

Mechanics

第一章 质点运动学

机械运动 物体 空间位置 时间

基本粒子 $\xrightarrow{\text{组成}}$ 物质 \ 实物 区别是能量密度
场 \ 真空, -一切场的基态 \ \rightarrow 真空的激发态

测量(单位).

SI制 - 7个基本物理量. : L. T. M. I. (H). N. J

基本量的基准单位: m. s. kg. A. K. mol. cd.

量纲: 物理量被基本量表示的指数.

e.g. $F = MLT^{-2}$ 力的量纲. 1, 1, -2 量纲指数. (所有量纲指数 = 0 \Rightarrow 无量纲量(可有单位))

时间. 空间. 参考系

秒: ^{133}Cs 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 91992631770 个周期.

米: 光在真空中 $1/299792458$ s 所经路径长度.

参考系: 实物; 任何形式的场都不可.

描述运动.

质点 - 理想化模型 (1) 形状大小可忽略 (2) 平动(各点运动=) (3) 点对整体影响不大).

确定参考系. 原点. 位矢(径矢) $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 运动方程 (position-time 规律).

空间轨迹: 轨道. 运动分量或消去 t. \Rightarrow 轨道方程.

位移(矢量): $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ (算位移. 要算大小. 方向)

位移大小(变化): $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ $\Rightarrow |\Delta \vec{r}| + \alpha r (\alpha r := \Delta |\vec{r}|)$

位矢大小变化 $\Delta r = \Delta |\vec{r}| = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} - \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$

路程 Δs : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}|$, $ds = |\vec{dr}|$ $\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$

速度 平均 $\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ 瞬时 $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 速率 $v = |\vec{v}|$

加速度 平均 $\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ 瞬时 $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ \rightarrow 轨道上质点切线方向.

加速度方向指向轨迹凹侧(力方向)

状态量. \vec{r}, \vec{v} 状态变化量 $\Delta \vec{r}, \Delta \vec{v}, \Delta \vec{a}$

Exercise: 求 \vec{v}, \vec{a} 或关于 t 的参数方程即可.

求在 x 秒时 v. 要算数值. 方向.

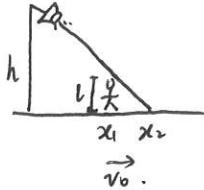
一维运动方程 $v_t = v_0 + at$

$$x_t - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = a \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v_t^2 - v_0^2 = 2a(x_t^2 - x_0^2)$$

例题



(1) 求影子头部速度.

$$\frac{x_2 - x_1}{t} = \frac{x_2}{h}$$

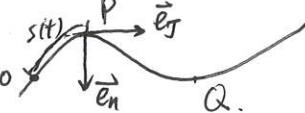
$$(h-l)x_2 = hx_1$$

$$v_2 = \frac{hv_0}{h-l}$$

3. 自然坐标系 (不起参考系作用)

利用曲线轨迹建系.

自然坐标 $s = s(t)$



位移 $\Delta s = s_Q - s_P$.

速度 $|d\vec{r}| = ds \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T = v \vec{e}_T$

加速度: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + v \frac{d\vec{e}_T}{dt}$

切向: $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T \quad \vec{e}_T = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T$
(反映速度大小变化, 指向速度方向)

法向: $\vec{a}_n = v \frac{d\vec{e}_T}{dt} = v \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_n = v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{e}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$
(反映速度方向变化, 沿法向指向曲率中心).

$$\vec{a} = a_T \vec{e}_T + a_n \vec{e}_n \quad \text{方向} \theta = \arctan \frac{a_n}{a_T} \quad (a_T = 0 \text{ 匀速运动}, a_n = 0 \text{ 直线运动}).$$

3. 角量(圆周运动)

自然坐标系. $s, \Delta s, v, a_T, a_n \dots$: 角量. 极坐标系: 前量.

角位置: 位矢与 x 轴正向的夹角 θ ;

角位移: $\Delta\theta$ (逆时针+顺时针-). (标量)

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R d\theta}{dt} = R\omega \\ a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\beta \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 \end{array} \right.$$

Remark: 无穷小的角量, $d\theta, \bar{\omega}, \vec{\omega}$ 可视为矢量.

$\bar{\omega}, \omega$ 方向与 \vec{r} 成右手螺旋.

$\vec{\omega}$ 数值入. $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ 同向; 数值 \perp 反向

角量与速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (叉乘). 大小: $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$.

α (参数, \vec{r} 所在线上角度)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

(2) 求影长变化速.

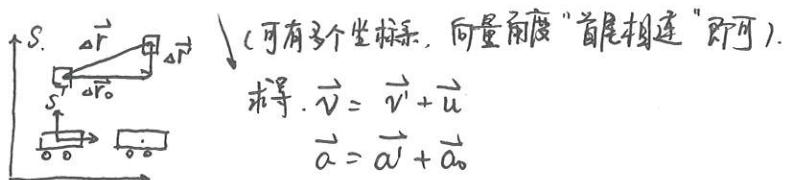
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$v = \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{h v_0 - v_0(h-l)}{h-l} = \frac{lv_0}{h-l}$$

\vec{e}_T, \vec{e}_n 单位量, 与 i, j, k 不同, $\frac{d\vec{e}_T}{dt} \neq 0$

§. 相对运动

$\Delta \vec{r} = \vec{\Delta r}' + \vec{\Delta r}_0$ 绝对运动 = 相对运动 + 轨迹运动(运动参考系 S' 相对静止参考系 S 的运动).



注: a 相对 b 的速度 v 记为 \vec{v}_{ab}

第二章 质点、动力学

动量：描述机械运动的物体的运动状态。

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{SI: } \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

$$\text{质点系动量: } \vec{P} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i.$$

质量

惯性：物体保持其运动状态不变的特性（固有属性）

惯性质量：惯性大小的量度。（ $v \ll c$, m 不随 v 改变）

引力质量：物体间产生引力作用“能力”的量度。不同属性，数值正比，与物体结构、成分无关。

不再特别区分。

3. 动量的时间变化率，力。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m\vec{a} \\ = 0 \quad (v \ll c).$$

$$\text{经典牛顿第二定律 } \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{牛顿第二定律更普遍的表达形式；合力} \Rightarrow \text{动量瞬时变化率})$$

力：质点动量变化率的量度。

表示物体间的相互作用：强、电磁、弱、引力。（四种性质的相互作用）。

外力及内力，内力总是成对出现 $\sum \vec{F}_{\text{内}} = 0$

$$\text{质点系动量 } \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{外}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{仅研究外力即可})$$

参考系 | 惯性系，牛顿第一定律成立的系。

| 非惯性系，（相对于惯性系做加速运动）。

牛顿第一、二定律仅适用于惯性系。（涉及运动），第三定律对参考系无要求（不涉及运动）。

对非惯性系，引入惯性力， $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ （虚拟力） 牛二表示为 $\vec{F} + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}$
 \vec{a}_0 为非惯性系对惯性系的加速度。 \vec{F}_0 方向与 \vec{a}_0 方向相反，实质是惯性在非惯性系的表现。

转动参考系：

角速度： $\omega = \dot{\theta} r$.

$$\text{参考系 地面: } \begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{F} = m\omega^2 r \hat{e}_n \end{cases} \quad \text{圆盘 } \vec{F} + \vec{F}_0 = 0 \Rightarrow \vec{F}_0 = -m\vec{a}_n = -m\omega^2 r \hat{e}_n$$

相对转动参考系静止：惯性离心力

相对转动参考系运动：科里奥利力。

$$\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$



也是相对于地面的。

实际运动从 A → B' $\Delta S = B'B'' = A'B'' \Delta \theta = v \omega t \cdot \omega a t = v \omega^2 t^2$

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta S = \frac{1}{2} a_T (\Delta t)^2 \quad (\text{物理})$$

$$a_T = 2v\omega, (\vec{a}_T \perp \vec{v}) \text{ 切向加速度}$$

$$f_T = 2mv\omega.$$

$$\vec{f}_c + \vec{f}_T = 0 \Rightarrow \vec{f}_c = 2mv\omega$$

$$(\text{克服速度变化}) \quad \vec{f}_c \leftarrow \begin{matrix} \omega \\ v \end{matrix}$$

Remark: 研究 $v-t$ / $F-t$ 等关系，要考虑收尾（极限）速率。

3. 动量定理 动量守恒定律.

合外力与动量: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = d\vec{p}$

力的冲量: $t_0 \rightarrow t$ 时间内作用力对时间的累积量. I . (单位 N·s, 量纲 MLT^{-1}).

\vec{F} 在时间 dt 内的元冲量 dI : $d\vec{I} = \vec{F} dt$.

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_{P_0}^P d\vec{p} = \Delta \vec{p}. \quad \vec{I} = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \quad (\text{末态 - 初态}) \quad (\text{质点动量定理})$$

冲力: 两个物体碰撞、爆炸. 极短时间, 相互作用力很大且迅速变化, 又急剧 $\downarrow 0$.

一般取平均值 $\bar{\vec{F}} dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0$.

冲力矢量和 = 总动量对时间变化率. $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$

内力动量: 改变总动量在各质点的分配

所含动增量 = 系流动量的增量. $\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_{P_0}^P d\vec{p} = \Delta \vec{p} \quad (\text{质点系动量定理})$

动量守恒定律: 系统所受合外力为 0, 即 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ 时, 有 $\vec{p} = \vec{p}_0 = \text{常矢量}$, 即系流动量不变.

例: 火箭方程: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}$ \vec{u} 为气体相对火箭排出速度. \vec{F} 为系统合外力. (任一时刻).

若忽略 $f_{阻}$, $F = mg$. 以竖直向上为正向 $-mg dt = mdv + u dm$. ($dm < 0$, 下限 $>$ 上限, 不影响形进程)

$$\text{从 } t_0 \text{ 到 } t: - \int_{t_0}^t g dt = \int_{v_0}^{v_t} dv + u \int_{m_0}^{m_t} \frac{dm}{m} \Rightarrow v_t = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_t} - gt. - t_0.$$

动量守恒定律 仅适用于惯性系. 可以矢量分解(在某一方向上运动).

3. 质心 质心运动定理.

对 n 个质点构成的系统 $m = \sum m_i$

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n).$$

$$\vec{r}_C = \frac{m_1}{m} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m} \vec{r}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \vec{r}_n = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad \text{质点系质心位矢. } C \text{ 为质心.}$$

(对连续分布的物体, 质心 $\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$).

$$\text{质心: } \vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} \quad \vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m}$$

$$\text{质心运动定理: } \vec{p} = m\vec{v}_C \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{a}_C \quad (\text{系外力矢量和 = 系统质量} \times \text{质心加速度}).$$

3. 角动量.

角动量 synonym. 动量矩. 物体作旋转运动时.

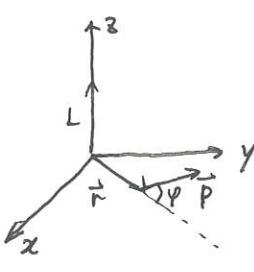
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (\text{定义本身不需要物体一定做圆周或环绕}).$$

大小: $L = r p \sin \varphi = mr v \sin \varphi$.

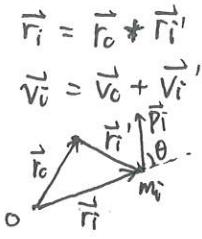
\vec{r} 是对参考点位矢. \vec{L} 反映质点绕参考点旋转运动强弱.

质点对定轴角动量: 质点对参考点的角动量在通过点的任意轴线上的投影.

$$\vec{L} \cdot \hat{z} = L \cos \gamma. \quad L_z = L \cos \gamma.$$



$$\text{质点系的角动量 } \vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_0 + \vec{r}'_i, \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_0 + \vec{v}'_i, \\ \vec{r}_i &\quad \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i &\quad \vec{v}'_i \\ \theta & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum (\vec{r}_0 \times \vec{r}'_i) \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_0 \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) \\ &= \vec{r}_0 \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \underbrace{\sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_0}_{0} \rightarrow \sum m_i \vec{r}'_i = 0 \\ &= \vec{r}_0 \times M \vec{v}_0 + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \vec{L}_{\text{轨道}} + \vec{L}_{\text{自转}}. \end{aligned}$$

轨道：质点系整体绕参考点的旋转运动。

自转：质点系成质心旋转运动，与参考点选择无关。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F} \times \vec{r}$$

力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (外力 \vec{F} 对参考点 O 的力矩，实质是角动量随时间变化率)

大小 $M = r F \sin \varphi = F d$. (d 为作用线到 O 的距离，力臂)。

方向： $\vec{r} \rightarrow \vec{F}$ 右旋前进方向

角动量定理： $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. (角动量增量 = 合外力矩的冲量矩)。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \quad (\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt: \text{冲量矩})$$

$$\text{质点系角动量 } \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

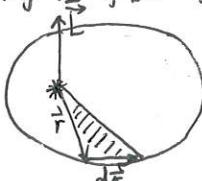
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i}_{\text{内力矩}=0} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (\text{内力: 大小=方向相反})$$

质点系角动量定理：质点系对某一参考点的角动量随时间变化率 = 系统所受各外力对同一参考点力矩之矢量和 (合力矩)。

角动量守恒定律：刚体所受合外力矩为 0 时，刚体角动量保持不变。

*刚体：运动中受力后，形状大小不变，且内部各点相对位置不变。

例：证开普勒第二定律：行星与太阳连线相等时间扫过面积相等



$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

行星绕太阳：仅受引力，引力与位矢平行， $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$. \vec{L} 不变 (由角动量守恒定律)

$$\therefore \frac{d\vec{s}}{dt} = \text{常量.}$$

3. 能量 能量守恒定律.

3. 动能 功 动能定理.

1. 动能 - 物体因有速度而具有的“作功本领”

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad \text{ML}^2\text{T}^{-2} \cdot \text{标量}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int dE_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2. 功：作用于物体的力在位移方向上的分量乘以 位移大小。

$$\text{元功 } dW = |\vec{F}| \cos \theta d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

标量 (外力对物体总功 = 合外力对物体做功). 过程量 (力的空间累积). 相对量 (与参考系有关).

- 对相互作用力的功取决于相对位移.

功率：单位时间内力所作的功.

$$\text{平均 } \bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

$$\text{瞬时 } P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

3. 动能定理 动能增量值等于合外力对物体所做的功.

$$\text{质点: } W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA} = \Delta E_k.$$

△由牛二推出，只适用于惯性系.

$$\text{质点系: } E_k = \sum E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \text{第 } i \text{ 个质点: } W_i = \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) d\vec{r}_i = \Delta E_{ki}$$

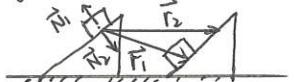
$$\text{对系统: } \sum W_i = \sum \left(\int \vec{F}_i + \vec{f}_i d\vec{r}_i \right) = \sum \Delta E_{ki}$$

$$W = \sum \int \vec{F}_i + d\vec{r}_i + \sum \int \vec{f}_i + d\vec{r}_i = W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = \Delta E_k.$$

△ 作用力与反作用力作功代数和不一定为0 (力作用点、位移不一定相同) 相对移动路径.

△ 质点系内力做功代数和不一定为0 (取决于质点相对位置变化 $d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ 是否 = 0).

e.g.



支持力 \vec{N}_1 : $A_{N_1} < 0$. \vec{N}_1, \vec{r}_1 锐角
 反作用力 \vec{N}_2 : $A_{N_2} > 0$. \vec{N}_2, \vec{r}_2 钝角
 $A_{N_1} + A_{N_2} = 0$ ($\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \perp \vec{N}_1 (\vec{N}_2)$)

内力做功为0条件: 1) 作用点无相对位移.

或 2) 相互作用力与相对位移垂直.

3. 保守力、势能.

保守力: 对物体所做的功与路径无关, 只由物体始末位置所决定. $\Leftrightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

保守力: 重力、弹力、万有引力、静电力、分子力.

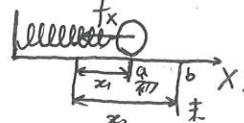
非保守力: (耗散力) 摩擦力、黏性力、流体阻力、爆炸力.

$$1) \text{重力: } dA = \vec{mg} \cdot d\vec{r} = -mg dy. (\text{向上为正向}).$$



$$A = \int dA = \int_{ha}^{hb} -mg dy = -(mg h_b - mg h_a) \quad (\text{未减初})$$

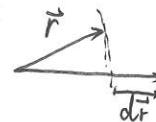
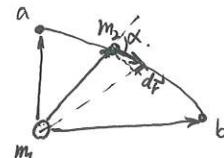
$$2) \text{弹性力: } \vec{F}_x = -kx \vec{i}, dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -kx dx$$



$$3) \text{万有引力: } \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (m_1 \neq m_2)$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

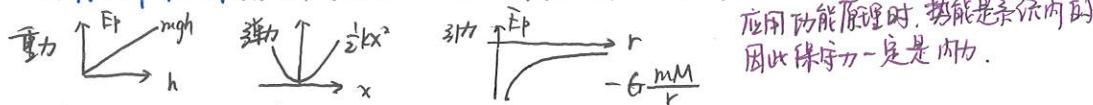
$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot 1 d\vec{r} / \cos \alpha = r dr.$$



$$W = \int dW = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = - \left[\left(-G \frac{m_1 m_2}{r_b} \right) - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r_a} \right) \right]$$

势能: 系统中各物体间(物体内部部分之间), 存在相互作用而具有的与相对位置有关的能量(状态量).

△只有系统中存在保守力时, 才能引入势能. 保守力做功=相互作用物体相对位置有关的函数. 始末位置值差



$$-\Delta E_p = E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{ab}. \quad \text{保守力做功= -相应势能增量.}$$

$$\begin{cases} dW = \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r} = -dE_p. \Rightarrow \vec{F}_{\text{保}} = -\text{grad } E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right) \\ dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz. \end{cases}$$

$$\text{功能原理. } A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \Delta E_k \Rightarrow A_{\text{外}} + A_{\text{保内}} + A_{\text{非保内}} = \Delta E_k.$$

$$\text{机械能 } E := E_k + E_p. \quad -\Delta E_p.$$

$$\Delta E = \Delta(E_k + E_p) = W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} \quad (\text{外力. 非保守内力做功和=机械能增量}).$$

机械能守恒定律: 当作用于质点系的外力和非保守内力不作功时, 质点系的总机械能守恒.

能量守恒定律: 在孤立系统内, 系统总能量保持不变.

第三章 刚体力学

刚体: 外力作用下不产生形变的物体(连续分布的质点, 任意两点距离不变)

质量元: 组成刚体的每个质点; 每个质量元的运动服从质点力学规律.

运动:

平动: 刚体上任意给定直线运动中始终保持平行

转动: 刚体上所有质点绕同一直线作圆周运动. 直线一转轴.

* 定轴转动: 转轴相对参考系静止.

描述运动(定轴转动)

转动平面: 定轴转动刚体上各质点运动面.

特点: (1) 转动平面上转轴.

(2) 转动平面上各点均做圆周运动. 角量 = 线量 $\frac{1}{r}$.

(3) 各点 $\vec{\omega}$ 方向均沿轴成

角位置 $\theta(t)$. 角位移 $\Delta\theta$, $d\theta$. (定轴转动时各点角位移 = 选取任意一点研究)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} & \beta = \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} & * \beta, \omega \text{ 是矢量, 定轴转动中轴的方向不变.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = r\alpha \vec{e_t} + r\omega \vec{e_n} \\ \text{切向} \quad \text{法向.} \end{array} \right. & & & & \text{故用 } \underline{\text{正负}} \text{ 表示方向.} \end{aligned}$$

角动量.

选取质量元 Δm_i .

Δm_i 对转轴的角动量: $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega}$

刚体对转轴的角动量: $\vec{l} = \sum \vec{l}_i = (\sum \Delta m_i r_i^2) \vec{\omega} = J \vec{\omega} \quad \vec{l} \parallel \vec{\omega} \parallel \text{转轴.}$

转动惯量: $J = \sum \Delta m_i r_i^2$. "r" 不点到转轴距离. 描述物体转动惯性的大小; 取决于物体本身和转轴.

若质量连续分布, $J = \int r^2 dm$ $dm = \begin{cases} pdV \\ \sigma dS \\ \lambda dl \end{cases}$ 体、面、线分布.
 p, σ, λ 为体、面、线密度.

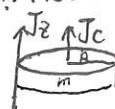
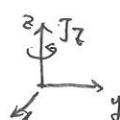
△ 增加质量是改变刚体转动状态的原因. (某方向的 \vec{M} 只改变该方向的 $\vec{\omega}$)

△ 转动惯量可叠加 (前提是绕同轴转动).

平行轴定理: 若刚体, 过质心转轴转动惯量 J_c , 与该轴相距为 d 的平行轴 \vec{J}_z 转动惯量 J_z .

$$J_z = J_c + md^2$$

$$\text{正交轴定理: } J_z = J_x + J_y$$



3. 刚体定轴转动规律.

$$\text{对刚体 } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

对轴的力矩 $\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_z$ (平行于 $\vec{\omega}$ 方向力矩不起作用).

$$M_z = r F_z \sin\varphi = F_z d$$

Δ 合外力 = 0. \Leftrightarrow 合外力矩 = 0.

刚体定轴转动定律: $M_z = J\beta$. 刚体的角加速度与刚体对某定轴的合外力矩成正比.

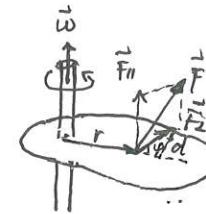
刚体角动量定理 $\int \vec{M} dt = \vec{L}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{积分} \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = J_2 \vec{\omega}_2 - J_1 \vec{\omega}_1 \end{array} \right\}$$

角动量守恒定律: 若刚体所受合外力矩 = 0. $J\vec{\omega}$ = 常矢量. (或 $J_2 \vec{\omega}_2 = J_1 \vec{\omega}_1$)

Δ 整个系统. 必须要相对同一转轴. $\sum J_i \vec{\omega}_i + \sum \vec{r}_j \times m \vec{v}_j = \text{常矢量}$ (刚体+质点系统)

Δ 与动量守恒定律相互独立 ($\because \vec{F}_\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{M}_\theta = 0$).



4. 进动(回旋运动)

定义: 高速自转的同时其自身对称轴还绕竖直轴作回旋运动的现象

自转: 角速度 $\vec{\omega}$. 角动量 $\vec{L} = J\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ 已指向自身的对称轴).

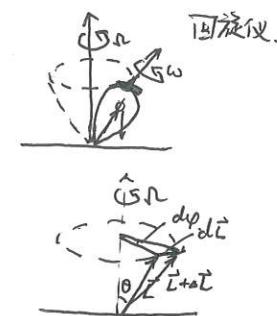
重力矩 $\vec{M} = \vec{r}_c \times \vec{mg}$ (指向垂直纸面) 向里)

自旋轴转过的角度. 微分式: $d\varphi = \frac{1}{L \sin\theta} d\vec{L}$

自旋轴转动的角度/进动角度. $\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin\theta}$.

* 进动角速度是近似式 (简化: 物体绕自身轴角动量作为物体总角动量. 条件 $\omega \gg \Omega$).

一般地. 自身轴会周期性摆动 (章动).



5. 刚体定轴转动的动能定理和机械能守恒.

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_p = mghc. (\text{相当于刚体质量集中在质心 } C)$$

$$\text{角矩的功. } W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta.$$

$$\text{功率 } P = \frac{dW}{dt} = M \cdot \omega.$$

$$\text{动能定理: 初功 } dW = M d\theta = J d\theta = J \frac{d\omega}{dt} d\theta = J \omega d\omega.$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \quad (\text{动能增量} = \text{合外力矩做功})$$

机械能守恒: 刚体只受保守力矩作用. $\frac{1}{2} J \omega^2 + mghc = \text{常量}$.

$$\text{功能原理: } W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (M_{\text{外}} + M_{\text{非保内}}) d\theta = \left(\frac{1}{2} J \omega_2^2 + mghc_2 \right) - \left(\frac{1}{2} J \omega_1^2 + mghc_1 \right).$$

机械能增量 = 外力矩与非保守内力矩做功之和.

3. 刚体的平面平行运动 (简单平动+定轴转动).

定义: 刚体上任一质元的运动轨迹都平行于某一固定平面.

刚体上任一点速度 $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}$

加速度 $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{\alpha}_{\text{转}} \times \vec{r}$.

质心平动: $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_c$

定轴转动: $M_c = J_c \alpha$ (质心的转动轴).

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

纯滚动: 刚体与接触面之间无相对滑动.

$$\begin{cases} v_c = R\omega \\ a_c = r\alpha \end{cases}$$

刚体与接触面接触点瞬时 $v=0$. (因此摩擦力不做功).

第四章 流体力学简介

流体：容易形变的连续分布介质。— 内部各部分之间极容易发生相对位移。

场：描述发生在空间的物理现象的物理量之总体。（物理量的空间分布）

速度场 $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

流动。速度场不随时间改变：定常（恒定/稳恒）流动。 $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$
随时间改变，非定常流动。

流线：切线方向与流速场在该点速度方向一致。（疏密表示流速大小，不能有交点）。

流管：流线围成的管状空间。

黏性力：相邻两部分流体有相对运动，沿接触面切向产生的内摩擦力。

理想流体：完全不可压缩、无黏滞性（完全没有黏性）的流体。

连续性方程。 $V_a S_a = V_b S_b = Q_V = \text{流量}$ 。（任取两截面，单位时间入a体积 = 出b体积）。

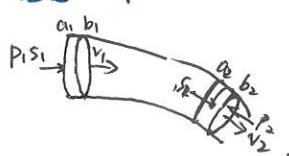
流量：单位时间内通过该截面流体的体积流量（质量流量）。

体积： $Q_V = \int_S dQ_V = \int_S V \cos \theta dS = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$

质量： $Q_m = \int_S dQ_m = \int_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$

理想流体： $\rho V S = \text{席}$ $\nu S = \text{席}$ 。

理想流体的伯努利方程。



$$S_1 V_1 \Delta t = S_2 V_2 \Delta t = \Delta V,$$

外力做功 $W = p_1 S_1 V_1 \Delta t - p_2 S_2 V_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \Delta V$ 。流管内其他流体压力。

$$\Delta E = \rho \Delta V \left[\left(\frac{1}{2} V_2^2 + g h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} V_1^2 + g h_1 \right) \right]$$

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \rho \Delta V \left[\left(\frac{1}{2} V_2^2 + g h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} V_1^2 + g h_1 \right) \right]$$

同一管道任何一点，单位体积流体 $\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g h + p = \text{席量}$ 。（对同一流管任一横截面均成立）
动势能和压强之和为席量。
 \downarrow 静压 \downarrow 动压。

工程上。 $\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + h = \text{席量}$
压头 速度头 位置头。

皮托管，测流速。



$$V_A = V \quad V_B = 0.$$

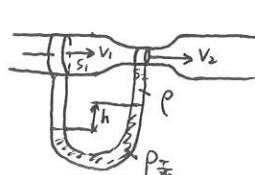
知 p 和 V 。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 + p_2 \\ S_1 V_1 = S_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) S_2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

$$p_1 - p_2 = (p_{\text{atm}} - p) g h \quad (\text{静压差分布规律})$$

$$Q_V = V_1 \cdot S_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_{\text{atm}} - p) g h}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

文特利流量计



§. 粘滞液体运动.

层流：各层流体互不混杂.

粘滞力：各层流体之间存在摩擦力.

速度梯度： $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dy}$ η 粘度/内摩擦系数

粘滞定律： $f = \eta \frac{dv}{dy} \Delta s$. η 与液体本身性质有关(一般 温度 \downarrow ，密度 \downarrow ， $\eta \uparrow$)

定常流动. 实际流体. 伯努利方程. $\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_w$. \Rightarrow 机械能损失.

湍流： v 很大或 S 增大时流体在向前运动的同时出现横向运动.

雷诺判据. $Re = \frac{1}{\eta} \bar{v} pl$. 层流 ≤ 2000 . 湍流 ≥ 4000

平均流速 管径 不稳定性 $2000 \leq Re \leq 4000$

斯托克斯定律. $f = 6\pi\eta rv$. 球体在实际流体中所受粘滞阻力

当 $f + F_g = G$ 时. 有. $v_{max} \downarrow$. 收尾/极限速度 $v_T = \frac{2}{9} \frac{r^3}{\eta} (\rho - \rho_0)$ (ρ 球体密度. ρ_0 流体密度)

泊肃叶定律. $Q_V = \frac{\pi}{8} \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{r^4}{\eta}$ 黏性流体通过圆管的流量.

$$\frac{df}{dl} = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^2}{l} = \frac{8\pi Q_V}{R^2} = 8\pi \rho \bar{v} \quad (\text{泊肃叶的另一种形式.})$$

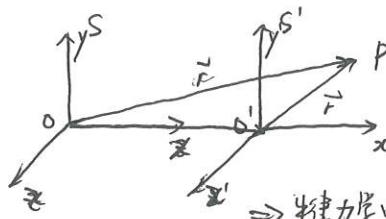
测粘滞系数 Q_V . 管径 R . $\eta = \frac{\pi \rho g h R^4}{8 l Q_V}$

第五章 狹義相對論

§. 1. 伽利略相對性原理.

伽利略相對性原理(力学相對性原理). 所有慣性系對描述力学定律來說都是等价的.

伽利略變換.



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad \vec{v} \text{ 为 } S' \text{ 系相对于 } S \text{ 的速度. (速度)} \\ \left\{ \begin{array}{l} t = t' \\ \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \end{array} \right.$$

$$\text{如圖, 仅有 } x \text{ 軸運動} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \\ a'_x = a_x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = u_x \\ a'_x = a_x \\ u'_y = u_y \\ a'_y = a_y \\ u'_z = u_z \\ a'_z = a_z \end{array} \right.$$

\Rightarrow 牛頓力学中, 加速度不變, 質量不變 $\Rightarrow F' = F. \Rightarrow$ 牛頓力学規律在伽利略變換下=.

经典力学时空观:

"绝对时空观" $t = t'$

1. 物体所经历时间与参考系选择无关. $t = t'$ 时间、空间绝对. 二者相互独立. 与物质运动无关.

2. 空间两点距离与参考系选择无关. $\Delta x = \Delta x'$

电磁理论提出 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 不变. 伽利略變換中 v 与参考系有关.

§. 2. 狹義相對論基本原理.

(1) 所有慣性系中, 物理定律的表达形式都相同. (狹義相對性原理)

(2) 光速不变原理. 真空中的光速具有相同的量值, 与参考系无关. (光速不变原理)

洛伦兹變換.



$$\text{正變換} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \end{array} \right.$$

$$\text{逆變換} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \end{array} \right.$$

$$\text{令 } \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad \text{常用于简化公式.}$$

当 $v \ll c$, $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$. 洛伦兹 $\xrightarrow{\text{低速}}$ 伽利略.

洛伦兹速度變換:

$$S \text{ 系} \quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$S' \text{ 系} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$\text{对坐标, 时间變換成全微分: } dx' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (dx - v dt) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ dt' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (dt - \frac{v}{c^2} dx) \end{array} \right.$$

$$\text{同理} \quad u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \beta^2} \quad u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \sqrt{1 - \beta^2}$$

逆变换：

$$\begin{cases} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}} \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}} \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}} \end{cases}$$

$\Delta S'$ 系与 S 系运动方向沿 x 轴方向，但速度变换有 u_x, u_y, u_z 。
但可以设运动方向为 x 轴，这样 $u_y = u_z = 0$ 。

3. 狭义相对论时空观

1) 对事件 $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 参考系 S 和 S' .

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = \gamma [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \\ t'_2 - t'_1 = \gamma [(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = \gamma [(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)] \\ v_2 - v_1 = \gamma [(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)] \end{cases}$$

S 同时不同地 $\rightarrow S'$ 不同时 \Rightarrow “同时”的相对性。

S 同时同地 $\rightarrow S'$ 同时同地

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x) = \gamma (1 - \frac{v}{c^2} u) \Delta t \quad (u < c, v < c)$$

$\Delta t'$ 与 Δt 同号，对有因果联系的事件，其先后顺序仍然不可逆，不会颠倒。

2) 对 S' 系中 同地不同时发生。($x'_1 = x_2$, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, $\Delta t'$ 为原时/固有时: τ)。解题时先注明。 \rightarrow 相对的，不要求静/动。

在 S 系中 $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \tau$ 。 $\Delta t > \tau$ 。时间膨胀。(运动的时钟变慢)。

Δ 时间膨胀效应已被实验证实。(K⁺介子行程)。

3). 长度收缩、时空属性、测量结果(不是视觉效应)。

原长/固有长度：相对惯性系静止的物体的长度(可不同时测量)。非原长：相对参考系运动，要求同时测量。

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{“长度收缩”“洛伦兹收缩”} \Rightarrow \text{原长} / \text{运动收缩}.$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t).$$

原长 \downarrow 观测长度

4) 时空间隔不变性。

假设 $t=0$ 时 N, S 系原点发出一光信号。 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ 。传播方程式。

闵可夫斯基四维世界 $(x, y, z, i\Delta t)$ 。时空间隔具有不变性。全时空间隔为 Δs 。

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + (i\Delta t)^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 + (i\Delta t')^2$$

$\Delta s^2 = 0$ 表明两个时空间隔是通过光信号联系的。 $\Delta s^2 < 0$ 。粒子以 $v < c$ 从一个 \rightarrow 另一个空间。

3. 相对论力学.

质量关系. $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ m_0 为静质量, m 为相对观测者以 v 运动时的质量.
(运动质量大).
 $= \gamma m_0$.

相对论动量. $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \vec{v}$

相对论力学基本方程 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$.

相对论动能. 动能增量. $dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$. $\vec{F} dt = d(m\vec{v})$

$$dE_k = d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = v^2 dm + mv dv.$$

$$\text{将 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}. \quad dm = \frac{m_0 v dv}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{代入得} \quad dE_k = c^2 dm$$

$$\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^m c^2 dm \Rightarrow E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (\text{相对论动能公式}).$$

质能关系. $E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k$. 质量与能量不可分割, m 和 E 都可用于表征其量值.
总能量 静能 动能. $\Delta E = \Delta(mc^2) = c^2 \Delta m$ 质量变化必然造成能量变化.

静能: 物体内能总和, 分子运动动能, 分子相互作用势能, 原子功能, 惯能, 核与电子结合时的.
电能, 核内质子, 中子结合能.

能量与动量关系. $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

左 能量 $E = pc$ 动量 $p = \frac{E}{c}$ 质量 $m = \frac{E}{c^2}$

$v=c$, 仅 $m_0=0$, m 才有限.

无静止质量, 静止能量, 有运动质量, 能量; 在任何参考系中以光速 c 运动, 找不到其相对静止的参考系,
△ 系统总质量, 总能量一定守恒, 静质量/能量却不一定守恒.

Electromagnetism

场、空间函数。

第6章 电荷与电场

物质存在 - 微粒。 物质(微粒)间相互作用 - 场(是一种物质, 媒介物质)

研究对象: 静电场: 相对观察者静止的电荷在空间激发的电场

§1. 库仑定律

电荷: 物质所带的电, 固有属性 分正负 带电本质: 物体间电子的转移。

基本性质: 同性相斥, 异性相吸。

电荷量: 物体带电荷的多少 SI制: 库仑 C

量子化(不连续) $e = 1.602 \times 10^{-19} C$ (基本电荷量, 电子带电量)

电荷守恒律: 孤立带电系统(无净电荷过界面)系统带电代数和 = 0

电荷运动不变性: 系统所带电荷量与参考系选取无关。

点电荷: 忽略形状大小。(带电体大小 << 带电体之间距离)

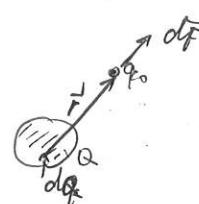
库仑定律: $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ 空间中两静止点电荷, \hat{r} : q_1 引向 q_2 的径矢。

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$$
 真空介电常量 / 电容率。

实验定律: 在 $10^{-15} \sim 10^7 m$ 范围有效。

静电力叠加: 带电元 dq ,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{q_0 dq}{r^2} \hat{r}$$



电荷面密度 $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{dq}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ $dq_s = \sigma dS$

线密度 $\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{dq}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ $dq_l = \lambda dl$

体密度 $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{dq}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ $dS = \rho dV$

3. 电场

任何电荷都在周围空间激发起电场。

同: 有动量、能量 异: 可加性、连续、可叠加、不能作参考系。

定义场强 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ ($N \cdot C^{-1}$ 或 $V \cdot m^{-1}$) 比值 $\frac{\vec{E}}{q_0}$ 大小、方向与试验电荷 q_0 无关。

场源电荷: 产生电场的点电荷(系)/带电体 \rightarrow 方向, 与正试验电荷在该点受电场力。

试验电荷: 电量足够小点电荷(不影响场的分布)

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ 场源 q 指向 q_0 径矢 \hat{r} .

‘ q 周围空间。

$$\text{叠加: } d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

静电场 - 空间矢量函数 $\vec{E}(x, y, z)$

例：电偶极子：场点到两点电荷中点距离 $r \gg$ 两点电荷间距 l .
且由两等量异号点电荷 $+q, -q$ 组成电荷系统.

径矢 \vec{l} : $-q$ 指向 $+q$.

电偶极矩 (矢矩) $\vec{P} = q\vec{l}$.

$$\vec{E}_p = -(E_+ \cos \theta + E_- \cos \theta) \hat{i} \quad E_{+/-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + (\frac{l}{2})^2} = E_{-/+}$$
$$= \frac{-ql}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

$$\Rightarrow r \gg l. \quad \vec{E}_p = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{电偶极子场强与电矩 } \vec{P} \text{ 正比}).$$

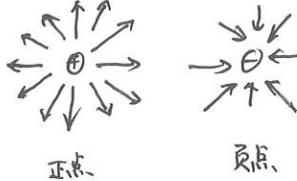
3. 电场线

电场线 (场线/电力线)：曲线上每一点切线方向表示该点场强 E 的方向，曲线条密表示该点 E 的大小。

即该点附近垂直于电场方向的单位面积所通过的电场线条数满足： $E = \frac{d\Phi_e}{dS_L}$

(dS_L : 垂直 E 方向面积元, $d\Phi_e$: 通过 dS_L 的电场线条数)

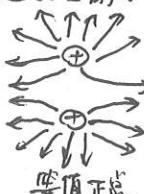
例：



正点



负点



等值正点



等值负点

起：正电荷 / 无穷远. 终：负电荷 / 无穷远. 不相交. 不形成闭合线.

4. 电场强度通量 (E 通量)

定义：穿过某曲面的电场线条数。

$$d\Phi_e = E dS_L = E dS \cdot \cos \theta. \quad \theta \text{ 为面积元法向 } \vec{e}_n \text{ 与 } \vec{E} \text{ 夹角. (} S \text{ 在垂直 } E \text{ 方向投影)}$$

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\Phi_e \text{ 是标量}).$$

$$\text{习题电场 } \Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS \cdot \cos \theta = E \cos \theta \int_S dS = ES \cos \theta.$$

5. 真空中高斯定理 (真空中静电场)

高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i^n q_i \quad \sum q_i \text{ 为该闭合曲面所包围的电荷代数和. (内部电荷)}$$

$$\text{若电荷连续分布 } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

上述等式对任意大小、体积均成立 $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (微分式).

若 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 必有 $\rho = 0$. 区域内电场是无源场

若 $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$, 必有 $\rho \neq 0$. 区域内电场是有源场.

闭合面上 \vec{E} 是内外电荷共同产生的总场强

通过闭合面总通量 只决定于它所包围的电荷量 (闭合面外电荷量对总通量无贡献)



ex. conclusion:

$$\text{无限长带电直棒: } E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$\text{无限大带电平面: } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(垂直平面均匀电场)

$$\text{而无限大等带电平面 } E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & \text{面向内} \\ 0, & \text{面向外} \end{cases}$$

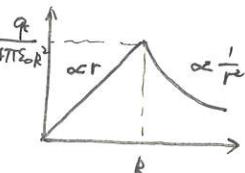


△利用高斯定理求解具有某种对称性(球、轴、面)的带电体场源(或组合). $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$. 关键是高斯面的选取.

e.g. 均匀带电球体电场分布 (q, R)



$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} & (r \leq R) \\ \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & (r \geq R) \end{cases}$$



此时.

均匀带电球面电场分布. (q, R)



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r \leq R) \\ \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & (r \geq R) \end{cases}$$



△电场强度在 $r=R$ 突变，实际球面有厚度。

均匀带电球层电场分布 (R_1, R_2, ρ)



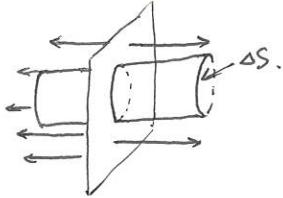
$$E = \frac{\sum q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \begin{cases} 0 & (r \leq R_1) \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right), & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} & (r \geq R_2) \end{cases}$$

无限长均匀带电柱面.



$$E = \begin{cases} 0 & a < r \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} & a > r \end{cases}$$

无限长均匀带电平面的电场



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

均匀带电圆环轴线

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

均匀带电圆盘轴线

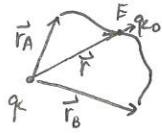
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right)$$

电偶极子中垂线

$$\vec{E}_p = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{取 } r \gg l)$$

3. 静电场的环路定理与电势

静电力做功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q \vec{r} \cdot d\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



$$A = \int_L dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (\text{保守力})$$

$$A = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

RHS - 静电场场强 \vec{E} 的环流。

静电场环路定理: 静电场中, 场强沿闭合路径的环积分为零。

$$\because \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{旋度为0, 静电场是有源无旋场})$$

电势能: $A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_a - W_b \quad (W_b = 0, W_a = q_0 \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}, A \text{点静电能})$

电势: $U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{选择 } \infty \text{ 为电势零点})$

U_a 与检验电荷无关, 仅与 a 点电场性质有关, 标量, 有正负, SI 单位 J, C⁻¹, 伏特 V.

电势仅具有相对意义, 计算电势要选取参考点, 同一问题选同一参考点。

电势差 $U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{与零势能点选取无关})$

在静电场中 $a \rightarrow b$: $A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 (U_a - U_b)$

电势叠加原理: $U = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_p^\infty \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \int_p^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$

电势计算

1. 截积分法。
荷分布 \rightarrow 场强分布 \rightarrow 确定电势零点 \rightarrow 根据 $U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 沿路径积分

2. 电势叠加法。

点电荷电场中电势分布 $U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \neq 0)$; 电势叠加原理。

求和 \rightarrow 截积分 $U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \downarrow \text{电势零点是无穷远点}$

3. 等势面、电势梯度。

等势面: 电场中电势相等的点所连成的曲面。规定相邻等势面之间电势差相等。

等势面与电场线关系: (1) 处处正交

(2) 电场线指向电势降落的方向。

(3) 等势面与电场线密集处场强的量值大, 稀疏处场强的量值小。

场强与电势的微分关系 (由电势分布 \Rightarrow 场强分布)

E

P_1 $d\vec{n}$ P_2 \vec{e}_n (单位法向量)

$U - (U + dU) = \int_{P_1}^{P_2} E \cdot d\vec{n} = \int_{P_1}^{P_2} E_n \vec{e}_n \cdot d\vec{n}$

$\Rightarrow E_n = -\frac{dU}{dn}$ ($P_2 \rightarrow P_1$, 表示 $d\vec{n}$ 上各点场强近似一致)

$\Rightarrow \vec{E} = E_n \vec{e}_n = -\frac{dU}{dn} \vec{e}_n \rightarrow$ 电势梯度矢量, 与场强关系: 大小相等方向相反.

$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{dU}{dn} \vec{e}_n = -\text{grad } U = -\nabla U$.

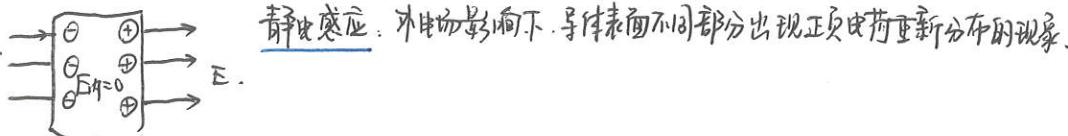
$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) = -\nabla U = -\text{grad } U$.

3. 静电场中导体

导体中有大量的可自由移动的自由电子

静电平衡状态: 导体内部和表面都设有电荷宏观定向运动的状态



静电平衡状态下: (1) 导体内场强处处为零, 导体表面场强垂直导体表面; 电场线不进入导体内部而导体表面正交.

(2) 导体内、导体表面各处电势相同, 整个导体等势.

(3) 内部各处净电荷为零, 电荷只能分布于导体外表面; 空腔导体, 空腔内无电荷.

(4) 导体表面上各点, 电荷面密度与表面附近场强正比.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_{\text{表}}$$

(5) 孤立导体表面上某处电荷面密度 σ 与该处曲率有关.

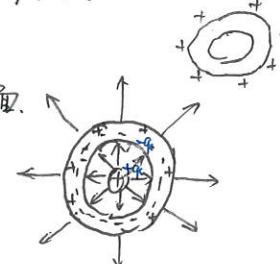
(孤立导体, 周围不存在其他导体或可忽略).

曲率 R (尖、凸) $\sigma \uparrow$; 曲率为负 (凹) $\sigma \downarrow$. (特别地, 封闭空腔 $\sigma = 0$).

尖端放电: 尖端 R 小, σ 大, 超过空气击穿场强时, 空气被电离放电.

空腔导体

腔内无带电体	整个腔体等势, 内部场强为零.
	若腔体带电, 电荷只分布于空腔导体外表面. (内表面无电荷)
腔内有带电体	导体中场强为零;
	空腔内场强决定于腔内带电体, 空腔外电场决定于腔外表面上电荷分布; 空腔内表面与腔内带电体比荷等量异号.



静电屏蔽:

导体壳	内部电场不受壳外电荷影响
接地导体	外部电场不受壳内电荷影响.

8. 电容和电容器.

电容：孤立导体所带电量与其电势的比值 $C = \frac{Q}{U}$. (导体“容纳”电的能力).

法拉 $1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$. ($C \cdot V^{-1}$)

电容只与导体本身形状、大小、结构有关，与是否带电无关.

e.g. 半径 R 、带电 q 的孤立金属球. $U_{\infty} = 0$.

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

电容器：由电介质隔开的两金属薄片（电容器极板）组成的导体组.

一将电场集中在有限空间.

极板电量 q . 极板间电势差 ΔU ; 电容器电容 $C = \frac{q}{\Delta U}$. \rightarrow

\hookrightarrow 一个极板所带电量的绝对值. (两极板分别带 $+q, -q$).

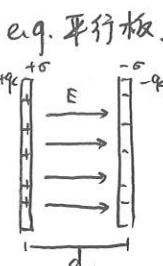
C 的影响因素：两板形状、大小、相对位置，中间电介质种类和分布.

计算电容器电容：1. 两极板 A, B 带电 $+q, -q$

2. 求两极板间电场分布 E . $U_{AB} = \int_A^B E \cdot d\vec{l}$ 计算 $U_A - U_B$.

3. 由定义式 $C = \frac{q}{U_A - U_B}$.

△电容被击穿 - 短路
△电阻被击穿 - 断路

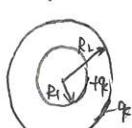


e.g. 平行板. 板间 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. (平行板视作无限大)

$$U_{AB} = \int_A^B E \cdot d\vec{l} = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} \cdot d\vec{x} \vec{i} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 S} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

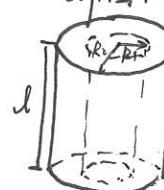
$$C_0 = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

e.g. 球形电容器



$$C_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

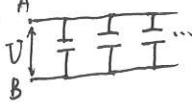
e.g. 圆柱形电容器.



$$C_0 = \frac{q}{U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

电容器并联和串联.

1. 并联



各电容两端电压相等 对每个电容器 $q_i = C_i U_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \sum q_i \\ U_{AB} = U_i = \frac{q_i}{C_i} \end{array} \right.$$

$$C = \sum C_i$$

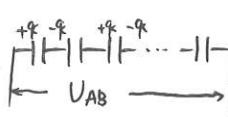
各电容上电荷量相等.

$$\left\{ \begin{array}{l} q = q_1 = q_2 = \dots = q_i \\ U_{AB} = \sum U_i \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U_{AB}}{q} = \frac{\sum U_i}{q} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

(分压时 $\frac{1}{C}$ 正比).

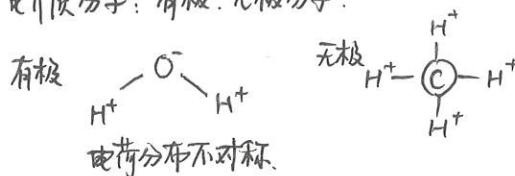
2. 串联



5. 静电场中的介质

电介质：电阻率很大、导电能力很差的物质（即绝缘体）。

电介质分子：有极、无极分子。



电偶极矩： $\vec{p} = q\vec{r}$. (\vec{r} 等效负电荷中心指向等效正电荷中心).

无极：电荷分布具有对称性，正、负电荷等效电荷中心重合。

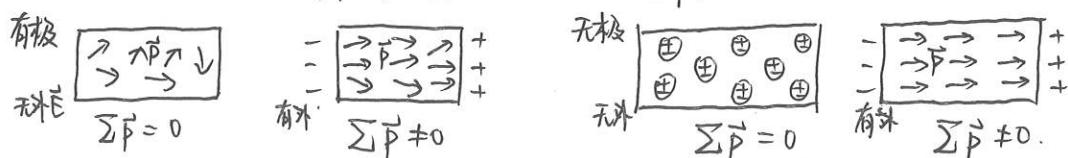
有极：电荷分布不对称，具有固有的电偶极矩。

静电场 影响，电介质，产生极化电荷，电荷重新分布，电场重新分布。

电介质极化：在外电场的作用下，介质表面产生电荷的现象。（极化/束缚电荷）。

{ 有极分子转向极化：外电场作用下，有极分子 $\xrightarrow{\text{受力}}$ 电偶极子，转向外电场方向（受外电场力的作用）
(仍有热运动、排列/取向不可能完全与外电场一致)。

无极分子位移极化：外电场作用下，正负电荷反方向相反的电场力作用，分子相对位移。
每个分子电偶极矩不再为零，都沿电场方向排列。



机制不同，宏观效果相同—电介质分子电偶极矩 $\sum \vec{p} \neq 0$ ，且介质两相对端表面出现等量+ -。

Δ 极化电荷：不能通过传导/接地方法离开电介质；

其产生附加电场削弱原电场的分布；

电极化强度： $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\partial V}$ (电介质内某处附近单位体积分子电偶极矩的矢量和)。SI: $C \cdot m^{-2}$

均匀极化：电介质中各点的电极化强度矢量的大小和方向均相同。

实验定律 $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ χ_e 是电介质极化率， \vec{E} 是总场强， $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ (外场与极化电荷产生的场强)

$$\chi_e = \epsilon_r - 1. (\epsilon_r \text{ 为相对介电常量/相对电容率})$$

\vec{P} 与极化电荷关系推导。

取斜棱体(细小介质中)体积为 $dV = l \cos \theta dS$.
 斜棱体所有正电荷将移至 dS 表面成为极化电荷。

$$dq' = nq dV = nq l \cos \theta dS = P \cos \theta dS.$$

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \theta = P_n. \text{ 极化电荷面密度 = 电极化强度沿表面法线方向投影。}$$

电介质中的场强强度.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad (\text{电介质内部}, \vec{E}_0, \vec{E}' \text{方向总是相反})$$

外场 极化电荷附加电场(退极化场)

探究 \vec{E} 对 \vec{P} 的削弱作用. 以平行板电容器为例.

$$\text{真空中: } \left\{ \begin{array}{l} C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{q}{U_{AB}} \\ E_0 = \frac{(U_{AB})_0}{d} \end{array} \right.$$

充满电介质后: (电势差↓, 场强削弱)

$$C = \epsilon_r C_0 = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{q \epsilon_r}{U_{AB}}$$

$$E = \frac{U_{AB}}{d}$$

Δ 注1: 平行板电容器中 $\vec{E}_0, \vec{E}, \vec{E}', \vec{P}$ 同向. $E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$

$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \Rightarrow \text{可证明前文的 } \epsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0)$$

$\Rightarrow \chi_e, \epsilon_r, \epsilon_0$ 表征电介质性质, 知一求其二.

Δ 注2: 由 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$ 和 $E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \sigma_0. \quad (\text{电介质表面上极化电荷密度 } \sigma', \text{ 电容器极板上自由电荷密度 } \sigma_0)$$

由此得: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (辅助变量). (特别地, 若向同性均匀电介质, $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$)

3. 电介质中的高斯定理

电场中存在电介质时, 空间电场由自由电荷 + 极化电荷共同产生 (真空静电场高斯定理不直接适用).

有 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (静电力环路定理成立).

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q') \quad (q_0, q' \text{ 封闭曲面 } S \text{ 所包围的自由电荷和极化电荷}) \\ - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \sum_{\text{内}} dq' \end{array} \right.$$

闭合曲面的电位移通量.

$$\Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum_{(S \text{ 内})} q_0 \quad \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{(S \text{ 内})} q_0 \text{ 电介质中的高斯定理.}$$

微分式: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$. (ρ_0 自由电荷体密度)

Δ 注1: \vec{P} 是辅助量, 不具有决定作用.

4. 有电介质时静电场计算

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i \Rightarrow \text{计算得 } \vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ q_0, q' \text{ (电介质) 分布具有对称性} \\ \uparrow \\ \text{各向同性电介质} \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{均匀无限大介质充满全场.} \\ \text{介质分界面为等势面.} \\ \text{介质分界面与等势面垂直.} \end{array} \right.$

§ 6. 电场的能量

带电系统带电过程 \Leftrightarrow 电荷相对移动的过程.

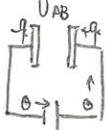
$$\text{④} \quad W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^b q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_b^{\infty} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 (U_b - U_{\infty}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$= \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2.$$

n个点电荷系统的电能: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$.

连续分布: $W = \frac{1}{2} \int u d\sigma$

电容器:



$$A = \int dA = \int_0^Q \frac{q}{c} d\sigma = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} \quad \text{从电容器 } q=0 \text{ 到充满 } q=Q \text{ 带电量.}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{带电 } Q \text{ 时具有的能量})$$

电场的能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ (单位体积电场具有的能量)

电场能量: $W = \int_V w_e dV$ (对任意电场均成立)

(关键是选 dV , 使 dV 中 E 处处相等 (而 dV 中 w_e 处处相等).

电场能是以体密度形式分布在空间内的静电场.

第7章 电流与磁场

§.1 恒定电流与恒定电场

电流：带电粒子的定向运动。

载流子：形成电流的带电粒子，（金属中自由电子，电解质溶液正负离子、气体内电子或离子，半导体正电空穴）

分类 { 传导电流：电子/离子相对导体定向运动

形成条件 { 有可以移动的电荷

电流电流：带电体作机械运动

有维持电荷作定向运动的电场。

位移电流：不存在电荷运动，能产生磁场

电流(强度)：单位时间通过导体任一截面的电量 $I = \frac{dq}{dt}$ 单位 $1A = 1C \cdot s^{-1} = 10^3 mA = 10^6 \mu A$

恒定电流(直流电) $I = \frac{dq}{dt} = \text{常量}$ \leftarrow 恒定电场：电荷分布不随时间变化。

比较： 不同

相同。

静电场 $I=0$, 导体内 $\vec{E}=0$ 一旦建立不需能量消耗 \rightarrow E 分布不随时间变化。

恒定电场 $I=\text{恒量}$, 导体内 $\begin{cases} \vec{E} \neq 0 \\ \vec{E} \text{ 分布不变} \end{cases}$ 存在一定伴随能量耗散, 高斯(有源性), 环路(积分)

电流密度矢量：描述空间中电流分布。 $\vec{j} = \frac{dI}{ds_L} \hat{n}$



$$dI = j \cdot ds_L = j ds \cos\theta = \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

\vec{u} . 自由电子漂移速度 \vec{j} 方向与 \vec{u} 漂移速度方向。

\Rightarrow 通过截面 S 的电流 $I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$ (有限截面) \rightarrow 电流是电流密度矢量过 S 面的通量。

设导体单位体积载流子数目 n , 载电量 q , 漂移速度 \vec{u} , $d\vec{s}$ 与 \vec{u} 之间夹角为 θ ,

$$dI = qnudS_L = qnu \cos\theta ds \Rightarrow \vec{j} = qn\vec{u}$$

电流线：电流分布；曲线上每点切线方向为 \vec{j} ，曲线疏密表示大小。

电流场： \vec{j} 的空间分布。

电流场中某一闭合曲面 S , 单位时间内 S 面流出的电荷量 $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$.

$$\text{由 } dq = \oint_V \rho dV, -\frac{dq}{dt} = \oint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, (S \text{ 面减少电量, 向外侧为正向})$$

$$\text{电流连续性方程: } \oint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = -\oint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \text{ 电荷分布不随时间变化(由场=)电流恒定时 } \oint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0.$$

外电路：电流从高电位向低电位运动。

内电路：外力将电荷从低电位移向高电位，克服静电力做功。

非静电力：电荷能逆着电场方向运动的力，(使得电流的流动得到维持)

电源：提供非静电力维持电势差的装置。

电源电动势：把单位正电荷往电源内部从负极移到正极，非静电力所作的功。 $E = \oint_L \vec{E}_L \cdot d\vec{l}$

E 与外电路是否闭合无关。 E 是标量。

§.2 恒定磁场和磁感应强度.

一切磁现象都起源于电荷的运动. 运动电荷既产生磁效应, 也受磁力作用.

磁场运动电荷产生, 表现 { 对磁场中运动电荷和电流有力
对磁场中运动的载流导线作功.

磁感应强度 \vec{B} 大小: 单位磁极受力. 方向: N极指向.

实验定义: 实验中有 (1) 正试验电荷 q_0 以恒定速度运动时, 其在场中受场磁力大小 $F \propto q_0$. $F \propto v$.

$$(1). \vec{v} \parallel \vec{B} \quad F = 0. \quad \vec{v} \perp \vec{B} \quad F = F_{\max}.$$

$$(2). \vec{B} \text{ 方向: } \vec{F}_{\max} \times \vec{v}$$

定义磁场中某点的磁感应强度 B 的大小为 $B = \frac{F_{\max}}{q_0 v}$ $1T = 1N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} = 10^4 Gs.$

(实际上 \vec{B} 是一个空间位置 / 时间有关的函数).

§3. 毕奥 - 萨伐尔定律.

真空中载流导线上电流元 $I d\vec{l}$ 在空间某点产生的 $d\vec{B}$

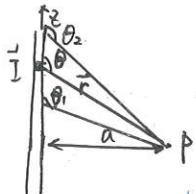
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta dl}{r^2} \\ \text{方向: } I d\vec{l} \rightarrow \vec{r} \text{ 右旋前进} \end{array} \right.$$

真空磁导率: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H \cdot m^{-1}$

$$\begin{cases} \text{类比 静电场 电荷} \rightarrow \vec{E} & d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r \\ \text{恒定磁场 电流} \rightarrow \vec{B} & d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \end{cases}$$

△ 应用:

(1) 载流直导线.

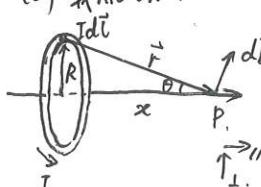


$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \sin \theta}{r^2} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

$$\text{无限长, } \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi. \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{半无限长, } \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \pi. \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

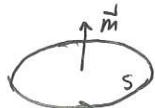
(2) 载流电流环.



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

$$B = B_{\parallel} = \int dB_{\parallel} = \int dB \sin \theta = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

描述圆电流磁性质. 截流线圈的磁矩 $\vec{m} = IS \vec{e}_n$ (N 匝, $\vec{m} = NIS \vec{e}_n$)

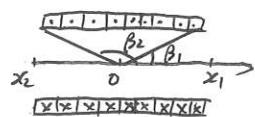


$$\text{圆电流轴线上磁场 } \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

(3) 载流螺线管.

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 n I dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$I \uparrow \quad \text{I. } B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 n I dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad \text{无限长: } B = \mu_0 n I.$$



运动电荷的磁场.

$$I = nqvS.$$

考虑电流元 Idl . 其处磁场 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 nq dl S \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$

$$\text{电流元体积粒数 } dN = nSdl.$$

$$\text{运动电荷产生磁感强度 } \vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{前提 } v \ll c)$$

§4. 磁场中高斯定理.

磁感应线 $\left\{ \begin{array}{l} \text{切向: } \vec{B} \text{ 方向} \\ \text{疏密: } \vec{B} \text{ 大小} \end{array} \right.$

(通过垂直于 B 的单位面积上磁感应线根数等于 B 例量值).

闭合(或伸向无限远)互不相交, 与载流回路互相“套链”(磁场、无源、有旋).

$$\text{磁通量} \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{d\Phi_m}{dS_L}, \quad d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad \Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \\ \Phi_m \text{ 单位 Wb. } 1Wb = 1T \cdot m^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{感应线闭合成环} \\ \text{无头无尾, 不存在} \\ \text{磁单极子.} \end{array}$$

真空中恒定磁场的高斯定理. $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. 通过磁场中任意封闭曲面磁通量为 0.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0. \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{磁场中高斯定理微分形式}).$$

$$\text{对t: } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \quad \& \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad \text{自然界有单极+一单极, 无磁单极子}$$

§5. 真空中恒定磁场的安培环路定理.

真空中恒定磁场的安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ (闭合路径内所包围并穿过的代数和).

$$\text{验证(无限长载流直导线). } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad d\vec{l} \cos\theta = r d\phi \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{环流.} \\ dr + r d\phi \end{array} \quad \begin{array}{l} d\vec{l} \cos\theta = r d\phi \\ d\vec{l} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{B} \\ \vec{r} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{dl} \\ \vec{dr} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{dl} \cos\theta = r d\phi = a. \\ \vec{dl} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{(1) 左图} \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos\theta dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r \int_0^{2\pi} dl = \mu_0 I. \\ & \text{(2) 右图 (导线在圆路径)} \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = \int_{L_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi + \int_{L_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi \\ & = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi + (-\phi)) = 0. \end{aligned}$$

△对“环流”有“贡献”的电流需与闭合路径 L “互相套链”(无限远也可视作“套链”).

例:



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I \quad \text{若 B 匀强, } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

另外, 规定与 L 旋向成右旋 $I_i > 0$ (右旋).
 L 旋向成左旋 $I_i < 0$.

环路定理变形.

$$\text{由斯托克斯公式. } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) dS = \mu_0 \sum_{(L)} I = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

$$\text{即 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (\vec{j} \text{ 是电流密度矢量}) \text{ 安培环路定理.}$$

环路定理应用 - 求磁场.

分析电流得到磁场分布的某种对称性. (适应选取安培环路, 使得 B 从积分号中提出)

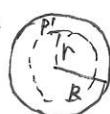
例: 无限长载流圆柱形导体.



$$\text{外部: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = 2\pi r B. \quad \text{对称: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint_L \cos \theta dl = B \cdot \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r B.$$

$$\text{环路定理: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R).$$

内部:



$$\text{对称同理 } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

$$\text{回路 } L' \text{ 包围并穿过的电流 } I' = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I \quad (\text{电流均匀分布})$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \quad (r < R).$$

带用结论 (1) 无限长载流圆柱形导体 (电流在截面上均匀分布).

$$B = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R. \end{cases}$$

(2) 无限长载流圆柱面.

$$B = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R \end{cases}$$

(3) 长直载流螺线管内的磁场分布. (先证明长直载流螺线管内磁场均匀)

$$B = \mu_0 n I.$$

(螺线管内部任意一点 n 为单位长度匝数)

$$\text{00000000000000}$$

$$\text{00000000000000}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \vec{ab} = \mu_0 I (n \cdot \vec{ab}).$$

(4) 载流密绕螺线环 / 环形螺线管

$$\text{环内 } B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (R - \frac{d}{2} < r < R + \frac{d}{2}) \quad \Rightarrow R \gg d \quad (环粗且大) \quad r \approx R; n = \frac{N}{2\pi r} \quad (\text{匝数}).$$

$$\text{近似为 } B = \mu_0 n I.$$

$$\text{环外 } B = 0.$$

(5) 无限大载流平板. (沿平板横截面方向单位宽度的电流为 j)

$$B = \frac{\mu_0}{2} j$$

(与该点距平板距离无关, 板两侧存在大小相等方向相反的匀强磁场区域)

§ 6. 磁场对运动电荷和载流导线的作用.

洛伦兹力: 运动电荷在外磁场中受到磁力的作用.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } F = qv \sin \theta B, \quad \theta(v, B \text{ 夹角}) \\ \text{方向: } \vec{v} \rightarrow \vec{B} \text{ 右旋方向.} \end{array} \right.$$

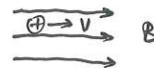
正电荷. $\vec{v} \times \vec{B}$ 方向

负电荷 $\vec{B} \times \vec{v}$ 方向

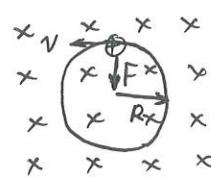
△ 洛伦兹力改变 v 方向, 不改变 v 大小, 不做功.

带电粒子在磁场中运动.(不计其他外力).

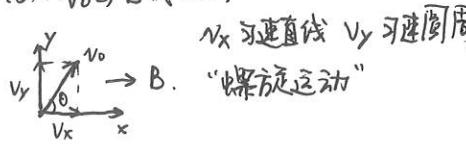
(1) 平行磁场方向. $\theta = 0$. $\vec{F}_m = 0$. 匀速直线.



(2) 垂直磁场方向. $qvB = m\frac{v^2}{R}$. $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{mv}{qB} \\ T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \end{array} \right.$
匀速圆周. 周期频率与速度无关



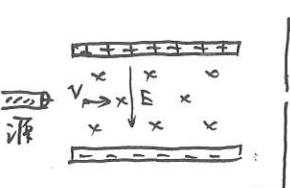
(3). v_0 与 B 成 θ 角.



$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{mv \sin \theta}{qB} \\ T = \frac{2\pi m}{qB} \\ h = v_x T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \theta \text{ (螺距)} \end{array} \right.$$

应用.

(1). 速度选择器



$$qvB = Eq \Rightarrow v = \frac{E}{B} \quad (\text{仅符合速度要求的粒子可通过狭缝.})$$

(2) 质谱仪. P - 速度选择器.

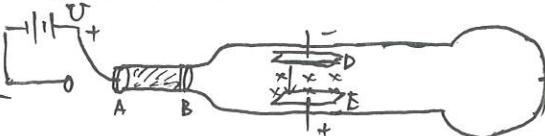


N - 高压源 P - 速度选择器.

$$R = \frac{mv}{qB} \quad v = \frac{E}{B}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB^2} \quad (\text{研究同位素, 在质谱仪中同位素按质量大小排列})$$

(3) 德布罗意实验.



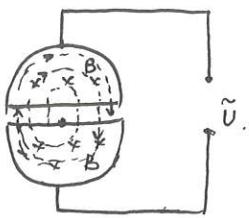
$$\text{电子动能: } \frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\text{打在屏中央的电子 } v = \frac{E}{B}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2UB^2}$$

$$\frac{e}{m} = 1.7588 \times 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} \quad m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

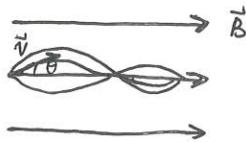
(4) 回旋加速器



$$\text{通过半圆盒时间 } T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB} \quad \text{振荡周期 } T = 2T$$

$$V_{\max} = \frac{qBR}{m} \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

(5) 磁透镜 (磁聚焦)

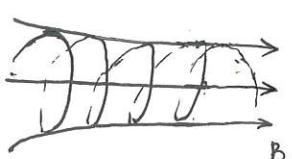


$$v_{||} = v_0 \cos \theta \approx v_0$$

$$v_{\perp} = v_0 \sin \theta \approx v_0 \theta.$$

$$\text{螺距 } h = T v_{||} = \frac{2\pi m v_0}{qB} \quad (\text{与 } \theta \text{ 无关, 近似相等, 实现聚焦})$$

(6) 磁偏转 (磁约束)



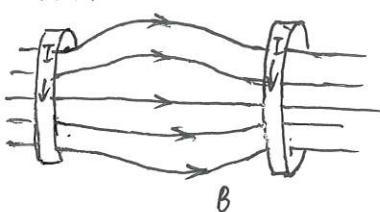
$$\text{由 } R = \frac{mv}{qB}. \quad R \propto B \text{ 反比.}$$

横向(y) $B \propto Rv$.

纵向(x) $B \propto h v, h \rightarrow 0$.

带负电荷粒子, 在非均匀磁场中所受洛伦兹力, 恒有指向磁场较弱方向的阻碍粒子前进; 继而掉头向磁场较弱方向运动(反射)

磁瓶

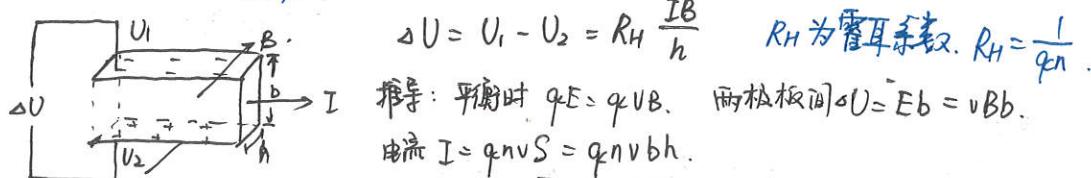


两端强, 中间弱的磁场分布(两个磁极)

此时带反电的粒子将被约束在两个磁极之间往返.

(*应用: 夹控热核聚变, 等离子体, 高温来回振荡, 碰撞频率*)

(7) 霍尔效应. 同一磁场中放置矩形截面载流导体. 若 $I \perp B$, 在同时 $I, \perp B$ 方向上, 导体上下表面出现电势差.



$$\Delta U = U_1 - U_2 = R_H \frac{IB}{h} \quad R_H \text{ 为霍耳系数. } R_H = \frac{1}{qn}.$$

推导: 平衡时 $qE = qvB$. 两极板间 $\Delta U = Eb = vbB$.

$$\text{电流 } I = qnvS = qnvbh.$$

$$\Delta U = Bb \cdot \frac{I}{qnbh} = \frac{IB}{qnbh}.$$

$$\text{应用: 测载流子密度 } n = \frac{BI}{\Delta U \cdot q \cdot d}$$

测磁感应强度. (霍耳元件).

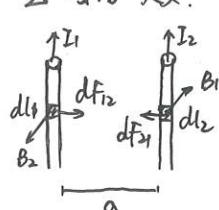
安培力: 外磁场对载流导线有力的作用. (洛伦兹力的宏观现象)

电流元 $I d\vec{l}$ 载流子数目 $dN = n S d\vec{l}$.

安培力 (dN 个载流子受洛伦兹力总和). $d\vec{F} = dN q_e (\vec{v} \times \vec{B}) = n S q d\vec{l} (\vec{v} \times \vec{B}) = I d\vec{l} \times \vec{B}$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{l} dF = I d\vec{l} B \sin\theta \\ \vec{l} \rightarrow \vec{B} \text{ 右旋.} \end{array} \right. \quad \text{安培定律} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \end{array} \right.$$

△ “安培”定义.



$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \\ B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \end{array} \right.$$

$$\frac{dF_{12}}{dl_1} = \frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (\text{单位长度安培力}).$$

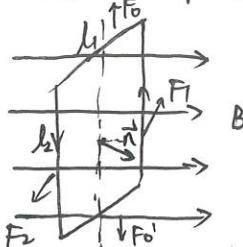
当 $\frac{dF}{dl} = 2 \times 10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$, $a = 1 \text{ m}$. 把两导线中所通过电流定义为 1A.

△ 例:

$$B. \quad \vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\int_L d\vec{l} \right) \times \vec{B}$$

$$\int_L d\vec{l} = \vec{L}. \quad F = I \vec{L} \times \vec{B}, \quad (\text{匀强磁场})$$

载流线圈在磁场中受到的磁力矩.



刚性线圈, F_0, F_0' 等大, 反向, 不拉伸.

$F_1 = F_2 = BI l_2$. 不共线 \rightarrow 一对力偶. 力臂 $\frac{1}{2} l_1 \sin\psi$

$$M = \frac{1}{2} F_1 l_1 \sin\psi + \frac{1}{2} F_2 l_1 \sin\psi = BI l_1 l_2 \sin\psi = BIS \sin\psi \quad (\text{适用于任意形状闭合载流线圈}).$$

$$\text{磁力矩 } \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}. \quad (\text{磁矩 } \vec{P}_m = NIS \vec{e}_n)$$

$\psi = \frac{\pi}{2}$, 磁力矩最大. $\psi = 0, M = 0$, 稳定平衡. (转动趋势是同侧 $\psi = 0$)

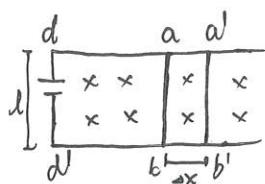
$\psi = \pi$, $M = 0$, 不稳定平衡. (稍扰动, 线圈不会自动回复).

△ B 同, 线圈 $F_{\text{合}} = 0, M_{\text{合}} \neq 0$.

B 不同, 线圈 $F_{\text{合}} \neq 0, M_{\text{合}} \neq 0$. 转动+平动, 向磁场大的地方.

§ 7. 磁力的功.

③ 磁力对载流导线.

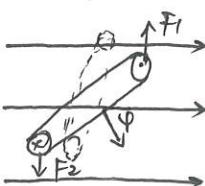


$$F = BIL.$$

$$W = F \Delta x = ILB \Delta x = IB(l \cdot dda - l da') = I \Delta \Phi_m.$$

(功 = 电流 \times 穿过回路所包围面积内磁通量增量).

④ 磁力矩对载流线圈.



$$W = - \int M d\psi = - \int BIS \sin \psi d\psi = I \int d(BS \cos \psi) = I \int d\Phi_m$$

$$\Rightarrow W = I \Delta \Phi_m = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m$$

§ 8. 磁介质中的恒定磁场.

磁介质：处于磁场中能与磁场发生相互作用的实物物质.

磁场中的实物物质 \rightarrow 分子/原子中存在运动电荷 \rightarrow 电荷受磁力 \rightarrow 磁介质磁化 \rightarrow 出现宏观磁化电流.

\Rightarrow 产生附加磁场 \rightarrow 影响磁场分布.

磁介质中磁场 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$. 相对磁导率 $\mu_r = \frac{B}{B_0}$. 磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$.

分类	顺磁质 $\mu_r > 1$. $B > B_0$. B' , B_0 同向.	$\left. \begin{array}{l} \mu_r > 1 \text{ 相差很小, 通常取 } \mu_r \approx 1. \\ \mu = \mu_0 \mu_r. \end{array} \right\}$
	抗磁质 $\mu_r < 1$. $B < B_0$. B' , B_0 反向.	
	铁磁质 $\mu_r \gg 1$. $B \gg B_0$.	

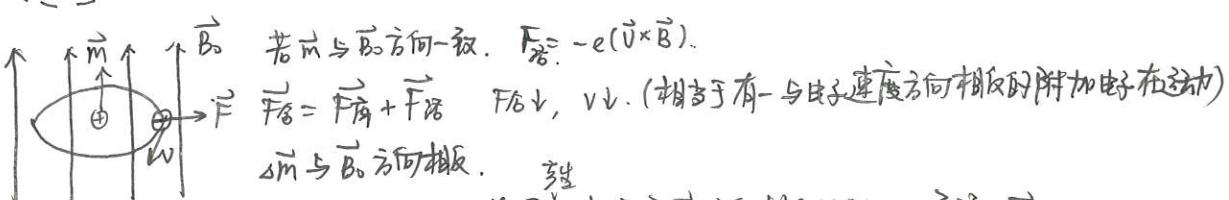
* 超导材料 $\mu_r = 0$. $B = 0$ (完全抗磁)

⑤ 分子磁矩、分子附加磁矩 (附加磁场的产生机制).

电子：轨道+自旋. (+)能产生磁效应). $\xrightarrow{\text{总和}}$ 等效于一个圆电流 (分子电流).

分子电流的磁矩

-分子磁矩 (所有电子各种磁矩矢量和)



\Rightarrow 外磁场中, 磁介质分子中每个运动电子都要与外磁场 \vec{B}_0 方向相反的附加磁矩 $\Delta \vec{m}$.

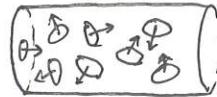
$$\Delta \vec{P}_m = \sum \Delta \vec{m}. \quad \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

"抗磁性"

§ 磁化机理.

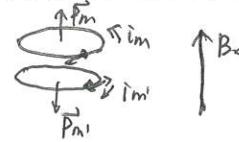
$$\begin{cases} \text{顺磁质}, \vec{P}_m \neq 0, \sum \vec{P}_m = 0 \\ \text{抗磁质} \vec{P}_m = 0, \sum \vec{P}_m = 0. \end{cases}$$

1. 顺磁质.



无外场 $B_0 = 0, \vec{P}_m \neq 0, \sum \vec{P}_m = 0.$
 有外场 分子电流在磁场中受力矩 $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B},$
 转向外场方向 (取向磁化).
 有 $\sum \vec{P}_m$ 与 \vec{B}_0 同向, 产生 \vec{M}

抗磁质 (分子电流成对出现.)



无外场 $B_0 = 0, P_m = 0.$
 有外场, 磁场, 上, $\omega \downarrow, \vec{P}_m \downarrow,$ 下 $\omega \uparrow, \vec{P}_m \uparrow.$ } 反向附加磁场 $\Delta B.$
 } 为向下 $\Delta P_m.$

2. 磁化强度矢量与磁化电流.

$$\text{磁化强度 } \vec{M} = \frac{\sum \vec{P}_m + \sum \Delta \vec{P}_m}{\Delta V} \quad (\text{表征物质的宏观磁性或介质的磁化程度}).$$

对顺磁质 $\sum \vec{P}_m \gg \sum \Delta \vec{P}_m, \quad \vec{M} = \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V} \quad (\vec{B}_0 \text{ 同向})$ 固有磁矩取向磁化是顺磁质磁化的主要原因.

对抗磁质 $\sum \vec{P}_m = 0, \quad \vec{M} = \frac{\sum \Delta \vec{P}_m}{\Delta V} \quad (\vec{B}_0 \text{ 反向})$ 附加磁矩是抗磁质磁化的唯一原因.

3. 磁化电流 I_s (宏观效果 - 介质横截面边缘出现环形电流)

"一段段小圆电流接合" - 束缚电流 (与传导电流相比, 磁效应相当, 不产生热效应).

\vec{M}, I_s 描述同一磁化现象, 其关系为 $\int L \sum \vec{P}_m + \sum \Delta \vec{P}_m = I_s S, \quad \vec{M} \text{ 与 } I_s d\vec{l} \text{ 方向, 左手螺旋.}$

定义: 磁化面电流密度 $J_s = \frac{I_s}{L}, \quad | \vec{M} | = \frac{| I_s S |}{\Delta V} = \frac{J_s LS}{LS} = J_s.$

磁化强度的环流 $\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I_s.$



4. 磁介质中高斯定理.

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$ 磁化电流与传导电流有等效磁效应. $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0.$

5. 磁介质中安培环路定理.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_o + I_s) = \mu_0 \sum I_o + \mu_0 \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}. \Rightarrow \oint_L (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) \cdot d\vec{l} = \sum I_o.$$

定义: 磁场强度 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (A \cdot m^{-1}) \quad (\text{辅助矢量}) \quad (\text{形式上与磁化电流无关})$

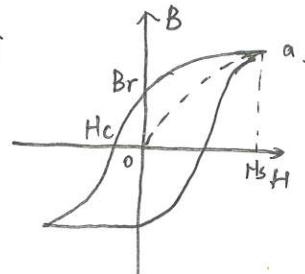
看同性相斥磁介质 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \chi_m - \text{磁介质的磁化率.} \quad \text{顺 } \chi_m > 0, \text{ 抗 } \chi_m < 0.$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ &= \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu_r &= 1 + \chi_m \\ \mu &= \mu_0 \mu_r. \end{aligned}$$

5. 铁磁质.

特点: $\left\{ \begin{array}{l} M \propto H, B \text{ 随 } H \text{ 迅速增长.} \\ \text{非线性} \quad B, H \text{ 非线性}, M \text{ 非恒量} \\ \text{磁滞} \quad B \text{ 变化落后于 } H \text{ 变化.} \\ \text{存在居里点} \quad \text{临界点温度时, 失去铁磁性成为顺磁质.} \end{array} \right.$

磁滞回线



Oa. 起始磁化曲线.

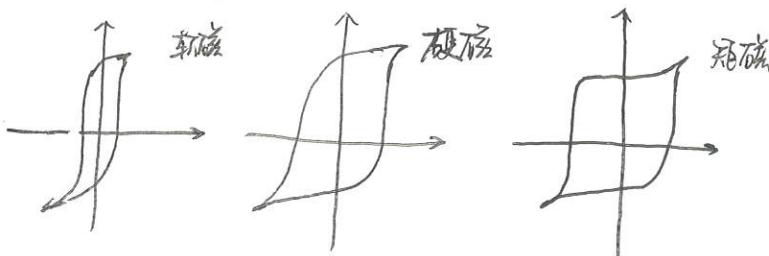
H_s 饱和磁场强度.

B_r 剩余磁感应强度.

H_c 矫顽力.

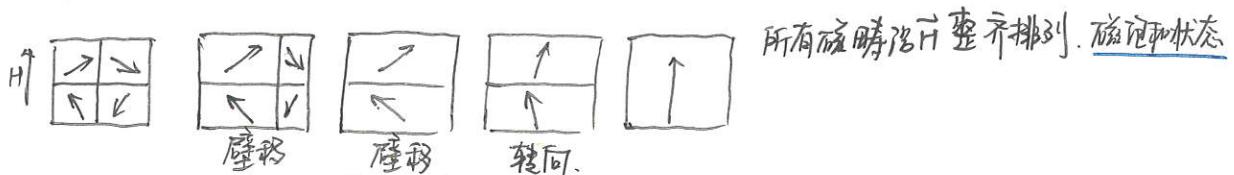
磁滞损耗: 材料热效應大小与磁滞回线面积成正比.

铁



铁磁质磁化 - 磁畴.

铁磁质相邻原子的电子间存在很强烈的“交换作用”，无外场时电子自旋磁矩能在微小区域内“自发”整齐排列 \Rightarrow 形成磁矩小区域（小区域磁化方向杂乱，宏观不是磁性）
+ 外磁场 H ，与 H 方向较小的磁畴扩展范围（壁移），并使磁化方向转向 H .



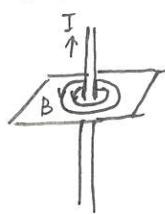
所有磁畴沿 H 整齐排列. 磁饱和状态

磁滞现象: 磁畴的畴壁很难完全恢复原来的形状; 畴壁某些规则排列被保存下来, 使铁磁质保留部分磁性 - 剩磁.

温度 \uparrow 至居里点: 剧烈热运动, 畴壁瓦解, 铁磁 \rightarrow 顺磁

③ 注：方向判断

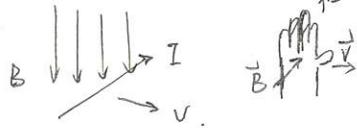
高中版（简）：



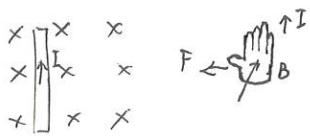
右（安培定则）电-磁



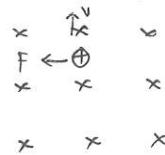
左（切割磁感线）、磁-动生电



左（安培力）



左（洛伦兹力）



第8章 电磁场与麦克斯韦方程组

§1. 电磁感应

电磁感应：当穿过闭合导体回路的磁通量发生变化时，闭合导体回路中就会出现电流。（感应电流）。

感应电动势 - 由于磁通量的变化而引起。

法拉第电磁感应定律： Φ_m 变化时，回路中产生的感应电动势与穿过回路的磁通量对时间变化率的反比成正比。 $\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}$

楞次定律：电磁感应现象产生的感应电流的方向，总使感应电流磁场通过回路的磁通量阻碍原磁通量的变化。（本质是能量守恒）



$$\frac{d\Phi_m}{dt} \uparrow \quad \varepsilon_i \leftarrow (<0)$$

$$(N匝线圈) \quad \varepsilon_i = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

规定回路绕行与
 Φ_m 方向螺旋时

$$\frac{d\Phi_m}{dt} \downarrow \quad \varepsilon_i \rightarrow (>0)$$

Φ_m 为正。

闭合回路，持续电流。

感应电流。 $I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{导体不闭合} \\ \text{无导体} \end{array} \right. \text{暂态电流} \varepsilon \Rightarrow$ 本质上是 Φ_m 变化引起
感应电场。

$$\text{感应电量} \quad q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{m_1}}^{\Phi_{m_2}} d\Phi_m = \frac{\Phi_{m_2} - \Phi_{m_1}}{R}$$

交流发电机，线圈在磁场中旋转

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -N \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -N \frac{d}{dt} (BS \cos\omega t) = NBS\omega \sin\omega t. \quad \varepsilon = \varepsilon_m \sin\theta.$$

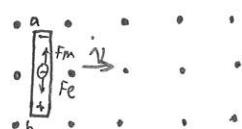
$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos\theta dS \quad \left\{ \begin{array}{l} B \text{ 变} \\ S \text{ 变} \\ \theta \text{ 变} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{感生电动势} \\ \text{动生} \sim (\text{平动}) \\ \text{动生} \sim (\text{转动}) \end{array}$$

§2 动生电动势

运动非静电力 - 洛伦兹力 $\vec{f}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$. 非静电力强 $\vec{E}_F = \frac{\vec{f}_m}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$.

$$E_{\text{动}} = \int_a^b \vec{E}_F \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{若回路不闭合，加辅助线，计算大小，楞次判断方向})$$

仅存在于运动导体上。



§3 感生电动势.

感生电动势：导体回路不动，磁场变化产生的感应电动势。非静电力——由磁场变化引起的作用力。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \Sigma_i = \int_a^b \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \phi \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \end{array} \right. \Rightarrow \Sigma_i = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{回路静止}, S \rightarrow +\infty)$$

(电动势定义)

感生电场：变化磁场在闭合导体中激发了一种电场。（synonym，涡旋电场）。

$$\text{无源 } \oint_S \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{S} = 0. \quad \text{非保守 } \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{E}_{\text{感}}$ 与 \vec{B} 方向一致



电子感应加速器：涡旋电场加速电子

$$\Sigma = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} - e\vec{s} = e\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \quad (\text{电子运动一周, } \vec{E}_{\text{感}} \text{ 功转换为电子能量})$$

涡电流：大块导体放在变化磁场中，导体内部产生感应电流。

这种电流在导体内自成闭合回路，形成涡电流。

例：电磁炉、高频加热、金属检测；电磁阻尼和电枢驱动。

§4. 自感与互感

感生电动势与电流变化的直接关系

自感：回路（形状、大小、位置、周围磁介质不变），引起穿过自身回路的磁通量发生变化。

在回路中自身产生感生电动势的现象

$$B \propto I. \quad \psi_m \propto B. \Rightarrow \psi = LI. \quad L \text{ 自感系数, 取决于回路自身.}$$

$$\Sigma_L = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = - L \frac{dI}{dt}. \quad L \text{ 回路磁感应强度,}$$

自感系数 L ，单位亨利(H)。 $1H = 1 \frac{Wb}{A} = 1 \frac{V}{A/S} = 10^3 mH = 10^6 \mu H$.

求 L ：电流 I ，确定 B 和 ψ_m 。 $L = \frac{\psi_m}{I}$.

互感：一个载流回路中电流变化引起邻近另一回路中产生感生电动势现象。

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{21} = M_{21} I_1 \\ \psi_{12} = M_{12} I_2 \end{array} \right. \quad M_{12} = M_{21} = M \text{ 互感系数.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} \\ \Sigma_{12} = -M \frac{dI_2}{dt} \end{array} \right.$$

§5. 磁场的能量.

自然中, dt 时间电源克服 \mathcal{E}_L 做功: $dW = -\mathcal{E}_L dq = -\mathcal{E}_L i dt = L \dot{i} dt$.

在 $0 \rightarrow I$ (通电) 中电源做功 \sim 线圈中储存的磁能.

$$W_m = \int_V dW_m = \int_0^I L \dot{i} dt = \frac{1}{2} L I^2. \text{ - 自感磁能.}$$

$$\text{长直螺线管} \quad L = \mu n^2 V. \quad I = \frac{B}{\mu n}$$

$$W_m = \frac{1}{2} (\mu n^2 V) \cdot \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V. \quad (V - \text{磁场占据的空间体积}).$$

$$\text{磁场能量密度: } w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} BH. \quad (\text{由特例导出适用于各种磁场}).$$

$$\text{磁场能量: } W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0 M_r} dV = \int_V \frac{1}{2} BH dV.$$

能量比较: 电场 磁场

$$\text{储能} \quad \text{电容器} \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{自感线圈} \quad \frac{1}{2} LI^2.$$

$$\text{能量密度} \quad W_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \quad W_h = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B^2$$

$$\text{能量} \quad W_e = \int_V w_e dV \quad W_m = \int_V w_m dV.$$

§7 位移电流和全电流定律.

位移电流: 变化的电场产生, 可视作“一种电流” (从磁感应角度, 无电荷移动).

$$\vec{j}_d = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad I_d = \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

解决了非稳恒情况下电流的连续性问题.

全电流定律: $I_{\text{全}} = I_c + I_d$ (通过空间某截面的全电流是传导、运动、位移电流的代数和).

全电流在空间中永远连续. 具质: 变化电场激发磁场.

$$\text{安培环路定理(非稳恒情况): } \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

激发磁场时, 位移、传导电流等效. 电流与激发磁场也满足右手螺旋.

§8 麦克斯韦电磁场方程组

高斯定理.

磁场

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \sum I_{\text{全}}$$

电场

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{静电场} & \oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sum q_0 = \int_V \rho dV, \quad \oint_L \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0 \\ \text{感生电场} & \oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_L \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \text{一般电场} & \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

电场：静电场、涡旋电场。磁场： I_c 、 I_d 激发的磁场。

积分形式.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q = \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

对称，同向同性介质 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} \end{array} \right.$

$(\gamma = \frac{1}{\rho}$, 电导率, 数值上等于电阻率的倒数).

(1) 电场性质. 自由电荷 \rightarrow 电场 有源无旋, 电场线不闭合.

变化磁场 \rightarrow 电场 涡旋场 电场、电位移线闭合, 电位移通量为 0.

(2) 磁场性质. 传导电流 \rightarrow 磁场 涡旋场 磁感应线闭合
位移电流 \rightarrow 磁场 涡旋场 磁感应线闭合

(3) 变化磁场 \rightarrow 电场 变化磁场(涡旋场) \rightarrow 电流.
(法拉第电磁感应定律)

(4) 变化电场 \rightarrow 磁场 全电流定律

光的电磁本性: $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

电场+磁场能密度 $w = \frac{1}{2} (DE + BH) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$.

Vibration.

第9章 振动.

机械振动：物体在一定位置附近来回往复运动

广义振动：任一物理量随时间周期性变化。

{
受迫
自由.
阻尼 ~
无阻尼 ~

§.1. 简谐振动描述.

简谐振动：物体运动时，离开平衡位置的位移（简位移）按余弦函数规律随时间变化。

$\frac{k}{m}$ $f = -kx = ma$. 令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$).
 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. \Rightarrow 通解 $x = A \cos(\omega t + \psi)$.

A -振幅, ω -角频率. ($T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$). ψ -初相 $\omega t + \psi$ -相位(振动状态)

(固有频率). ω -系统性质决定, 与振动方式无关; A, ψ -初始状态决定.

$\Delta\psi$ -相位差. $\Delta\psi > 0$. 振动2超前于振动1./ 振动1滞后于振动2. (主要应用于同频振动比较)

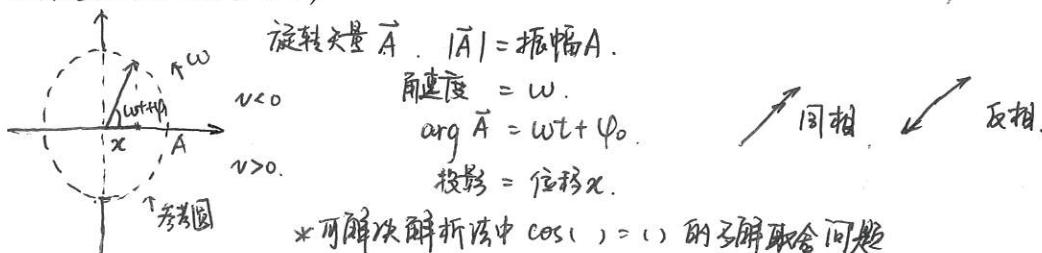
e.g. $\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \psi) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \psi) \\ a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\omega t + \psi) \\ v = A\omega \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \\ a = A\omega^2 \cos(\omega t + \psi + \pi) \end{cases}$

若 $\Delta\psi = \pm 2k\pi$, 步调相同, 同相振动; $\Delta\psi = \pm (2k+1)\pi$, 步调相反, 反相振动

若已知 $t=0$, $x=x_0$, $v=v_0$.

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \psi \\ v_0 = -A\omega \sin \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan \psi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

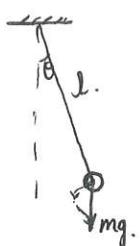
旋转矢量法(描述简谐振动)



3.2. 简谐振动实例.

动力学定义：质点在与其对平衡位置的位移成正比而反向的线性恢复力作用下的运动.

单摆



$$-mg l \sin\theta = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad J = m l^2.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0. \quad (\text{不满足简谐振动}).$$

仅当θ很小时, $\sin\theta \approx \theta$ 时,

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{单摆等时性}).$$

复摆



找质心.

$$-mg l \sin\theta = J \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt}. \quad (\text{单摆是其特例情况, 有 } J = ml^2)$$

$$\text{令 } \omega^2 = \frac{mg l}{J}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg l}{J}}$$

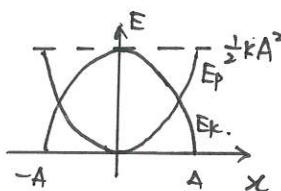
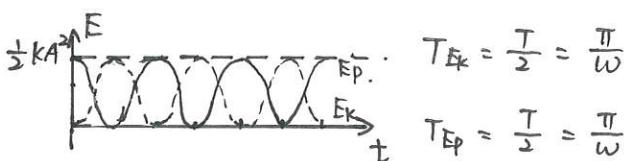
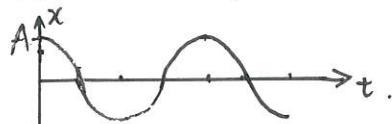
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg l}}$$

3.3. 简谐运动的能量.

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (\text{以弹簧原长/平衡位置为势能零点}).$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

$$\text{总能量 } E = E_p + E_k = \frac{1}{2} kA^2$$



定义：一个与时间有关的物理量的平均值（在一段时间T内）为 $\bar{F} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$.

$$\bar{E}_k = \frac{1}{4} kA^2 \quad \bar{E}_p = \frac{1}{2} kA^2.$$

简谐振动判据（任取其一）.

$$(1) \text{ 动力学. } f = -kx, \quad M = -c\dot{\theta} \quad (\text{弹性恢复力/线性恢复力}), \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

$$(2) \text{ 运动学. } x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(3) \text{ 能量. } \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \xrightarrow{\frac{dx}{dt} = v} mv \cdot dv + kx dx = 0 \xrightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

§4. 简谐振动的合成.

4.1. 同方向同频率.

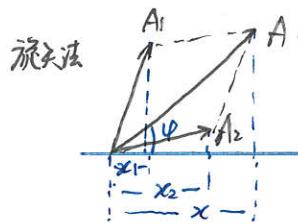
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t.$$

$$= A \cos(\omega t + \psi) \quad (\text{令} \begin{cases} A \cos \psi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \\ A \sin \psi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \end{cases})$$

合振动仍是同频简谐振. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

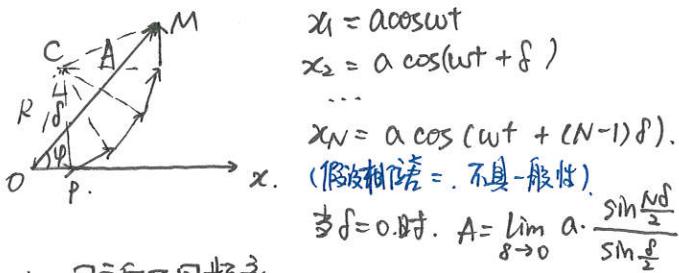
$$\tan \psi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



特别地. $\Delta\psi = \pm 2k\pi$. $A = A_1 + A_2$ 合振动加强

$\Delta\psi = \pm (2k+1)\pi$ $A = |A_1 - A_2|$ 合振动减弱

N个同向同频率. 旋转法首尾相连.



$$\text{如图: } \theta = N\delta. \quad R = \frac{a/2}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

$$\text{振幅: } A = 2R \sin \frac{\theta}{2} = a \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

$$\text{初相: } \varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta.$$

4.2. 同方向不同频率.

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t. \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right).$$

若 $\omega_1 = \omega_2$. 仍简谐. 若 $\omega_1 \neq \omega_2$. 不再是简谐.

且 $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1 + \omega_2$. 时. 振幅随时间缓慢变化的近似简谐运动. (拍现象).

$$x = A'(t) \cos \bar{\omega} t, \quad A'(t) = \left| 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \right| \text{ 振幅调制因子. } \nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_2 \approx \omega_1.$$

$$\text{合振幅变化周期: } T_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$\text{拍频: } v_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = v_2 - v_1.$$

4.3. 相互垂直的简谐振动合成.

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \text{轨迹方程} \quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(-般为椭圆).

全 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

(1) $\Delta\varphi = 0$. 同相. $y = \frac{A_2}{A_1} x$. ($\Delta\varphi > 0$, y 超前于 x , 右旋, 顺时针).

(2) $\Delta\varphi = \pi$ 反相. $y = -\frac{A_2}{A_1} x$

(3) $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$.

(4) $\Delta\varphi = \text{其他}$. 斜椭圆

[两个频率不同但垂直, 且 $\omega_x : \omega_y = \text{简单整数时}$, 合运动有稳定封闭的轨迹, 称为李萨如图].

§5. 阻尼振动* (不考)

阻尼振动: 由于系统能量耗散, 振幅会不断变小. (减幅振动). < 摩擦阻尼
辐射阻尼

对黏性阻力, v 较小时 $f \propto v$. $f_v = -\gamma v$ \leftarrow 阻力系数.

$$\Rightarrow -kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad \text{全 } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} & (\text{固有角频率}) \\ \beta = \frac{\gamma}{2m} & (\text{阻尼系数}) \end{cases}$$

$$\text{特征方程 } \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

1) $\Delta < 0$. 欠阻尼 (阻尼振荡).

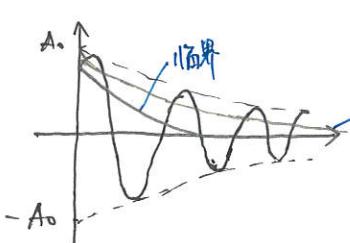
$$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi_0)$$

\downarrow
振幅. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$.

$$\text{振幅 } A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\text{能量 } E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$$



定义: 时间常数 $\tau = \frac{1}{\beta}$, 表示振幅衰减到原来的 $\frac{1}{e}$ 所用时间).

2) $\Delta > 0$ 过阻尼

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}. \quad \Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}.$$

非周期, 无振动.

3) $\Delta = 0$ 临界阻尼.

§ 6. 受迫振动.

定义: 系统在周期性外力(外源)作用下产生的振动.

例: 弹簧振子: 阻力 $f_d = -kx$
 阻尼力 $f_v = -\gamma v$
 外力(周期) $F = F_0 \cos \omega t$ (驱动力).

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos \omega_0 t. \quad (2\beta = \frac{\gamma}{m}, h = \frac{F_0}{m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}).$$

$$\Rightarrow x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \psi).$$

减幅, 暂态解

等幅, 稳态解.

-一段时间后, 暂态解衰减到可忽略. 稳定时. $x(t) = A \cos(\omega t + \psi)$.

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \varphi = \arctan \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

∴受迫振动(稳态). 角频率为驱动力的频率. A, φ 与初始条件无关 (与驱动力及阻尼有关).

共振现象:

位移共振: 位移振幅达到最大值.

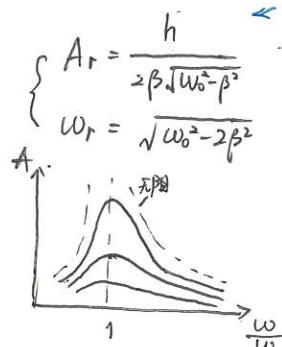
(当 $\beta \ll \omega_0$ 时, 即阻尼很小, $\omega_r \approx \omega_0$).

速度共振: 振动速度幅达到最大值.

(当 $\omega = \omega_0$ 时).

小阻尼时不加区分.

← 共振值, 当 A 最大时.



7. 电磁振荡(不考).

定义: 电路中电流和电压的周期性变化.

电容器 + 自感线圈 - LC 振荡电路. (忽略耗能和辐射阻尼; 视为无阻尼自由振荡).

第10章 机械波

§1. 产生和描述

机械波 - 机械振动在弹性介质(固、液、气)中传播。

形成条件 - 波源(激发振动)+弹性介质。

波动 - 振动状态的传播, 不是媒质的传播(质元仅在平衡位置附近振动),
即相位("上游"质元将在较晚时刻于"下游"出现)。

横波: 质元振动方向 ⊥ 波的传播方向

↗ 行波: 波形会向前传播

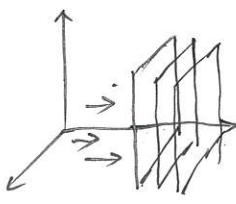
纵波: 质元振动方向 // 波的传播方向

波线: 波传播方向的射线

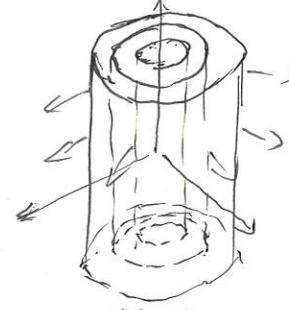
波面: 振动相位相同质点构成的面

↗ 必垂直

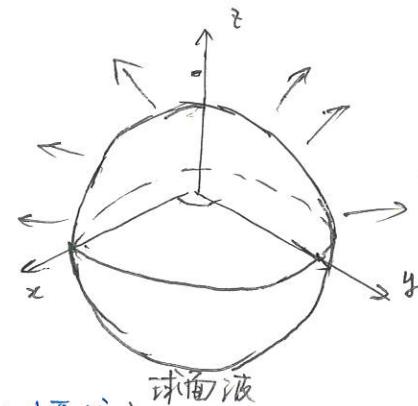
波阵面: 某时刻处于最前面的波面



平面波



柱面波



球面波

周期 T : 一个完整的波通过波线上某点所需的时间。(由波源决定)

频率 $v = \frac{1}{T}$. 角频率 $\omega = 2\pi v$.

波速 u : 振动状态的传播速度(介质性质和波类型决定)

波长 λ : 波线上相邻的振动状态相同两点间(相位差 2π)的距离。(空间周期)。

$$\lambda = uT.$$

波数 k : (空间频率) 角波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (空间角频率) $\omega = ku$.

§2 平面简谐波

简谐波: 简谐振动传播(正弦/余弦波, 单一波长)。

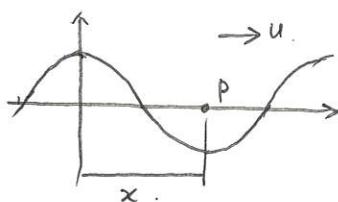
$$y(x, t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{u}))$$

更一般地, 脉冲波函数

$$O点位移 y_0 = f(t) = y(0, t - \frac{x}{u})$$

$$P点位移 y_p = f(t - \frac{x}{u}) = y(x, t).$$

O的波经过 $\Delta t = \frac{x}{u}$ 传到 P.



波函数: 波传播时, 任意质元的运动函数。媒质: 弱, 无限大, 无吸收。(无反射, 折射, A不变)。

一般地，若已知 $x=x_1$ 振动表达式 $y(x_1, t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$.

则波函数为 $y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x-x_1}{u}\right) + \varphi_1\right]$

波函数性质：

(1) 同期性 $y(x, t) = y(x+\lambda, t)$

$$y(x, t) = y(x+t+\tau).$$

x_1 落后于 x 由 - .
 x_1 超前于 x 由 + . } \Rightarrow 传播方向

(2) 下游质元滞后相位 $\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = -k \Delta x$.

(3) 对任意相位 $\varphi = \omega(t - \frac{x}{u})$. 满足此相位的质元位置 x 随时间 t 的关系变化为: $x = ut - \frac{\omega\varphi}{u}$.

(4) 波函数另-表达式 $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

(已知 $x=0$ 时 $y(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.)

定义: 波矢 $\vec{k} = k \vec{e}_n$ \vec{e}_n 表示波的传播方向.

(5) 当 $x=x_0$ 一定 $y(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] = A \cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x\right]$

$\rightarrow y = A \cos\left[\omega t + (-\omega \frac{x_0}{u} + \varphi_0)\right]$ \Rightarrow 时间滞后

当 $t=t_0$ 一定

$\rightarrow y = A \cos\left(\omega t_0 + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

相应滞后 (沿传播方向 \rightarrow B 落后于 A).

沿波传播方向滞后效应 (反映了波动的)时间和空间的双重周期性.

§3. 波动方程与波速.

3.1. 弹性体与弹性形变

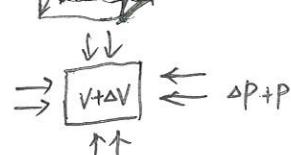
弹性限度: 去掉外力形状和体积仍能复原的外力限度 (限度内的形变为弹性形变).

正应力: 物体单位垂直截面上所受外力 F/S .

切应力: 物体受到其侧面平行的切向力而固力.

强度 $\frac{F_n}{S} = Y \frac{\Delta L}{L}$ \rightarrow 强度.

杨氏模量 (与材料性质有关)



切度: $\frac{F_s}{S} = G \frac{\Delta x}{d}$ $(\frac{\Delta x}{d} = \tan \psi \approx \psi, \text{ 剪切角})$
切度模量 \rightarrow 切度.

体度: $\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$ \rightarrow 体应变. (压强 \uparrow 体积 \downarrow)
体应变 \downarrow \rightarrow 体应变.
体积模量

应力 = 弹性模量 \times 应变 (应力和应变成正比). 一广义胡克定律.

3.2 波动方程.

平面波波动方程: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

方程的解是 $y = A \cos \omega(t - \frac{x}{u}) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ut) = A \cos \pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

三维: $\nabla^2 y - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (Laplace 算子).

3.3. 波速.

以线度为例: 取质元 $dm = \rho S dx$

形变: $dF = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

由胡克定律: $\frac{F}{S} = Y \frac{\partial y}{\partial x}$.

取微分 $\Rightarrow dF = Y S \frac{\partial y}{\partial x} dx$.

$$\Rightarrow Y S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

固体内纵波 $u_1 = \sqrt{Y/\rho}$ \Rightarrow 波速与介质、波类型有关.

横波 $u_2 = \sqrt{G/\rho}$

引液体纵波 $u_3 = \sqrt{k/\rho}$.

§4. 波的能量

以简谐纵波为例: 取质元 $dm = \rho S dx$

$$y = A \cos \omega(t - \frac{x}{u}) \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A \omega \sin \omega(t - \frac{x}{u})$$

质元动能: $dE_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$.

$$\begin{aligned} \text{势能: } dE_p &= \frac{1}{2} k (dy)^2 = \frac{1}{2} \frac{SY}{dx} (dy)^2 \quad (\frac{F}{S} = Y \frac{\partial y}{\partial x}, F = \frac{SY}{dx}, dy = k dy) \\ &= \frac{1}{2} Y dV \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}). \end{aligned}$$

dE_k, dE_p 等大同相, 随时间周期性变化.

$$dE = dE_p + dE_k = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

(每个质元都与介质交换能量).

$$dE_p \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad dE_k \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

波的传播 → 能量传播 → 能量流动(能流)

(1) 能量密度：—单位体积介质中的能量。

$$w = \frac{dE}{dv} = \rho A^2 w^2 \sin^2 w(t - \frac{x}{u}).$$

(2) 平均能量密度：—一个周期的能量密度平均值。

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho A^2 w^2 \sin^2 w(t - \frac{x}{u}) dt = \frac{1}{2} \rho A^2 w^2 \quad \bar{w} \propto A^2$$

(3) 能流密度(波强)

能流：单位时间内垂直通过介质中某面积的波的能量： $P = \frac{w(u dt) \Delta S}{dt} = w u dS.$

(平均)能流密度：通过介质中单位面积的平均能流：

波在传播中振幅的衰减情况：(均匀， ∞ 大，不吸收) $I = \frac{P}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho A^2 w^2 u. \quad (\text{波强 } I = A^2).$

(1) 平面波 $I_1 S_1 = I_2 S_2.$

$$\frac{1}{2} \rho A_1^2 w^2 u S_1 = \frac{1}{2} \rho A_2^2 w^2 u S_2.$$

$$\Rightarrow (S_1 = S_2) \quad A_1 = A_2.$$

(2) 球面波 $I_1 S_1 = I_2 S_2.$

$$\frac{1}{2} \rho A_1^2 w^2 u S_1 = \frac{1}{2} \rho A_2^2 w^2 u S_2.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1}{4\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

* 距波源距离为 r 的质元的振动方程为：

$$x = \frac{A_1}{r} \cos [w(t - \frac{r}{u}) + \psi]. \quad (\text{发散球面波})$$

3.5. 惠更斯原理

3.1. 惠更斯原理

原理：介质中波动到达的各点都可看作是发射同频率子波的波源，在其后任一时刻，这些子波的包络面(包迹)就是新的波阵面。

子波——波阵面上任一点作为新波源发出的波。

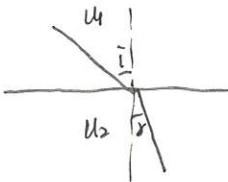
包络面——t时刻若干波波面的公切面。(该时刻刷新新波阵面)

若介质均匀、各向同性，各子波都是以波速 u 向外扩展的球面波。

应用：知 t 波面，求 $t+\Delta t$ 波面。

3.2. 衍射：波在传播过程中遇到障碍物时，其传播方向发生改变，能绕过障碍物传播到障碍物后面的区域(偏离原来直线传播方向)。 $\lambda \gg$ 衍射物尺度 — 衍射明显
惠更斯原理解释衍射不足，不能解释波强。

3.3 折射与反射



$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{u_1}{u_2} = n_2.$$

(介质2对介质1的相对折射率)

§6. 波的干涉.

波的独立传播原理: 几列波相遇时, 将以原有 A , V , λ 独立传播

波的叠加原理: 几列波相遇区域, 来点振动是否列波(单独传播时)在该点引起的振动的合成.

波的干涉现象: (波相遇区域内)某些位置振动始终加强, 某些位置振动始终减弱或完全抵消.

其它位置介于两者之间. 振动强弱稳定分布 - 干涉. \rightarrow 振幅一定.

干涉条件: 同频率, 同方向, 恒定相位差. (相干波)



$$\text{波源振动: } y_{10} = A_{10} \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_{20} = A_{20} \cos(\omega t + \varphi_{20}).$$

$$P\text{振动: } y_{1P} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} r_1),$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda} r_2).$$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi}.$$

$$\text{波强 } I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi.$$

\downarrow 和 $A_1, A_2, \Delta\varphi$ 有关.

$$\text{相位差 } \Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1).$$

\Rightarrow 对空间确定定点, 若有恒定的 $\Delta\varphi$, 合强度在空间形成稳定分布, 即有干涉现象.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \pm 2k\pi, \quad A = A_1 + A_2 \quad I = A^2 = (A_1 + A_2)^2 \quad \text{始终加强.} \\ \Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi, \quad A = |A_1 - A_2| \quad \text{始终减弱.} \end{array} \right.$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \quad \text{有时会默认 } \varphi_{20} = \varphi_{10}.$$

\downarrow 实验推导实现和计算 \downarrow 定点; 即定值 ($\delta = r_2 - r_1$, 波程差).

§7 驻波.

产生: 两列振幅相等的相干波在同一直线上沿相反方向传播叠加而成.

也可以由入射波和反射波形成.

特点: 有些点始终不振

- 波节 相邻节点 $\frac{\lambda}{2}$. $x_{\text{节}} = \pm (2n+1) \frac{\lambda}{4}$.

有些点振动最强 (但 A 随 t 变). - 波腹 相邻驻点 $\frac{\lambda}{2}$. $x_{\text{腹}} = \pm 2n \frac{\lambda}{4}$.

推导: $y_1 = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi) \rightarrow$ (假设 $x=0$ 处初相为 φ).

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2 = A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi) \end{array} \right.$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos(\omega t + \varphi)$$

$\xrightarrow{\text{振幅因子}} \xrightarrow{\text{相位因子}} \xrightarrow{\text{无 } x, \text{ 无相位及波形的传播}}$

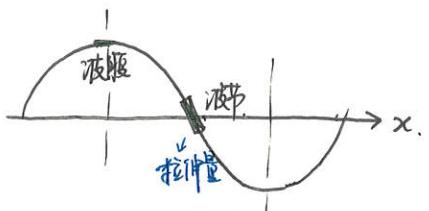
(振幅与位置有关) (相位在时间上恒定) $\xrightarrow{\text{相邻波节间: 相位相同; 波节两侧: 相位相反.}}$

驻波能量分布：

$$\text{沿 } x \text{ 方向的能流密度: } I_1 = \frac{1}{2} \rho A^2 w^2 u.$$

$$-x: I_2 = -\frac{1}{2} \rho A^2 w^2 u.$$

$$I = I_1 + I_2. \quad \underline{\text{平均来说, 没有能量传播.}}$$



位移最大时: 波节处 $dE_p = \max$
 $dE_k = 0$ 波腹处 $dE_p = 0$

- 势能集中在波节附近.

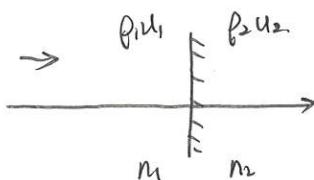
平衡位置时: 波节处: $dE_k = 0$
 $dE_p = 0$ 波腹处: $dE_k = \max$

- 动能集中在波腹附近.

\Rightarrow 能量总是在波节与波腹间转移.

"驻" - 波形不传播, 相位不传播, 能量不传播.

* 半波损失.



$$\text{波阻 } Z = \rho u. \quad \begin{cases} \text{波密介质} & Z_1 \\ \text{波疏介质} & Z_2 \end{cases} \quad (\text{相对})$$

一般地, 透射波同是与入射波同相.

波: 密 \rightarrow 疏, 反射点, 反射波与入射波同相. (全反射, 波腹). (或自由端反射)

疏 \rightarrow 密, 反射点, 反射波与入射波反相 (半波反射, 波节) — 半波损失. (非反射点, 固定).
 \rightarrow 波程 $+ \frac{\lambda}{2}$. / 相位 $+\pi$.

* 简正模式 (两端固定弦中的驻波).

- 保证两端为波节.

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, n=1, 2, \dots \quad (\text{n为弦中波节数目}).$$

简正模式.
 \uparrow

$$V_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2l}. \quad (\text{一个驻波系统有多个固有频率}, \text{每个对应一种可能的简正振动方式}).$$

- 行波 & 驻波.

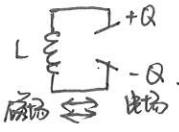
	行波	驻波
波方程	$y = A \cos(wt \mp kx)$	$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos wt$
振幅	A	$A(x) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x $
相位	$wt \mp kx$	始终同相 / 反相.
能量	沿波传播方向传播.	没有定向传播. (波节 / 波腹之间的能量转移)

* 常见驻波是, 一列行波与其在反射界面的反射波 (全反射, 不折射) 叠加而成.

8. 电磁波.

产生: 变化的电磁场在空间以一定的速度传播, 形成电磁波.

例: LC 振荡电路. $T = 2\pi\sqrt{LC}$ $v = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$



电场、磁场、电磁波的传播方向互为垂直.

$$* E(r, t) = \frac{\mu_0 w^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos(\omega t - \frac{r}{u}). \quad \text{且为极轴与传播方向夹角.}$$

$$* H(r, t) = \frac{\sqrt{\epsilon_0} \mu_0 w^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos(\omega t - \frac{r}{u}). \quad u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) \\ H = H_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) \end{array} \right. \quad > \text{简谐波叠加}$$

电磁波传播速度 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. 真空中, $u = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- 电磁波是横波(振动方向上传播方向, $\vec{H} \perp \vec{E}, \vec{E} \perp \vec{u}$).

- \vec{E} 和 \vec{H} 始终同相位, \vec{E}, \vec{H} 数值上成比例. $\sqrt{\mu} H = \sqrt{\epsilon} E$

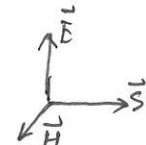
电磁波的能量.

辐射能: 以电磁波形式传播出去的能量.

能量密度. $W = W_e + W_m = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$

能流密度 $S = Wu = \frac{u}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = EH. \quad$ 矢量 (坡印廷矢量) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

(平均能流密度 $\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$)



* 电磁波谱:

无线电波: $3 \times 10^4 \sim 10^{-4} \text{ m.}$

红外线: $1 \text{ mm} \sim 760 \text{ nm}$

可见光: $760 \sim 400 \text{ nm.}$

紫外线: $400 \sim 5 \text{ nm}$

X射线: $5 \sim 0.04 \text{ nm.}$

γ 射线: $< 0.04 \text{ nm.}$

§9. 多普勒效应.

接收频率：单位时间内，观测者接收到的振动次数或完整波束。

多普勒效应：接收频率随波源与观测者运动而改变的现象

(1) 观察者向波源运动

$$v' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u+v_0}{\lambda} = \frac{u+v_0}{\frac{u}{v}} v = \frac{u+v_0}{u} v$$

观察者远离波源运动。

$$v' = \frac{u-v_0}{\lambda} v. \quad (\text{若 } v_0 > u, \text{ 收不到}).$$



(2). 观察者不动，波源相对介质以 v_s 运动。

$$\text{靠近 } T' = \frac{\lambda - v_s T}{u} = \frac{\lambda'}{u}. \quad v' = \frac{1}{T'} = \frac{u}{u - v_s} v \quad (\text{波长“压缩”})$$

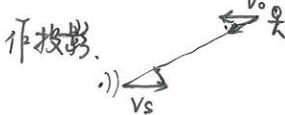
$$\text{远离 } T' = \frac{\lambda + v_s T}{u} = \frac{\lambda'}{u}. \quad v' = \frac{1}{T'} = \frac{u}{u + v_s} v \quad (\text{波长“拉长”}).$$

$v_s > u$. 所有波前聚在一个圆锥面上。
能量聚集在 (冲击波).

(3) 同时相对运动. (v_0 . 靠近 + 远离 - . v_s . 靠近 - 远离 +).

$$v' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_s} v$$

(4). 相对运动方向与观测者波源连线(传播方向)不同方向。



* 声波(不考).

声波：在弹性介质中传播的机械波。 $v = 20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz}$ 次 起引起人的听觉。

声强：声波的能量密度 I . 声强级： $L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$ 基准 $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
(单位：分贝 dB. 基尔 B. $1B = 10 \text{ dB}$).

第11章 光学

光：本质是一种电磁波。波粒二象性（粒子，波）

几何光学：以直线传播为基础，折射，反射。

物理光学：
 波动光学：以 Maxwell 电磁理论为基础 干涉、衍射、偏振
 量子光学：以量子力学为基础 光与物质作用。

现代光学：~

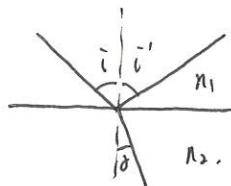
§1. 几何光学。（不单独出题）

1.1 三个实验定律：

1. 光的直线传播定律。（在均匀介质中，光沿直线传播）

2. 光的独立传播原理。（与其他光线相遇不改方向，光能量简单相加）。

3. 光的反射和折射定律。



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (\text{介质2对介质1的相对折射率})$$

n_k - 光密 (相对)
 n_d - 光疏 (相对)

任何介质相对真空的折射率 - 介质的绝对折射率 $n = \frac{c}{v}$.

光路可逆性原理：反射光/折射光方向反转，光线将按原路返回。

1.2 全反射：光从光密 \rightarrow 光疏时， $\exists \text{临界角 } A$. $\sin A = \frac{n_2}{n_1}$ (此时折射角为 90°)。

当 $i > A$ 时，不会出现折射光，入射光能量全部反射回原来介质。

应用：光纤通信。（纤芯-密，包层-疏，理论上无损耗传输）

费马原理。

光程 $L = \sum L_i = \sum n_i s_i$ (折射率 * 光运动的几何路程) - 等于相同时间光在真空中中的路程

$$\text{光从 } A \text{ 到 } B \text{ 时间 } t_{AB} = \frac{L_{AB}}{c}$$

$$\text{对连续介质 } L = \int_A^B n ds. \quad t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds.$$

费马定理：光在给定两点之间沿着时间(光程)为极值的路径传播。

$$\int_A^B n ds = \max / \min / \text{const} \quad \frac{\partial L}{\partial l} = 0.$$

\hookrightarrow 路径/光程表达式中的变量，沿定参考系中取。

1.3. 球面成像 - 只讨论共轴理想光学系统.

同心光束：一束光线本身及其延长线相交于一点。

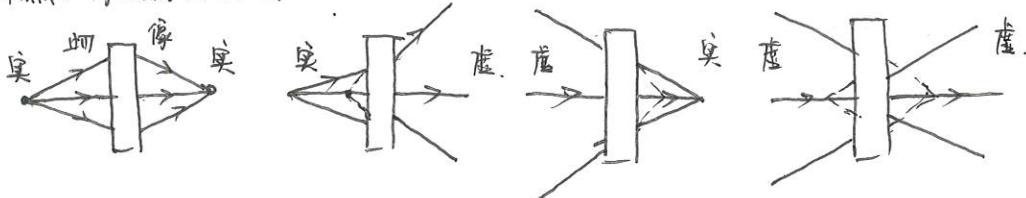


共轴理想光学系统：能保持光束同心性的光学系统。

光轴：光束中心线（或光学系统对称轴）。

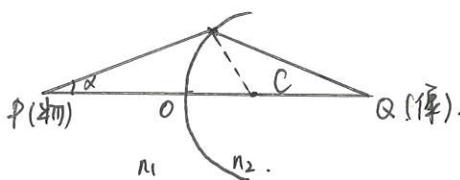
成像：入射同心光束通过共轴理想系统后变射出射同心光束的过程。

物点和像点的实、虚关系：



物像等光程性：在理想光学系统中，从物点到像点，之间各条光路的光程都相等。

球面：



C - 球心（曲率中心）。

O - 顶点（球面对称中心）

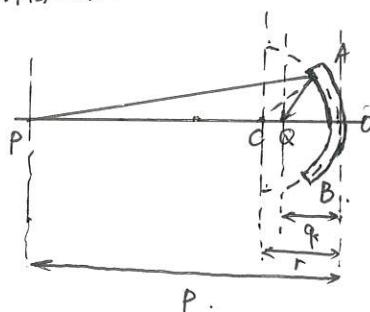
OC - 主光轴。

OP - P 物距, OQ - q 像距。

过C任一直线 - 副光轴。

仅研究像(近)轴光线：成像光路和主光轴很接近。

球面反射：



$$\frac{r-p}{\sqrt{p^2 + 4r(r-p)\sin^2 \frac{\psi}{2}}} = \frac{r-q}{\sqrt{q^2 + 4r(r-p)\sin^2 \frac{\psi}{2}}}$$

$$\text{近似 } \psi \rightarrow 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

$\Rightarrow p \rightarrow \infty$ 时, $q = \frac{r}{2}$. (像成为球面镜焦距)。

$$f = \frac{r}{2} (\text{顶点-焦点}) \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

$$\text{球面折射: } \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

1.4 透镜成像

透镜：两面为球面（或一面为球面，一面为平面）的透射物体。



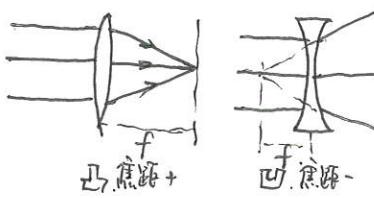
薄透镜：两个侧面的中心靠得很近的透镜。

焦点：平行主光轴的光线经透镜后所汇聚的点 F。

副焦点：一副光轴 F

焦距 (f)：主焦点到光心的距离。

凸透镜薄透镜透镜成像公式 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$.



2. 波动光学.

电磁波理论:

波长范围(可见光). $400 - 760\text{nm}$.

频率范围 $7.6 \times 10^{14}\text{Hz} - 3.9 \times 10^{14}\text{Hz}$

光强. $I \propto E_0^2$. 定义 $I = E_0^2 = A^2$

光速. $C = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8 \text{m/s}$. 介质中 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

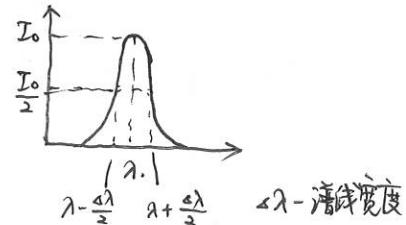
折射率 $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

波长 $\lambda = \frac{c}{v}$ 介质中 ($\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$)

单色性. 单色 - 单 - λ (或 v).
准单色光 - 波长范围很窄.

谱线. I 随 λ 变化的关系曲线.

$\Delta\lambda$ 越小, 光的单色性越好.



2.1. 光的干涉. (强度/明暗在空间有稳定分布).

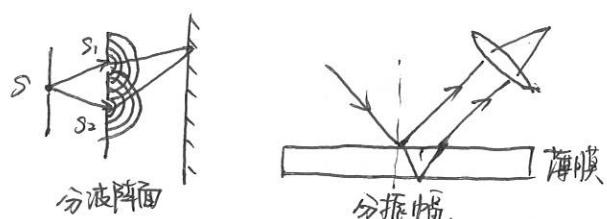
2.1.1. 相干光.

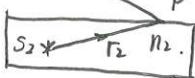
干涉条件: 频率相同, 振动方向相同, 恒定相位差.

发光基本单元: 原子、分子. $E_0 \xrightarrow[t \approx 10^{-8}\text{s}]{\text{自发辐射}}$

普通光源: 一个原子一次发光只能发出长度有限, V -度, 振动方向一定的段光波(波列).

普通光源 \rightarrow 相干光: 先分光, 再相遇. { 分波阵面 - 双缝干涉.
分振幅 - 薄膜干涉.
分振动面 - 偏振光干涉.



光路图：

$$\text{光源: } \begin{cases} E_{10} = A_{10} \cos(\omega t + \psi_1) \\ E_{20} = A_{20} \cos(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

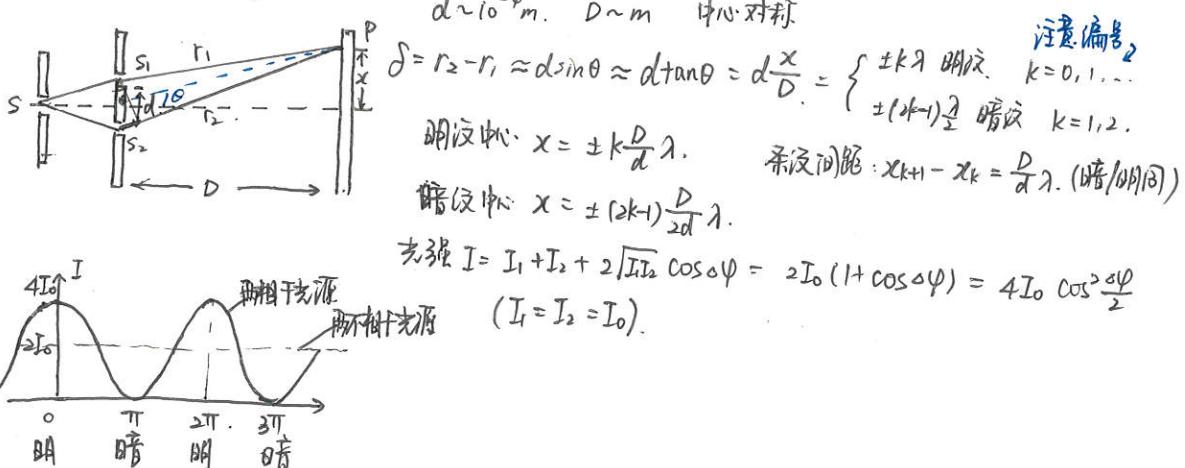
$$P: \begin{cases} E_1 = A_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 + \psi_1) & \lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1} \\ E_2 = A_2 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 + \psi_2) & \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \varphi}, \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi.$$

$$\Delta \varphi = \psi_1 - \psi_2 + \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 r_2 - n_1 r_1)$$

光程差 $\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1$, $\delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & \text{加强} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & \text{减弱} \end{cases}$

2.1.2. 柯氏双缝干涉.



应用 ① 已知 D, d, I_0 确定 λ .

② 白光入射, 中央亮条纹仍是白色, 其它为彩色. ($x = \pm k \frac{D}{d} \lambda$, 明纹位置与波长成正比). 蓝紫光 $\lambda \downarrow$, $x \downarrow$. 红光 $\lambda \uparrow$, $x \uparrow$ (明纹中).

③ $d \downarrow$, $\Delta x \uparrow$. 分辨率高.

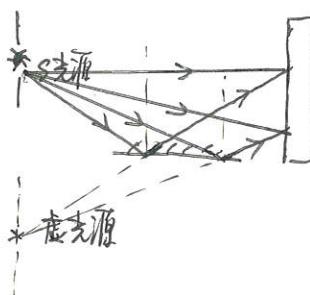
变化 ① 装置下沉 $\lambda \downarrow$, 条纹变密.

② S_2 插入楔形 Δ 玻片. \rightarrow 条纹间距 = 条纹整体下移 (原 \downarrow).

③ S 下移. \rightarrow 条纹整体上移.

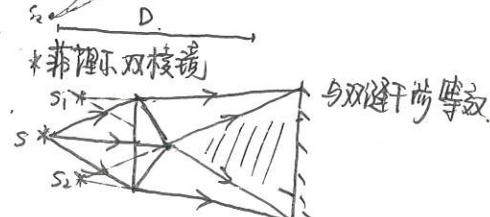
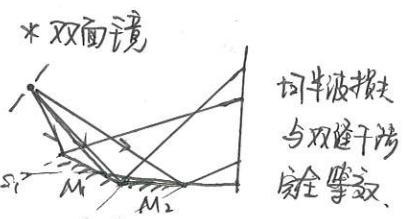
④ 斜入射. 找等相位面(垂直线).

* 干涉镜

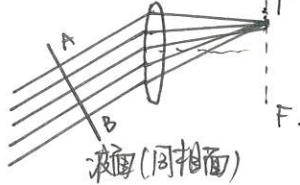


等效双缝 $f = d \sin \theta + \frac{\lambda}{2}$

中心是暗条纹.
条纹仅分布于屏幕上半部分.



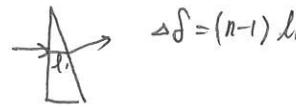
*透镜存在时光程差的计算



物像等光程

透镜成像不会引起附加光程差

*加透镜



2.1.3. 薄膜干涉 (分振幅法)

{ 等厚干涉 同一波长 ~ 膜的同一厚度 膜厚度不同

等倾干涉 同一波长 ~ 入射光同一倾角 膜厚度均匀

以等倾干涉为副 (简化表达)

$$\text{光程差 } \delta = n_2(\bar{AC} + \bar{BC}) - n_1 \bar{AD} + \frac{\lambda}{2} \quad \text{"-也,一般默认+."}$$

$$= 2n_2 \frac{e}{\cos r} - 2n_1 e \frac{\sin r}{\cos r} \sin i + \frac{\lambda}{2}$$

$$= 2n_2 e \cos \delta + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{一般不知r, 知i.})$$

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{对所有薄膜干涉均适用})$$

$$\delta = \begin{cases} k\lambda & k=1, 2, 3, \dots \text{ 明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0, 1, \dots \text{ 暗纹.} \end{cases}$$

透射光干涉 $\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin i}$, 条纹与反射光干涉条纹明暗互补 (无半波损失).

薄膜干涉实例:

(→ 等厚干涉 (膜厚不同, 平行光))

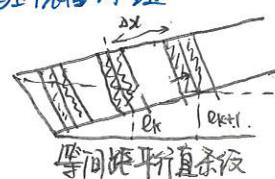
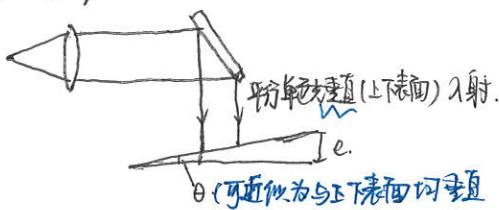
* 厚尖干涉 (厚尖: 光前很小的两个平面所构成的薄膜)

↑ 增亮
↓ 厚失

注: 上下表面反射的反射光1和2.

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{特别地 } e=0, \text{ 棱边为暗纹.})$$

$$\text{对称厚尖 } \delta = 2e + \frac{\lambda}{2} \quad \downarrow \text{ 下表面半波损失}$$



$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n} \quad \text{- 相邻暗/明纹间厚度差}$$

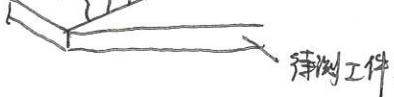
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{2n \theta}$$

变化: ① 厚尖上表面向上平移.

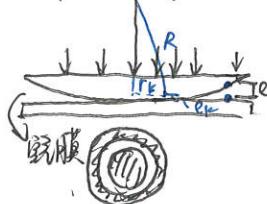
$$\Delta d \quad \text{系波向棱边移动 (等厚处向棱边移动)} \\ \Delta d = N \frac{\lambda}{2n} \quad (\text{视屏中移过N个条纹})$$

应用: 测表面平整度

待测工件上是凸纹 (条纹表示等厚)



* 半径环干涉.



条件: 同心圆, 中心为暗环.

$r_k \approx \sqrt{k}\lambda$, 波次 - 内低外高
间距 - 内疏外密.

一块平板玻璃和一个曲率半径很大的平凸透镜组成.

$$f = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{if } k=1, 2, \dots \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{if } k>0, \dots \end{cases}$$

不完全膜厚度 $e_k = \frac{1}{2}k\lambda$.

明环间距厚度 $e_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\lambda}{2}$

$$r_k^2 = R^2 - (R - e_k)^2 = 2Re_k - e_k^2$$

$$\because R \gg e_k \quad \therefore r_k^2 = 2Re_k,$$

$$\because e_k = \frac{1}{2}k\lambda \quad r_k^2 = kR\lambda$$

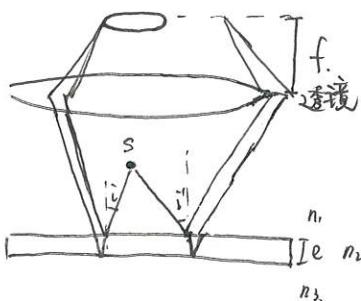
第k级暗环半径: $r_k = \sqrt{kR\lambda}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

第k级明环半径: $r_k = \sqrt{(k-\frac{1}{2})R\lambda}$ ($k=1, 2, \dots$)

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \dots k \uparrow \rightarrow \Delta r \downarrow$$

白光入射: 同级明纹, 内紫外红 (入射离中心近)

(二) 倾斜干涉



$$光程差 f = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} (\sin i, \delta \uparrow, \text{波次 } \uparrow).$$

一系列同心圆环, 内疏外密, 波次内高外低.

$$\text{中心明纹条件 } f = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k_c \lambda.$$

$$\text{中心暗纹条件 } f = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k_c+1)\frac{\lambda}{2} \quad \left. \right\}$$

膜厚每增加一个 $\frac{\lambda}{2n}$, 中心波次 +1, 中心冒出一个亮/暗斑.

(有亮 \rightarrow 暗 \rightarrow 亮 或
暗 \rightarrow 亮 \rightarrow 暗过程).

△ “倾斜”也针对观察者, 观察倾角不同, 条纹不同.

薄膜干涉应用:

增透膜 (反射光相消).

相消条件: $f = 2n_2 e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (k=0, \quad e_{min} = \frac{\lambda}{4n_2})$

增反膜 (反射光相干). - 高反膜.

玻璃反射率 (无-5% 单层-28%, 三层-70%, 15层-99%).

2.1.4.* 时间相干性和空间相干性. (相干时间), 光源强度 $<$ 某一值).

1) 单色光入射时, 仅中间条纹及附近看为数不多的条纹;

2) d 增大时, 干涉变得模糊.

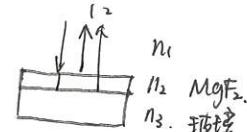
1) \Rightarrow 产生光的干涉还须附加条件: $f < L_0 \rightarrow$ 波列长度.

光的时间相干性: 光源同一时刻发出的光分为两束后又先后到达某点, 只有到达的时差小于某一值时才能在该点干涉.

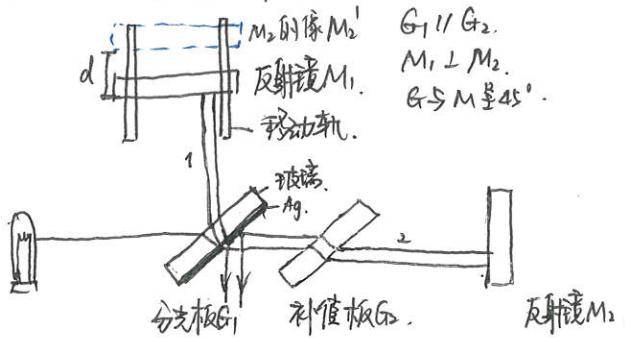
2) \Rightarrow 光源有一定强度 (无数个互不相干的光源), 若组成一束干涉条纹, 条纹错开距离 Δ , 条纹可见度 V .

光的空间相干性: 一定强度的普通光源, 要使其表面上两点 S_1, S_2 发出的光能发生干涉.

这两点之间的距离 $d = \sqrt{s_1 s_2}$, 必须小于某一值.



2.1.5. 迈克尔逊干涉仪.



$G_1 \parallel G_2$,
 $M_1 \perp M_2$,
 $G \rightarrow M$ 呈 45° .

补偿板: 补偿 Δ 光程, 防止 $r_2 - r_1 > L_0$.

$\delta = 2d$. (效果是一个等厚干涉).

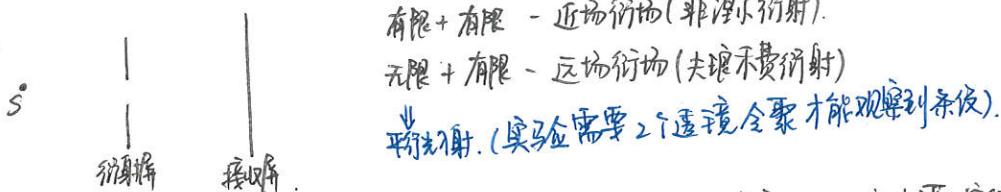
若 M_1, M_2 不垂直, M_2' 与 M_1 形成劈尖型等厚干涉条纹.

2.2. 光的衍射.

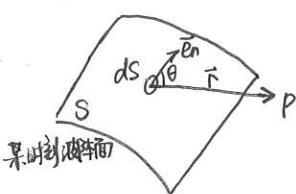
光-普通大小物体 - 仅表现出直线传播

光-遇到与其波长相近的物体 - 明暗相间的衍射图样.

分类



惠更斯-菲涅尔原理(子波相干叠加原理): 波阵面上每一点都可视作新的次波波源, 它们发出子波, 都是相干波. 任意一点的振动是所有子波在该点相干叠加.



$$\text{子波在 } P \text{ 相位: } \psi = wt - \frac{2\pi}{\lambda} r$$

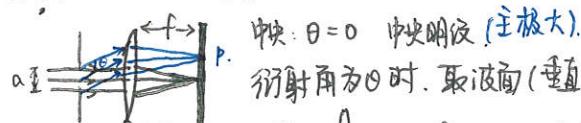
$$ds \text{ 在 } P \text{ 引起的光振动: } dE = C K(\theta) \frac{ds}{r} \cos(wt - \frac{2\pi}{\lambda} r)$$

C-比例系数, $K(\theta)$ -倾斜因子. ($\theta \uparrow K \downarrow$, $\theta=0$, $K(\theta)_{\max}=1$), $\theta \geq \frac{\pi}{2}$, $K(\theta)=0$)

$$\text{波面在 } P \text{ 的合振动: } E = \int_S dE = C \int_S \frac{K(\theta)}{r} \cos(wt - \frac{2\pi}{\lambda} r) ds$$

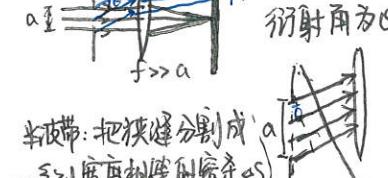
- 菲涅尔衍射积分公式.

2.2.1. 夫琅禾费单缝衍射.



中央: $\theta = 0$ 中央明纹 (主极大).

衍射角为 θ 时, 取波面(垂直传播方向).



半波带: 把狭缝分割成 'a' 一系列宽度相等的窄条. (不是整数倍时, 用菲涅尔)
积分公式作更复杂讨论).

θ -取主轴向上方为正.

$$\Delta f_{\max} = a \sin \theta. \rightarrow \text{半波带数目为 } N = \frac{a \sin \theta}{\frac{\lambda}{2}}$$

相邻半波带各对应点的光程差均为 $\frac{\lambda}{2}$, 堆加相消.

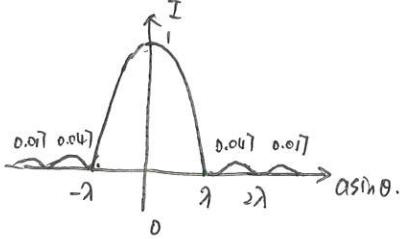
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{暗纹中心: } a \sin \theta = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, \dots \text{ (极小).} \\ \text{明纹中心: } a \sin \theta = \pm (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, \dots \text{ (极大).} \end{array} \right.$$

* k 不取 0, 中央明纹会覆盖

K-衍射级.

单缝衍射光强

中央明斑占总光强 80% 以上.



衍射角为 0 时，会聚点位置有： $x = f \tan \theta$.

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \pm k \frac{\lambda}{a} f & k \text{ 级暗中心} \\ 0 & \\ \pm (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{a} f & k \text{ 级明中心} \end{cases}$$

条纹角度：主光轴上会聚光的夹角差.

$$\Delta x_0 = 2 \frac{\lambda}{a} f$$

$\Delta x = \frac{\lambda}{a} f$ 中央明斑是其余条纹宽度 2 倍.
其余条纹宽度一致.

白光单缝衍射：同条纹色散（近中紫、外红）；

单缝上下移动，衍射条纹不变（衍射角不变，光程差不变） \Rightarrow 光栅 $\xrightarrow{\text{极限}} \text{衍射条纹高度全叠加}$
 $a \uparrow \Delta x \downarrow$, 衍射不明显； $a \downarrow$, 通光量 \downarrow , 条纹分散但不清晰； $\xrightarrow{\text{极限}} \text{(有多道相干的限制)}$

入射光斜入射时：

原中央明斑向下移.

$$f = a(\sin \theta + \sin \psi)$$

原中央明斑向上移.

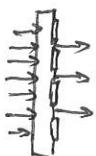
$$f = a(\sin \theta - \sin \psi).$$

$\xrightarrow{\Delta \frac{\lambda}{a} \rightarrow 0}$ 时，各波条纹向中央靠拢、精密集（ \approx 单一明条纹） 几何光学是波动光学在 $\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$ 极限情况

2.2.2. 光栅衍射

衍射光栅：由大量等宽、等距的平行狭缝（或反射面）构成的光学元件.

透射光栅



反射光栅



光栅常数 $d = a + b$. \leftarrow 不透光部分宽度
 \downarrow 透光部分宽度

N (数量级可达 10^5)

衍射：每缝衍射条纹重合，光强加大（条纹更清晰）.

干涉：缝与缝之间形成多缝干涉图样

$\xrightarrow{\text{先}} \text{后 (衍射光干涉)}$

} 光栅衍射是干涉和衍射效果.

相邻缝： $f = \frac{a(a+b)}{\sin \theta}$.
 $\Delta \psi = \frac{2\pi(a+b) \sin \theta}{\lambda}$.

(1) $\Delta \psi = 2k\pi$. 多缝干涉加强. (合振幅 max)
出现明斑(主极大)

$$k\lambda = (a+b) \sin \theta - \text{光栅方程} (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

(2) $\Delta \psi = k'(2\pi)$. 合振幅为 0.

出现暗斑. $\rightarrow (k' \in [1, N] \text{ or } k' \notin k'N)$

$$(a+b) \sin \theta = k' \frac{\lambda}{d} - \text{暗斑条件.}$$

(3) 次明纹(次极大).

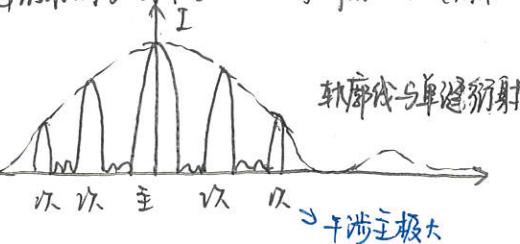
相邻两个暗纹间 - 主 or 次极大.

相邻主极大间有 $N-2$ 个次明纹(隔开 $N-1$ 个暗纹)

- 总透数(N)越大, 主极大位置不变, 暗区越宽, 主明纹越窄越高.(背景越暗).

(N 很大时, 次极小几乎不可见, 主极大细而高).

单缝衍射对多光干涉加强调节的结果(衍射光干涉).



干涉主极大位置不变, 但有缺极(干涉加强, 但无主极大 + 单缝极小).

$$\begin{cases} (a+b)\sin\theta = k\lambda \\ a\sin\theta = k'\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \frac{a+b}{a} k' \quad k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

* 注意实际 $\sin\theta \in (-1, 1)$ 实际屏幕呈现的条纹级数是有限的

屏幕上条纹张角可以大到 $\theta \approx \pi/2$.

* 明条纹间距(指相邻主极大). $d \cdot \frac{\lambda}{f} = d\sin\theta = k\lambda$. ($\theta \neq \sin\theta \approx \tan\theta$)

$$x_k = k \frac{f}{d} \lambda, \quad \Delta x = \frac{f\lambda}{d}$$

* 干涉的缺极与实际暗条纹对应(也是单缝衍射极小) 即有 $\begin{cases} d\sin\theta = k\lambda \\ a\sin\theta = k'\lambda \end{cases} \Rightarrow a = \frac{k'd}{k}$
(此时可能 $a\lambda$ 不是整数, 也正确, 但一般取整数比 k

2.2.3. 圆孔衍射、光学仪器分辨率本领

中心亮斑: 突显成像, 集中了约 84% 的衍射光能.



波腹斑的半角宽度为 θ :

$$\theta = \frac{d}{2f} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

→ 此处是两需分离物体中心的距离

{ 几何光学 物高 $\frac{\text{焦距}}{\text{透镜}} \rightarrow$ 像点 物(点集) \rightarrow 像(点集)

波动光学 物高 $\frac{\text{焦距}}{\text{透镜}} \rightarrow$ 像斑、物(点集) \rightarrow 像斑(集合).



瑞利判据: 一个爱里斑中心恰巧与另一个爱里斑的边缘重合时恰好能分辨.

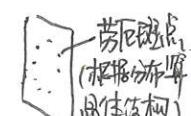
恰能分辨时, 两物体对透镜所张角 $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ (角分辨率).

光学仪器分辨率 $R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda} \propto D, \frac{1}{\lambda}$.

光栅光谱: 复色光入射时, 杂乱色散

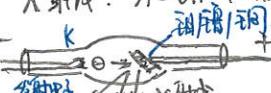
光栅分辨率: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$. (k 为消光系数, N 是光栅透数).

$\Delta\lambda$ - 恰好能分辨的两光最小波长差. → R 是与 λ 有关的“量化的本领”



2.2.4. X射线衍射.

X射线 $\lambda = 0.1-10 \text{ nm}$.



不易发生衍射(强度, X射线波长短, 穿过).



劳厄-晶体中规则排列粒子作为三维光栅.

布拉格公式: 相邻两晶面反射的X射线干涉加强条件. $2d\sin\theta = k\lambda$.

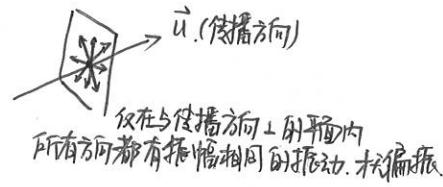
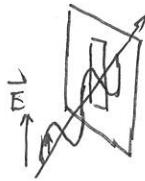
d -晶格常数(相邻晶面距离) θ -掠射角.

2.3. 光的偏振

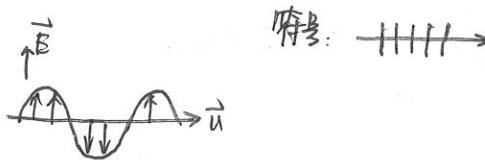
光的干涉、衍射 $\xrightarrow{\text{证明}}$ 波动性。光的偏振 $\xrightarrow{\text{证明}}$ 光是横波。

波的振动方向对传播方向的不对称性 - 偏振 (仅横波偏振)

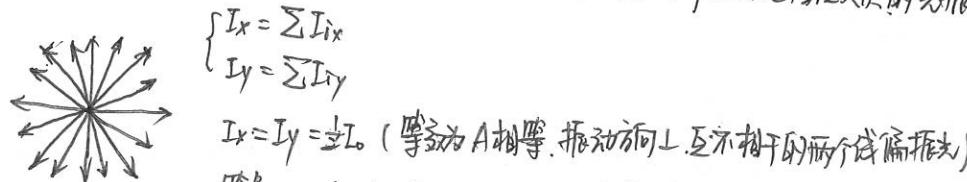
通常方向始终是电场方向 \vec{E} (光矢量)



线偏振光：光的光矢量仅沿一个确定的方向振动。



自然光 (完全非偏振光)：无穷多个 A 相同、方向各异、彼此间无固定相位关系的光振动组合。

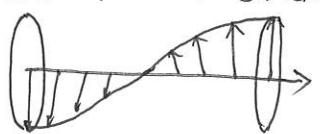


等效 \rightarrow (· 和 | 数量一样, 指光强 =)

部分偏振光：某一方向光振动比与之垂直方向上的光振动占优势的光。

(可等效为自然光 + 线偏振光)。等效：
 $\begin{array}{c} \parallel \cdot \parallel \rightarrow \\ \downarrow + \uparrow \end{array}$ $\begin{array}{c} \cdot \cdot \mid \cdot \cdot \mid \rightarrow \\ \downarrow + \leftarrow \end{array}$

椭圆偏振光：光矢量沿着传播方向均匀旋转。



若光矢量大小随时间变化 - 椭圆偏振光
不变 - 圆偏振光



2.3.1. 起偏与检偏

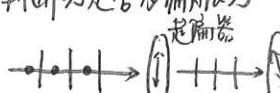
起偏：自然光 \rightarrow 偏振光。 $I_0 \rightarrow \begin{array}{c} \cdot \cdot \mid \cdot \cdot \mid \rightarrow \\ \bigcirc \end{array} \rightarrow \frac{I_0}{2}$

偏振片 (P)：透明材料、特定方向排列的二向色性物体。

\pm 二向色性：某些晶体对某一方向的光振动有强烈吸收，只让与该向垂直的光振动

偏振化方向：特定光振动通过的方向。

检偏：判断光是否为偏振光



自然光
部分光

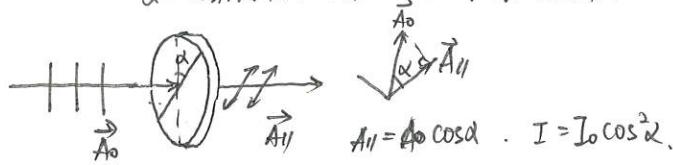
$I_{\max} = I_0, I_{\min} = 0$ - 透光

$I \leq \frac{I_0}{2}$

$I_{\min} > 0, I_{\max} > \frac{I_0}{2}$

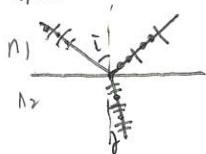
马吕斯定律: 不考虑吸收和反射情况下, 透射光偏振与入射光偏振光的强度: $I_s = I_0 \cos^2 \alpha$.

α - 入射光偏振光振动方向与检偏器偏振化方向的夹角



反射和折射起偏

自然光



一般情况、反射、折射角均为部分偏振光

反射-垂直入射面光振动为主(很多)

折射-平行入射面光振动为主(很少).

反射角满足 $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$ (i_0 起偏角布儒斯特角) -- 布儒斯特定律.

此时 反射光一线偏振光振面垂直于射面.

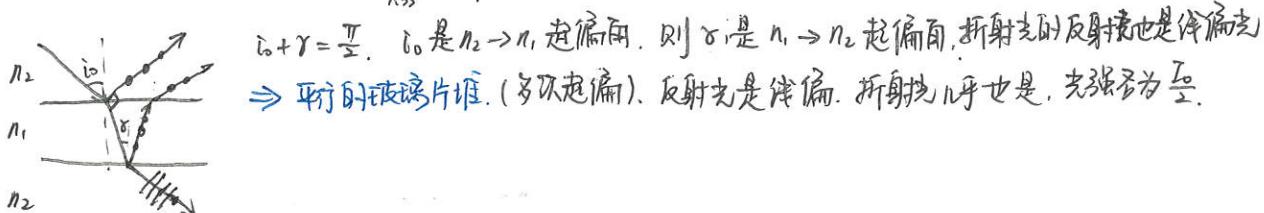
折射光-仍为部分偏振光

结论: 以起偏角 i_0 入射时, 入射光与折射光垂直. ($i_0 + r = \frac{\pi}{2}$)

(起偏角 i_0 . 空气 \rightarrow 玻璃. $\arctan \frac{1.50}{1} = 56.3^\circ$)

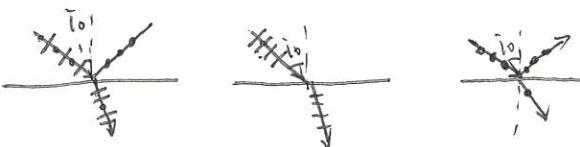
空气 \rightarrow 水. $\arctan \frac{1.33}{1} = 53.1^\circ$

水 \rightarrow 玻璃 $\arctan \frac{1.50}{1.33} = 49.2^\circ$



应用: 拍摄. 加偏振片. 消掉反射光干扰.(水面. 柜窗).

偏振片眼镜. 减少太阳经地面反射后产生炫目光的影响.



晶体双折射

双折射: 一束光进入光学各向异性晶体(如方解石). 产生两条折射光束的现象 (本质是传播速度的方向性) \rightarrow 不同方向/同方向不同速度均属于.

- 一条遵守折射定律 - 寻常光(o光).

- 另一条 $\frac{\sin i}{\sin r_p} \neq \text{常数}$. 折射率一般不在入射平面内. 折射率随入射方向变化. (e光)

(旋转晶体. o光不动. e光围绕o光旋转).



o光和e光均为线偏振光.

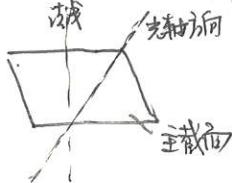
光轴: 晶体内的一个特殊方向. 光沿此方向传播时不发生双折射现象

晶体

平行此方向的向为光轴. <单轴 方解石. 双轴>

晶体 主截面：由晶体光轴及晶体表面法线所构成的平面。

(光波的)主平面：晶体中某光波和晶体光轴所决定的平面。



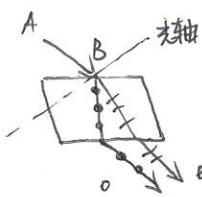
o 光振动垂直其主平面 (光振动与光轴)

e 光振动在其主平面内 (光振动与光轴共面)

(通常 o 光和 e 光为主平面不共面).

特殊情况：当晶体光轴在入射面内时， o, e 光平面、主截面共面

⇒ e 光、 o 光光振动互相垂直



o 光传播速度：各向同性



e 光传播速度：各向异性

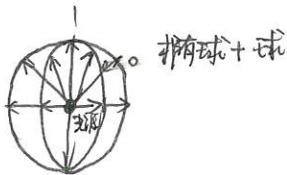


$$\begin{cases} \text{沿光轴方向} & V_{\text{光}} = V_{\text{o光}} = V_0 \\ \text{垂直光轴方向} & \text{有 } \max |V_{\text{e光}} - V_{\text{o光}}| \\ \text{计此时 e 光速度 } V_{\text{e}} \end{cases}$$

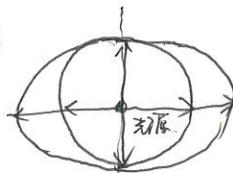
晶体的主折射率： $n_0 = \frac{c}{v_0}$ $n_e = \frac{c}{v_e}$ n_0, n_e 为晶体主折射率。

$$\begin{cases} \text{正晶体} & v_0 > v_e \quad n_0 < n_e \\ \text{负晶体} & v_0 < v_e \quad n_0 > n_e \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{正晶体} \quad \text{石英, 碱, 水.} \\ \text{负晶体} \quad \text{方解石.} \end{array}$$

晶体中光波波面



正 $v_0 > v_e$

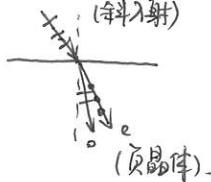


负 $v_0 < v_e$

波面是椭圆双曲面。
回旋轴向为光轴方向.

当光轴垂直入射面并平行于晶面时，e光也可用折射定律 ($\frac{\sin i}{\sin r_e} = n_e$)

(斜入射)



薄片(晶片)：从单轴晶片切下的厚度均匀的薄片，其表面与晶体的光轴平行。(使偏光分光)

(光轴垂直入射面并平行于晶面的情况) v_0, v_e 方向 = 速度 \pm (且垂直入射)

$$f = (n_0 - n_e) d. \quad (\text{负晶片}) \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e) d.$$

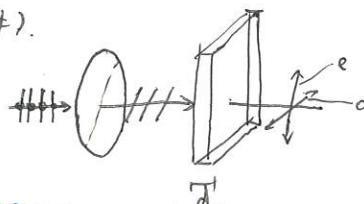
四分之一波片 $(n_0 - n_e) d = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$

$$\Delta\psi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

二分之一波片 $(n_0 - n_e) d = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

$$\Delta\psi = (2k+1) \pi. \quad (\text{线偏光通过后仍为线偏光, 振动面转过} 2\pi \text{ 角}).$$

(必须指明波长).



光轴和振幅方向可用

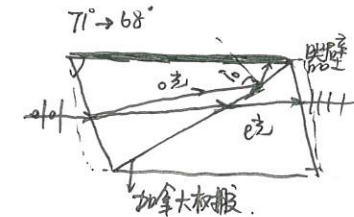
- 偏振现象

* 尼科耳棱镜.

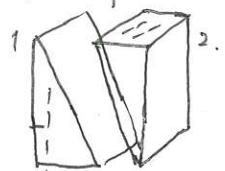
$n_{\text{玻}} = 1.55$ 对 O 光, $n_0 > n_{\text{玻}}$, 可产生全反射. ($i_{\text{临界光}} \approx 70^\circ$)

$n_0 = 1.658$ (液体黑器壁吸收)

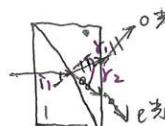
$n_e = 1.486$. 对 e 光: 可以透过, 获得偏振光



* 沃拉斯顿棱镜



棱镜 1 \rightarrow 棱镜 2. O 光变 e 光; e 光变 O 光



棱镜 1 $\left\{ \begin{array}{l} \downarrow e \\ \uparrow O \end{array} \right. \xrightarrow{n \uparrow}$ 棱镜 2. $\downarrow O$ 折射角 > 入射角.
 $i_1 > r_1$. ($e \rightarrow O$, $n_e < n_0$). $i_1 < r_2$ ($O \rightarrow e$, $n_0 > n_e$)

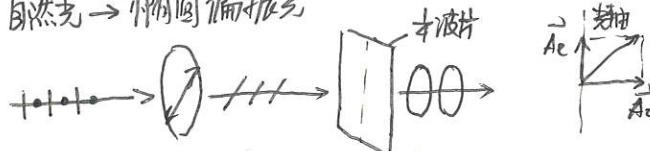
两棱镜光轴相互垂直
 $(O, e$ 光相对介质而言, 棱镜光轴变化引起 O, e 光度化)

2.3.2. 椭圆偏振光和圆偏振光. 偏振光的干涉.

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \psi_{10}) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \psi_{20}) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta \psi = \sin^2 \Delta \psi. \quad 0 < \Delta \psi < \pi \text{ 左旋} \xrightarrow{\curvearrowright} \\ -\pi < \Delta \psi < 0 \text{ 右旋} \xrightarrow{\curvearrowleft}$$

两个同频率相互垂直的波合成. \rightarrow 椭圆偏振光 ($A_1 = A_2$, 圆 \sim)

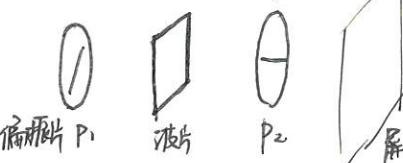
自然光 \rightarrow 椭圆偏振光



$\delta = (n_0 - n_e)d = \frac{\pi}{2}$. 正椭圆. (当起偏角与波片光轴夹角为 $\alpha = 45^\circ$ 时, $|Ae| = |A_0|$, 圆 \sim)

$\Delta \psi = \frac{\pi}{2}$.

2.3.3. 偏振光的干涉

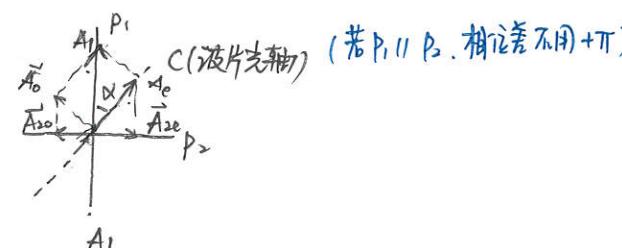


P_1 : 产生线偏振光

波片: 分光 ($O \& e$).

相位延迟. $\Delta \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e)d$.

P_2 : O, e 引到同一向



$$\begin{cases} A_0 = A_1 \sin \alpha \\ A_e = A_1 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow A_{20} = A_0 \cos \alpha = A_1 \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$A_{2e} = A_e \cos \alpha = A_1 \frac{\sin \alpha}{2}$$

两相干光相位差. $\Delta \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e)d + \frac{\pi}{2}$ 相位差.

$$\text{干涉 } \Delta \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e)d + \pi = \begin{cases} 2k\pi & \text{加强} \\ (2k+1)\pi & \text{减弱} \end{cases}$$

(现象观察)

单色光入射.	晶片厚度均	视场中-干涉条纹.
	不均	亮/暗稳定, 无条纹.
白光入射.	晶片厚度均	视场中-一定彩斑.
	不均	彩色条纹

Thermodynamics.

绪论.

热现象：一切与温度有关的现象（宏）

与大量微观粒子无规运动相联系（微）

对象：（宏）物体 / 物体系 - 热力学系统.

对象特点：由大量无规运动的粒子组成

{ 热力学 实验规律
 统计物理学 微观模型.

理想气体 { 玻意耳定律： $T = \dots$ P 与 V 反比
(一定质量) 盖-吕萨克定律： $V = \dots$ P 与 T 正比
查理定律： $P = \dots$ V 与 T 正比

平衡态 不受外界影响时，系统宏观性质不随时间变化。

↓
传热/做功. 微观上，无规运动仍继续（热力学平衡）。

准静态过程 { 每时刻都处于平衡态
只有准静态能画出曲线.
状态变化过程时间 > 驰豫时间（非平衡态 → 平衡态时间）。

理想气体物态方程，平衡态下理想气体，任意两个状态 $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \text{const.}$

标准状态： $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 273.15 \text{ K}$. 此时, 1mol 气体 $V_0 = 22.4 \text{ L}$

普适气体常量 $R = \frac{P_0 V_0}{T_0} = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (尝试公论)

$\Rightarrow P V = \frac{m}{M} R T$ (m - 质量, M - mol 质量, $N_A = 6.023 \times 10^{23}$).

玻尔兹曼常数 $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

$\Rightarrow P = n k T$ (n 为分子数密度, $n = \frac{N}{V}$ 即单位体积分子数)

热力学第零定律 (热平衡定律) 若系统 A 和系统 B 均与系统 C 热平衡, 则 A、B 彼此热平衡.

Δ 注意 $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. 所以公式中 M 要用 $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

第12章 气体动理论.

§1. 统计规律与概率分布.

统计规律：大量偶然事件在整体上所表现出来的确定的规律（整体规律）。

-与系统所处宏观条件有关 - 总是伴随着涨落，即对统计规律的偏离现象。

概率： $W_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$. (N次实验，出现NA次事件A).

加法定则：若A、B为不相容事件，则出现A或B概率 $W = W_A + W_B$

乘法定则：若J、K为相容事件，则同时出现J和K. $W = W_J \cdot W_K$.

概率归一化： $\sum W_i = 1$. $\int dW = 1$.

统计平均值：任一随机变量平均值 $\bar{x} = \int x dW$. (dW 为出现x值的概率). - 描述大量粒子

§2 理想气体的压强和温度.

出发点：任何物质，分子构成。

分子之间存在相互作用力，分子力。

分子不停地做无规则运动 - 热运动。

宏观量是相应微观量的统计平均值。

每个分子
(力学假设)
{ 1. 质点（仅平动，不转动）
2. 分子力，除碰撞瞬间，忽略分子力，分子与器壁作用力。
3. 完全弹性碰撞。
4. 完全服从牛顿力学。

分子集体
(平衡态且
无外场)
{ 1. 无占优势位置（均匀分布）
2. 无占优势方向（往所有方向运动的概率一样）。

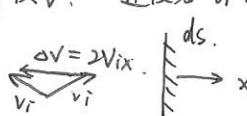
$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V} = \text{const.}$$

$$\begin{cases} \bar{v} = 0 & \bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0 \\ \bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \end{cases}$$

理想气体压强公式。

系统：平衡态，理想气体，忽略重力，分子视作质点

气体分子质量m，总分子数N，总体积V，速度为 v_i 的分子数 n_i ，其分子密度 n_i

1) 单个分子动量 $\Delta p = -2mv_{ix}$. 

2) 分子给壁力量 $I = 2mv_{ix}$.

3) dI 为与 ds 相碰的所有分子对 ds 冲量(仅 $v_{ix} > 0$ 能碰)

$dI = \sum_{v_{ix} > 0} dI_i = \frac{1}{2} \sum_i dI_i = \sum_i m n_i v_{ix}^2 ds dt$

4) $p = \frac{dI}{ds dt} = m \sum_i n_i v_{ix}^2$

器壁： $dI_i = 2m n_i v_{ix}^2 dt ds$.
 $(N, 2mv_{ix} = p, \Delta S = t, 动量守恒)$

$$\overline{V_x^2} = \frac{\sum N_i V_{ix}^2}{N} = \frac{\sum n_i V_{ix}^2}{n}$$

$$\therefore P = nm\overline{V_x^2} = \frac{1}{3}nm\overline{V^2} \quad (\text{令 } \overline{E_t} = \frac{1}{2}m\overline{V^2} - \text{分子平均平动动能})$$

$$\therefore P = \frac{2}{3}n\overline{E_t} \quad - \text{理想气体压强公式. (只具有统计意义, 对小 } N \text{ 无意义.)}$$

理想气体的温度:

$$\begin{cases} P = \frac{2}{3}n\overline{E_t} \\ P = nkT \end{cases} \Rightarrow \overline{E_t} = \frac{3}{2}kT. \quad - \text{理想气体温度公式.}$$

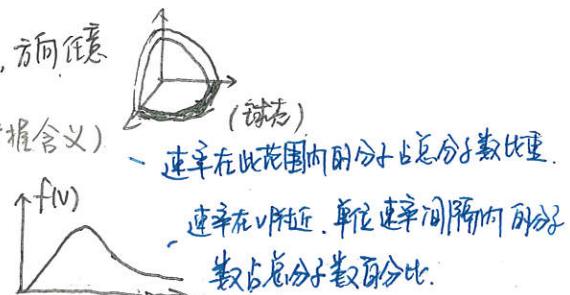
- T 的实质: 分子无规则运动剧烈程度的量度 (E_t, T 单位一致; E_t 与分子种类无关). (E_t 因, T 果).

§.3 气体分子的速度分布.

麦氏速率分布规律 (考虑速率在 $v \rightarrow v + dv$ 的分子数 dN , 方向任意)

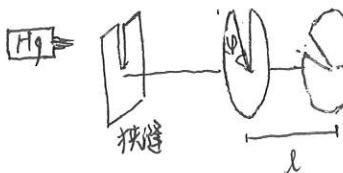
$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 dv \quad (\text{不背, 球根含义})$$

$$f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot \frac{4\pi v^2}{N \cdot dv}$$



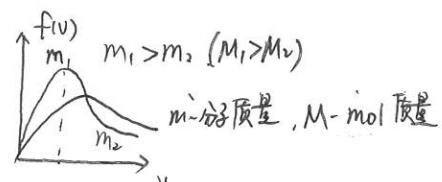
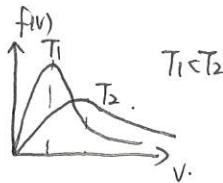
对一个分子来说, $f(v)$ 是分子处于速率 v 附近单位速率区间内的概率密度 ($f(v) \cdot dv$ 是概率).

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \quad - \text{区间概率.} \quad \int_0^\infty f(v) dv = 1. \quad (\text{归一性})$$

测定气体分子速率分布.  能接收到的: $\frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega}$. $v = \frac{\omega}{\varphi} L$. (设 ω . 选择 v , 频宽 - 选择区间)

统计速率.

1. 最概然 (\overline{v}_p) 速率. - $f(v)_{\max}$ 时 ($\frac{df}{dv} = 0$). $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$; $K = \frac{R}{N_A}$
此时 $f(v_p) = \left(\frac{8m}{\pi kT}\right)^{1/2} e^{-1}$

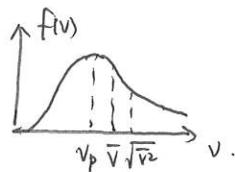


2. 平均速率. $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ $(\bar{v} = \frac{\int v dN}{\int dN} \text{ 上下积分区间对应})$

3. 方均根速率. $\overline{v^2} = \sum m_i v_i^2$ $\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ or $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

比较: $v_p < \bar{v} < \sqrt{v^2}$.

$$v_p : \bar{v} : \sqrt{v^2} = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3}.$$



$\sqrt{v^2}$ - 讨论分子平均动能

\bar{v} - 分子碰撞问题

v_p - 分子速率分布.

求某区间粒子平均速率 $\bar{v} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v dN}{\int_{v_1}^{v_2} dN} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}.$

- 重力场中粒子按高度的分布.

恒定外加场 - 玻耳兹曼能量分布律.

由麦氏速率分布. $dN \propto e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ (在麦氏分布中, $E = \frac{1}{2}mv^2$).

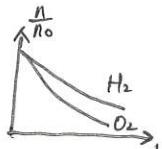
\Rightarrow 温度为T的平衡态. 在某一状态区间的粒子数与 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 成正比.

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_k + E_p}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz.$$

n_0 为 $E_p = 0$ 处的粒子数密度

$$\text{体积元 } dx dy dz \text{ 内总分子数 } dN' = \left[\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z \right] n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} dx dy dz.$$

$$\Rightarrow dN' = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} dx dy dz. \quad M \uparrow \text{减小} \downarrow. \quad (\text{解释高海拔缺氧}).$$



$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

$$P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (P_0 = n_0 kT, \text{ 地面压强}). \quad \text{--- 恒温压公式.}$$

$$(\text{高度计 } h = \frac{kT}{mg} \ln \frac{P_0}{P})$$

§4. 能量均分定理.

对结构复杂的分子. 除平动, 还要考虑其转动. 振动. (即不再被外质点.)

自由度: 确定物体空间位置所需的独立坐标数 (表示).

例: 自由刚体. 质心 x, y, z 转轴方位 α, β, γ (满足 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)

6个. 确定刚体相对起始位置转过角度 ψ .

理想气体分子.

1) 单原子分子 $i=3$. He, Ne, Ar.

2) 刚性双原子分子 $i=5$ O₂, H₂, CO 质动3. 联连成方程2. (α, β, γ 选2).

3) 刚性多原子分子 (自由刚体) $i=6$. H₂O, NH₃. 平动3. 转动3.

实际气体(原子之间还有振动).

单原子 3. 双原子 6 (+1. 两原子相对位置 ①mm②). 多原子 $\leq 3N$ (3N-6. 振动自由度)

能量按自由度均分定理(温度为T平衡态)

1. 每一平动自由度具有相同平均动能 $\frac{1}{2}kT$.

$$(\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT, \text{均匀分配}).$$

2. 对平衡态, 各自由度取!

⇒ 能量均分定理: 在温度为T的平衡态下, 物质(g/l/s)分子每个自由度都具有相同平均动能 $\frac{1}{2}kT$.

$$(每个分子平均动能 \bar{E}_k = \frac{1}{2}(t+r+s) = \frac{1}{2}kT \quad (t \text{个平动, } r \text{个转动, } s \text{个振动})$$

对一振动自由度, 还有振动势能(同样一份对应一份)

$$\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p = \frac{1}{2}(t+r+2s).$$

3.5. 理想气体内能.

热力学系统内能: 所有分子平均总动能与分子间作用的平均势能之总和.

$$\text{气体内能 } E = \sum \bar{E}_i = \sum \frac{1}{2}(t+r+2s)$$

$$\text{刚性理想气体分子系统 } (s=0) \quad E = \sum \bar{E}_k = \sum \frac{1}{2}kT(t+r) = \sum \frac{1}{2}kT.$$

$$(不加说明时默认为刚性) 1\text{mol. } E = \frac{m}{M}E_0 = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{2}RT = \frac{mN_A}{M} \frac{1}{2}kT.$$

理想气体, 内能是温度的单值函数. $E = E(T)$

3.6. 气体分子碰撞的统计规律.

平均碰撞频率: 单位时间内一个气体分子与其他分子碰撞的平均次数.

$$\text{平均自由程: 气体分子在相邻两次碰撞间通过的平均路程. } \bar{\lambda} = \frac{V}{\bar{z}}$$

理想气体, 平衡态, 分子直径视为直径为d的钢球, 被考察分子以平均相对速率v运动, 其它分子静止.

$$\sigma = \pi d^2. \sigma - \text{碰撞截面} (\text{不是球面积 } \pi d^2 \text{ 有接触})$$

$$\text{单位时间内 } \rightarrow A \text{ 发生碰撞的分子数. } \sigma \bar{u} t \cdot n = \pi d^2 n \bar{u}. \Rightarrow \bar{z} = \sigma \bar{u} \cdot n = \pi d^2 n \bar{u} = \underline{\underline{\pi d^2 n \bar{u}}}.$$

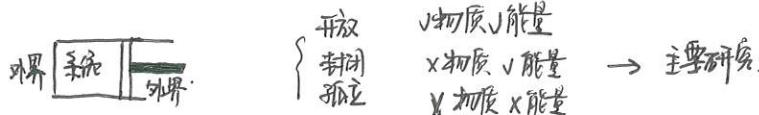
$$(\text{碰撞夹角 } \theta: 0 \sim 180^\circ \text{ 取平均 } \overline{\overline{\theta}} \text{ 取平均 } \bar{u} = \sqrt{2}\bar{v})$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{V}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \xrightarrow{n = \frac{P}{kT} \text{ 代入}} \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \propto \frac{T}{P}$$

(在密器中, 若 $\bar{\lambda} \gg \lambda$, 可认为 $\bar{\lambda} = \lambda$.

第13章 热力学

§1 热力学系统.



热力学过程 (系统状态随时间变化).

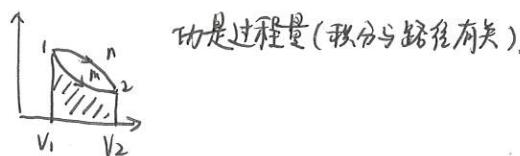
$p-T$. $V-T$ 图. 点-平衡态. 曲线-准静态过程.

实现系统状态变化途径 - 作功与传热 (内能改变的两种度量).

§2. 内能、功和热量.

一般气体. $E = \sum_{\text{分子}} \text{分子动能} + \sum_{\text{分子对}} \text{分子间势能}$ $\rightarrow E = f(T, V)$ } 内能是状态量
 理想气体. $E = f(T)$ } (恒定状态, 内能不变).

准静态过程中. 体积功:  $dA = F dl = p S dl = p dV$.
 $V_1 \rightarrow V_2$. $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$



热量. $C = \frac{dQ}{dT}$. 摩尔热容. 1mol 物质 $C_m = \frac{dQ}{dT}$ (1mol 温度升高 1K 所吸收的热量)

热量 $Q = \frac{m}{M} C_m \Delta T$ (仅温差不太大时, C_m 可视为常量)

定容/恒摩尔热容 $C_{V,m} = \frac{\delta Q_V}{dT}$ $C_{P,m} = \frac{\delta Q_P}{dT}$ (整个过程 V or P 不变).

理想气体. $C_{V,m} = \frac{i}{2} R$.

$$C_{P,m} = C_{V,m} + R = \frac{i+2}{2} R. \quad \cdots \text{迈耶公式}$$

摩尔热容比. $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \frac{\frac{i}{2}R + R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i} = \begin{cases} \frac{5}{3} & = 1.67 \text{ (单~)} \\ \frac{7}{5} & = 1.40 \text{ (双~)} \\ \frac{8}{6} & = 1.33 \text{ (多原子分子)} \end{cases}$

功 (A) 宏观 \leftrightarrow 微观.

热量 (Q) 微观 \leftrightarrow 宏观 $\quad \left. \right\} \text{都是过程量, 对系统内能改变而言, 1J 功与1J热等价.}$

§3. 热力学第一定律.

不仅是理想气体.

$$Q = \Delta E + A. \quad \text{传热} = \text{内能改变量} + \text{做功}. \quad \text{适用于两个平衡态之间} \quad (\text{任取完任何过程(准静态过程)})$$

(Q . 吸热 + 放热 - ΔE . 内能 \uparrow + 内能 \downarrow - A . 系统对外做功(膨胀) + . 反之(被压缩) -)

$$\delta Q = dE + \delta A. \quad (\text{微小过程})$$

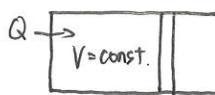
$$\text{对准静态过程 } \delta Q = dE + P dV.$$

§4. 热力学第一定律在理想气体中的应用

- 理想气体内部能变化只与量流始末温度有关 (与过程无关)

- 运用公式 $PV = \frac{m}{M} RT$, $Q = \Delta E + A$
 $P = nkT$.

4.1. 等体过程.



(1) 对外做功 $A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = 0$.

(2) 热量交换 $\oint Q_V = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T$. (等温, 因此用定容摩尔热容).

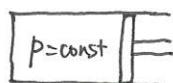
$$Q_V = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T.$$

(3) 内能变化 $\Delta E = Q_V = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T$.

$$= \frac{m}{M} \frac{1}{2} R \Delta T. (\text{与估计物理结果相同})$$

(理想气体内能公式: $\Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T = \frac{m}{M} \frac{1}{2} R \Delta T$, 普遍适用, 不仅限等体过程)

4.2. 等压过程



(1) 对外做功 $A = P(V_2 - V_1)$.

(2) 热量交换 $Q_p = \frac{m}{M} C_{p,m} \Delta T$

(3) 内能变化 $\Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T$. (由理想气体内能公式)

$$\Delta E = Q_p - A = \frac{m}{M} C_{p,m} \Delta T - \frac{m}{M} R \Delta T. (\text{由热-})$$

$$\Rightarrow C_{p,m} = C_{V,m} + R. (\text{与2节中迈耶公式})$$

态函数: 焓, $H = E + PV$.

对等压过程 $Q_p = \Delta H$.

注意插图

4.3. 等温过程.

$$T = \text{const.}$$



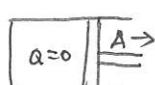
(1) 对外做功 $A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$.

(2) 热量交换 $Q_T = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$.

(3) 内能变化 $\Delta E = 0$

过程方程 $P_1 V_1 = P_2 V_2$.

4.4. 绝热过程.



(1) 对外做功 $A = -\Delta E = -\frac{m}{M} \frac{1}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2} (P_1 V_1 - P_2 V_2)$

(2) 热量交换 $Q = 0$

(3) 内能变化 $\Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T$

绝热方程 $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

绝热过程方程 (准静态)

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow pdV + Vdp = \frac{m}{M} R dT.$$

$$\delta A = p dV = -dE = -\frac{m}{M} C_{V,m} dT.$$

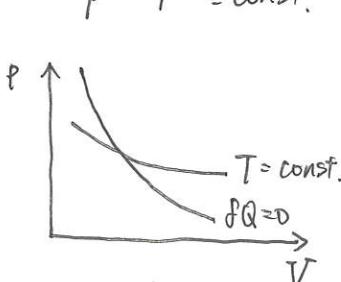
$$\Rightarrow Vdp = \frac{m}{M} (C_{T,m} + R) dT = \frac{m}{M} C_{p,m} dT.$$

$$\Rightarrow \frac{Vdp}{pdV} = -\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = -\gamma. \quad (\gamma = \frac{i+2}{i}, \text{摩尔热容比})$$

$\Rightarrow PV^\gamma = \text{const.}$ (理想气体准静态绝热过程方程) (泊松方程)

变形: $pV^\gamma = \text{const}$

$$\left\{ \begin{array}{l} TV^{\gamma-1} = \text{const} \\ p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{const.} \end{array} \right.$$



绝热指数比等温线“陡”。

$$k_{\text{绝热}} = \left(\frac{dp}{dV} \right)_{\text{Q}} = -\gamma \frac{P_A}{V_A} \quad (\gamma > 1)$$

$$k_{\text{等温}} = \left(\frac{dp}{dV} \right)_T = -\frac{P_A}{V_A}$$

4.5. 多方过程 (统称)

满足 $PV^n = \text{const.}$ 的过程 (n -多方指数)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{等容: } n = \infty \quad (\Rightarrow P^{\frac{1}{n}} V = \text{const.}) \\ \text{等压: } n = 0 \\ \text{等温: } n = 1 \\ \text{绝热: } n = \gamma \end{array} \right.$$

4.6 自由膨胀

特点: 迅速, $dQ = 0$, 非准静态, 无过程方程, 只用普遍适用的定律(热一律).

例:



系统对外不做功, $\Delta E = 0$.

$$A = -\Delta E = 0,$$

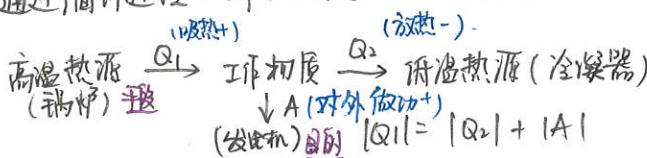
$$\Rightarrow \Delta T = 0, \text{ 理想状态方程} \Rightarrow P = \frac{1}{2} P_0.$$

3.5. 卡诺循环

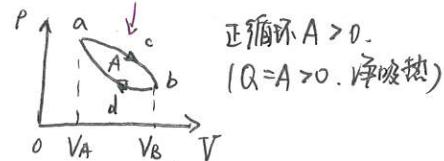
循环过程：系统，经一系列变化后又回到初态的整个过程。

特点： $\Delta E = 0$.

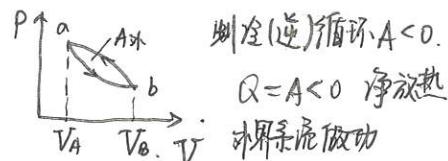
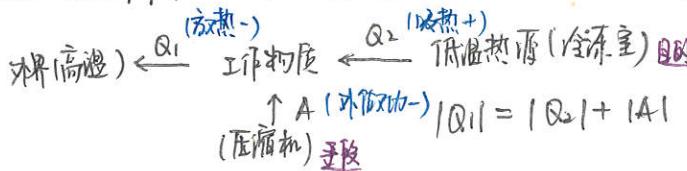
热机：通过循环过程不断把热转换为功的机器。



“顺时针”对外做功为正。



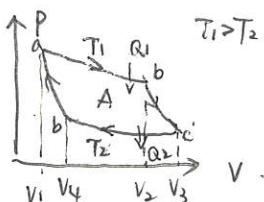
制冷机：通过外界作功，工作物质从低温热源吸收热量传到高温热源去，使低温物体温度更低的机器。



热机效率： $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ ($Q_2 \neq 0, \eta < 1$).

制冷系数： $\varepsilon = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2$

卡诺循环：—两个准静态等温过程和两个准静态绝热过程。



等温： $a \rightarrow b$ $Q_1 = A_1 = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$ $\eta_c = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$
 $c \rightarrow d$, $Q_2 = A_2 = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_4}{V_3} < 0$.

绝热： $b \rightarrow c$ $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$
 $d \rightarrow a$ $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$

$\Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

卡诺制冷机. $\varepsilon = \frac{Q_2}{A_{\text{外}}} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$  (卡诺热机逆循环).

- 卡诺热机效率与工作物质无关，只与两个热源温度有关

提高 η_c ，通常是 T_1 ↑，一般 T_2 是环境温度， $T_2 \neq 0$ ，因此 $\eta_c < 1$.

热机循环至少要两个热源，不可能向低温热源放热。

* 算 η ，先判断吸、放热、做功；判断过程类型

§6. 自然过程的不可逆性.

热-律表述2：一切热力学过程都应满足能量守恒。

方向性：无条件，自发，必须外界干预而进行的方向。

例：功 \rightarrow 热（焦耳实验）

热传导（高温 \rightarrow 低温）

气体自由膨胀

可逆过程：系统由某一状态出发，经过某一步骤达到另一状态，若存在另一过程，它能使系统和外界完全复原，则原过程为可逆过程。

自然界，一切与热现象有关的过程，都有明显方向性，都不可逆。

why - (1) 存在摩擦等耗散因素

(2) 存在某些不平衡因素，故为非准态过程。

理想 - 无耗散的准静态过程 - 可逆过程

§7. 热力学第二定律。

开尔文表述：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为有用功而不产生其他影响。

~~热机~~ $\rightarrow A$ 温度均匀且恒定不变的热源
或 第二类永动机是不可能制成的。（单一热源被热全部转化为机械功，不产生其他影响）
 $Q \downarrow$ 除做功（如引体上升）
单一热源 (T)

克劳修斯表述：热量不能自动地从低温物体传向高温物体。

(Kelvin, 功热转换不可逆。 Clausius, 热传递不可逆，本质相同，表述等效)

热=律本质：一切与热现象相关的宏观自发过程都是不可逆的。

处理问题：反证法（导出与热=律矛盾的事实）

卡诺定理：在高温热源 (T₁) 和低温热源 (T₂) 之间的一切可逆热机，其效率都等于卡诺热机效率，与工作物质无关。

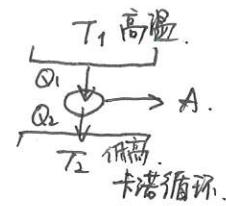
(1) 在 T₁, T₂ 之间工作的不可逆热机效率，不可能高于 (实际小于) 可逆机效率。
但是证不出。

$$\text{i.e. } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \left\{ \begin{array}{l} =: \text{对应可逆机} \\ <: \text{对应不可逆} \end{array} \right. \quad \text{热源 - 温度均匀，恒温。}$$

意义：指明提高热机效率途径：减少摩擦、泄漏、能量耗耗，使之接近可逆过程。

§ 8. 熵增原理 (热力学的数学表述)

对于卡诺循环, $\eta_c = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$
 $\Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$.



热温比 $\frac{Q}{T}$. 等温过程中吸收或放出的热量与热源温度之比.

对任意可逆循环 分割成多个小卡诺循环.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\Delta Q_{i2}}{T_{i2}} \right) = 0.$$

克劳修斯不等式. $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ - 对任意可逆循环, 热温比之和为零.

\Rightarrow 可逆过程热温比的积分与路径无关.

引J态函数. S . $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_k}{T}$ - 熵 (克劳修斯). (下标R表述路径(过程)任意)

熵. 单位 J/K. 仅对可逆过程使用.

Δ 对可逆绝热过程. $\Delta Q = 0$. $\Delta S = 0$. - 又称等熵过程, 绝热线又称等熵线.

对不可逆过程. $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$. $\oint \frac{\delta Q_{IR}}{T} < 0$.

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q_{IR}}{T} \quad (\Delta S > \int_1^2 \frac{\delta Q_{IR}}{T}).$$

对任意循环. $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ 克劳修斯不等式. $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$

$$\left\{ \begin{array}{l} dS \geq \frac{\delta Q}{T} \\ S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}. \end{array} \right.$$

熵增加原理. 孤立系统内进行的过程, 熵永不减少. (孤立系统 $\oint Q = 0$).

自发过程 (属于不可逆过程) 总有 $\Delta S > 0$. ($S_2 > S_1$ 过程向熵增方向自动进行).

Δ 对非孤立的绝热过程也适用熵增原理.

孤立系统 $\left\{ \begin{array}{l} \text{方向: } \Delta S > 0 \text{ 方向.} \\ \text{限度: 熵值达到最大值.} \end{array} \right.$

热力学基本方程. $dS = \frac{PdV + dE}{T}$

$$dS = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} C_V m \ln \frac{T_2}{T_1} \text{ (不考虑)}$$

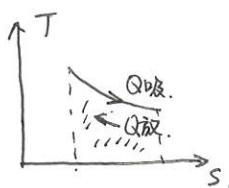
位移熵 速度熵

Δ 计算 ΔS . 若过程不可逆, 找一个始末状态相同的可逆过程即可.

过程分类后, 用 Q 的表达式, 通过理想气体方程及题干条件选取分度量 dP, dV, dT

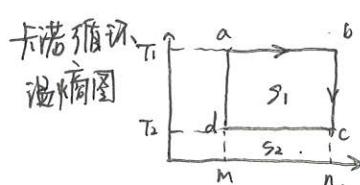
温熵图.

对可逆过程. $Q_R = \int_R T dS$.



T-S 图中任一点表示系统的-一个平衡态.

任一曲线表示可逆过程 (S 定义仅适用可逆过程)



$$\eta_C = \frac{A}{Q_1} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

熵和能量退降.

热 ~ 能 (保持总能量不变).

热 = 熵. (能量在转化中退化, 可以作功的能量越来越少.)

熵是能量不可用程度的量度.

§9. 热力学第二定律的统计意义 (微观).

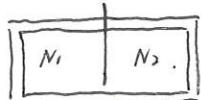
功: 与宏观定向运动相联系, 有序运动.



热: 与分子无规则运动相联系, 无序运动.

自发过程, 单向, 向无序度增大的方向.

例: 气体自由膨胀.



宏观状态: 左右有多少个分子.

微观状态: 左右是哪些分子.

每个宏观态对应多个微观态:

每个宏观态对应 $\frac{N!}{N_1! N_2!}$ 个微观态.

总宏观态数 $N+1$, 总微观态数 2^N

发现 N_1, N_2 接近时, $\frac{N!}{N_1! N_2!}$ 值大, 微观态数多.

热力学概率: 某宏观态所包含的微观态数目 (W).

等概率假设: 对于孤立系, 各种可能的微观态出现的概率相等.

热力学概率大的宏观态最易出现, 两边分子数相同时, 热力学概率最大 - 平衡态.

平衡态 - 一定宏观条件下 W 最大的状态

热力学概率是分子运动无序性的一种量度. (平衡态是最无序的状态.)

平衡态 $W_{平} = W_{max}$ - 最概率态. $W_{非} \xrightarrow[\text{自发}]{W \uparrow} W_{平} = W_{max}$.

热=律统计学意义: - 孤立系内部过程, 总是由热力学概率小的宏观态, 向热力学概率大的宏观状态进行.

玻尔兹曼熵 $S = k \ln W$. (统计熵).

($S \propto \ln W$. 熵也是系统无序性的量度 熵仍是状态函数).

→ 满足熵增原理 (孤立系统内 $\Delta S \geq 0$ $W_{\text{小}} \rightarrow W_{\text{大}}$. 有序 → 无序).

玻尔兹曼熵和克劳修斯熵等效.

以等温膨胀为例:

单个分子系统中按位置分布的微观状态数与体积成正比.(平衡态) $W \propto V$.

N 个分子.

$$W = w^N \propto V^N$$

系统中分子数 $v N_A$. 体积 $V_1 \rightarrow V_2$. $\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{v N_A}$.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \left(\frac{W_2}{W_1} \right) = v N_A k \ln \frac{V_2}{V_1} = v R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{v RT}{T} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1)$$

系统吸热 $Q = A = v R T \ln \frac{V_2}{V_1}$. (等温膨胀).

$$\text{代入(1). } \Delta S = \frac{Q}{T}$$

Quantum Theory

第15章 量子物理

- 量子理论的基本概念
- 量子力学解决问题基本思路

对象 1) 微观，强度活动范围 $< 10^{-9} \text{ m}$.

2). 粒子性、波动性.

3). 粒子能量、角动量等取值分立. (在极限情况下可以回到经典力学).

(-) 早期量子论. (实验 + 假说 / 理论解释).

§1. 黑体辐射. 普朗克能量子假说

热辐射：物体内部原子、分子由于热运动而向外辐射电磁波.

$T \nearrow \downarrow \nu, V \downarrow$. 低温 - 红外. 热 - 可见. 高温 - 紫外

特点：任何物体，任何温度下存在；是连续谱，包含各种波长和频率.

强度按波长(频率)的分布与温度有关. $T \uparrow \rightarrow$ 短波成分 \uparrow . $T \downarrow \sim$ 长波成分 \downarrow

描述热辐射：

单色辐射出射度. $M_\lambda(T) = \frac{dM}{d\lambda}$ 温 T . 单位时间. 单位表面发出的波长在 λ 附近单位波长内辐射能.
取决于 λ, T . 物质种类. 表面情况. ($\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$)

辐射出射度. $M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda$. 温 T . 单位时间. 单位表面发出的各种波长的总辐射能.
 $\sim (\text{W} \cdot \text{m}^{-2})$.

单色吸收比和反射比. 外来辐射能. $\begin{cases} \text{部分物体吸收.} \\ \text{部分物体反射.} \end{cases}$ (不计透射).

$$\text{吸收. } \alpha(\lambda, T) = \frac{dM_{\lambda(\text{吸})}}{dM_{\lambda(\text{入})}} \quad \text{反射 } p(\lambda, T) = \frac{dM_{\lambda(\text{反})}}{dM_{\lambda(\text{入})}}$$

热平衡：相同时间内，辐射和吸收的能量恰好相等.

黑体(绝对黑体)：任何 T . 对任何 λ . 有 $\alpha(\lambda, T) = 1$ 的物体.

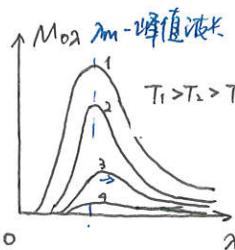
黑体模型：不透明空间开一小孔. 一近似黑体.

基尔霍夫定律：平衡热辐射时，任何物体的 $\frac{M_\lambda(T)}{\alpha(\lambda, T)}$ 是一个与物体性质无关而只与 λ, T 相关的常数.

$$\frac{M_{\lambda(T)}}{\alpha(\lambda, T)} = \dots = M_{0\lambda}(T) \leftarrow \text{黑体单色辐射度.}$$

- 好的辐射体也是好的吸收体.

- 黑体是完全吸收体，也是理想辐射体



面积 - $M_0(T)$.

实验: 斯特藩 - 玻耳兹曼定律.

$$M_0(T) = \sigma T^4 \quad (\text{黑体})$$

斯特藩常量. $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

实验: 维恩位移定律.

$$\lambda_m T = b. \quad (T \uparrow, \lambda_m \text{ 向短波方向移动})$$

$$\text{维恩常量: } b = 2.897756 \times 10^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{K}.$$

经典物理推导:

$$\text{维恩: } M_{\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \quad \text{经典热力学统计理论; 长波段符合.}$$

$$\text{瑞利 - 金: } M_{\lambda}(T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \quad k - \text{玻尔兹曼常数. } c - \text{真空中光速.}$$

经典电动力学和统计物理; 长波段符合.

$$\Rightarrow \text{普朗克公式: } M_{\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT}} - 1} \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s. 普朗克常数.} \\ (-\text{般取 } 6.63).$$

普朗克能量子说:

(1) 黑体辐射中分子、原子可看作线性谐振子，振动时向外辐射能量.

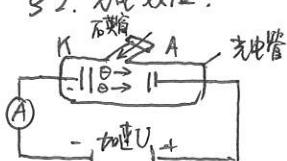
(2) 谐振子能量不连续. 对于一定 V 的辐射，物体只能以 $h\nu$ 为单位发射 / 吸收它.

- 物体发射 / 吸收电磁辐射只能以“量子”形式进行.

$$\varepsilon = h\nu. \quad E = nh\nu.$$

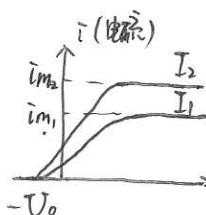
$$\begin{array}{l} \text{普朗克公式} \rightarrow \text{积分 } M_0(T) = \sigma T^4. \\ \rightarrow \text{求导 } \lambda_m T = b. \end{array}$$

§ 2. 光电效应.



K - 阴极 - 金属 / 氢化物

A - 阳极 - 金属丝网



V - 定时. $i_m \propto I$. (饱和电流正比于入射光强度).

及 n - 单位时间内从金属表面逸出的电子数.

$$i_m = ne. \Rightarrow n \propto I.$$

入射光强越大，产生光电子越多..

存在截止电压 U_0 . (当加反向 $U = U_0$, $i = 0$)

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_0. \quad (\text{光电子跑不到阳极}).$$

实验: U_0 与光强 I 无关，与频率 ν 呈线性关系. $U_0 = \alpha\nu - \phi$.

α - 常数. ϕ - 由阴极金属材料决定.

红限频率. $v_0 = \frac{\phi}{e}$. 只有当入射光 $\nu > v_0$ 时，才会产生光电效应 (每种金属, $v_0 - v_0$).

光电效应瞬时发生. $\nu > v_0$. 不论入射光强，弛豫时间 $< 10^{-12} \text{ s}$.

经典波动理论，无法解释。 E_k 与 V 无关；有极限 V_0 ；瞬时响应（与 t 无关）。

Einstein 光子假说：一束光是一束速度为 c 的粒子流，每个光量子能量为 $\epsilon = hv$. (只能整个被吸收/产生)。

光电效应方程： $\frac{1}{2}mV_{max}^2 = hv - A$. A - 逸出功。

$I = Nhv$. N - 单位时间射到单位面积上的光子数 (光强 - 射到金属单位面积上的功率)。

解释 $i_m \propto I$. v - 定， $I \uparrow$, $N \uparrow$. 单位时间打出电子多，逸出电子 \uparrow , $i_m \uparrow$.

解释， $\frac{1}{2}mV_{max}^2 = hv - A \Rightarrow V_0 = \frac{h}{e}v - \frac{A}{e}$. 解释 V_0 . 产生光电效率 $hv > A$.
 $V_0 \propto v$ | $\frac{1}{2}mV_{max}^2 = eV_0$ | $\Rightarrow V_0 = \frac{A}{h}$.

解释瞬时：一个光子能量可以立即被金属中的一个电子吸收。
(因此总有金属发射电子数 = 吸收光子数)。

光的波粒二象性。

光子能量 $\epsilon = hv$.

光子质量 $m = \frac{hv}{c^2}$, $m_0 = 0$. (静止质量)

光子动量 $p = mc = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

光子理论基本关系式 $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = hv \\ p = \frac{h}{\lambda} \end{array} \right.$

波动性： λ, v

粒子性： ϵ, p .

$\lambda \uparrow$ / 阻碍物小 \rightarrow 波动性 \uparrow .

$\lambda \downarrow$ / 阻碍物大 \rightarrow 波动性 \downarrow

§3. 康普顿效应。（证明光子假说正确性，证实了 E 和 P 早在微观领域仍成立）

康普顿效应：X 射线在石墨上的散射。散射线上，除原波长 λ_0 外，还出现了 $\lambda > \lambda_0$ 的新散射线。

康普顿散射特点：1. 新波长 λ 随散射角 ψ 的 \uparrow 而 \uparrow .

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\psi)$$

$\lambda_c = 2.41 \times 10^{-3} \text{ nm}$. 中子的康普顿波长。

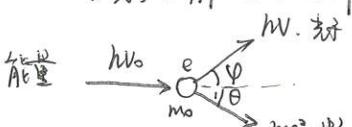
$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$. 仅与 ψ 有关，与散射物质无关，与入射线波长无关。

2. 当散射角 $\psi \uparrow$ 时，谱线强度 $I_{\lambda_0} \downarrow$, $I_{\lambda} \uparrow$.

解释： $\lambda = 0.1 \text{ nm}$ 的 X 射线， $\epsilon \approx 10^4 \text{ eV}$. 石墨中束缚电子束缚能 $\sim \text{eV}$. 热运动(室温下) $\sim 10^2 \text{ eV}$.

\hookrightarrow 相当于改变束缚的静止自由电子 (粒子性质相同，与散射物质无关)。

\Rightarrow 光子与静止自由电子弹性碰撞



$$\vec{p}_0 = \frac{h\nu_0}{c} \vec{e}_0$$

(动量守恒原则) \rightarrow 动量守恒。

$$\Delta E_{ke} = h\nu_0 - h\nu. (\text{入射X-散射X})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2. \\ \frac{h}{\lambda_0} \vec{e}_0 = \frac{h}{\lambda} \vec{e} + m\vec{v} \\ \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda} \cos\psi + mv \cos\theta \\ 0 = \frac{h}{\lambda} \sin\psi - mv \sin\theta. \end{array} \right.$$

解得 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\psi)$.

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

(与实验结果基本符合)。

△ 光子还可以与被原子核束缚的内层电子碰撞。

内层电子束缚能 $10^3 \sim 10^4 \text{ eV}$ ，不能视为自由电子，视为光子与整个原子的碰撞 $m_{\text{原子}} \gg m_{\text{光子}}$ 。
入射光子几乎不损失能量，散射光子波长不变。

△ $\Delta \lambda_m = 4.82 \times 10^{-3} \text{ nm} \ll \lambda$ 可见，用可见光实验难以偏移。

△ 康普顿效应中电子散射光子而不是吸收光子。

设自由电子吸收光子

$$\begin{cases} h\nu_0 + m_0 c^2 = mc^2 \\ \frac{h\nu_0}{c} \vec{e}_0 = mv \vec{e}_0 \\ m = m_0 / \sqrt{1 - (\gamma/c)^2} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{\nu}{c}} \Rightarrow v = c \quad (\text{实际粒子速度 } < c, \text{ 不可能})$$

比较：

康普顿：光子 $\xrightarrow{\text{碰撞}}$ 静止自由电子。完全弹性。X射线。要考虑相对论 $E_k = mc^2 - m_0 c^2$

光子 被吸收 $\xrightarrow{\text{吸收}} \text{一定束缚的电子。完全非弹性。可见/紫外光}$ $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

相对论力学 $m = m_0 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}$

基本方程 $\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$ 能量与动量 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = E_0^2 + p^2 c^2$

动能 $E_k = mc^2 - m_0 c^2 \rightarrow \text{粒子能量 } E = E_k + m_0 c^2$

质能方程 $E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\gamma/c)^2}} c^2$

§ 4. 玻尔的氢原子理论。

特征光谱，每一种原子的辐射都具有自己特定的频率。

氢原子光谱，不连续性：

波数 $\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ 可见光区的巴尔末公式 $R = \frac{4}{B} = 1.096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
 $(n=3, 4, 5, \dots)$ 里德伯常量。

$\sigma = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ 紫外区的赖曼系
 $(n=2, 3, \dots)$

$\sigma = R_H \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ 红外区， $a=3$ 帕邢， $a=4$ 布喇开， $a=5$ 青丰德
 $(n=a+1, a+2, \dots)$

… 里德伯方程（广义巴尔末/氢原子光谱经验）， $\sigma = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ $m=1, 2, \dots$
 $n=m+1, m+2, \dots$

玻尔的氢原子理论：

1) 定态假设，原子只能处于一系列离散的能量 E_1, E_2, \dots 在这些状态下，电子作加速运动，但不辐射能量，这些状态称为原子的定态。

2) 跃迁假设，原子在两个定态之间跃迁时，就吸/发射电磁辐射，其 $v = \frac{E_n - E_m}{h}$ ($E_n > E_m$)

3) 轨道角动量量子化假设，定态与电子绕核运动的一系列分立圆周轨道相对应，电子轨道角动量只能是 $(\frac{h}{2\pi})$ 整数倍。

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = nh \quad (\text{折合普朗克常量})$$

对氢原子：

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2} \\ L = m_e v_n r_n = n \frac{\hbar}{2\pi} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \\ r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} \right) \\ r_n = n^2 r_1 \end{array} \right.$$

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} - \text{玻尔半径.}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 + \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \right) = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) = \frac{E_1}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{基态能级 } E_1 = -13.6 \text{ eV. 激发态能级. } E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV. } (n=2, \text{ 第一激发态}, n=3, \text{ 第二激发态}, \dots)$$

电离能：把电子从氢原子玻尔轨道移到无穷远所需能量 $\Delta E = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV.}$

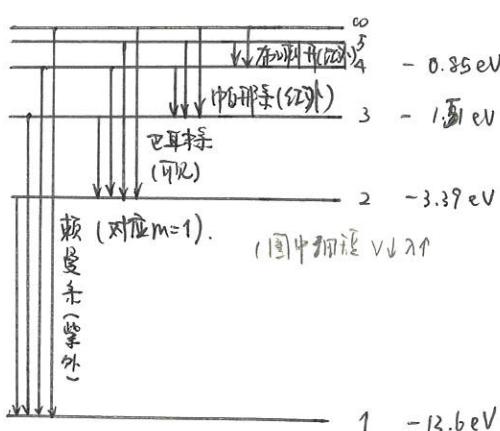
(E_1 最小，能量越低越稳定，基态最稳).

原子发光机制 - 能级跃迁.

$$V = \frac{E_n - E_m}{h}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{V}{c} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad - \text{与里德伯方程相一致.}$$

$$R_{\text{理论}} = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$



(m - 对应系

n - 对应跃迁起始能级).

若氢原子总数为 N , 且氢原子满足
玻尔能量分布:

$$n_f = n_i e^{-\frac{E_i - E_f}{kT}}$$

$$\sum n_i = N$$

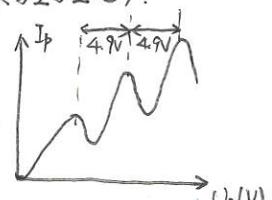
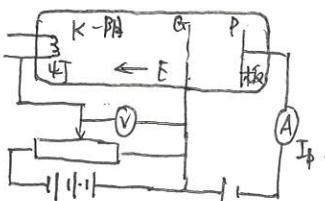
玻尔理论，解释了 H 和类 H 的光谱规律，不能说明较复杂原子的光谱。

但关于定态能级、轨道角动量量子化、原子发光机制（能级跃迁）在现代量子理论中仍正确。

弗兰克-赫兹实验（能级分立的实验验证）。

电子 \rightarrow 基态氢原子.

若原子能级分立，则电子能量成分损失



$$E_2 - E_1 = 4.9 \text{ eV.}$$

(正好跨过基态与第一激发态.
能级差 (Hg 原子))

(汞原子吸收电子跃迁, $I_p \downarrow$).

“成分损失”+“仅当 $E_k = \Delta E$ 时才激发”.

$E_k > \Delta E$ 时可激发，损失
的 ΔE 是“成分”的.

§5. 微观粒子的波粒二象性

经典力学 { 粒子. 有 v, m, e . 牛顿定律. 集中整体交换能量和动量

| 波动. "弥散"于整个空间的扰动; 叠加原理. 波动的干涉. 衍射等效应.

广延. 连续地交换能量和动量.

德布罗意假设: 光具有波粒二象性, -切实物粒子(静止质量 $m_0 \neq 0$ 的粒子)也具有波粒二象性.

物质波 (de Broglie 波). $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. $v = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$. -对所有实物粒子成立.

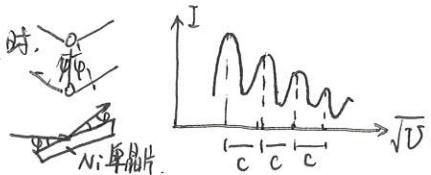
h 的意义: 量子化(不连续程度)的量度.

- 电子衍射 (证明实物粒子波动性)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad (\text{vcc}) \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \quad U - \text{加速电压.}$$

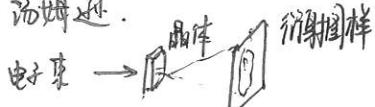
(1) 戴维孙-革末实验

当 $2d \sin \varphi = k\lambda$ 时, 有 I 的极大.
 $(\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\sqrt{U} = \frac{kh}{2d \sin \varphi \sqrt{2em}} = k \cdot C$$

(2) G. P. 汤姆逊.



(3) 赫森. 大量电子的单. 双. 多缝衍射实验.

微观粒子波粒二象性

{ 粒子性: 确定质量. 电量. 与物质相互作用的整体性.
 在空间以概率出现. 没有确定轨道.

波动性: 空间传播可叠加性. 干涉. 衍射.

不代表真实物理量的波动.

两种性质属于同一物体却不能同时表现出来.

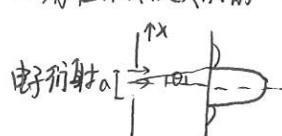
§6. 不确定关系.

波动性使微观粒子的坐标和动量(或能量和时间). 不能同时取确定值. -海森堡 (1927).

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (p_x - x \text{ 方向上的动量. } \hbar = \frac{h}{2\pi}, \text{ 手写} \sim)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{不能同时} \rightarrow 0)$$

- 存在不确定关系的一对物理量称为共轭物理量.



$$\Delta x = 0, \Delta p_x = p \sin \theta_1, \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}. \quad (-\text{波长及衍射角})$$

$$\Delta p_x = p \sin \theta_1 = p \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a^2}. \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = h. \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

(考虑波长极小 $\Delta p \uparrow$)

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} - \text{能级宽度与能级寿命的关系.}$$

ΔE - 能级(自然)宽度. 原子处于某能级状态的寿命为 τ (激发态, 不稳定, 寿命 τ 有限).

当原子处于基态, $\tau \rightarrow \infty$, $\Delta E \rightarrow 0$.

激发态 τ finite, $\Delta E \neq 0$. ($\tau \approx 10^{-8} s$, $\Delta E \approx 10^{-2} eV$).

ΔE 造成了原子发光时的 $\Delta \lambda$ (光谱中的谱线宽度).

不确定关系 \rightarrow 微观粒子永远不可能静止, 存在最小能量.

\rightarrow 宏观问题中, h 是可忽略小量, 不存在不确定关系. (h 可忽略, 区分宏观/微观).

Δ 求不确定量时, 两个 " Δ " 关系可通过求导给出

$$\text{例: } E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad dE = -\frac{hc}{\lambda^2} d\lambda. \Rightarrow \Delta E = \left| -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \right|$$

§7. 波函数及其统计诠释.

复函数 $\Psi(\vec{r}, t)$, 代表微观粒子的波函数.

对自由粒子, 不受任何外场作用, 则粒子位置 (令其运动方向为 x 轴).

$$E = \text{const.} \Rightarrow v = \frac{E}{h} \rightarrow \text{const.} \quad \text{自由粒子的波是平面单色波.}$$

$$p = \text{const.} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \rightarrow \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \text{其波函数 } \Psi &= \Psi_0 \cos(Et - kx) = \Psi_0 \cos\left(\frac{E}{h}t - \frac{P}{h}x\right) = \Psi_0 \cos\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)\right] \\ &= \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)}. \end{aligned}$$

$$\text{当粒子沿 } \vec{p} \text{ 方向运动时: } \Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}.$$

物质波并不像经典波那样代表实在物理量波动, 而是刻画粒子在空间分布的概率.

$$N \propto I \propto E^2. \quad \text{明亮} \begin{cases} \text{光强大 (波动)} \\ \text{粒子大 (粒子)} \end{cases} \Rightarrow \text{粒子在某处出现的概率和该处光强幅的平方成正比.}$$

$$\text{对复函数 } \Psi, |\Psi|^2 = \Psi \cdot \bar{\Psi} = \Psi. \quad (|\Psi|^2 \text{ 称为模方}).$$

某时刻空间某处体元 dV 中出现粒子的概率与 dV 及该处 $|\Psi|^2$ 成正比. $dP = |\Psi|^2 dV$.

波函数的模方代表粒子空间分布的概率密度. (对自由粒子, 全空间概率均等, $\Psi_0^2 = \text{const.}$)

波函数性质:

1. 波函数的归一化条件.

$$\int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (\text{这是个方程, 求 } \Psi \text{ 用: } \Psi_0 + \text{瞬}).$$

2. 波函数必须是单值、有限、连续的函数. (标准化条件).

3. $\Psi(\vec{r}, t)$ 无直接物理意义 (其模方有).

微观粒子的运动状态可由波函数完全描述. 波函数方程 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ 给出 t 时刻 \vec{r} 处发现粒子的概率密度. —量子力学基本原理(之二)

△ 波函数可以包含任意一个任意的系数因子. Ψ 和 $C\Psi$ 描述同一个概率波.

态叠加原理: 若 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 都是体系的可能状态, 那么它们的线性叠加也是这个体系的一个可能状态.

(即 $\Psi = \sum_n C_n \psi_n, \forall C_n \in \mathbb{C}$).

—量子力学基本原理(之二)

§8.薛定谔方程.

薛定谔方程是非相对论微观粒子的基本方程. (量子力学基本假设). —量子力学基本原理(之三).

引1. 对自由粒子. 质量 m , 运动 P_x .

非相对论下, $E = E_k = \frac{P_x^2}{2m}$. 波函数应当时薛定谔方程的解.

对波函数作微分 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi$. 有替换关系 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow E$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} P_x \Psi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{P_x^2}{\hbar^2} \Psi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow P_x \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \leftrightarrow P_x^2 \end{array}$$

$$\text{代入 } E = \frac{P_x^2}{2m} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \text{ 自由粒子一维时薛定谔方程.}$$

$$+ \text{一维势场 } U(x, t) \Rightarrow \text{总能量 } E = \frac{P_x^2}{2m} + U(x, t)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right] \Psi(x, t) \text{ 一维势场中的~}$$

$$\rightarrow \text{三维势场. } x \rightarrow \vec{r}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \nabla^2$$

$$\Rightarrow i\hbar \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t). \text{ 薛定谔方程.}$$

$$\text{引2. 哈密顿算符 } \hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right]. \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t). \sim \text{普遍形式.}$$

性质: (1) 复数 PDE. 其解是波函数 $\Psi(\vec{r}, t)$.

(2) 薛定谔方程是线性 PDE. 因此解的线性组合也是解 (对应态叠加原理).

(3) 不是指导是假设. 实验检验.

(4) 非相对论 \star .

定态薛定谔方程 (不含时)

定态问题：微观粒子势能函数 U 与时间 t 无关的问题。

$$\text{哈密顿量 } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}). \quad (\text{仍是算符, 不是量})$$

采用分离变量法 $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) f(t)$ 代入原方程，并整理 $(t - i\hbar\omega), r - im)$.

$$i\hbar \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{\psi(\vec{r})} [\hat{H} \psi(\vec{r})]$$

左边关于 t , 右边关于 \vec{r} . 对任意 t, \vec{r} 均有等式, 则两边必须等于同一个常量. ($\hbar = E$).

$$\begin{cases} i\hbar \frac{df(t)}{dt} = Ef(t) \\ \hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \end{cases} \Rightarrow f(t) = C e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad E: \text{代表粒子的能量.}$$

$$\rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{- 定态薛定谔方程}$$

方程的解依赖于 $U(\vec{r})$ 具体形式. (从数学上, 给定 E 就有解; 物理上只有特定的 E 才能使波函数单值、有限、连续)

特定的 E 称为能量的本征值; 对应的 $\psi_E(\vec{r})$ 叫本征函数; 定态薛定谔方程又称能量本征方程.

$$\text{定态波函数 } \psi_E(\vec{r}, t) = \psi_E(\vec{r}) f(t) = \psi_E(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

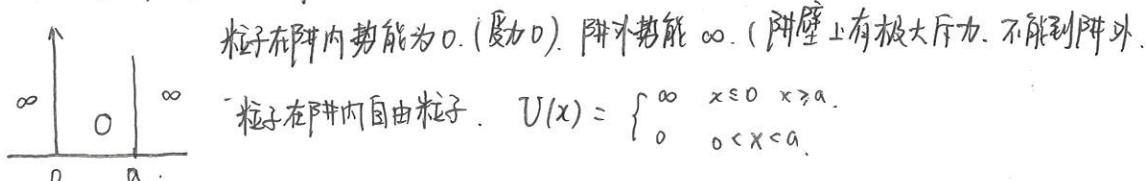
(波函数与 t 仍有关, 但有物质意义的模方与 t 无关, 故称“定态”- 粒子在空间相密度不随时而变化的状态)

§ 9. 一维定态问题.

$$\text{解方程 } \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = E \cdot \psi(x).$$

解出 E (能量). $\psi_E(\vec{r})$. \Rightarrow 能级分布、相密度分布.

1. 一维无限深势阱



解方程. (1) 阵外 $\psi(x) = 0$.

$$(2) \text{ 阵内. } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0. \quad \text{令 } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \neq 0.$$

$$\text{通解. } \psi(x) = A \cos kx + B \sin kx.$$

标准化条件 $\Rightarrow \psi$ 在 $x=0, a$ 是连续 $\Rightarrow A=0, B \sin ka=0 \Rightarrow B \neq 0, \therefore \sin ka=0$.

$$\Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar} = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2. (n=1,2,3,\dots)$$

(能量量子化是求解的自然结果,而非强行假设).

↑ 允取负. 但只用 n^2 . 天师谓.

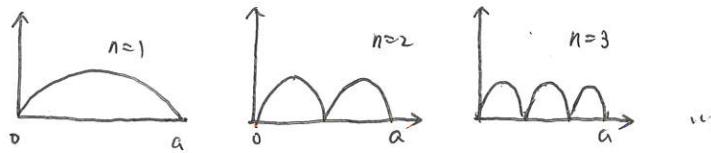
$$\psi_n = B \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Rightarrow \text{归一化条件 } B = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

$$\text{波函数 } \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & (n=1, 2, \dots), 0 < x < a, \\ 0 & x \leq 0, x \geq a. \end{cases}$$

$$\text{势阱中, 能量量子化. 基态 } E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \text{ 激发态 } E_n = n^2 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) \quad n=2,3,\dots$$

概率分布. $|\psi_n|^2 = [\psi_n(x)]^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a}$ 呈周期性. 不同能级分布不同.

$n \rightarrow \infty$ 时. 量子体系行为与经典体系一致. (对应原理).

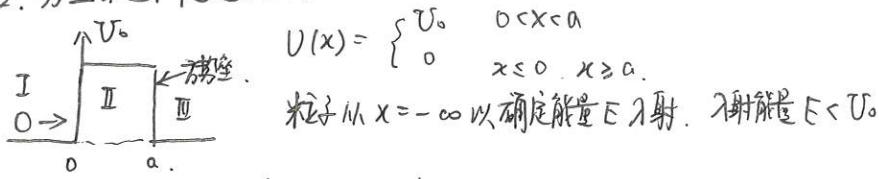


$$\text{粒子动量. } p_n = \sqrt{2mE_n} = n \frac{\pi \hbar}{a} = n \frac{\hbar}{2a}$$

$$\text{德布罗意波长. } \lambda_n = \frac{\hbar}{p_n} = \frac{2a}{n} \quad (\text{与两端固定弦中驻波相似, 势阱边界为波节})$$

- 势阱中波函数具有驻波形式. 物质波在势阱中形成驻波 (基态无节点, 激发态 n 个节点).

2. 势垒穿透和隧道效应.



$$\text{I区域 } \psi_1(x) = e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x} \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad |R|^2 \text{ 为反射率.}$$

\nearrow 反射 \downarrow 反射.

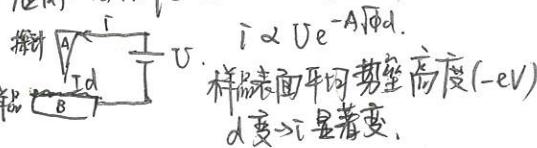
$$\text{II区域 } \psi_2(x) = A e^{k_2 x} + B e^{-k_2 x}. \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \quad \text{只有衰减波.}$$

$$\text{III区域 } \psi_3(x) = T e^{ik_3 x}. \quad \text{只有透射波. } k_3^2 = k_1^2 \quad |T|^2 \text{ 为透射率.}$$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1.$$

- 隧道效应是一种微观现象. 是粒子波动性的表现; 微观粒子有一定概率透过比其能量高的势垒; 对宏观尺度的粒子, 透过率为 0.

应用: 扫描隧道显微镜 (STM)



3. 例性谐振子.

取平衡位置, 坐标原点. 令其为势能零点.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad m. \text{ 粒子质量} \quad k. \text{ 弹簧劲度系数} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \text{ 谐振子角频率.}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \frac{1}{2}kx^2) \psi = 0.$$

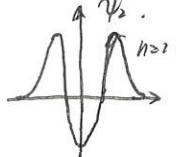
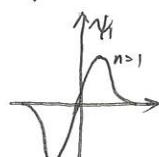
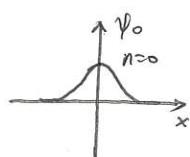
$$(1) E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega = (n + \frac{1}{2}) \hbar\nu. \quad n=0, 1, \dots \quad \text{量子化, 能量简并 } \Delta E = \hbar\nu. (\text{与黑体辐射理论相同}).$$

有零点能 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\nu$ (不可能静止, 符合不确定关系). $\rightarrow n \rightarrow \infty, \frac{\Delta E}{E_n} \rightarrow 0$. 能量连续 (对应原理).

$$(2) \psi_n(x) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x). \quad (\text{不用 } \psi)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}} \quad A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

H_n . 伯努利多项式.



↑ 奇-波函数奇 $\rightarrow \psi_{2l+1}$ 偶函数.

↑ 偶-波函数偶 $\rightarrow \psi_{2l}$ 奇函数.

源于势能函数空间反演不变性 $U(-x) = U(x)$

(3) 概率密度. 概率在 $|E| > U$ 仍有分布. (隧道效应).

经典粒子. (平衡位置概率小, 两端大. "v平-max, 3P快离开, 概率小")

n小时. $x=0$ 概率大. $\rightarrow n \rightarrow \infty, \rightarrow$ 经典-致 (对应原理)

§10. 氢原子的量子理论.

氢原子中电子的势能函数为 $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ (不随 r 变, 定态).

$$\Rightarrow \text{其薛定谔方程. } \nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

$$\text{极坐标化: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

分离变量 $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$. 整理. 两边恒等 $\Rightarrow \lambda$

$$\text{解方程 (1) } E_n = -\frac{1}{2} \frac{me^2}{(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2} \quad n=1, 2, \dots$$

$R = R_{nl}(r)$ 径向波函数.

$$(2) \lambda = l(l+1) \quad l=0, \dots, n-1$$

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad l=0, \dots, n-1.$$

$$L_z = m_l \hbar \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

$Y = Y_{lm}(r, \theta, \varphi)$ 角向波函数.

根据波函数标准化条件，得出：

1. 主量子数 n . 能量量子化.

$$\text{基态 } E_1 = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV.}$$

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

2. 角量子数 l . 轨道角动量量子化.

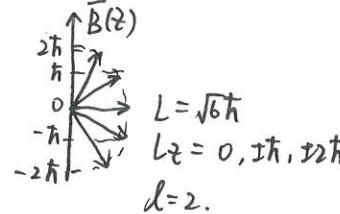
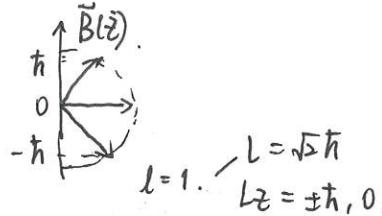
(图)

电子绕核运动角动量大小为 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, $l \in [0:n-1]$.

- 同时也使电子能量有一定跃迁，产生附加能量。
(即能量与 n, l 均有关).

3. 磁量子数 m_l . 轨道角动量空间取向量子化.

轨道角动量在外磁场方向投影 $L_z = m_l \hbar$, $m_l \in \{0, \pm 1, \dots, \pm l\}$.



空间取向：角动量方向与外磁场夹角可能值.
 $\Theta = \cos^{-1} \frac{L_z}{L}$

氢原子中电子的稳定状态决定于一组量子数 n, l, m_l . (量子数 \rightarrow 波函数 \rightarrow 稳定状态).

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \varphi).$$

若 n 确定， $l - n$ 个值, $m_l - 2l+1$ 个值. \Rightarrow 同一能级(n)有不同状态的情形叫简并
(同一能级各种不同状态称为简并态. 同一能级不同状态数目称为简并度).

$$n, l, m_l \text{ 简并度 } 2l+1. \quad n \text{ 定, 简并度 } f_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

电子概率密度.

$$P_{nlm_l}(\vec{r}, \theta, \varphi) = |\psi_{nlm_l}(\vec{r}, \theta, \varphi)|.$$

定义立体角 $d\Omega = \frac{ds}{r^2}$ (球面, $\Omega = \frac{s}{r^2} = 4\pi (sr)$).

单位：球面度 (sr)

$$P_{nlm_l} dV = |\psi_{nlm_l}|^2 dV \quad dV = r^2 dr d\Omega. \quad \Omega: 0 \rightarrow 4\pi$$

$$\text{根据归一化条件. } \int_{\infty} |\psi_{nlm_l}|^2 dV = \int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \int_0^{4\pi} |Y_{lm_l}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1.$$

(都是概率 ≤ 1 . 因为 $\sum = 1$)

径向概率密度: $P_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2$.

角向概率密度: $P_{lm}(\theta, \varphi) = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2$.

与玻尔氢原子理论对比:

1. 能级 - 轨道 \times 状态 \checkmark .

3. 空间取向, 概率密度 \times .

2. 角动量 量子化 \checkmark , 表达式 \times .

§11. 电子的自旋

斯特恩-格拉赫实验

- 电子绕核运动

磁矩 $M = iS$ (i - 电流 S - 载流线圈面积)

$$i = \frac{e}{T} = \frac{eV}{2\pi r}, \quad M = \frac{e}{2m} \vec{v}r = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

$$\text{矢量式: } \vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

角动量量子化 \rightarrow 磁矩量子化. $M_z = -\frac{e}{2m} L_z = -m_l \frac{e\hbar}{2m}$

$\Rightarrow M_z$ 有 $2l+1$ 种取值. 令原子通过非均匀磁场. 原子轨迹有 $2l+1$ 个取值.

实验结果: 一束原子射线(基态)通过不均匀磁场分裂成两束.

矛盾: 基态: $n=1, l=0$. 应只有一条衍射线. $\Rightarrow n, l, m_l$ 对电子运动描述不完全.

假设: 电子具有固有的角动量(自旋角动量 \vec{S} , 自旋磁矩 $\vec{\mu}_s$).

$$|\vec{S}| = S = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad s - \text{量子数}$$

自旋角动量在空间取向也量子化. 根据实验 $2s+1=2 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$.

电子自旋磁量子数 $m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow S = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad \left. \right\} \text{始终只能取这2个值.}$$

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2}$$

- 电子自旋是电子一种“内禀”运动.

描述原子中电子的4个量子数 $+m_s$. (s 是定值, 不对应可能状态)

§12. 原子的壳层结构

电子以4个量子数为标志的可能状态数

$$\begin{cases} n, l, m_l, = & m_s \text{ 2个.} \\ n, l & = m_l, m_s, (2l+1), \uparrow \rightarrow \text{组成一个次壳层. (每个 } l \text{ 对应一个次壳层).} \\ n & = l, m_l, m_s, 2n^2 \text{ 个} \rightarrow \text{组成一个壳层. (每个 } n \text{ 对应一个壳层).} \end{cases}$$

壳层: $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ 决定着电子的能量.

K, L, M, N, O, P, ... 壳层 (每壳层最多容纳 $2n^2$ 个电子)

次壳层: $l=0, 1, 2, 3, 4, 5$

s, p, d, f, g, h. 次壳层 (每次壳层最多容纳 $2(2l+1)$ 个电子).

— 电子在原子中的分布具有周期性的壳层结构. 电子分布遵从:

1. 泡利不相容原理. 在一个原子系统中. 不可能有 ≥ 2 个电子具有相同状态 (即 n, l, m_l, m_s 不能完全相同).

2. 能量最低原理. 原子系统处于正常状态时, 每个电子趋向占有最低的能级.

电子态表示: 例: $n=2 \quad l=1. \quad 2p$ 能量基本上取决于 n . 但能级也和 l 有关.

$n=2 \quad l=0. \quad 2s.$

对同一壳层 l 越大. 能量越高. 导致不同壳层的次壳层能量交错.

电子填充表示: $nl^x \leftarrow$ 电子数 (每个次壳层). $1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^6 \ 3d^{10} \ 4s^2 \dots$
 主 \leftarrow 层 (副) $n=1 \quad \{ l=0 \quad 1s^2 \quad n=3 \quad \{ l=0 \quad 3s^2$
 $n=2 \quad \{ l=0 \quad 2s^2 \quad \quad \quad \quad \quad l=1 \quad 3p^6$
 $l=1 \quad 2p^6 \quad \quad \quad \quad \quad \quad l=2 \quad 3d^{10}$

在某些情况. n 较小的壳层未填满. 而 n 较大开始填. 经验公式. $n + 0.7l$. 确定能级高低

电子排布. 例. K $Z=19. \quad 1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^6 \ 4s^1$ ($3d = 3 + 0.7 \times 2 = 4.4 > 4s = 4$.)

特别 Cu $Z=29 \quad 1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^6 \ 3d^{10} \ 4s^1$ (Cu 的 $3d$ 能量低于 $4s$).

第16章 分子与固体 (理解概念)

固体	晶体	分子或原子严格按周期性排列.
	非晶体	分子或原子的排列完全无序.
	准晶体	介于晶体与非晶体之间.

1. 化学键.

化学键：原子间存在的一种相互吸引，能把原子结合能成分子的相互作用。

键能：化学键形成时所释放的能量。

解离能：破坏化学键所需的能量。

(1) 离子键：阴、阳离子间的静电力而结合成分子的化学键。

特点：实质静电引力，作用强，键能大。 $(150-400 \text{ kJ/mol})$ ，所带电荷大，间距小，键能大。
无方向性，与任何方向的电性不同的离子相吸引。无饱和性。

性质：熔点高，硬度均较高，良好导电液体。

(2) 共价键：原子间通过共享电子而产生的化学结合作用。

特点：有方向性，使分子具有特定的几何形状；有饱和性和耗程性。
键能与离子键差不多。

性质：熔点高，质硬，脆，导电能力差。

分类(按共用电子数)： $\text{H}-\text{H} / \text{H}: \text{H}$ $\text{O}= \text{O}$ $\text{N} \equiv \text{N}$

(3) 金属键：金属中的自由电子与金属正离子之间的结合。

(金属原子最外层电子少(价电子)，极易摆脱原子核束缚而成为自由电子)。

特点：电子共用化，无饱和性，无方向性，形成低能量密堆积结构。

性质：良好导电，导热性能，金属光泽和延展性好。

2. 分子间作用力。

(1) 范德瓦尔斯力：中性分子或原子间一种弱的电性吸引。

来源：极性分子的永久偶极矩的相互作用。特点：键能小。 $\sim 20 \text{ kJ/mol}$ 。

分子极化产生诱导偶极矩的吸引作用。

无方向，无饱和性。

瞬时偶极矩的伦敦力/色散力。

不属于化学键，但可影响物质性质。

(2) 氢键：H与F、O、N以共用电子对形成极性共价键，共用电子偏向外层电子数多的原子。

氢原子核与另一分子中的F、O、N这些未共用电子产生静电吸引力。

表示： $X-H \cdots Y$ 。

特点：键能17~25 kJ/mol。对物质性质影响显著。

具有方向性和饱和性；同时具有离子、共价键和范德华力的部分特征。

影响：可使物质熔沸点显著↑。

极性溶剂中，分子间氢键形成使溶解度↑，分子内氢键使溶解度↓。

生命体中氢键维持大分子构象，保持一定生物活性。

“方向性”指整体上

在晶体结构中具有。

-八个特定方向，不是单个键的方向。

§ 3. 晶体结构。

晶格：原子或分子在晶体中“长程有序”的规则排列。 \Rightarrow 晶体粒子（通过结合在平行直线上和垂直面上）

晶体特征：(1) 固定的熔点。

(2) 各向异性。

基元+点阵 = 晶体结构。

\hookrightarrow 规则，周期性结构单元 \rightarrow 可用结点表示基元位置（在考察空间结构时）。

晶格周期性（平移对称性） $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$, $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

选择最小六面体，其三边基矢为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ；晶格平移 \rightarrow 原来晶格重合。

晶系（7大晶系，14种点阵类型）。

§ 4. 晶体分类（按力的作用类型）

(1) 离子晶体。

形成：离子键结合。特性：硬度较大，稳定性较好，熔点较高，挥发度较低。

例：NaCl。（面心立方）。

(2) 原子晶体。

形成：非极性原子共价键。特性：熔点高，硬度大，导电性差，化学性质稳定。

例：金刚石。

(3) 金属晶体。

特性：不透明，导电导热，有延展性。

(4) 分子晶体 (中性分子靠范德华力相互吸引)

特点：硬度小，熔点低，挥发性大，不导电。

例： CO_2 。

(5) 氢键晶体。

例：冰的晶体结构。

3.5. 能带理论。

(1) 固体问题的简化。

绝对近似：内层电子 + 原子核 \rightarrow 离子实，视为静止。

离子实，电子分成两个子系统。

单电子近似：每个电子是在固定的离子势场以及其它电子的平均场中运动

称为周期势场

晶体的状态：离子实运动 + 电子运动。
 \rightarrow 晶格动力学 \rightarrow 固体能带理论。

(2) 能带的形成。

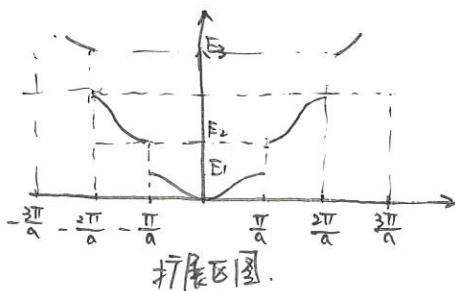
能级分裂：两个氢原子靠近，由于相互作用，能级分裂成双线。

多个氢原子 \rightarrow 每个能级变成含有 N 个能量值很近的带状能级 - 能带。

固体的能带：每个原子都受到周围原子势的作用，电子不再属于某个原子，而是在晶体中做共有化运动。这些电子原有的能级分裂成许多子能级，扩展成能带。

允许能量构成能带，产生能隙（越过能隙需外做功，同一带中可自由运动）。

能带表示 $E_n(k)$ ， n - 能带符号， k - 波矢（波传播方向，值为 $\frac{2\pi}{a}$ ）



能带性质： $E_n(k) = E_n(k + n \frac{2\pi}{a})$ (周期性重复)

*能带可测量也可计算。

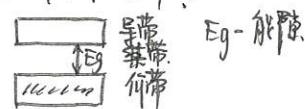
$$E_n(k) = E(-k)$$

每个能带内有 N 个连续量子能级；每个能级可以填充自旋相反的两个电子。

能带中允许填充 $2N$ 个电子。（由此可分为空带、满带、未满带）

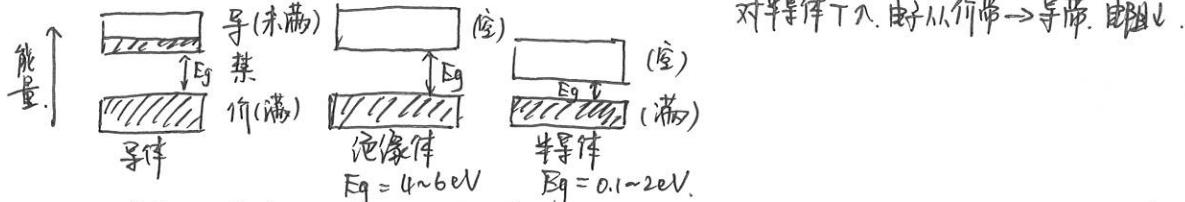
价带：价电子所在能带（满/未满带）。

导带：能带中电子具有导电性。



§ 6. 导体、绝缘体、半导体

区分 - 能带差距.



对半导体注入电子从价带 \rightarrow 导带，电阻 \downarrow .

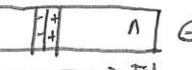
*一个完全填满的能带施加场也不可能形成电流，当能带未满时，外电场可使电子运动状态变化，产生电流。



P-n结：内势电场 \leftarrow 阻止空穴 \rightarrow ，电子 \leftarrow ；平衡后有 U_{np} .



(界面-) 空穴 \rightarrow 电子 (界面+) .

④ P  n ④
使空穴、电子继续运动，可导电。

④  ④
阻碍空穴、电子继续运动，不导电。