CHƯƠNG I GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

1. Tính $I = lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

   G: Nhân cả tử và mẫu với liên hợp của tử, ta được
$$I = lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = lim_{x\to 0}\frac{2x}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$= lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. Tìm $I = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

   G: Nhân và chia với liên hợp, ta có
$$I = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right).\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{2}{1+1}$$
$$= 1.$$

3. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

   G: Đặt $t = \sqrt[6]{\cos x} \to \begin{cases} \sqrt{\cos x} = t^3 \\ \sqrt[3]{\cos x} = t^2 \\ \cos x = t^6 \to \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-t^{12}. \end{cases}$ Và khi $x \to 0$ thì $t \to 1$. Nên
$$I = \lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t^6)(1+t^6)}$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)}$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{-t^2}{(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)} = -\frac{1}{12}.$$

4. Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{cos\,5x-cos\,x}{x^2}$.

   G: Vì $cos\,a - cos\,b = -2\,sin\frac{a+b}{2}\,sin\frac{a-b}{2}$ nên
$$I = lim_{x\to 0}\frac{-2\,sin\,3x.sin\,2x}{x^2} = lim_{x\to 0} -\frac{sin\,3x}{3x}.\frac{sin\,2x}{2x}.12$$
$$= -1.1.12 = -12.$$

5. Tìm $I = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

G: Đặt $t=\frac{1}{x}\to 0$ khi $x\to\infty$. Vì $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ nên

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}.(1-\cos t)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

6. **Tìm $I=\lim_{x\to 2}(x-2)^3\sin\frac{1}{x-2}$.**

   G: Ta có, vì $\left|\sin\frac{1}{x-2}\right|\le 1$ nên

$$0\le\left|(x-2)^3\sin\frac{1}{x-2}\right|\le\left|(x-2)^3\right|\to 0$$

   khi $x\to 2$. Nên theo Nguyên lý kẹp, $I=\lim_{x\to 2}(x-2)^3\sin\frac{1}{x-2}=0$.

7. **Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$.**

   G: Ta có, vì $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ nên

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.\frac{1}{x}\right)=1.\infty=\infty.$$

8. **Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^x-e}$.**

   G: Đặt $t=x-1\to 0$ khi $x\to 1$ và $x=t+1$ nên

$$I=lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{e^{t+1}-e}=lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{e^t.e-e}=lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{e(e^t-1)}$$
$$=lim_{t\to 0}\frac{t+2}{e}.\frac{t}{e^t-1}=\frac{2}{e}.1=\frac{2}{e}.$$

9. **Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3^x-3}$.**

   G: Đặt $t=x-1\to 0$ khi $x\to 1$ và $x=t+1$ nên

$$I=lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^3-1}{3^{t+1}-3}=lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+3t}{3^t.3-3}$$
$$=lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+3t+3)}{3(3^t-1)}=lim_{t\to 0}\frac{t^2+3t+3}{3}.\frac{t}{3^t-1}$$
$$=\frac{3}{3}.\frac{1}{ln\,3}=\frac{1}{ln\,3}.$$

10. **Tìm $I=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$.**

    G: Đặt $t=x-2\to 0$ khi $x\to 2$. Và $x=t+2$ nên

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{2^{t+2}-(t+2)^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2^t.4-t^2-4t-4}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4.(2^t-1)-t^2-4t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(4.\frac{2^t-1}{t}-t-4\right)$$
$$=4.\ln 2-4.\qquad (vì\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln\ a)$$

11.Tìm $I=\lim_{x\to 1}\ (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

G: Đặt $t=1-x\to 0$ khi $x\to 1$ và $x=1-t$. Nên

$$I=\lim_{t\to 0}t.\tan\frac{\pi(1-t)}{2}=\lim_{t\to 0}t.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}t.\cot\frac{\pi t}{2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}=\cdots$$

12.Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{4x}$.

G: Ta có, với $\begin{cases}u=\frac{3x+1}{3x+2}\\ v=4x\end{cases}$ thì

$$I=lim_{x\to x_o}u^v=e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}4x.\left(\frac{3x+1}{3x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{3x+2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{3+\frac{2}{x}}}=e^{-\frac{4}{3}}.$$

13.Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5}\right)^{x^2}$.

G: Ta có, với $\begin{cases}u=\frac{2x^2+1}{2x^2-5}\\ v=x^2\end{cases}$ thì

$$I=lim_{x\to x_o}u^v=e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2}{2x^2-5}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{2-\frac{5}{x^2}}}=e^3.$$

14.Tìm $I=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

G: Ta có

$$I=e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}=\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}.\left(\cos\sqrt{x}-1\right)}=\cdots=e^{-\frac{1}{2}}.$$

15.So sánh các VCB $a=\sqrt[3]{1-2x}-1$; $b=sin\ x$ khi $x\to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$$\boldsymbol{lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{\sin x}}$$
$$\boldsymbol{=lim_{x\to 0}\frac{1-2x-1}{\sin x.\left(\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1\right)}}$$
$$\boldsymbol{=lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\sin x.\left(\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1\right)}}$$
$$\boldsymbol{=lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1}.\frac{x}{\sin x}=-\frac{2}{3}.1}$$
$$\boldsymbol{=-\frac{2}{3}.}$$

Vậy a, b là các VCB cùng bậc khi $x\to 0$.

16.So sánh các VCB $f=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x};\ g=x^2$ khi $x\to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$$\boldsymbol{lim_{x\to 0}\ \frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}}$$
$$\boldsymbol{=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{2}{0.(1+1)}=\infty.}$$

Nên f là VCB bậc thấp hơn g khi $x\to 0$.

17.Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+(\sin x)^3-x^6}{5x^2-(\tan x)^4}$.

G: Ta có khi $x\to 0$, vì $\sin x\sim x\to(\sin x)^3\sim x^3=o(x^2);\ x^6=o(x^2);\ (\tan x)^4\sim x^4=o(x^2)$ khi $x\to 0$. Theo Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao hơn trong tổng hiệu, có

$$\boldsymbol{I=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{5x^2}=\frac{3}{5}.}$$

18.Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}.x\right)}{1-x}$.

G: Đặt $t=1-x\to 0$ khi $x\to 1$. Và $x=1-t$ nên

$$\boldsymbol{I=lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}.(1-t)\right)}{t}=lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}}$$
$$\boldsymbol{=lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}.}$$

Vì khi $x\to 0$, thì $\sin x\sim x\to \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\sim\frac{\pi}{2}t$ nên

$$I = lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

19.Tính $I = lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3^x-3}$.

G: Đặt $t = x - 1 \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = t + 1$ nên

$$I = lim_{t\to 0} \frac{(t+1)^2 - 1}{3^{t+1} - 3} = lim_{t\to 0} \frac{t^2 + 2t}{3^t.3 - 3} = lim_{t\to 0} \frac{t(t+2)}{3(3^t - 1)}.$$

Vì khi $x \to 0$, thì $a^x - 1 \sim x\ ln\ a$ nên $3^t - 1 \sim t.ln\ 3$. Vậy

$$I = lim_{t\to 0} \frac{t(t+2)}{3.t.ln\ 3} = lim_{t\to 0} \frac{t+2}{3.ln\ 3} = \frac{2}{3\ ln\ 3}.$$

20.Tìm $I = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4+\cos x}}{x^2}$.

G: Ta có

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{5} - \sqrt{4+\cos x}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{4+\cos x}\right)}{x^2\left(\sqrt{5} + \sqrt{4+\cos x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2\left(\sqrt{5} + \sqrt{4+\cos x}\right)}.$$

Khi $x \to 0$, ta có $1 - cos\ x \sim \frac{1}{2}x^2$. Nên theo Quy tắc thay thế tương đương trong tích thương, có

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(\sqrt{5} + \sqrt{4+\cos x})} = lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{5} + \sqrt{4+\cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

21.Tìm $I = \lim_{x\to 1}\ (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

G: Đặt $t = 1 - x \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = 1 - t$. Nên

$$I = \lim_{t\to 0} t.\tan\frac{\pi(1-t)}{2} = \lim_{t\to 0} t.\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t.\cot\frac{\pi t}{2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}} = \cdots$$

22.So sánh các VCL $f = x + \frac{1}{x}$; $g = x - \frac{1}{x}$; $x \to 0$.

G: Xét

$$lim_{x\to 0} \frac{f}{g} = lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -1.$$

Nên f và g là các VCL cùng bậc khi $x \to 0$.

23.So sánh các VCB $a = \sqrt[3]{1-2x} - 1; b = sin\ x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét

$$lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{sin\ x}.$$

Vì khi $x \to 0$, thì $(1+x)^a - 1 \sim ax$ nên $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x$.

Hay $\sqrt[3]{1-2x} - 1 = \left(1+(-2x)\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}.(-2x); sin\ x \sim x$ nên thay thế tương đương, ta có

$$L = lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}.(-2x)}{x} = -\frac{2}{3}.$$

Vậy a, b là các VCB cùng bậc khi $x \to 0$.

24.So sánh các VCB $a = 1 - cos\ 3x; b = sin\ 2x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét

$$lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\ 3x}{sin\ 2x}.$$

Vì khi $x \to 0$, thì $1 - cos\ x \sim \frac{1}{2}x^2$ nên $1 - cos\ 3x \sim \frac{1}{2}.(3x)^2 = \frac{9x^2}{2}$; $sin\ 2x \sim 2x$. Áp dụng Thay thế tương đương được

$$L = lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{2x} = lim_{x\to 0} \frac{9x}{4} = 0.$$

Vậy a là VCB bậc cao hơn b khi $x \to 0$.

25.So sánh các VCB $f = 1 - \cos^2 x\ ; g = \ln(1+x)$ khi $x \to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x \to 0$. Xét

$$lim_{x\to 0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1+x)}.$$

Vì khi $x \to 0$, có $sin\ x \sim x; ln\ (1+x) \sim x$ nên

$$lim_{x\to 0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Nên f là VCB bậc cao hơn g khi $x \to 0$.

26.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 2 & : \quad x = 0 \\ \frac{sin^2 x}{x} & : \quad x \neq 0 \end{cases}; x_o = 0$.

G: Dùng thay thế tương đương $sin\ x \sim x \to sin^2 x \sim x^2$ khi $x \to 0$, ta có

$$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{x} = lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = lim_{x\to 0}\ (x) = 0.$$

Mà $f(0) = 2 \to lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

27.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x}-e^{-x}} & : \quad x \neq 0 \\ a & : \quad x = 0 \end{cases}$; $x_o = 0$.

G: Có

$$lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^{2x} - \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x}{e^{3x} - 1}.$$

Vì $khi\ x \to 0, th$**ì** $e^x - 1 \sim x \to e^{3x} - 1 \sim 3x$ **nên Thay thế tương đương,**

$$lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x}{3x} = lim_{x\to 0} \frac{2e^x}{3} = \frac{2}{3}.$$

Và $f(0) = a$.

- Nếu $a = \frac{2}{3} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ **HS liên tục tại** $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq \frac{2}{3} \to$ **HS gián đoạn tại** $x_o = 0$.

28.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 0 & : \quad x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x} & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Xét $x > 0 \to f = 0$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R$ **nên nó LT tại điểm** $x > 0$.

Xét $x < 0 \to f = \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = (-\infty, 1]\backslash\{0\}$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x < 0$.

Xét $x_o = 0$**. Ta có**

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Và $lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x} = lim_{x\to 0^-} -\frac{\sqrt{1-3x}-1}{x}$.

Vì khi $x \to 0$**, có** $(1+x)^a - 1 \sim ax$**. Nên** $\sqrt{1-3x} - 1 = \left(1 + (-3x)\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}.(-3x)$ **nên Thay thế tương đương,**

$$lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-} -\frac{\frac{1}{2}(-3x)}{x} = \frac{3}{2}.$$

Vậy $lim_{x\to 0^+} f(x) \neq lim_{x\to 0^-} f(x) \to$ **HS gián đoạn tại** $x = 0$.

29.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 3x + a & : \quad x \leq 1 \\ 5x - x^3 & : \quad x > 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = 5x - x^3$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R \to$ **Nó LT tại mọi** $x > 1$.

Xét $x < 1 \to f = 3x + a$ **là …**

Xét $x_o = 1$**. Có**

$$lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^+} (5x - x^3) = 4.$$

Và $lim_{x\to 1^-} f(x) = lim_{x\to 1^-} (3x + a) = 3 + a$.

- Vậy nếu $3 + a = 4 \to a = 1$ thì $lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \to$ HS LT tại $x = 1$.
- Nếu $a \neq 1 \to$ HS gián đoạn tại $x = 1$.

30.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} & : \quad x > 0 \\ a + x^2 & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f = \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x_o > 0$.
- Xét $x_o < 0 \to f = a + x^2$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại mọi điểm $x_o < 0$.
- Xét $x_o = 0$. Có khi $x \to 0$, thì $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$ nên

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}.2x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Và

$$lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a + x^2) = a.$$

Và $f(0) = a + 0^2 = a$.
- Nếu $a = \frac{2}{3} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ HS LT tại $x_o = 0$.
- Nếu $a \neq \frac{2}{3} \to$ HS gián đoạn tại $x_o = 0$.

31.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} x \ln x & : \quad x > 0 \\ a & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f = x \ln x$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R_+$ nên nó LT tại mọi điểm $x_o > 0$.
Xét $x_o < 0 \to f = a \ldots$
Xét $x_o = 0$. Có

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} x \ln x.$$

Đặt $t = \ln x \to -\infty$ khi $x \to 0^+$. Và $x = e^t$ nên

$$f(0^+) = \lim_{t\to -\infty} t.e^t.$$

Đặt $u = -t \to +\infty$ khi $t \to -\infty$ nên

$$f(0^+) = \lim_{u\to +\infty} -u.e^{-u} = \lim_{u\to +\infty} -\frac{u}{e^u}.$$

Vì khi $u \to +\infty$, ta có $e^u > u^2$, nên

$$0 \leq \left|-\frac{u}{e^u}\right| = \frac{u}{e^u} < \frac{u}{u^2} = \frac{1}{u} \to 0$$

khi $u \to +\infty$. Nên theo Nguyên lý kẹp, có

$$f(0^+) = 0.$$

Mà

$$f(0^-) = a.$$

- Nếu $a = 0 \rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \rightarrow$ **HS LT tại** $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq 0 \rightarrow \ldots$

CHƯƠNG II ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

32.Tính f', biết $f=\begin{cases} 0 & : \quad x=0 \\ \frac{sin^5x}{x^2} & : \quad x\neq 0. \end{cases}$

G: Xét $x\neq 0 \to f=\frac{sin^5x}{x^2} \to f'=\frac{5\ sin^4x.cos\,x.x^2-sin^5x.2x}{x^4}$.

Xét $x=0\to f(0)=0$. **Nên**

$$f'(0)=lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=lim_{x\to 0}\frac{\frac{sin^5 x}{x^2}-0}{x}=lim_{x\to 0}\frac{sin^5x}{x^3}.$$

Thay thế tương đương $sin\,x\sim x\to sin^5x\sim x^5$ **khi** $x\to 0$, **được**

$$f'(0)=lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^2}=lim_{x\to 0}x^3=1.$$

Vậy $f'(0)=1$.

33.Tính $y'(0)$, **biết** $y=x(x+1)(x+2)\dots(x+9)$.

G: Ta có $f(0)=0$ **nên**

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+9)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\dots(x+9)=1.2.3\dots 9=9!$$

34.Tính $y'(1)$, **biết** $y=(x-1)(x-2)\dots(x-9)$.

G: Ta có $f(1)=0$ **nên**

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\cdots$$

35.Tính đạo hàm của $f=\begin{cases} 2x-6 & : \quad x\geq 4 \\ x^2-3x-2 & : \quad x<4. \end{cases}$

G: Nếu $x>4\to f=2x-6\to f'=2$.

Nếu $x<4\to f=x^2-3x-2\to f'=2x-3$.

Xét $x=4\to f(4)=2$. **Nên**

$$f'_+(4)=lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=lim_{x\to 4}\frac{2x-6-2}{x-4}=2.$$

Và

$$f'_-(4)=lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-2-2}{x-4}$$
$$=lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-4}{x-4}=lim_{x\to 4^-}(x+1)=5\neq f'_+(4)$$
$$=2.$$

Nên ko tồn tại $f'(4)$.

36.Tính đạo hàm của $y = \left|(x-1)^2.(x+1)\right|$.

G: Có $y = (x-1)^2.|x+1| =$

$$= \begin{cases} (x-1)^2.(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1 & : \quad x \geq -1 \\ -(x-1)^2(x+1) = -x^3 + x^2 + x - 1 & : \quad x < -1. \end{cases}$$

- Nếu $x > -1 \to y = x^3 - x^2 - x + 1 \to y' = 3x^2 - 2x - 1$.

- Nếu $x < -1 \to y = -x^3 + x^2 + x - 1 \to y' = -3x^2 + 2x + 1$

- Nếu $x = -1 \to y(-1) = 0$. **Nên**

$$y'_{+}(-1) = lim_{x\to(-1)^+} \frac{y(x) - y(-1)}{x - (-1)} = lim_{x\to(-1)^+} \frac{(x-1)^2(x+1) - 0}{x+1}$$

$$= lim_{x\to(-1)^+} (x-1)^2 = 4.$$

Và

$$y'_{-}(-1) = lim_{x\to(-1)^-} \frac{y(x) - y(-1)}{x - (-1)} = lim_{x\to(-1)^-} \frac{-(x-1)^2(x+1) - 0}{x+1}$$

$$= lim_{x\to(-1)^-} -(x-1)^2 = -4 \neq y'_{+}(-1) = 4.$$

Nên $\nexists\, y'(-1)$.

37.Tính đạo hàm của $y = f = \begin{cases} \arctan x & : \quad x \geq 0 \\ x^2 + x & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \to f = arctan\, x \to f' = \frac{1}{1+x^2}$.

- Nếu $x < 0 \to f = x^2 + x \to f' = 2x + 1$.

- Nếu $x = 0 \to f(0) = arctan\, 0 = 0$. **Nên**

$$f'_{+}(0) = lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cdots$$

38.Tính $y'_x; y''_{xx}$ **biết** $\begin{cases} x = a\, cos^3 t \\ y = a\, sin^3 t. \end{cases}$

G: Có

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a.3sin^2 t.cos\, t}{a.3\, cos^2 t.(-sin\, t)} = -tan\, t.$$

Và

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{cos^2 t}}{a.3\, cos^2 t.(-sin\, t)} = \frac{1}{3a\, sin\, t\, cos^4 t}.$$

39.Tính $y'_x; y''_{xx}$ **của HS cho dưới dạng tham số** $\begin{cases} x = e^t cos\, t \\ y = e^t sin\, t. \end{cases}$

G: Có $(u.v)' = u'v + uv'$ **nên** $y = e^t sin\, t \to$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t.\sin t + e^t.\cos t}{e^t\cos t + e^t.(-\sin t)} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Và

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \cdots$$

40.Xét tính khả vi của $y = (x+2).|x-1|$

G: Có

$$y = \begin{cases} (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 & : \quad x \geq 1 \\ -(x+2)(x-1) = -x^2 - x + 2 & : \quad x < 1. \end{cases}$$

- Nếu $x > 1 \to y = x^2 + x - 2 \to y' = 2x + 1 \to$ HS khả vi tại $x > 1$.

- Nếu $x < 1 \to y' = -2x - 1 \to$ HS khả vi tại $x < 1$.

- Nếu $x = 1 \to y(1) = 0$. Xét

$$y'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(x-1) - 0}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}(x+2) = 3.$$

Và $y'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+2)(x-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -(x+2) = -3 \neq y'_+(1) = 3$.

Nên $\nexists f'(1)$. Vậy HS ko khả vi tại $x = 1$.

41.Xét tính khả vi của $f = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x & : \quad x > 0 \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \to f = \ln(1+x) - x \to f' = \frac{1}{1+x}.1 - 1 = \cdots$

Nếu $x < 0 \to f = x^2 \to f' = \cdots$

- Xét $x_o = 0$. Có $f(0) = 0^2 = 0$. Và

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cdots$$

42.Tính đạo hàm cấp n của HS $f = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$.

G: Viết

$$\frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = \frac{x(a+b) - 3a - b}{(x-1)(x-3)} \to x + 1$$
$$= x(a+b) - 3a - b.$$

Đồng nhất hệ số, được

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -3a - b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Nên

$$f=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}=-(x-1)^{-1}+2.(x-3)^{-1}.$$

Suy ra

$$f'=-(-1)(x-1)^{-2}+2.(-1)(x-3)^{-2}$$
$$\to f''=-(-1)(-2)(x-1)^{-3}+2.(-1)(-2)(x-3)^{-3}$$
$$\to f^{(3)}=-(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4}+2(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4}.$$

Nên

$$f^{(n)}=-(-1)(-2)(-3)\dots(-n).(x-1)^{-(n+1)}$$
$$+2.(-1)(-2)(-3)\dots(-n).(x-3)^{-(n+1)}$$
$$=-\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}+2.\frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}.$$

43.Tính đạo hàm cấp n của HS $f=\frac{1+x}{1-x}$.

G: Có

$$f=\frac{x+1}{-x+1}\to f'=\frac{2}{(-x+1)^2}=2.(x-1)^{-2}.$$

Suy ra

$$f''=2(-2).(x-1)^{-3}\to f^{(3)}=2(-2)(-3).(x-1)^{-4}\to f^{(4)}$$
$$=2.(-2)(-3)(-4).(x-1)^{-5}.$$

Vậy

$$f^{(n)}=2.(-2)(-3)\dots(-n).(x-1)^{-(n+1)}=\frac{2.(-1)^{n-1}.n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

44.Tính đạo hàm cấp n của HS $f=\frac{x-1}{x^2+5x+6}$.

G: Đặt

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}.$$

Suy ra

$$f=\frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x(a+b)+3a+2b}{x^2+5x+6}.$$

Nên $x-1=x(a+b)+3a+2b$, đồng nhất hệ số 2 vế, được

$$\begin{cases}a+b=1\\3a+2b=-1\end{cases}\to\begin{cases}a=-3\\b=4.\end{cases}$$

Vậy

$$f=-\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+3}=4.(x+3)^{-1}-3.(x+2)^{-1}.$$

Nên

$$f'=\cdots$$

45.Tính $I = lim_{x\to 0}\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

G: Nhân cả tử và mẫu với liên hợp của tử, ta được

$$I = lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = lim_{x\to 0}\frac{2x}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

46.Tìm $I = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có

$$I = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right).\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{2}{1+1}$$

$$= 1.$$

47.Tính $I = lim_{x\to 0}\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$\triangleq lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}.(1-x)^{-\frac{3}{2}}.(-1)}{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

48.Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{cos\ 5x-cos\ x}{x^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{-sin\ 5x.5+sin\ x}{2x} = lim_{x\to 0}\ \frac{sin\ x-5\ sin\ \ 5x}{2x}.$$

Áp dụng Lop tiếp, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{cos\ x-25.cos\ 5x}{2} = \frac{1-25}{2} = -12.$$

49.Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}} - (\cos x)^{\frac{1}{3}}}{\sin^2 x}$$
$$\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}.(-\sin x) - \frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}.(-\sin x)}{2\sin x\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}}{2\cos x} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{12}.$$

50.Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{7^x-2^x}{x^3}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{7^x\ ln\ 7 - 2^x ln\ 2}{3x^2} = \frac{ln\ 7 - ln\ 2}{0} = \infty.$$

51.Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{3^x-3}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 1}\frac{6x^5}{3^x\ ln\ 3} = \frac{6}{3\ ln3} = \frac{2}{ln\ 3}.$$

52.Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{e^{2x}-e^2}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 1}\frac{8x^7}{e^{2x}.2} = \frac{8}{2e^2} = \frac{4}{e^2}.$$

53.Tính $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\ (1+e^x)}{e^x}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}.e^x}{e^x} = lim_{x\to +}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

54.Tính $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\ (x^3+1)}{x^2}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^3+1}.3x^2}{2x} = lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2(x^3+1)} = lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3}{x^2}}{2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$
$$= \frac{0}{1} = 0.$$

55.Tính $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\ (x^2+1)}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq \cdots$$

56.Tìm $I = \lim_{x\to 0} \frac{4\arctan(1+x)-\pi}{x}$.

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to 0} \frac{4.\frac{1}{1+(1+x)^2}.1-0}{1} = 2.$$

57.Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-\cos x}{x^2}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2x^2}}.4x+\sin x}{2x} = lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}+\sin x}{2x}$$

$$= lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2}.$$

58.Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}.2x}{3x^2} = lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}.2}{3x} = \frac{2}{0} = \infty.$$

59.Tìm $I = lim_{x\to 0^+} x.\ln \sin x \ = lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \triangleq lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}.\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to 0} \frac{-x^2.\cos x}{\sin x}$$

$$= lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x}.x.\cos x\right) = -1.0 = 0.$$

60.Tìm $I = lim_{x\to 0^+} \sin x.\ln x$.

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \triangleq lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}.\cos x} = lim_{x\to 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x.\cos x}\right)$$

$$= lim_{x\to 0} \ -\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{\cos x} = -1.0 = 0.$$

61.Tìm $I = \lim_{x\to +\infty} x.\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)$

G: Ta có

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x+0}{x+1}}{\frac{1}{x}}.$$

Áp dụng Lopital, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+x^2}.x^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

62.Tìm $I = lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\, arctan\, x}{\pi}\right)^x$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có

$$ln\, I = lim_{x\to+\infty}\, x.\, ln\, \frac{2\, arctan\, x}{\pi}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{ln\, 2 + ln\, arctan\, x - ln\, \pi}{\frac{1}{x}}.$$

Áp dụng Lopital, ta có

$$ln\, I \triangleq lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{arctan\, x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{arctan\, x\,.(x^2+1)}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \to I = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

63.Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x.tanx}$.

G: Vì khi $x \to 0$, ta có $tan\, x \sim x$ nên thay thế tương đương được

$$I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x^2}.$$

Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0} \frac{-sin\, 4x.4 + sin\, x}{2x}.$$

Áp dụng Lop tiếp, ta được

$$I = lim_{x\to 0} \frac{-cos\, 4x.16 + cos\, x}{2} = -\frac{15}{2}.$$

64.Tìm $I = lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sin\, x}\right)$.

G: Ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x.sin\,x}.$$

Vì khi $x \to 0$, ta có $sin\,x \sim x$ nên theo quy tắc thay thế VCB tương đương trong tích thương, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x.x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x^2}.$$

Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{cos\,x - 1}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{-sin\,x}{2} = -\frac{0}{2} = 0.$$

65.Tìm $I = lim_{x\to 0^+} sin\,x.ln\,x$.

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+}\frac{ln\,x}{\frac{1}{sin\,x}} \triangleq lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sin^2x}.cos\,x} = lim_{x\to 0}\left(-\frac{sin^2x}{x.cos\,x}\right).$$

Vì khi $x \to 0$, ta có $sin\,x \sim x \to sin^2x \sim x^2$. Áp dụng thay thế tương đương trong tích thương có

$$I = lim_{x\to 0} - \frac{x^2}{x.cos\,x} = lim_{x\to 0} - \frac{x}{cos\,x} = -\frac{0}{1} = 0.$$

GIẢI TÍCH KINH TẾ
CHƯƠNG I GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

1. **Tính** $I = lim_{x\to 0}\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

   G: Nhân cả tử và mẫu với liên hợp của tử, ta được

$$I = lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = lim_{x\to 0}\frac{2x}{x.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$= lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. **Tìm** $I = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

   G: Nhân và chia với liên hợp, ta có

$$I = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right).\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{2}{1+1}$$
$$= 1.$$

3. **Tính** $I = lim_{x\to 0}\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{x}$$
$$\triangleq lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}.(1-x)^{-\frac{3}{2}}.(-1)}{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

4. **Tìm** $I = lim_{x\to 0}\frac{cos\ 5x - cos\ x}{x^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{-sin\ 5x.5+sin\ x}{2x} = lim_{x\to 0}\ \frac{sin\ x - 5\ sin\ \ 5x}{2x}.$$

   Áp dụng Lop tiếp, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{cos\ x - 25.cos\ 5x}{2} = \frac{1-25}{2} = -12.$$

5. **Tìm** $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}}-(\cos x)^{\frac{1}{3}}}{\sin^2 x}$$

$$\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}.(-\sin x)-\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}.(-\sin x)}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}}{2\cos x}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{12}.$$

6. Tìm $I=lim_{x\to 0}\frac{7^x-2^x}{x^3}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq lim_{x\to 0}\frac{7^x\ln 7-2^x\ln 2}{3x^2}=\frac{\ln 7-\ln 2}{0}=\infty.$$

7. Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{3^x-3}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq lim_{x\to 1}\frac{6x^5}{3^x\ln 3}=\frac{6}{3\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}.$$

8. Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{e^{2x}-e^2}$.

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq lim_{x\to 1}\frac{8x^7}{e^{2x}.2}=\frac{8}{2e^2}=\frac{4}{e^2}.$$

9. Tính $I=lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

   G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}.e^x}{e^x}=lim_{x\to +}\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

10. Tính $I=lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{x^2}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

    G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^3+1}.3x^2}{2x}=lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2(x^3+1)}=lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3}{x^2}}{2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{0}{1}=0.$$

11. Tính $I=lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$.

    G: Áp dụng Lop, ta có

$$I\triangleq\cdots$$

12.Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{4\arctan(1+x)-\pi}{x}$.

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{4.\dfrac{1}{1+(1+x)^2}.1-0}{1} = 2.$$

13.Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-\cos x}{x^2}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+2x^2}}.4x+\sin x}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}+\sin x}{2x}$$

$$= lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{2}.\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2}.$$

14.Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}.2x}{3x^2} = lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}.2}{3x} = \frac{2}{0} = \infty.$$

15.Tìm $I = lim_{x\to 0^+} x.\ln\sin x \; = lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\dfrac{1}{x}} \triangleq lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sin x}.\cos x}{-\dfrac{1}{x^2}} = lim_{x\to 0}\frac{-x^2.\cos x}{\sin x}$$

$$= lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\sin x}.x.\cos x\right) = -1.0 = 0.$$

16.Tìm $I = lim_{x\to 0^+}\sin x.\ln x$.

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} \triangleq lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}.\cos x} = lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x.\cos x}\right)$$

$$= lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{\cos x} = -1.0 = 0.$$

17.Tìm $I = \lim_{x\to+\infty} x.\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$

G: Ta có

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x+0}{x+1}}{\frac{1}{x}}.$$

Áp dụng Lopital, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} \cdot x^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

18.Tìm $I = lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\, arctan\, x}{\pi}\right)^x$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có

$$ln\, I = lim_{x\to+\infty}\, x.\, ln\, \frac{2\, arctan\, x}{\pi}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{ln\, 2 + ln\, arctan\, x - ln\, \pi}{\frac{1}{x}}.$$

Áp dụng Lopital, ta có

$$ln\, I \triangleq lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{arctan\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{arctan\, x\, .(x^2+1)}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \to I = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

19.Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x.tanx}$.

G: Vì khi $x \to 0$, ta có $tan\, x \sim x$ nên thay thế tương đương được

$$I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x^2}.$$

Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq lim_{x\to 0} \frac{-sin\, 4x.\, 4 + sin\, x}{2x}.$$

Áp dụng Lop tiếp, ta được

$$I = lim_{x\to 0} \frac{-cos\, 4x.\, 16 + cos\, x}{2} = -\frac{15}{2}.$$

20.Tìm $I = lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sin\, x}\right)$.

G: Ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x.sin\,x}.$$

Vì khi $x \to 0$, ta có $sin\,x \sim x$ nên theo quy tắc thay thế VCB tương đương trong tích thương, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x.x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x - x}{x^2}.$$

Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$$I = lim_{x\to 0}\frac{cos\,x - 1}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{-sin\,x}{2} = -\frac{0}{2} = 0.$$

21.Tìm $I = lim_{x\to 0^+} sin\,x.ln\,x$.

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to 0^+}\frac{ln\,x}{\frac{1}{sin\,x}} \triangleq lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sin^2x}.cos\,x} = lim_{x\to 0}\left(-\frac{sin^2x}{x.cos\,x}\right).$$

Vì khi $x \to 0$, ta có $sin\,x \sim x \to sin^2x \sim x^2$. Áp dụng thay thế tương đương trong tích thương có

$$I = lim_{x\to 0} - \frac{x^2}{x.cos\,x} = lim_{x\to 0} - \frac{x}{cos\,x} = -\frac{0}{1} = 0.$$

22.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 0 & : \quad x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} & : \quad x < 0 \end{cases}$; $x_o = 0$.

G: Xét $x > 0 \to f = 0$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại $x > 0$.

Xét $x < 0 \to f = \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = (-\infty, 1]\backslash\{0\}$

Xét $x_o = 0$. Có

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Và Theo quy tắc Lop, có

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} - \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x}$$

$$\triangleq \lim_{x\to 0^+} - \frac{\frac{1}{3}.(1+x)^{-\frac{2}{3}}.1}{1} = -\frac{1}{3}.$$

- Nên nếu $a = -\frac{1}{3} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ HS LT tại $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq -\frac{1}{3} \to$ HS gián đoạn tại $x_o = 0$.

23.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 2 & : \quad x = 0 \\ \frac{sin^4x}{x} & : \quad x \neq 0 \end{cases}$.

G: Xét $x \neq 0 \rightarrow f = \frac{sin^4 x}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại mọi điểm $x \neq 0$.
Xét $x_o = 0$. Dùng thay thế tương đương $sin\, x \sim x \rightarrow sin^4 x \sim x^4$ khi $x \rightarrow 0$, ta có

$$lim_{x\to 0}\, f(x) = lim_{x\to 0} \frac{sin^4 x}{x} = lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x} = lim_{x\to 0}\, (x^3) = 0.$$

Mà $f(0) = 2 \rightarrow lim_{x\to 0}\, f(x) \neq f(0) \rightarrow$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

24.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} & : \quad x > 0 \\ a + x^2 & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \rightarrow f = \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x_o > 0$.
- Xét $x_o < 0 \rightarrow f = a + x^2$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại mọi điểm $x_o < 0$.
- Xét $x_o = 0$. Theo quy tắc Lop, có

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{x} \triangleq \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}.(1+2x)^{-\frac{2}{3}}.2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Và

$$\lim_{x\to 0^-} (a + x^2) = a.$$

Và $f(0) = a + 0 = a$.
- Nên nếu $a = \frac{2}{3} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \rightarrow$ HS LT tại $x_o = 0$.
- Nếu $a \neq \frac{2}{3} \rightarrow$ HS gián đoạn tại $x_o = 0$.

25.Xét sự liên tục của $f = \begin{cases} 0 & : \quad x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Với $x > 0 \rightarrow f = 0$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại mọi điểm $x > 0$.
- Với $x < 0 \rightarrow f = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = (-\infty, 1]\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi $x < 0$.
- Xét $x_o = 0$. Có

$$lim_{x\to 0^+} f = lim_{x\to 0^+}\, 0 = 0.$$

Và

$$lim_{x\to 0^-}\, f = lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}.$$

Áp dụng Lop, ta có

$$lim_{x\to 0^-} f = lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(-1)}{1} = lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Và $f(0) = 0$.

Nên $lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

26.Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 3x + a & : \quad x \leq 1 \\ 5x - x^3 & : \quad x > 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = 5x - x^3$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R \to$ Nó LT tại mọi $x > 1$.

Xét $x < 1 \to f = 23 + a$ là ...

Xét $x_o = 1$. Có

$$lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^+} (5x - x^3) = 4.$$

Và $lim_{x\to 1^-} f(x) = lim_{x\to 1^-} (3x + a) = 3 + a$.

- Vậy nếu $3 + a = 4 \to a = 1$ thì $lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \to$ HS LT tại $x = 1$.

- Nếu $a \neq 1 \to$ HS gián đoạn tại $x = 1$.

27.Xét tính liên tục của HS $f = \begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} & : \quad x > 0 \\ a & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f = \cdots$

- Xét $x_o < 0$

- Xét $x_o = 0$. Có theo quy tắc Lop,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} \triangleq lim_{x\to 0^+} \frac{sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = lim_{x\to 0^+} \frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \cdots$$

CHƯƠNG II TÍCH PHÂN

28.Tính $I=\int\frac{x+x^3}{6+x^2-x^4}dx$.

G: Ta có

$$I=\int\frac{(1+x^2).xdx}{6+x^2-(x^2)^2}.$$

Đặt $t=x^2\to dt=2xdx\to xdx=\frac{dt}{2}$. Nên

$$I=\frac{1}{2}.\int\frac{1+t}{6+t-t^2}dt=-\frac{1}{2}.\int\frac{t+1}{t^2-t-6}dt.$$

Đặt

$$\frac{t+1}{t^2-t-6}=\frac{a}{t-3}+\frac{b}{t+2}.$$

Suy ra đồng nhất hệ số,

$$\begin{cases}a=\frac{4}{5}\\ b=\frac{1}{5}\end{cases}\to\frac{t+1}{t^2-t-6}=\frac{\frac{4}{5}}{t-3}+\frac{\frac{1}{5}}{t+2}.$$

Nên tích phân 2 vế được

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{4}{5}}{t-3}+\frac{\frac{1}{5}}{t+2}\right)dt=-\frac{1}{2}.\left(\frac{4}{5}ln|t-3|+\frac{1}{5}ln\,|t+2|\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}.\left(\frac{4}{5}ln\left|x^2-3\right|+\frac{1}{5}ln\,\left|x^2+2\right|\right)+C.$$

29.Tìm $I=\int\frac{x^3}{x^2+x-2}dx$.

G: Chia tử cho mẫu, ta được

$$I=\int\left(x-1+\frac{3x-2}{x^2+x-2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3x-2}{x^2+x-2}dx.$$

Đặt

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}.$$

Suy ra đồng nhất hệ số được

$$\begin{cases}a=\frac{8}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}\to\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{\frac{8}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}.$$

Vậy

$$I=\frac{x^2}{2}-x+\int\left(\frac{\frac{8}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+\frac{8}{3}ln\,|x+2|+\frac{1}{3}ln\,|x-1|+C.$$

30.Tính $I=\int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

G: Viết

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$

$$=\frac{a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Đồng nhất hệ số, suy ra

$$\begin{cases} a=\frac{2}{9} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=-\frac{2}{9} \end{cases}\rightarrow\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{2}{9}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}.\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{9}.\frac{1}{x+2}.$$

Nên

$$I=\cdots$$

31.Tính $I=\int\frac{dx}{4x^2+4x+4}$.

G: Ta có

$$I=\int\frac{dx}{4x^2+4x+1+3}=\int\frac{dx}{3+(2x+1)^2}.$$

Đặt $t=2x+1\rightarrow dt=2dx\rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Nên

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{3}\right)^2+t^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

32.Tính $I=\int\frac{dx}{x^4+4x^2+3}$.

G: Có

$$I=\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx=\int\frac{(x^2+3)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}.\frac{1}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}.\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}.\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(arctan\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

33.Tính $I=\int\frac{(x+1)dx}{x^2-2x+3}$.

G: Ta có vì $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctan\frac{x}{a}+C$ nên

$$I=\int\frac{(x+1)dx}{x^2-2x+1+2}=\int\frac{(x+1)dx}{2+(x-1)^2}.$$

Đặt $t=x-1\rightarrow x=t+1\rightarrow dx=dt$. Nên

$$I=\int\frac{t+1+1}{2+t^2}dt=\int\frac{t+2}{2+t^2}dt=\int\frac{tdt}{2+t^2}+\int\frac{2dt}{2+t^2}$$
$$=\frac{1}{2}.\int\frac{2t}{t^2+2}dt+2.\int\frac{dt}{\left(\sqrt{2}\right)^2+t^2}$$
$$=\frac{1}{2}.ln\left|t^2+2\right|+2.\frac{1}{\sqrt{2}}\ arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}.ln\left|(x-1)^2+2\right|+\sqrt{2}.\ arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

34.Tính $I=\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$.

G: Có

$$I=ln\ \left|x+\sqrt{x^2-3}\right|\ |_3^4=ln\left|4+\sqrt{13}\right|-ln\left|3+\sqrt{6}\right|.$$

35.Tính $I=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

G: Có

$$I=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{2}\rightarrow x=t-\frac{1}{2}\rightarrow dx=dt$. Nên

$$I=\int\frac{(t-\frac{1}{2}+1)dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}=\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}=\int(\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}})\,dt$$

$$=\int\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt+\frac{1}{2}.\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}.\left(t^2+\frac{3}{4}\right)'dt+\frac{1}{2}.ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|$$

$$=\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}.ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|+C=\cdots$$

36.Tính $I=\int\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-3}}$.

G: Viết

$$I=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-3}}.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-3}\rightarrow t^2=x^2-3\rightarrow x^2=t^2+3\rightarrow 2xdx=2tdt\rightarrow$ $xdx=tdt$. **Nên**

$$I=\int\frac{tdt}{(t^2+3)t}=\cdots$$

37.Tính $I=\int\sqrt{3-x^2}dx$.

G: Có

$$I=\int\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-x^2}\,dx.$$

Đặt $x=\sqrt{3}sin\,t\rightarrow dx=\sqrt{3}\,cos\,t\,dt$. **Nên**

$$I=\int\sqrt{3-3sin^2t}.\sqrt{3}\,cos\,t\,dt=\int 3.cos^2x\,dx=3.\int\frac{1+cos\,2t}{2}dt$$

$$=\frac{3}{2}.\left(t+\frac{sin\,2t}{2}\right)+C=\cdots$$

38.Tính $I=\int sin^2x\,cos^7xdx$.

G: Có

$$I=\int sin^2x.cos^6x.cos\,xdx=\int sin^2x.(1-sin^2x)^3.cos\,xdx.$$

Đặt $t = sin\, x \to dt = cos\, xdx$. Nên

$$I = \int t^2.(1-t^2)^3 dt = \int t^2(1-3t^2+3t^4-t^6)dt$$

$$= \int (t^2-3t^4+3t^6-t^8)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \cdots$$

39.Tính $I = \int \frac{dx}{e^{2x}-e^x-2}$.

G: Viết

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^{2x}-e^x-2)}.$$

Đặt $t = e^x \to dt = e^x dx$.

Nên

$$I = \int \frac{dt}{t(t^2-t-2)} = \cdots$$

40.Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1).sin\, 3xdx$.

G: Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = sin\, 3xdx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2 \\ v = \int sin\, 3xdx = -\frac{cos\, 3x}{3} \end{cases}$.

Nên TPTP

$$I = uv - \int vdu = -(2x+1).\frac{cos\, 3x}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\, 3x}{3} dx$$

$$= -(2x+1).\frac{cos\, 3x}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\, 3xdx$$

$$= -(2x+1).\frac{cos\, 3x}{3} + \frac{2}{3}.\frac{sin\, 3x}{3}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-(2x+1).\frac{cos\, 3x}{3} + \frac{2}{9}.sin\, 3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cdots$$

41.Tính $I = \int_0^2 e^{-\sqrt{x}} dx$.

G: Đặt $t = \sqrt{x} \to t^2 = x \to x = t^2 \to dx = 2tdt$. Nên

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-t}.2tdt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t.e^{-t}dt.$$

TPTP. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = e^{-t}dt \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2 \\ v = \int e^{-t}dt = -e^{-t} \end{cases}$. Nên

$$I = uv - \int vdu = -2te^{-t} + \int_0^{\sqrt{2}} 2e^{-t}dt = -2te^{-t} + 2\int_0^{\sqrt{2}} e^{-t}dt$$
$$= -2te^{-t} + 2.(-e^{-t}) = -(2t+2)e^{-t} \ |_0^{\sqrt{2}} = \cdots$$

42.Tính $I = \int x\, ln\,(3x+1)dx$.

G: Đặt $\begin{cases} u = ln\,(3x+1) \\ dv = xdx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = \frac{3}{3x+1} \\ dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Nên
$$I = uv - \int vdu = \cdots$$

43.Tính $I = \int_0^{ln\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

G: Đặt $t = \sqrt{1+e^x} \rightarrow t^2 = 1 + e^x \rightarrow e^x = t^2 - 1 \rightarrow e^x dx = 2tdt \rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1}$.

Nên
$$I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}.\frac{2tdt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= (ln\,|t-1| - ln\,|t+1|)|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = \cdots$$

44.Tính $I = \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

G: Có
$$I = \int_0^1 (1-x^2).\sqrt{1-x^2}dx.$$

Đặt $x = 1.sin\,t = sin\,t \rightarrow dx = cos\,t\,dt$. **Và** $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sin^2t} = cos\,t$. **Nên**
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2t.cos\,t.cos\,tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2t)^2dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\,cos\,2t+cos^2 2t}{4}dt = \cdots$$

45.Tính $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^3.\sqrt{x^2-2}}$.

G: Viết
$$I = \int_2^3 \frac{xdx}{x^4.\sqrt{x^2-2}}.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2-2} \rightarrow t^2 = x^2 - 2 \rightarrow x^2 = t^2 + 2 \rightarrow 2xdx = 2tdt \rightarrow \cdots$

Chào cả nhà UTC. Với mong muốn giúp các bạn sv k60 khỏi bỡ ngỡ và e sợ môn GT1, mình gửi các bạn lời giải mẫu một số ví dụ chương 1 và 2 (cả khối kỹ thuật và k tế). Mong các bạn tân sv k60 sẽ có hứng thú với môn GT này.