

Mathématiques pour l'Informatique : Compte Rendu

Valentin VERSTRACTE & Evan PETIT

L3 — Jean-Luc BARIL — November 21, 2021

Table des matières

1	Introduction	1
2	Transformée de Fourier discrète	2
2.1	Transformée de Fourier 1D directe et inverse	2
2.1.1	Formule	2
2.1.2	Complexité	2
2.1.3	Diagramme	3
2.2	Transformée de Fourier 2D discrète et séparabilité	3
3	Transformée de Fourier rapide	3
4	Annexe	3

1 Introduction

Ce rapport concerne le rendu du projet de Mathématiques pour l'informatique. Le projet a été intégralement réalisé en collaboration sur GitHub, en langage C++ pour l'implémentation des algorithmes, et en \LaTeX pour le compte-rendu.

Sommaire des fonctionnalités implémentées :

Transformée de Fourier discrète 1D & 2D Implémentation de la transformée discrète directe et inverse depuis la formule mathématique

Transformée de Fourier rapide 1D & 2D Implémentation de la transformée rapide avec l'algorithme de Cooley-Tukey

Séquence de tests Vérification des résultats obtenus

2 Transformée de Fourier discrète

2.1 Transformée de Fourier 1D directe et inverse

2.1.1 Formule

On rappelle la formule, où $g(x)$ est le signal original, et $\hat{g}(x)$ est son calcul par la TFD. La transformée de Fourier directe permet d'obtenir $\hat{g}(x)$ depuis $g(x)$.

$$\hat{g}(x) = \sum_{x=0}^{N-1} g(x) \exp\left(\frac{-2i\pi kx}{N}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k < N \quad (1)$$

L'inverse permet... L'inverse. On remarque l'introduction d'une multiplication d'un facteur -1 dans l'exponentielle

$$g(x) = \sum_{x=0}^{N-1} \hat{g}(x) \exp\left(\frac{2i\pi kx}{N}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k < N \quad (2)$$

L'algorithme équivalent peut être implémenté de façon brutale. On a besoin de deux boucles : Une pour calculer le produit à l'intérieur de la somme pour les valeurs de k allant de 0 à $N-1$, et une pour sommer tous les résultats obtenus pour x allant de 0 à $N-1$. Modulo un facteur -1 pour obtenir la transformée inverse.

Il suffit donc d'implémenter une fonction qui prend un tableau 1D et un booléen en entrée - Qui permet de choisir entre transformée directe et inverse.

Algorithm 1: Transformée discrète 1D directe et inverse

```
Data:  $g[N]$  : Vecteur 1D complexe  
inverse : Booléen  
Output:  $G[N]$  : Vecteur 1D complexe  
begin  
  for  $k \leftarrow 0..N-1$  do  
     $somme \leftarrow 0$   
    for  $x \leftarrow 0..N-1$  do  
       $z = (2 * i * \pi * k * x) / N$   
      if inverse then  
         $z \leftarrow -z$   
      end  
       $somme \leftarrow somme + g[x] * \exp(z)$   
    end  
     $G[k] \leftarrow somme$   
    if inverse then  
       $G[k] \leftarrow G[k] / N$   
    end  
  end  
end
```

2.1.2 Complexité

La complexité de l'algorithme se déduit assez facilement. Soit g le vecteur passé en entrée, de taille n , et k un indice quelconque de g .

- Pour calculer $g[k]$ il faut calculer le produit de $g[0]$ avec une exponentielle complexe, de même pour $g[1]$, $g[2]$, . . . , $g[n-1]$ et faire la somme de tous ces produits. Le tableau est de taille n , on fait donc n produits ainsi qu'une addition (négligeable). On peut dire qu'on effectue n opérations élémentaires.
- Il faut répéter cette étape autant de fois qu'il y a d'indices dans le tableau. C'est à dire n fois.
- Au total on compte (à quelques constantes près) $n*n$ opérations. La complexité finale est donc de l'ordre de $O(n * n) = O(n^2)$

2.1.3 Diagramme

On peut réaliser un simple diagramme pour représenter cet algorithme. Ici $g[x]$ est le signal d'entrée (représenté par un vecteur 1D), et $G[x]$ le vecteur en sortie. Ils sont de taille N .

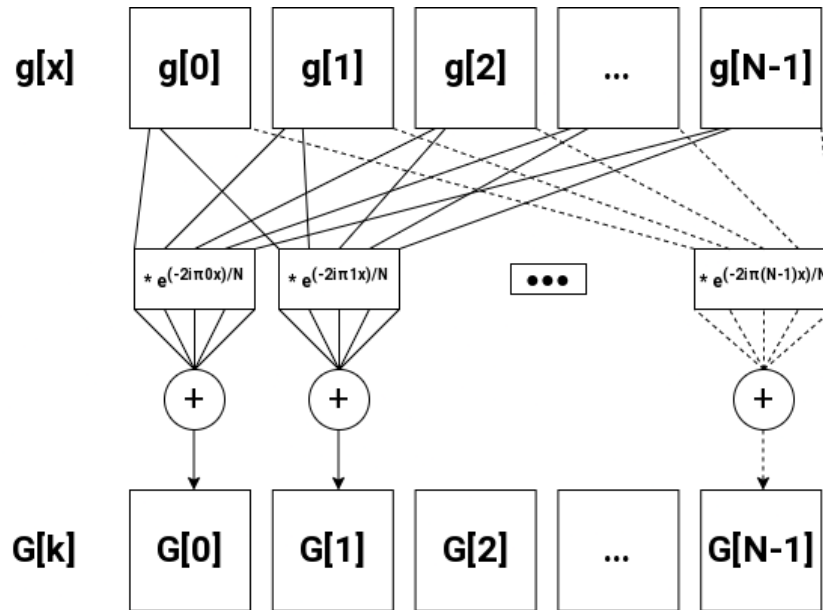


Figure 1: TFD 1D

2.2 Transformée de Fourier 2D discrète et séparabilité

La formule de la transformée de Fourier 2D discrète directe est la suivante :

$$\hat{g}(x, y) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} g(x, y) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{jx}{N} + \frac{ky}{M}\right)\right) \quad \text{pour } 0 \leq j < N \quad \text{et } 0 \leq k < M \quad (3)$$

On admettra que la matrice d'entrée - l'image, ici - est séparable, c'est à dire que $g[x, y] = X[x]Y[y]$.

3 Transformée de Fourier rapide

4 Annexe