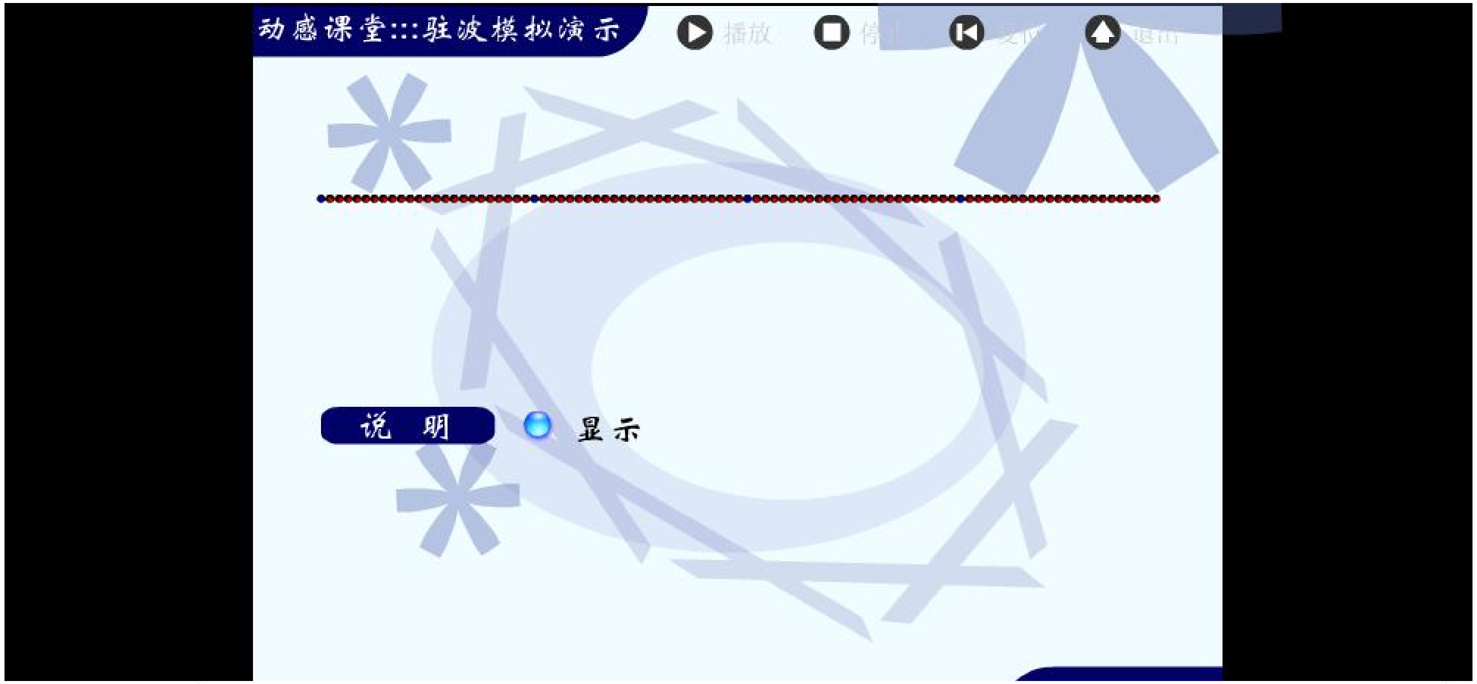
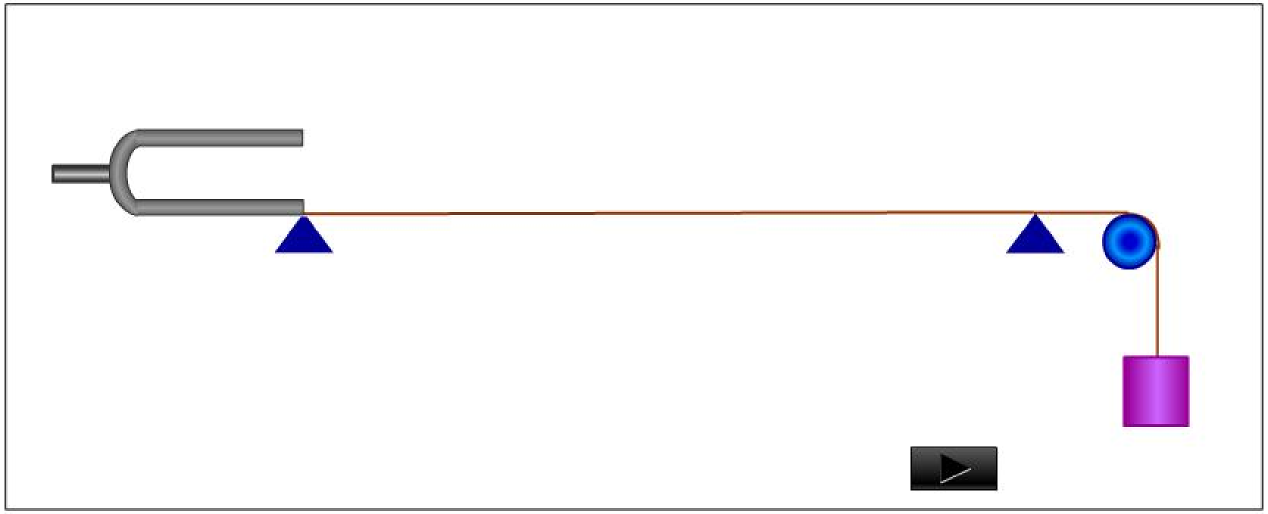
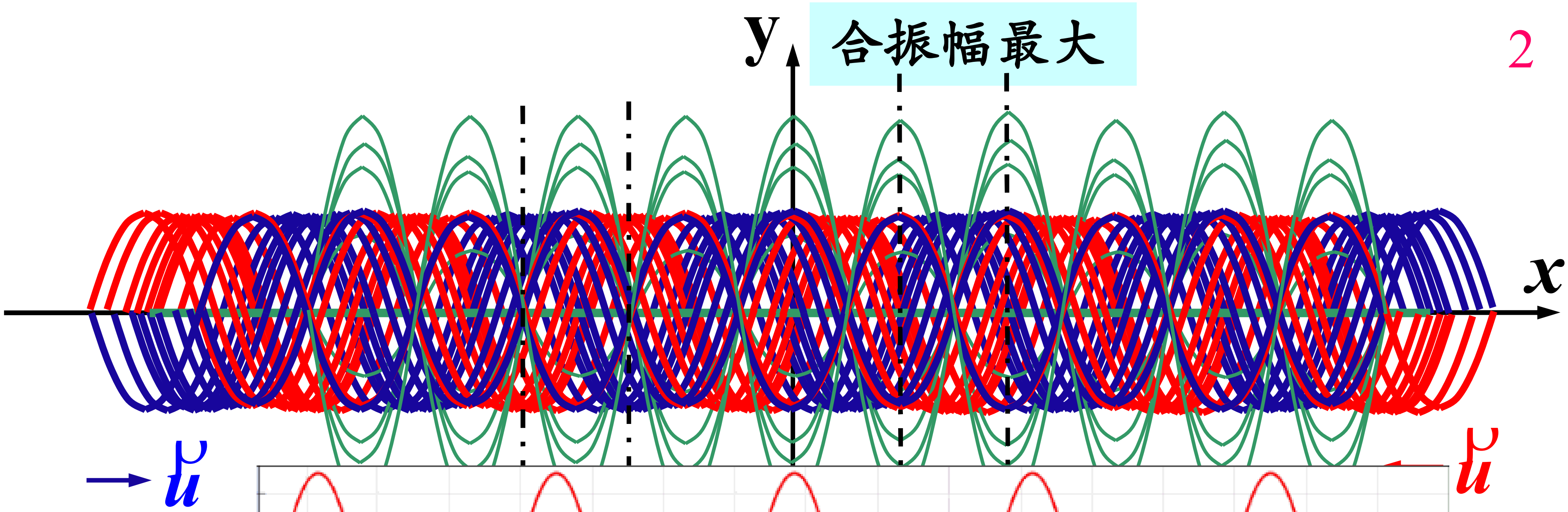
10-7 驻波

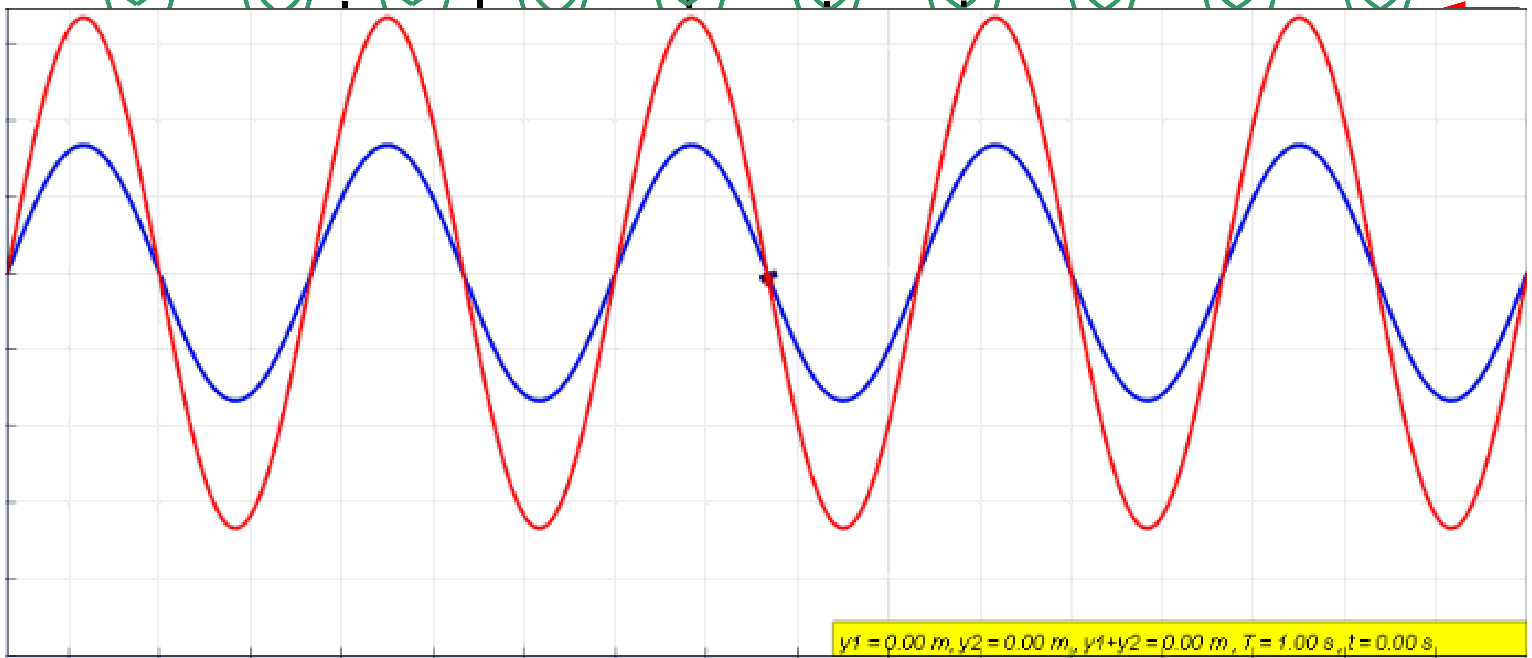
一. 驻 波 的 产生

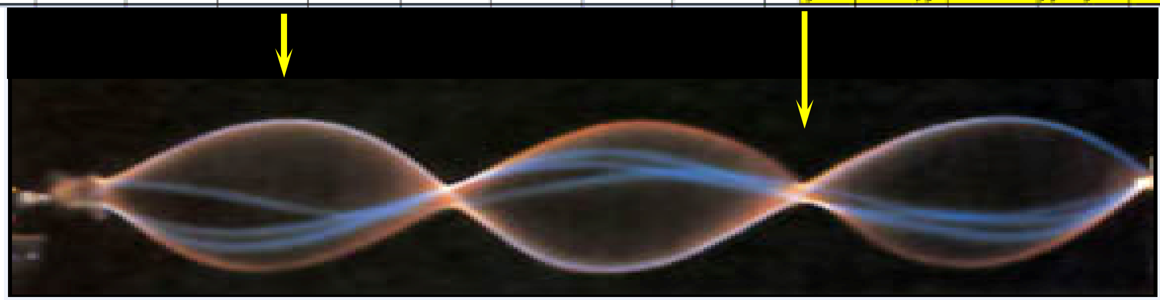
两列振幅相等的相干波在同一直线上沿相反方向传播叠加而成。






合振幅最大
y
x
u
u


y1 = 0.00 m, y2 = 0.00 m, y1+y2 = 0.00 m, T = 1.00 s, t = 0.00 s

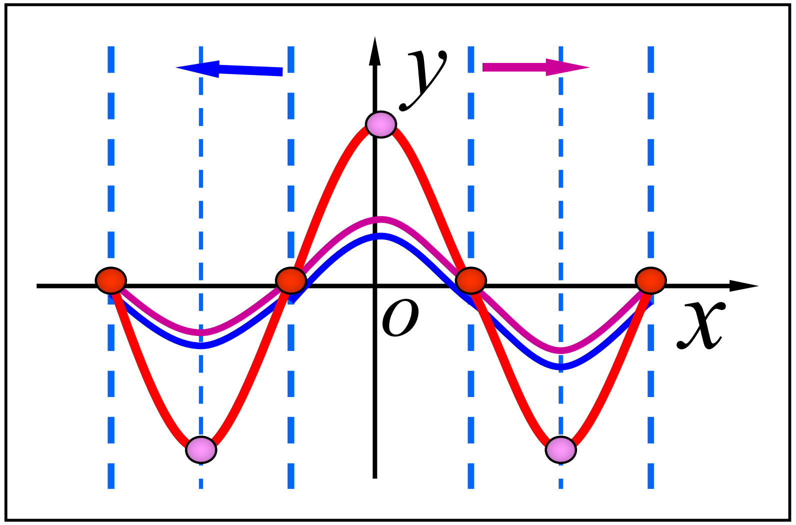


二、驻波方程（波函数）

设两列相干波： 在 $x=0$ 处两波的初相均为 0

$$\rightarrow x:\ y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\leftarrow x:\ y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$



$$y = y_1 + y_2$$

驻波表达式

$$\boxed{y = \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t}$$

驻波---频率相同，振幅不等的谐振动的集体表现

振幅因子（绝对值为振幅）

振动因子（相位中无 x）

—— 不具备传播的特征

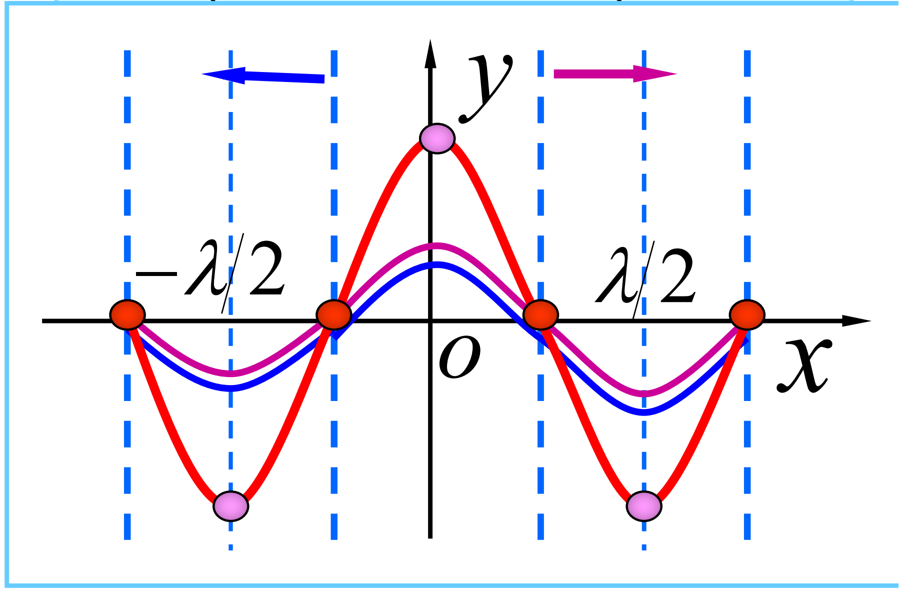
驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

三、驻波的特点

$$y=\left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$

$$A'=\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$$



1．振幅分布----有波腹和波节

相邻节点

(相邻腹点) 间距离为 $\lambda/2$

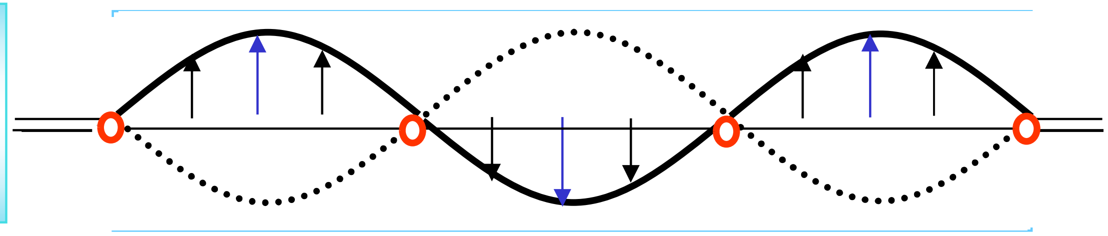
测波节间距可得行波波长。

$$\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=\begin{cases}1 & \dfrac{2\pi}{\lambda}x=\pm n\pi \quad n=0,1,2, \quad \text{波腹}\\ 0 & \dfrac{2\pi}{\lambda}x=\pm(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad n=0,1,2, \quad \text{波节}\end{cases}$$

∴ 波腹（节）位置 $x_{\text{腹}}=\pm 2n\dfrac{\lambda}{4}$ $x_{\text{节}}=\pm(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$

2. 相位分布

$$y = \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$



振动因子中无 x，故无相位及波形的传播。

质点分段振动
- 同一段 (相邻波节间)： 相位相同,
- 相邻两段 (波节两侧)： 相位相反。

3. 能量分布

沿x方向的能流密度

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

沿-x方向的能流密度

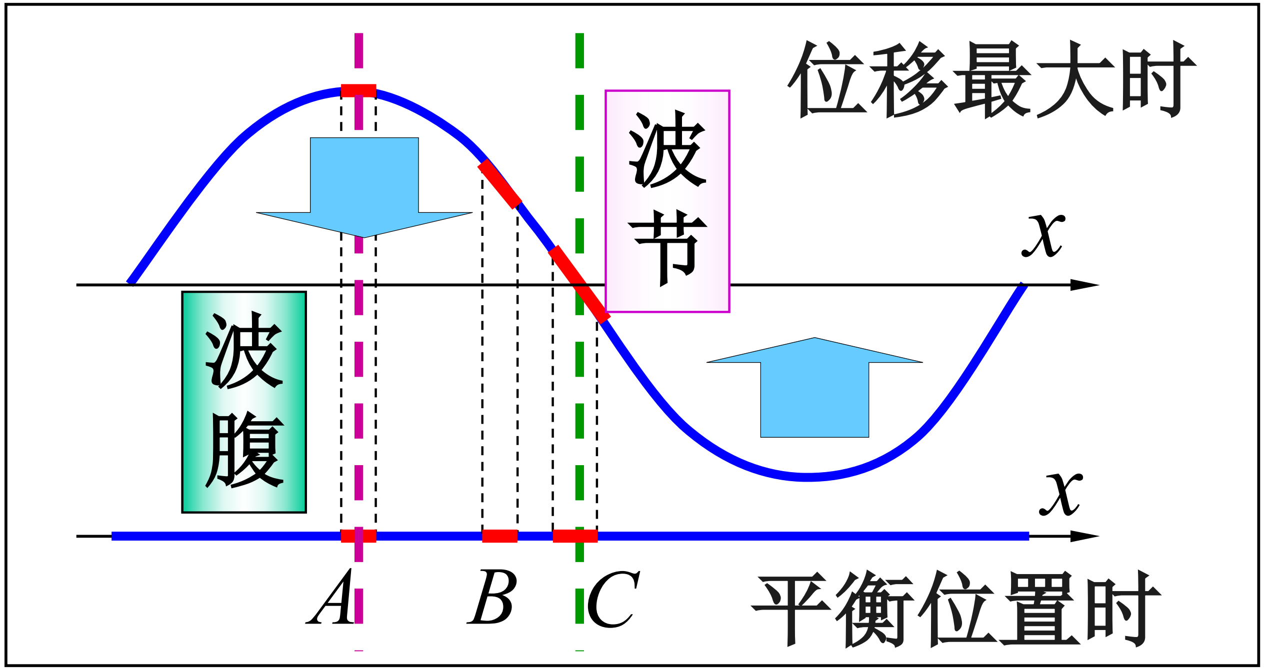
$$I_2 = -\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

应用程序

形成驻波后,能流密度

$$I = I_1 + I_2 = 0$$

平均说来没有能量的传播。



$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

◆各质点位移达到最大时，$\mathbf{d}E_{\mathrm{k}}\mathbf{=0}$；

波节处: $\mathbf{d}E_{\mathrm{p}}$最大。

波腹处: $\mathbf{d}E_{\mathrm{p}}\mathbf{=0}$。势能集中在波节附近。

◆各质点回到平衡位置时，$\mathbf{d}E\mathbf{p=0}$;

波节处：$\mathbf{d}E_{\mathrm{k}}\mathbf{=0}$

波腹处： $\mathbf{d}E_{\mathrm{k}}$最大。动能集中在波腹附近。

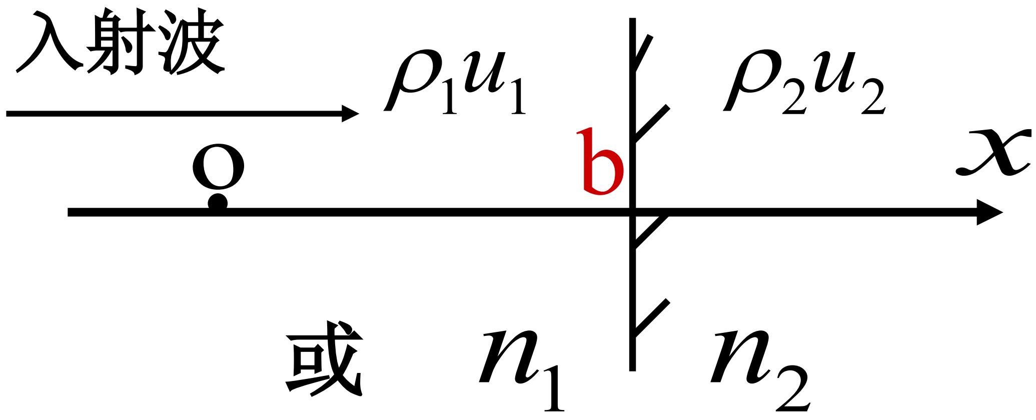
能量总是在波节与波腹间转移，无定向传播

“驻”字含义

波形不传播　　相位不传播　　能量不传播

四、半波损失（相位跃变）

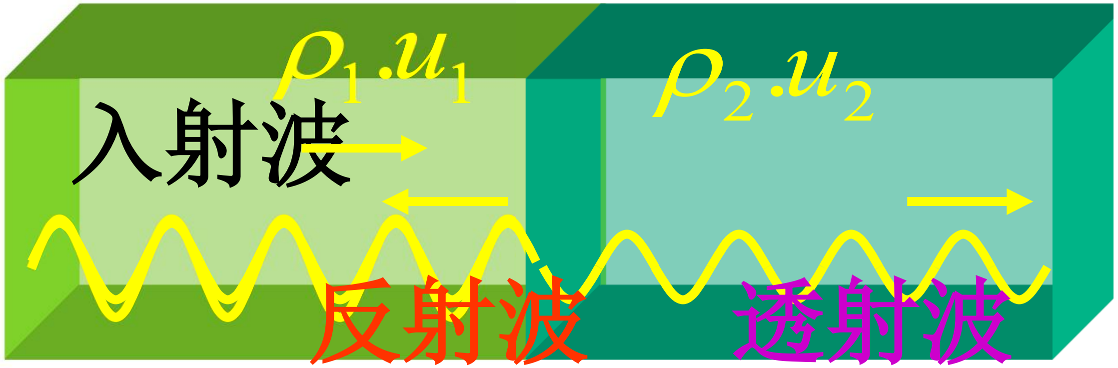
反射点 b处是节、腹？



$z = \rho u$ —波阻

z大 — 波密媒质

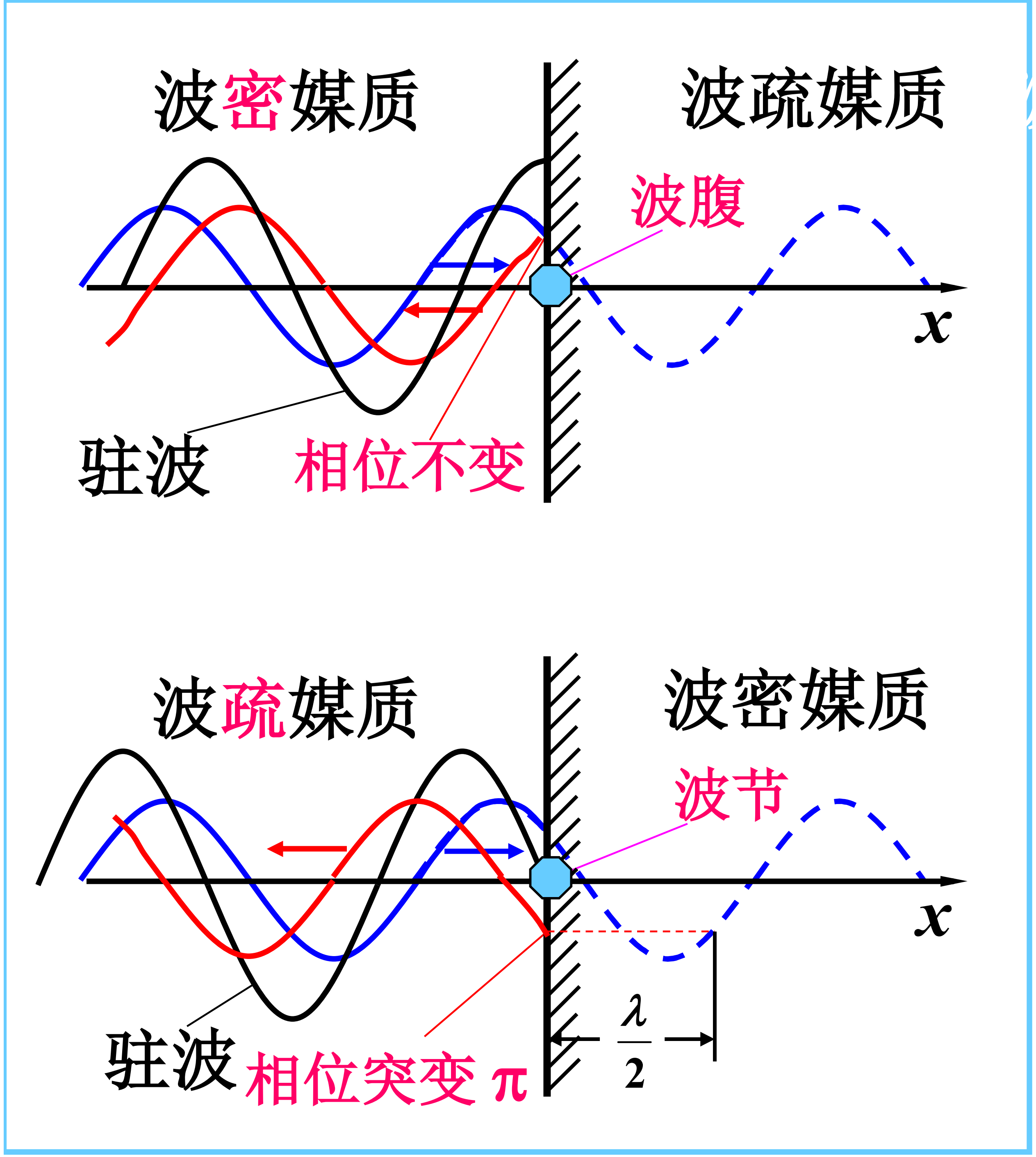
z小 — 波疏媒质



一般而言：

透射波：　不论 $z_1 > z_2$，　还是 $z_1 < z_2$，

透射波总是与入射波同相



①当波密→波疏，反射点：

反射波和入射波同相

称为全波反射

②当波疏→波密，反射点：

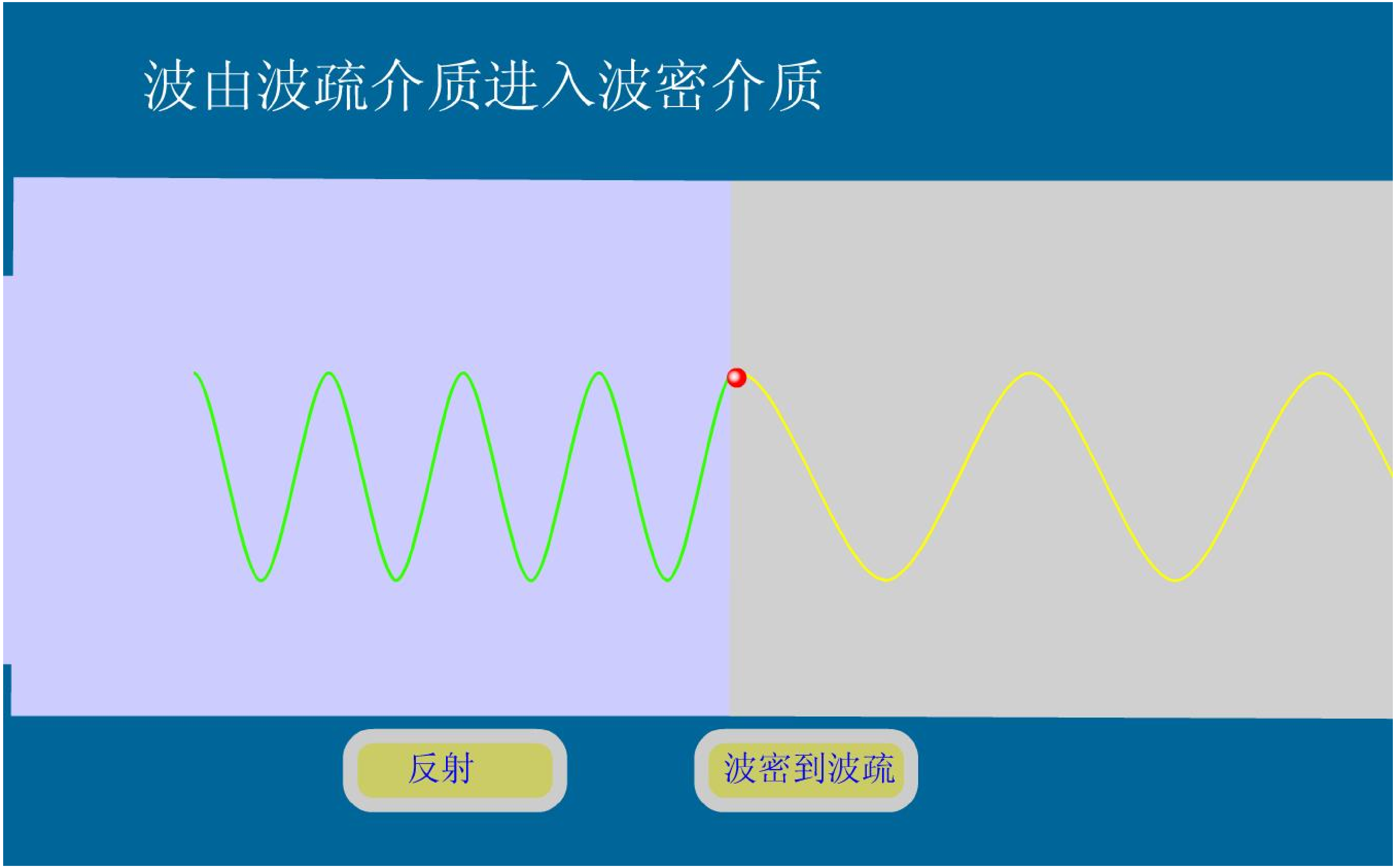
反射波和入射波反相

π 的相位突变.

——————半波损失

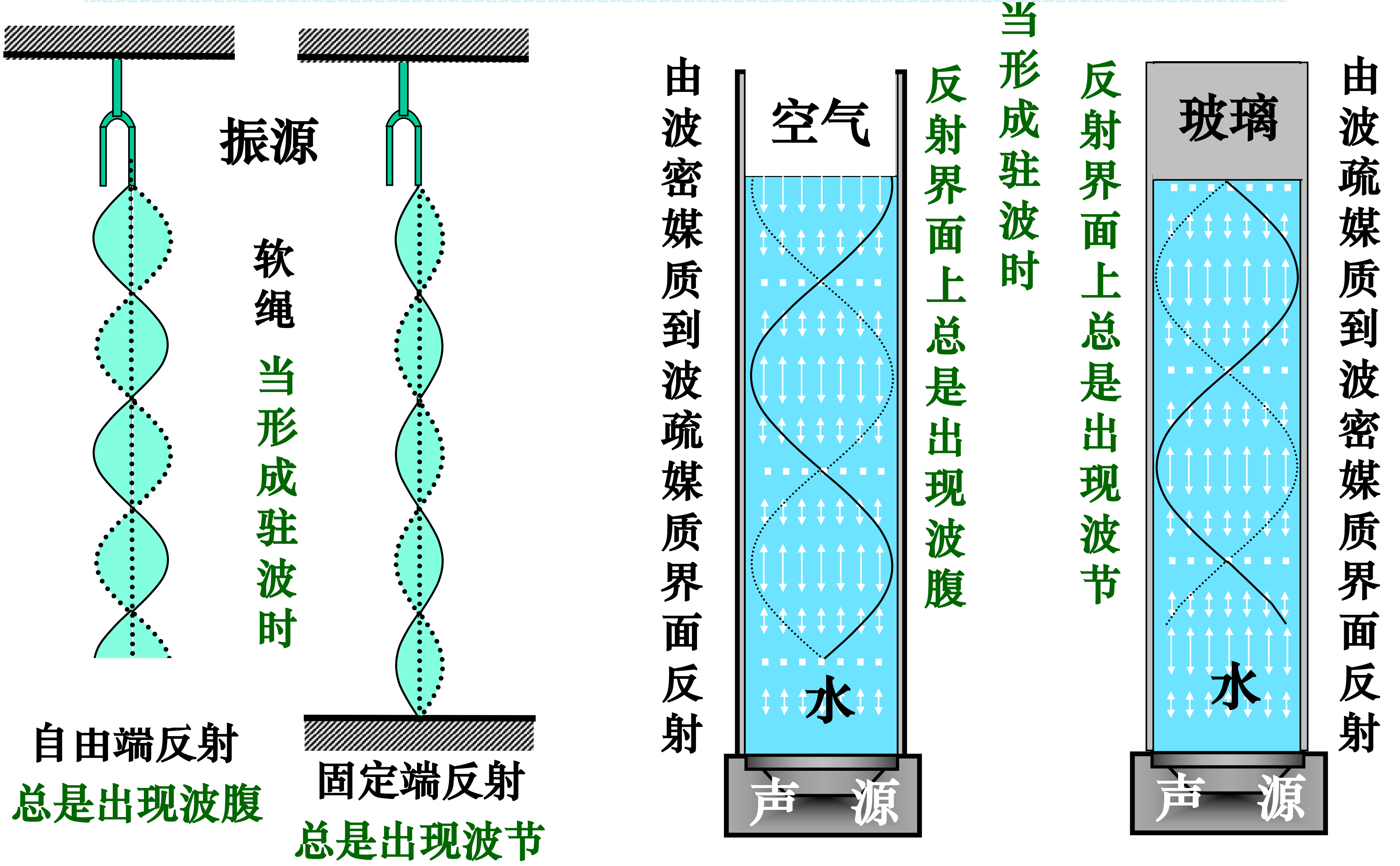
(相当于入射波继续前进半个波长再反射)

称为半波反射


波由波疏介质进入波密介质
反射
波密到波疏

反、入射产生驻波

由入射波与反射波产生驻波 与 “半波损失”



总之

全波反射
- 自由端反射
- 波密 ⟶ 波疏界面反射

反射波与入射波在反射点同相

波腹

半波反射
- 固定端反射
- 波疏 ⟶ 波密界面反射

反射波与入射波在反射点反相

波节

相位突变π

半波损失

五、两端固定的弦中的驻波　简正模式

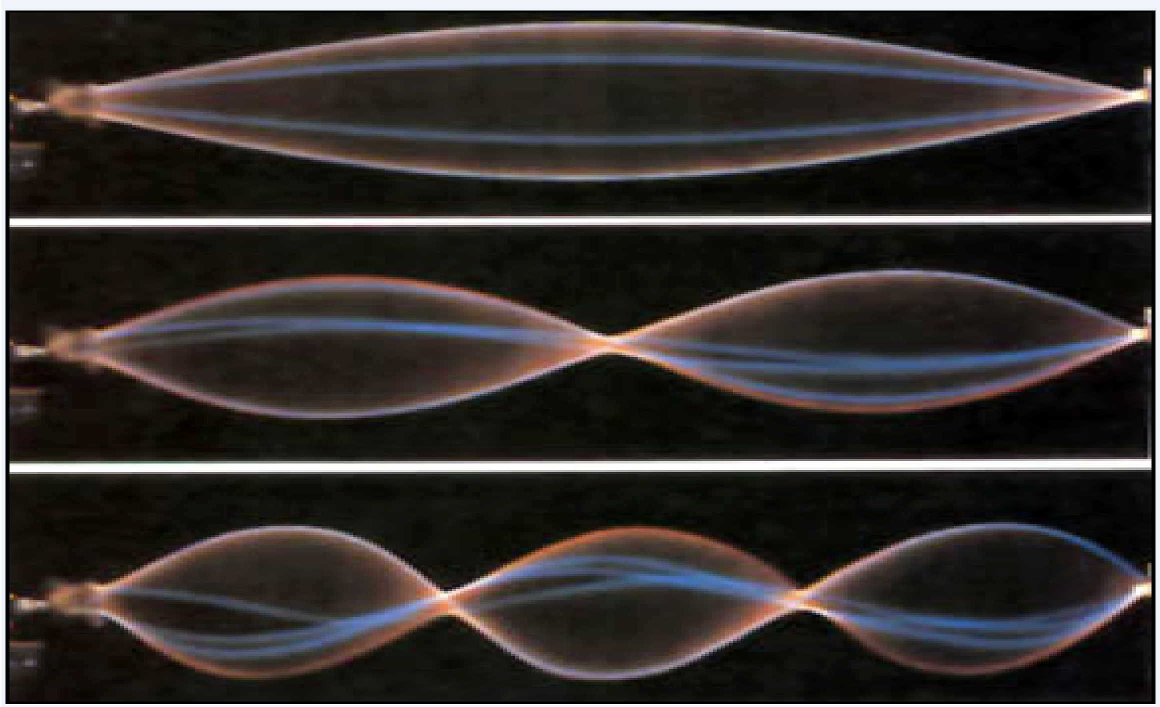
限定：两端为波节

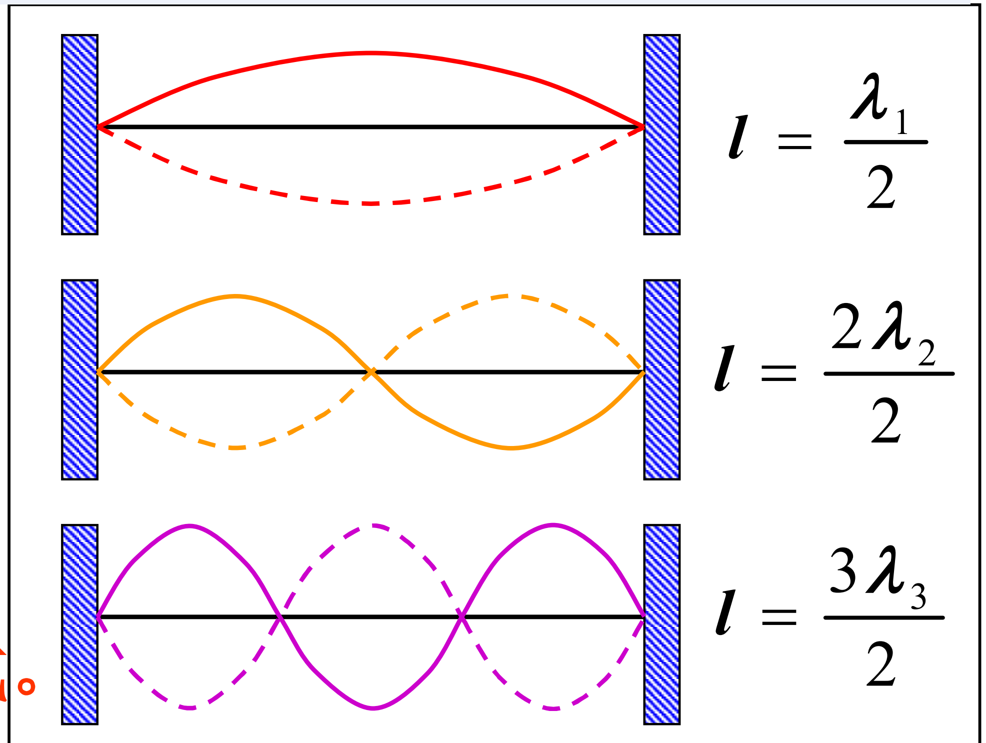
可能的模式

$$l = n\frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, n = 1, 2, 3,$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2l}, n = 1, 2, 3,$$





一个驻波系统有多个“固有频率”

有多种可能的稳定振动方式

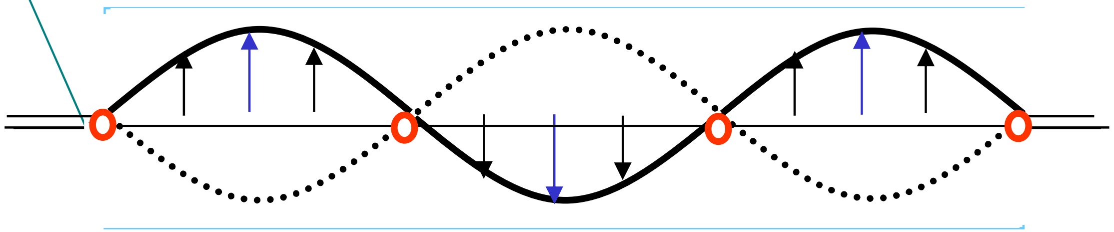
每种可能的稳定振动方式

称作振动系统的一个简正模式。

例6： 某波动方程 $y = 6\cos\frac{\pi}{3}x\cos\frac{2\pi}{5}t$ (cm)

求： x_1=2m，x_2=5m，x_3=10m 处各质点振动的相位关系。

解： 为驻波



找节点位置 $\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \quad)$

$$x = \frac{3}{2}(2n+1) \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \quad)$$

即 $x = \pm1.5, \quad \pm4.5, \quad \pm7.5, \quad \pm10.5, \Lambda \ (m)$

波节两侧质元相位相反

∴ x_1 x_2相位相反，x_2 x_3相位相反， x_1 x_3相位相同。

例7.一列波长为λ 的平面简谐波沿x 轴正方向传播。

已知在 $x=\lambda/2$ 处 振动表达式为 $y=A\cos\omega t$,

（1）求该平面简谐波的波函数;

（2）若在波线上 $x=L\ (L>\frac{\lambda}{2})$ 处放一反射面,

$\rho_1 u_1<\rho_2 u_2$，求反射波的波函数。

【解】（1）入射波的波函数

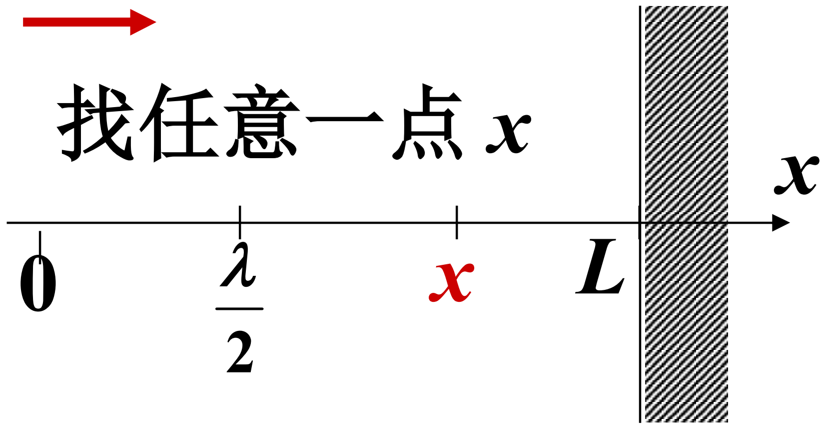
$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x-\lambda/2}{u})]$$

或

$$y=A\cos(\omega t-2\pi\frac{x-\lambda/2}{\lambda})$$

$\rho_1 u_1<\rho_2 u_2$,

找任意一点 x



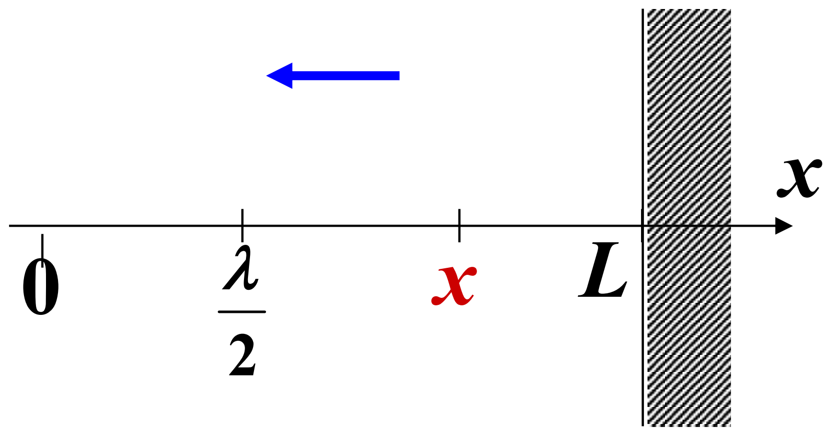
$$y=A\cos(\omega t+\pi-2\pi\frac{x}{\lambda})$$

（2）求反射波的波函数

反射有半波损失

已求得入射波的波函数

$$y = A\cos(\omega t + \pi - 2\pi\frac{x}{\lambda})$$



入射波在 L 处的振动方程为

$$y = A\cos(\omega t + \pi - 2\pi\frac{L}{\lambda})$$

反射波在L 处的振动方程 $y = A\cos(\omega t - 2\pi\frac{L}{\lambda})$

反射波的波函数 $y = A\cos[\omega(t - \frac{L-x}{u}) - 2\pi\frac{L}{\lambda}]$

得 $$y = A\cos\left[\omega t - \frac{4\pi L}{\lambda} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right] \quad (x \le L)$$

行波与驻波的区别

	行　　波	驻　　波
波方程	$y = A\cos(\omega t \ \mu \ kx)$	$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$ 或$y = 2A\cos kx\cos\omega t \quad (k = 2\pi/\lambda)$
振幅	所有质元都为A	各质元的振幅不同：$A_{驻} = \left\lvert 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \right\rvert$
相位	$\omega t \ \mu \ kx$ 各质元的相位不同	同相位或反相位
能量	由近向远传播（沿波传播方向）	波节或波腹之间的能量交换和转移（没有定向的传播）

经常见到的驻波是：
一列前进波与它在某一界面的反射波叠加而形成的。

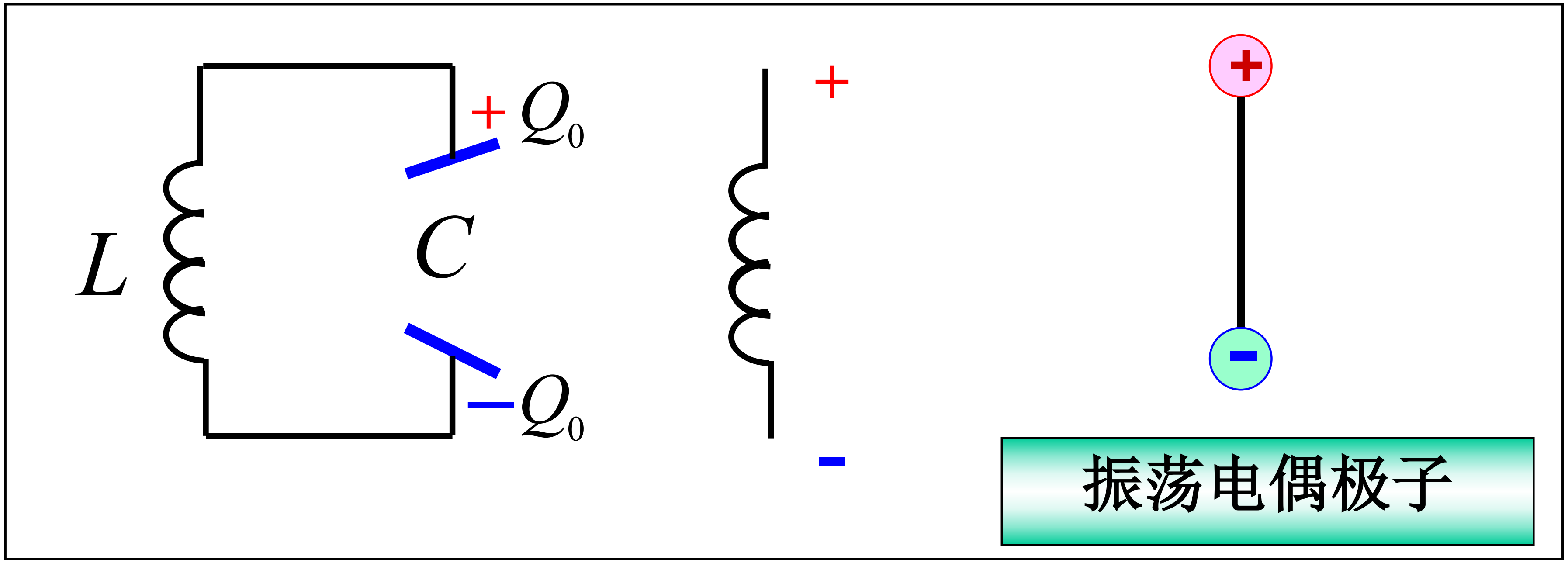
10-8 电磁波

一 电磁波的产生与传播

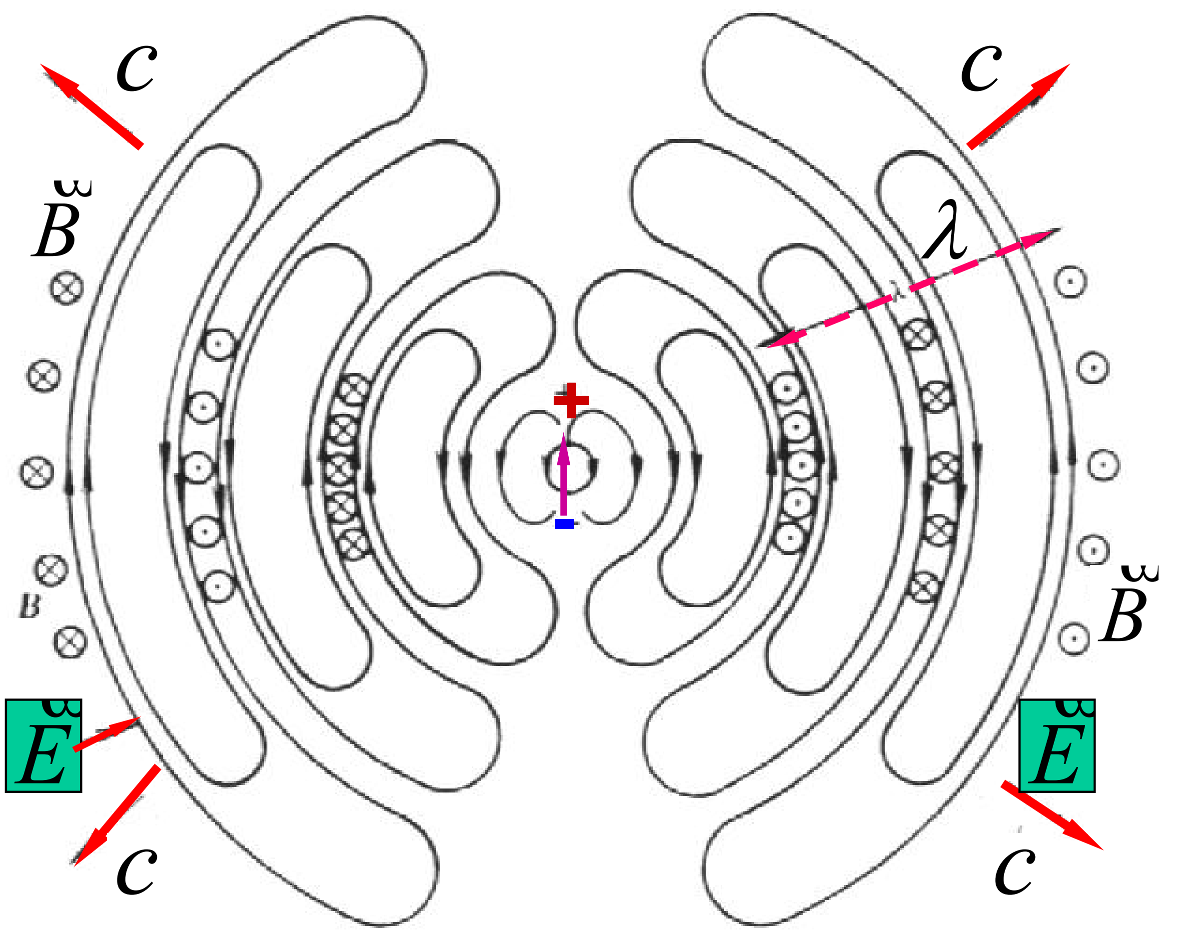
变化的电磁场在空间以一定的速度传播就形成电磁波.

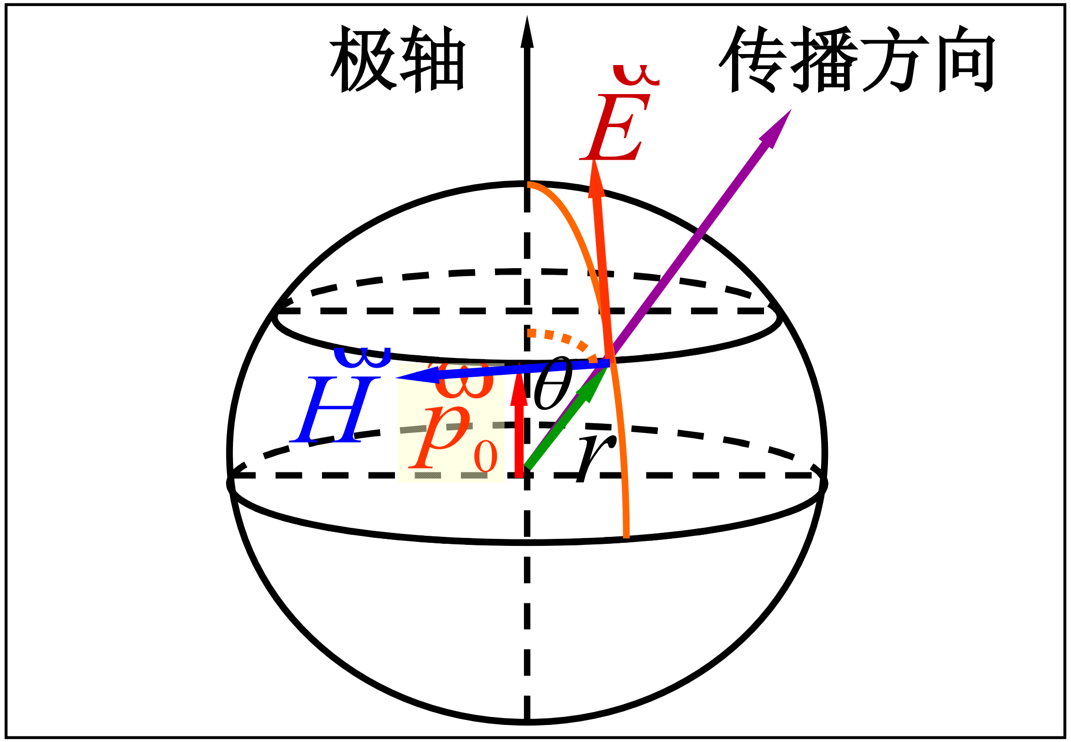
$$\boxed{T=2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



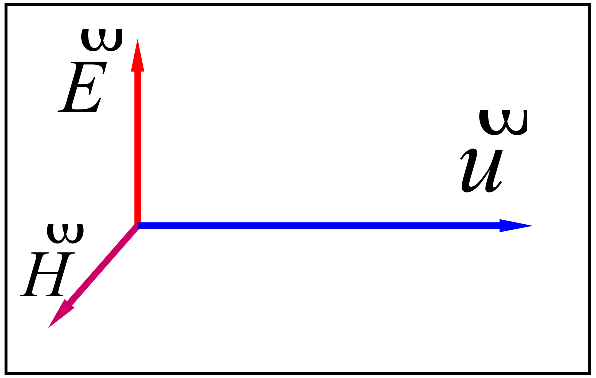
振荡电偶极子附近的电磁场线



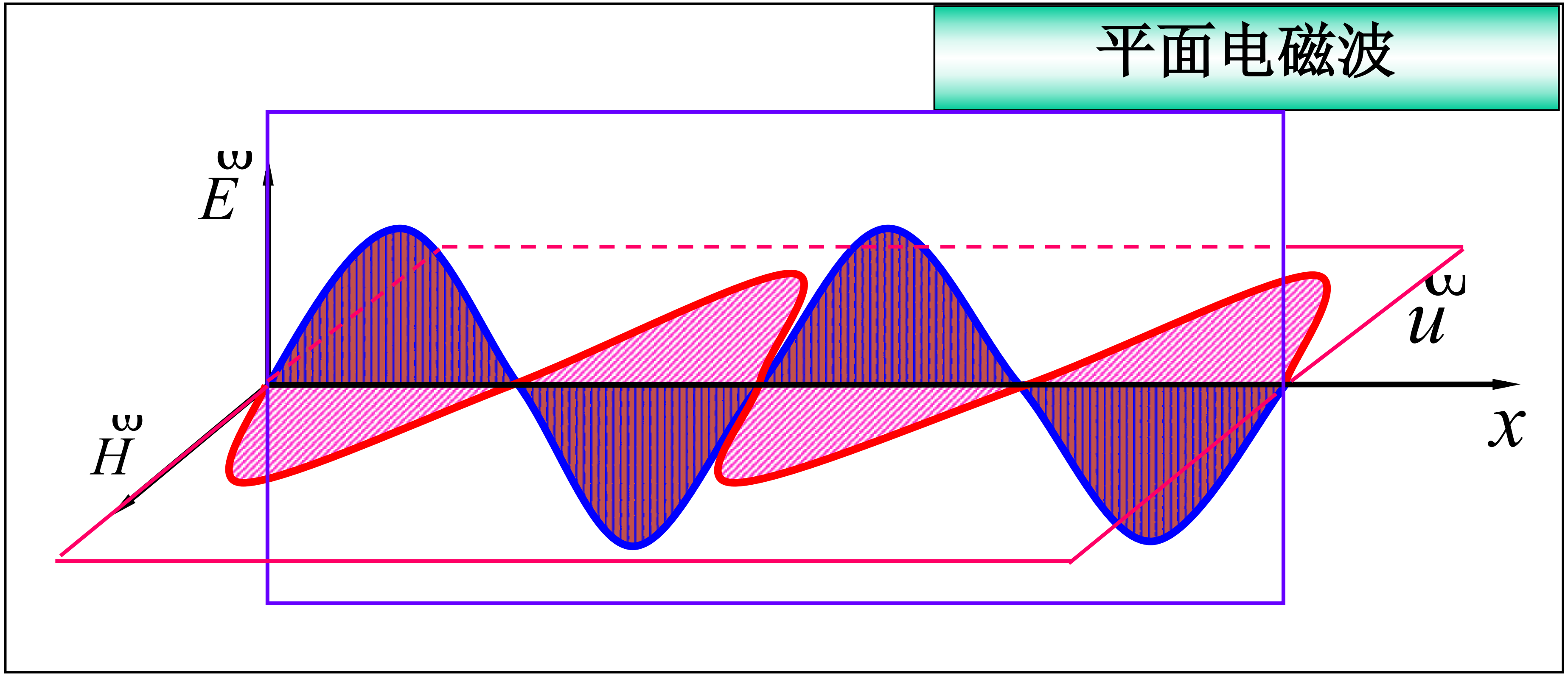


$$E(r,t)=\frac{\mu p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi r}\cos\omega(t-\frac{r}{u})$$

$$H(r,t)=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,p_0\omega^2\sin\theta}{4\pi r}\cos\omega(t-\frac{r}{u}) \qquad u=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$



$$\begin{cases} E = E_0 \cos \omega (t - \dfrac{x}{u}) \\ H = H_0 \cos \omega (t - \dfrac{x}{u}) \end{cases}$$

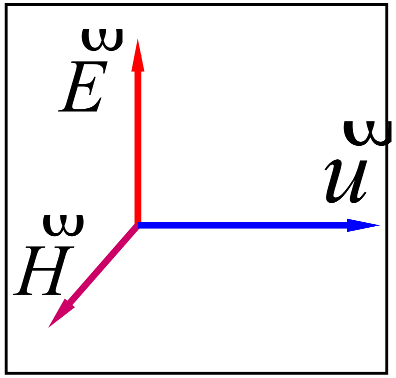


二 平面电磁波的特性

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$\begin{cases} H = H_0 \cos \omega \left(t - \dfrac{x}{u}\right) = H_0 \cos(\omega t - kx) \\ E = E_0 \cos \omega \left(t - \dfrac{x}{u}\right) = E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

(1) 电磁波是横波， $\vec{E} \perp \vec{u}$ $\quad \vec{H} \perp \vec{u}$



(2) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 同相位

(3) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 数值成比例

$$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$$

(4) 电磁波传播速度为

$$u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

真空中波速等于光速

$$u = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.998\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

三　电磁波的能量

辐射能　以电磁波的形式传播出去的能量.

电磁波的**能流密度** $S = wu$

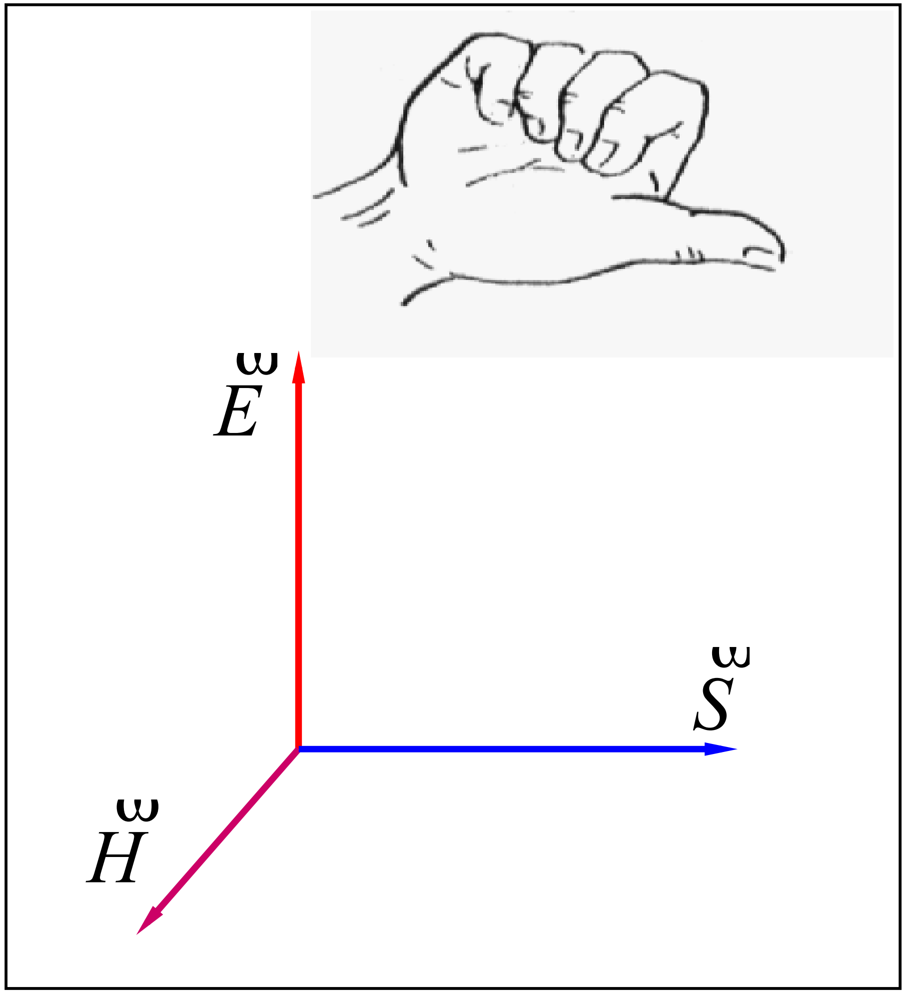
- 电磁场**能量密度** $w = w_{\mathrm{e}} + w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$

$$S = \frac{u}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = EH$$

$$u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad \sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$$

- 电磁波的**能流密度(坡印廷)矢量** $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$

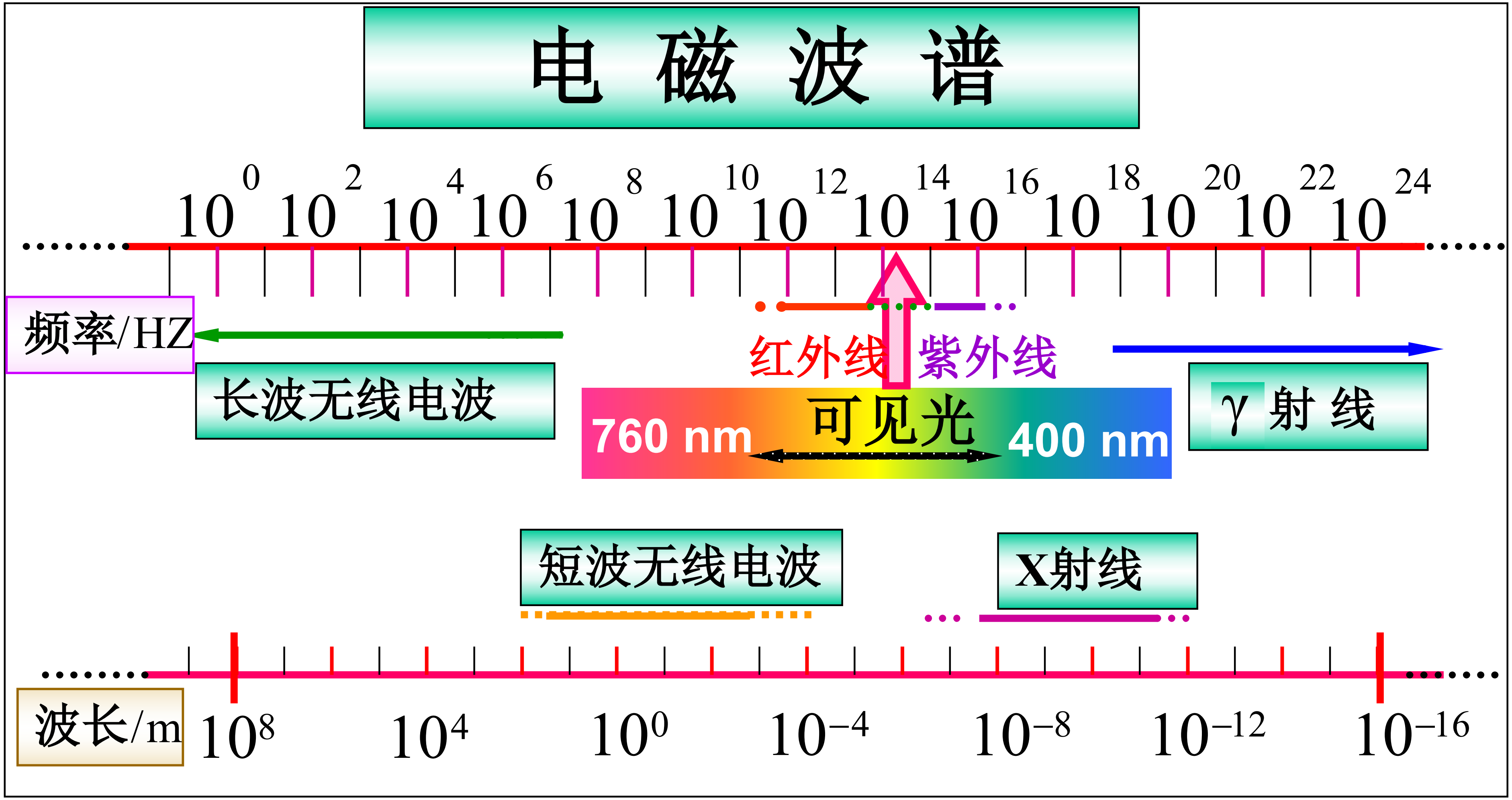
电磁波的能流密度(坡印廷)矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$



平面电磁波能流密度

平均值 $\bar{S} = \dfrac{1}{2} E_0 H_0$

四　电磁波谱



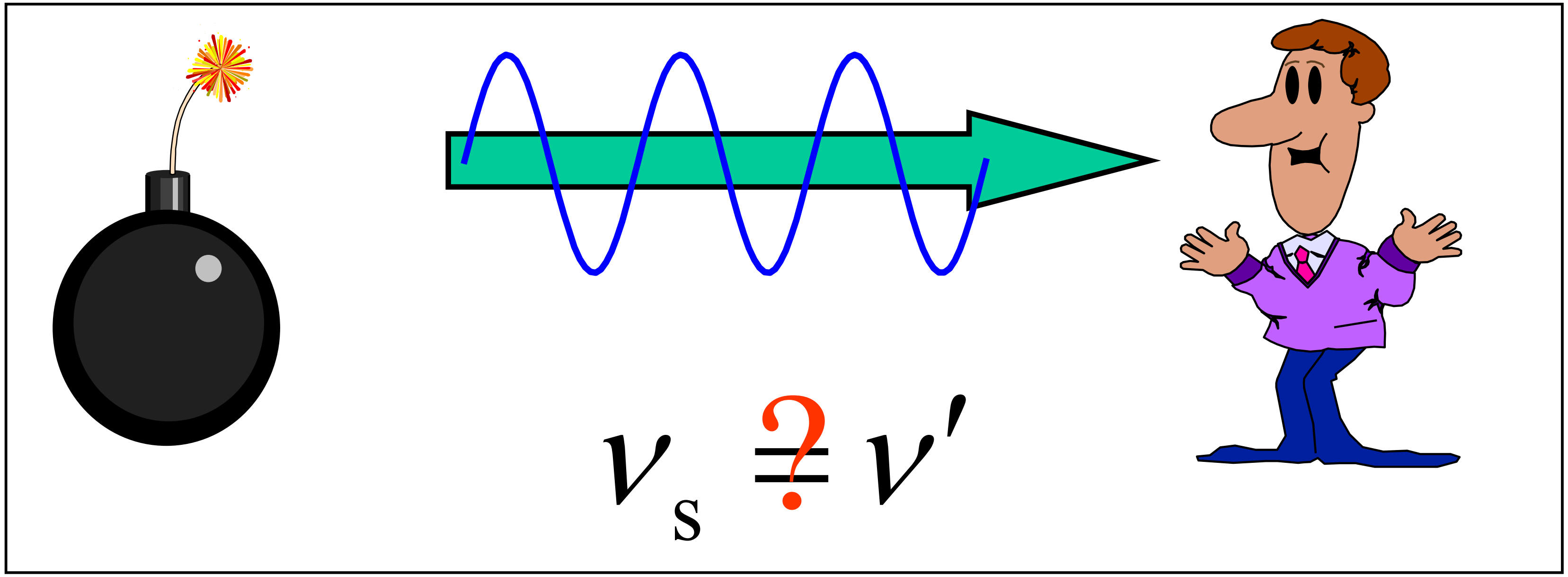
电 磁 波 谱
10^{0} 10^{2} 10^{4} 10^{6} 10^{8} 10^{10} 10^{12} 10^{14} 10^{16} 10^{18} 10^{20} 10^{22} 10^{24}
频率/HZ
长波无线电波
红外线
紫外线
760 nm
可见光
400 nm
γ 射 线
短波无线电波
X射线
波长/m
10^{8} 10^{4} 10^{0} 10^{-4} 10^{-8} 10^{-12} 10^{-16}

无线电波	3×10^{4} m ~ 0.1 mm
红 外 线	1 mm ~ 760 nm
可 见 光	760 nm ~ 400 nm
紫 外 线	400 nm ~ 5 nm
x 射 线	5 nm ~ 0.04 nm
γ 射 线	< 0.04 nm

10-9　多普勒效应

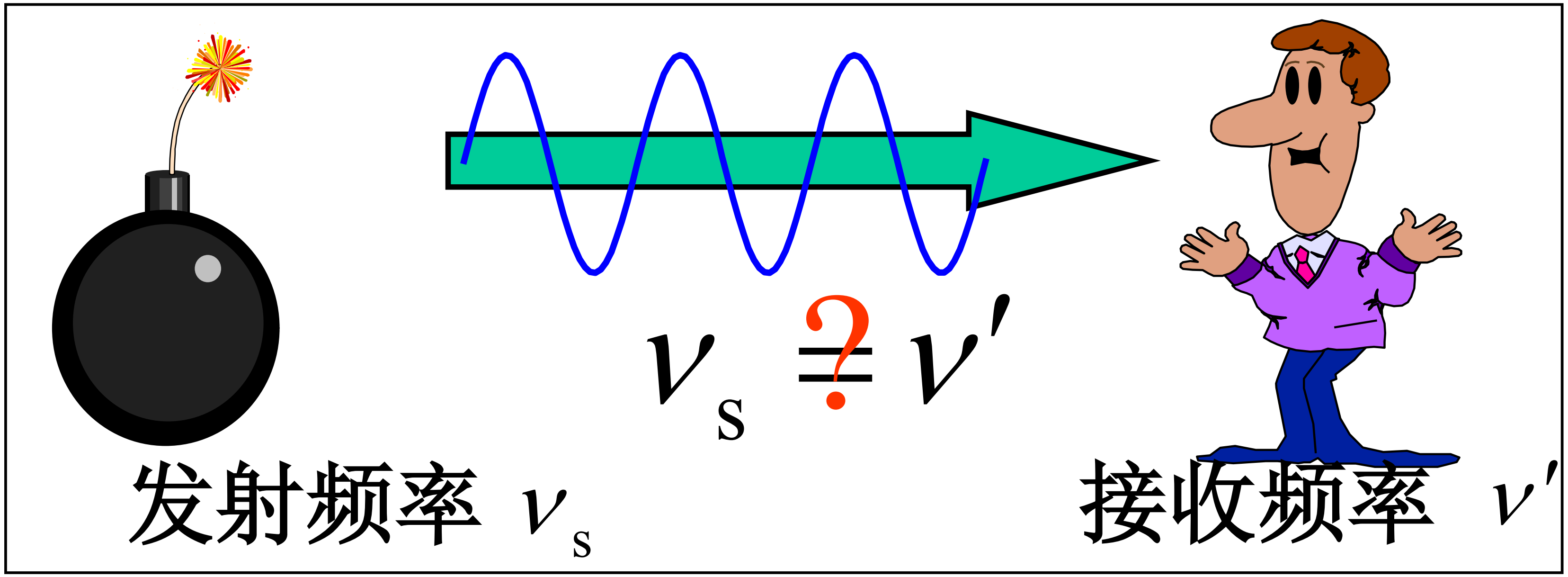
讨论

人耳听到的声音的频率与声源的频率一定相同吗？

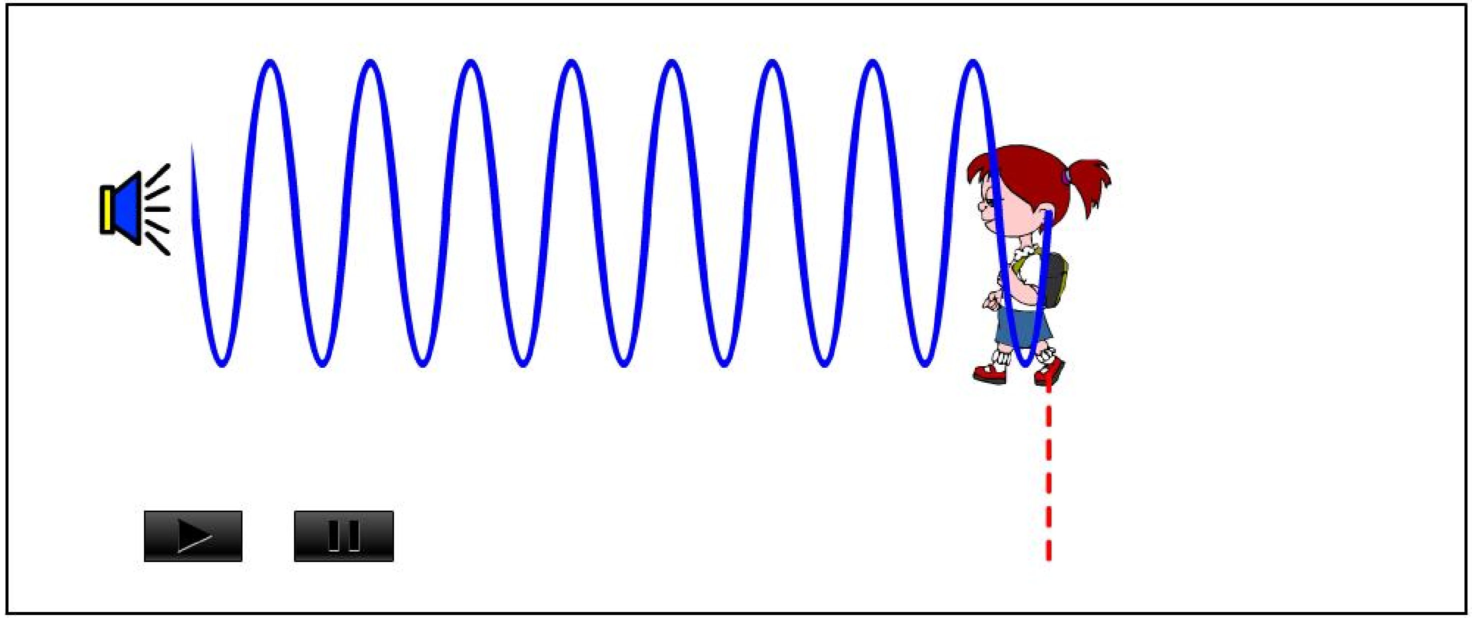


发射频率 ν_s　　　　接收频率 ν'

接收频率——单位时间内观测者接收到的振动次数或完整波数.



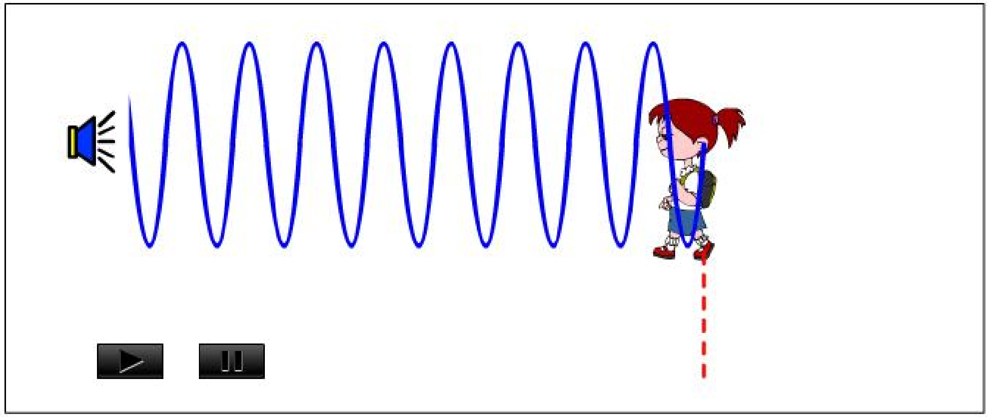
一 波源不动，观察者相对介质以 v_0 运动



观察者接收的频率

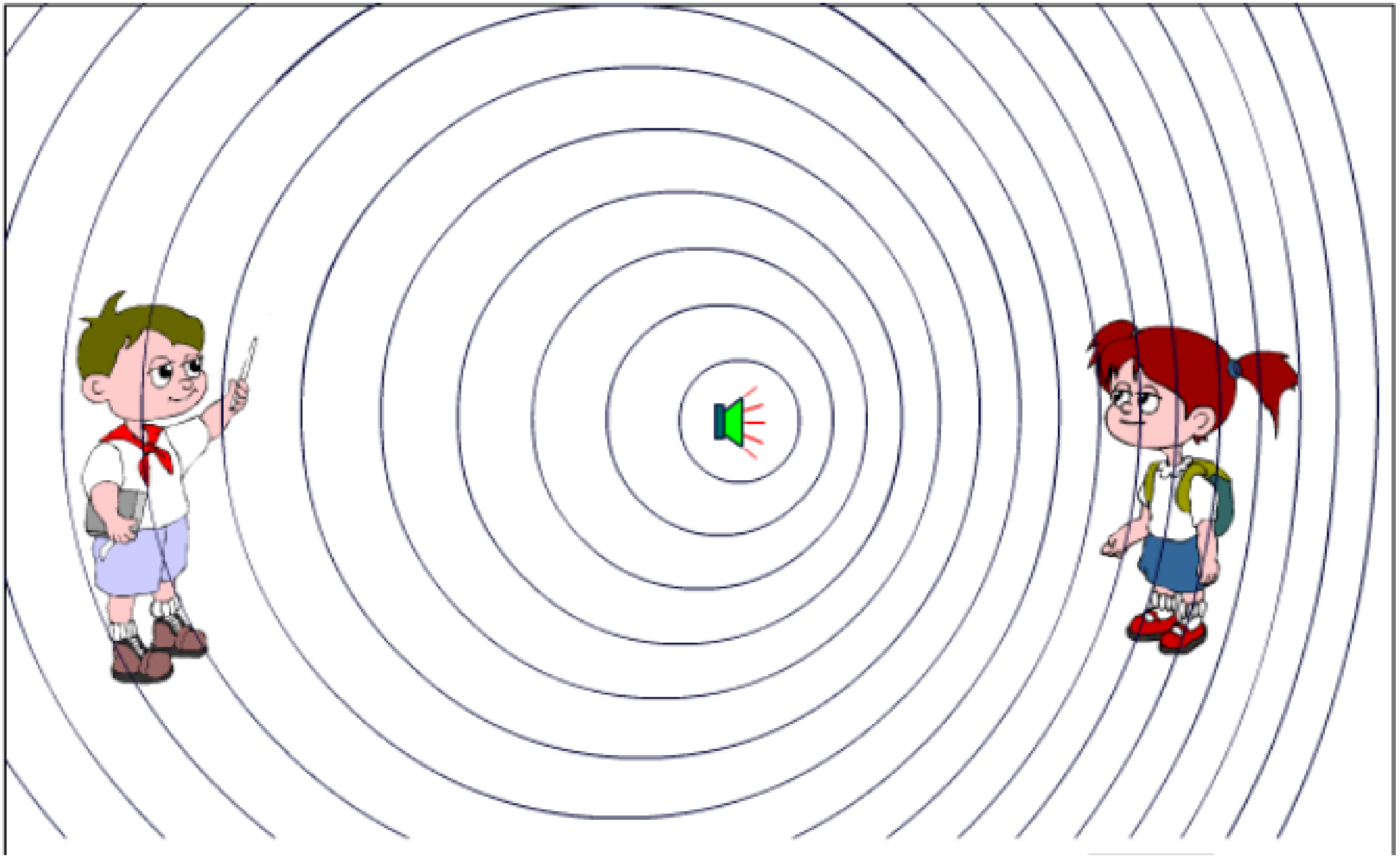
观察者向波源运动 $\nu' = \dfrac{u + v_0}{u}\nu$

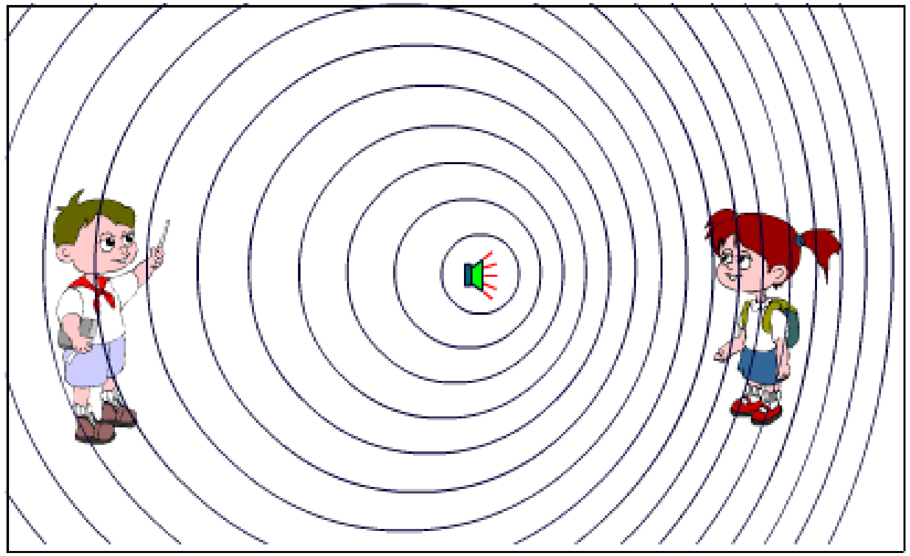
观察者远离波源运动 $\nu' = \dfrac{u - v_0}{u}\nu$

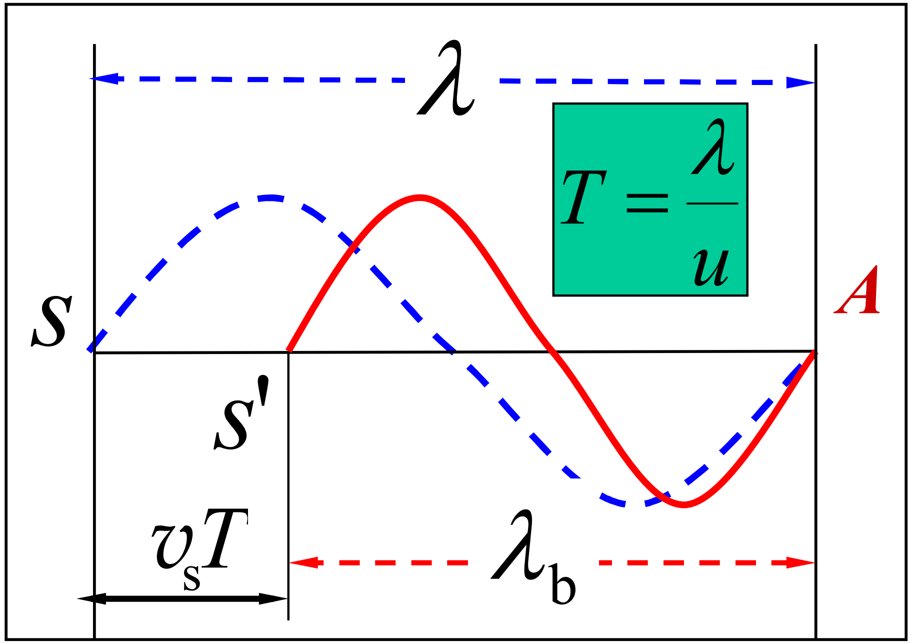


$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + \mathbf{v}_0}{\lambda} = \frac{u + \mathbf{v}_0}{u/\nu} = \frac{u + \mathbf{v}_0}{u}\nu$$

二 观察者不动，波源相对介质以v_s运动







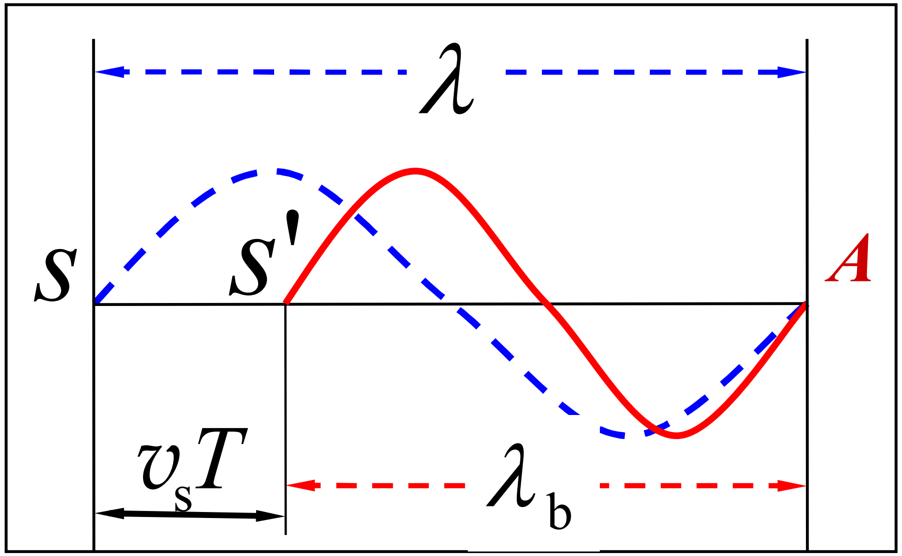
$$T' = \frac{\lambda - v_s T}{u} = \frac{\lambda_b}{u}$$

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \frac{u}{\lambda - v_s T} = \frac{u}{u - v_s}\nu$$

观察者接收的频率

波源向观察者运动 $\nu' = \dfrac{u}{u - v_s}\nu$

波源远离观察者运动 $\nu' = \dfrac{u}{u + v_s}\nu$



三 波源与观察者同时相对介质运动 (v_s, v_0)

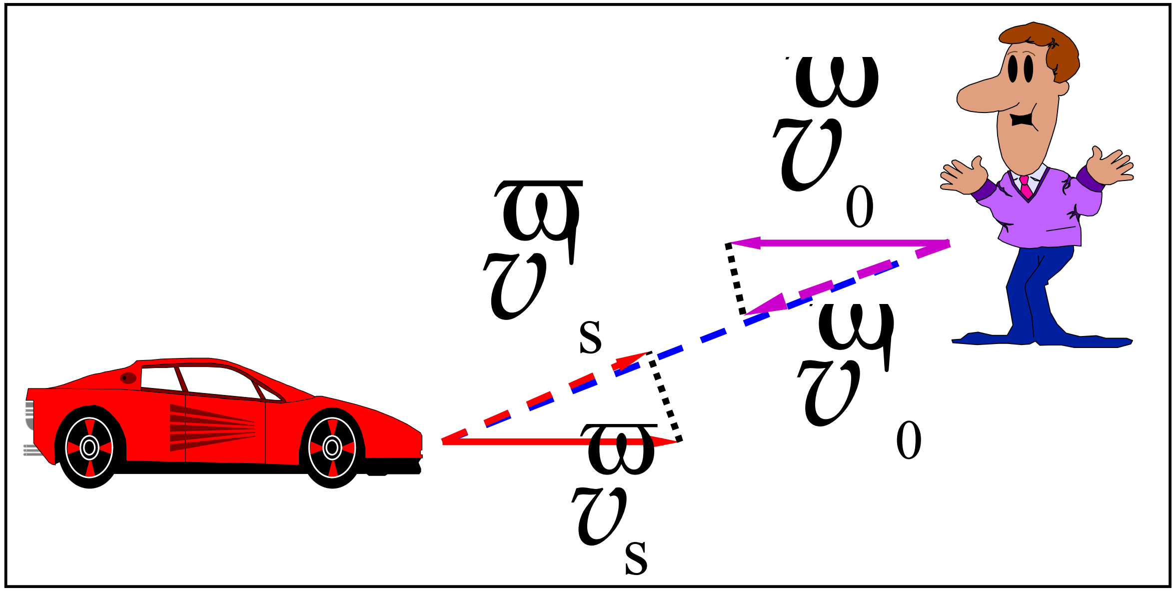
$$\boxed{\nu' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_s}\nu}$$

v_0 观察者向波源运动 + ，远离 −

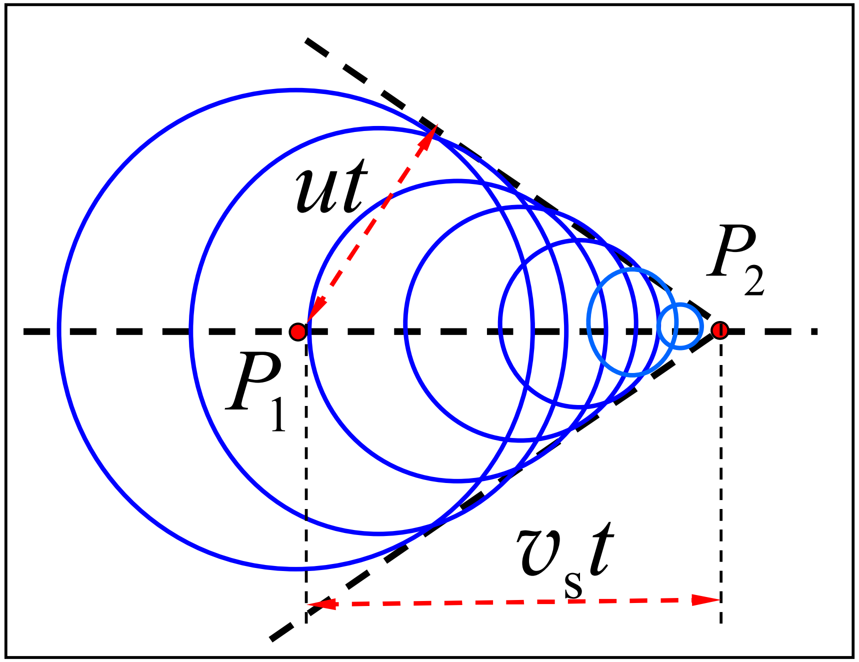
v_s 波源向观察者运动 − ，远离 +

若波源与观察者不沿二者连线运动

$$\nu' = \frac{u \pm v'_0}{u \mp v'_s}\nu$$



当 $v_s >> u$ 时，所有波前将聚集在一个圆锥面上，波的能量高度集中形成冲击波或激波，如核爆炸、超音速飞行等.



超音速的子弹
在空气中形成
的激波(冲击波)

所到之处，空气压强急剧升高，声能高度集中—产生声暴

多普勒效应的应用

(1) 交通上测量车速；

(2) 医学上用于测量血流速度；

(3) 天文学家利用电磁波红移说明大爆炸理论；

(4) 用于贵重物品、机密室的防盗系统；

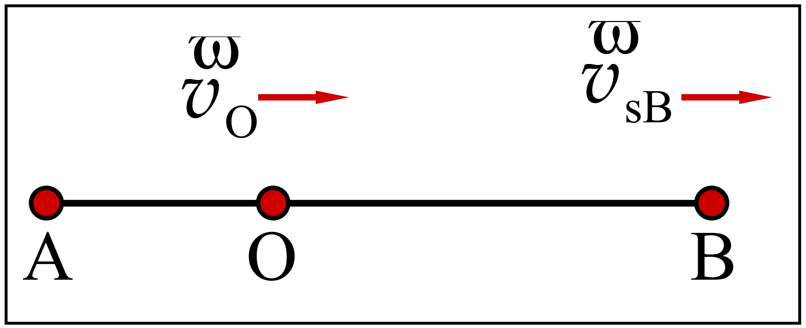
(5) 卫星跟踪系统等.

例1 A、B 为两个汽笛，其频率皆为500 Hz，A 静止，B 以$60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率向右运动. 在两个汽笛之间有一观察者O，以$30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速度也向右运动. 已知空气中的声速为$330\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求：

(1) 观察者听到来自A的频率；

(2) 观察者听到来自B的频率；

(3) 观察者听到的拍频.

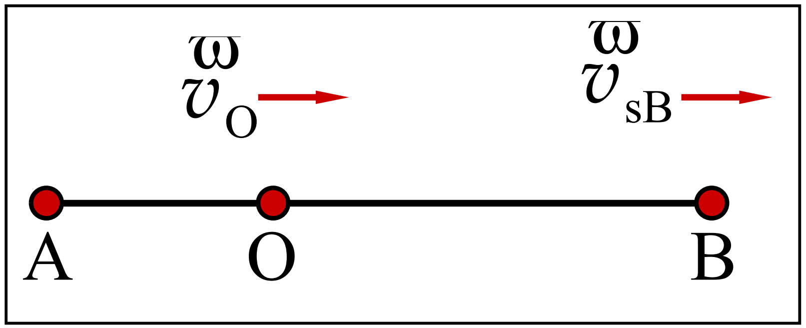


解 (1) 已知

$$u = 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},\ v_{\mathrm{sA}} = 0,\ v_{\mathrm{sB}} = 60\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\nu' = \frac{u \pm v_0}{u \,\mu\, v_{\mathrm{s}}} \nu$$

$$\nu' = \frac{330 - 30}{330} \times 500\mathrm{Hz} = 454.5\mathrm{Hz}$$

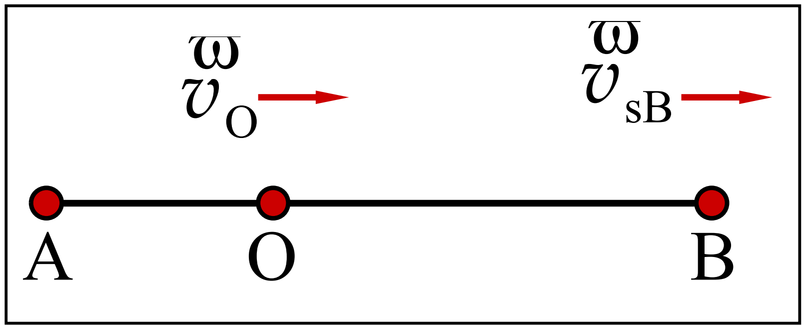


（2）观察者听到来自B 的频率

$$\nu'' = \frac{330+30}{330+60} \times 500\text{Hz} = 461.5\text{Hz}$$

（3）观察者听到的拍频

$$\Delta\nu = |\nu' - \nu''| = 7\ \text{Hz}$$



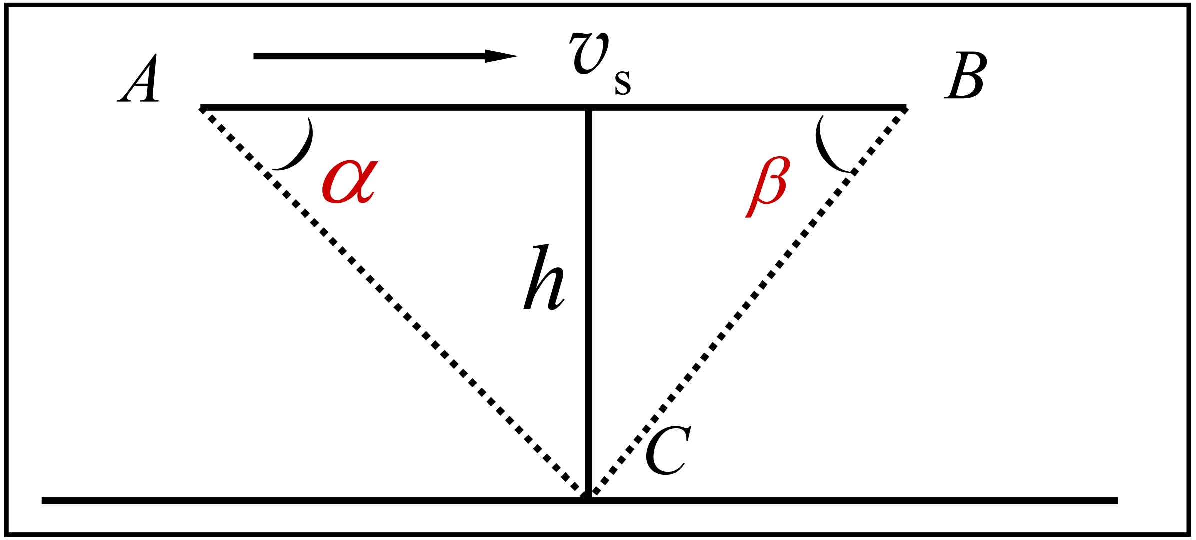
例2 利用多普勒效应测飞行的高度. 飞机在上空以速度 $v_s = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿水平直线飞行，发出频率为 $\nu_0 = 2\,000\ \mathrm{Hz}$ 的声波． 当飞机越过静止于地面的观察者上空时， 观察者在4s 内测出的频率由 $\nu_1 = 2\,400\ \mathrm{Hz}$ 降为 $\nu_2 = 1\,600\ \mathrm{Hz}$ ．已知声波在空气中的速度为 $u = 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ．试求飞机的飞行高度h.

已知 $v_s = 200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\nu_0 = 2\,000\ \mathrm{Hz}$
$\nu_1 = 2\,400\ \mathrm{Hz}$ $\nu_2 = 1\,600\ \mathrm{Hz}$ $u = 330\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 求h

解　如图所示，飞机在4s内经过的距离为AB

$$\overline{AB} = v_s t = h(\cot\alpha + \cot\beta)$$

$$v_{AC} = v_s\cos\alpha \qquad v_{BC} = v_s\cos\beta$$



$$v_1 = \frac{u}{u - v_{AC}} v_0 = \frac{u}{u - v_s \cos\alpha} v_0$$

$$v_2 = \frac{u}{u + v_{BC}} v_0 = \frac{u}{u + v_s \cos\beta} v_0$$

$$\cos\alpha = \frac{v_1 - v_0}{v_1 v_s} u = 0.275 \qquad \cos\beta = \frac{v_0 - v_2}{v_2 v_s} u = 0.413$$

$$h = \frac{v_s t}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{v_s t}{\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} + \dfrac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta}}}$$

$$= 1.08 \times 10^3 m$$