大学物理学

第 1 篇 力 学

力学(mechanics)研究对象

机械运动

宏观物体之间(或物体内各部分之间)的相对位置(position)变动

力学

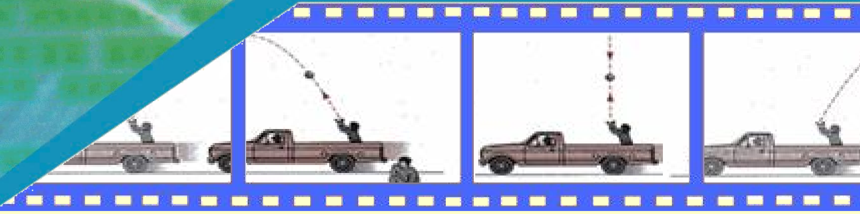
运动学

动力学

静力学

力学篇

第1章 质点运动学



第1章 质点运动学

质点运动学的任务: 描述作机械运动的物体在空间(space)的位置(position)随时间(time)变化的关系, 不涉及运动变化的原因.

§1-1 运动 时空 测量

1.1.1 物质与运动

物质(matter): 客观存在, 能量的表达.

运动(motion): 物质的固有属性.

真空(vacuum): 一切场的基态, 实物与场都是真空的激发态.

实物与场的主要区别: 能量密度$\rho_{实物} >> \rho_{场}$

场的激发状态——出现相应的粒子, 粒子以一定的方式聚集起来就构成实物.

1.1.3 国际单位制(SI)与量纲

1960年, 第十一届国际计量大会通过了国际单位制SI

基本物理量

名 称	单 位
长度(length) L	米 m
时间(time) T	秒 s
质量(mass) M	千克 kg
电流(electric current) I	安培 A
热力学温度(thermodynamic temperature) T	开尔文 K
物质的量(amount of substance) N	摩尔 mol
发光强度(luminous intensity) J	坎德拉 cd

导出量: 基本物理量构成, 对应单位为导出单位.

量纲(dimension): 度量物理量单位的**类别**. 不考虑数字因素时, 某一物理量用基本量表示时, 表达式中各基本量的指数(次幂).

用L、M和T分别表示长度、质量和时间三个基本量的量纲, 其他力学量Q的量纲与基本量量纲之间的关系可按下列形式表达出来:

$$\dim Q = \mathrm{L}^{p}\ \mathrm{M}^{q}\ \mathrm{T}^{s}$$

其中p, q, s为量纲指数. 如速度$\dim Q = \mathrm{L\,T^{-1}}$.

注: ① 只有量纲相同的物理量才能相加减或用等号联接.

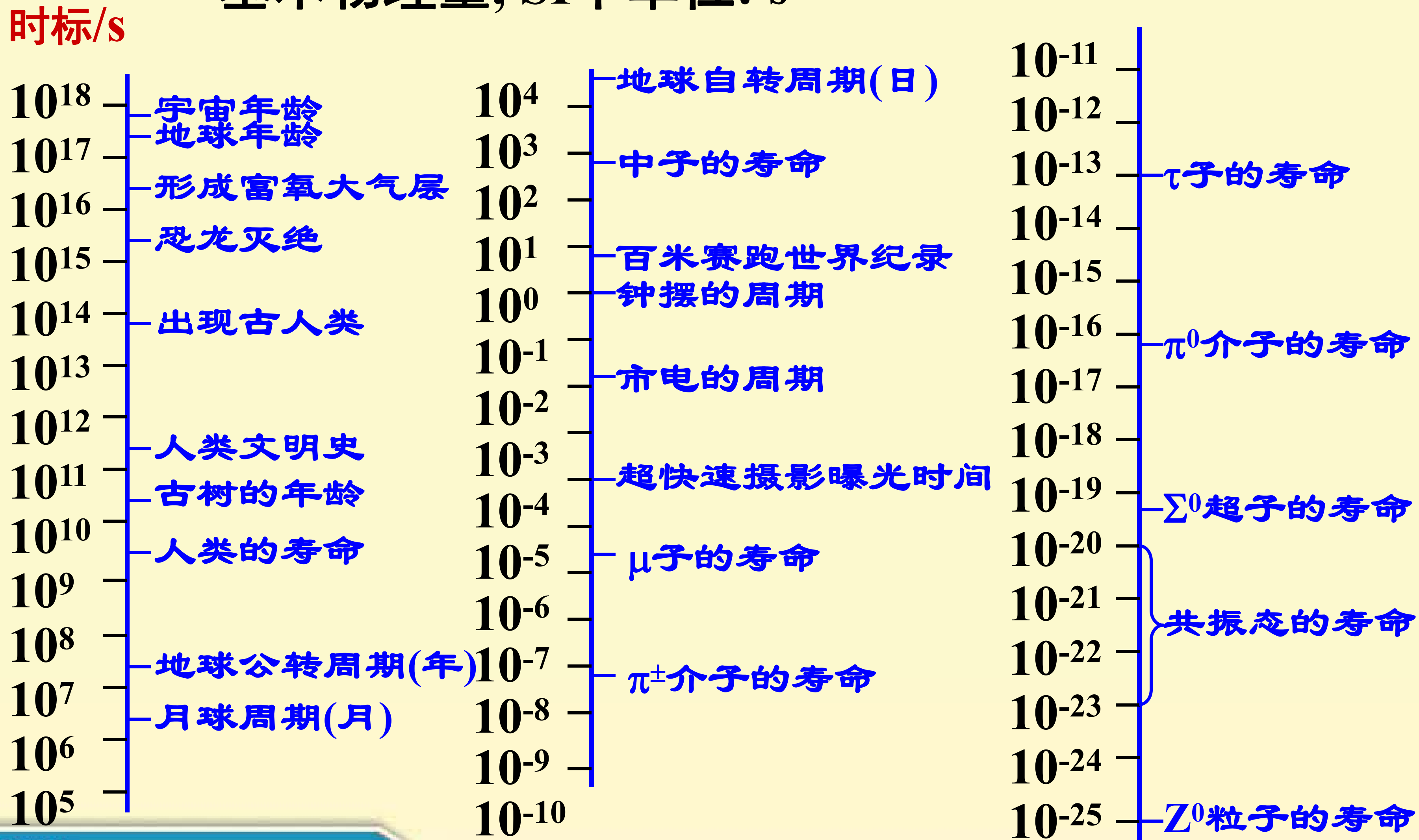
② 无量纲量可以有单位. 如行星轨道周期变短的速率其单位是秒/世纪, 但无量纲.

③ 无量纲的量常常有重要应用.

1.1.4 时间与空间

1. 时间t: 反映物质运动过程的持续性和顺序性.

基本物理量, SI中单位: s



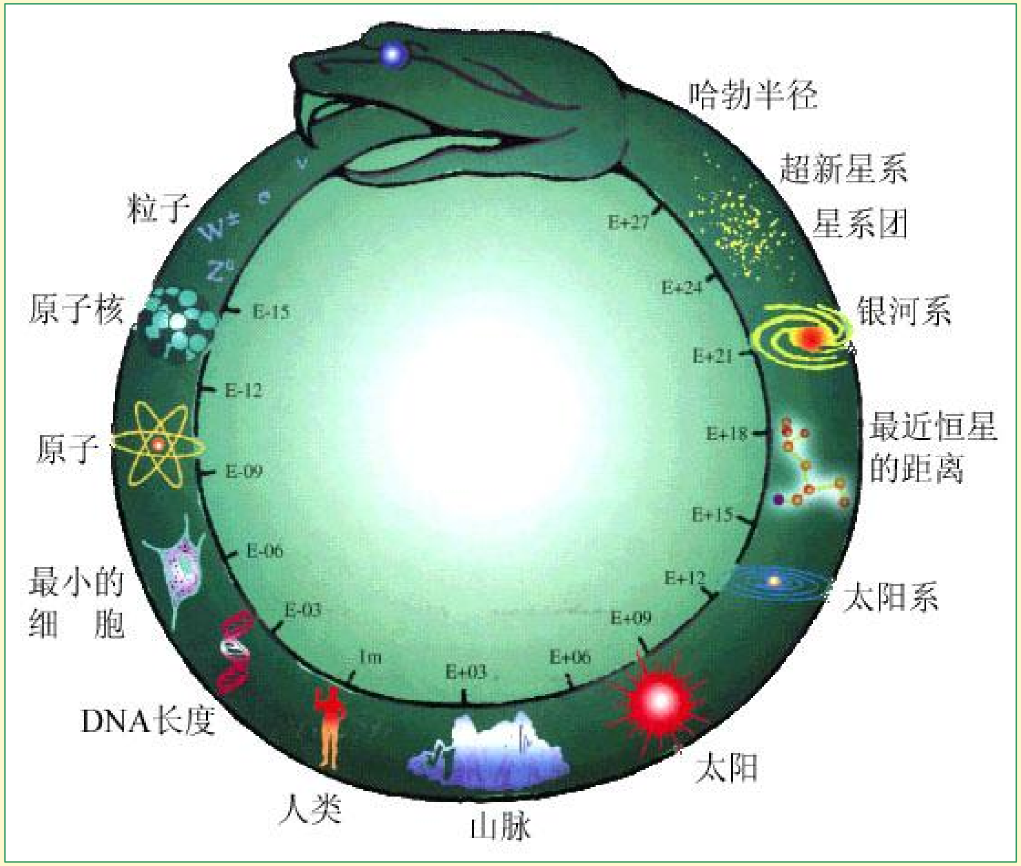
2. 空间: 反映物质存在(运动)的广延性.

在三维空间里的位置可由三个相互独立的坐标确定.

空间长度的测量: 空间中二点间的距离

米(meter)的标准

1983年10月第十七届国际计量大会通过:米是光在真空中1/299 792 458秒的时间间隔内运行路程(distance)的长度



1.1.5 参考系和坐标系

- 物体运动具有绝对性
- 描述物体运动具有相对性

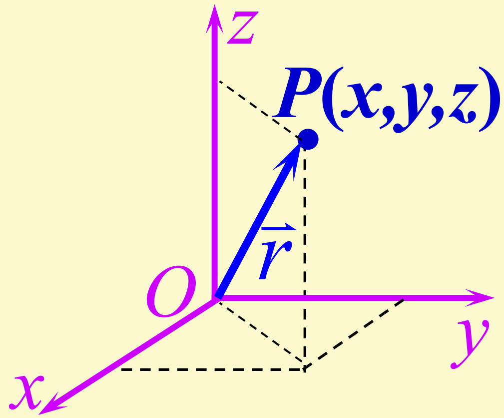
1. 参考系(frame of reference): 为了描述一个物体的运动而选定的另一个作为参考的物体.

注: 任何实物物体均可被选作 参考系. 任何形式的场都不可选作参考系.

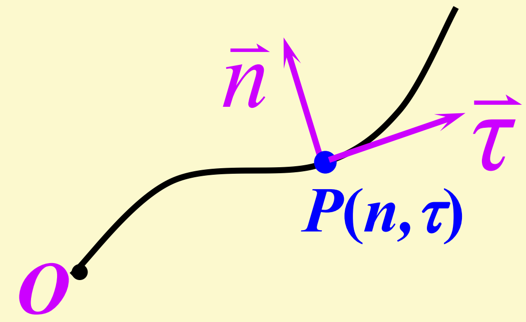
默认地面参考系

2. 坐标系(system of coordinates): 用以标定物体的空间位置而设置的坐标系统, 固结于参考系上的一个数学抽象.

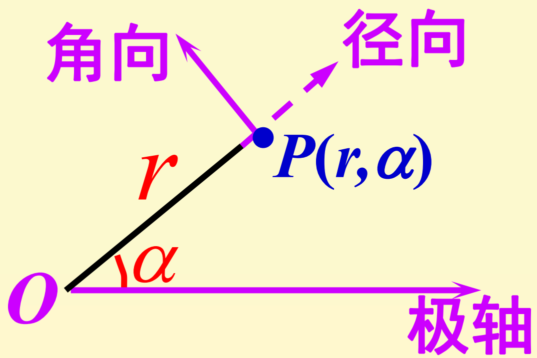
常见的坐标系:



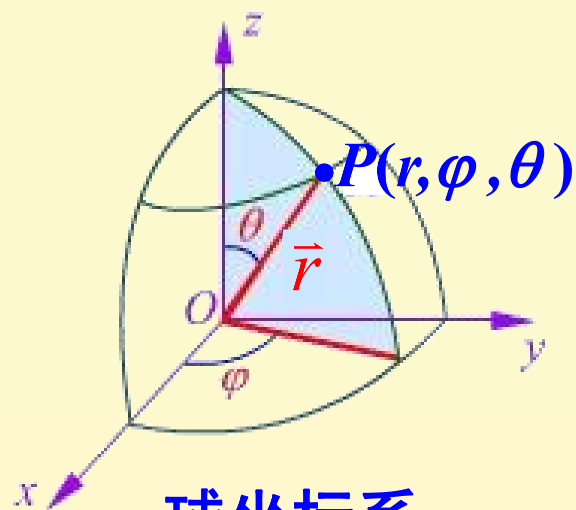
直角坐标系



自然坐标系



极坐标系



球坐标系

§1-2 质点运动的描述

1.2.1 质点(particle)

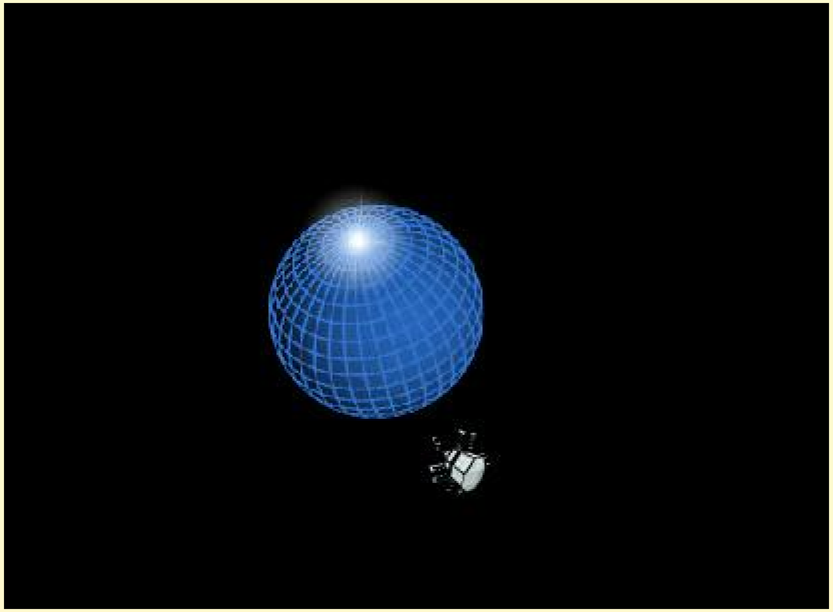
定义: 物体的线度和形状在所研究问题中可以忽略不计时, 这个物体被称为**质点**.

以下情况的实物均可以抽象为一个质点:

① 研究问题中物体的形状和大小可以忽略不计

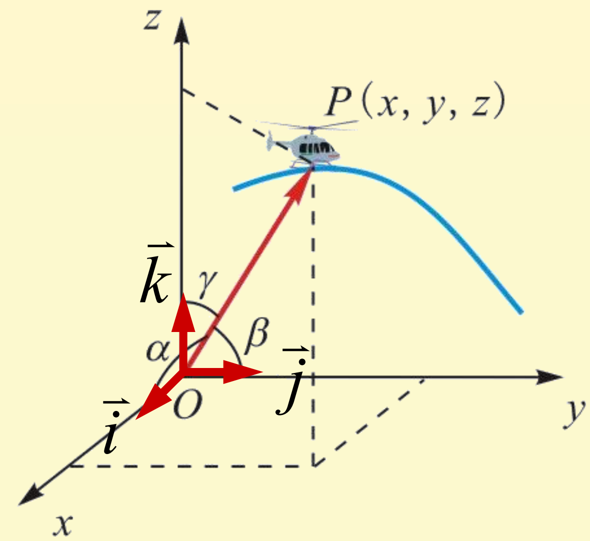
② 物体上各点的运动情况相同(平动)

③ 各点运动对总体运动影响不大



1.2.2 位置矢量与运动方程

1. 位置矢量(矢径, 位矢) (position vector): 从坐标原点O出发, 指向质点所在位置P 的一有向线段 —— 描述质点在空间的位置



直角坐标系中:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

单位矢量: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{r} \begin{cases} \text{大小:} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{方向:} \quad \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \quad \cos\beta = \dfrac{y}{r} \quad \cos\gamma = \dfrac{z}{r} \end{cases}$$

特性: 矢量性

瞬时性

相对性

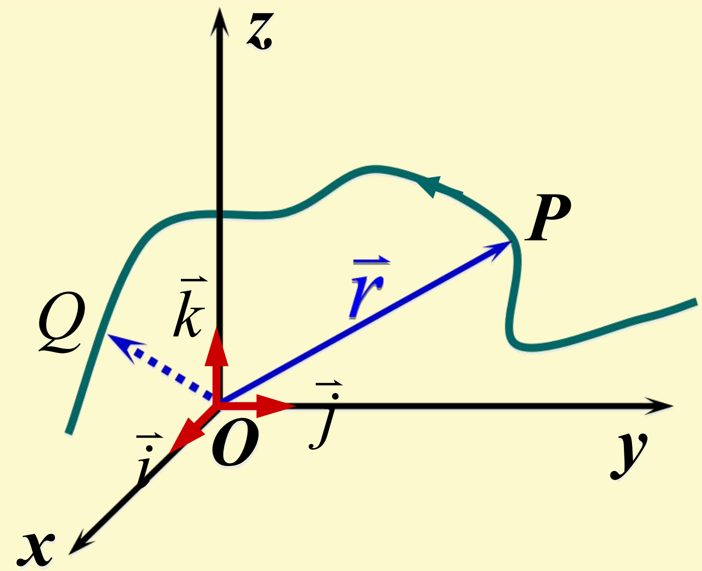
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2. 运动方程(equation of motion): 质点运动时位置随时间变化的规律

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(t)}$$

矢量形式:

$$\boxed{\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}}$$



参数方程:

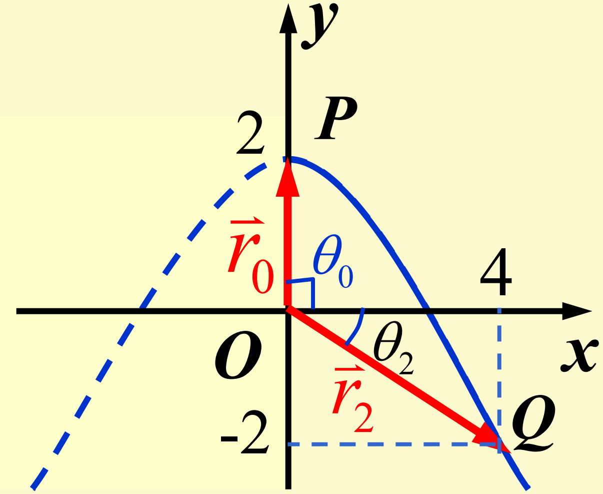
$$\boxed{\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ z&=z(t)\end{aligned}}$$

消去参数 t → 质点运动轨迹方程

例1-1 已知质点的运动方程 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ (SI)

求: (1) 质点的轨迹; (2) $t=0$ 及$t=2$s时质点的位置矢量;

(3)上述两时刻间质点的位移和路程.



解 (1) $\begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消}\,t} y=2-\dfrac{x^2}{4}$

(2) 位置矢量

$t=0$时, $x=0$ $y=2$ $\quad \vec{r}_0=2\vec{j} \quad r_0=|\vec{r}_0|=2(\text{m})$

$t=2$时, $x=4$ $y=-2$ $\quad \vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

$$r_2=|\vec{r}_2|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=4.47(\text{m})$$

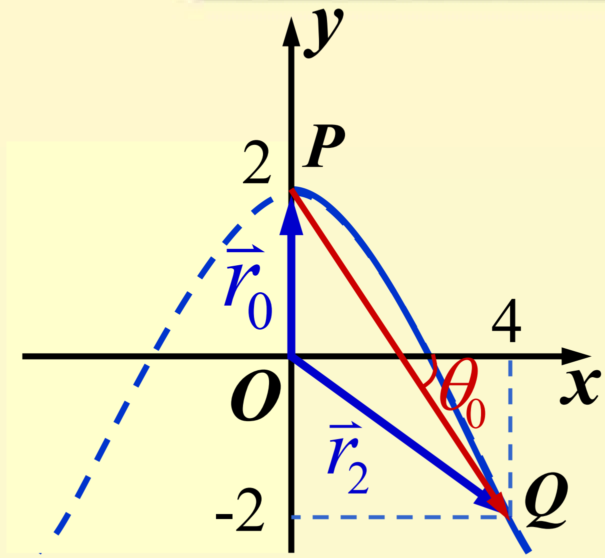
位置矢量的方向:

$$\theta_0=90^\circ,\ \theta_2=\arctan\frac{-2}{4}=-26^\circ 32'$$

(3) 求位移 $\vec{r}_0 = 2\vec{j},\ \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

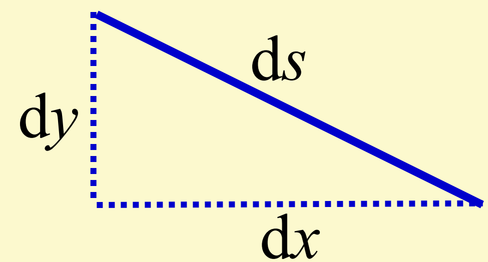
$$\Delta\vec{r}\begin{cases}\text{大小}: |\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.65\text{m} \\ \text{方向}: \theta_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$



(3) 求路程 $\Delta s = \int_P^Q \mathrm{d}s \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$

$$y = 2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2}\,\mathrm{d}x$$



$$\Delta s = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2}\,\mathrm{d}x = 5.91\,\text{m}$$

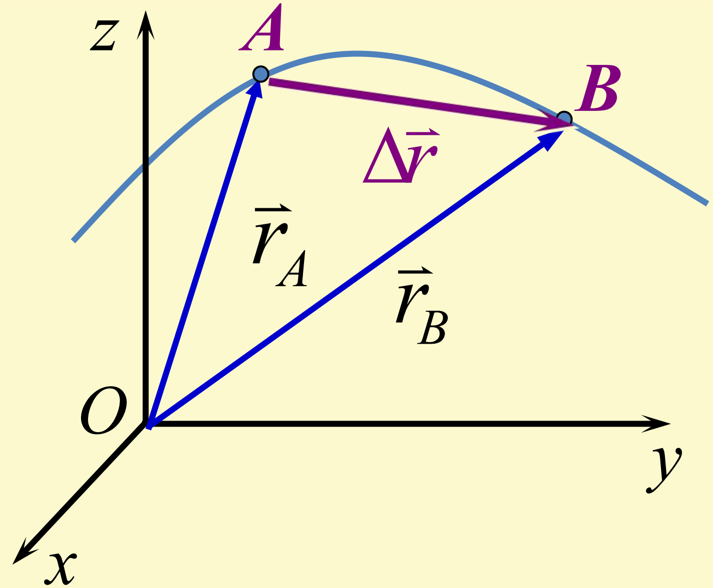
1.2.3 位移与路程

1. 位移(displacement)

设质点P作曲线运动

t 时刻位于A点, 位矢 $\vec{r}_A$

$t+\Delta t$ 时刻位于B点, 位矢 $\vec{r}_B$



定义: Δt 时间内, 位矢的变化量称为**位移**

$$\boxed{\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\overrightarrow{AB}}$$ 即A到B的有向线段

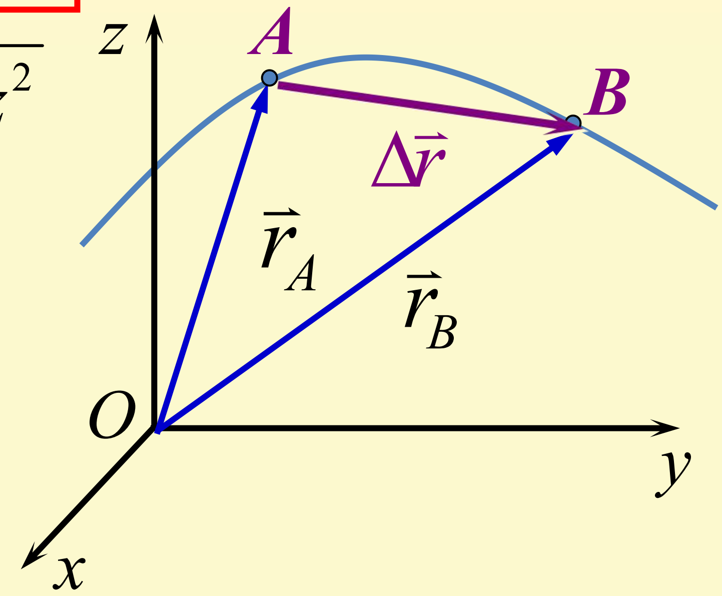
直角坐标系中:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$

$$=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}$$

$\Delta\vec{r}$ $\begin{cases} \text{大小: } |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \\ \text{方向: } A \to B \end{cases}$



位移(矢量): 质点在某段时间内, 始、末位置变动的总效果

注: 1) 位移是矢量, 满足平行四边形法则

2) 位移与实际经过路径不同

3) 矢量问题, 标量解决

三维分解 一维 "+"、"–" 表示

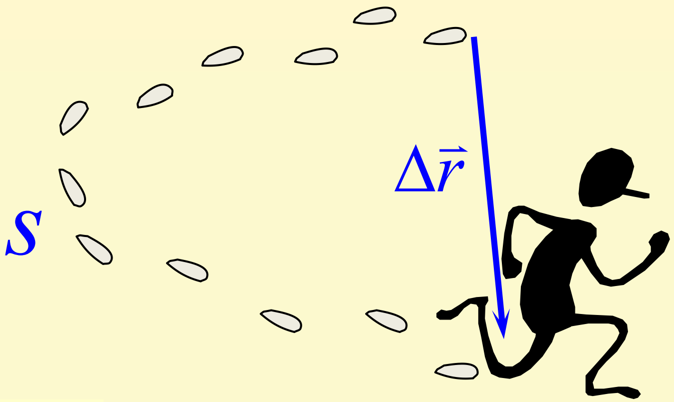
4) 位移具有相对性

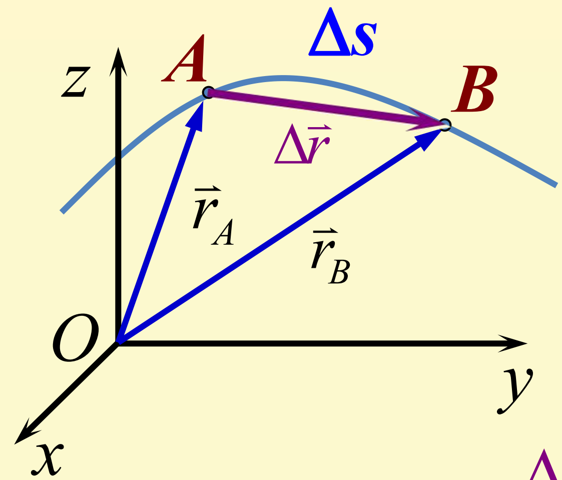
特性:

矢量性

相对性

2. 路程(path) 质点实际行程的长度(正标量)称为路程 s



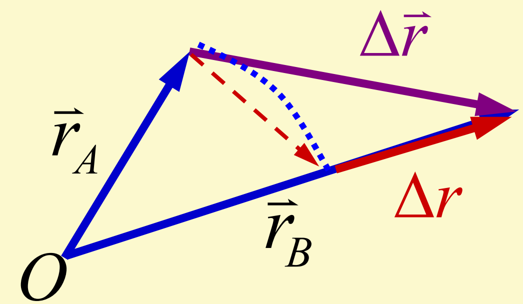


讨论:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \overset{?}{=} \Delta r$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right|$$

$$\Delta r = \left|\vec{r}_B\right| - \left|\vec{r}_A\right| = r_B - r_A$$



位移: 矢量, 表示质点位置变化的净效果, 一般与质点运动轨迹无关, 只与始末点有关.

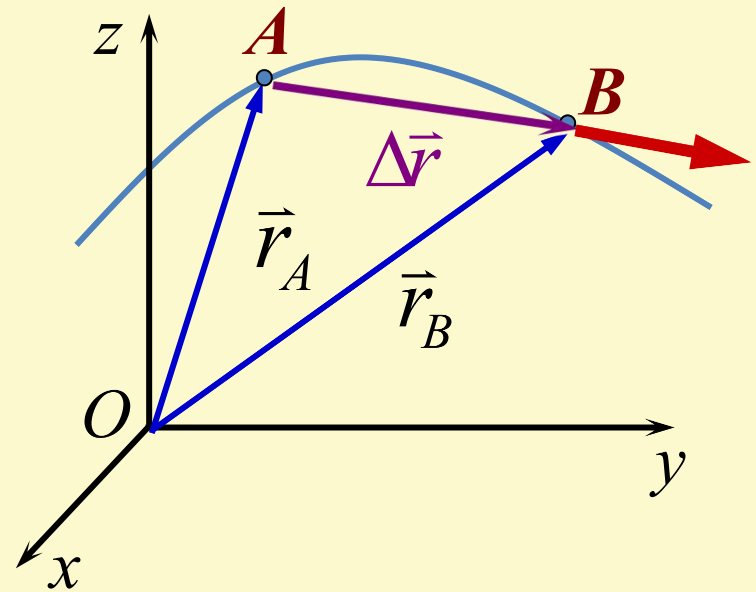
路程: 标量, 是质点通过的实际路径的长度, 与质点运动轨迹有关.

$\left|\Delta\vec{r}\right| \leq \Delta s$ 何时取等号?

1.2.4 速度矢量

速度(speed): 描述质点运动的快慢和方向, **定义**为单位时间内质点所发生的位移

1. 平均速度(mean speed)



设质点P t 时刻 : A, $\vec{r}_A$

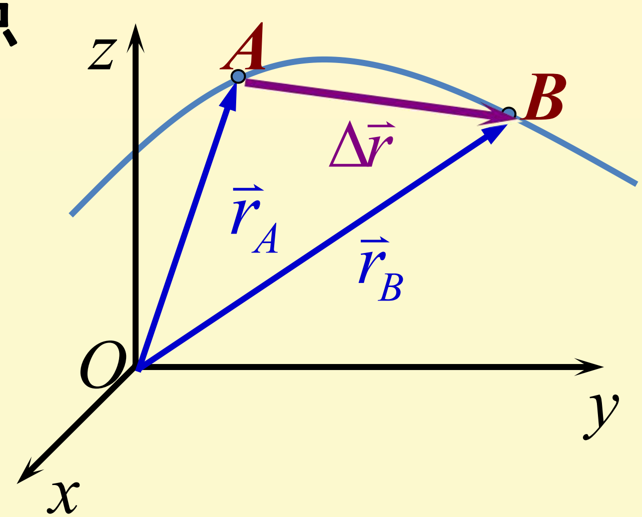
$t+\Delta t$ 时刻 : B, $\vec{r}_B$

位移: $\Delta\vec{r}$

平均速度: $\boxed{\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$ 单位: $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

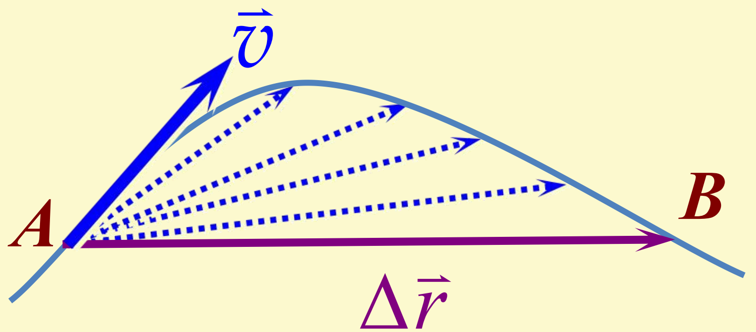
平均速度的方向与Δt 时间内位移的方向一致

2. 瞬时速度(速度)——精细地描述质点某时刻的运动情况



$$\boxed{\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}}$$

速度的方向为轨道上质点所在处的切线方向.



$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \qquad v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt},\ v_z=\frac{dz}{dt}$$

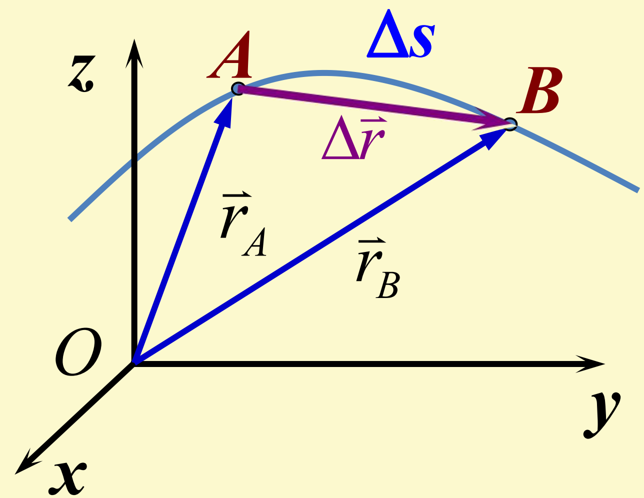
速度的大小: $v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

3. 瞬时速率(速率)(velocity)

在 Δt 时间内, 质点所经过路程 Δs 对时间的变化率

平均速率: $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



一般情况:

$\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s$ 因此 $\left|\overline{\vec{v}}\right| \neq \bar{v}$

当$\Delta t \to 0$时: $\left|\Delta \vec{r}\right| \to \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$ 则 $\left|\vec{v}\right| = v$

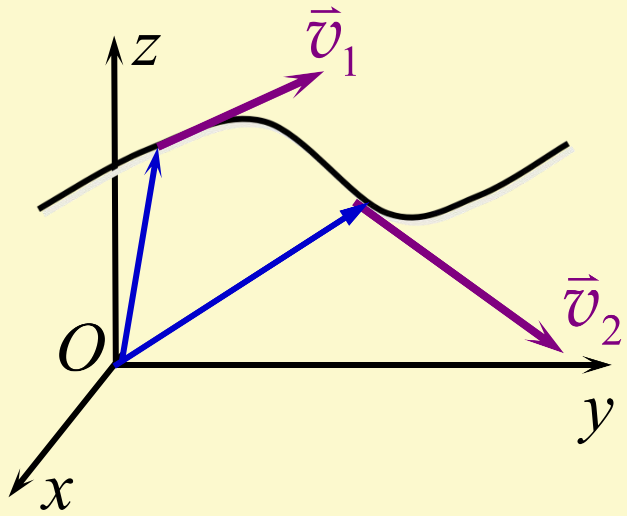
速度特性: 矢量性、瞬时性、相对性

速度与速率的关系: 速率是速度矢量的大小.

§1-3 质点运动的变化描述

1.3.1 加速度矢量——描述质点速度的变化

1. 平均加速度(mean acceleration)



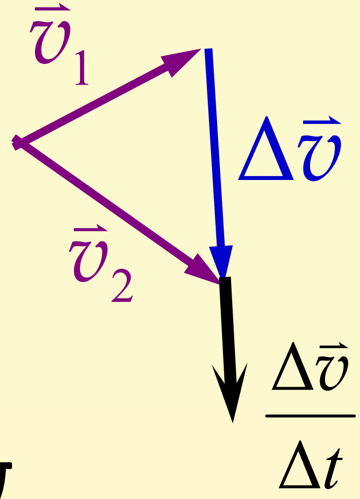
t_1时刻, 质点速度为 $\vec{v}_1$

t_2时刻, 质点速度为 $\vec{v}_2$

Δt 时间内, 速度增量:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

平均加速度: $\boxed{\bar{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$ 单位: m·s^{-2}



平均加速度的方向与速度增量的方向一致

2. 瞬时加速度

特性: 矢量性、瞬时性、相对性

当$\Delta t \to 0$时, 平均加速度的极限即为瞬时加速度.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

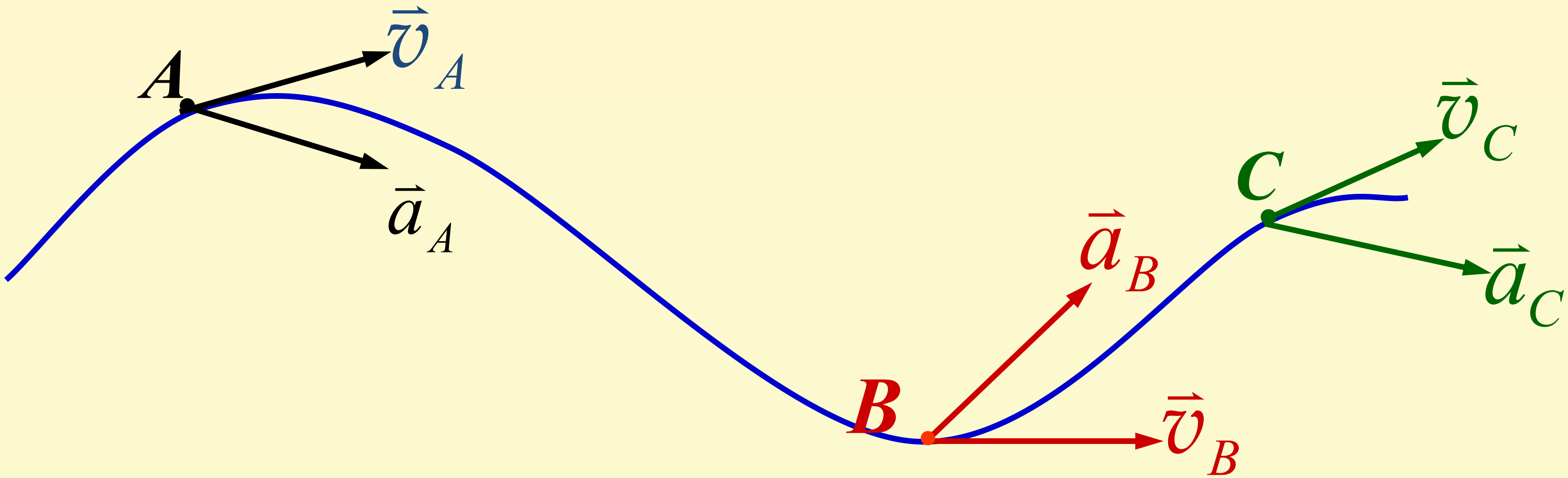
$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

大小: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

方向: 当 Δt 趋向零时, 速度增量 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向

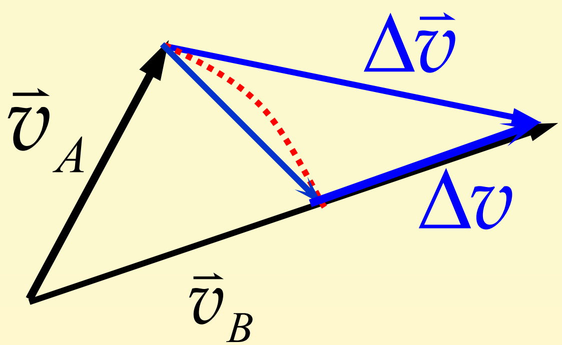


加速度方向始终指向曲线轨道______侧?

思考:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ?$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ?$$



例1-2 已知一质点的运动方程 $\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$ (SI)

求: (1) 质点的速度和加速度;

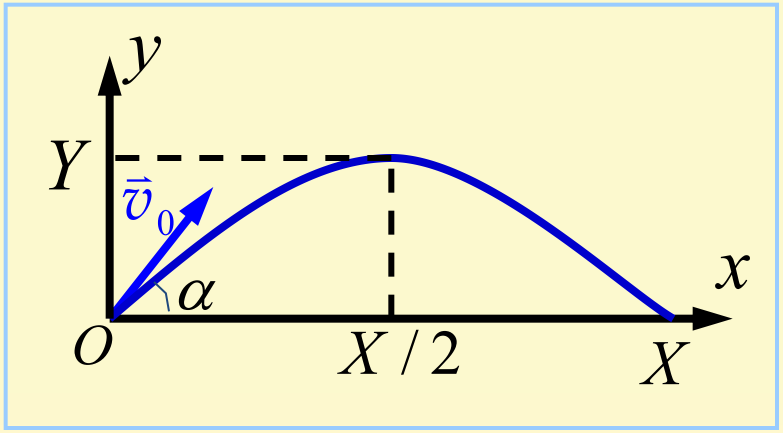
(2) 找一个质点运动的相应实例.

解 (1) $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=5\vec{i}+(15-10t)\,\vec{j}\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-10\,\vec{j}\qquad (\mathrm{SI})$$

(2) $x: v_x=5 \qquad a_x=0$

$y: v_y=15-10t \qquad a_y=-10\approx g$



斜抛运动

射程: 射高:

$y=0 \quad X=15\,\mathrm{m} \quad x=7.5\,\mathrm{m} \quad Y=11.25\ \mathrm{m}$

运动的标量描述

当质点作直线运动时

$$\boxed{x = x(t)}$$

$$\boxed{\Delta x = x_Q - x_P}$$

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

矢量的方向性体现在指向上,用正、负号表示

注意:

(1) Δx 是位移, 不是路程

(2) 不能只凭 a 的正负, 判断 v 是变大还是变小

运动学的两类问题

—— 运动方程是运动学问题的核心

1. 已知运动方程, 求质点任意时刻的位置、速度以及加速度

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 已知运动质点的速度函数(或加速度函数)以及初始条件求质点的运动方程

$$\mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\mathrm{d}t, \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_{t_0}^{t}\vec{a}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t, \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\vec{v}\mathrm{d}t$$

一维运动方程(a=常数)

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

$$v-v_0=at$$

$$v=v_0+at \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0+at$$

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t$$

$$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

速度与位移的关系

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v$$

$$a(x-x_0)=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2) \Rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

例1-3 已知质点的运动方程为 $\vec{r} = 2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}$ (SI)

求: (1) 轨道方程;

(2) t=2秒时质点的位置、速度以及加速度;

(3) 什么时候位矢恰好与速度矢量垂直?

解 (1)

$$x = 2t$$

$$y = 19 - 2t^2$$

$$\xrightarrow{\text{消去 } t} \quad y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

(2) $$\vec{r}\big|_2 = 2\times 2\vec{i} + \left(19 - 2\times 2^2\right)\vec{j} = 4\vec{i} + 11\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{i} - 4t\vec{j} \qquad \vec{v}\big|_2 = 2\vec{i} - 8\vec{j}\left(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = 8.25\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \quad \alpha = \arctan\frac{-8}{2} = -75°58'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$$

$a = 4\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ 方向沿y轴的负方向

(3) $\vec{r} \cdot \vec{v} = \left[2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}\right] \cdot \left(2\vec{i} - 4t\vec{j}\right)$

$$= 4t - 4t(19 - 2t^2) = 4t(2t^2 - 18)$$

$$= 8t(t+3)(t-3) = 0$$

$t_1 = 0(\mathrm{s}),\ \ t_2 = 3(\mathrm{s})$ 两矢量垂直

例1-4 设某一质点以初速度 $\vec{v}_0 = 100\vec{i}\ (\mathrm{m/s})$ 作直线运动, 其加速度为 $\vec{a} = -10v\vec{i}\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$. 求质点在停止前运动的路程.

解

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10v \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -10\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \boxed{v = v_0\,\mathrm{e}^{-10t}}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}x = v_0\,\mathrm{e}^{-10t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^x \mathrm{d}x = v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-10t}\mathrm{d}t$$

$$x = 10(1-\mathrm{e}^{-10t}) \quad \begin{cases} x_0 = 10(1-\mathrm{e}^{-10\times 0}) = 10(1-1) = 0 \\ x_\infty = 10(1-\mathrm{e}^{-10\infty}) = 10(1-0) = 10 \end{cases}$$

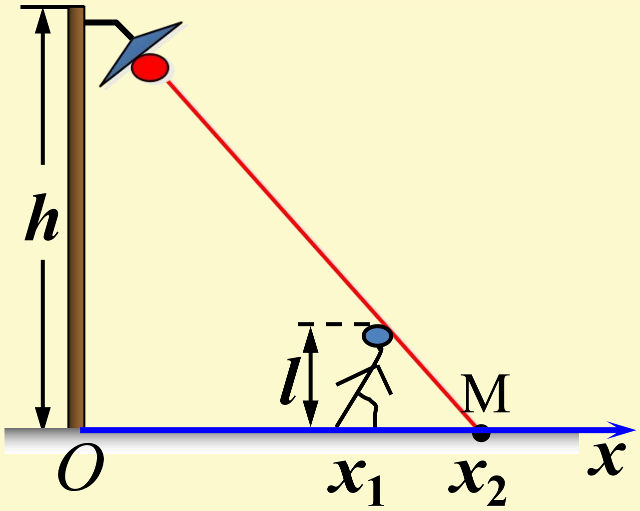
$$\boxed{\Delta x = x_\infty - x_0 = 10(\mathrm{m})}$$

另解 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -10\cancel{v} \qquad \int_{100}^{0}\mathrm{d}v = -\int_0^x 10\,\mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow \quad x = 10\mathrm{m}$$

例1-5 路灯距地面高度为h，身高为l的人以速度v_0在路上匀速行走. 求: (1) 人影头部的移动速度;

(2) 影子长度增长的速率.



解 (1) $\dfrac{x_2 - x_1}{l} = \dfrac{x_2}{h}$ $\quad (h-l)x_2 = hx_1$

两边求导: $(h-l)\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$

其中: $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v,\quad \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_0 \quad v = \dfrac{hv_0}{h-l}$

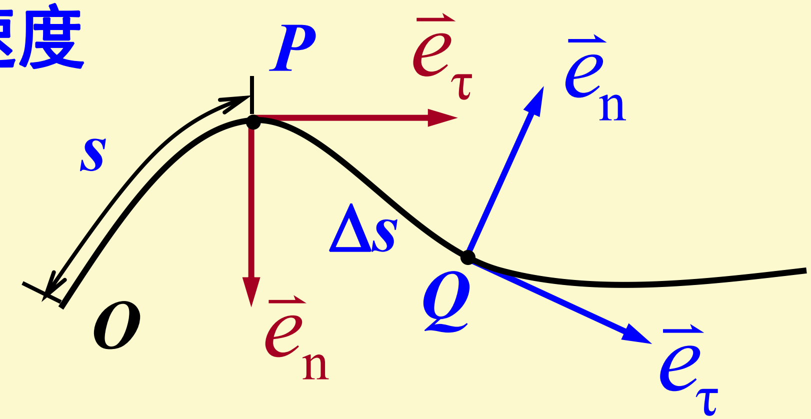
(2) 令影长为 $b = x_2 - x_1$

$$v' = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{h}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \qquad v' = \frac{lv_0}{h-l}$$

1.3.2 自然坐标系中的速度和加速度

自然坐标系(natural coordinate system): 把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统

1. 自然坐标中的位置、路程和速度



在质点的运动轨迹上

点O: 坐标的原点

位置s: 轨迹上$O \rightarrow P$点的弧长

质点运动方程: $s=s(t)$

位移Δs: $\Delta s = s_Q - s_P$ 其方向分别取切线和法线两正交方向

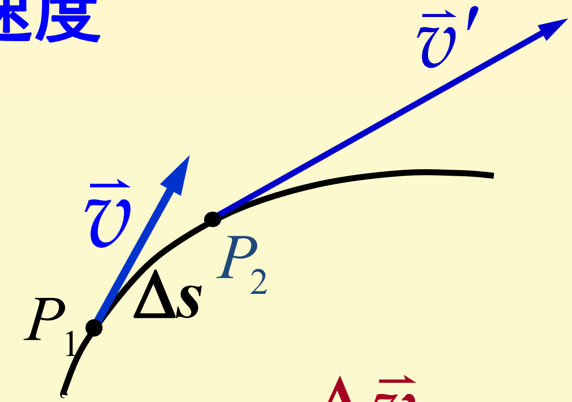
规定: 切向坐标轴沿质点前进方向的切向为正, 单位矢量$\vec{e}_\tau$

法向坐标轴沿轨迹的法向凹侧为正, 单位矢量为 $\vec{e}_n$

速度: $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$

速率: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

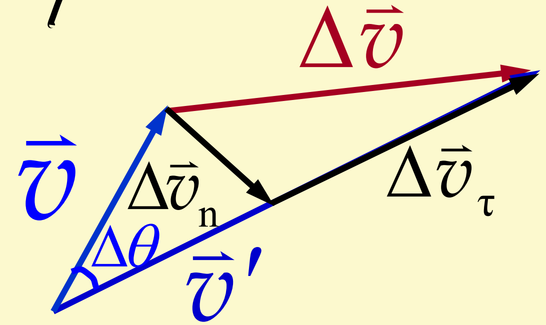
2. 自然坐标中的法向加速度和切向加速度



设某一质点作一般曲线运动

t 时刻位于P_1点，速度为 $\vec{v}$

经过Δt 时间位于P_2点，速度为 $\vec{v}\,'$



速度增量：$\Delta\vec{v} = \vec{v}\,' - \vec{v}$

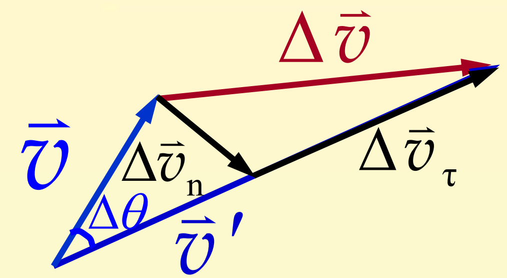
平均加速度：$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

瞬时加速度：$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\vec{e}_\mathrm{n}$$



$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$$

反映速度大小的变化,其方向沿轨道切线方向

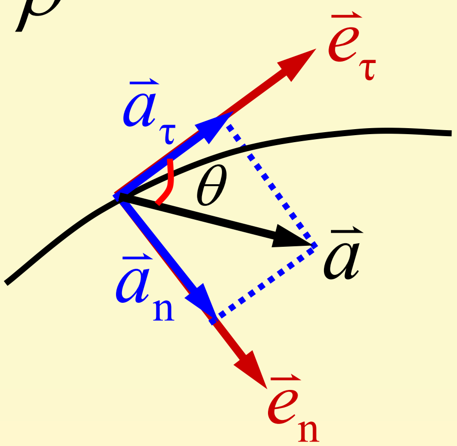
反映速度方向的变化,其方向沿法向,指向曲率中心

切向加速度: $\vec{a}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$ **法向加速度:** $\vec{a}_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$

$$\boxed{\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_\mathrm{n}\vec{e}_\mathrm{n}}$$

大小: $\sqrt{a_\mathrm{n}^2 + a_\tau^2}$

方向: $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}$

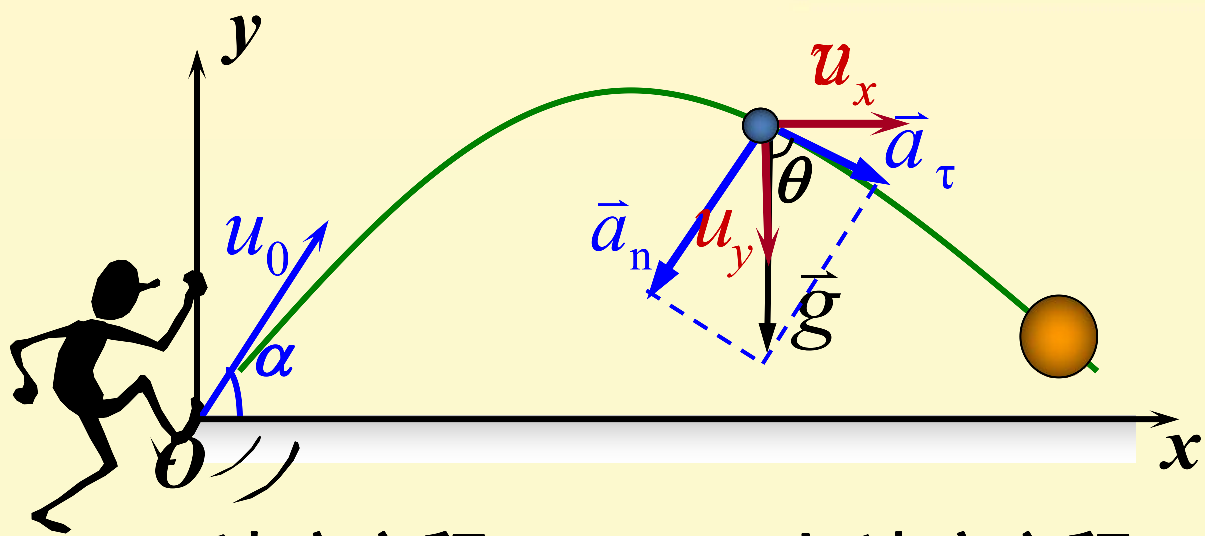


(1) $a_\tau = 0$ **匀速率运动;** $a_\tau \neq 0$ **变速运动**

(2) $a_\mathrm{n} = 0$ **直线运动;** $a_\mathrm{n} \neq 0$ **曲线运动**

例: 抛体运动

动画模拟
抛体运动



直角坐标系中

运动方程

$$x = u_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = u_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

速度方程

$$u_x = u_0 \cos\alpha$$

$$u_y = u_0 \sin\alpha - gt$$

加速度方程

$$a_x = 0$$

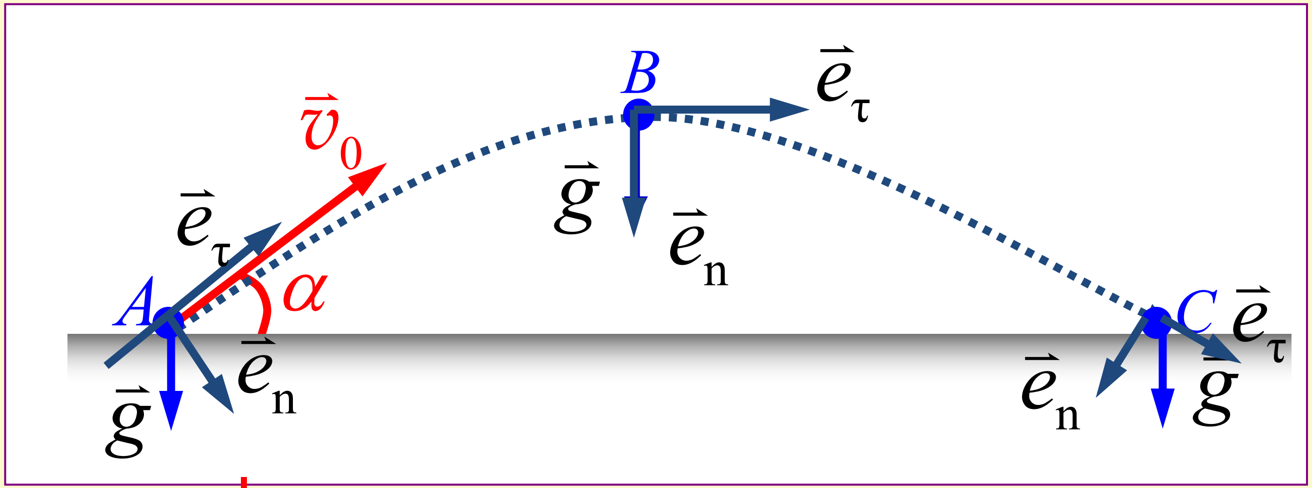
$$a_y = -g$$

自然坐标系中

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{u^2}{\rho} \qquad a_n = g\sin\theta$$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \qquad a = g \qquad \tan\theta = \frac{u_x}{u_y}$$

练习 一物体做抛体运动, 已知v_0, α,讨论下列各量.



	A	B	C
$\vec{a}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$	$\vec{g}$
a_τ	$-g\sin\alpha$	0	$g\sin\alpha$
a_n	$g\cos\alpha$	g	$g\cos\alpha$
ρ	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$	$\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$	$\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$

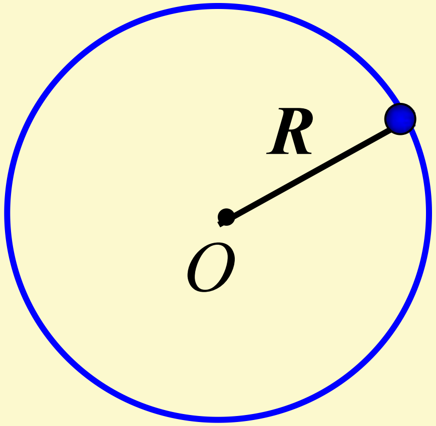
例: 圆周运动

圆周运动(circle motion)是一般曲线运动的一个特例, 曲率半径恒为*R*.

一般圆周运动: $$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}$$

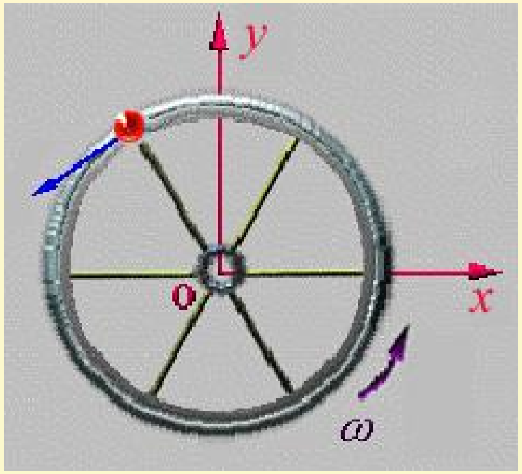
匀速率圆周运动: $$a_\tau = 0$$

$$a = a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}$$



思考: "匀速率圆周运动"是恒定速度吗?

1.3.3 圆周运动的角量描述



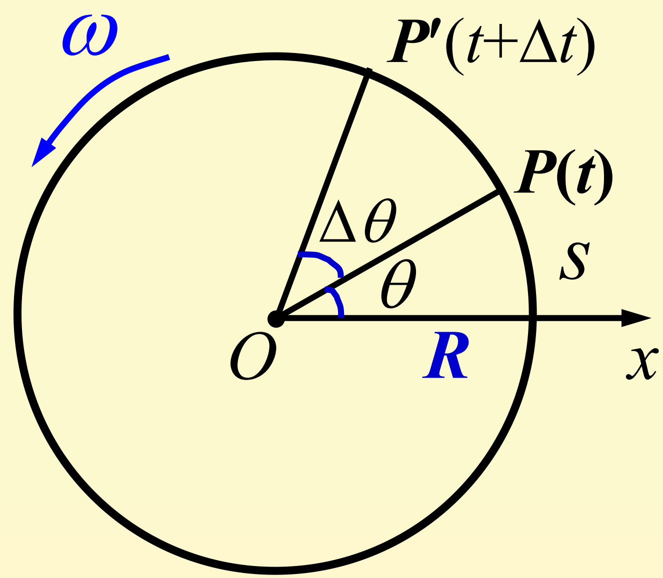
线量(linear measures):自然坐标系下基本参量以运动曲线为基准.

角量(angular measures): 极坐标系下以旋转角度为基准的基本参量.

1. 角位置(angular position)θ

反常规定: 逆时针为正

单位: rad



2. 角位移(angular displacement)$\Delta\theta$

逆时针转向$\Delta\theta$为正

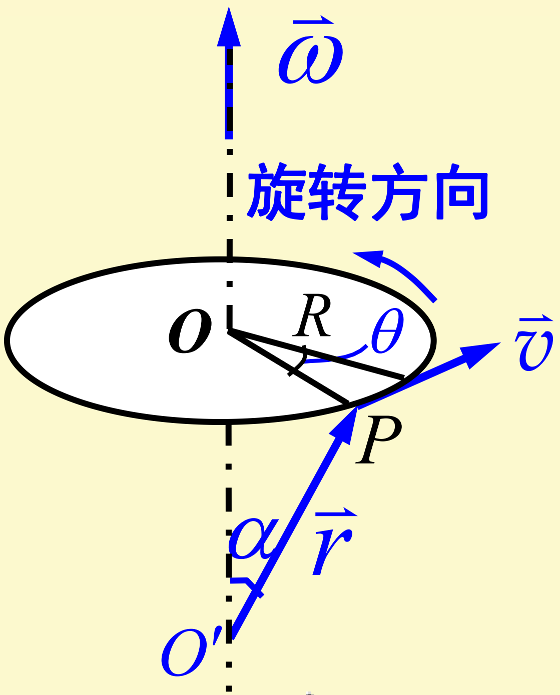
顺时针转向$\Delta\theta$为负

3. 角速度(angular speed)

平均角速度： $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\ (\mathrm{rad \cdot s^{-1}})$

角速度： $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

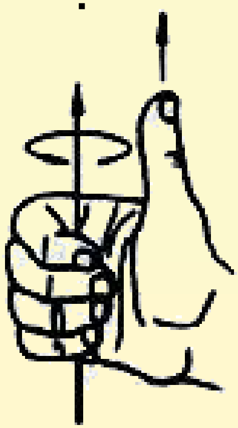
角速度矢量： $\vec{\omega}$ 方向按右手螺旋规定



角速度与线速度关系： $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

大小： $v = \omega r \sin\alpha$

方向：右手螺旋法则



4. 角加速度(angular acceleration)

平均角加速度: $\overline{\beta}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}\quad(\mathrm{rad\cdot s^{-2}})$

角加速度: $\beta=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

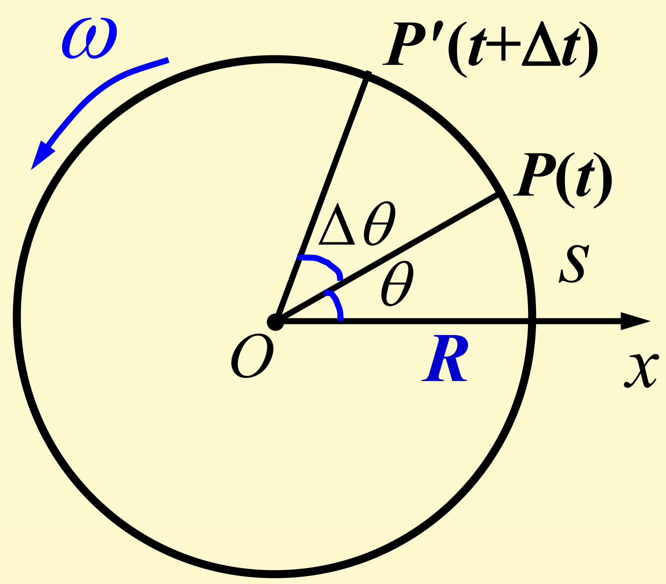
5. 角量与线量的关系

$$s=R\theta$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\beta$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2$$

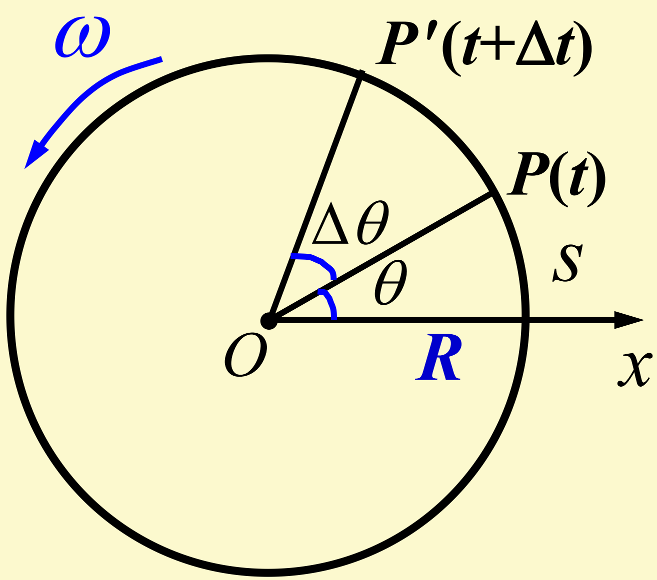


6. 角量表示匀速圆周运动的基本公式

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$$



$$v = v_0 + a t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

例1-6 某发动机工作时, 主轴边缘一点作圆周运动方程为

$$\theta = t^3 + 4t + 3 \ \text{(SI)}$$

(1) $t = 2\text{s}$时, 该点的角速度和角加速度为多大?

(2) 若主轴直径$D = 40\,\text{cm}$, 求$t = 1\text{s}$时该点的速度和加速度.

解 (1) $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4$

$$\xrightarrow{t=2} \omega = 3\times 2^2 + 4 = 16\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

$$\xrightarrow{t=2} \beta = 6\times 2 = 12\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 由角量和线量的关系, 得边缘一点的速度、切向加速度和法向加速度

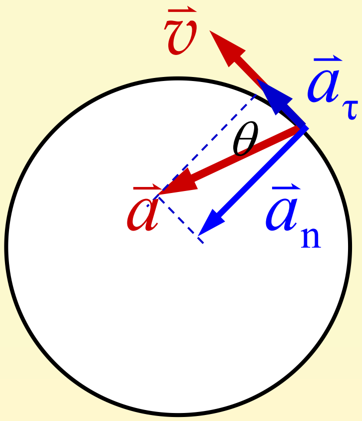
$$v=\omega r=\frac{1}{2}\omega D=0.2\times\left(3t^2+4\right)\overset{t=1\mathrm{s}}{=}1.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$a_\tau=\beta r=1.2t \qquad a_\tau\big|_{t=1}=1.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$a_\mathrm{n}=\omega^2 r=\left(3t^2+4\right)^2\times 0.2 \qquad a_\mathrm{n}\big|_{t=1}=9.8(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

总加速度的大小为

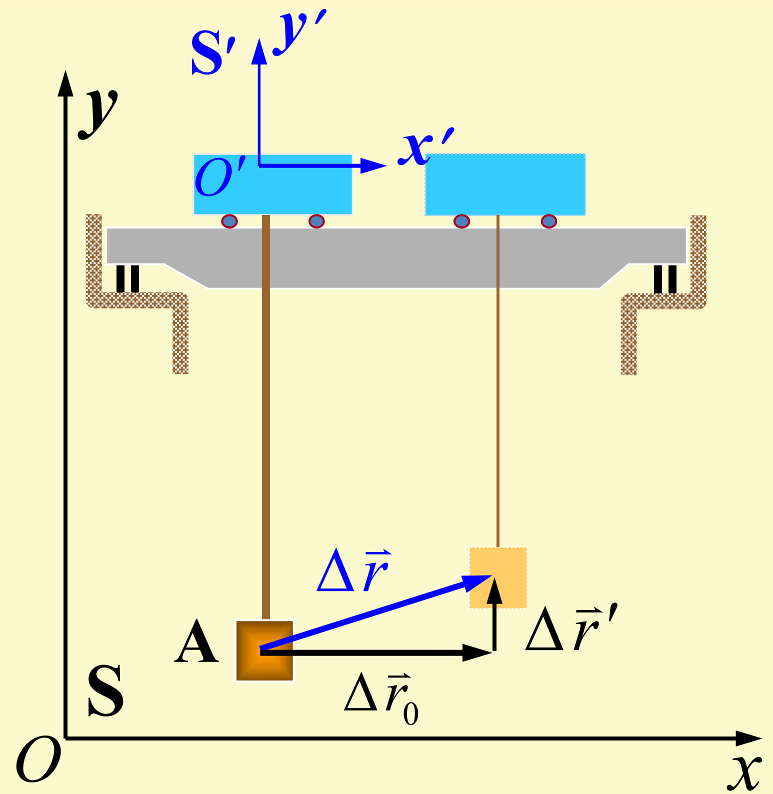
$$a=\sqrt{a_\mathrm{n}^{\ 2}+a_\tau^{\ 2}}=\sqrt{1.2^2+9.8^2}=9.87\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$



$\vec{a}$**与**$\vec{v}$**的夹角为**: $\theta=\mathrm{arctg}\dfrac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}=83.0^\circ$

§1-4　相对运动

坐标系S固定于地面, 坐标系S′固定于行车, 随车一起运动.



绝对运动utterly motion): 物体相对于静止参考系(S系)的运动, 位移为$\Delta\vec{r}$

相对运动(relatively motion): 物体相对于自身参考系(S′系)的运动, 位移为$\Delta\vec{r}\,'$

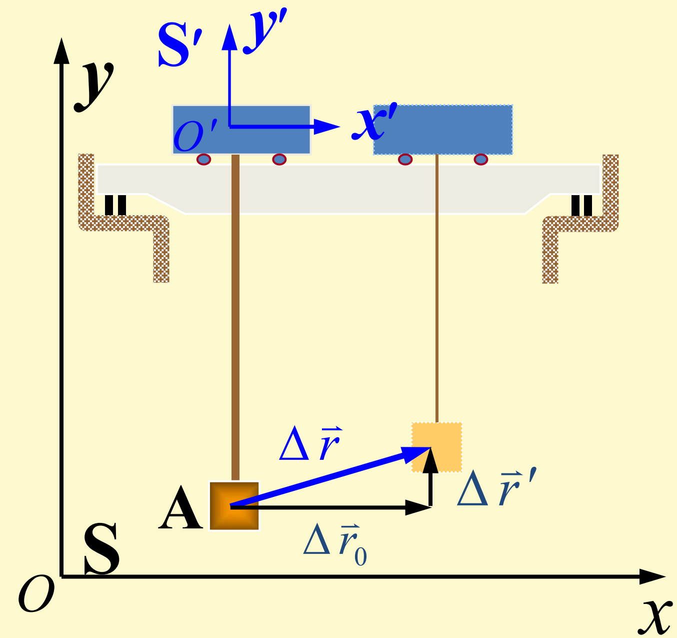
牵连运动(embroil motion): 运动参考系S′相对静止参考系S的运动, 位移为$\Delta\vec{r}_0$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}\,'$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_0$$

$\boxed{\text{绝对运动＝相对运动＋牵连运动}}$

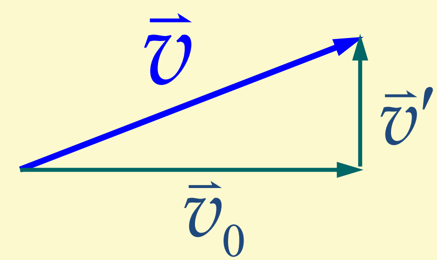
$$\vec{r}_{\text{物地}} = \vec{r}_{\text{物车}} + \vec{r}_{\text{车地}}$$



$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t}$$

绝对速度　　相对速度　　牵连速度

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0}$$

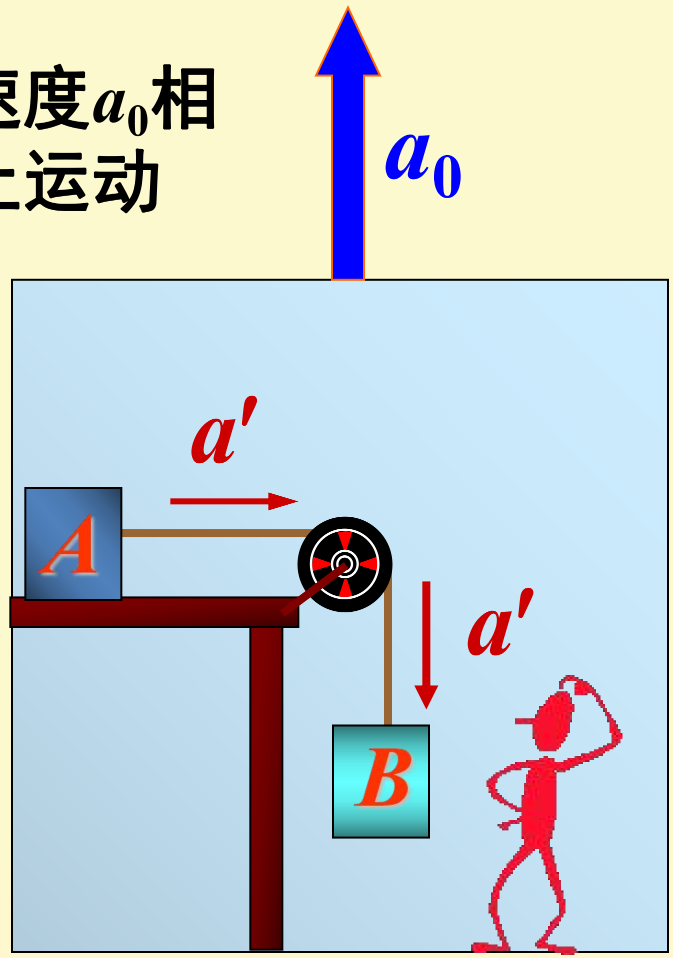


$$\vec{v}_{\text{物地}} = \vec{v}_{\text{物车}} + \vec{v}_{\text{车地}}$$

伽利略速度变换

$$\vec{a}_{绝对}=\vec{a}_{相对}+\vec{a}_{牵连} \qquad \vec{a}_{物地}=\vec{a}_{物车}+\vec{a}_{车地}$$

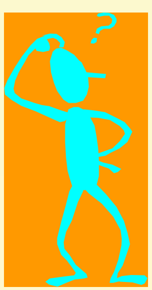
电梯以加速度a_0相对于地向上运动



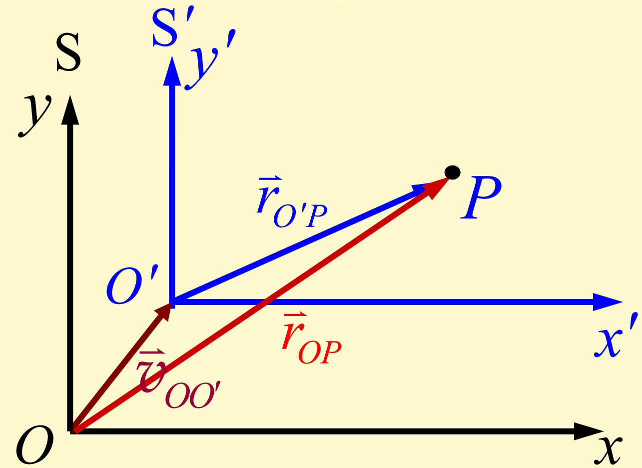
物体A、B以加速度a'相对于电梯运动

物体A、B相对于地的加速度

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0}$$



一般情况下有:



位置矢量 $\vec{r}_{OP}=\vec{r}_{O'P}+\vec{r}_{OO'}$

位移矢量 $\Delta\vec{r}_{OP}=\Delta\vec{r}_{O'P}+\Delta\vec{r}_{OO'}$

速度矢量 $\vec{v}_{OP}=\vec{v}_{O'P}+\vec{v}_{OO'}$

加速度矢量(O'相对O平动时) $\vec{a}_{OP}=\vec{a}_{O'P}+\vec{a}_{OO'}$

注意: 1. 暗含两个参考系中时间与空间测量的绝对性观念.

2. 可推广到多个坐标系间的变换.

$$\vec{r}_{AO}=\vec{r}_{AB}+\vec{r}_{BC}+\vec{r}_{CD}+\vec{r}_{DO}$$

$$\vec{v}_{AO}=\vec{v}_{AB}+\vec{v}_{BC}+\vec{v}_{CD}+\vec{v}_{DO}$$

例1-7 某人骑自行车以速率 v 向东行驶. 现有风以同样的速率由北偏西 30°方向吹来. 问: 人感到风是从那个方向吹来?

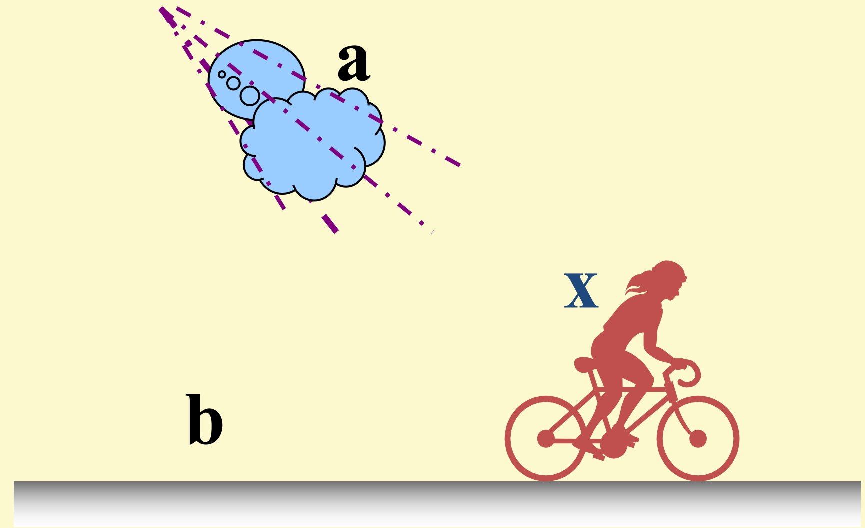
解 设人为x, 分为a, 地为b,

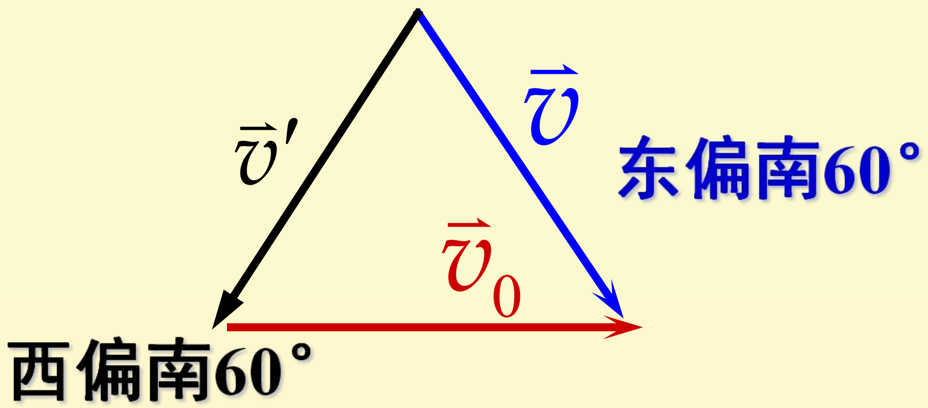
由相对运动原理得

$$\vec{v}_{ab}=\vec{v}_{ax}+\vec{v}_{xb}$$

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{v}_0$$

$$\vec{v}\,'=\vec{v}-\vec{v}_0$$





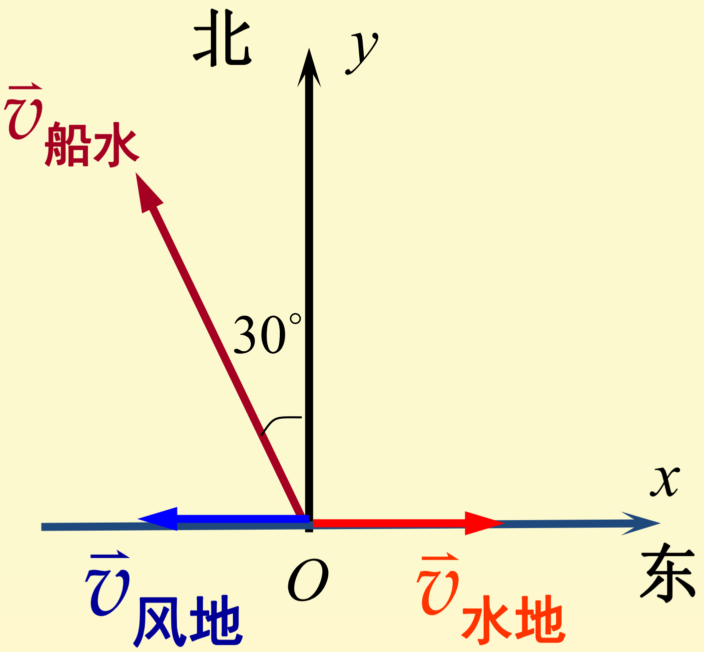
例1-8 河水自西向东流动,速度为10 km.h-1. 一轮船在水中航行, 船相对于河水的航向为北偏西30°, 相对于河水的航速为20 km.h-1. 此时风向为由东向西, 风速为10 km.h-1. 试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向 (设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度).

解析法: 建立如图所示坐标系,由题意可知

$$\vec{v}_{水地} = 10\vec{i}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$\vec{v}_{船水} = -20\sin 30^\circ \vec{i} + 20\cos 30^\circ \vec{j}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$

$$\vec{v}_{风地} = -10\vec{i}\ (\mathrm{km\cdot h^{-1}})$$



根据相对速度公式

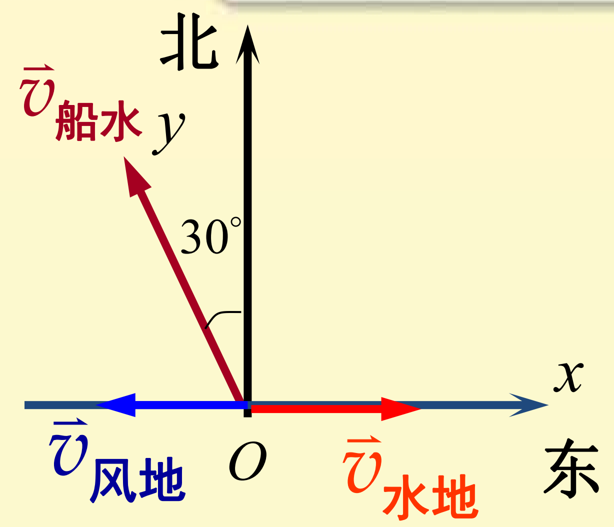
$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风水}+\vec{v}_{水船}$$

$$=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$

$$=\vec{v}_{风地}+(-\vec{v}_{水地})+(-\vec{v}_{船水})$$

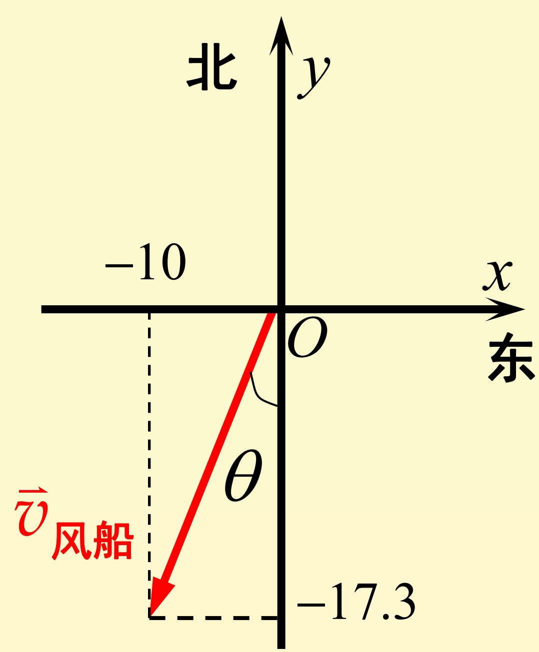
$$=(-10)\vec{i}-(-20\sin 30^\circ\vec{i}+20\cos 30^\circ\vec{j})-10\vec{i}$$

$$=-10\vec{i}-17.3\vec{j}\ (\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1})$$



$$v_{烟船}=\sqrt{(-10)^2+(-17.3)^2}=20\ (\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1})$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{17.3}{10}=30^\circ$$

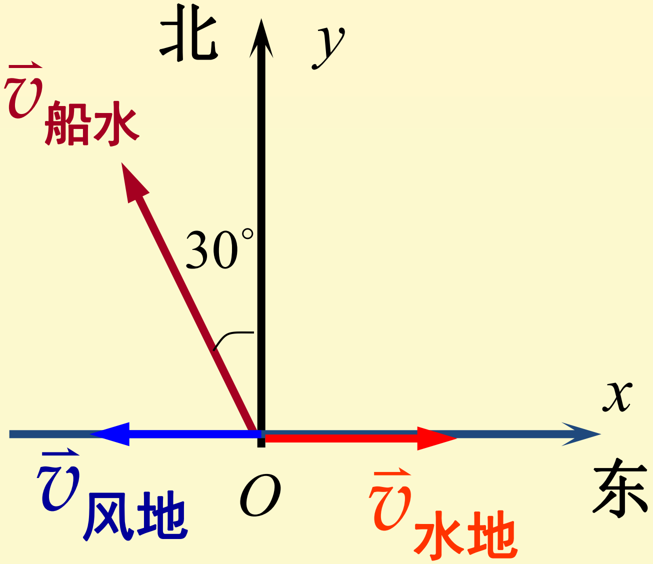


即在船上观察，烟以 $20\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ 的速率向南偏西 30° 飘去.

图解法:

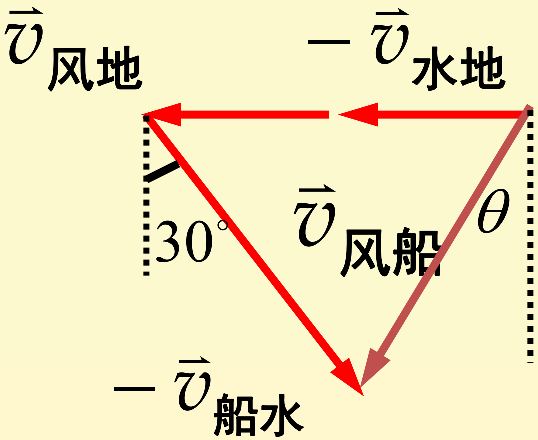
根据相对速度公式

$$\vec{v}_{烟船}=\vec{v}_{风船}=\vec{v}_{风水}+\vec{v}_{水船}$$
$$=\vec{v}_{风地}+\vec{v}_{地水}+\vec{v}_{水船}$$
$$=\vec{v}_{风地}+(-\vec{v}_{水地})+(-\vec{v}_{船水})$$



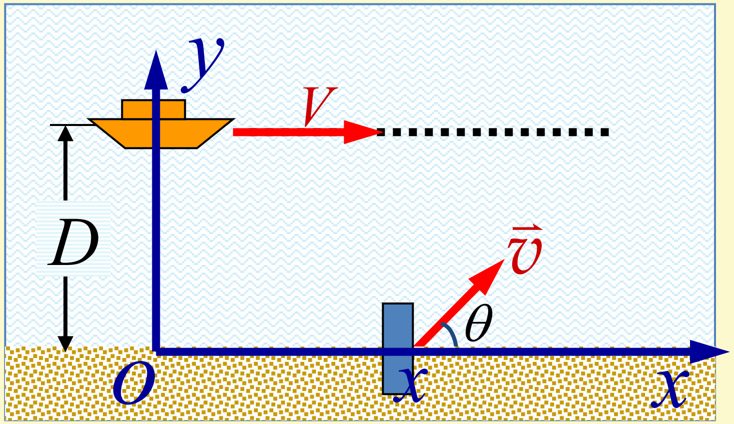
$$v_{烟船}=20(\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1})$$

$$\theta=30^{\circ}$$



即在船上观察, 烟以20km·h^{-1}的速率向南偏西30°方向飘去.

例1-9 一条船平行于平直海岸航行,离岸距离为D,速率为V. 一艘快艇从港口出发去拦截这条船, 快艇速率 $v<V$. 快艇必须在船沿海岸距港口多远之前出发才能拦截成功?



解 建立如图坐标系

以岸为参考系分别写出船和艇的运动方程,

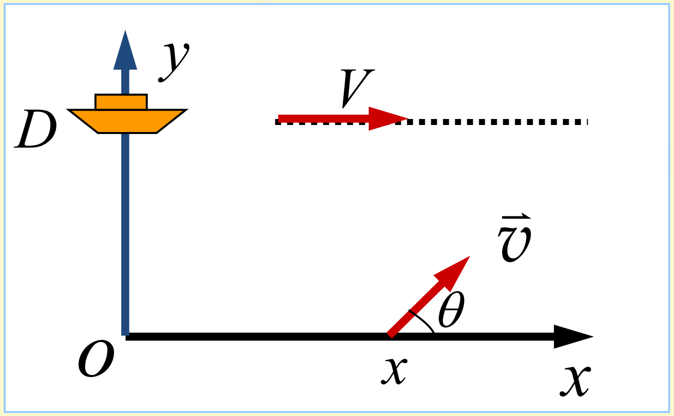
船: $\begin{cases} x_1 = Vt \\ y_1 = D \end{cases}$ 　艇: $\begin{cases} x_2 = x + vt\cos\theta \\ y_2 = vt\sin\theta \end{cases}$

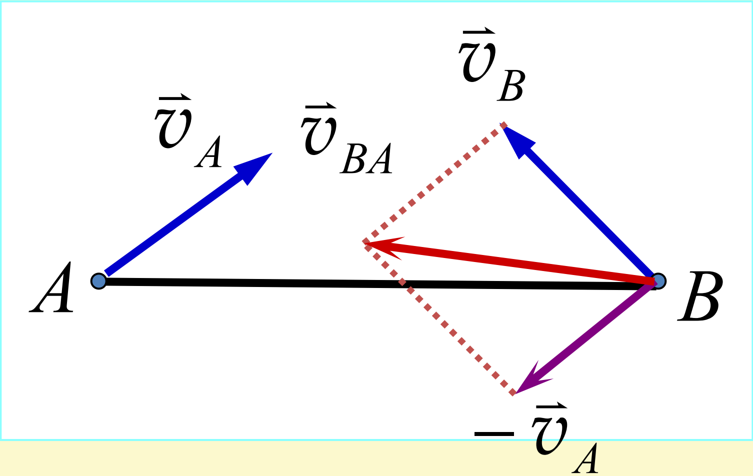
相遇: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ 　$\begin{cases} Vt = x + vt\cos\theta \\ D = vt\sin\theta \end{cases}$

$$x = \frac{(V - v\cos\theta)D}{v\sin\theta}$$

思考:

以船为参考系, 相遇条件?



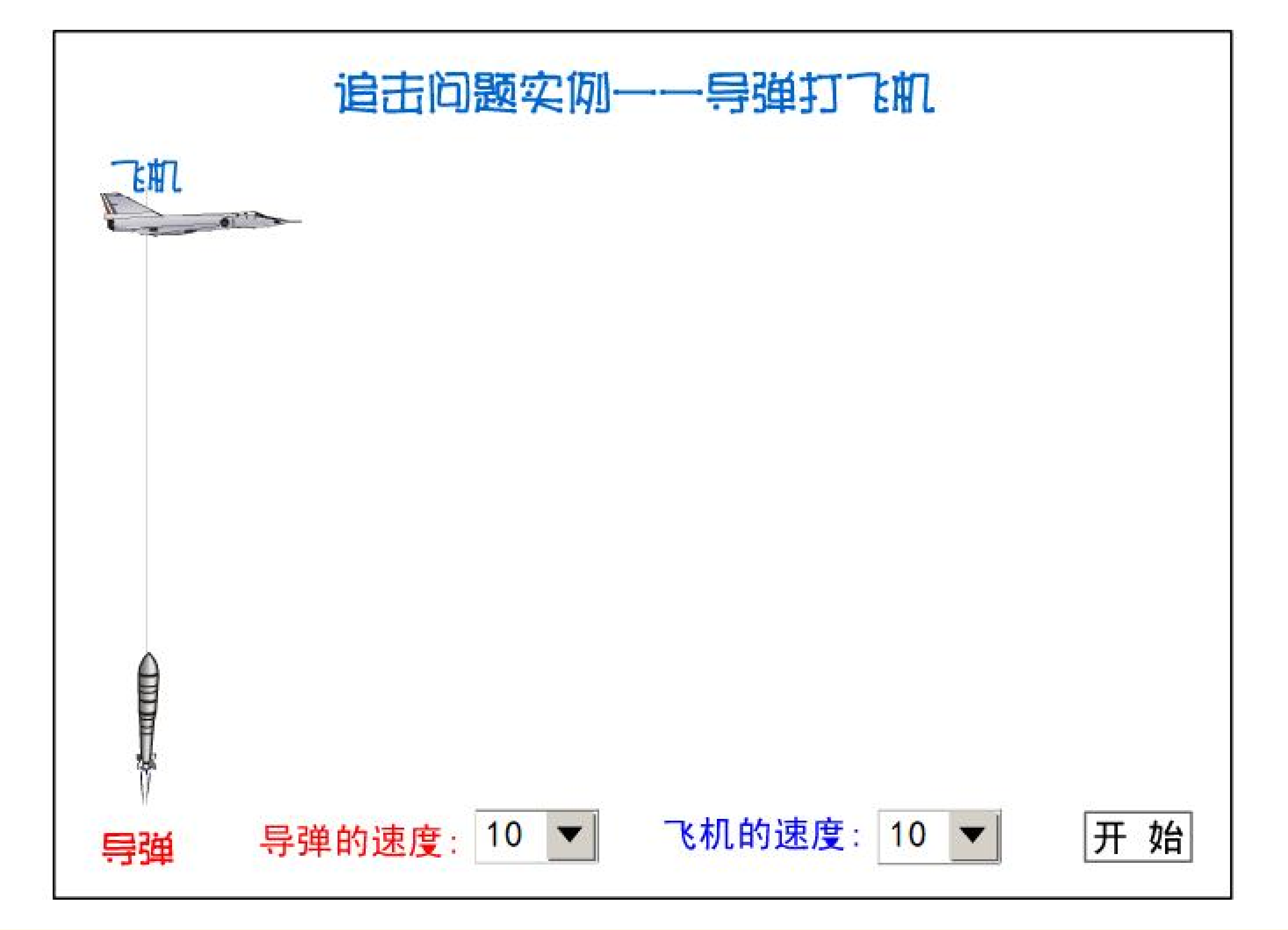


$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{B\text{地}} + \vec{v}_{\text{地}A} = \vec{v}_{B\text{地}} + \left[-\vec{v}_{A\text{地}}\right] = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

若 $\vec{v}_{BA}$的延长线过 A, 则B、A相撞.

摆渡

导弹打飞机



"追击问题"概念描述

1) 逃逸者的运动方程

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

对直线运动 $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

对曲线运动 $$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

例飞机运动 $$x = x_0 + vt \qquad y = h$$

2) 追击者的轨道切线方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - Y}{x - X}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = k(y - Y) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = k(x - X) \qquad V > v$$

这里k由关系式 $k^2[(y-Y)^2+(x-X)^2]=u^2$确定

$$k=\frac{u}{\sqrt{(y-Y)^2+(x-X)^2}}$$

3) 写成迭代形式

$$Y=Y_0+k(y-Y)\,\mathrm{d}t$$

$$X=X_0+k(x-X)\,\mathrm{d}t$$

简化之有迭代形式 $Y=x_0+(x-X)\,\mathrm{d}t$

$$Y=y_0+(y-Y)\,\mathrm{d}t$$

追击者的轨道切线方程为 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=(x-X),\quad \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=(y-Y)$

一般追击问题