Info3 A, TP 9

Exercice 1: (*polynômes*)
Si vous n'avez pas encore terminé l'implémentation des polynômes il faut finir cette partie.

Un polynôme $p(t)$ de degré n s'écrit sous la forme $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n$
Ou encore :

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, t^i \qquad (1)$$

L'ensemble des monômes $\{1, t^1, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ constitue une base dans l'espace des polynômes (n'importe quel polynôme peut être représenté dans cette base, dite base canonique).

Un polynôme de degré n peut être représenté par un tableau (ou une liste) de coefficients de longueur n+1.
Les fonctions à programmer sont :

- plus(a, b) : retourne un polynôme de degré d= max(deg(a), deg(b))= max(len(a),len(b))-1 représentant la somme des polynômes a et b.
- mult(a, b) : retourne un polynôme de degré $d = deg(a) + deg(b) = len(a) + len(b) - 2$ représentant le produit des polynômes a et b.
- opp(a) : retourne un polynôme de degré $d = deg(a) = len(a) - 1$ représentant l'opposé du polynôme a (la multiplication par le scalaire -1)
- subs(a,b) : la soustraction du polynôme a de b revient dans ce cas à la somme de a et de l'opposé de b.

Tester ces différentes fonctions et assurez-vous qu'elles fonctionnent correctement car vous les utiliserez dans la programmation de votre projet de lancer de rayon.

Exercice 2: (*Dags*)
Implémenter les classes et fonctions DAGS discutées en TD

Exercice 3: (*polynômes de Bernstein*)
La base de Bernstein est une autre base dans laquelle on peut représenter les polynômes. Cette base est composée des polynômes de Bernstein définit comme suit :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Pour $i = 0, \ldots, n$ et les $\binom{n}{i}$ sont les coefficients binomiaux définit par :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Pour un degré n il y a $n + 1$ polynômes de Bernstein notés $B_{i,n}(t)$ avec $i = 0, \ldots, n$ et $t \in [0,1]$. Pour un degré n on a donc les polynômes : $B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), B_{2,n}(t), \ldots, B_{n-1,n}(t), B_{n,n}(t)$

Dans la base de Bernstein, on écrit un polynôme $p(t)$, de degré n et $t \in [0,1]$ sous la forme :

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(t) \qquad (2)$$

Le passage d'une représentation d'un polynôme dans la base canonique à une représentation dans la base de Bernstein (conversion base canonique vers base de Bernstein) se fait par le calcul des coefficients b_i (eq. 2) à partir des coefficients c_i (eq. 1) selon la formule suivante :

$$b_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k \binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{\min(i,n)} \frac{c_k \binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \qquad (3)$$

- Implémenter la fonction binom(n,i) qui retourne le coefficient binomial $\binom{n}{i}$ selon la formule ci-dessus
- Implémenter la fonction bernstein(n,i,t) qui évalue le ième polynôme de Bernstein de degré n pour une valeur t donnée. Attention la valeur de t doit être dans l'intervalle $t \in [0,1]$ pour avoir une meilleure stabilité numérique.
- Implémenter la fonction tobernstein(ci) qui retourne les coefficients de Bernstein b_i (eq.2) correspondant aux coefficients canoniques c_i comme indiqué dans l'équation (3).
- Implémenter la fonction evalpol(ci,t) qui évalue un polynôme de degré n pour une valeur t donnée, ci est l'ensemble de coefficients du polynôme dans la base canonique
- Tester ces différentes fonctions.

Exercice 4: (*Algorithme de De Casteljeau*)
Implémenter et tester l'algorithme de De Casteljeau discuté en TD. Cet algorithme évalue un polynôme de degré n définit dans la base de Bernstein par une liste de coefficients bi pour un t donné.
Vérifier que le résultat donné par cet algorithme est le même que celui retourné par la fonction evalpol(ci,t) de l'exo 3, où ci est l'ensemble de coefficients dans la base canonique du même polynôme.