8.3 连续动态规划建模与求解

8.3.1 一个连续的例子

$$\min \quad z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

8.3.2 连续动态规划建模及求解

第一步　划分阶段

1. 分阶段，$k=1,2,\dots,n$

2. 确定决策变量 u_k。u_k 表示第 k 阶段所做出的决策。

3. 构造状态变量 s_k。s_k 表示第 k 阶段的初始状态，s_{k+1} 表示第 k 阶段的最终状态。

4. 给出状态方程

$$s_{k+1}=T(s_k,u_k) \text{ 或 } s_k=T(s_{k+1},u_k)$$

8.3.2 连续动态规划建模及求解

第二步　构造指标函数

- 总指标函数

$$V_{1,n+1}=V_1(s_1,u_1)+V_2(s_2,u_2)+\ldots+V_n(s_n,u_n)$$

- 前部指标函数

$$V_{1,k+1}=V_1(s_1,u_1)+\ldots+V_{k-1}(s_{k-1},u_{k-1})+V_k(s_k,u_k)$$
$$=V_{1,k}(s_1)+V_k(s_k,u_k)$$

- 后部指标函数

$$V_{k,n+1}=V_k(s_k,u_k)+V_{k+1}(s_{k+1},u_{k+1})+\ldots+V_n(s_n,u_n)$$
$$=V_k(s_k,u_k)+V_{k+1,n+1}(s_{k+1})$$

8.3.2 连续动态规划建模及求解

第三步 求解

- 用前部指标函数求解——正向法

$$opt\{V_{1,k+1}\} = opt\{V_1(s_1,u_1)+V_2(s_2,u_2)+\ldots+V_k(s_k,u_k)\}$$
$$= opt\{V_{1,k}+V_k(s_k,u_k)\}$$
$$= opt\{opt\{V_{1,k}\}+V_k(s_k,u_k)\}$$

先求出 $opt\{V_{1,2}\}$，再求出 $opt\{V_{1,3}\}$，最后求 $opt\{V_{1,n+1}\}$

由于$opt\{V_{1,t}\}$仅仅与状态s_{t+1}有关，因而也称$opt\{V_{1,t}\}$为前部最优值函数，用$f_t\{s_{t+1}\}$来表示，则上式可表示为

$$\begin{cases} f_1(s_2) = opt\{V_1(u_k, s_1)\} \\ f_k(s_{k+1}) = opt\{f_{k-1}(s_k)+V_k(u_k,s_k)\}(k \ge 2) \end{cases}$$

8.3.3 动态规划的建模及求解

第三步　求解

- 用后部指标函数求解——反向法

$$opt\{V_{k,n+1}\} = opt\{V_k(s_k,u_k) + \ldots + V_{n-1}(s_{n-1},u_{n-1}) + V_n(s_n,u_n)\}$$

$$= opt\{V_k(s_k,u_k) + V_{k+1,n+1}\}$$

$$= opt\{V_k(s_k,u_k) + opt\{V_{k+1,n+1}\}\}$$

先求出 $opt\{V_{n,n+1}\}$，再求出 $opt\{V_{n-1,n+1}\}$，

最后求 $opt\{V_{1,n+1}\}$

由于$opt\{V_{t,n+1}\}$仅仅与状态s_t有关，因而也称$opt\{V_{t,n+1}\}$为后部最优值函数，用$f_t\{s_t\}$来表示，则上式可表示为

$$\begin{cases} f_n(s_n) = opt\{V_n(u_n, s_n)\} \\ f_k(s_k) = opt\{f_{k+1}(s_{k+1}) + V_k(u_k, s_k)\} (1 \le k \le n-1) \end{cases}$$

8.3.3 动态规划的建模举例

$$\min \quad z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

8.3.3.1 建模举例—正向求解

- 第一步

1. 三个阶段
2. 决策变量为 $x_i, i=1,2,3$
3. 状态变量 $s_i, i=1,2,3,4$
4. 状态方程为

$$
\begin{cases}
s_1 = 0 \\
s_2 = s_1 + x_1 = x_1 \\
s_3 = s_2 + 2x_2 = x_1 + 2x_2 \\
s_4 = s_3 + 3x_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c
\end{cases}
$$

8.3.3.1 动态规划的建模举例—正向求解

- 第二步　构造指标函数(仅构造前部指标函数)

$$
\begin{cases}
V_{1,2} = x_1^2 \\
V_{1,3} = V_{1,2} + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \\
V_{1,4} = V_{1,3} + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{cases}
$$

8.3.3.1 动态规划的建模举例—正向求解

- 第三步　求解

$$\min\{V_{1,2}\} = \min\{x_1^2\} = s_2^2 \qquad (s_2 = s_1 + x_1 = x_1)$$

$$\min\{V_{1,3}\} = \min\{V_{1,2} + x_2^2\}$$

$$= \min\{\min\{V_{1,2}\} + x_2^2\}$$

$$= \min\{s_2^2 + x_2^2\} \qquad (s_3 = s_2 + 2x_2)$$

$$= \min\{(s_3 - 2x_2)^2 + x_2^2\}$$

$$= s_3^2 / 5$$

8.3.3.1 动态规划的建模举例—正向求解

- 第三步　求解

$$\min\{V_{1,4}\} = \min\{V_{1,3} + x_3^2\}$$

$$= \min\{\min\{V_{1,3}\} + x_3^2\}$$

$$= \min\{s_3^2/5 + x_3^2\} \qquad (s_4 = s_3 + 3x_3)$$

$$= \min\{(s_4 - 3x_3)^2/5 + x_3^2\}$$

$$= s_4^2/14 = c^2/14 \qquad (s_4 = c)$$

从而 $x_1 = c/14, x_2 = c/7, x_3 = 3c/14$

最优解由极值的条件逆推可得

8.3.3.2 建模举例—反向求解(一）

- 第一步

1. 三个阶段
2. 决策变量为 $x_i, i=1,2,3$
3. 状态变量 $s_i, i=1,2,3,4$
4. 状态方程为

$$\begin{cases} s_4 = 0 \\ s_3 = s_4 + 3x_3 = 3x_3 \\ s_2 = s_3 + 2x_2 = 2x_2 + 3x_3 \\ s_1 = s_2 + x_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

8.3.3.2 建模举例—反向求解(一）

- 第二步　构造指标函数(仅构造后部指标函数)

$$\begin{cases} V_{3,4} = x_3^2 \\ V_{2,4} = V_{3,4} + x_2^2 = x_2^2 + x_3^2 \\ V_{1,4} = V_{2,4} + x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$$

8.3.3.2 建模举例—反向求解(一)

- 第三步　求解

$$\min\{V_{3,4}\} = \min\{x_3^2\} = s_3^2/9$$

$$\begin{aligned}\min\{V_{2,4}\} &= \min\{V_{3,4} + x_2^2\} \\ &= \min\{\min\{V_{3,4}\} + x_2^2\} \\ &= \min\{s_3^2/9 + x_2^2\} \qquad (s_2 = s_3 + 2x_2) \\ &= \min\{(s_2 - 2x_2)^2/9 + x_2^2\} \\ &= s_2^2/13\end{aligned}$$

8.3.3.2 建模举例—反向求解(一)

- **第三步　求解**

$$
\begin{aligned}
\min\{V_{1,4}\} &= \min\{V_{2,4} + x_1^2\} \\
&= \min\{\min\{V_{2,4}\} + x_1^2\} \\
&= \min\{s_2^2/13 + x_1^2\} \qquad (s_2 = s_1 + x_1) \\
&= \min\{(s_1 - x_1)^2/13 + x_1^2\} \\
&= s_1^2/14 = c^2/14 \qquad (s_1 = c)
\end{aligned}
$$

从而 $x_1 = c/14, x_2 = c/7, x_3 = 3c/14$

8.3.3.3 建模举例—反向求解(二）

- 第一步

1. 三个阶段
2. 决策变量为 $x_i, i=1,2,3$
3. 状态变量 $s_i, i=1,2,3,4$
4. 状态方程为

$$\begin{cases} s_4 = c = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s_3 = s_4 - 3x_3 = x_1 + 2x_2 \\ s_2 = s_3 - 2x_2 = x_1 \\ s_1 = s_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

8.3.3.3 建模举例—反向求解(二）

- 第二步　构造指标函数(仅构造后部指标函数)

$$
\begin{cases}
V_{3,4} = x_3^2 \\
V_{2,4} = V_{3,4} + x_2^2 = x_2^2 + x_3^2 \\
V_{1,4} = V_{2,4} + x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{cases}
$$

8.3.3.3 建模举例—反向求解(二）

- 第三步　求解

$$\min\{V_{3,4}\} = \min\{x_3^2\} \qquad (s_3 = s_4 - 3x_3 = c - 3x_3)$$

$$= \min\{(c - s_3)^2 / 9\}$$

$$= (c - s_3)^2 / 9$$

$$\min\{V_{2,4}\} = \min\{V_{3,4} + x_2^2\}$$

$$= \min\{\min\{V_{3,4}\} + x_2^2\}$$

$$= \min\{(c - s_3)^2 / 9 + x_2^2\} \qquad (s_2 = s_3 - 2x_2)$$

$$= \min\{(c - 2x_2 - s_2)^2 / 9 + x_2^2\}$$

$$= (c - s_2)^2 / 13$$

8.3.3.3 建模举例—反向求解(二）

- 第三步　求解

$$\min\{V_{1,4}\} = \min\{V_{2,4} + x_1^2\}$$

$$= \min\{\min\{V_{2,4}\} + x_1^2\}$$

$$= \min\{(c - s_2)^2 / 13 + x_1^2\} \qquad (s_2 = s_1 + x_1 = x_1)$$

$$= \min\{(c - x_1)^2 / 13 + x_1^2\} \qquad (s_1 = 0)$$

$$= c^2 / 14$$

从而 $x_1 = c/14, x_2 = c/7, x_3 = 3c/14$

8.3.4 证明平均不等式

证明 $$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\left(x_i \geq 0, i=1,2\ldots,n\right)$$

思路

设$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = c$

如果能够证明 $\min\{x_1+x_2+\ldots+x_n\} = n\sqrt[n]{c}$

那么无疑有 $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

等价于

$$\min \quad z = x_1+x_2+\ldots+x_n$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = c \\ x_i \geq 0, i=1,2\ldots,n \end{cases}$$

8.3.4 证明平均不等式

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c \\ x_i > 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

需证 $\min\{x_1 + x_2 + x_3\} = 3\sqrt[3]{c}\,(n = 3)$

解：分为三个阶段

引入状态变量$s_i, i = 1, 2, 3, 4$

$s_1 = 1;$

$s_2 = s_1 \cdot x_1;$

$s_3 = s_2 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2;$

$s_4 = s_3 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c$

8.3.4 证明平均不等式

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c \\ x_i > 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

构造指标函数及其递推方程如下

总指标函数：$V_{1,4} = x_1 + x_2 + x_3$

子指标函数：

$$V_{1,2} = x_1$$

$$V_{1,3} = x_1 + x_2$$

$$V_{1,4} = x_1 + x_2 + x_3$$

8.3.4 证明平均不等式

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c \\ x_i > 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

应用最优化原理计算

$$\min\left\{V_{1,2}\right\} = \min\left\{x_1\right\} = s_2 = f_1(s_2) \qquad s_2 = s_1 \cdot x_1 = x_1$$

$$\min\left\{V_{1,3}\right\} = \min\left\{V_{1,2} + x_2\right\}$$

$$= \min\left\{\min\{V_{1,2}\} + x_2\right\}$$

$$= \min\left\{s_2 + x_2\right\} \qquad s_3 = s_2 \cdot x_2$$

$$= \min\left\{\frac{s_3}{x_2} + x_2\right\} = 2\sqrt{s_3}$$

8.3.4 证明平均不等式

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c \\ x_i > 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

应用最优化原理计算

$$\begin{aligned} \min\left\{V_{1,4}\right\} &= \min\left\{V_{1,3} + x_3\right\} \\ &= \min\left\{\min\{V_{1,3}\} + x_3\right\} \\ &= \min\left\{2\sqrt{s_3} + x_3\right\} \\ &= \min\left\{2\sqrt{\frac{c}{x_3}} + x_3\right\} = 3\sqrt[3]{c} \end{aligned}$$

$$s_4 = s_3 \cdot x_3 = c$$