CÂY NHỊ PHÂN TÌM KIẾM (BINARY SEARCH TREE)

DATA STRUCTURES AND ALGORITHMS

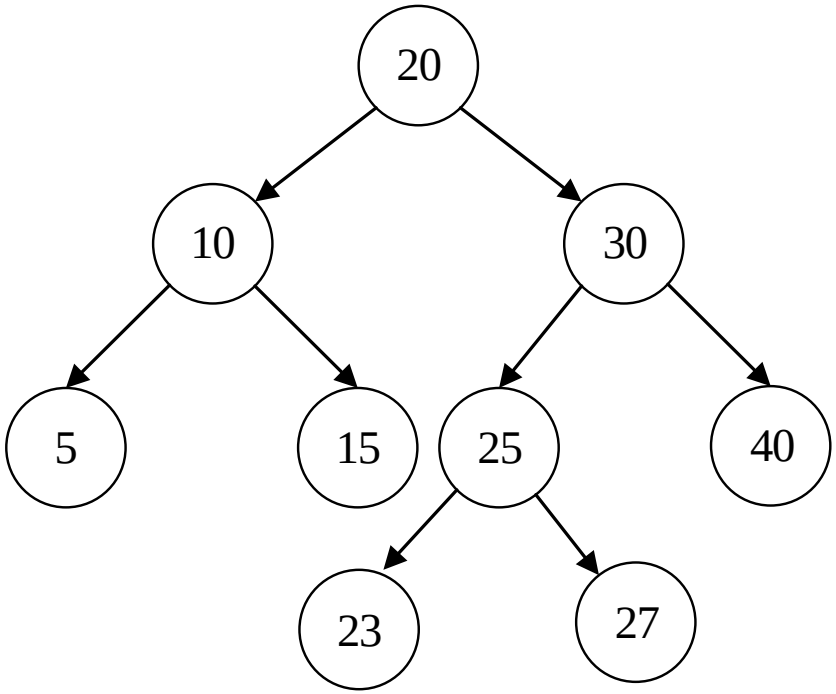
ThS Nguyễn Thị Ngọc Diễm
diemntn@uit.edu.vn

Nội dung

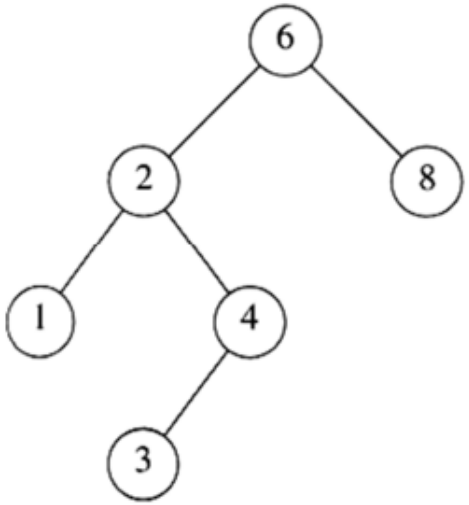
- Định nghĩa
- Tổ chức lưu trữ
- Các thao tác
- Ứng dụng
- Bài tập

Định nghĩa cây nhị phân tìm kiếm

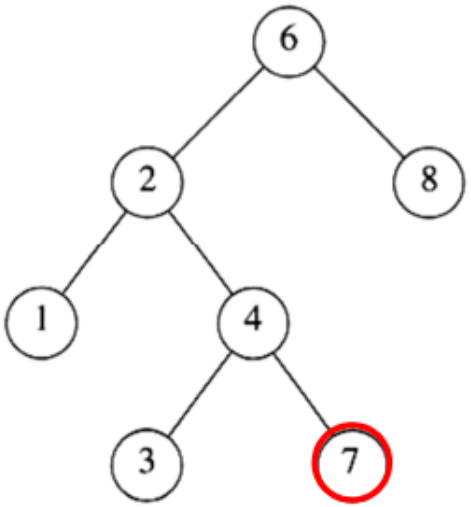
- Cây nhị phân
- Bảo đảm nguyên tắc bố trí khoá tại mỗi node:
  - Các node trong cây trái nhỏ hơn node hiện hành
  - Các node trong cây phải lớn hơn node hiện hành
- Ví dụ:



Binary Search Trees



A binary search tree



Not a binary search tree

Ưu điểm của cây nhị phân tìm kiếm

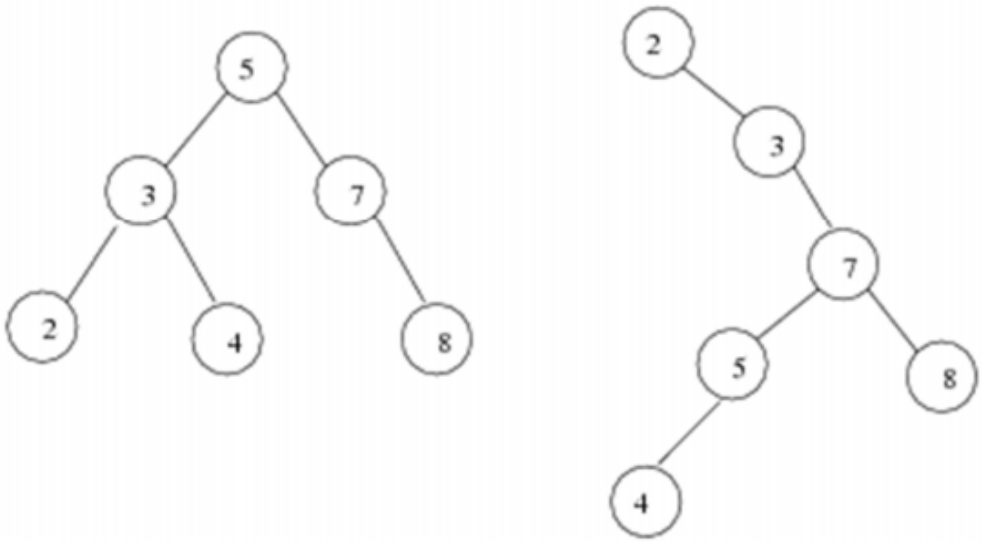
- Nhờ trật tự bố trí khóa trên cây :
  - Định hướng được khi tìm kiếm

Cây gồm N phần tử :

- Trường hợp tốt nhất h = $\log_2 N$
- Trường hợp xấu nhất h = n-1
- Tình huống xảy ra trường hợp xấu nhất ?

Binary Search Trees

Two binary search trees representing the same set:



- Average depth of a node is O(log N); maximum depth of a node is O(N)

Cấu trúc dữ liệu của cây nhị phân tìm kiếm

- *Cấu trúc dữ liệu của 1 node*

```
struct TNODE {
    int key;
    TNODE* pLeft;
    TNODE* pRight;
};
```

- *Cấu trúc dữ liệu của cây*

```
typedef TNODE* TREE;
```

Các thao tác trên cây nhị phân tìm kiếm

- Tạo 1 cây rỗng
- Tạo 1 node có trường key bằng x
- Thêm 1 node vào cây nhị phân tìm kiếm
- In danh sách node trong cây
- Tìm 1 node có khoá bằng x trên cây
- Tìm Min, Max
- Xoá 1 node có key bằng x trên cây

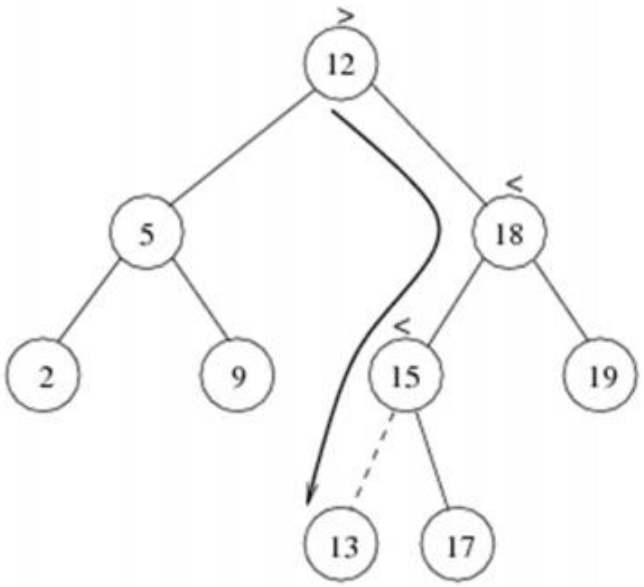
Tạo cây rỗng

- Cây rỗng -> địa chỉ node gốc bằng NULL

```
void CreateTree(TREE &T) {
    T = NULL;
}
```

insert

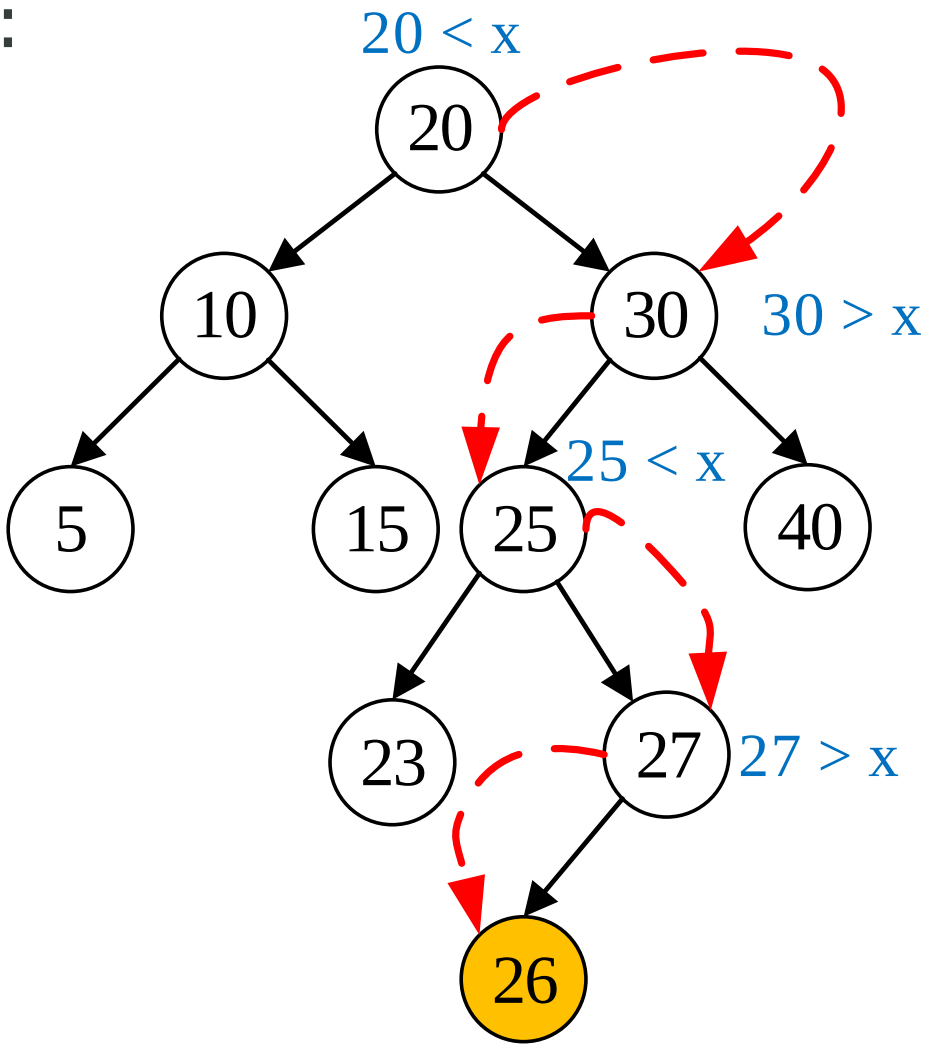
- Proceed down the tree as you would with a find
- If X is found, do nothing (or update something)
- Otherwise, insert X at the last spot on the path traversed



- Time complexity = O(height of the tree)

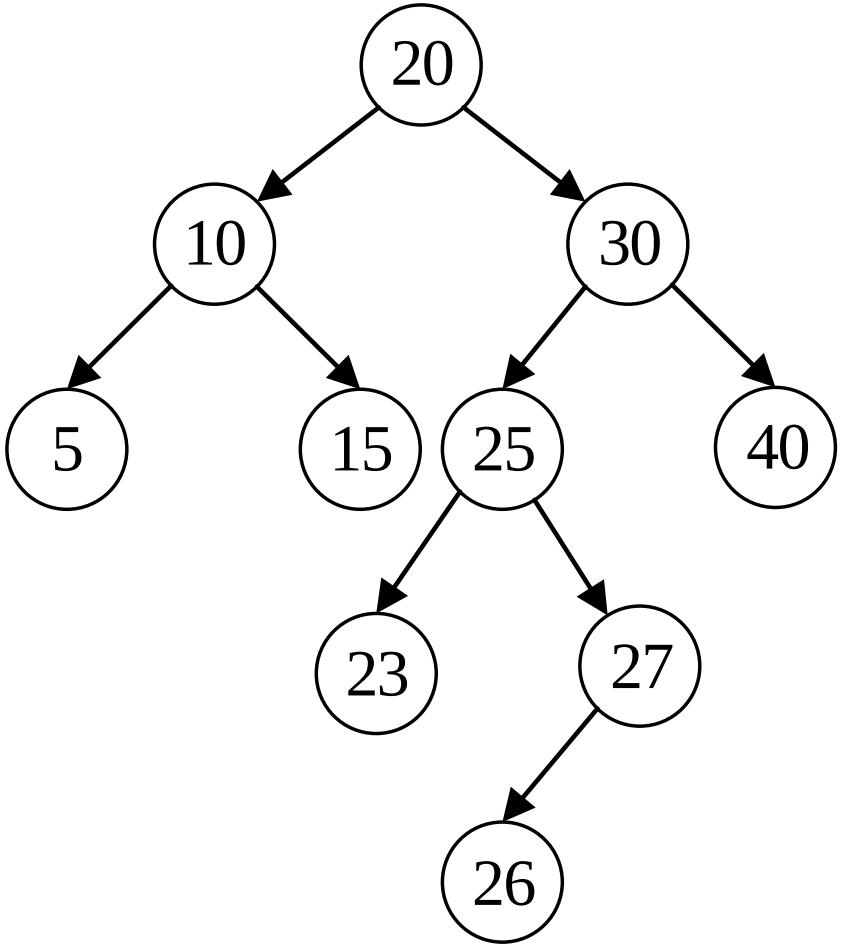
Thêm giá trị x vào cây: Minh họa

- Thêm x=26 vào cây sau:



Minh hoạ thành lập 1 cây từ dãy số

- Tạo cây từ dãy sau: 20, 10, 5, 30, 15, 25, 40, 27, 23, 26



Tạo 1 node có key bằng x

```
TNODE* CreateTNode(int x) {
    TNODE *p;
    p = new TNODE; //cấp phát vùng nhớ động
    if (p == NULL)
          exit(1); // thoát
    p->key = x; //gán trường dữ liệu của node = x
    p->pLeft = NULL;
    p->pRight = NULL;
    return p;
}
```

Thêm một node x vào cây

- **Rằng buộc**: Sau khi thêm cây đảm bảo là cây nhị phân tìm kiếm.

```
int Insert(TREE &T, int x) {
   if (T) {
      if (T->key == x) return 0;
      if (T->key > x)
            return Insert(T->pLeft, x);
      return Insert(T->pRight, x);
   }
   T = CreateTNode(x);
   return 1;
}
```

Thêm một node x vào cây (Không đệ quy)

```
int Insert(TREE &Root, int x) {
    if (Root==NULL) Root = CreateTNode(x);
    TREE T=Root;
    while (T) {
        if (T->key == x) return 0;
        if (T->key > x) {
            if (T->pLeft == NULL)
            T->pLeft = CreateTNode(x);
            else T = T->pLeft;
        }
        else {
            if (T->pRight == NULL)
            T->pRight = CreateTNode(x);
            else T = T->pRight;
        }
    }
    return 1;
}
```

Duyệt cây Nhị phân

- Depth First Traversals: có 3 cách cơ bản để duyệt cây
  - Duyệt trước (preorder): NLR
  - Duyệt giữa (inorder): LNR
  - Duyệt sau (postorder): LRN
- Breadth First or Level Order Traversal

Time Complexity: O(n)

Duyệt giữa - inorder (LNR)

```
void inorder(TREE Root) {
     if (Root != NULL) {
               inorder(Root->pLeft);
               cout << T->key << "\t";
               inorder(Root->pRight);
     }
}
void preorder(TREE Root) {
     if (Root != NULL) {
             if(Root->pL!=N && Root->pR!=N) cout << Root->key << "\t";
             preorder(Root->pLeft);
             preorder(Root->pRight);
     }
}
void postorder(TREE Root) {
     if (Root != NULL) {
          postorder(Root->pLeft);
             postorder(Root->pRight);
             cout << T->key << "\t";
     }
}
```

Tìm node có khoá bằng x (không dùng đệ quy)

```
TNODE* searchNode(TREE Root, int x) {
   TNODE *p = Root;
   while (p != NULL) {
      if (x == p->key) return p;
      if (x < p->key)p = p->pLeft;
      elsep = p->pRight;
   }
   return NULL;
}
```

Time complexity

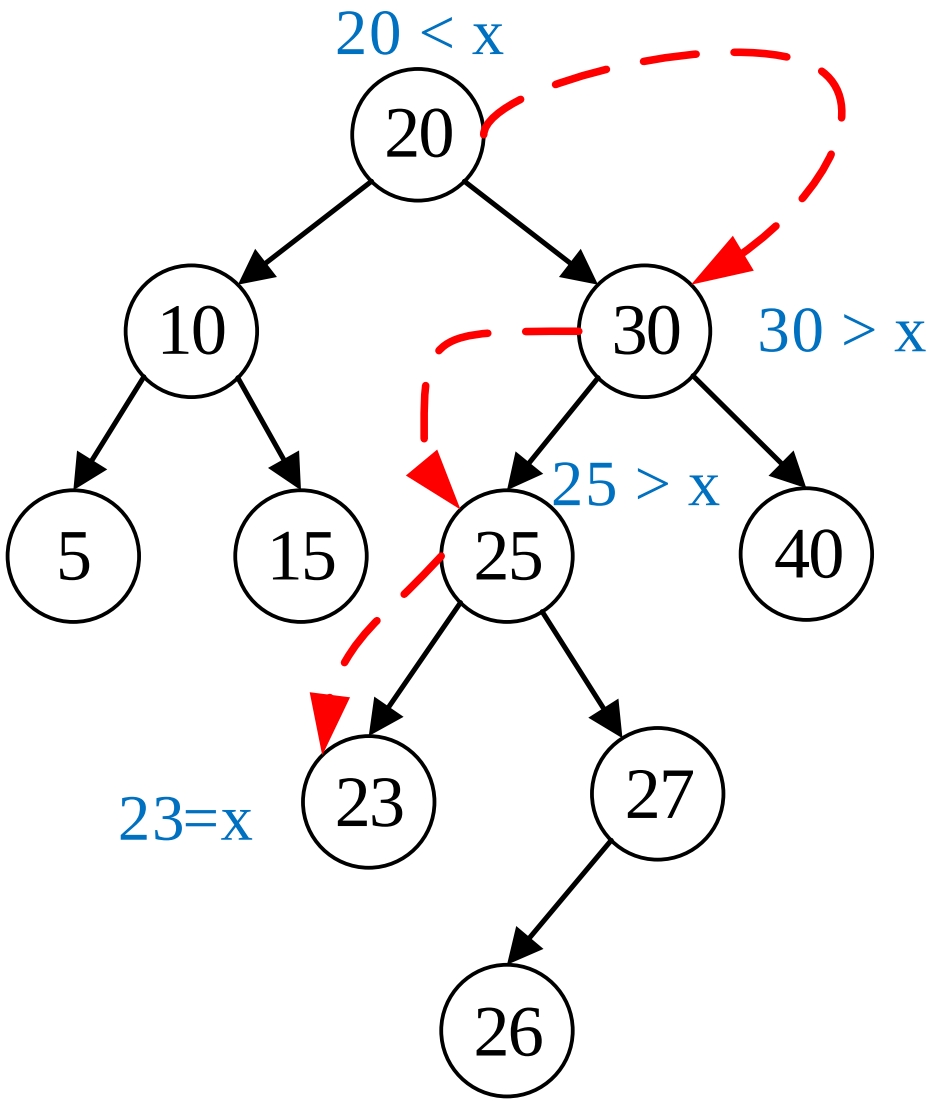
- O(height of the tree)

Tìm node có khoá bằng x (dùng đệ quy)

```
TNODE* searchNode(TREE T, int x) {
   if (T != NULL) {
      if (T->key == x)
            return T;
      if (T->key > x)
            return search(T->pLeft, x);
      return search(T->pRight, x);
   }
   return NULL;
}
```

Minh hoạ tìm một node

- Tìm x=23



findMin/ findMax

- Return the node containing the smallest element in the tree
- Start at the root and go left as long as there is a left child. The stopping point is the smallest element

```
template <class Comparable>
BinaryNode<Comparable> *
BinarySearchTree<Comparable>::findMin( BinaryNode<Comparable> *t ) const
{
    if( t == NULL )
        return NULL;
    if( t->left == NULL )
        return t;
    return findMin( t->left );
}
```

- Similarly for findMax
- Time complexity = O(height of the tree)

Hủy 1 node có khoá bằng X trên cây

- Hủy 1 phần tử trên cây phải đảm bảo điều kiện ràng buộc của Cây nhị phân tìm kiếm
- Có 3 trường hợp khi hủy 1 node trên cây
  - TH1: X là node lá
  - TH2: X chỉ có 1 cây con (cây con trái hoặc cây con phải)
  - TH3: X có đầy đủ 2 cây con
- TH1: Ta xoá node lá mà không ành hưởng đến các node khác trên cây
- TH2: Trước khi xoá x ta móc nối cha của X với con duy nhất cùa X.
- TH3: Ta dùng cách xoá gián tiếp

Time complexity = O(height of the tree)

Hủy 1 node có khoá bằng X trên cây

delete

Three cases:

(1) the node is a leaf

- Delete it immediately

(2) the node has one child

- Adjust a pointer from the parent to bypass that node

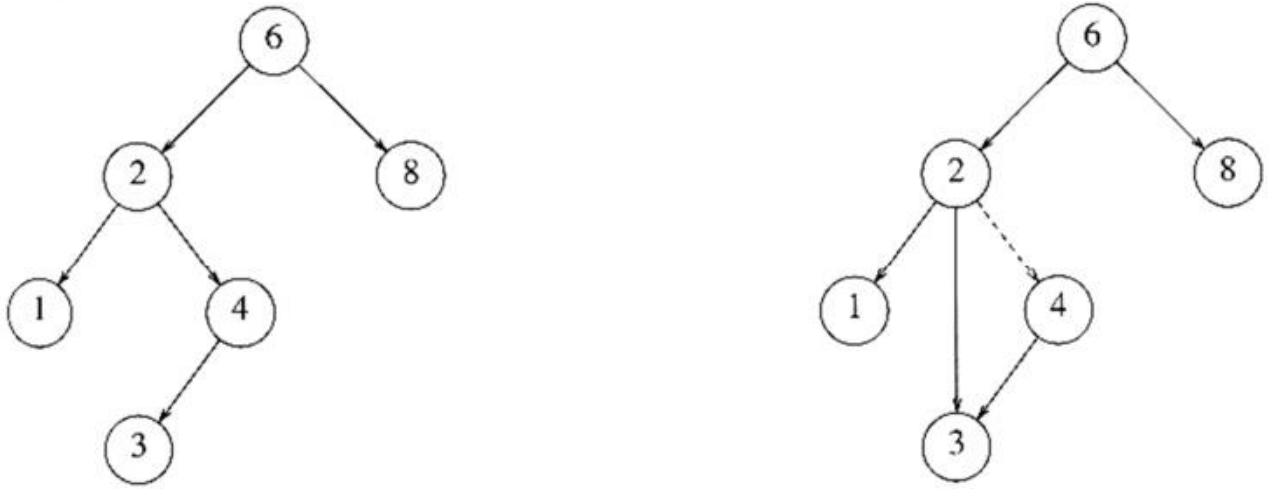


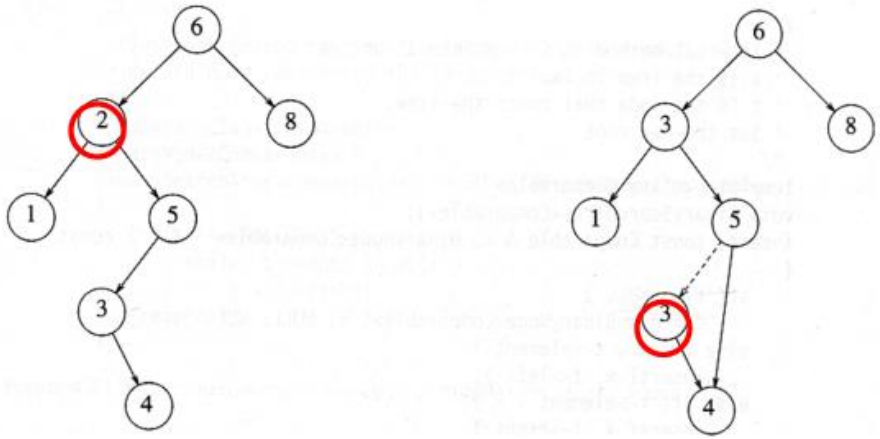
Figure 4.24 Deletion of a node (4) with one child, before and after

Hủy 1 node có khoá bằng X trên cây

delete

(3) the node has 2 children

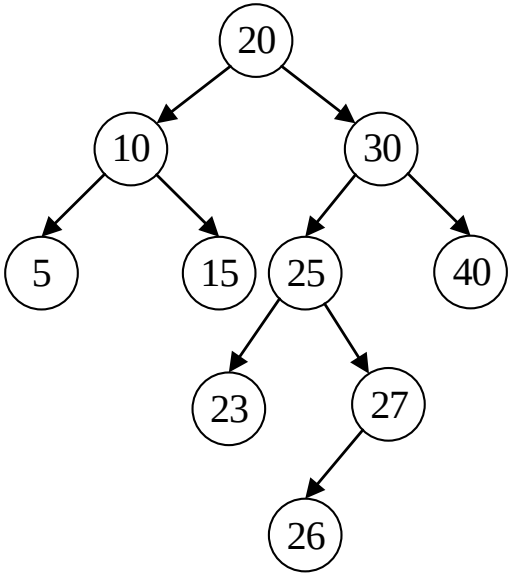
- replace the key of that node with the minimum element at the right subtree
- delete the minimum element
  - Has either no child or only right child because if it has a left child, that left child would be smaller and would have been chosen. So invoke case 1 or 2.



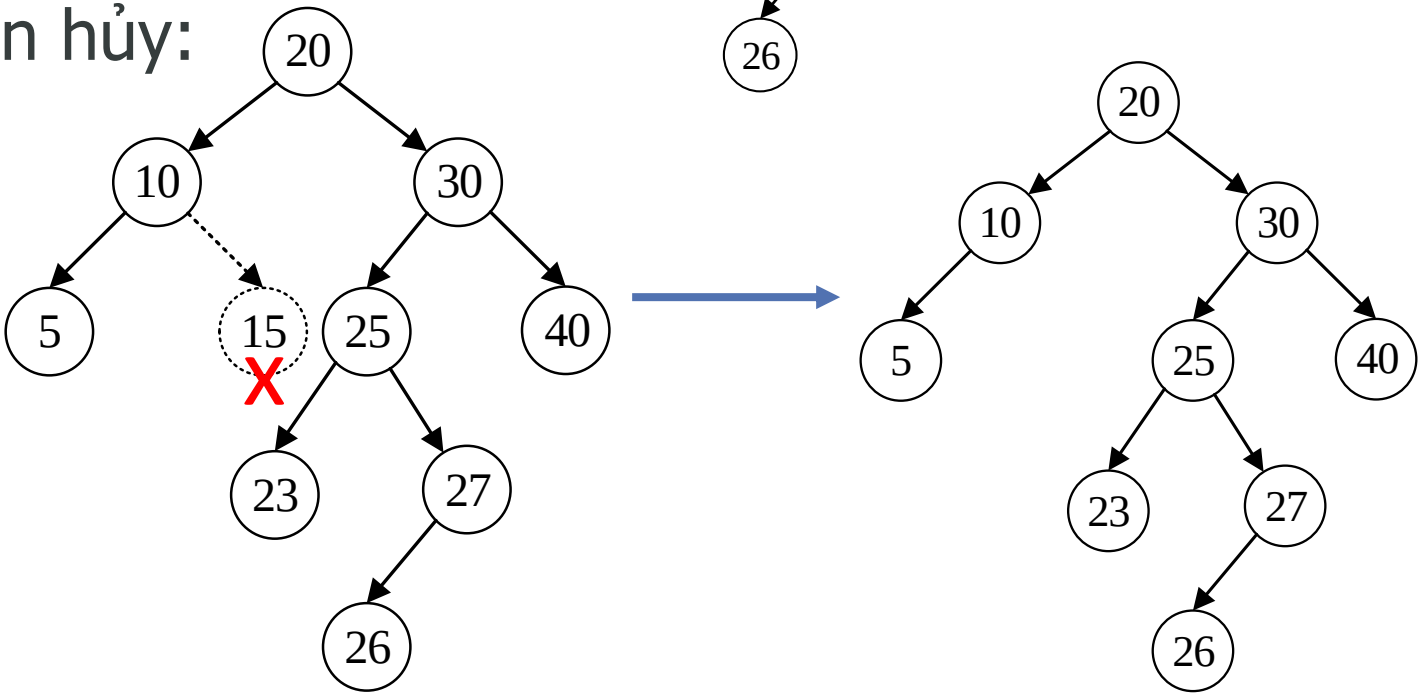
- Time complexity = O(height of the tree)

Minh hoạ hủy phần tử x là node lá

- Hủy x=15 trong cây sau:

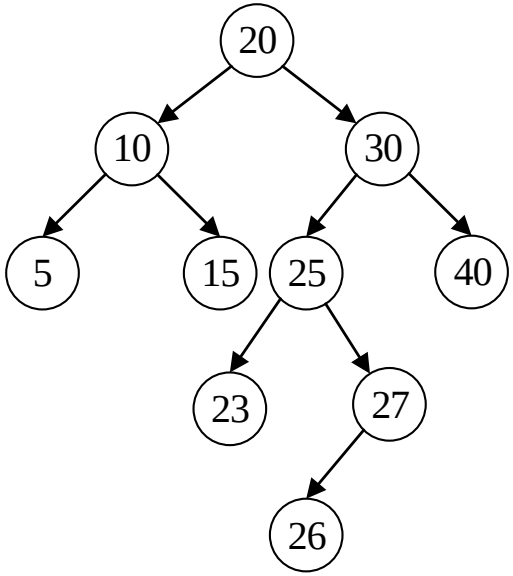


=> Thực hiện hủy:

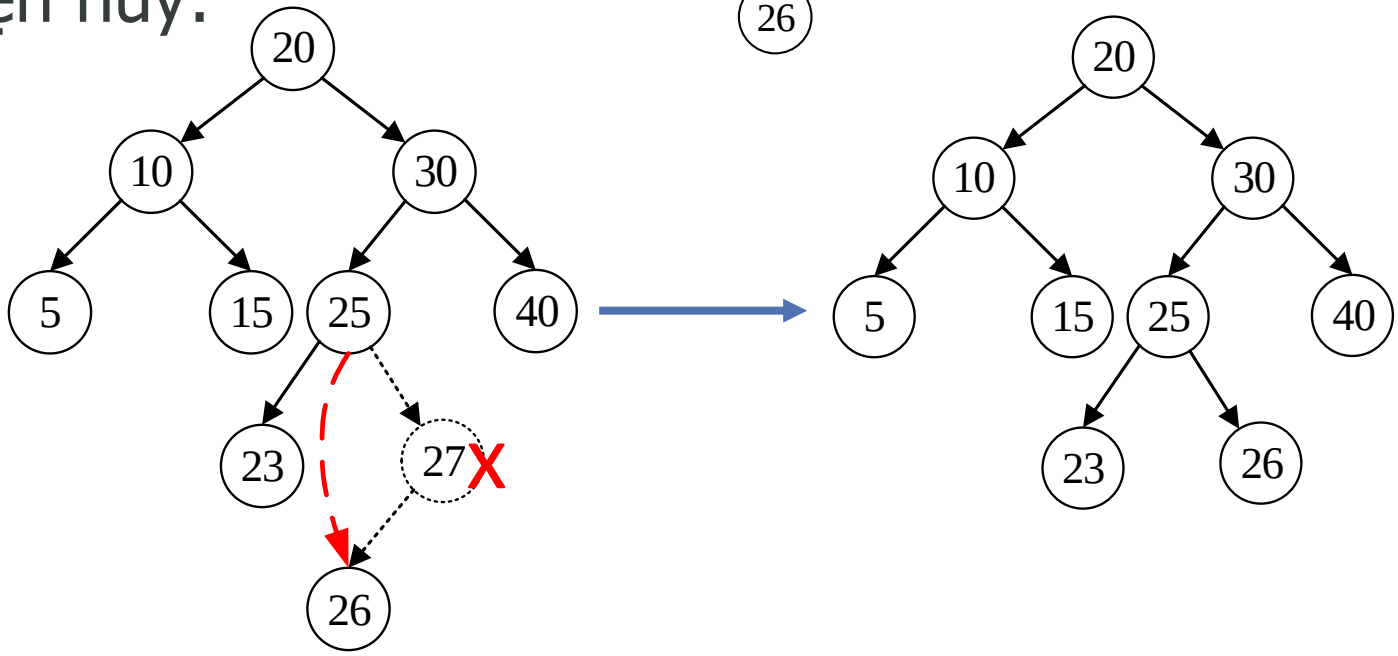


Minh hoạ hủy phần tử x có 1 cây con

- Hủy x=27 trong cây sau:



=> Thực hiện hủy:

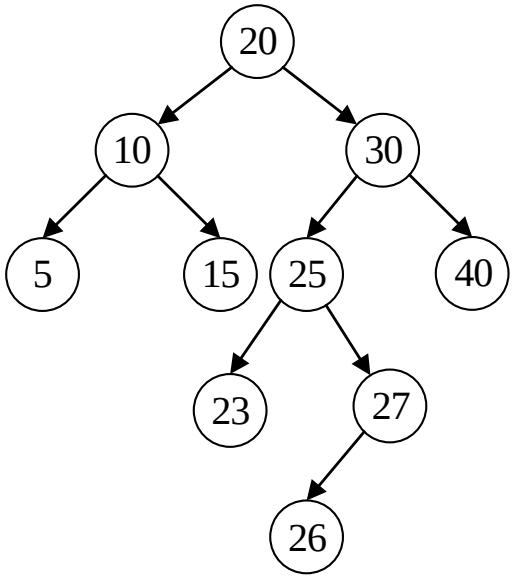


Hủy 1 node có 2 cây con

- Ta dùng cách hủy gián tiếp, do X có 2 cây con
- Thay vì hủy X ta tìm phần tử thế mạng Y. Nút Y có tối đa 1 cây con.
- Thông tin lưu tại node Y sẽ được chuyển lên lưu tại X.
- Ta tiến hành xoá hủy node Y (xoá Y giống 2 trường hợp đầu)
- Cách tìm node thế mạng Y cho X: Có 2 cách
  - C1: Nút Y là node có khoá nhỏ nhất (trái nhất) bên cây con phải X
  - C2: Nút Y là node có khoá lớn nhất (phải nhất) bên cây con trái của X

Minh hoạ hủy phần tử x có 2 cây con

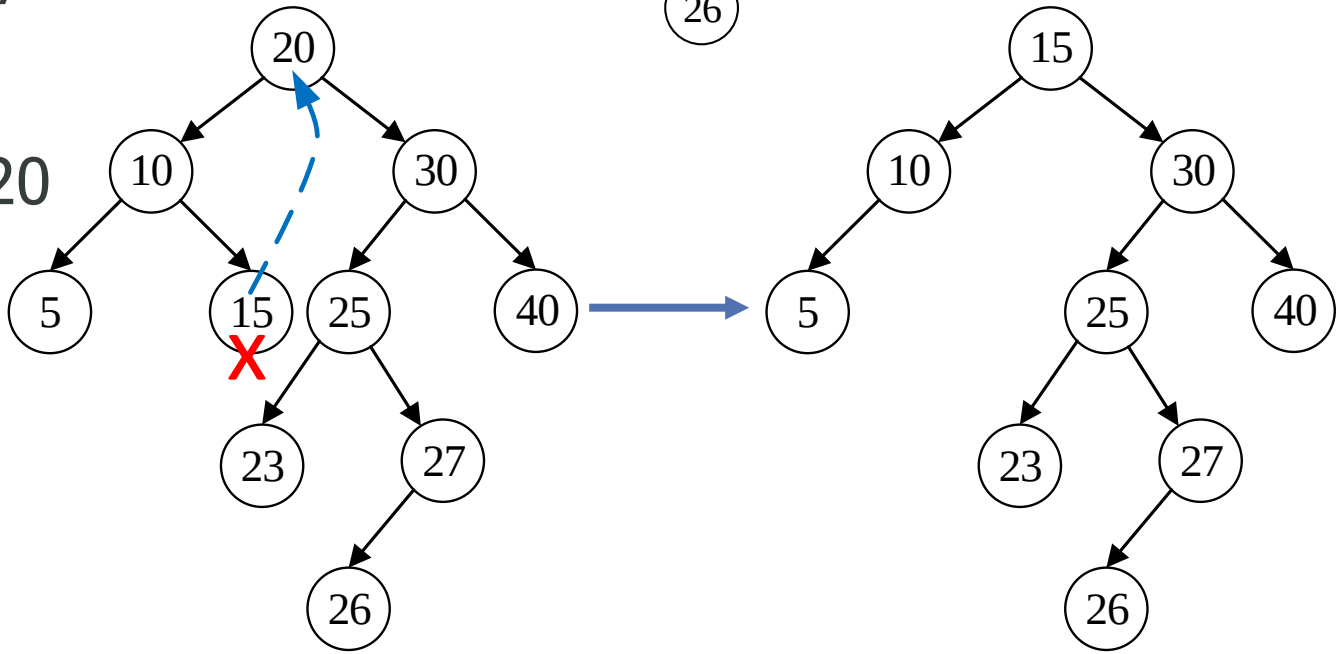
- Hủy x=20 trong cây sau:



⇒Thực hiện hủy:

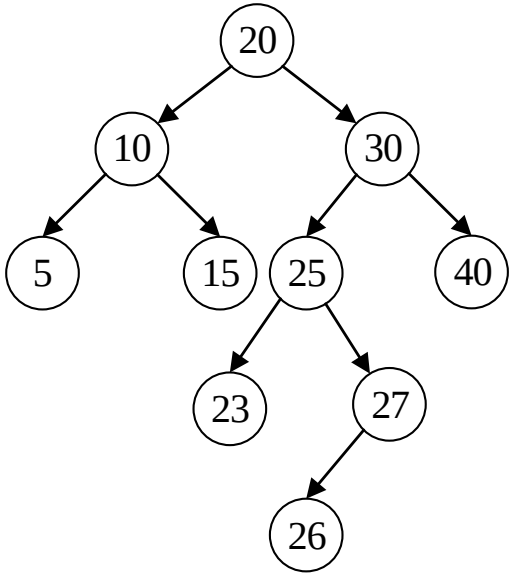
Dùng node 15

thay thế node 20



Minh hoạ hủy phần tử x có 2 cây con

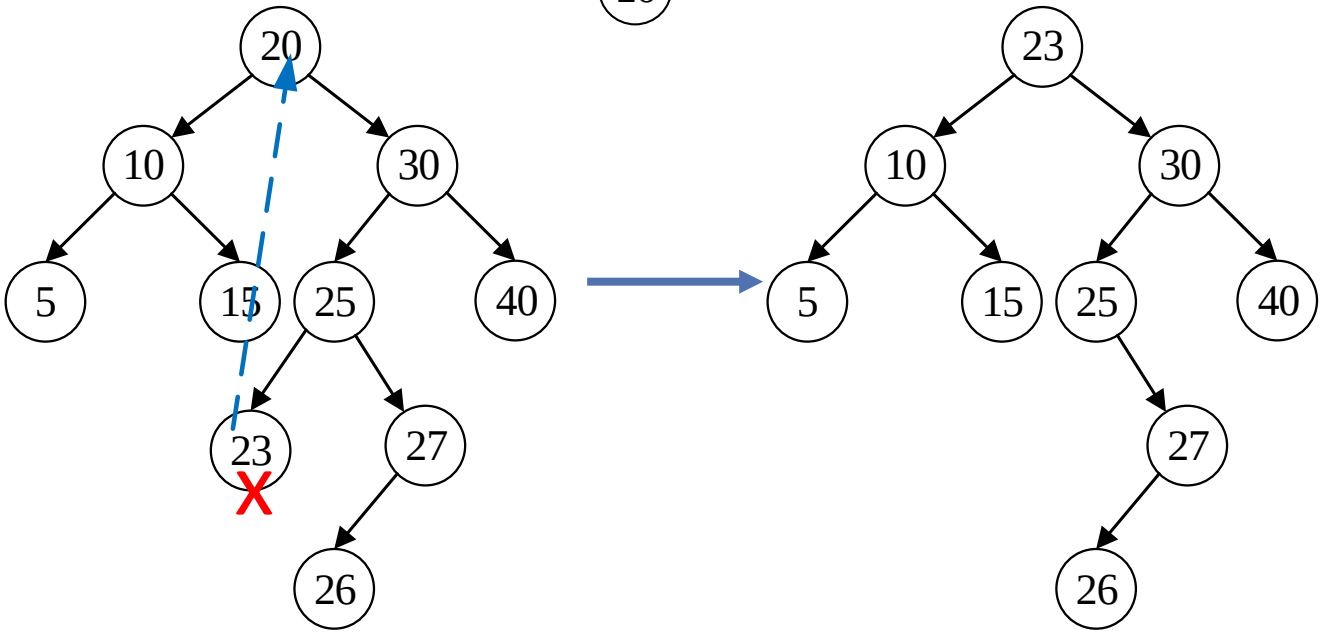
- Hủy x=20 trong cây sau:



⇒Thực hiện hủy:

Dùng node 23

thay thế node 20



Cài đặt thao tác xoá node có trường key = x

```
void DeleteNodeX(TREE &T, int x) {
    if (T != NULL) {
        if (T->key < x) DeleteNodeX(T->pRight, x);
        else {
            if (T->key > x) DeleteNodeX(T->pLeft, x);
            else { //tim thấy Node có trường dữ liệu = x
                TNODE *p;
                p = T;
                if (T->pLeft == NULL) T = T->pRight;
                else {
                        if (T->pRight == NULL)T = T->pLeft;
                        else ThayThe(p, T->pRight); // tìm bên cây con phải
                }
                delete p;
            }
        }
    }
}
```

Hàm tìm phần tử thế mạng

```
void ThayThe(TREE &p, TREE &T) {
   if (T->pLeft != NULL)
         ThayThe(p, T->pLeft);
   else {
      p->key = T->key;
      p = T;
      T = T->pRight;
   }
}
```

Tính chiều cao của cây

```
int Height(TNODE* T) {
    if (!T) return -1;
    int a = Height(T->pLeft);
    int b = Height(T->pRight);
    return (a > b ? a : b) + 1;
}
```

Đếm số lượng node có trong cây

```
// Cách 1: Dùng không đệ quy

int DemNode(TREE t) {
    if (t == NULL)
    return 0;
    int a = DemNode(t->pLeft);
    int b = DemNode(t->pRight);
    return (a + b + 1);

}

// Cách 2: Dùng đệ quy

void DemNode(TREE t, int &count) {
    if (t == NULL)
    return;
    DemNode(t->pRight, count);
    count++;
    DemNode(t->pLeft, count);

}
```

Ứng dụng

Bài tập:

- Binary trees:
  - Count the number of nodes.
  - Count the number of leaf nodes.
  - Calculate the height of a tree.
  - Count the number of nodes at level h.
  - Caculate the sum of nodes have value >= x.
  - Find the closest node to x.
  - Check whether two nodes m and n are sibling.
  - Chech whether n is an ancestor of m.

Bài tập

1. Hãy trình bày định nghĩa, đặc điểm và hạn chế của cây nhị phân tìm kiếm.

2. Xét thuật giải tạo cây nhị phân tìm kiếm. Nếu thứ tự các khóa nhập vào như sau:

3 5 2 20 11 30 9 18 4

thì hình ảnh cây tạo được như thế nào?

Sau đó, nếu hủy lần lượt các node 5, 20 thì cây sẽ thay đổi như thế nào trong từng bước hủy, vẽ sơ đồ.

Bài tập (tt)

3. Tạo một cây nhị phân tìm kiếm lưu các số nguyên.

Viết các hàm tương ứng sau:

- In cây nhị phân tìm kiếm nói trên theo các thứ tự:

LNR, LRN, NLR, NRL, RNL, RLN.

- Tìm một nút có khoá bằng X trên cây.
- Viết hàm Đếm số nút có trong cây, số nút lá, số nút có đúng 1 cây con, nút có đầy đủ 2 cây con, số nút chẵn, số nút lá chẵn.
- Tính tổng các nút trong cây, tổng các nút có đúng một con, tổng các nút có đúng 1 con mà thông tin tại nút đó là số nguyên tố
- Tính chiều cao của cây
- Xoá 1 nút có khoá bằng X trên cây, nếu không có thì thông báo không có
- Viết hàm kiểm tra 2 cây nhị phân giống nhau

Bài tập (tt)

4. Cài đặt chương trình mô phỏng trực quan các thao tác trên cây nhị phân tìm kiếm.

5. Cho một dãy số nguyên (các con số có thể trùng nhau). Hãy viết hàm đếm số lần xuất hiện của từng con số trong dãy.

Chúc các em học tốt!