11-3 作简谐振动的小球, 速度的最大值为 $v_m = 3\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$, 振幅为 $A = 2$ cm, 若令速度具有正最大值的某时刻为 $t = 0$, 求 (1) 振动周期; (2) 加速度的最大值; (3) 振动表达式.

解: 设小球的位移-时间方程: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

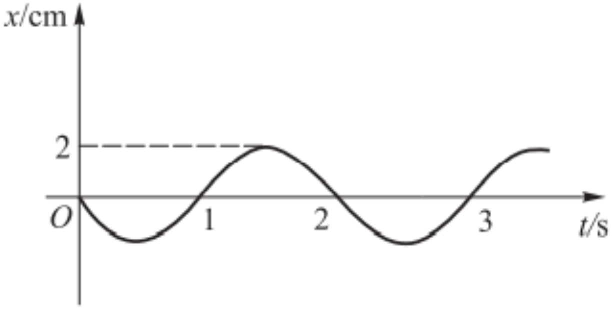
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

由题意:

$$\begin{cases} A = 0.02. \\ A\omega = 0.03. \\ -\sin(\omega t + \varphi)\big|_{t=0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 1.5 \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(1) $T = \frac{4\pi}{3}$.　　(2) $x = 0.02\cos\left(1.5t - \frac{\pi}{2}\right)$ (m).

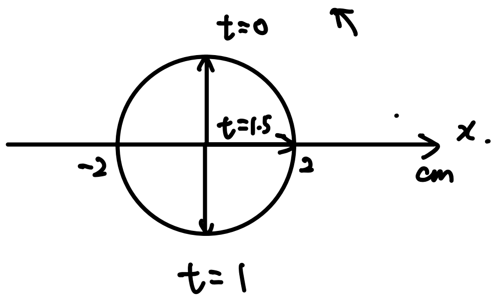
11-4 如题图 11-4 所示简谐振动的 x-t 图, 写出该简谐振动的表达式, 并要求画出 $t=0, t=1$ s 及 $t=1.5$ s 时刻所对应的旋转矢量.



题图 11-4

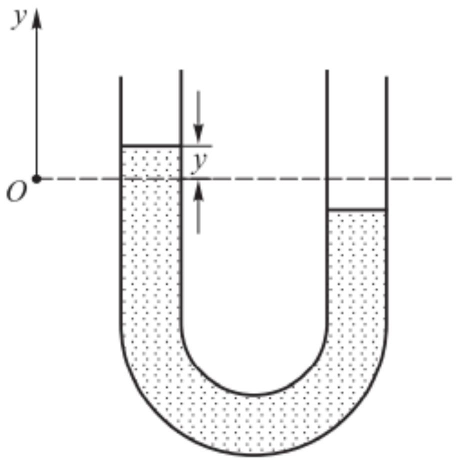
解: 如图 $A = 0.02$ m. $T = 2$s. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$.



$\therefore x(t) = 0.02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

11-10 质量为 $m = 121$ g 的水银装在 U 形管中, 如题图 11-10 所示, 管的截面积 $S = 0.30\ \mathrm{cm}^2$. 若使两边水银面相差 $2y_0$, 然后让水银面上下振动, 求振动频率, 并回答为什么水银是作简谐振动? 已知水银密度为 $13.6\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.



题图 11-10

解: 如图建立坐标系. 令液面在x轴以上的高度为y.

$$E_p = \rho\cdot S\cdot y\cdot g\cdot y = \rho S g\cdot y.$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

由机械能守恒 $\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \rho S g\cdot y^2 = const.$

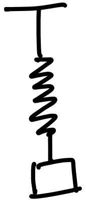
两边作微分. $mv\,dv + 2\rho S g y\,dy = 0.$

同时除以dt, $mv\frac{dv}{dt} + 2\rho S g y\cdot v = 0.$

$v \neq 0.$ $\frac{dy}{dt^2} + \frac{2\rho S g}{m}y = 0.$ ⇒ 满足简谐运动方程.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho S g}{m}} = 1.294\ (\mathrm{Hz}).$$

11-14 一物块悬挂于弹簧的下端并作简谐振动, 当物块的位移为振幅的一半时, 这个振动系统的动能占总能量的多少? 势能占多少? 又位移多大时, 动能、势能各占总能的一半?

解: 

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$.

$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$.

取物块重力与弹力的平衡点为势能零点. $E = \frac{1}{2}kA^2$

(1) 当 $|x| = \frac{A}{2}$ 时. $\cos(\omega t+\varphi) = \pm\frac{1}{2}$

此时 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot A^2\omega^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3A^2}{8} \cdot m \cdot \frac{k}{m} = \frac{3A^2k}{8} = \frac{3E}{4}$

由机械能守恒, $E_p = E - E_k = \frac{A^2k}{8} = \frac{E}{4}$

(2) 要使 $E_k = \frac{1}{4}kA^2$.

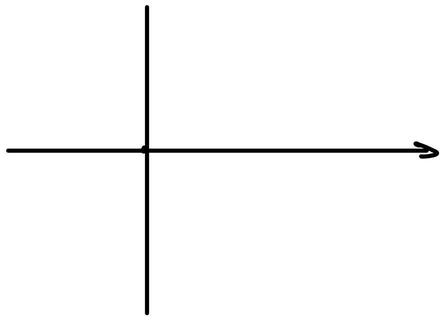
$\frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}m A^2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos^2\varphi_t \Rightarrow \cos\varphi_t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

$\Delta x = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right| A = \frac{\sqrt{2}-1}{2}A$.

11-16 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动:

$$x_1 = 0.05\cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right),$$
$$x_2 = 0.06\cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right).$$

其中 x 以 m 计, t 以 s 计. (1) 求合振动的振幅和初相: (2) 若另有一振动 $x_3 = 0.07\cos(10t + \varphi)$, 问 φ 为何值时, $x_1 + x_3$ 的振幅为最大, φ 为何值时, $x_2 + x_3$ 的振幅为最小.



(1) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.0781\ \text{m}$

$\varphi = \arctan\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \arctan 11 = 1.48\ \text{rad}$

(2) 当两振动同相时，振幅最大. 即 $\varphi_3 - \varphi_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

取 $k=0$. $\varphi_3 = \varphi_1 = \frac{3}{4}\pi$

当两振动反相时，振幅最小. 即 $\varphi_3 - \varphi_2 = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

取 $k=-1$ $\varphi_3 = -\frac{3}{4}\pi$.

11-19 用最简单的方法分别求出下面两组简谐振动合成后所得的合振动的振幅:

(1) $x_1 = 5\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ cm, $x_2 = 5\cos\left(3t + \dfrac{7\pi}{3}\right)$ cm.

(2) $x_1 = 5\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ cm, $x_2 = 5\cos\left(3t + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ cm.

(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$.

两振动同频. 同方向. 同相. $A = A_1 + A_2 = 10$ cm

(2) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

两振动同频. 同方向. 反相. $A = |A_1 - A_2| = 0$

11-20 已知某音叉与频率为 511 Hz 的音叉产生的拍频为每秒一次, 而与另一频率为 512 Hz 的音叉产生的拍频为每秒两次, 求此音叉频率.

解: $\nu = \nu_2 - \nu_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} |511 - \nu| = 1 \\ |512 - \nu| = 2 \end{cases} \Rightarrow \nu = 510 \text{ Hz}.$$

11-21 示波管的电子束受到两个相互垂直的电场的作用. 电子在两个方向上的位移分别为 $x = A\cos\omega t$ 和 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$, 求在 $\varphi = 0, \varphi = 30°$ 及 $\varphi = 90°$ 各种情况下, 电子在荧光屏上的轨迹方程.

解: 轨迹方程为. $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} - 2\frac{xy}{A^2}\cos\varphi = \sin^2\varphi$.

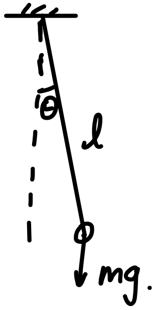
1° $\varphi = 0$: $(x-y)^2 = 0$ $\Rightarrow$ 轨迹为直线 $y = x$

2° $\varphi = 30°$ $x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = \frac{A^2}{4}$ $\Rightarrow$ 轨迹为斜椭圆.

3° $\varphi = 90°$ $x^2 + y^2 = A^2$. $\Rightarrow$ 轨迹为圆心 $(0,0)$. 半径 A 的圆

11-24 有一单摆, 长为 1.0 m, 最大摆角为 5°. 设开始时摆角最大, 试写出此单摆的振动表达式.

解: $\theta_{max}=5^\circ$ 存在近似关系 $\theta\approx\sin\theta$



$$-mgl\sin\theta=J\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow\quad\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\theta=A\cos(\omega t+\varphi).$$

$$A=5^\circ\quad\varphi=0.\qquad\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=3.13.$$

$$\theta=\frac{\pi}{36}\cos 3.13t\quad(\text{rad}).$$