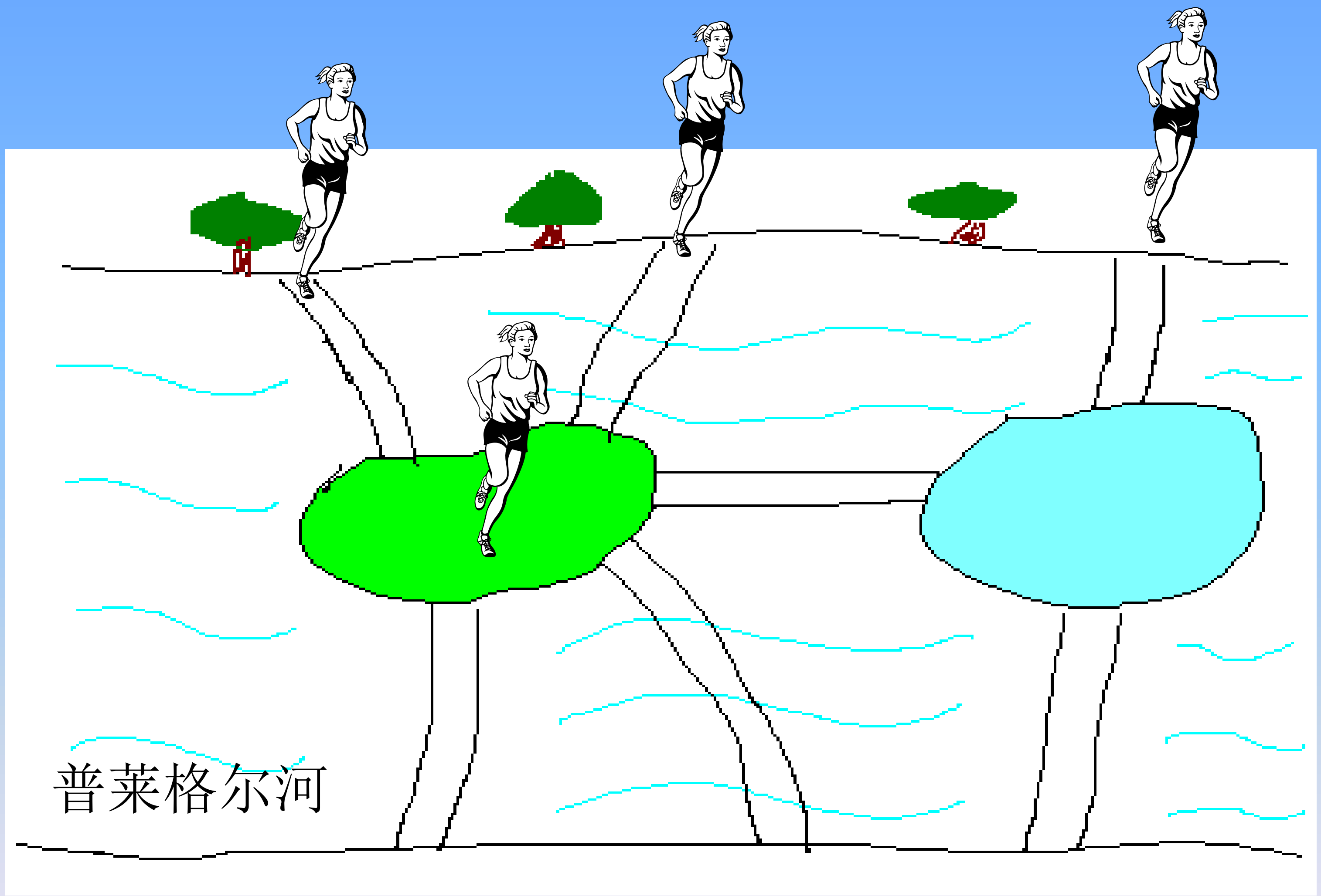
欧拉回路与中国邮递员问题

Euler circuit and Chinese Postman Problem

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

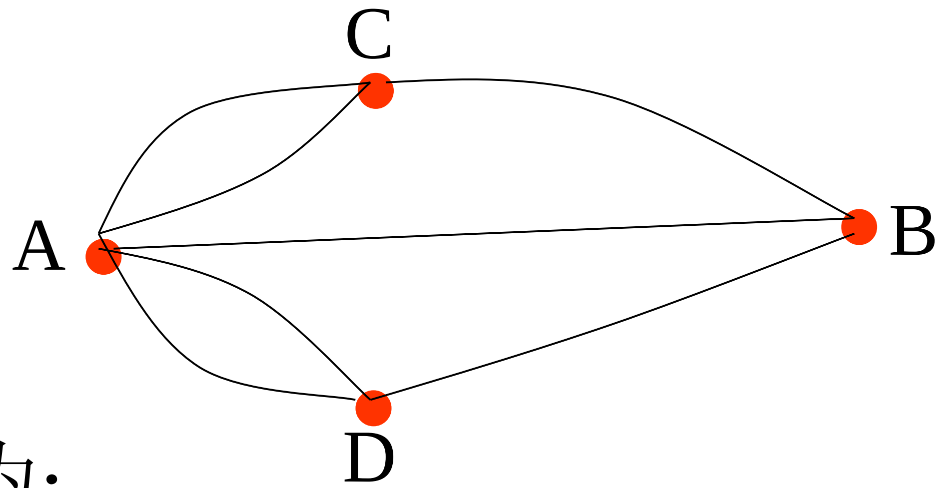
※歌尼斯堡七桥难题



七桥问题的数学模型：

用A、B表示两座小岛，C、D表示两岸，

连线AB表示A、B之间有一座桥。



问题简化为：

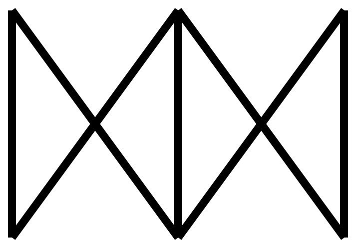
在该图中，从任一点出发，能否通过每条线段一次且仅仅一次后又回到原来的出发点

结论：不存在这样一种走法。

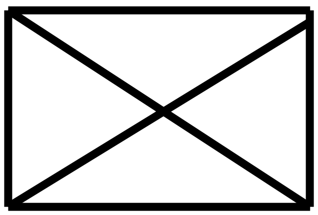
类似的问题：一笔画问题

图的一笔画：

可一笔画



不可一笔画



字的一笔画：如“中、日、口、串”等可一笔画

而：“田、目”等不能一笔画

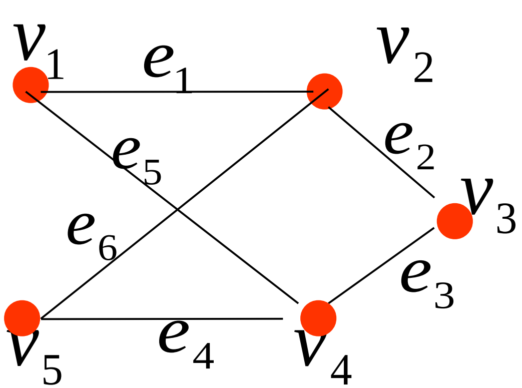
6.6.1 欧拉图与中国邮递员问题

开链

- 欧拉道路：

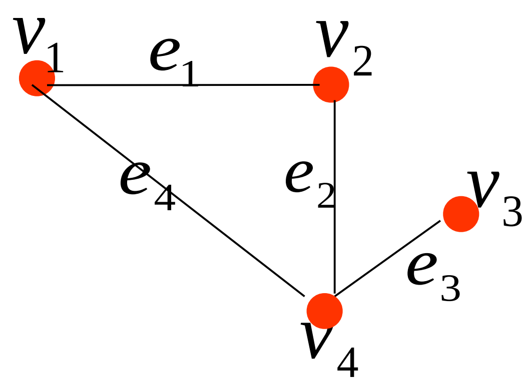
一笔画问题

设G是一个无向连通图，若存在一条道路，经过G中的每一条边一次且仅一次，则称这条道路为欧拉道路



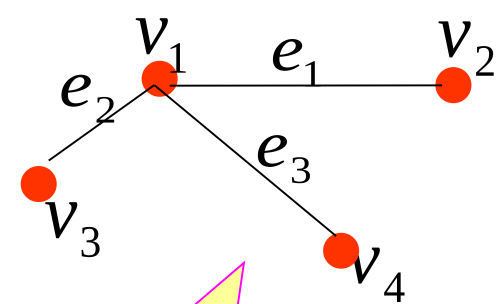
存在v_2到v_4的一条欧拉道路：

$\{v_2,e_1,v_1,e_5,v_4,e_3,v_3,e_2,v_2,e_6,v_5,e_4,v_4\}$



存在v_3到v_4的一条欧拉道路：

$\{v_3,e_3,v_4,e_2,v_2,e_1,v_1,e_4,v_4\}$



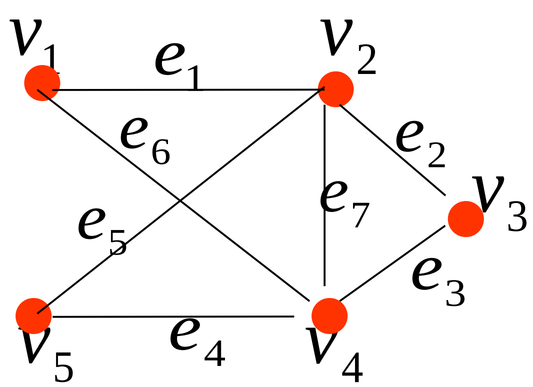
任两点之间都不存在欧拉道路

• 欧拉回路：

欧拉图

圈

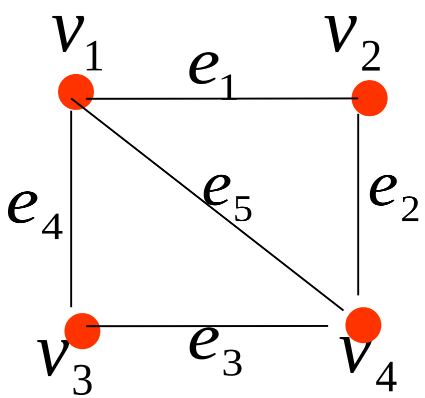
设G是一个无向连通图，若存在一个回路，经过G中的每一条边一次且仅一次，则称这个回路为欧拉回路



存在欧拉回路：

$$\{v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_7,v_2,e_5,v_5,e_4,v_4,e_6,v_1\}$$

该图特点：$d(v_i)$均为偶数



该图不存在欧拉回路

存在奇点

定理 无向连通图G为欧拉图的充要条件是G中无奇点

证明：必要性

已知G=（V,E)为欧拉图，即存在一条欧拉回路C，

C经过G的每一条边，由于G为连通图，

所以G中的每个点至少在C中出现一次

对$\forall v_i \in V$

若v_i是C的中间点，v_i每出现一次，必关联两条边

如C：$\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \cdots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, e_i, v_{i+1}, \cdots, v_1\}$

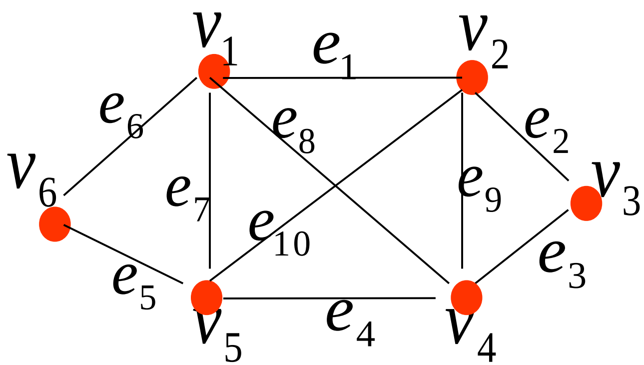
$\therefore d(v_i)$为偶数，即v_i为偶点

若v_i是C的起点，v_i也是C的终点，v_i必关联两条边

$\therefore d(v_i)$为偶数，即v_i为偶点

充分性:若无向连通图G=(V,E)中无奇点，则G为欧拉图

例: G连通, $d(v_i)$为偶数



G

任取一点，如v_3，找一个以v_3为起点的一个简单回路C_1

简单回路C_1:$\{v_3, e_3, v_4, e_9, v_2, e_2, v_3\}$

记$G' = G - C_1 =$（V'，E'），$E' = E - E_1$，V'是E'中边的端点

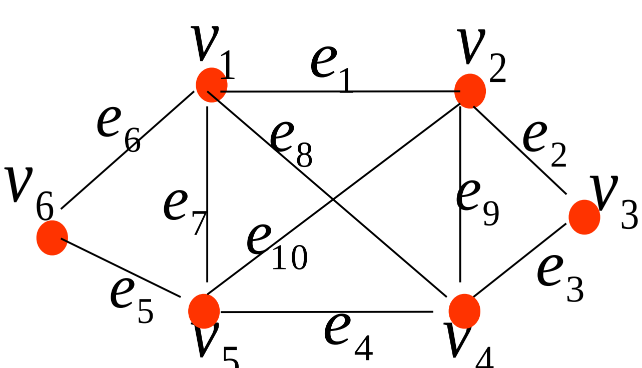
在G'中，以G'与C_1的公共顶点v_2为起点取一个简单回路C_2

简单回路C_2:$\{v_2, e_{10}, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1, e_1, v_2\}$

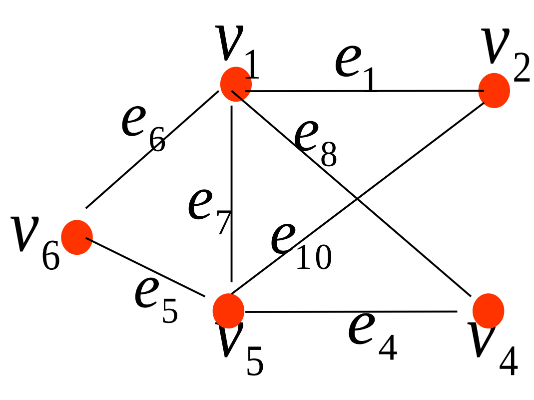
记$G'' = G' - C_2 =$（V''，E''），$E'' = E' - E_1$，V''是E''中边的端点

在G''中，以G''与C_2的公共顶点v_1为起点取一个简单回路C_3

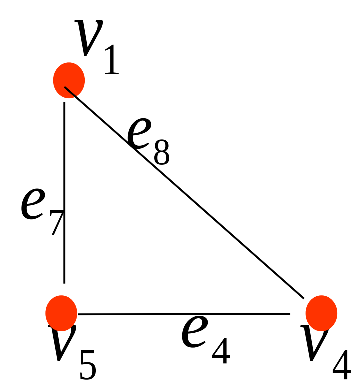
简单回路C_3:$\{v_1, e_7, v_5, e_4, v_4, e_8, v_1\}$



G



G'

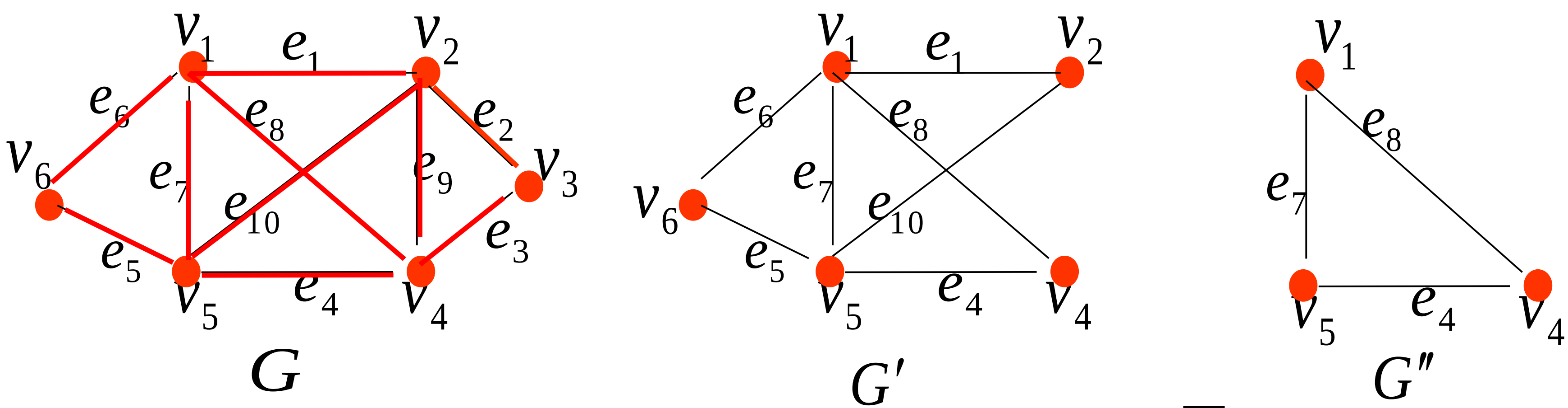


G''

简单回路C_1:$\{v_3, e_3, v_4, e_9, v_2, e_2, v_3\}$

简单回路C_2:$\{v_2, e_{10}, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1, e_1, v_2\}$

简单回路C_3:$\{v_1, e_7, v_5, e_4, v_4, e_8, v_1\}$



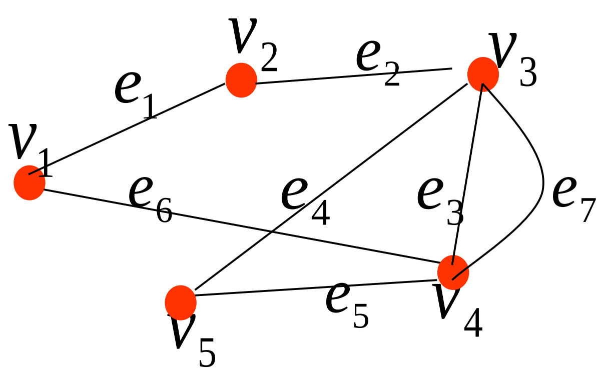
把C_3从C_2的v_1点处插入C_2，得一简单回路$\overline{C}$,

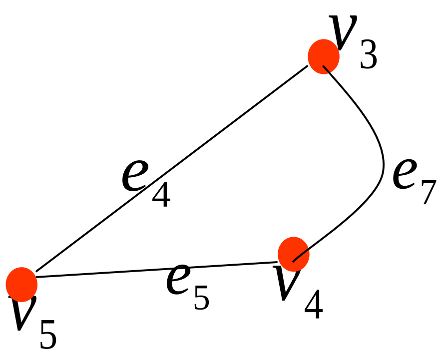
$\overline{C}$:$\{v_2, e_{10}, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1, e_7, v_5, e_4, v_4, e_8, v_1, e_1, v_2\}$

再把$\overline{C}$从C_1的v_2点处插入C_1，即得所求欧拉回路:

$$\{v_3, e_3, v_4, e_9, v_2, e_{10}, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1, e_7, v_5, e_4, v_4, e_8, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3\}$$

例：判断下图是否为欧拉图，若是，求出欧拉回路





C_1：$\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_6, v_1\}$

C_2：$\{v_3, e_7, v_4, e_5, v_5, e_4, v_3\}$

欧拉回路：

$\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_4, e_5, v_5, e_4, v_3, e_3, v_4, e_6, v_1\}$

推论 无向连通图G有欧拉道路的充要条件是G中恰有两个奇点

证明：充分性：设v_i, v_j是G的奇点，

在G上增加一条边$e=(v_i, v_j)$，

则G'中无奇点，所以G'存在欧拉回路C

去掉C中的边e，即得以v_i为起点，v_j为终点的欧拉道路

必要性：设G有一条以v_i为起点，v_j为终点的欧拉道路L

在G上增加一条边$e=(v_i, v_j)$，得连通图G'，

把边e加到L中得G'的一条欧拉回路C，即G'为欧拉图

$\therefore d(v)$为偶数，$v \in G'$

⇒ 在G中，，$d(v_i), d(v_j)$为奇数

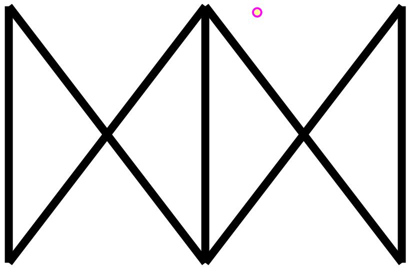
一笔画问题：

1、一个连通图的顶点都是偶点，没有奇点，则该图可以一笔画出 （从任一点出发均可）

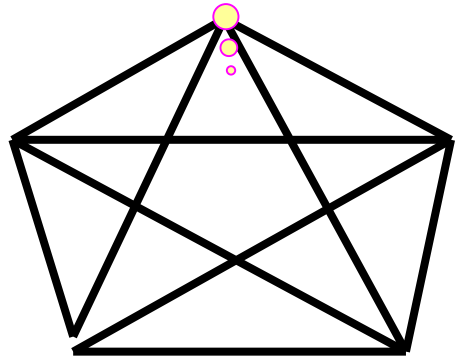
2、一个连通图的顶点恰有两个奇点，其余均为偶点，则从任一奇点出发，可以一笔画出该图，而终点则是另一个奇点。

3、一个连通图的顶点有两个以上的奇点，则该图不能一笔画出

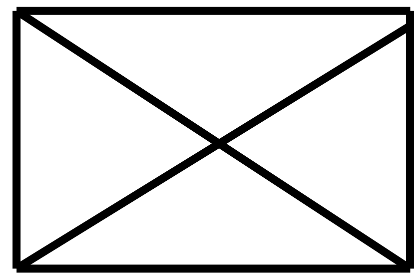
可一笔画



可一笔画



不可一笔画



可一笔画

中

可一笔画

日

不可一笔画

白

不可一笔画

田

回

不连通

哈尔滨工业大学运筹学研究所

6.6.2 中国邮路问题

提出问题的人：管梅谷教授

时间：1962年

提出的问题：

一个邮递员从邮局出发分送邮件，要走完他负责投递的所有街道，最后再返回邮局，应如何选择投递路线，才能使所走的路线最短？

邮路问题的图论描述：

取一无向赋权连通图G=（V，E）

E中的每一条边对应一条街道

每条边的非负权l(e)=街道的长度

V中某一个顶点为邮局，其余为街道的交叉点

在G上找一个圈，该圈过每边至少一次，且圈上所有边的权和最小

邮路问题的图论描述：

在无向连通赋权G =（V，E）上找一个圈，

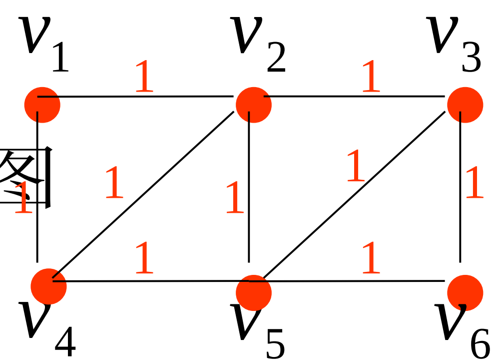
该圈过每边至少一次，且圈上所有边的权和最小

1、若G中的顶点均为偶点 ， 即G中存在欧拉回路，
则该回路过每条边一次且仅一次，
此回路即为所求的投递路线

2、G中有奇点：不存在欧拉回路

投递路线：至少有一街道要重复走一次或多次

例：设G为邮路图，其中v_1为邮局



$\because d(v_3), d(v_4)$为奇数, G不是欧拉图

$\therefore G$不存在欧拉回路，

即不存在每条街道走一次且只走一次的投递路线

路线C_1：$v_1v_2v_3v_6v_5v_4v_1v_2v_3v_5v_2v_4v_1$ 权和$=12$

路线C_2：$v_1v_4v_2v_4v_5v_3v_6v_5v_2v_3v_2v_1$ 权和$=11$

路线C_2优于路线C_1

重复边

分析：路线C_1重复走过边：（v_1，v_2），（v_2，v_3），（v_1，v_4）

重复边的权和$=3$

路线C_2重复走过边：（v_2，v_4），（v_2，v_3）

重复边的权和$=2$

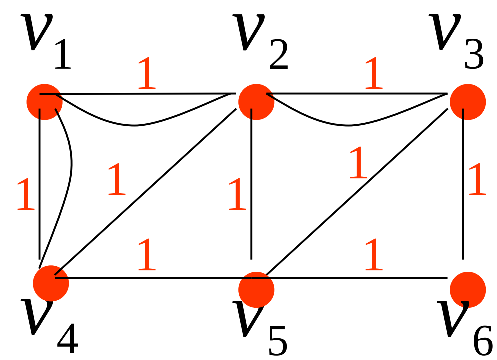
结论：

选择最佳投递路线=选择重复边的权和最小的路线

对路线C_1：$v_1v_2v_3v_6v_5v_4v_1v_2v_3v_5v_2v_4v_1$

重复边：（v_1，v_2），（v_2，v_3），（v_1，v_4）

G_1为欧拉图,且C_1为G_1的一条欧拉回路

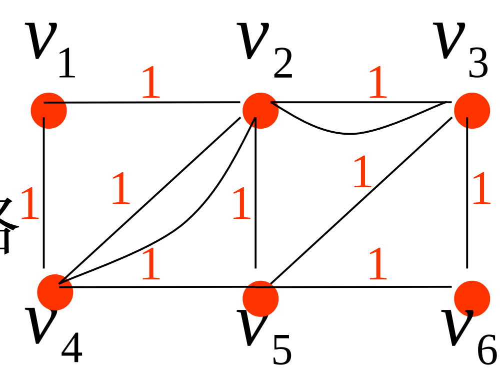


G_1

对路线C_2：$v_1v_4v_2v_4v_5v_3v_6v_5v_2v_3v_2v_1$

重复边：（v_2，v_4），（v_2，v_3）

G_2为欧拉图,且C_2为G_2的一条欧拉回路



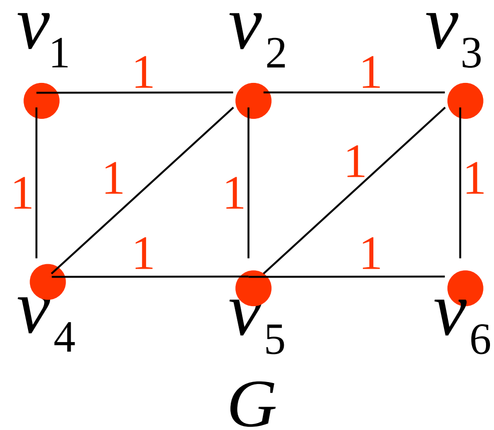
G_2

⇒ 一条投递路线对应一个欧拉图

且投递路线为该图的一条欧拉回路

反之，对邮路图G，

任取奇点v_4到v_3的一条链

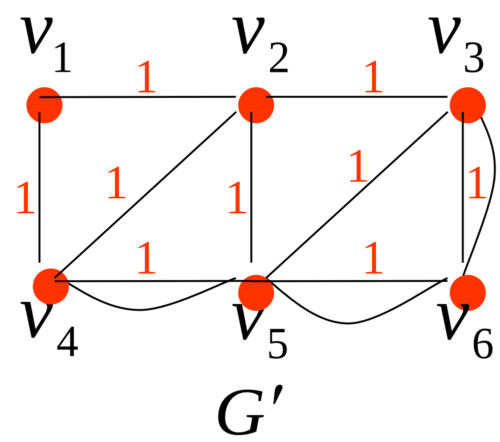


如：v_4, v_5, v_6, v_3

对该链上的每一条边增加一条重复边

G'为欧拉图，即G'存在欧拉回路

即G'对应一条投递路线C



C：$v_1 v_2 v_3 v_6 v_3 v_5 v_6 v_5 v_2 v_4 v_5 v_4 v_1$

投递路线 ⟷ 欧拉图

结论：对任意一个含奇点的邮路图G，由于奇点的个数为偶数个，把每两个配成一对，由于G为连通图，每对奇点之间至少存在一条链，对该条链上的每一条边增加一条重复边，可得一欧拉图，该欧拉图对应一条投递路线

寻找最佳投递路线方法：

在原邮路图上增加一些重复边得一个欧拉图，，在所得欧拉图上找出一条欧拉回路。计算重复边的权和，重复边权和最小欧拉回路既为所求的最佳投递路线

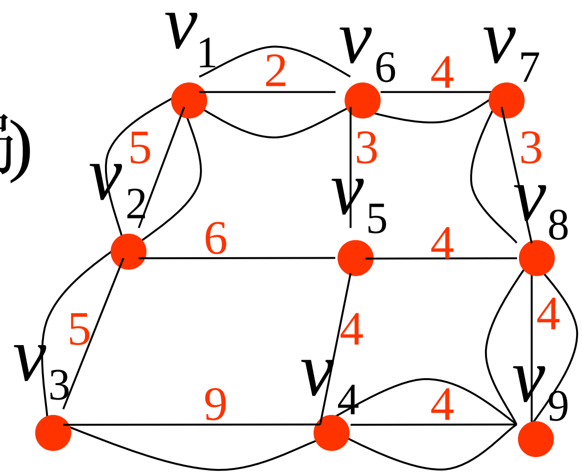
管梅谷——奇偶点图上作业法

奇偶点图上作业法：

例：求解右图所示的邮路问题 (v_1为邮局)

第一步：确定一个初始可行方案

方法：检查图G中是否有奇点



无奇点：图G已是欧拉图，找出一条以v_1为起点的欧拉回路，该回路就是最佳投递路线

有奇点：把所有奇点两两配成一对，每对奇点找一条链，在该条链上的每一条边增加一条重复边，得一个欧拉图G_1，由G_1所确定的欧拉回路即为一个可行方案

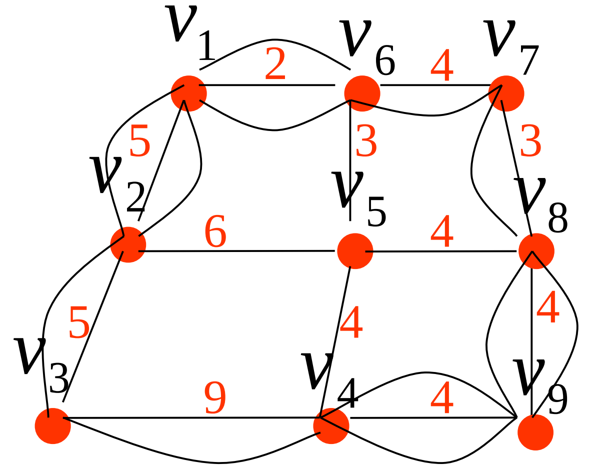
G中有奇点：v_2，v_4，v_6，v_8

取v_2到v_4的一条链：$v_2v_1v_6v_7v_8v_9v_4$

取v_6到v_8的一条链：$v_6v_1v_2v_3v_4v_9v_8$

G_1是欧拉图，重复边权和= 51

显然G_1不是最佳方案



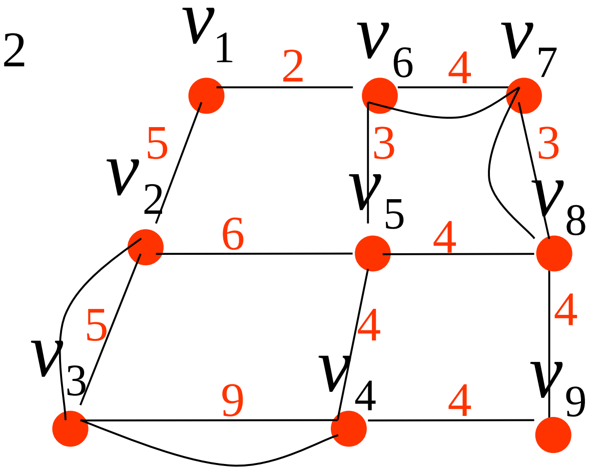
G_1

第二步：调整可行方案，

使重复边权和下降

步骤1、若图中某条边有两条或多于两条的重复边同时去掉偶数条，使图中每一条边最多有一条重复边可得到重复边权和较小的欧拉图G_2

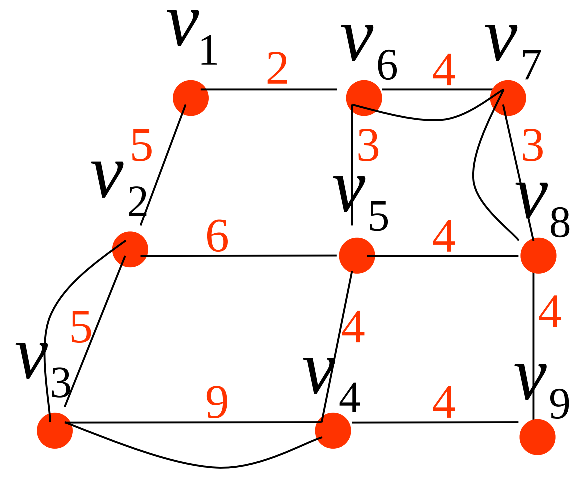
G_2的重复边权和= 21



G_2

G_2是欧拉图，

重复边权和=21



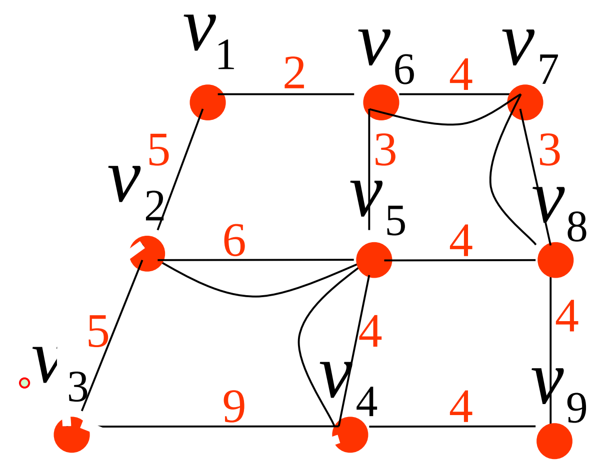
G_2

2、使图中每个初等圈重复边的权和不大于该圈权和的一半

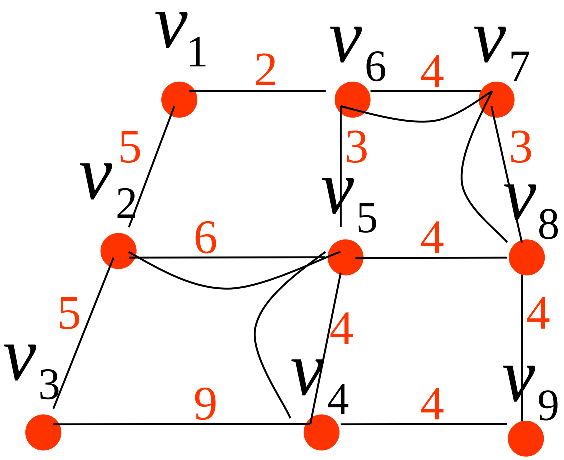
G_3是欧拉图，

重复边权和=17

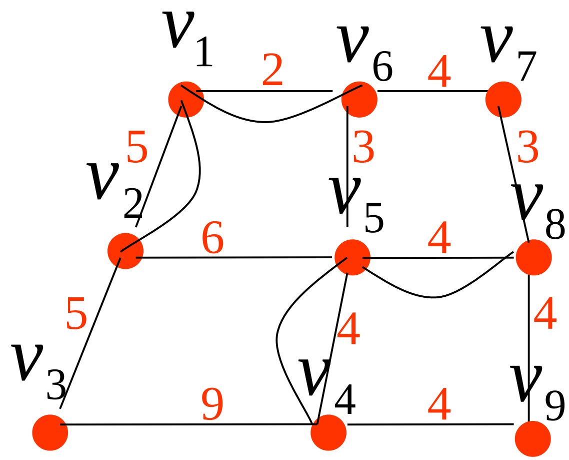
9个初等圈



G_3



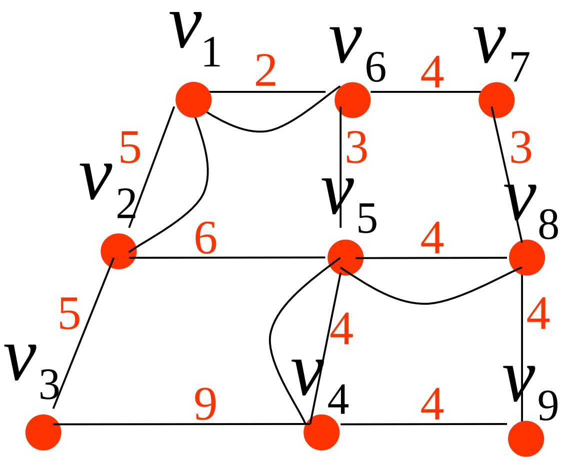
G_3



G_4

G_3的初等圈	权和	重复边权和	
（1） $v_1v_2v_5v_6v_1$	16	6	√
（2） $v_6v_5v_8v_7v_6$	14	7	√
（3） $v_2v_3v_4v_5v_2$	24	10	√
（4） $v_5v_4v_9v_8v_5$	16	4	√
（5） $v_1v_2v_5v_8v_7v_6v_1$	24	13	×

G_4



G_4是最佳方案

最佳投递路线：

$v_1v_2v_3v_4v_5v_2v_1v_6v_5v_4v_9v_8v_5v_8v_7v_6v_1$

G_4的初等圈	权和	重复边权和	
（1） $v_1v_2v_5v_6v_1$	16	7	√
（2） $v_6v_5v_8v_7v_6$	14	4	√
（3） $v_2v_3v_4v_5v_2$	24	4	√
（4） $v_5v_4v_9v_8v_5$	16	8	√
（5） $v_1v_2v_5v_8v_7v_6v_1$	24	11	√
（6） $v_2v_3v_4v_9v_8v_5v_2$	32	4	√
（7） $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$	28	11	√
（8） $v_6v_5v_4v_9v_8v_7v_6$	22	4	√
（9） $v_1v_2v_3v_4v_9v_8v_7v_6v_1$	36	7	√

奇偶点图上作业法：

第一步：确定一个初始可行方案

方法：检查图G中是否有奇点。

无奇点：图G已是欧拉图 ，找出一条以v_0为起点的欧拉回路，该回路就是最佳投递路线

有奇点：把所有奇点两两配成一对，每对奇点找一条链，在该条链上的每一条边增加一条重复边

第二步：调整可行方案，使重复边权和下降

1、使图中每一条边最多有一条重复边

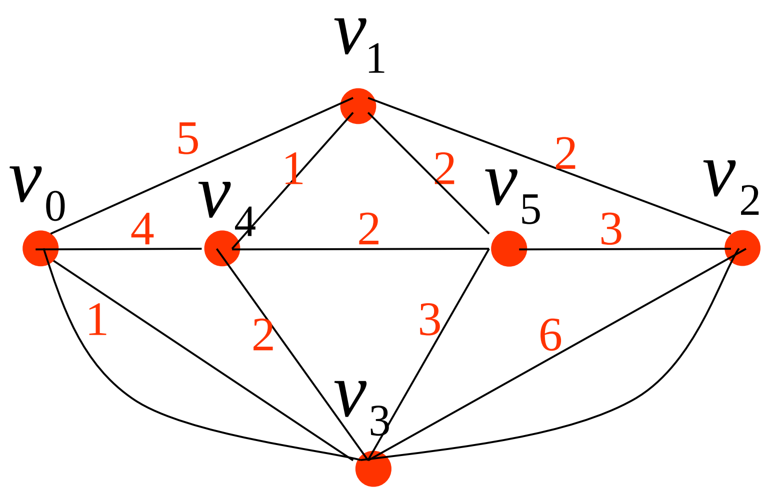
若图中某条边有两条或多于两条的重复边，同时去掉偶数条

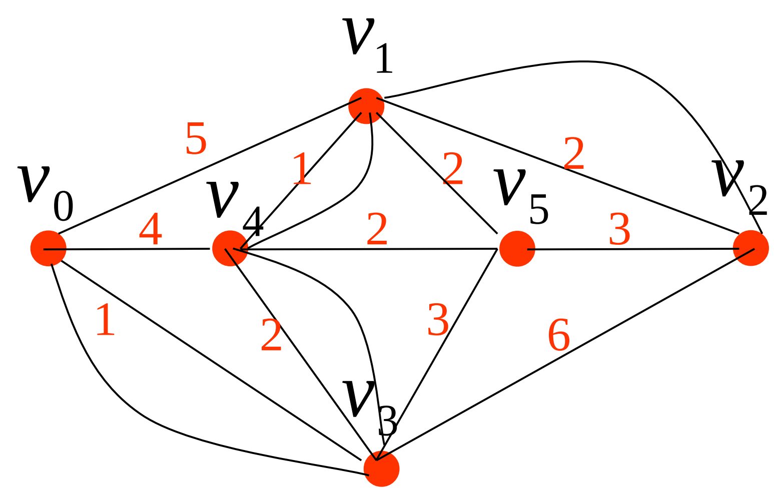
2、使图中每个初等圈重复边的权和≤该圈权和的一半

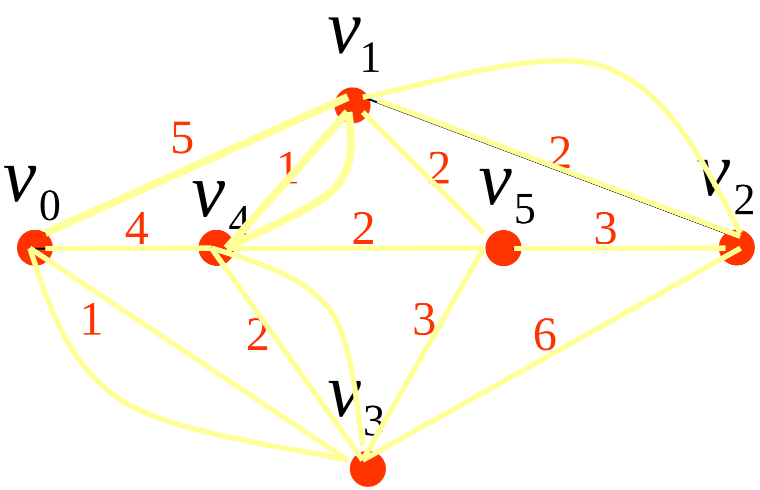
若图中某初等圈重复边的权和大于该圈权和的一半

去掉圈中的重复边同时将圈中没有重复边的边加上重复边

例： 设有邮路图如下， 问邮递员应按怎样的路线行走才能使所行路线最短（v_0为邮局）







最佳投递路线：$v_0v_3v_0\,V_4v_3v_4\,v_5v_3v_2v_5\,v_1v_2v_1\quad v_4v_1v_0$

说明：

关于中国邮递员问题的有效算法由**Edmonds**和**Johnson**1973年给出。

J.Edmonds，E. L. Johnson. Matching Euler tours and the Chinese postman. Mathematical Programming, 1973, 5: 88-124

小结:

- 会用闭圈法和破圈法求最小支撑树
- 会用**Dijkstra**算法求两点间的最短路径
- 会求最大流和最小截集
- 会解最小费用最大流问题