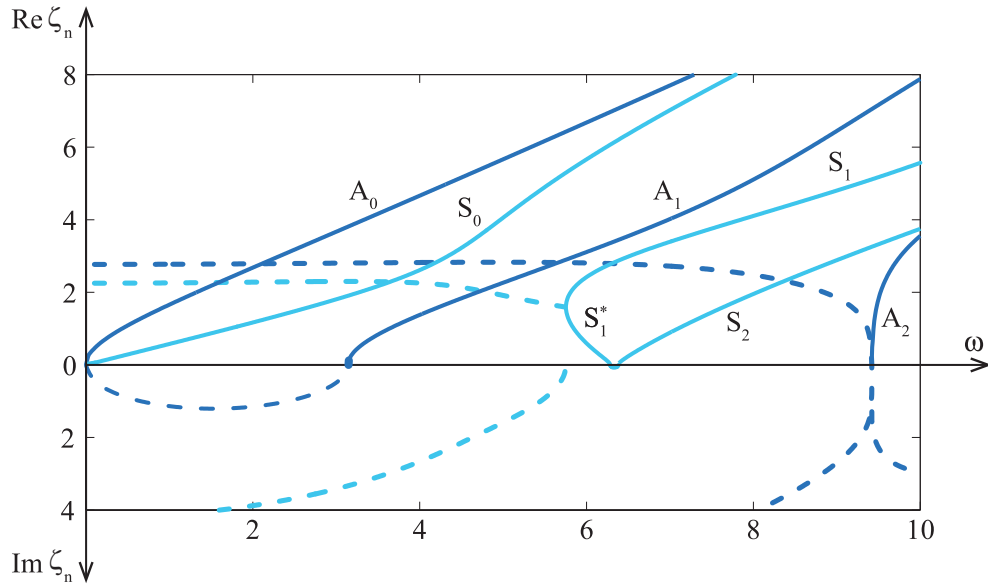


Рис. 5.3. Комплексные (пунктир) и вещественные (сплошные линии) ветви дисперсионных кривых для свободного упругого слоя

волнами во всём частотном диапазоне. Их дисперсионные кривые выходят из нуля и при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к одной и той же асимптоте: $\zeta_n(\omega) \sim \zeta_R \omega$, где ζ_R — волновое число поверхностной волны Рэлея [59] (рис. 5.3). С этой точки зрения волну Рэлея, распространяющуюся вдоль поверхности упругого полупространства, можно рассматривать как высокочастотный предел суперпозиции фундаментальных мод Лэмба S_0 и A_0 .

У дисперсионных кривых высших мод, как и у кривых (5.14) рассмотренного выше примера, начальные участки до частот отсечки ω_n комплекснозначны. При $\omega = \omega_n$ комплексные полюса ζ_n выходят на вещественную ось, как правило, через начало координат (рис. 5.4, слева), т.е. вещественные ветви начинаются с оси ω . Редким исключением является так называемый случай *обратных волн*. Волновые числа этих мод приходят из комплексной плоскости α на вещественную ось не через начало координат, а через некоторую точку $\alpha_0 \neq 0$

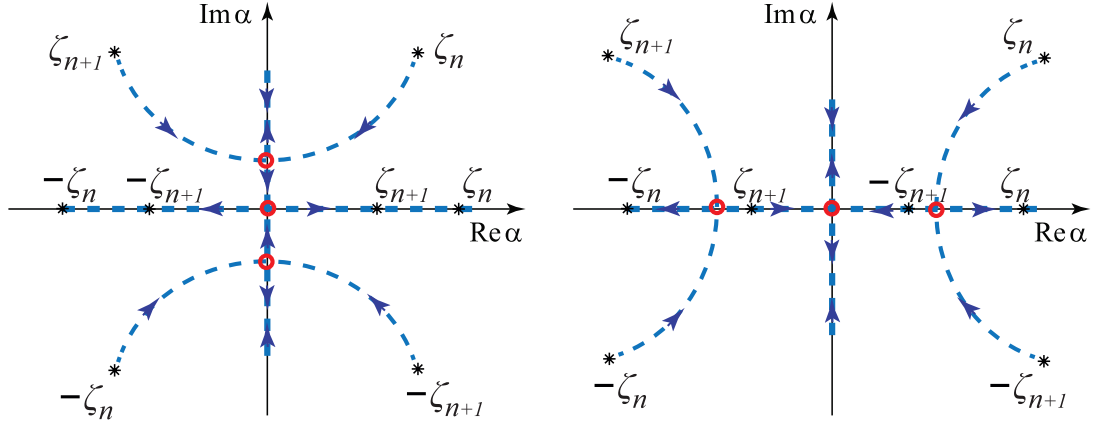


Рис. 5.4. Выход полюсов на вещественную ось: слева — движение регулярных полюсов через начало координат, справа — появление нерегулярного полюса

(рис. 5.4, справа). В этой точке два комплексно-сопряженных полюса сливаются, образуя двукратный полюс. Далее полюса расходятся по вещественной оси в противоположных направлениях. При этом, положительный полюс,двигающийся влево к началу координат, называют *нерегулярным*, так как обычным (регулярным) является движение полюсов от начала координат на бесконечность.

Среди дисперсионных кривых, приведенных на рис. 5.3, нерегулярным является полюс моды S_1^* (нисходящая часть кривой в диапазоне $5.75 < \omega < 6.28$). Восходящая часть кривой S_1 описывает движение второго (регулярного) полюса вправо от точки встречи $\alpha_0 = 1.59$. Перед этим ($\omega < 5.75$) два данных полюса движутся в комплексной плоскости (пунктир), приходя в точку встречи α_0 из верхней и нижней полуплоскости комплексной плоскости α (не следует также забывать, что наряду с полюсами ζ_n имеется набор центрально-симметричных им полюсов $-\zeta_n$, поэтому еще одна пара комплексно-сопряженных полюсов выходит при $\omega = 5.75$ на вещественную ось в точке $-\alpha_0$).

При $\omega = 6.28$ нерегулярный полюс достигает начала координат и практически сразу же разворачивается, давая

начало вещественной ветви следующей моды S_2 (при других ν перед тем, как двинуться назад по вещественной оси, он совершает небольшое путешествие вверх-вниз по мнимой оси). Хотя моды S_1^* и S_1 — это две разные волны, составленную из их вещественных ветвей кривую часто рассматривают как дисперсионную кривую одной моды S_1 , имеющую характерный изгиб, который дает в диапазоне $5.75 < \omega < 6.28$ две бегущие волны. Волна, соответствующая нерегулярному полюсу, называется *обратной*. Происхождение этого названия подробнее обсуждается ниже в параграфе 5.2.

5.1.4. Выбор направления замыкания контура

В соответствии с леммой Жордана направление замыкания контура Γ определяется экспоненциальным поведением подынтегральной функции при $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$, которым в интеграле (5.10) наряду с $e^{-i\alpha x}$ обладает и функция $Q(\alpha)$:

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^a q(x)e^{i\alpha x} dx \sim O(e^{|\text{Im } \alpha|a}), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Это означает, что $Q(\alpha)$ экспоненциально растет в обоих направлениях. Для компенсации этого роста за счет убывания сомножителя $e^{-i\alpha x}$ необходимо, чтобы значение x было по модулю больше a : $|x| > a$, т.е. контур можно замкнуть вверх или вниз для всей подынтегральной функции в целом только для $x < -a$ или $x > a$ соответственно. При $|x| < a$ экспоненциальное поведение определяется функцией $Q(\alpha)$, которую необходимо представить (если это возможно) в виде суммы составляющих с поведением $e^{ia\alpha}$ и $e^{-ia\alpha}$ и замкнуть контур для каждой из них в своем направлении (как в примере 3 пункта 3.4.2).

Другими словами, однозначно выбрать направление замыкания, определяемое поведением $e^{-i\alpha x}$, и тем самым заменить интеграл (5.10) рядом по вычетам (5.17) можно только для значений x , лежащих вне области задания источника $[-a, a]$. Это правило остается в силе и в более общем случае задания функции q на нескольких отрезках $[a_k, b_k]$ или в пространственной области Ω : аргумент x или (x, y) в пространственном случае должен быть вне интервала, покрывающего все отрезки $[a_k, b_k]$ или круга, содержащего область Ω .

Что касается $K(\alpha, z)$, то эта функция не имеет экспоненциального роста, так как возможный рост числителя за счет экспонента $e^{\pm\sigma(z+h)}$ компенсируется таким же (при $z = 0$) или еще более быстрым ростом знаменателя, содержащего экспоненты $e^{\pm\sigma h}$ ($h \geq z + h$, так как $z \leq 0$). Это свойство сохраняется и в более общем случае упругих волноводов: поведение символа матрицы Грина $K(\alpha, z)$ не влияет на выбор направления замыкания контура Γ .

Итак, замкнув контур интегрирования Γ в соответствии с убыванием подынтегральной функции в верхнюю или нижнюю полуплоскость комплексной плоскости α , можно заменить интегральное представление решения (5.10) суммой вычетов (5.16). Однако здесь пока еще остается открытым вопрос о направлении обхода контуром Γ вещественных полюсов. От ответа на него зависит, какие из полюсов дадут вклад при замыкании контура вверх, а какие – при замыкании вниз.

5.2. ВЫБОР КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Прежде чем перейти к рассмотрению возможных вариантов обхода вещественных полюсов, отметим, что при

любом выборе контура Γ функция $u(x, z)$ вида (5.10) является решением модельной задачи (5.1) – (5.2). В этом несложно убедиться, подставив ее в уравнение и граничные условия. Уравнение тождественно удовлетворяется даже при подстановке каждой из экспоненциальных составляющих $e^{\pm\sigma z}$ функции $K(\alpha, z)$ по отдельности:

$$(\Delta + \kappa^2) \int_{\Gamma} e^{\pm\sigma z - i\alpha x} d\alpha = \int_{\Gamma} (-\alpha^2 + \sigma^2 + \kappa^2) e^{\pm\sigma z - i\alpha x} d\alpha \equiv 0,$$

так как $\sigma^2 = \alpha^2 - \kappa^2$. А для первого из граничных условий имеем

$$\begin{aligned} U'_z &= K'_z(\alpha, z)Q(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \sigma(z + h)}{\operatorname{ch} \sigma h} Q(\alpha) \Rightarrow U'_z(\alpha, 0) = Q(\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = q(x) \end{aligned}$$

($Q(\alpha)$ – преобразование Фурье функции, продолженной вне области $|x| \leq a$ нулем, поэтому получающаяся здесь $q = \mathcal{F}^{-1}[Q]$ обладает свойством $q(x) = 0$ при $|x| > a$). Второе из условий (5.2) удовлетворяется автоматически, так как $K(\alpha, -h) = 0$ при любом $Q(\alpha)$.

При различном выборе Γ значения $u(x, z)$ отличаются на величину вклада вычетов (5.16) в полюсах, пересекаемых контуром при его непрерывном изменении от одного положения к другому. Это означает, что решение рассматриваемой задачи неединственно! Для выбора из множества допустимых решений единственного необходимо добавить к граничным условиям дополнительное условие, которое позволило бы однозначно провести контур Γ .

С математической точки зрения ни у одного из возможных вариантов обхода вещественных полюсов нет никаких

преимуществ — любой из них дает решение поставленной задачи. Поэтому для выбора единственного решения, имеющего смысл для практических приложений, необходимы дополнительные требования, вытекающие из физического смысла рассматриваемой задачи. Поскольку с физической точки зрения решение определено с точностью до составляющих, описывающих незатухающие плоские волны, бегущие вдоль волновода с фазовыми скоростями $\pm c_n = \pm \omega / \zeta_n$, $n = 1, 2, \dots, N_r$, такие дополнительные условия формулируются в форме *принципов излучения*. Среди них наиболее известны:

- принцип излучения на бесконечность (принцип Зоммерфельда);
- принцип излучения энергии (принцип Мандельштама);
- принцип предельной амплитуды;
- принцип предельного поглощения.

Многообразие принципов объясняется тем, что

- 1) применение того или иного принципа оказывается более удобным в различных конкретных ситуациях;
- 2) невозможно сформулировать один универсальный принцип для всех возможных моделей и задач.

При этом в некоторых сравнительно редких случаях различные принципы дают разные решения одной и той же задачи. Поэтому строгое доказательство эквивалентности или неэквивалентности различных принципов является самостоятельной задачей, не решенной окончательно до настоящего времени.

2. Исторически первым был сформулирован кажущийся физически очевидным *принцип Зоммерфельда*, согласно которому в решении могут присутствовать только составля-

ющие, описывающие волны, идущие от источника на бесконечность (т.е. с фазовыми скоростями, направленными от источника), и не должно быть волн, идущих из бесконечности к источнику.

Как уже отмечалось (см. пункт 5.1.2, подпункт 3), вклад вычетов в вещественных полюсах $\mp \zeta_n$ описывает волны $r_n^\pm e^{i(\pm \zeta_n x - \omega t)}$, бегущие соответственно вправо и влево с фазовой скоростью $c_n = \pm \omega / \zeta_n$. Поэтому для удовлетворения принципу Зоммерфельда необходимо отклонить контур от вещественной оси так, чтобы после его замыкания при $x \rightarrow \infty$ в решение входили бы только слагаемые $r^+ e^{i\zeta_n x}$, а при $x \rightarrow -\infty$ — только $r^- e^{-i\zeta_n x}$. Так как при $x > a$ контур замыкается вниз, то отрицательные полюса $-\zeta_n$, дающие допустимые волны $e^{i\zeta_n x}$, уходящие от источника вправо, должны обходиться им сверху, а недопустимые положительные ζ_n — снизу (рис. 5.1, см. также рис. 1.4). Такое же правило обхода вещественных полюсов получается и при замене интеграла суммой вычетов для $x < -a$: контур замыкается вверх и внутрь должны попадать только положительные ζ_n , дающие волны $e^{-i\zeta_n x}$ с отрицательными фазовыми скоростями.

Получившийся вид контура (рис. 1.4 и 5.1) считается общепринятым для волновых задач, однако в некоторых редких случаях он противоречит *принципу Мандельштама*, согласно которому в решении могут присутствовать только волны, уносящие энергию от источника на бесконечность, независимо от направления их фазовой скорости. Причина в том, что на определенных частотах в волноводах возможно формирование рассмотренных выше на примере волн Лэмба (п. 5.1.3 (2)) *обратных волн*, соответствующих вкладу *нерегулярных полюсов* $\zeta_n > 0$, у которых $\zeta_n'(\omega) < 0$. На графике соответствующие участки дисперсионных кривых

имеют отрицательный тангенс угла наклона касательной (как у моды S_1^* на рис. 5.3), поэтому у обратных волн фазовая скорость $c_m = \omega/\zeta_m > 0$ и групповая скорость $v_m = d\omega/d\zeta_m < 0$ направлены противоположно. Поскольку групповая скорость указывает направление переноса энергии, то при выборе контура Γ в соответствии с принципом Зоммерфельда нерегулярный полюс ζ_m дает волну, хоть и уходящую на бесконечность ($c_m > 0$), но переносящую энергию из бесконечности к источнику ($v_m < 0$). Чтобы избежать этого, по принципу Мандельштама контур должен обходить нерегулярные полюса не так, как регулярные: положительные – сверху, а отрицательные – снизу (рис. 5.5) [12].

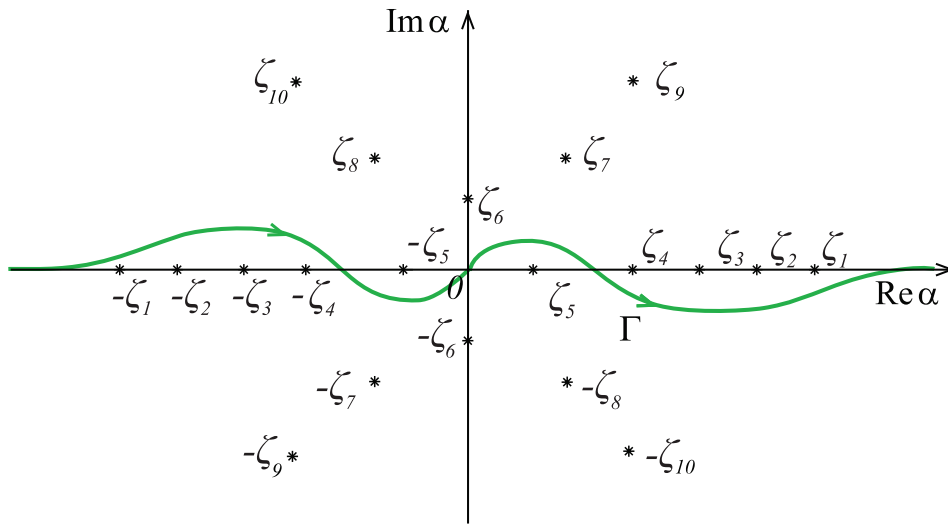


Рис. 5.5. Вид контура Γ в случае появления обратных волн (в данном примере нерегулярных полюсов $\pm\zeta_5$)

Следует отметить, что существование обратных волн в упругих волноводах было подтверждено экспериментально [7, 60], а ранее (в 1940-е гг.) они были теоретически предсказаны Мандельштамом для электромагнитных волн в волноводах, используемых в радиотехнике [31].

Закон сохранения энергии — один из фундаментальных законов естествознания, поэтому принцип Мандельштама выглядит более «правильным», хотя принцип Зоммерфельда удобнее в использовании, так как не требует анализа направления переноса энергии или зависимости волнового числа от частоты. Поэтому во многих случаях, например, когда известно, что в рассматриваемой структуре не могут возникнуть обратные волны, при постановке задачи требуется, чтобы решение удовлетворяло принципу Зоммерфельда.

3. Другим сравнительно удобным в использовании условием является *принцип предельного поглощения*, согласно которому в качестве решения гармонической задачи для идеальной среды берется равномерный предел решения аналогичной задачи для среды с поглощением волновой энергии при стремлении коэффициента поглощения к нулю. Поскольку при нулевых условиях на бесконечности волновые задачи для сред с поглощением всегда имеют единственное решение, данный принцип обеспечивает выбор единственного решения из множества допустимых для идеально упругих сред. К тому же он выглядит вполне естественным, так как на практике реальные материалы и среды характеризуются определенным поглощением волновой энергии, а идеальные среды, в которых волны распространяются без диссипации энергии, являются чисто теоретической моделью. Кроме того, этот принцип не противоречит принципу Мандельштама, по крайней мере, таких примеров не известно.

Главная идея использования принципа предельного поглощения для выбора контура Γ состоит в том, что при наличии внутреннего трения, характеризуемого некоторым малым параметром ε , Фурье-символ $K(\alpha, z)$ не имеет вещественных полюсов и контур обратного преобразования \mathcal{F}_x^{-1}

можно взять идущим вдоль вещественной оси α . При наличии поглощения $\varepsilon > 0$ полюса $\pm\zeta_n$, $n = 1, 2, \dots, N_r$, которые были вещественными при $\varepsilon = 0$, смещаются в комплексную плоскость, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ возвращаются к своим местам на вещественной оси. Чтобы при $\varepsilon = 0$ не произошло пересечение с контуром интегрирования, его следует предварительно отклонить от вещественной оси в сторону, противоположную смещению полюсов. Тем самым направление обхода полюсов задается однозначно.

Рассмотрим эту технику подробнее на модельном примере. Для сред, описываемых волновым уравнением (4.5), внутреннее трение моделируется добавлением к слагаемому $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, описывающему силу инерции, члена $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$, задающего силу внутреннего сопротивления среды, пропорциональную скорости смещения частиц:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.18)$$

При этом волновое число κ_ε в соответствующем уравнении Гельмгольца для гармонических колебаний становится комплексным:

$$\Delta u + \kappa_\varepsilon^2 u = 0 \quad (5.19)$$

$$\kappa_\varepsilon^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon\omega = \omega_\varepsilon^2/c^2, \quad \omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon c^2 \omega. \quad (5.20)$$

Соответственно комплексными становятся и вещественные полюса (5.13):

$$\zeta_n(\varepsilon) = \sqrt{\kappa_\varepsilon^2 - a_n^2} = \zeta_{n,1} + i\zeta_{n,2}, \quad n = 1, 2, \dots, N_r.$$

Несложно видеть, что при $\varepsilon > 0$ мнимая часть этих полюсов $\zeta_{n,2} > 0$, т.е. при введении внутреннего трения они смещаются в верхнюю полуплоскость, а полюса $-\zeta_{n,2}$ — в нижнюю, что

приводит к такому же виду контура, как и при выборе в соответствии с принципом Зоммерфельда или Мандельштама (рис. 5.6, а), поскольку в данном примере нет обратных волн.

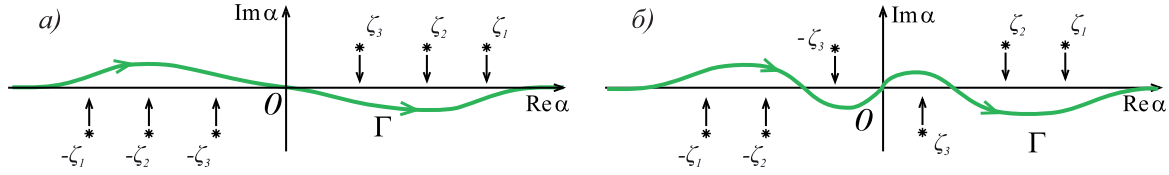


Рис. 5.6. Движение полюсов $\zeta_n(\varepsilon)$ в комплексной плоскости при $\varepsilon \rightarrow 0$ при отсутствии а) и наличии б) обратных волн

Следуя доказательству, предложенному в [12], покажем, что при наличии нерегулярных полюсов они смещаются в направлении, противоположном смещению регулярных (рис. 5.6, б). Пусть $\zeta(\omega)$ — вещественный участок дисперсионной кривой для идеального волновода ($\varepsilon = 0$). Введение поглощения эквивалентно аналитическому продолжению этой функции в комплексную плоскость частоты. Например, в соответствии с (5.20) вещественная частота ω фактически заменяется в волновом уравнении комплексной частотой

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega^2 + i\varepsilon v^2 \omega} = \omega_1 + i\omega_2, \quad \omega_2 > 0.$$

Пусть далее $\zeta_0 = \zeta(\omega_0)$ — некоторый вещественный полюс на частоте $\omega = \omega_0$, для которого требуется определить направление его смещения с вещественной оси при $\varepsilon > 0$. Из разложения $\zeta(\omega)$ в ряд Тейлора

$$\zeta(\omega) = \zeta_0 + \zeta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2), \quad \omega \rightarrow \omega_0$$

следует, что при замене ω на ω_ε с $\text{Im } \omega_\varepsilon > 0$ знак мнимой части $\zeta(\omega_\varepsilon)$, т.е. направление смещения полюса при введении поглощения, совпадает со знаком производной $\zeta'(\omega_0)$:

$$\text{Im } \zeta(\omega_\varepsilon) = \zeta'(\omega_0) \text{Im } \omega_\varepsilon + O((\omega_\varepsilon - \omega_0)^2), \quad \omega_\varepsilon \rightarrow \omega_0.$$

При наличии графика дисперсионной кривой $\zeta(\omega)$ знак производной в любой точке ω сразу виден, так как он совпадает со знаком тангенса угла касательной к $\zeta(\omega)$ в этой точке. В большинстве случаев (для регулярных полюсов) $\zeta'(\omega_0) > 0$, т.е. положительные полюса при $\varepsilon > 0$ смещаются вверх, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ возвращаются на вещественную ось сверху (рис. 5.6, а). Для нерегулярного полюса (например, для моды S_1^* на рис. 5.3) $\zeta'(\omega_0) < 0$ и направление смещения противоположно (рис. 5.6, б).

Замечание 5.3. При наличии нерегулярного полюса наряду с частотами отсечки ω_n сингулярной точкой частотного спектра $u(\mathbf{x}, \omega)$ является также и частота ω^* — левая граница диапазона существования обратной волны (для волны Лэмба S_1^* $\omega^* = 5.75$). На этой частоте, как и на частотах ω_n , касательная к ζ_n расположена вертикально, т.е. групповая скорость равна нулю (стоячая волна). Соответствующий полюс $\zeta(\omega^*)$ — двукратный, не смещающийся с вещественной оси при введении внутреннего трения ε . В последние годы популярной стала аббревиатура ZGV (zero group velocity), используемая в зарубежной литературе при описании необычных волновых эффектов, связанных с появлением обратной волны [58].

4. Зафиксировав контур Γ , можно замкнуть его вверх при $x < -a$ или вниз при $x > a$, заменив интеграл (5.10) рядом по вычетам в однократных полюсах $\pm\zeta_n$:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\pm}(z) e^{i\zeta_n |x \mp a|}, \quad |x| > a, \quad (5.21)$$

$$b_n^{\pm} = \mp i j_{n \text{ res}} K(\alpha, z) |_{\alpha=\mp\zeta_n} Q(\mp\zeta_n) e^{i\zeta_n a},$$

$$j_n = \begin{cases} 1, & \zeta_n - \text{регулярный полюс} \\ -1, & \zeta_n - \text{нерегулярный полюс,} \end{cases}$$

верхний знак берется для $x > a$, нижний – для $x < -a$. Множитель $e^{i\zeta_n a}$ добавлен в b_n^\pm (и соответственно $e^{-i\zeta_n a}$ внесен в экспоненты $e^{\pm i\zeta_n x}$), чтобы компенсировать экспоненциальный рост $Q(\mp \zeta_n) \sim O(e^{\text{Im} \zeta_n a})$, $n \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом модельном примере нерегулярных полюсов нет, т.е. множители j_n можно опустить, а представления для вычетов существенно упрощаются, если учесть, что

$$\zeta_n^2 = \kappa^2 - a_n^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \sigma(\zeta_n) = \sqrt{\zeta_n^2 - \kappa^2} = ia_n,$$

$$\sigma_n h = ia_n h = i(n\pi - \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \text{sh } \sigma_n h = i \sin a_n h = i(-1)^{n+1}.$$

В этом случае

$$\text{res } K|_{\alpha=\mp \zeta_n} = \frac{\text{sh } \sigma_n(z+h)}{\sigma_n(\text{ch } \sigma_n h)'} = \pm \frac{(-1)^n}{h\zeta_n} \sin a_n(z+h),$$

что справедливо как для вещественных, так и для комплексных (чисто мнимых) ζ_n .

Решение в форме ряда (5.21) намного удобнее для дальнейшего анализа, чем в интегральной форме (5.10), особенно в дальней зоне $|\kappa x| \gg 1$, когда слагаемые, соответствующие комплексным полюсам и убывающие как $e^{-\text{Im} \zeta_n |x \mp a|}$ можно отбросить, заменив с требуемой точностью ряд конечной суммой вычетов в вещественных полюсах ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N_r$. Однако следует заметить, что в ближней зоне, когда $\kappa|x \mp a| \ll 1$ убывание членов ряда может быть очень медленным, а при $x = \pm a$ (на границе области, в которой задан источник) экспоненциального убывания нет. Поэтому здесь, как и под источником ($|x| < a$), для получения значе-

ний $u(x, z)$ лучше переходить к численному интегрированию, используя представление (5.10).

Замечание 5.4. Множитель j_n , указывающий в представлении (5.21) на тип полюса, можно не вводить, если нерегулярный полюс ζ_m взять со знаком минус, т.е. изменить правило нумерации вещественных полюсов на следующее (см. рис. 5.4):

- 1) $\zeta_{n+1} < \zeta_n$ для всех $n = 1, 2, \dots, N_r$;
- 2) $\zeta_m := -\zeta_m$ для нерегулярного полюса.

5.3. ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ВЫБОР ВЕТВЕЙ РАДИКАЛОВ

1. Неединственность решения волновых задач может возникнуть не только из-за математической допустимости различных вариантов обхода вещественных полюсов контуром Γ , но и из-за неоднозначности выбора ветви радикала $\sigma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$. В предыдущем примере знак σ не влиял на значения $K(\alpha, z)$ и тем самым на окончательный результат, что, как уже отмечалось, характерно для любых волноводов конечной толщины h . Напротив, при $h = \infty$ (полуплоскость, полупространство) значение $K(\alpha, z)$ *всегда* зависит от выбора ветвей радикалов для входящих в них функций $\sigma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha - \kappa_j} \sqrt{\alpha + \kappa_j}$.

Рассмотрим в качестве примера такую же, как и (5.1) – (5.2) задачу, но не в полосе, а в полуплоскости D : $|x| < \infty$, $-\infty < z \leq 0$ ($h = \infty$). Уравнения (5.1) и граничные условия на поверхности полуплоскости $z = 0$ остаются прежними, а вместо условия на нижней границе полосы $z = -h$ теперь требуется выполнение нулевого условия на бесконечности

$$u(x, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad \forall x. \quad (5.22)$$

Общее решение в области преобразования Фурье (5.5) и первая строка матрицы системы (5.6) также остаются прежними, а вид второй строки можно получить только после фиксации ветвей радикалов, входящих в $\sigma(\alpha)$.

2. Функция \sqrt{z} является одним из самых простых примеров *многозначных функций* комплексного переменного, значение которых в точке $z = |z|e^{i\varphi}$ зависит не только от самого значения z , но и от того, каким путем переменная z пришла в эту точку [28]. Например, аргументы φ и $\varphi + 2\pi$ дают одну и ту же точку z ($e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$), но после извлечения корня получаем

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\varphi/2} \neq \sqrt{|z|}e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{|z|}e^{i\varphi/2}.$$

В данном примере точка $z = 0$ является *точкой ветвления* функции \sqrt{z} , каждый обход вокруг которой дает приращение аргумента подкоренного выражения на $\pm 2\pi$ (в зависимости от направления обхода) и смену знака результата на противоположный за счет появления сомножителя $e^{\pm i\pi} = -1$. Таким образом, для $\forall z$ возможны два значения квадратного корня, отличающиеся знаком, т.е. существуют две *ветви* функции \sqrt{z} . Нередко этот факт записывается в виде $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Примером многозначной функции с точкой ветвления $z = 0$ и с бесконечным числом ветвей является натуральный логарифм

$$\ln z = \ln(|z|e^{i(\varphi+2\pi n)}) = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для выделения однозначной ветви многозначной функции достаточно:

1) зафиксировать значение аргумента φ в какой-либо точке z (обычно полагают $\varphi = 0$ для положительных ве-

щественных z ; в случае квадратного корня это требование кратко записывается в виде $\sqrt{1} = 1$;

2) провести в комплексной плоскости z *разрез*, идущий от точки ветвления на бесконечность, и аргумент φ любой точки z определять как приращение аргумента при движении по комплексной плоскости от исходного значения ($\varphi = 0$ для z вещественной) к данной точке, не пересекая разреза.

Наличие разреза не позволяет сделать более одного оборота вокруг точки ветвления, т.е. аргумент варьируется в диапазоне шириной не более чем 2π , что и обеспечивает однозначность функции для $\forall z \in C$.

3. При компьютерной реализации операции извлечения квадратного корня из комплексного числа (оператор 'sqrt' в Фортране, Матлабе и др.) в большинстве случаев разрез выбран вдоль отрицательной вещественной оси, т.е. аргумент меняется в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$. Поэтому необходимо быть особенно внимательными при извлечении корня из отрицательных вещественных чисел, которые формально должны получаться чисто мнимыми с положительной мнимой частью:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 e^{i\pi}} = a e^{i\pi/2} = ia, \quad a > 0.$$

Однако вариация представления числа даже в пределах машинной точности δ приводит к радикальному изменению результата (рис. 5.6, слева):

$$\begin{aligned} \text{sqrt}(-a^2 + i\delta) &\approx ia, \\ \text{sqrt}(-a^2 - i\delta) &\approx -ia \end{aligned}, \quad a > 0.$$

Для определения в плоскости α траектории разреза функции $\sigma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$, получающегося при использовании оператора 'sqrt', достаточно приравнять подкоренное

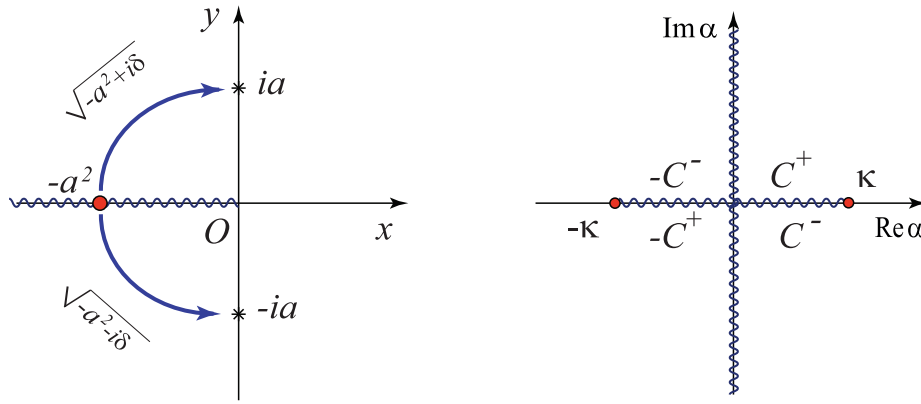


Рис. 5.7. Разрезы, выделяющие однозначные ветви функций \sqrt{z} (слева) и $\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$ (справа)

выражение отрицательной вещественной переменной и выразить через нее α :

$$\alpha^2 - \kappa^2 = -s^2 \Rightarrow \alpha = \pm c(s) = \pm \sqrt{\kappa^2 - s^2}, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (5.23)$$

Таким образом, разрез функции 'sqrt' (рис. 5.7, слева) отображается в плоскость α в виде двух разрезов $\alpha = \pm c(s)$, идущих от точек ветвления $\alpha = \pm \kappa$ к началу координат $\alpha = 0$ при $0 \leq s < \kappa$, а затем вверх и вниз вдоль мнимой оси при $s > \kappa$ (рис. 5.7, справа). Контур Γ может проходить выше или ниже линии разреза на отрезке вещественной оси $-\kappa \leq \alpha \leq \kappa$, но пересекать его нельзя. В зависимости от этого выбора значение $\sigma(\alpha)$ меняется так же значительно, как и в приведенном примере для $\sqrt{-a^2}$:

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} = \begin{cases} i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} = is, & \alpha \in C^+ \\ -i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} = -is, & \alpha \in C^- \end{cases}. \quad (5.24)$$

Здесь C^\pm – верхний и нижний берега разреза $c(s)$ вида (5.23) на положительном участке $0 < \alpha \leq \kappa$ (т.е. при $0 \leq s < \kappa$).

Аналогично для отрицательного участка $-\kappa < \alpha < 0$

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} = is, & \alpha \in -C^+ \text{ (нижний берег)} \\ -i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} = -is, & \alpha \in -C^- \text{ (верхний берег)} \end{cases}. \quad (5.25)$$

Возвращаясь к удовлетворению условий на бесконечности (5.22) в области преобразования Фурье, несложно видеть, что при $|\alpha| > \kappa$ $\operatorname{Re} \sigma(\alpha) > 0$ (выбрана стандартная ветвь корня $\sqrt{1} = 1$), поэтому при $\alpha \in \Gamma$ на участке $|\alpha| > \kappa$ поведение экспонент общего решения (5.5) на бесконечности определено однозначно:

$$\begin{aligned} e^{\sigma z} &\rightarrow 0 \\ e^{-\sigma z} &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, |\alpha| > \kappa.$$

Соответственно, для удовлетворения условия (5.22) необходимо, чтобы коэффициент t_2 при второй экспоненте был нулевым: $t_2(\alpha) = 0$ при $\alpha > \kappa$. Другими словами, вторая строка матрицы A системы (5.6) принимает вид $[0, 1]$. Этот результат можно получить и непосредственно из ее вида $[e^{-\sigma h}, e^{\sigma h}]$ для задачи о полосе, разделив эту строку на $e^{\sigma h}$ и взяв предел $h \rightarrow \infty$, но только для $|\alpha| > \kappa$.

Для $|\alpha| < \kappa$ значения $\sigma(\alpha)$ чисто мнимые как на верхнем, так и на нижнем берегу разреза (см. (5.24), (5.25)), т.е. предела функции $e^{\pm \sigma z}$ при $z \rightarrow -\infty$ не существует. Однако это не противоречит условию (5.22), так как в силу леммы Римана – Лебега

$$\int_{|\alpha| < \kappa} t_{1,2}(\alpha) e^{\pm i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} z} e^{-i\alpha x} d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, |x| < \infty, \quad (5.26)$$

т.е. этому условию удовлетворяют обе экспоненты. Это означает, что, как и в ситуации с обходом контуром вещественных полюсов, здесь имеется математическая неопределенность, приводящая к неединственному решению. При любом выборе контура Γ (по верхнему берегу разреза или по нижнему) интеграл вида (5.10) дает решение, удовлетворяющее уравнению и граничным условиям. Очевидно, для выбора однозначного решения здесь также необходимо использовать один из принципов излучения.

С точки зрения распространения волн экспоненты в подынтегральной функции (5.26), взятые вместе с гармоническим множителем $e^{-i\omega t}$, описывают плоские волны с фазовым уравнением

$$\theta^{\pm} \equiv \pm \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} z - \alpha x - \omega t = \text{const.}$$

Проекция фазовой скорости данных волн на ось z (*кажущаяся скорость*) получается при дифференцировании этого уравнения по t в предположении $x = \text{const}$, $z = z(t)$:

$$\dot{z} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}}.$$

Для радикала, взятого со знаком плюс, $\dot{z} > 0$, т.е. волна идет вверх из минус бесконечности к источнику, что недопустимо по принципу Зоммерфельда. Таким образом, при вещественных α допустимым является выбор

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} -i\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}, & \alpha^2 < \kappa^2 \\ \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}, & \alpha^2 > \kappa^2 \end{cases}, \quad (5.27)$$

приводящий к требованию $t_2(\alpha) = 0$ для $\forall \alpha \in \Gamma$. В соответствии с правилами (5.24), (5.25) такой выбор реализуется, если $\alpha \in -C^-$ и $\alpha \in C^-$ (на верхнем берегу разреза при

$-\kappa < \alpha < 0$ и на нижнем при $0 < \alpha < \kappa$), т.е. если отрицательный участок разреза вдоль вещественной оси обходится сверху, а положительный снизу, как и при обходе регулярных вещественных полюсов (рис. 5.1).

4. Итак, при указанном выборе ветви радикала $\sigma(\alpha)$ в общем решении остается только один ненулевой коэффициент t_1 , который определяется из граничного условия при $z = 0$: $t_1 = Q(\alpha)/\sigma$, что в итоге дает очень простой вид Фурье-символа функции Грина

$$K(\alpha, z) = e^{\sigma z}/\sigma. \quad (5.28)$$

У него нет полюсов, а только две неустранимые корневые особенности, совпадающие с точками ветвления $\alpha = \pm\kappa$. Но это не означает, что при замыкании контура Γ при $|x| > a$ отсутствие вычетов приведет к нулевому результату. Замкнутый в соответствии с леммой Жордана контур \mathcal{L} действительно не содержит полюсов внутри очерчиваемой области и потому

$$\oint_{\mathcal{L}} U(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0.$$

Однако из-за запрета пересекать разрезы контур \mathcal{L} состоит не только из исходного контура Γ и полуокружности C_R , как в случае полосы, но и из участка C_s , идущего по берегам разреза, а также окружности C_ε малого радиуса ε , обходящей точку ветвления κ (рис. 5.8 для $x < -a$): $\mathcal{L} = \Gamma \cup C_R \cup C_s \cup C_\varepsilon$. В результате при $R \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ из

$$\oint_{\mathcal{L}} = \int_{\Gamma} + \int_{C_R} + \int_{C_s} + \int_{C_\varepsilon} = 0 \quad \text{следует} \quad \int_{\Gamma} = - \int_{C_s} \neq 0.$$

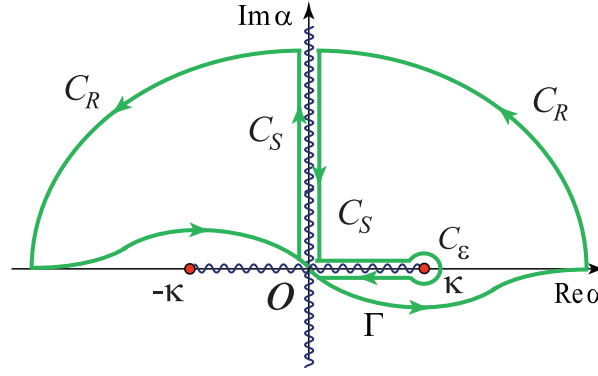


Рис. 5.8. Замыкание контура Γ вверх ($x < -a$) при наличии разрез

Другими словами, замыкая контур Γ вверх или вниз, в зависимости от убывания подынтегральной функции, можно совместить его с берегами разреза, заменив интегрирование по Γ интегралом по линии разреза:

$$\alpha = c(s) = \sqrt{\kappa^2 - s^2} = \begin{cases} \sqrt{\kappa^2 - s^2}, & s < \kappa \\ i\sqrt{s^2 - \kappa^2}, & s > \kappa \end{cases} \quad (5.29)$$

при $x < -a$ или разреза $\alpha = -c(s)$ при $x > a$. В первом случае имеем

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [K(\alpha, z)|_{\alpha \in C^+} - K(\alpha, z)|_{\alpha \in C^-}] Q(\alpha) e^{-i\alpha x} c'(s) ds, \quad x < -a.$$

Учитывая, что на разрезе $\sigma(\alpha) = \pm is$ для $\alpha \in C^\pm$, а $c'(s) = -s/c(s)$, для $K(\alpha, z)$ вида (5.28) имеем

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\cos s}{c(s)} Q(c(s)) e^{-ic(s)x} ds, \quad x < -a.$$

Замыкая контур вниз, можно получить аналогичное представление и для $x > a$. Преимущество такого представления перед исходным (5.10) состоит в том, что подынте-

гральная функция экспоненциально убывает при $s > \kappa$ за счет $e^{\mp ic(s)x} = e^{-\sqrt{s^2 - \kappa^2}|x|}$. При численном интегрировании это обеспечивает намного лучшую сходимость, чем при интегрировании по контуру Γ .

Замечание 5.5. Выбор линии разрезом $\pm c(s)$ по правилу (5.29) позволяет избежать пересечения разрезов контуром Γ . Он только касается их в точке $\alpha = 0$, обходя $-c(s)$ сверху, а $c(s)$ – снизу. С этой точки зрения выбор в (5.29) другого варианта продолжения разреза по мнимой оси при $s > \kappa$: $c(s) = -i\sqrt{s^2 - \kappa^2}$ недопустим!

Замечание 5.6. В силу того, что $\sigma(\alpha) = \sqrt{\alpha - \kappa}\sqrt{\alpha + \kappa}$, фактически разрез $c(s)$, идущий от точки ветвления $\alpha = \kappa$, фиксирует ветвь первого из них, а разрез $-c(s)$ – второго. При этом для вещественных $\alpha \in \Gamma$

$$\sqrt{\alpha - \kappa} = \begin{cases} \sqrt{\alpha - \kappa}, & \alpha > \kappa \\ -i\sqrt{\kappa - \alpha}, & \alpha < \kappa \end{cases},$$

$$\sqrt{\alpha + \kappa} = \begin{cases} \sqrt{\alpha + \kappa}, & \alpha > -\kappa \\ i\sqrt{-(\alpha + \kappa)}, & \alpha < -\kappa \end{cases},$$

что согласуется с правилом (5.27) для $\sigma(\alpha)$ в целом.

Замечание 5.7. Когда Γ отклоняется от вещественной оси, α становится комплексным и правило (5.27) принимает вид

$$\operatorname{Re} \sigma \geq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \sigma \leq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \Gamma. \quad (5.30)$$

5. Несложно убедиться, что такой же выбор ветвей радикалов получается и в соответствии с принципом предельного поглощения. При ненулевом поглощении волновое число становится комплексным: $\kappa_\varepsilon = \kappa_{\varepsilon,1} + i\kappa_{\varepsilon,2}$, $\kappa_{\varepsilon,2} > 0$ и точки ветвления $\pm\kappa_\varepsilon$ смещаются с вещественной оси так, что разрезы $\pm c_\varepsilon(s)$ целиком лежат в I и III квадрантах комплексной

плоскости α (рис. 5.9, а). Они идут вдоль вещественной и мнимой осей, прижимаясь к ним при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате при $\varepsilon = 0$ получаются те же самые линии разрезом $\pm c(s)$, что и по правилу (5.29). При $\varepsilon > 0$ контур интегрирования идет по вещественной оси, т.е. выше разреза $-c_\varepsilon(s)$ и ниже $c_\varepsilon(s)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получается тот же путь обхода разрезом контуром Γ , что и в соответствии с принципом принципом Зоммерфельда.

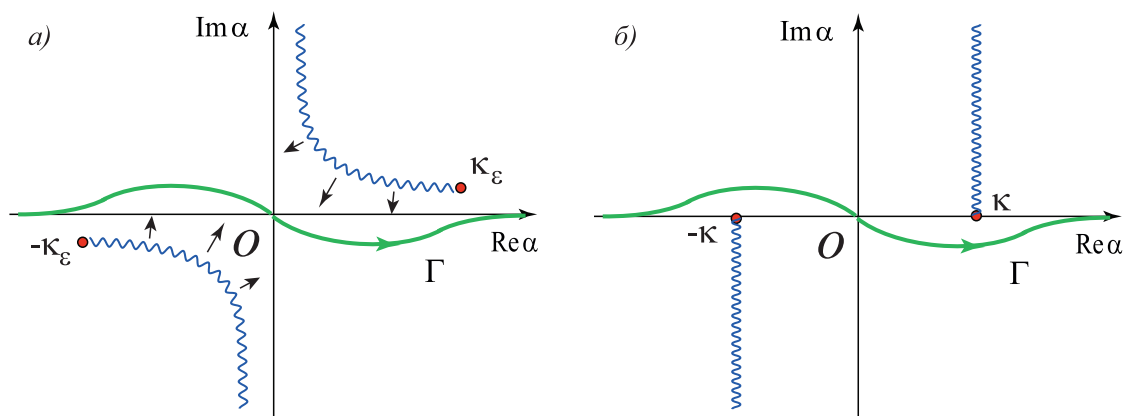


Рис. 5.9. Линии разрезом а) $\pm c_\varepsilon(s)$ для функции $\sigma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_\varepsilon^2}$ при введении поглощения $\varepsilon > 0$ (стрелками показано направление смещения разрезом к осям при $\varepsilon \rightarrow 0$); б) вертикальные разрезом

Замечание 5.8. Линии разрезом $\pm c(s)$ соответствуют выбору ветви, определенному в операторе 'sqrt'. Теоретически их можно проводить произвольно, начиная из точки ветвления и не пересекая контура интегрирования Γ . Чтобы избежать вычислительных ошибок из-за двужначности $\sigma(\alpha)$ при вещественных $\alpha : |\alpha| < \kappa$ и заодно ускорить сходимость интегралов вдоль берегов разреза C_s , получающихся при замыкании Γ , можно провести разрезом строго вертикально: $c(s) = \kappa + is$ (рис. 5.9, б). При этом необходимо модифицировать операцию 'sqrt' в полуполосах $0 < \text{Re } \alpha < \kappa, \text{Im } \alpha > 0$ и $-\kappa < \text{Re } \alpha < 0, \text{Im } \alpha < 0$. Для этого достаточно брать здесь «машинные» значения 'sqrt' со знаком минус.

Замечание 5.9. В общем случае при наличии у $K(\alpha, z)$ как полюсов, так и точек ветвления с помощью замыкания контура Γ решение при $|x| > a$ может быть представлено в виде

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\pm}(z) e^{i\zeta_n |x|} - \frac{1}{2\pi} \int_{C_s} (...) d\alpha, \quad |x| > a, \quad (5.31)$$

в котором, в отличие от представления (5.21), наряду со вкладом вычетов остается интеграл по обоим берегам либо разреза $-c(s)$ (для $x > a$), либо $c(s)$ (для $x < -a$), обозначенный здесь как интеграл по контуру C_s . Тем не менее это представление удобнее и выгоднее для анализа, чем исходное (5.10), так как ряд и интеграл сходятся экспоненциально, а слагаемые, соответствующие вещественным ζ_n дают явное представление для бегущих волн, возбуждаемых источником $q(x)$ в рассматриваемом волноводе.

Говорят, что ряд в (5.31) соответствует вкладу в решение точек дискретного спектра (полюсов $\pm\zeta_n$) рассматриваемой краевой задачи, а интеграл по берегам разреза – вкладу непрерывного спектра. Физически первый дает бегущие волны, распространяющиеся вдоль границ волновода, а второй – объемные.

5.4. Многослойный волновод, численная устойчивость

Изложенная схема построения интегрального представления решения в виде свертки (5.9) или контурного интеграла (5.10) легко обобщается на случай многослойных волноводов с плоскопараллельными границами раздела составляющих их слоев. При этом интегральные представления также сводятся к ряду по вычетам (5.21), а в случае многослойной полуплоскости – к ряду и интегралу по берегам разреза (5.31).

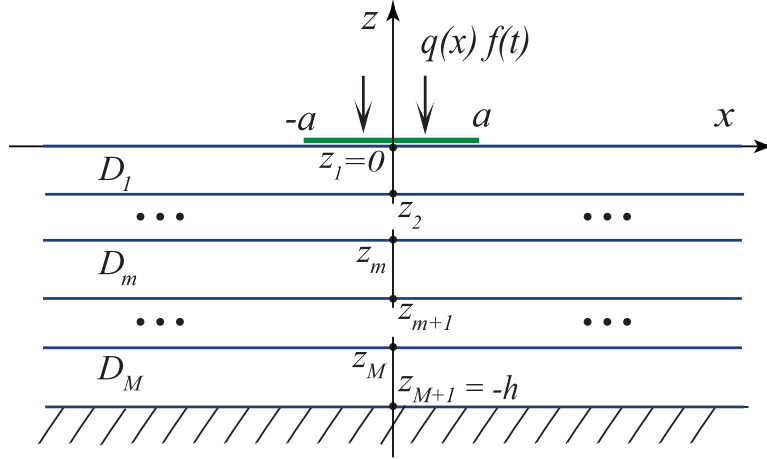


Рис. 5.10. Многослойная полоса

1. В качестве примера рассмотрим модифицированную задачу (5.1) - (5.2), в которой область D толщины h состоит из M полос D_m толщины h_m (рис. 5.10):

$$D = \bigcup_{m=1}^M D_m, \quad D_m : |x| < \infty, \quad z_{m+1} \leq z \leq z_m,$$

$$h = \sum_{m=1}^M h_m, \quad h_m = z_m - z_{m+1}, \quad z_1 = 0, \quad z_{M+1} = -h.$$

Точки z_m определяют границы полос $z = z_m$. Полосы D_m отличаются свойствами заполняющей их среды, в данном случае скоростями распространения объемных волн c_m . В каждой из них искомая функция $u(\mathbf{x}, \omega)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца с волновым числом $\kappa_m = \omega/c_m$:

$$\Delta u + \kappa_m^2 u = 0, \quad (x, z) \in D_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.32)$$

На внешних границах пакета слоев $z = 0$ и $z = -h$ заданы прежние граничные условия (5.2), к которым должны быть добавлены *условия стыковки* на внутренних (интерфейсных) границах. Если предполагается, что слои жестко сцеплены между собой, то в случае упругих волноводов условия

стыковки формулируются в виде требования непрерывности полей смещений \mathbf{u} и напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на внутренних границах. Если трактовать данную задачу как антиплоскую для SH волн $\mathbf{u} = \{0, u, 0\}$, то для рассматриваемого пакета условия сцепления принимают вид

$$\begin{aligned} u(x, z_m^+) &= u(x, z_m^-) \\ \mu_{m-1} u'_z(x, z_m^+) &= \mu_m u'_z(x, z_m^-), \quad m = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Здесь $z_m^\pm = z_m \pm 0$ – значения, взятые выше и ниже границы $z = z_m$, т.е. соответственно на нижней границе полосы D_{m-1} и верхней – D_m ; μ_m – модули сдвига, входящие в выражения для напряжений $\tau_{yz} = \mu \partial u / \partial z$. Скорости c_m выражаются в этом случае через μ_m и плотность ρ_m : $c_m = \sqrt{\mu_m / \rho_m}$.

Как и раньше, геометрия области позволяет применить преобразование Фурье по x , что приводит к многоточечной граничной задаче относительно $U(\alpha, z) = \mathcal{F}[u]$:

$$U''_{zz} - (\alpha^2 - \kappa_m^2)U = 0, \quad z \in D_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.34)$$

$$U'_z(\alpha, 0) = Q, \quad U(\alpha, -h) = 0, \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} U(\alpha, z_m^+) - U(\alpha, z_m^-) = 0 \\ \mu_{m-1} U'_z(\alpha, z_m^+) - \mu_m U'_z(\alpha, z_m^-) = 0, \quad m = 2, 3, \dots, M. \end{cases} \quad (5.36)$$

Вид общего решения уравнений (5.34) остается прежним (см. (5.5)):

$$U(\alpha, z) = t_{m,1} e^{\sigma_m z} + t_{m,2} e^{-\sigma_m z}, \quad z \in D_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.37)$$

Здесь $\sigma_m = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_m^2}$; неизвестные коэффициенты $t_{m,j}$, $j = 1, 2$ также определяются из линейной алгебраической системы, возникающей при подстановке (5.37) в граничные

условия (5.35) – (5.36):

$$A\mathbf{t} = \mathbf{f}, \quad (5.38)$$

$$A = \begin{pmatrix} S^+ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1(z_2) & -C_2(z_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_2(z_3) & -C_3(z_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{M-1}(z_M) & -C_M(z_M) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S^- \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_M\}, \quad \mathbf{t}_m = \{t_{m,1}, t_{m,2}\}$$

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, 0, \dots, 0\}, \quad \mathbf{f}_1 = \{Q, 0\},$$

A – блочная матрица размерности $N = 2M$, в которой блоки размерности 1×2

$$S^+ = (\sigma_1, -\sigma_1) \quad \text{и} \quad S^- = (e^{-\sigma_M h}, e^{\sigma_M h})$$

следуют из граничных условий (5.35), а блоки размерности 2×2

$$C_m(z) = \begin{pmatrix} e^{\sigma_m z} & e^{-\sigma_m z} \\ \mu_m \sigma_m e^{\sigma_m z} & -\mu_m \sigma_m e^{-\sigma_m z} \end{pmatrix}$$

из условий стыковки (5.36).

Вытекающие из этих условий равенства

$$C_{m-1}(z_m)\mathbf{t}_{m-1} = C_m(z_m)\mathbf{t}_m, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

позволяют связать векторы неизвестных коэффициентов \mathbf{t}_m рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{t}_{m-1} = B_m \mathbf{t}_m, \quad B_m = C_{m-1}^{-1}(z_m)C_m(z_m), \quad m = 2, 3, \dots, M, \quad (5.39)$$

последовательное применение которых дает связь между \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_M :

$$\mathbf{t}_1 = B_2 B_3 \cdots B_M \mathbf{t}_M \equiv B \mathbf{t}_M. \quad (5.40)$$

Тем самым соотношение $S^+ \mathbf{t}_1 = Q$, вытекающее из граничного условия при $z = 0$, может быть записано относительно \mathbf{t}_M : $S^+ B \mathbf{t}_M = Q$. Вместе с соотношением $S^- \mathbf{t}_M = 0$ для граничного условия на нижнем краю $z = -h$ они образуют систему второго порядка

$$S \mathbf{t}_M = \mathbf{f}_1, \quad S = \begin{pmatrix} S^+ B \\ S^- \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

решение которой дает \mathbf{t}_M . Остальные векторы неизвестных \mathbf{t}_m вычисляются в ходе обратной прогонки (5.39), начиная с $m = M$.

2. Описанный алгоритм построения решения для многослойных сред, который в зарубежной литературе часто называют «transfer matrix algorithm» – алгоритм матриц переноса, был предложен в работах [37, 55, 61]. С 1950–1960-х гг. появилось большое количество различных модификаций данного подхода, что объясняется не только многообразием возникающих здесь задач, но и тем, что данная схема не свободна от недостатков. Главный из них – численная неустойчивость, связанная с наличием экспоненциальных составляющих $e^{\pm \sigma_m z_m}$ и $e^{\pm \sigma_m z_{m+1}}$. С увеличением α и, как следствие, σ_m экспоненциальный рост одних элементов и убывание других приводит к росту числа обусловленности (численному вырождению) и исходной матрицы A , и матрицы преобразованной системы S (последнее из-за вырождения матриц B и S^-). Быстрая потеря численной устойчивости приводит к существенному ограничению диапазона практической применимости данного подхода.

Природа вычислительных проблем, возникающих при решении исходной (нерегуляризированной) системы, хорошо видна уже при анализе явного решения (5.7)–(5.8) для

однородной полосы. С одной стороны, как числитель, так и знаменатель функции $K(\alpha, z) = \text{sh } \sigma(z + h)/[\sigma \text{ch } \sigma h]$ экспоненциально растут с увеличением $\text{Re } \sigma h$, что приводит к машинному переполнению уже при сравнительно умеренных значениях входных параметров α и h . С другой стороны, вынос множителя $e^{\sigma h}$ из числителя и знаменателя дает представление

$$K(\alpha, z) = (e^{\sigma z} - e^{-\sigma(z+2h)})/[\sigma(1 + e^{-2\sigma h})] \sim O(e^{-|\alpha z|}/\alpha),$$

$$\alpha \rightarrow \pm\infty,$$

не содержащее экспонент, растущих при больших α .

Поэтому простым и в то же время эффективным способом регуляризации, избавляющей от численной неустойчивости, является следующий прием [15]. Поскольку общее решение (5.37) определено с точностью до неизвестных коэффициентов \mathbf{t}_m , его можно записать в виде, не содержащем растущих экспонент:

$$U(\alpha, z) = t_{m,1}e^{\sigma_m(z-z_m)} + t_{m,2}e^{-\sigma_m(z-z_{m+1})},$$
(5.42)

$$z_{m+1} \leq z \leq z_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Фактически здесь используются новые неизвестные константы, связанные с коэффициентами представления (5.37) соотношением $t_{m,j} := t_{m,j}e^{\sigma_m x_{m+j-1}}$, $j = 1, 2$. Использование данного представления эквивалентно выносу и сокращению растущих экспонент в рассмотренном выше примере. При таком выборе общего решения матрица A внешне остается

прежней, но вид ее блоков меняется:

$$S^+ = (\sigma_1, -\sigma_1 e_1), \quad S^- = (e_M, 1),$$

$$C_{m-1}(z_m) = \begin{pmatrix} e_{m-1} & 1 \\ \mu_{m-1}\sigma_{m-1}e_{m-1} & -\mu_{m-1}\sigma_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

$$C_m(z_m) = \begin{pmatrix} 1 & e_m \\ \mu_m\sigma_m & -\mu_m\sigma_me_m \end{pmatrix}, \quad e_m = e^{-\sigma_m h_m}.$$

Диагональные элементы $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, N$ теперь уже не содержат экспоненциальных составляющих, а внедиагональные $a_{ij}, i \neq j$ могут содержать только экспоненциально убывающие при больших $\sigma_m h_m$ сомножители e_m . В целом блочно-диагональная структура матрицы A принимает следующий вид

$$A \sim \begin{pmatrix} * & \cdot & | & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ \cdot & * & | & * & \cdot & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \cdot & * & | & * & \cdot & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & \cdot & * & | & * & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & \cdot & * & | & * & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & \dots & * & | & * & \cdot \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & \dots & * & | & * & \cdot \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & \cdot & * \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Звездочками здесь отмечены элементы, которые в пределе остаются ненулевыми, а точками – стремящиеся к нулю при $\text{Re } \sigma_m h_m \rightarrow \infty$ из-за наличия экспоненциальных сомножителей.

лей e_m . Такая структура обеспечивает хорошую обусловленность матрицы A и численную устойчивость решения системы (5.38) во всем диапазоне изменения входных параметров α, ω, c_m, h_m .

3. При больших M рекуррентный алгоритм (5.39)–(5.40) требует существенно меньше вычислительных затрат, чем решение системы (5.38) с помощью методов, не учитывающих разреженность матрицы A . Однако, несмотря на ее хорошие свойства, непосредственное использование этого алгоритма по-прежнему не гарантировано от численной неустойчивости из-за стремления к нулю элементов первого столбца матриц $C_{m-1}(z_m)$, которые необходимо обращать при вычислении каждой из матриц B_m . Для получения рекуррентных соотношений без экспоненциально вырождающихся матриц-блоков, необходимо перегруппировать их так, чтобы обращать приходилось только блоки с элементами-звездочками на диагонали.

Для этого достаточно разбить матрицу A на блоки A_{mn} второго порядка: $A = [A_{mn}]_{m,n=1}^M$ (см. (5.44), границы блоков показаны пунктирными линиями). В данных обозначениях система (5.38) может быть записана в виде следующих матричных соотношений:

$$\begin{aligned} A_{11}\mathbf{t}_1 + A_{12}\mathbf{t}_2 &= \mathbf{f}_1, \quad m = 1 \\ A_{mm-1}\mathbf{t}_{m-1} + A_{mm}\mathbf{t}_m + A_{mm+1}\mathbf{t}_{m+1} &= 0, \quad m = 2, 3, \dots, M-1 \\ A_{M-1M}\mathbf{t}_{M-1} + A_{MM}\mathbf{t}_M &= 0, \quad m = M \end{aligned} \tag{5.45}$$

Диагональные блоки A_{mm} не вырождаются при $e_m \rightarrow 0$, так как на диагонали у них элементы-звездочки без экспоненциальных сомножителей. Экспоненциального вырождения не происходит и при добавлении к ним других бло-

ков. Поэтому численно устойчивый алгоритм может быть организован здесь с помощью обратной прогонки, начиная с последней строки соотношений (5.45) ($m = M$). Вектор \mathbf{t}_M выражается через предшествующий: $\mathbf{t}_M = B_{M-1}\mathbf{t}_{M-1}$ и подставляется в предыдущую строку ($m = M - 1$), из которой \mathbf{t}_{M-1} выражается через \mathbf{t}_{M-2} : $\mathbf{t}_{M-1} = B_{M-2}\mathbf{t}_{M-2}$ и подставляется в строку $m = M - 2$ и т.д. (Матрицы B_m , связывающие векторы \mathbf{t}_m и \mathbf{t}_{m+1} , отличаются от матриц, входящих в соотношения (5.39)–(5.40).) На последнем шаге ($m = 1$) получается система второго порядка относительно \mathbf{t}_1 , после решения которой остальные коэффициенты \mathbf{t}_m , связанные соотношениями $\mathbf{t}_m = B_{m-1}\mathbf{t}_{m-1}$, определяются с помощью прямой прогонки.

Кратко данный алгоритм можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& m = M : \\
& \mathbf{t}_M = B_{M-1}\mathbf{t}_{M-1}, \quad B_{M-1} = -A_{MM}^{-1}A_{MM-1}, \\
& m = M - 1, M - 2, \dots, 2 : \\
& \mathbf{t}_m = B_{m-1}\mathbf{t}_{m-1}, \quad B_{m-1} = -(A_{mm} + A_{mm+1}B_m)^{-1}A_{mm-1}, \\
& m = 1 : \\
& \mathbf{t}_1 = B^{-1}\mathbf{f}_1, \quad B = A_{11} + A_{12}B_1, \quad \mathbf{f}_1 = \{Q, 0\}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Далее прямой ход

$$\mathbf{t}_m = B_{m-1}\mathbf{t}_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots, M. \tag{5.47}$$

Вырождение матрицы B ($\det B = 0$) может произойти только в особых точках решения $U(\alpha, z)$ (полюсах ζ_n или точках ветвления κ_m).

4. В случае многослойного волновода функция $K(\alpha, z)$, являющаяся Фурье-символом решения для сосредоточенного источника $q(x) = \delta(x)$, в соответствии с (5.42) имеет вид

$$K(\alpha, z) = t_{m,1}e^{\sigma_m(z-z_m)} + t_{m,2}e^{-\sigma_m(z-z_{m+1})} \quad \text{для } z \in D_m, \quad (5.48)$$

в котором константы \mathbf{t}_m определяются из системы (5.38) с единичной правой частью $\mathbf{f} = \{1, 0, \dots, 0\}$ ($Q \equiv 1$).

Замечание 5.10. С помощью пакетов символьных вычислений, таких как Maple, Mathematica и др., можно получить явное аналитическое представление $K(\alpha, z)$ даже при сравнительно большом числе слоев M . Однако использование таких представлений не дает никаких преимуществ по сравнению с представлением (5.48), в котором константы $t_{m,j}$ определяются из системы (5.38) численно. Скорее наоборот, они менее удобны для программирования, так как их громоздкость быстро накапливается с ростом M , а главное, их использование не избавляет от вычислительных проблем, связанных с экспоненциальным поведением составляющих, и нередко требует даже бóльших вычислительных затрат.

Отсутствие явного представления функции $K(\alpha, z)$ не препятствует сведению решения, полученного в виде контурного интеграла (5.10), к ряду по вычетам (5.21). Полюса $\pm\zeta_n$ являются корнями характеристического уравнения (5.15), в котором A – матрица системы (5.38), приведённая к форме (5.44). При использовании рекуррентных соотношений (5.46) – (5.47) характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta(\alpha, \omega) = \det B(\alpha, \omega) = 0.$$

Как и выше, возможность выписать характеристическое уравнение в явном виде не облегчает поиск полюсов ζ_n ,

так как уже при $M = 2$ оно является трансцендентным, не допускающим явного представления корней. Поэтому для их определения используются различные численные методы поиска вещественных и комплексных нулей функций, заданных численно. Для вещественных и чисто мнимых ζ_n это, как правило, алгоритмы, реализующие стратегию поиска и локализации корней по перемене знака функции при движении вдоль вещественной или мнимой оси, а для поиска комплексных корней хорошо зарекомендовал себя метод Мюллера (метод парабол) [23].

В качестве примера на рис. 5.11 приведены дисперсионные кривые для трехслойных волноводов с более мягкой (слева) и более жесткой (справа) внутренней прослойкой. Толщина волновода $h = 1$, слои одинаковой толщины $h_m = 1/3$, $m = 1, 2, 3$; безразмерная скорость объемных волн в первом и третьем слоях $c_1 = c_3 = 1$ та же, что и в примере дисперсионных кривых для однородной полосы (рис. 5.2), а скорость во внутренней прослойке $c_2 = 1/5$ в случае а) и $c_2 = 5$ в случае б); безразмерная плотность во всех слоях единичная: $\rho_m = 1$. Приведены частотные зависимости фазовых скоростей $c_n(\omega)$ и обратных к фазовым скоростям медленностей $s_n(\omega) = \zeta_n(\omega)/\omega$ нормальных мод трехслойного пакета. Графический анализ кривых медленностей удобнее, чем фазовых скоростей $c_n(\omega)$ или волновых чисел $\zeta_n(\omega)$, поскольку они начинаются не из бесконечности, а как и $\zeta_n(\omega)$ с оси ω из частот отсечки ω_n , но в отличие от последних выходят на горизонтальную асимптоту $s_n(\omega) \sim s = \text{const}$ при $\omega \rightarrow \infty$ (в данном случае $s = 1/c_1$).

5. Не останавливаясь на подробном обсуждении различных стратегий поиска полюсов, отметим, что в силу экспоненциального убывания вклада вычетов в комплексных

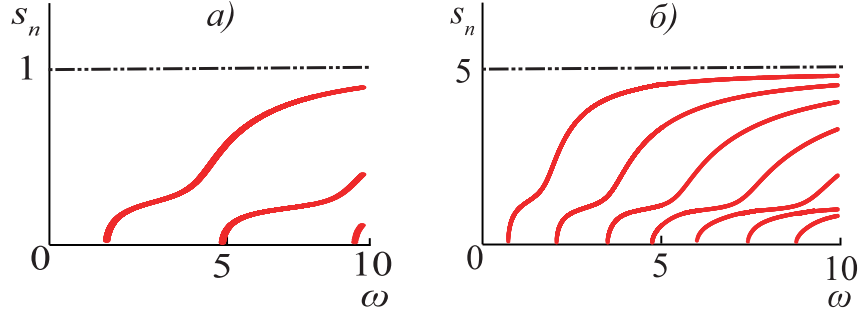


Рис. 5.11. Кривые медленностей $s_n = \zeta_n/\omega$ для трехслойной полосы с мягким а) и жестким б) внутренним слоем

полюсах ζ_n для достижения требуемой точности ε при суммировании ряда (5.21) достаточно ограничиться конечным числом слагаемых, отбросив те, у которых

$$|e^{i\zeta_n|x \mp a|}| \leq e^{-\text{Im} \zeta_n d} < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \text{Im} \zeta_n > |\ln \varepsilon|/d.$$

Здесь d – минимальное расстояние от точки x до границ отрезка $[-a, a]$. Таким образом, поиск комплексных полюсов достаточно проводить в ограниченной части комплексной плоскости α : $\text{Im} \zeta_n < |\ln \varepsilon|/d$. Это позволяет использовать *принцип аргумента* [28, 39, 41] и для организации поиска полюсов, и для контроля их числа в ограниченных подобластях комплексной плоскости.

Значения вычетов $\text{res } K|_{\alpha=\zeta_n}$, необходимые для использования ряда (5.21), также можно получить только численно. Наиболее простым и вполне надежным способом является подход, основанный на конечно-разностной аппроксимации в окрестности полюса.

Пусть ζ – однократный полюс функции $f(\alpha)$. Исходя из того, что $\text{res } f|_{\alpha=\zeta} = \lim_{\alpha \rightarrow \zeta} f(\alpha)(\alpha - \zeta)$, рассмотрим непрерывную функцию $g(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \zeta)$, значение которой при $\alpha = \zeta$ и дает искомый вычет. Однако вычислять $g(\alpha)$ непосредственно в точке ζ нельзя, так как $f(\zeta) = \infty$. Но можно

аппроксимировать ее с любой степенью точности некоторым полиномом $p_N(\alpha)$, взяв в качестве узлов аппроксимации точки $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N + 1$, лежащие в окрестности полюса ζ , но не совпадающие с ним: $g(\alpha) \approx p_N(\alpha)$. Значение полинома можно вычислять в любой точке, включая ζ , откуда

$$\operatorname{res} f(\alpha)|_{\alpha=\zeta} \approx p_N(\zeta).$$

Численные эксперименты показывают, что точность этого приближения в первую очередь зависит от расположения узлов α_i и минимального расстояния h от узлов до полюса ζ и очень слабо от степени полинома. Поэтому оптимально использовать простейшую двухточечную линейную аппроксимацию по равноотстоящим узлам $\alpha_1 = \zeta - h$ и $\alpha_2 = \zeta + h$, которая дает приближение

$$\operatorname{res} f|_{\alpha=\zeta} \approx \frac{g(\alpha_1) + g(\alpha_2)}{2} = \frac{h}{2}[f(\zeta + h) - f(\zeta - h)] \quad (5.49)$$

с точностью порядка $O(h)$, при точности определения полюса на 2–3 порядка выше, чем h . Например, для получения значения $\operatorname{res} K|_{\alpha=\zeta_n}$ с шестью верными знаками необходимо взять $h = 10^{-6}$, а полюс ζ_n найти с точностью $\varepsilon = 10^{-8} - 10^{-9}$. При проведении всех вычислений с длиной мантиссы вещественных чисел в 13–14 знаков (двойная точность на Фортране), получение вычета с такой точностью по формуле (5.49) не вызывает проблем. Однако при дальнейшем уменьшении h до уровня $\approx 10^{-8} - 10^{-10}$ обычно начинаются проблемы, связанные с тем, что в ближайшей окрестности полюса матрица системы (5.38) вырождается и вычисление самой функции $K(\alpha, z)$ становится численно неустойчивым.

При необходимости получения более высокой точности можно воспользоваться следующим полуаналитическим ме-

тодом вычисления вычета [16]. В силу представления (5.48) вычет функции K в однократном полюсе ζ выражается через вычеты коэффициентов $t_{m,j}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha=\zeta} &= \operatorname{res} t_{m,1}(\alpha)|_{\alpha=\zeta} e^{\sigma_m(\zeta)(z-z_m)} + \\ &+ \operatorname{res} t_{m,2}(\alpha)|_{\alpha=\zeta} e^{-\sigma_m(\zeta)(z-z_{m+1})}, \quad \sigma_m = \sqrt{\zeta^2 - \kappa_m^2}, \quad z \in D_m. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вычета вектор-функции $\mathbf{t}(\alpha)$, которая определяется из линейной алгебраической системы с матрицей A , вырождающейся при $\alpha = \zeta$: $\det A(\zeta) = 0$ (в представлении A используются регуляризованные блоки (5.43)).

Разложение матрицы $A(\alpha)$ и вектор-функций $\mathbf{f}(\alpha)$ и $\mathbf{t}(\alpha)$ в ряд Лорана в окрестности точки ζ имеет вид

$$A(\alpha) = A_0 + A_1(\alpha - \zeta) + \dots$$

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1(\alpha - \zeta) + \dots$$

$$\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}_{-1}/(\alpha - \zeta) + \mathbf{t}_0 + \dots$$

Из подстановки данных разложений в систему $A\mathbf{t} = \mathbf{f}$ следуют соотношения

$$A_0\mathbf{t}_{-1} = 0 \quad (\det A_0 = \det A(\zeta) = 0) \quad (5.51)$$

$$A_1\mathbf{t}_{-1} + A_0\mathbf{t}_0 = \mathbf{f}_0.$$

Первое из этих соотношений означает, что искомый вычет $\mathbf{t}_{-1} = \operatorname{res} \mathbf{t}(\alpha)|_{\alpha=\zeta}$ является собственным вектором матрицы A_0 , соответствующим нулевому собственному значению. Он определяется с точностью до неизвестного скалярного множителя p : $\mathbf{t}_{-1} = p\mathbf{m}$, где \mathbf{m} – нормированный определенным образом собственный вектор матрицы A_0 . Для определения p достаточно скалярно домножить второе соотношение в (5.31)

на собственный вектор \mathbf{n} сопряженной к A_0 матрицы \tilde{A}_0

$$\begin{aligned}\mathbf{n} : \tilde{A}_0 \mathbf{n} &= 0, \\ \tilde{A}_0 : (A_0 \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \tilde{A}_0 \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{5.52}$$

Это приводит к равенству

$$p(A_1 \mathbf{m}, \mathbf{n}) + (A_0 \mathbf{t}_0, \mathbf{n}) = (\mathbf{f}_0, \mathbf{n}),$$

в котором в силу свойств (5.52)

$$(A_0 \mathbf{t}_0, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}_0, \tilde{A}_0 \mathbf{n}) = 0.$$

Отсюда

$$p = (\mathbf{f}_0, \mathbf{n}) / (A_1 \mathbf{m}, \mathbf{n}).$$

Таким образом, для вычисления вычета по данной схеме при уже заданном ζ необходимо предварительно вычислить

$$A_0 = A(\zeta), \quad \tilde{A}_0 = (A_0^*)^T, \quad A_1 = A'_\alpha(\zeta)$$

и найти собственные векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} матриц A_0 и \tilde{A}_0 . Это требует бóльших предварительных аналитических и вычислительных затрат, чем с помощью аппроксимации (5.49), но зато обеспечивает более высокую точность.

Замечание 5.11. При реализации алгоритма (5.46) – (5.47) данный метод можно применить для вычисления вычета вектор-функции $\mathbf{t}_1(\alpha)$, задаваемой более простой системой $B\mathbf{t}_1 = \mathbf{f}_1$, получающейся в результате прогонки, а вычеты остальных составляющих вектора \mathbf{t} определить затем с помощью рекуррентных соотношений (5.47):

$$\text{res } \mathbf{t}_m|_{\alpha=\zeta} = B_{m-1}(\zeta) \text{res } \mathbf{t}_{m-1}|_{\alpha=\zeta}, \quad m = 2, 3, \dots, M.$$

При этом ввиду сложной структуры матрицы-функции $B(\alpha)$ ее производную целесообразно находить численно

$$B'_\alpha(\zeta) \approx [B(\zeta - h) - B(\zeta + h)]/(2h).$$

В отличие от аппроксимации вычета (5.49), данное приближение численно устойчиво при $h \rightarrow 0$, так как здесь не требуется обращать вырождающуюся матрицу B .

6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПОСТАНОВКА

В предыдущей главе общая схема построения решения была показана на примере плоских (двумерных) задач, в которых искомая функция $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \{x, z\}$ не зависит от одной из пространственных координат (в данном случае от y). В настоящей главе обсуждаются отличительные особенности реализации данной схемы в пространственном (трехмерном) случае, когда решение зависит от всех пространственных координат: $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Главное отличие обусловлено применением двумерного преобразования Фурье \mathcal{F}_{xy} вместо одномерного \mathcal{F}_x . Преобразование \mathcal{F}_{xy} , в свою очередь, сводится к преобразованию Фурье–Бесселя, поэтому предварительно приводятся необходимые сведения из теории бесселевых функций.

6.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция Бесселя $J_\nu(x)$ — одно из двух линейно независимых собственных решений дифференциального уравнения Бесселя [1, 5, 26, 33]

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - \nu^2) w = 0. \quad (6.1)$$

Второе линейно независимое решение этого уравнения — *функция Неймана* $Y_\nu(x)$ (во многих справочниках она обозначается $N_\nu(x)$). Необходимость в использовании бесселевых функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ обычно возникает при переходе к цилиндрическим координатам, поэтому они также называются *цилиндрическими функциями*.

Общее решение уравнения (6.1) имеет вид

$$w(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x),$$

где c_1, c_2 – произвольные константы. *Порядок* ν бесселевых функций J_ν и Y_ν может быть любым вещественным или даже комплексным числом, но в приложениях чаще всего встречаются функции целого ($\nu = n$) или половинного ($\nu = n + 1/2$) порядка. При неотрицательных целых $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $J_n(z)$ является целой функцией комплексного переменного $z = x + iy$, т.е. она не имеет полюсов и других сингулярных точек и может быть представлена рядом, абсолютно сходящимся во всей комплексной плоскости z :

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! (n+k)!}.$$

Функция Неймана имеет более сложное представление [1]

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \\ + \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\} \frac{(-z^2/4)^k}{k! (n+k)!}.$$

Здесь $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, $\gamma = 0.5772156649\dots$ – постоянная Эйлера.

Как обычно, предполагается, что $\sum_{k=p}^q (\dots) \equiv 0$, если нижний предел больше верхнего: $p > q$; в данном представлении это имеет место при $n = 0$ и 1 .

Очевидно, $z = 0$ является особой точкой функции $Y_n(z)$. При $n = 0$ это логарифмическая особенность, а при $n \geq 1$ –

полюс кратности n :

$$Y_n(z) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln z, & n = 0 \\ -\frac{2^n(n-1)!}{\pi} z^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}, \quad z \rightarrow 0.$$

Несмотря на то что при $n \geq 1$ логарифмическая особенность устраняется степенным убыванием функции Бесселя

$$J_n(z) \sim \frac{1}{2^n n!} z^n, \quad z \rightarrow 0,$$

$z = 0$ остается также и точкой ветвления, от которой необходимо провести разрез для выделения однозначной ветви логарифма, входящего в представление Y_n . Во встроенных функциях вычисления комплексного логарифма (в Фортране и Матлабе это функция $\log(z)$) разрез взят таким же, как и для квадратного корня – вдоль отрицательной вещественной полуоси $x < 0$:

$$\ln z = \ln |z| + i\varphi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad \varphi : z = |z|e^{i\varphi}.$$

Наличие разреза следует учитывать при вычислении по вычетам контурных интегралов, содержащих $Y_n(z)$.

Вместо J_n и Y_n в качестве линейно независимых собственных решений уравнения (6.1) можно взять две их линейные комбинации

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad \text{и} \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x), \quad (6.2)$$

называемые *функциями Ханкеля* первого и второго рода.

Имеется определенная аналогия между цилиндрическими функциями Бесселя и Ханкеля с одной стороны и тригонометрическими функциями и экспонентами $\cos z$, $\sin z$ и $e^{\pm iz}$ – с другой. Причем не только из-за того, что они связаны такими же соотношениями (6.2) как и соотношения

Эйлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$, но и из-за их поведения как на вещественной оси x , так и в комплексной плоскости z . При больших z : $|\arg| < \pi$, $|z| \rightarrow \infty$ оно определяется асимптотиками

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sqrt{2/(\pi z)} \cos(z - \pi n/2 - \pi/4)(1 + O(1/|z|)), \\ Y_n(z) &= \sqrt{2/(\pi z)} \sin(z - \pi n/2 - \pi/4)(1 + O(1/|z|)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Соответственно

$$H_n^{(1,2)}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} e^{\pm i(z - \pi n/2 - \pi/4)}(1 + O(1/|z|)). \quad (6.4)$$

Подобно косинусу и синусу функции $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ вещественны при вещественных x и осциллируют с периодом, стремящимся к 2π при $x \rightarrow \infty$. Однако, в отличие от тригонометрических функций, эта осцилляция сопровождается корневым убыванием амплитуды. В комплексной плоскости функции $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ подобно косинусу и синусу экспоненциально растут при $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$, а функции Ханкеля $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$ экспоненциально убывают соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, как и $e^{\pm iz}$.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие свойства цилиндрических функций:

1) четность-нечетность относительно аргумента z и порядка n :

$$\begin{aligned} J_n(-z) &= (-1)^n J_n(z), \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \\ H_n^{(1)}(ze^{i\pi}) &= (-1)^{n+1} H_n^{(2)}(z), \quad H_n^{(2)}(ze^{-i\pi}) = (-1)^{n+1} H_n^{(1)}(z); \end{aligned} \quad (6.5)$$

2) дифференцирование и рекуррентные соотношения:

$$Z'_n(x) = Z_{n-1}(x) - nZ_n(x)/x = -Z_{n+1}(x) + nZ_n(x)/x,$$

$$Z_{n+1}(x) = 2nZ_n(x)/x - Z_{n-1}(x). \quad (6.6)$$

Здесь $Z_n(x)$ – любая из цилиндрических функций J_n, Y_n или $H_n^{(1,2)}$.

Наряду с представлением в виде ряда имеются также интегральные представления функции $J_n(z)$, среди которых ключевую роль для перехода от преобразования \mathcal{F}_{xy} к преобразованию Фурье–Бесселя играет полученное Бесселем соотношение [1, 5]

$$2\pi J_n(z) = 2 \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi, \quad (6.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание 6.1. Первый из интегралов представления (6.7) указывает на то, что функция Бесселя вещественна при вещественных z . Так как мнимая часть второго интеграла тождественно равна нулю, показатель экспоненты можно брать как со знаком плюс, так и со знаком минус.

Замечание 6.2. Для периодических функций интеграл по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет одно и то же значение:

$$\int_{\varphi_0}^{T+\varphi_0} F(\varphi) d\varphi = \int_0^T F(\varphi) d\varphi \quad \text{для} \quad F : F(\varphi + T) = F(\varphi).$$

Поэтому представление Бесселя справедливо при интегрировании не только в пределах от 0 до 2π , но и по любому интервалу длины 2π .

С учетом сделанных замечаний после замены $\varphi := \varphi - \pi/2$ функция Бесселя представима также в виде

$$2\pi(\pm i)^n J_n(r) = \int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0} e^{\pm i(r \cos \varphi - n\varphi)} d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

в котором сдвиг отрезка интегрирования φ_0 может быть любым.

Сравнивая второй из интегралов в (6.7) с представлением (1.6) для коэффициентов комплексного ряда Фурье (1.5), несложно заключить, что функции Бесселя $J_n(z)$ фактически являются коэффициентами разложения осциллирующей экспоненты $e^{iz \sin \varphi}$ в ряд Фурье:

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}. \quad (6.9)$$

6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ – БЕССЕЛЯ

Рассмотрим двумерное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{xy}[u] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy = U(\alpha_1, \alpha_2), \\ \mathcal{F}_{xy}^{-1}[U] &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} U(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 = u(x, y). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Исходную функцию $u(x, y)$ и Фурье-образ $U(\alpha_1, \alpha_2)$ можно записать в полярных координатах (r, φ) и (α, γ) , связанных с декартовыми (x, y) и (α_1, α_2) соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r = \sqrt{x^2 + y^2}, & 0 \leq r < \infty \\ y = r \sin \varphi, & \varphi = \operatorname{arctg}(y/x), & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}, \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \cos \gamma, & \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, & 0 \leq \alpha < \infty \\ \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, & \gamma = \operatorname{arctg}(\alpha_2/\alpha_1), & 0 \leq \gamma < 2\pi \end{cases}. \quad (6.12)$$

Соответствующая замена переменных в интегралах (6.10) дает

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \alpha_2 y &= \alpha r (\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi) = \alpha r \cos(\gamma - \varphi), \\ U(\alpha, \gamma) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{i\alpha r \cos(\varphi - \gamma)} d\varphi r dr, \\ u(r, \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_+} \int_0^{2\pi} U(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)} d\gamma \alpha d\alpha, \end{aligned} \quad (6.13)$$

контур Γ_+ совпадает с положительной частью контура Γ для двумерной задачи (см. рис. 5.1, 5.6), но в отличие от последнего он расположен в комплексной плоскости переменной $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, а не $\alpha = \alpha_1$.

Замечание 6.3. Здесь и далее при переходе к полярным координатам, как правило, сохраняются прежние обозначения функции (например, $u(x, y)$ и $u(r, \varphi)$), хотя формально это уже другая функция, получающаяся подстановкой на место x, y не полярных переменных r, φ , а значений x, y , выраженных через r, φ : $u(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Аналогично, $U(\alpha, \gamma) := U(\alpha \cos \gamma, \alpha \sin \gamma)$ и т.п.

Двукратные интегралы (6.13) сводятся к набору однократных, если разложить подынтегральные функции в ряды Фурье по переменным φ и γ

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{-in\varphi}, \\ U(\alpha, \gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(\alpha) e^{-in\gamma} \end{aligned} \quad (6.14)$$

и воспользоваться представлением (6.8):

$$U(\alpha, \gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i^n \int_0^{\infty} u_n(r) J_n(\alpha r) r dr e^{-in\gamma},$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\Gamma_+} U_n(\alpha) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha e^{-in\varphi}.$$

В соответствии с представлением (1.6) функции $u_n(r)$ и $U_n(\alpha)$, будучи коэффициентами рядов Фурье (6.14), представимы через исходные функции в виде интегралов по угловой координате:

$$u_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{in\varphi} d\varphi, \quad U_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\alpha, \gamma) e^{in\gamma} d\gamma.$$

С другой стороны, сравнение этих разложений с рядами (6.14) показывает, что полученные однократные интегралы по r и по α совпадают с Фурье-коэффициентами $U_n(\alpha)$ и $u_n(r)$, давая взаимно однозначную связь между ними. Эти соотношения можно рассматривать как самостоятельное интегральное преобразование с функцией Бесселя вместо осциллирующей экспоненты в качестве ядра:

$$\mathcal{B}_n[u_n] \equiv 2\pi i^n \int_0^{\infty} u_n(r) J_n(\alpha r) r dr = U_n(\alpha),$$

$$\mathcal{B}_n^{-1}[U_n] \equiv \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\Gamma_+} U_n(\alpha) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha = u_n(r). \quad (6.15)$$

Это преобразование называется *преобразованием Фурье – Бесселя*, или *преобразованием Ханкеля* [18]. Его свойства

определяются свойствами порождающего двукратного преобразования Фурье \mathcal{F}_{xy} .

Замечание 6.4. Для осесимметричных, т.е. не зависящих от угловой координаты φ , функций $u = u(r)$ набор преобразований (6.15) сводится к единственной паре

$$U(\alpha) = \mathcal{B}_0[u], \quad u(r) = \mathcal{B}_0^{-1}[U],$$

связывающей не Фурье-коэффициенты, а саму функцию $u(r)$ и трансформанту $U(\alpha) = \mathcal{F}_{xy}[u]$.

6.3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче (5.1) – (5.2), но не в полосе, а в слое D : $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-h \leq z \leq 0$:

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x} = \{x, y, z\}, \quad \kappa = \omega/c \quad (6.16)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad u|_{z=-h} = 0, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty. \quad (6.17)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; Ω – некоторая ограниченная область произвольной формы на поверхности слоя D , в которой задан источник колебаний, описываемый функцией $q(x, y)$. Ввиду ограниченности размеров область Ω целиком лежит в некотором круге $r \leq a$. Для определенности считаем, что a – минимально возможный радиус такого круга, а начало координат расположено в его центре (рис. 6.1).

К уравнениям и граничным условиям можно применить преобразование Фурье по обеим горизонтальным координатам x и y . Преобразованная задача внешне выглядит точно так же, как задача (5.3) – (5.4) для двумерной полосы, но под U и Q здесь уже понимаются Фурье-символы, зависящие

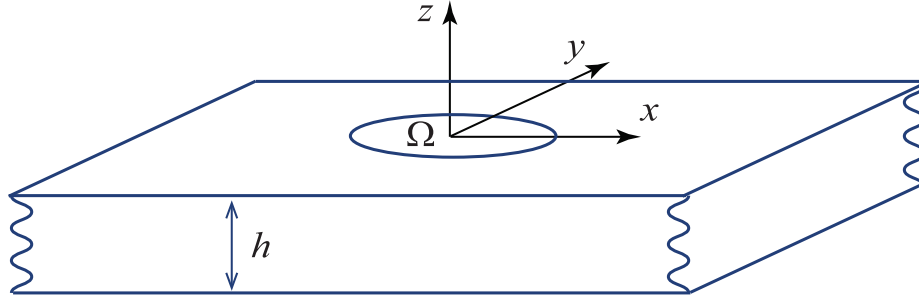


Рис. 6.1. Пространственная постановка

от двух параметров преобразования α_1 и α_2 вместо одного $\alpha = \alpha_1$ в предыдущем случае. Тем не менее вид функции $K(\alpha, z)$, определяемой как решение этой задачи при $Q \equiv 1$, остается прежним (см. (5.8)). В результате в пространстве образов Фурье решение имеет вид

$$U(\alpha_1, \alpha_2, z) = K(\alpha, z)Q(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \quad (6.18)$$

Соответственно

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha, z)Q(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (6.19)$$

Как и раньше, контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 идут вдоль вещественных осей α_1, α_2 , отклоняясь от них в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов функции K , в то время как $Q(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{F}_{xy}[q]$ в случае ограниченной области Ω является целой функцией, т.е. не имеет полюсов.

Вид характеристического уравнения (5.11) и соответственно явное представление для полюсов $\alpha = \zeta_n$ (5.12) остаются прежними, однако теперь это уже не точки, а одномерные полярные множества в пространстве переменных α_1, α_2 . Для вещественных корней они являются окружностями

ми радиуса ζ_n на вещественной плоскости (α_1, α_2) :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \zeta_n^2, \quad (6.20)$$

а для комплексных ($n > N_r$) – определенными многообразиями (комплексными окружностями) в двумерном пространстве комплексных переменных.

Структура полярных множеств подсказывает, что удобнее рассматривать интегральное представление (6.19) в полярных координатах (r, φ) и (α, γ) :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\equiv u(r, \varphi, z) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_+} K(\alpha, z) \alpha \int_0^{2\pi} Q(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\varphi - \gamma)} d\gamma d\alpha. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Разложение функций q и Q в ряд Фурье по φ и γ приводит к соотношениям, аналогичным (6.14) – (6.15), как для функций

$$\begin{aligned} q(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(r) e^{-in\varphi}, \quad q_n(r) = \mathcal{B}_n^{-1}[Q_n], \\ Q(\alpha, \gamma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(\alpha) e^{-in\gamma}, \quad Q_n(\alpha) = \mathcal{B}_n[q_n], \end{aligned} \quad (6.22)$$

так и для решения (6.21)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r, z) e^{-in\varphi}, \quad (6.23)$$

$$u_n(r, z) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\Gamma_+} K(\alpha, z) Q_n(\alpha) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha = \mathcal{B}_n^{-1}[K Q_n].$$

Очевидно, что в случае осесимметричного источника $q = q(r)$ решение $u(\mathbf{x})$ также осесимметрично:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= u_0(r, z) = \\ &= \mathcal{B}_0^{-1}[KQ] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} K(\alpha, z) Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \\ Q(\alpha) &= \mathcal{B}_0[q]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

6.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ МОДАМ

1. С помощью замыкания контура Γ и замены интеграла суммой вычетов решение (5.10) для двумерного волновода было сведено к разложению по нормальным модам (5.21). Ясно, что и в пространственном случае вычеты в полюсах ζ_n также должны давать представление для бегущих волн. Однако непосредственное применение леммы Жордана и теоремы Коши к интегралам (6.23), (6.24) невозможно по двум причинам. Во-первых, контур Γ_+ – это только правая половина контура Γ и его замыкание приводит к появлению дополнительного интеграла вдоль мнимой полуоси. Во-вторых, и это главное, его нельзя замыкать ни вверх, ни вниз, так как в обоих направлениях подынтегральная функция экспоненциально растет из-за роста функции Бесселя (см. (6.3)).

Оба эти препятствия преодолеваются с помощью приема, называемого *разворотом контура* [12]. Его идея хорошо иллюстрируется следующим простым примером. Рассмотрим интеграл по полуоси

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2 + 1} dz \right] \equiv I^+ + I^-.$$

Здесь имеются два полюса $\zeta_{1,2} = \pm i$, но непосредственное вычисление интеграла I по вычетам невозможно по указанным выше причинам. В интегралах I^\pm замыкание возможно, но при этом добавляются интегралы по возвращающимся в начало координат участкам замкнутого контура, которые не обращаются в ноль и в явном виде не берутся. Чтобы избавиться от них, надо «развернуть» исходный контур с полуоси на всю ось, а уже затем замыкать его в соответствии с условиями леммы Жордана. Для этого достаточно в одном из них, например в I^- , сделать замену переменных $z := -z$:

$$I^- = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz,$$

что в сумме с I^+ приводит к представлению в виде интеграла по всей оси

$$I = I^+ + I^- = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz,$$

для которого уже возможно замыкание контура в верхнюю полуплоскость и замена суммой вычетов:

$$I = \frac{2\pi i}{2} \operatorname{res} \frac{1}{z^2 + 1} \Big|_{z=i} e^{-1} = \frac{\pi}{2e}.$$

Как показывает этот пример, разворот контура возможен, если экспоненциально растущий сомножитель (в данном случае $\cos z$) можно расщепить на два слагаемых, убывающих в разных направлениях при $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ (в данном случае это $e^{\pm iz}$). При этом они должны переходить друг в друга при замене $z := -z$, а остальная часть подынтегральной функции (здесь это $\frac{1}{z^2+1}$) должна быть четной.

В интегралах для коэффициентов u_n в (6.23) в силу асимптотики (6.3) экспоненциальным ростом обладают функции

$$Q_n(\alpha) = 2\pi i^n \int_0^a q_n(r) J_n(\alpha r) r dr \sim O(e^{|\operatorname{Im} \alpha| a}) \quad \text{и}$$

$$J_n(\alpha r) \sim O(e^{|\operatorname{Im} \alpha| r}), \quad |\operatorname{Im} \alpha| \rightarrow \infty,$$

причем при $r > a$ (вне области источника Ω) определяющим становится поведение $J_n(\alpha r)$. В соответствии с (6.2) ее можно расщепить на две функции Ханкеля

$$J_n(\alpha r) = [H_n^{(1)}(\alpha r) + H_n^{(2)}(\alpha r)]/2, \quad (6.25)$$

обладающих требуемым убыванием при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow -\infty$ соответственно (см. (6.4)). Из свойств (6.5) следует, что

$$H_n^{(2)}(-\alpha r) = (-1)^{n+1} H_n^{(1)}(\alpha r) \quad \text{и} \quad Q_n(-\alpha) = (-1)^n Q_n(\alpha),$$

поэтому замена $\alpha := -\alpha$ в интеграле, содержащем функцию Ханкеля второго рода, дает

$$Q_n(-\alpha) H_n^{(2)}(-\alpha r)(-\alpha) = Q_n(\alpha) H_n^{(1)}(\alpha r) \alpha,$$

$$K(-\alpha, z) = K(\alpha, z), \quad \int_{\Gamma_+} (\cdots) d\alpha = \int_{\Gamma_-} (\cdots) d\alpha.$$

В результате приходим к интегралу с той же подынтегральной функцией, что и для первого слагаемого, но по левой половине Γ_- контура $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$. Тем самым контур Γ_+ разворачивается в полный контур Γ , что приводит представление

коэффициентов u_n в (6.23) к виду

$$u_n(r, z) = \frac{(-i)^n}{4\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) Q_n(\alpha) H_n^{(1)}(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (6.26)$$

с подынтегральной функцией, экспоненциально убывающей как $O(e^{-\text{Im } \alpha(r-a)})$ при $r > a$, $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$.

2. Замыкание контура Γ в верхнюю полуплоскость дает искомое представление коэффициентов Фурье u_n в виде ряда по вычетам

$$u_n(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}(z) H_n^{(1)}(\zeta_m r), \quad r > a \quad (6.27)$$

$$b_{nm} = (-i)^n r_m(z) Q_n(\zeta_m) \zeta_m / 2, \quad r_m(z) = i \operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha=\zeta_m}.$$

Решение (6.23) после подстановки в него полученных представлений и замены порядка суммирования можно записать в виде ряда по m , дающего требуемое разложение по нормальным модам:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m(z) p_m(r, \varphi), \quad (6.28)$$

где

$$p_m(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n Q_n(\zeta_m) H_n^{(1)}(\zeta_m r) e^{-in\varphi}. \quad (6.29)$$

Зависимость каждого слагаемого (нормальной моды) от z определяется только вычетом $r_m(z)$ символа функции Грина данного волновода в полюсе ζ_m и не зависит от вида источника. С точностью до постоянного множителя функция $r_m(z)$ совпадает с собственной формой нормальной моды в поперечном сечении волновода, определяемой методами

модального анализа. Зависимость от радиальной координаты r также определяется свойствами волновода, так как r входит в аргументы функций Ханкеля с сомножителем ζ_m .

Угловая направленность излучения, описываемая коэффициентами $p_m(r, \varphi)$, зависит от конкретного вида функции источника $q(r, \varphi)$. Для осесимметричного источника $q = q(r)$ все коэффициенты Q_n , кроме нулевого, обращаются в ноль и решение также становится осесимметричным, не зависящим от направления излучения φ :

$$u(\mathbf{x}) = u_0(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z) H_0^{(1)}(\zeta_m r), \quad (6.30)$$

$$b_m(z) = r_m(z) Q(\zeta_m), \quad Q(\alpha) = \mathcal{B}_0[q].$$

Полюса ζ_m являются волновыми числами возбуждаемых нормальных мод, и как и в случае полосового волновода вещественным ζ_m соответствуют волны, уходящие на бесконечность с фазовой скоростью $c_m = \omega/\zeta_m$ и групповой $v_m = [d\zeta_m/d\omega]^{-1}$, а комплексным – экспоненциально затухающие волны. Чтобы убедиться в этом, достаточно для функций Ханкеля, входящих в ряд (6.29), воспользоваться асимптотиками (6.4):

$$H_n^{(1)}(\zeta_m r) = \sqrt{\frac{2}{\pi i \zeta_m r}} (-i)^n e^{i\zeta_m r} [1 + O(1/(\zeta_m r))],$$

$$\zeta_m r \rightarrow \infty, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Они содержат экспоненциальные множители $e^{i\zeta_m r}$, которым соответствуют бегущие (при $m \leq N_r$) и экспоненциально затухающие (при $m > N_r$) волны. При этом после выноса сомножителей, не зависящих от индекса n , ряды (6.29) сводятся к рядам, дающим значения $Q(\alpha, \gamma)$ при $\alpha = -\zeta_m$, $\gamma = \varphi$

(см. (6.22)):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n Q_n(\zeta_m) e^{-in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n(-\zeta_m) e^{-in\varphi} = Q(-\zeta_m, \varphi).$$

В результате асимптотическое представление решения (6.28), главный вклад в которое дают только первые N_r вещественных полюсов, принимает вид

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{N_r} b_m(\varphi, z) e^{i\zeta_m r} / \sqrt{\zeta_m r} [1 + O(1/(\zeta_m r))], \quad \kappa r \rightarrow \infty, \quad (6.31)$$

$$b_m(\varphi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi i}} r_m(z) Q(-\zeta_m, \varphi).$$

Фазовые функции $\theta_m = \zeta_m r - \omega t$ каждого из слагаемых (6.31) описывают волны с цилиндрическим фронтом $r = \omega t / \zeta_m + \text{const}$, расширяющимся с фазовой скоростью $c_m = \omega / \zeta_m$. Их амплитуда убывает с расстоянием как $1/\sqrt{\zeta_m r}$, т.е. в отличие от волн (5.21), бегущих в полосовом волноводе без затухания, они являются неоднородными. Корневое убывание амплитуды с ростом r характерно для цилиндрических волн. Оно связано с увеличением длины фронта $2\pi r$ при сохранении энергии, переносимой данной волной [22].

Замечание 6.5. Полученное асимптотическое разложение (6.31) не применимо в некоторых, зависящих от r малых окрестностях частот отсечки ω_m : $|\omega - \omega_m| < \delta_m(r)$, так как при $\omega \rightarrow \omega_m$ $\zeta_m \rightarrow 0$ и при фиксированном r не выполняется условие $\zeta_m r \gg 1$, необходимое для замены функций Ханкеля их асимптотикой.

3. Асимптотическое представление (6.31) можно получить непосредственно из исходного интеграла (6.19), не прибегая к разложению функции $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ в ряд Фурье по

угловой координате γ . Подстановка ее в виде

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \int \int_{\Omega} q(\xi, \eta) e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)} d\xi d\eta$$

и переход к полярным координатам приводят к интегралу по γ только от экспоненты $e^{-i(\alpha_1(x-\xi)+\alpha_2(y-\eta))}$, который дает функцию Бесселя $J_0(\alpha R)$, $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. В результате после разворота контура решение (6.19) сводится к виду

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) P(x, y, \alpha) \alpha d\alpha, \quad (6.32)$$

в котором

$$P(x, y, \alpha) = \int \int_{\Omega} q(\xi, \eta) H_0^{(1)}(\alpha R) d\xi d\eta. \quad (6.33)$$

Для $(x, z) \notin \Omega$ $R \neq 0$, поэтому функция $H_0^{(1)}(\alpha R)$, входящая в $P(x, y, \alpha)$, обеспечивает экспоненциальное убывание, необходимое для замыкания контура Γ в верхнюю полуплоскость и замены интеграла суммой вычетов. Полученный ряд имеет тот же вид, что и разложение (6.28), но в нем уже

$$p_m(r, \varphi) = P(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta_m). \quad (6.34)$$

Асимптотическое представление функции $P(x, y, \zeta_m)$ следует из асимптотики функции Ханкеля при $\zeta_m R \gg 1$ с учетом того, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R &= r \sqrt{1 - 2(x\xi + y\eta)/r^2 + \rho^2/r^2} \sim \\ &\sim r - (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) = r - \rho \cos(\psi - \varphi) \end{aligned}$$

И ТЕМ САМЫМ

$$\begin{aligned}
P(x, y, \zeta_m) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi i \zeta_m R}} e^{i \zeta_m r} \int \int_{\Omega} q(\rho, \psi) e^{-i \zeta_m \rho \cos(\psi - \varphi)} \rho d\rho d\psi = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi i \zeta_m r}} e^{i \zeta_m r} Q(-\zeta_m, \varphi) [1 + O(1/(\zeta_m r))], \quad \zeta_m r \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Замечание 6.6. Представление (6.34) дает те же функции p_m , что и ряд (6.29). Чтобы убедиться в их эквивалентности, достаточно перейти в интеграле по Ω к полярным координатам $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \sin \psi$ и воспользоваться теоремой сложения Графа [5, 33]:

$$H_0^{(1)}(\alpha R) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha \rho) H_n^{(1)}(\alpha r) e^{-in(\varphi - \psi)}.$$

Замечание 6.7. Полученные представления решения в виде интегралов и рядов остаются внешне такими же для слоистых волноводов любой структуры. В них меняется только конкретное представление функции $K(\alpha, z)$, которое совпадает с символом функции Грина для аналогичной двумерной задачи. В частности, для многослойного пакета $K(\alpha, z)$ вычисляется с помощью того же алгоритма (5.46)–(5.48), что и для двумерной многослойной полосы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интегральное преобразование Фурье является эффективным инструментом для решения краевых задач математической физики в слоистых областях. В случае волновых задач применение теории вычетов и асимптотических методов к интегральным представлениям, полученным с помощью преобразования Фурье, дает явные физически наглядные выражения для возбуждаемых волн различных типов. Кроме того, интегральное преобразование по времени существенно упрощает решение нестационарных задач, сводя их к задачам об установившихся гармонических колебаниях относительно частотного спектра нестационарных сигналов.

Использование техники интегральных преобразований (интегральный подход) особенно полезно при анализе волновых процессов. Наглядность полученных решений и значительное сокращение вычислительных затрат по сравнению с прямыми численными методами, базирующимися на сеточной (конечно-элементной) аппроксимации слоистых волноводов компенсирует затраты на аналитическую работу, необходимую для применения интегрального подхода.

Данную книгу можно рассматривать как руководство для студентов, аспирантов и молодых научных сотрудников, содержащее основные сведения, необходимые для самостоятельного овладения техникой интегрального подхода к решению волновых задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. М.: Мир, 1983. Т. 1. 520 с.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. Бурлий П.В., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в пластинах // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26, вып. 9. С. 644–647.
8. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
11. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ 2002. 312 с.

12. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
13. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
14. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости: учеб. пособие. Краснодар: Кубанский госуниверситет, 1990. 72 с.
15. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А., Михаськив В.В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 622–634.
16. Глушкова Н.В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук, 01.02.04. Ростовский госуниверситет, 2000. 220 с.
17. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 294 с.
18. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
19. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 472 с.
20. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
21. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2002. Ч. 2. 464 с.

22. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 493 с.
23. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
24. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
26. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
27. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1981. Т. 2. 584 с.
28. Лаврентьев М.А., Шабат Б.Г. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
29. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
30. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
31. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
32. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 423 с.
33. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 304 с.
34. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962.
35. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 374 с.

36. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
37. Петрашень Г.И. Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями // Учен. зап. ЛГУ. 1952. Т. 162, вып. 25. С. 3–189.
38. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды: курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
39. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.
40. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
41. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 408 с.
42. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. 656 с. Т. 2.
43. Соболев Л.С. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
44. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 424 с.
45. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 468 с.
46. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 351 с.

47. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
48. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.
49. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
50. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. Т. 3. 662 с.
51. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М: Мир, 1965. 412 с.
52. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 280 с.
53. Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // J. Acoust. Soc. Am. 2006. Vol. 119(6). P. 3589–3598.
54. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A., Lammering R. Trapped mode effects in notched plate-like structures // Journal of Sound and Vibration. 2015. V. 358. P. 142–151.
55. Haskell N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seism. Soc. Amer. 1953. Vol. 43. P. 17–34.
56. Lamb H., On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. London 1917. Vol. A 93. P. 114–128.
57. Linton C.M., Evans D.V., Trapped modes above a submerged horizontal plate // Q. J. Mech. Appl. Math. 1991. Vol. 44(3). P. 487–506.
58. Prada C., Clorennec D., Royer D. Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes // J. Acoust. Soc. Am. 2008. Vol. 124(1). P. 203–212.

- 59. Lord Rayleigh, On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid // Proc. London Math. Soc. 1885. Vol. s1-17(1). P. 4—11.
- 60. Tolstoy I. and Usdin E., Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1957. Vol. 29. P. 37—42.
- 61. Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified medium // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 89—93.
- 62. Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1951. Vol. 47. P. 347—358.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	5
1.1. Ряды Фурье	5
1.2. Переход от рядов к интегралам Фурье	12
1.3. Свойства преобразования Фурье	15
1.3.1. Поведение на бесконечности	15
1.3.2. Преобразование производных	17
1.3.3. Преобразование производных от разрывных функций	21
1.3.4. Преобразование Фурье свертки двух функций	26
1.3.5. Равенство Парсеваля	29
2. ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ	34
2.1. Уравнения и граничные условия	34
2.2. Обобщенная постановка	39
2.3. Обобщенные функции	44
3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА	52
3.1. Комплексная плоскость, аналитические функ- ции	52
3.2. Аналитическое продолжение, полюса, вычеты .	58
3.3. Вычисление интегралов с помощью вычетов . .	67
3.4. Вычисление интегралов по бесконечному контуру	72
3.4.1. Лемма Жордана	72
3.4.2. Примеры вычисления интегралов Фурье . . .	77
3.5. Заключительные замечания	84
4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНО- ВЫЕ ЗАДАЧИ	86
4.1. Волны и волновые уравнения	86
4.1.1. Волны	86

4.1.2. Волновое уравнение, упругие потенциалы и объемные волны	90
4.1.3. Упругие волны	92
4.2. Гармонические колебания и волны	97
4.2.1. Комплексная амплитуда гармонических коле- баний	97
4.2.2. Принцип суперпозиции, преобразование Фурье–Лапласа	100
4.2.3. Свойства частотного спектра	106
4.2.4. Примеры частотных спектров	111
5. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ	119
5.1. Полосовой волновод	119
5.1.1. Интегральное представление решения	119
5.1.2. Полюса, вычеты и бегущие волны	123
5.1.3. Дисперсионные кривые	132
5.1.4. Выбор направления замыкания контура	137
5.2. Выбор контура интегрирования на основе прин- ципов излучения	138
5.3. Полуплоскость, выбор ветвей радикалов	148
5.4. Многослойный волновод, численная устойчивость	158
6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПОСТАНОВКА	174
6.1. Элементы теории цилиндрических функций	174
6.2. Преобразование Фурье–Бесселя	179
6.3. Модельная задача для пространственного вол- новода	182
6.4. Разложение по нормальным модам	185
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	193
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	194

Научное издание

Г л у ш к о в Евгений Викторович
Г л у ш к о в а Наталья Вилениновна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Монография

Подписано в печать 01.10.2017. Печать цифровая.

Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. 12,0.

Тираж 500 экз. Заказ №.

Кубанский государственный университет.
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Издательско-полиграфический центр
Кубанского государственного университета.
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.