目录

第 1 章 一阶常微分方程

1.1 解关于导数的方程 – 皮亚诺定理

方程

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1.1}$$

其中函数 $X(t, x)$ 在集合 $D \subset R^2$ 上连续，称为关于导数的一阶常微分方程。

定义 1.1

方程 (1.1) 的一个解是函数 $x = \varphi(t)$，在区间 $\langle a, b\rangle$ 上定义，将其代入方程 (1.1) 后使该方程变为恒等式。♣

注

如果 $x = \varphi(t)$ 是 (1.1) 的解，并且 $t \in \langle a, b\rangle$，则

1) 点 $(t, \varphi(t))$ 属于集合 D 对所有 $t \in \langle a, b\rangle$，

2) 函数 $\varphi(t)$ 在区间 $t \in \langle a, b\rangle$ 上连续可微。同时，如果 $a \in \langle a, b\rangle$ 则认为函数 φ 在点 $t = a$ 处的导数为其右侧导数；如果 $b \in \langle a, b\rangle$，则认为函数 φ 在点 $t = b$ 处的导数为其左侧导数。

解 $x = \varphi(t), t \in \langle a, b\rangle$ 的图像称为积分曲线。

定义 1.2

寻找满足条件 $x_0 = \varphi(t_0)$（$t_0 \in \langle a, b\rangle$，$(t_0, x_0) \in D$）的方程 (1.1) 的解 $x = \varphi(t)$ 的问题，称为方程 (1.1) 的柯西问题。♣

条件 $x(t_0) = x_0$ 称为初值条件，而点 (t_0, x_0) 称为初值。

注

1. 方程 (1.1) 的几何解释。如果 $x = \varphi(t)$ 是通过点 (t_0, x_0) 的方程 (1.1) 的解，则有 $\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, x_0)$。因此，$X(t_0, x_0)$ 表示通过点 (t_0, x_0) 的积分曲线的切线在 (t_0, x_0) 处的斜率。因此，方程 (1.1) 的右边在集合 D 上定义了所谓的方向场。
2. 方程 (1.1) 的力学解释。在集合 D 上，方程 (1.1) 决定了一个质点的运动规律。在固定的时间 $t = t_0$，方程的右边反映了通过 $x_0 = \varphi(t_0)$ 的质点的瞬时速度如下：$\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, \varphi(t_0))$。有了这个解释，我们称方程 (1.1) 在集合 D 上定义了速度场。

现在考虑方程 (1.1)，其中 $X(t, x)$ 是在集合 D 上的连续函数，而 D 是一个矩形：$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, 这里 $a, b \in \mathbb{R}$，并且 $a > 0$，$b > 0$。

设初值条件

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

根据魏尔斯特拉斯定理关于在紧集上连续函数的有界性，存在常数 $M > 0$，使得对所有 $(t, x) \in D$，$|X(t, x)| \leq M$.

设 $h = \min(a, b/M)$。

定理 1.1 (皮亚诺定理)

在上述假设下，在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在方程 (1.1) 和 (1.2) 的解。♡

定义 1.3

区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 称为皮亚诺区间。♣

注 需要注意的是，皮亚诺区间通常来说是不确定的。但对于任何这样的区间，定理 1.1 都是成立的。

证明

引理 1.1

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，公式 (1.4) 在整个区间 P 上良定义了函数 $\varphi_k(t)$，并且不等式

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \tag{1.3}$$

对于所有的 $t \in P$ 成立。

♡

注 如果函数 $\varphi_k(t)$（$k \in \mathbb{N}$）已定义，并在某些 $t \in P$ 满足不等式 (1.5)，那么不等式

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq b \tag{1.4}$$

也成立。实际上，如果 $t \in P$，则有 $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ 并且 $t - t_0 \leq h$，从 (1.5) 可以得出 $|\varphi_k(t) - x_0| \leq Mh \leq M \cdot b/M = b$，即 (1.6) 是真的。

现在对于 P 区间的任意分割 d_k，我们定义阶梯函数 $\psi_k(t)$:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} X(t_{j-1}^k, \varphi_k(t_{j-1}^k)), & \text{如果} \quad t_{j-1}^k \leq t < t_j^k, \quad j = 1, \ldots, n_k, \\ X(t_{n_k}^k, \varphi_k(t_{n_k}^k)). \end{cases} \tag{1.5}$$

引理 1.2

对于任何 $t \in P$ 和任何 $k \in \mathbb{N}$，下面的等式成立，

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau \tag{1.6}$$

♡

我们回忆两个定义以及 *Arzela-Ascoli* 引理（来自数学分析课程），我们将在下面皮亚诺定理的证明中使用它们。

定义 1.4 (一致有界)

在区间 $[c, d]$ 上给定的函数序列 $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$, 如果存在一个数 K 使得对于所有 $t \in [c, d]$ 和所有 $k \in \mathbb{N}$ 有 $|\xi_k(t)| \leq K$，则称这个序列在这个区间上是一致有界的。

♣

定义 1.5 (等度连续)

在区间 $[c, d]$ 上给定的函数序列 $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对于任何 $k \in N$ 和任何 $t_1, t_2 \in [c, d]$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，有 $|\xi_k(t_1) - \xi_k(t_2)| < \varepsilon$，则称这个序列在这个区间上是等度连续的。

♣

引理 1.3 (Azela-Ascoli 引理)

如果函数序列 $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 在区间 $[c, d]$ 上是一致有界且等度连续的，则存在子列 $\{\xi_{k_m}(t)\}_{m=1}^{+\infty}$ 随着 $m \to +\infty$ 在这个区间上一致收敛到某个函数 $\xi(t)$。

♡

我们继续证明皮亚诺定理。

引理 1.4

欧拉折线序列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 在区间 P 上是一致有界且等度连续的。

♡

根据 **Azela-Ascoli** 引理，从序列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 中可以选出在区间 P 上一致收敛的子列。

不失一般性，我们可以假设分割序列 $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ 已经选择好，使得函数序列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 在区间 P 上当 $k \to +\infty$ 时一致收敛于函数 $\varphi(t)$：$\varphi(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k(t)$. 作为连续函数的一致收敛后得到的极限，函数 $\varphi(t)$ 是连续的。在不等式 (1.6) 中令 $k \to +\infty$ 可得对于 $t \in P$，有 $|\varphi(t) - x_0| \leq b$。因此函数 $X(t, \varphi(t))$ 在 P 区间上存在且连续。

引理 1.5 对于函数序列 $\psi_k(t)$，当 $k \to +\infty$ 时在区间 P 上一致收敛于函数 $X(t, \varphi(t))$.

由于 $\psi_k(t)$ 对 $X(t, \varphi(t))$ 的一致收敛性，故允许在等式 (1.8) 中取极限 $k \to +\infty$:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{1.7}$$

等式 (1.14) 的右边是连续可微的（因为它是连续函数的变上限积分）。因此，等式 (1.14) 的左边（即函数 $\varphi(t)$）也是连续可微的。

对等式 (1.14) 求导我们得到：$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$, 这意味着函数 $x = \varphi(t)$ 是方程 (1.1) 在区间 $t \in P$ 上的解。在 (1.14) 中令 $t = t_0$ 我们得到 $\varphi(t_0) = x_0$。

利用类似的推理，可以看出在区间 $[t_0 - h, t_0]$ 上也存在一个函数 $x = \varphi(t)$，它是柯西问题 (1.1)，(1.2) 的解。

让我们验证一下函数 $x = \varphi(t)$ 这样定义的话是否是柯西问题 (1.1)，(1.2) 在 Peano 区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的解。为此，只需证明 $\varphi(t)$ 在点 $t = t_0$ 处可导。

让我们找到函数 $\varphi(t)$ 在点 t_0 处的单侧导数 $\dot{\varphi}_{\pm}(t_0)$。

显然 $\dot{\varphi}_{+}(t_0) = X(t_0, x_0)$ 因为 $x = \varphi(t)$ 是区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上柯西问题 (1.1)，(1.2) 的解。同样地 $\dot{\varphi}_{-}(t_0) = X(t_0, x_0)$。由于单侧导数相等，那么 $\dot{\varphi}(t_0)$ 存在并且 $\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, x_0)$。定理 1.1 得证。

现在假设函数 $X(t, x)$ 在区域 G 内是连续的。

定理 1.2 设 $(t_0, x_0) \in G$。则存在 $h > 0$ 使得对于 $|t - t_0| \leq h$ 方程 (1.1)，(1.2) 的解是定义 (存在）的。

假设方程 (1.1) 的右边（即函数 $X(t, x)$）在集合 D（不一定是矩形）上连续，并且 $(t_0, x_0) \in D$。

定义 1.6 我们称定义在区间 $\langle c, d \rangle$ 上的由方程 (1.1)，(1.2) 给出的柯西问题 $t \in \langle c, d \rangle (t_0 \in \langle c, d \rangle)$ 的解 $x = \varphi(t)$ 是唯一的，如果对任意在同一区间上该柯西问题的解与 $\varphi(t)$ 相等，也就是说：在 $\langle c, d \rangle$ 上，柯西问题 (1.1)，(1.2) 的任意解 $x = \psi(t)$ 都满足 $\psi(t) = \varphi(t)$.

定理 1.3 假设满足皮亚诺定理的条件，并且由该定理提供的定义在区间 $P = [t_0, t_0 + h]$ 上的 Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 解 $x = \varphi(t)$ 是唯一的，那么对于任何分割序列 $\{d_k\}_{k=1}^{+\infty}$（在区间 P 上满足条件 $\lambda_k = rankd_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$），欧拉折线序列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ 在 P 上一致收敛到 $\varphi(t)$。

1.2 唯一性问题

考虑方程

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1.8}$$

其中 $X(t, x) \in C(G)$，G 是 $\mathbb{R}^2$ 上的区域。

同时考虑方程 (1.17) 的柯西问题

$$(t_0, x_0). \tag{1.9}$$

定义 1.7 我们称在点 $(t_0, x_0) \in G$ 处的唯一性成立，如果存在 $\Delta > 0$，使得对于 $|t - t_0| \leq \Delta$，存在柯西问题 (1.17)，(1.18) 的解 $x = \varphi(t)$，并且对于任何 δ，当 $0 < \delta \leq \Delta$ 时，在区间 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上解 $\varphi(t)$ 是唯一的。如果

在点 $(t_0, x_0) \in G$ 处唯一性条件成立，则称 (t_0, x_0) 是方程 (1.17) 的唯一性点。♣

例题 1.1 不难验证方程 $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$ 的解是函数 $x = 0$ 和 $x = (t + c)^3$，其中 c 是常数，$c \in \mathbb{R}$。

如果 $x_0 \neq 0$，则每个点 $(t_0, x_0) \in G = \mathbb{R}^2$ 都是唯一性点。而 $(t_0, 0)$ 不是唯一性点。

定理 1.4

设 $(t_0, x_0) \in G$ 并且 $x = \varphi(t)$ 是柯西问题 (1.17)，(1.18) 在 $t \in (a, b)$，$t_0 \in (a, b)$ 内的解。如果每一点 $(t, \varphi(t))$，$t \in (a, b)$ 都是唯一性点，则解 $x = \varphi(t)$ 在 (a, b) 内是唯一的。♡

引理 1.6 (Gronwall 引理)

假设函数 $u(t)$ 在区间 $\langle a, b\rangle$ 上连续且 $u(t) \geq 0$ 对所有 $\langle a, b\rangle$ 成立。假设存在常数 $c \geq 0$，$L > 0$ 以及 $t_0 \in \langle a, b\rangle$ 使得对于 $t \in \langle a, b\rangle$ 以下不等式成立

$$u(t) \leq c + L\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau\right|. \tag{1.10}$$

那么，

$$u(t) \leq c e^{L|t - t_0|}. \tag{1.11}$$

♡

推论 1.1

如果 $c = 0$，则在区间 $\langle a, b\rangle$ 上从 (1.20) 式可得出 $u(t) \equiv 0$。♡

定理 1.5 (唯一性定理)

假设在点 $(t_0, x_0) \in G$ 的一个邻域内偏导数 $\partial X(t, x)/\partial x$ 存在且有界, 那么 (t_0, x_0) 是一个唯一性点。♡

推论 1.2

如果偏导数 $\partial X(t, x)/\partial x$ 存在并且在区域 G 中连续，则来自 G 的任何点都是唯一性点。几何上，这意味着通过区域 G 中的每个点只有一条积分曲线。♡

1.3 一阶微分方程的对称形式

定义 1.8

一阶微分方程的对称形式是形如

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.12}$$

的式子. 这里我们假设函数 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 在区域 $G \subset R^2$ 内连续。♣

定义 1.9

方程 (1.27) 的解是指这样的函数 $y = \varphi(x)$，其中 $x \in \langle a, b\rangle$，或这样的函数 $x = \psi(y)$，其中 $y \in \langle c, d\rangle$; 代入方程 (1.27) 后使之成为恒等式。♣

笔记

1. 让我们将函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程 (1.27)。$M(x, \varphi(x))\mathrm{d}x + N(x, \varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0$. 由此可得，

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0. \tag{1.13}$$

因此，若 (1.28) 成立，则 $y = \varphi(x)$ 为方程 (1.27) 在区间 $x \in \langle a, b\rangle$ 上的解。

类似地，若 (1.29) 成立，则函数 $x=\psi(y)$ 为方程 (1.27) 在区间 $y\in\langle c,d\rangle$ 上的解，b 并且

$$M(\psi(y),y)\psi'(y)+N(\psi(y),y)=0. \tag{1.14}$$

2. 如果在点 $(x_0,y_0)\in G$ 处有 $N(x_0,y_0)\neq 0$，那么由于函数 $N(x,y)$ 的连续性，在这一点的某个邻域内也有 $N(x,y)\neq 0$，并且在此邻域中方程 (1.27) 等价于方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \tag{1.15}$$

对于这个方程，根据 Peano 定理，存在解 $y=\varphi(x)$ 满足 $y_0=\varphi(x_0)$。

类似地，如果在区域 G 中的点 (x_0,y_0) 处有 $M(x_0,y_0)\neq 0$，那么在 (x_0,y_0) 的某个邻域内 $M(x,y)\neq 0$，在这个邻域内方程 (1.27) 等价于方程

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \tag{1.16}$$

其解为 $x=\psi(y)$，其中 $x_0=\psi(y_0)$。

定义 1.10

方程 (1.27) 中满足 $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0$ 的点 $(x_0,y_0)\in G$ 被称为方程的奇点。如果 $M(x_0,y_0)\neq 0$ 或 $N(x_0,y_0)\neq 0$，则这个点被称为常点。

注设 $M(x_0,y_0)\neq 0$ 且 $N(x_0,y_0)\neq 0$。那么存在方程 (1.27) 的解 $y=\varphi(x)$，$y_0=\varphi(x_0)$；函数 $\varphi(x)$ 满足 (1.28)，因此也满足 (1.30)：$\varphi'(x)=-\dfrac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))}$，以及 $\varphi'(x_0)=-\dfrac{M(x_0,y_0)}{N(x_0,y_0)}\neq 0$. 因此，在点 (x_0,y_0) 的邻域内函数 $y=\varphi(x)$ 有一个反函数 $x=\psi(y)$，且 $\varphi'(x)=1/\psi'(y)$。由此得到 $\psi'(x)=-\dfrac{N(\psi(y),y)}{M(\psi(y),y)}$，以及 $\psi'(x_0)=-\dfrac{N(x_0,y_0)}{M(x_0,y_0)}$，这说明函数 $\psi(y)$ 满足 (1.31) 并且满足 (1.29)，因此 $\psi(y)$ 是方程 (1.27) 的解。

定义 1.11

函数 $u(x,y)$ 如果在区域 G 内满足以下条件，则称为方程 (1.17) 的积分：

1. $u(x,y)$ 在区域 G 内连续可微，
2. 对于区域 G 中的每个常点，至少一个偏导数（$\partial u/\partial x$ 或 $\partial u/\partial y$）不等于零，
3. 在区域 G 中，下列恒等式成立：

$$N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0. \tag{1.17}$$

定理 1.6

设 $y=\varphi(x)$ 是区间 $x\in\langle a,b\rangle$ 上方程 (1.27) 的解，并设对于任何 $x\in\langle a,b\rangle$，点 $(x,\varphi(x))$ 都是常点。同时设 $u(x,y)$ 是方程 (1.27) 在 G 中的积分。则 $u(x,\varphi(x))$= 常数，$x\in\langle a,b\rangle$。

下面的定理可以用类似的方法证明。

定理 1.7

设 $x=\psi(y)$ 是方程 (1.27) 在区间 $y\in\langle c,d\rangle$ 上的解，并且点 $(\psi(y),y)$ 对于任何 $y\in\langle c,d\rangle$ 都是常点。设 $u(x,y)$ 是方程 (1.27) 在区域 G 中的积分。则有 $u(\psi(y),y)$= 常数，$y\in\langle c,d\rangle$。

设 $u(x,y)$ 是方程 (1) 在域 G 中的积分，且 $(x_0,y_0)\in G$。考虑方程

$$u(x,y)=u(x_0,y_0). \tag{1.18}$$

定理 1.8

假设 $N(x_0,y_0)\neq 0$。那么方程 (1.33) 在区间 $x\in(a,b)$ 上存在解 $y=\varphi(x)$，其中 $x_0\in(a,b)$，$y_0=\varphi(x_0)$。这个解在区间 (a,b) 上连续可微，并且也是方程 (1.27) 的解。

可以用类似的方法证明下一个定理。

定理 1.9

假设 $M(x_0, y_0) \neq 0$。那么方程 (1.33) 在 $y \in (c, d), y_0 \in (c, d)$, 且 $x_0 = \psi(y_0)$ 时存在解 $x = \psi(y)$，这个解在区间 (c, d) 上连续可微，并且也是方程 (1.27) 的解。

♡

定理 3 和定理 4 的推论是定理 5。

定理 1.10

如果点 (x_0, y_0) 是常点，则方程 (1.33) 存在一个形式为 $y = \varphi(x)$，$x \in (a, b)$，$x_0 \in (a, b)$，$y_0 = \varphi(x_0)$ 或者形式为 $x = \psi(y)$，$y \in (c, d)$，$y_0 \in (c, d)$，$x_0 = \psi(y_0)$ 的解。这个解同时也是方程 (1.27) 的解。

♡

定义 1.12

设 $u(x, y)$ 是方程 (1.27) 在区域 G 内的一个积分。等式 $u(x, y) = c$，其中 c 是任意常数，称为方程 (1.27) 在 G 内的通积分。

♣

例题 1.2

1. 函数 $u(x, y) = x^2 + y^2$ 是方程 $xdx + ydy = 0$ 的一个积分。等式 $x^2 + y^2 = c$ 是给定方程在 $G = R^2$ 内的通积分。
2. 在每个不等于（0,0）的点 (x_0, y_0) 的邻域内，从等式 $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ 中，我们可以表示出方程（1.27）的解的形式为 $y = \varphi(x)$ 或形式为 $x = \psi(y)$。

1.4 全微分方程与积分因子

考虑下面的方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.19}$$

其中函数 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 在区域 $G \subset R^2$ 内连续。

定义 1.13

如果存在一个函数 $u(x, y)$，它在区域 G 内处处可微，并且对于任何 $(x, y) \in G$ 有

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \tag{1.20}$$

则称方程 (1.35) 为全微分方程。

♣

我们将 (1.36) 重写为 $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. 从这个等式可以得出等式 (1.36) 等价于等式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y), \tag{1.21}$$

对于任何 $(x, y) \in G$ 成立。

定理 1.11

如果 (1.35) 是全微分方程，则函数 $u(x, y)$ 就是方程 (1.35) 在区域 G 内的积分。

♡

定理 1.12

设 (1.35) 是全微分方程，在区域 G 内存在连续偏导数 $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$。则在区域 G 内的每一点上

都有

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{1.22}$$

♡

我们刚刚证明了条件 (1.38) 是 (1.35) 为全微分方程的必要条件。现在让我们证明在“矩形”区域内这个条件也是充分条件。

设 $G=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$。注意，情况 $a=-\infty$，$b=+\infty$，$c=-\infty$，$d=+\infty$ 并不排除在外。

定理 1.13

设 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ 在区域 G 内存在且连续，并且等式 (1.38) 在 G 内的每一点都成立。则 (1.35) 是全微分方程。

♡

由于 x 和 y 在方程 (1.35) 中是对称出现的，则下列等式也成立

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}N(x,t)\mathrm{d}t. \tag{1.42'}$$

定义 1.14

函数 $\mu(x,y)$ 在区域 G 内连续且在 G 中不为零，被称为方程 (1.35) 的积分因子，如果方程

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{1.23}$$

是全微分形式的方程。

♣

我们假设区域 G 是矩形的，并且在 G 中存在连续的偏导数 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$。

我们将寻找作为在 G 中连续可微的函数的积分因子 $\mu(x,y)$。

为了使 (1.43) 成为全微分形式的方程，它的必要且充分的条件是 $\dfrac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}$, 或者说

$$N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{1.24}$$

因此函数 $\mu(x,y)$ 应该是偏微分方程 (1.44) 的解。

我们将寻找仅依赖于 x 的方程 (1.35) 的积分因子。从 (1.44) 可知 $\mu(x)$ 满足方程

$N(x,y)\dfrac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)\left(\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$,

或者说

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{1.25}$$

等式 (1.45) 的左边只依赖于 x，所以只有当等式的右边也只依赖于 x 时，这种相等才是可能的。我们记 $\dfrac{1}{N(x,y)}\left(\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=f(x)$,

并且等式 (1.45) 我们重写为：$\dfrac{1}{\mu(x)}\dfrac{d\mu(x)}{dx}=f(x)$.

对最后一个方程积分，我们得到：

$$\mu(x)=\exp\left(\int f(x)dx\right). \tag{1.26}$$

这样，我们证明了以下命题。

命题 1.1

对于方程 (1.35)，存在一个仅依赖于 x 的积分因子 μ，如果函数 $\dfrac{1}{N(x,y)}\left(\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$ 仅依赖于 x。在这种情况下，$\mu(x)$ 由等式 (1.46) 给出。

♠

类似地可以证明命题 1.2。

命题 1.2

对于方程 (1.35)，存在一个仅依赖于 y 的积分因子 μ，如果函数 $\dfrac{1}{M(x,y)}\left(\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)$ 仅依赖于 y。

问题 1.1 线性方程.

考虑线性方程

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1.27}$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 (a,b) 上连续。让我们将 (1.35) 以对称形式重新写为：

$$\big(p(x)y + q(x)\big)dx - dy = 0. \tag{1.28}$$

方程（1.47）和（1.48）是等价的。方程（1.36）在一个矩形区域中给出，该区域为 $G=\{(x,y): a<x<b, -\infty<y<+\infty\}$。这里 $M(x,y)=p(x)y+q(x)$，$N(x,y)=-1$，$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$。

我们正在寻找一个积分因子 μ，它仅依赖于 x。在这种情况下，方程（1.35）将具有以下形式：

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = -\mu(x)p(x), \tag{1.29}$$

因此，$\mu(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)$，其中 $x_0\in(a,b)$。然后，全微分方程（1.45）的形式如下：

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\big(p(x)y+q(x)\big)dx-\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)dy=0.$$

我们使用公式 (1.42′),假设在此公式中 $y_0=0$:$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)ds\right)dt-\int_{0}^{y}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)dt.$

从等式 $u(x,y)=c$ 出发，这是方程（1.35）的通积分，我们得到：

$$y=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\left(c+\int_{x_0}^{x}q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)ds\right)dt\right). \tag{1.30}$$

第 2 章 微分方程组

引言

解一个由较高阶导数组成的方程组，我们称之为如下形式的方程组：

$$\begin{cases} x_1^{(m_1)} = X_1\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, ..., x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, ..., x_2^{(m_2-1)}, ..., x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, ..., x_k^{(m_k-1)}\right), \\ x_2^{(m_2)} = X_2\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, ..., x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, ..., x_2^{(m_2-1)}, ..., x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, ..., x_k^{(m_k-1)}\right), \\ \qquad \vdots \\ x_k^{(m_k)} = X_k\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, ..., x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, ..., x_2^{(m_2-1)}, ..., x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, ..., x_k^{(m_k-1)}\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x_j^{(s)} = \dfrac{d^s x_j}{dt^s}$，$j = 1, 2, ..., k$，$s = 1, 2, ..., m_j$。

数 $n = \sum_{j=1}^{k} m_j$ 被称为方程组 (2.1) 的阶。

在方程组 (2.1) 中，方程的数量总是等于所求函数的数量，每个函数 X_j 的参数数量等于 $(n+1)$。

假设函数 X_j 在集合 $D \subset R^{n+1}$ 上对所有 $j = 1, 2, ..., k$ 都是连续的。

定义 2.1

方程组 (2.1) 的解是一组函数 $x_1 = \varphi_1(t)$，$x_2 = \varphi_2(t), ..., x_k = \varphi_k(t)$，定义在区间 (a, b) 上，使得当它们被代入方程组 (2.1) 时，使这个方程组成为恒等式。

♣

定义 2.2

寻找满足条件

$$\varphi_j(t_0) = x_{j0},\ \dot{\varphi}_j(t_0) = \dot{x}_{j0},\ \ddot{\varphi}_j(t_0) = \ddot{x}_{j0},\ ...,\ \varphi_j^{(m_j-1)}(t_0) = x_{j0}^{(m_j-1)},$$

的方程组 (2.1) 的解 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_k = \varphi_k(t)$

其中 $t_0 \in (a, b)$，$\left(t_0, x_{01}, \dot{x}_{01}, ..., \ddot{x}_{01}^{(m_1-1)}, x_{02}, \dot{x}_{02}, ..., \ddot{x}_{02}^{(m_2-1)}, ..., x_{0k}, \dot{x}_{0k}, ..., \ddot{x}_{0k}^{(m_k-1)}\right) \in D$，$j = 1, 2, ..., k$，

被称为柯西问题。

♣

笔记 特殊情形：

1. 如果 $k = 1$，则式 (2.1) 被称为关于最高阶导数的 n 阶方程：

$$x^{(n)} = X\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right). \tag{2.2}$$

2. 如果对所有 $j = 1, 2, \ldots, k$，有 $m_j = 1$，则式 (2.1) 称为标准（正规）形式的系统，或简称标准（正规）系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

让我们证明方程（2.2）可以简化为形式（2.3）。我们定义

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x},\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)} \tag{2.4}$$

那么有 $\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$，$\dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3$，$\ldots$，$\dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n$

并且，根据（2.2），

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = X(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.5}$$

因此，使用表示法（2.4），方程（2.2）可表示为标准系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = X(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2.6}$$

请注意，方程（2.2）和系统（2.6）在以下意义上是不等价的：方程（2.2）的解是一个函数，而系统（2.6）的解是一族（n 个）函数。

但如果函数 $x = \varphi(t)$ 是方程（2.2）在 $\langle a, b\rangle$ 之间的解，那么函数 $\varphi(t)$ 在区间 $\langle a, b\rangle$ 上 n 次连续可导，并且由 n 个函数组成的集合 $x_1 = \varphi(t)$，$x_2 = \dot{\varphi}(t)$，$x_3 = \ddot{\varphi}(t)$，⋯，$x_n = \varphi^{(n-1)}(t)$ 是系统（2.6）在 $\langle a, b\rangle$ 上的解。

反之，如果一族定义在区间 $\langle a, b\rangle$ 上函数 $x_1 = \varphi_1(t)$，$x_2 = \varphi_2(t)$，⋯，$x_n = \varphi_n(t)$，是系统（2.6）的解，那么根据（2.4）、（2.5），可以得出每个函数 $\varphi_j(t)$ 在 (a, b) 上连续可导（作为系统（2.6）的解的一个元素），$\varphi_j(t) = \varphi_1^{(j-1)}(t)$ 对于所有 $j = 2, ..., n$ 成立，并且 $\varphi_1^{(n)}(t) = X\left(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \ddot{\varphi}_1(t), ..., \varphi_1^{(n-1)}(t)\right)$，

也就是说，函数 $x_1 = \varphi_1(t)$ 是定义在 $\langle a, b\rangle$ 上的方程（2.2）的解。

通过将上述过程应用于系统（1.1）中的每个方程，有可能将系统（1.1）简化为标准形式。因此，在后续讨论中，我们只考虑标准系统。

2.1 标准系统的向量表示法

首先，让我们回顾一些将在以后使用的数学分析课程中的概念和事实。

$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ 是向量 $a = (a_1, a_2, ...a_n)^T$ 的范数。

我们称序列 $a^{[k]} = (a_1^{[k]}, a_2^{[k]}, ...a_n^{[k]})^T$ 收敛到向量 $a = (a_1, a_2, ...a_n)^T$（当 $k \to +\infty$ 时），如果 $\left\|a^{[k]} - a\right\|_{k\to+\infty} \to 0$。在这种情况下，我们将写成 $a^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$。

注意，$a^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$ 当且仅当对所有的 $j = 1, 2, ..., n$ 有 $a_j^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a_j$。注意对于一个向量序列，Bolzano-Weierstrass（致密性）定理也是适用的。

称向量函数 $f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))^T$ 在集合 $D \subset R^m$ 上连续，如果所有函数 $f_j(x_1, \ldots, x_m)$ 在集合 D 上都是连续的。

另外，如果所有函数 $f_j(x_1, \ldots, x_m)$ 关于 x_k 连续可微，则称 f 也关于 x_k 连续可微，其中 $j = 1, 2, \ldots, n$，$k = 1, 2, \ldots, m$。

我们记 $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_k} = \left(\dfrac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_k}, \ldots, \dfrac{\partial f_n(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_k}\right)^T$.

特别地，对于向量函数 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t))^T$，根据上述定义 $\dot{u}(t) = (\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \ldots \dot{u}_n(t))^T$。

如果函数 $u(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则有 $\displaystyle\int_a^b u(t)dt = \left(\int_a^b u_1(t)dt, \int_a^b u_2(t)dt, \ldots, \int_a^b u_n(t)dt\right)^T$.

称级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u^{[k]}(t) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_1^{[k]}(t), \sum_{k=1}^{+\infty} u_2^{[k]}(t), \ldots, \sum_{k=1}^{+\infty} u_n^{[k]}(t)\right)^T$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上收敛，如果级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_j^{[k]}(t)$，$j = 1, 2, \ldots, n$，对所有的 $t \in (a, b)$ 都收敛，并且如果所有分量都一致收敛，则它在 (a, b) 上一致收敛。

对于向量级数，Bolzano-Weierstrass（致密性）定理同样适用：如果对于所有的 $t \in \langle a, b\rangle$，$k \in \mathbb{N}$，都有

$\|u^{[k]}(t)\| \le b_k$，并且数项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} u^{[k]}(t)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上一致收敛。

现在考虑以标准形式表示的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{2.7}$$

其中所有函数 X_j 在集合 $D \subset R^{n+1}$ 上连续，$j = 1, 2, \ldots, n$。

设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$X(t,x) = X(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ X_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$。

则系统（2.7）可以写为向量形式

$$\dot{x} = X(t, x). \tag{2.7'}$$

系统（2.7'）的解是向量函数 $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^T$(定义在区间 (a,b) 上)，将其代入（2.6'）后使系统变为恒等式。

解的图像称为积分曲线。

对于系统（2.7'），柯西问题重写为以下形式

$(t_0, x_0) \in D$, 其中 $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})^T$。

令 $D = \{(t,x) : |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\}, a, b \in R$，$a > 0$，$b > 0$。

考虑柯西问题

$$(t_0, x_0). \tag{2.8}$$

根据魏尔斯特拉斯定理（关于连续函数在紧集上的有界性），存在一个常数 $M > 0$ 使得

$\|X(t,x)\| \le M$ 对于所有$(t,x) \in D$

设 $h = \min(a, b/M)$。

定理 2.1 (皮亚诺定理)

在上述假设下，在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在解满足柯西问题 (2.7)，(2.8)。♡

证明 对于系统 (2.6) 的皮亚诺定理证明几乎是对一阶微分方程时皮亚诺定理证明的逐字重复。

2.2 利普希茨条件

令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$，$t \in R$，$X(t,x) = X(t, x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \ldots \\ X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$ 为向量函数。

定义 2.3

我们称函数 $X(t,x)$ 在集合 $D \subseteq R^{n+1}$ 上关于 x 满足利普希茨条件 (记作 $X(t,x) \in Lip_x(D)$)，如果存在常数 $L > 0$，使得对于任意两点 $(t, \overline{x})$、$(t, \overline{\overline{x}}) \in D$ 不等式

$$\|X(t,\overline{x})-X(t,\overline{\overline{x}})\| \le L\|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\| \tag{2.9}$$

成立。♣

定义 2.4

我们称函数 $X(t,x)$ 在区域 $G\subseteq R^{n+1}$ 中关于 x 满足局部利普希茨条件 (记作 $X(t,x)\in Lip_x^{loc}(G)$)，如果对于任何点 $(t_0,x_0)\in G$ 都存在邻域 $U(t_0,x_0)\subseteq G$，使得 $X(t,x)$ 在集合 $U(t_0,x_0)$ 上关于 x 满足利普希茨条件。♣

定理 2.2

设 $X(t,x)$ 在区域 $G\subset R^{n+1}$ 内连续，并且关于 x 满足局部利普希茨条件。那么在任何有界闭集 $D\subset G$ 上，函数 $X(t,x)$ 关于 x 满足利普希茨条件。♡

定理 2.3

设函数 $X(t,x)$ 在区域 G 中关于 x 连续可微。则 $X(t,x)\in Lip_x^{loc}(G)$。♡

2.3 Picard 定理

考虑系统

$$\dot{x}=X(t,x), \tag{2.10}$$

其中 $x\in R^n$，$X(t,x)\in C(D)$，$D\subset R^{n+1}$，

以及初值问题

$$t=t_0,\ x=x_0 \tag{2.11}$$

其中 $(t_0,x_0)\in D$。

同时考虑积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{2.12}$$

定义 2.5

定义在区间 $\langle a,b\rangle$ 上的连续向量函数 $x=\varphi(t)$，其中 $t_0\in\langle a,b\rangle$，如果将其代入 (2.22) 式后，该函数能使 (2.22) 式成为恒等式，则称其为 (2.22) 式的积分方程解。♣

命题 2.1

方程 (2.22) 等价于 Cauchy 问题 (2.20)，(2.21)。♠

笔记 我们将通过连续逼近法来求解方程 (2.22)。

1. 作为零阶近似我们取函数 $\varphi_0(t)\equiv x_0$.（这个近似定义于 $t\in R$）。
2. 假设存在区间 $\langle a_1,b_1\rangle$，使得 $t_0\in\langle a_1,b_1\rangle$，且对于任意 $t\in\langle a_1,b_1\rangle$，有 $(t,\varphi_0(t))\in D$。
   那么对于 $t\in\langle a_1,b_1\rangle$ 定义函数 $\varphi_1(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}X(\tau,\varphi_0(\tau))d\tau$, 这被称为 Picard 第一近似。
3. 如果存在一个子区间 $\langle a_2,b_2\rangle\subset\langle a_1,b_1\rangle$，$t_0\in\langle a_2,b_2\rangle$，使得对于任何 $t\in\langle a_2,b_2\rangle$，有 $(t,\varphi_1(t))\in D$，则对于 $t\in\langle a_2,b_2\rangle$, 定义 Picard 第二近似: $\varphi_2(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}X(\tau,\varphi_1(\tau))d\tau$.
4. 我们将以相同的方式继续这个过程。

假设 $(k-1)$-阶近似 $\varphi_{k-1}(t)$ 已经在区间 $\langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle$ 上定义，$k \in \mathbb{N}$。

如果存在区间 $\langle a_k, b_k\rangle$，使得 $\langle a_k, b_k\rangle \subset \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle$，$t_0 \in \langle a_k, b_k\rangle$，并且对于任何 $t \in \langle a_k, b_k\rangle$，有 $(t, \varphi_{k-1}(t)) \in D$，则对于 $t \in \langle a_k, b_k\rangle$，定义 k-阶近似:

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))d\tau. \tag{2.13}$$

注意: 如果不存在区间 $\langle a_k, b_k\rangle$，则构造 Picard 近似的过程可能在第 k 阶停止，。

例题 2.1 设 $n = 1$，$D = \{(t, x) : t^2 + x^2 \le 1\}$，$(t_0, x_0) = (0, 1)$。

零阶近似 $\varphi_0(t) \equiv x_0$ 对所有 t 都已确定，但是 $(t, \varphi_0(t)) \notin D$ 对于 $t \neq t_0$。因此不存在具有上述性质的区间 (a_i, b_i)，Picard 过程在第一步终止。

注如果 $D = \mathbb{R}^{n+1}$，则所有后续的 Picard 近似对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 都是有定义的。

注释的证明可以从 Picard 近似的定义直接得出。

定理 2.4 (Picard 定理)

假设在一个有界闭集 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上向量函数 $X(t, x)$ 是连续的，并且满足关于 x 的 Lipschitz 条件。同时假设所有的 Picard 近似 $\varphi_k(t)$ 在相同的区间 $[a, b]$ 上被定义。那么 Picard 近似序列 $\varphi_k(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛到函数 $\varphi(t)$，并且 $\varphi(t)$ 是方程 (2.22) 的解（从而 $\varphi(t)$ 是 Cauchy 问题 (2.20)，(2.21) 的解）。♡

推论 2.1

令 $D = \mathbb{R}^{n+1}$。假设函数 $X(t, x)$ 连续且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上关于 x 满足利普希茨条件（全局）。那么柯西问题 (2.20)，(2.21) 存在一个对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义的解 $x = \varphi(t)$。♡

注如果 $D = \mathbb{R}^{n+1}$ 并且函数 $X(t, x)$ 连续并且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上关于 x 仅满足局部地利普希茨条件，则柯西问题 (2.20)，(2.21) 的解 $x = \varphi(t)$ 不一定在整个 $t \in \mathbb{R}$ 上都有定义。事实上，$x = tan(t)$ 是方程 $\dot{x} = x^2 + 1$ 在初始条件 $(t_0, x_0) = (0, 0)$ 下的解。这个解仅在 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ 范围内确定，尽管所有 Picard 逼近序列 $\varphi_k(t)$ 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$ 都已确定。

假设函数 $X(t, x)$ 在集合 $D = \{(t, x) : |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\}$ 上连续，其中 $a, b \in R$，$a > 0$，$b > 0$。

则存在 $M > 0$ 使得对于所有 $(t, x) \in D$，有 $\|X(t, x)\| \le M$。

令 $h = \min(a, b/M)$。

定理 2.5

设函数 $X(t, x)$ 在集合 D 上连续且满足利普希茨条件。那么所有 Picard 逼近序列 $\varphi_k(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上定义，并且序列 $\varphi_k(t)$ 在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上一致收敛到柯西问题 (2.20)，(2.21) 的解 $x = \varphi(t)$。♡

2.4 唯一性定理

我们考虑系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{2.14}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$，函数 $X(t, x)$ 在区域 $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内连续且关于 x 满足局部利普希茨条件。

设 $(t_0, x_0) \in G$。我们考虑柯西问题：

$$t = t_0,\ x = x_0. \tag{2.15}$$

定理 2.6

设 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \xi(t)$ 是柯西问题 (2.36)，(2.37) 在区间 $\langle a, b\rangle$ 上的两个解。则 $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上。♡

2.5 解的延伸

考虑系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{2.16}$$

其中 $x \in R^n$，$X(t, x)$ 是连续的，并且在区域 $G \subset R^{n+1}$ 内关于 x 满足局部 Lipschitz 条件。

定义 2.6

设 $x = \varphi(t)$ 为系统 (2.39) 在区间 (a, b) 上的解。如果存在一个数 $\bar{b} > b$，使得在区间 $(a, \bar{b})$ 上存在解 $x = u(t)$，并且 $u(t) \equiv \varphi(t)$ 在 (a, b) 上恒成立，则称该解可以向右延伸 (超过点 b)。我们还可以说解 $x = u(t)$ 是从 $x = \varphi(t)$ 向右延伸至 $\bar{b}$ 的继续。

解 $x = \varphi(t)$ 向向右延伸 (超过点 a) 以类似的方式定义。 ♣

定理 2.7

若解 $x = \varphi(t)$ 在区间 (a, b) 上有定义，则它可以向右延伸 (超过 b) 当且仅当存在极限 $\lim\limits_{t \to b} \varphi(t) = \xi$，且点 (b, ξ) 属于区域 G。 ♡

让我们来表述一个关于解向左延伸超过点 a 的类似定理。

定理 2.8

系统 (2.39) 的解 $x = \varphi(t)$ 在区间 (a, b) 上有定义，它能够继续向左延伸 (超过 a) 当且仅当存在极限 $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = \zeta$，并且点 (a, ζ) 属于区域 G 。 ♡

最大存在区间

定理 2.9

设系统 (2.39) 的解 $x = \varphi(t)$ 定义在区间 (a, b) 上，且 $b < +\infty$。那么存在 $\beta \geq b$，使得在区间 (a, β) 上存在解 $x = u(t)$(它是 $x = \varphi(t)$ 向右延伸直到 β 的延续)，并且解 $x = u(t)$ 在 β 处无法向右继续延伸。 ♡

下面的定理可以用类似的方法证明。

定理 2.10

设系统 (2.39) 的解 $x = \varphi(t)$ 在区间 (a, b) 上有定义，其中 $a > -\infty$。则存在 $\alpha \leq a$，使得在区间 (α, b) 上存在解 $x = v(t)$，它是 $x = \varphi(t)$ 向左直到 α 的延拓，并且解 $x = v(t)$ 在 α 处无法向左继续延拓。 ♡

定理 2.9 和定理 2.10 的推论是定理 2.11。

定理 2.11

设系统 (2.39) 的解 $x = \varphi(t)$ 定义在区间 (a, b) 上，则存在 $\alpha \leq a$ 和 $\beta \geq b$，使得在区间 (α, β) 上，解 $x = \psi(t)$ 是定义的，它是解 $x = \varphi(t)$ 的延伸，并且这个解 $x = \psi(t)$ 在 α 左侧不能继续延拓，在 β 右侧也不能继续延拓，但是 $x = \varphi(t)$ 与 $x = \psi(t)$ 在区间 (a, b) 上相同。 ♡

定义 2.7

如果系统 (2.39) 的解 $x = \psi(t)$ 定义在区间 (α, β) 上，并且这个解在 α 左侧不能继续延拓，在 β 右侧也不能继续延拓，则称这个解为饱和解有时也称为最大延伸解)，而区间 (α, β) 则称为解 $x = \psi(t)$ 的最大存在区间。

因此，区域 G 中的每一点 (t_0, x_0) 对应一个区间 (α, β)，在这个区间上定义了柯西问题 (2.39)，(2.40) 的饱

和解。♣

2.6 解在最大存在区间边界处解的性态

本节中，我们再次考虑以下系统：

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{2.17}$$

其中 $x \in R^n$，函数 $X(t,x)$ 是连续的，并且在区域 $G \subset R^{n+1}$ 中关于 x 满足局部利普希茨条件。让我们用 $\overline{G}$ 表示集合 G 的闭包，并通过 ∂G 表示 G 的边界。因此，$\partial G = \overline{G} \setminus G$。

定理 2.12

设集合 G 有界，且函数 $X(t,x)$ 在 G 中也有界。如果系统（1.44）的解 $x = \varphi(t)$ 定义在区间 (a,b) 上，$b < +\infty$. 并且不能向右延伸到 b 之外，则存在极限 $\lim_{t\to b}\varphi(t) = \xi$，并且 $(b,\xi) \in \partial G$。♡

对于区间左端点也存在类似的定理。

定理 2.13

设集合 G 是有界的，并且函数 $X(t,x)$ 在 G 中也是有界的。如果系统 (2.44) 的解 $x = \varphi(t)$ 定义在区间 (a,b) 上，$a > -\infty$，并且不能向左延伸到 a 之外，则存在极限 $\lim_{t\to a^+}\varphi(t) = \zeta$，并且 $(a,\zeta) \in \partial G$。♡

定理 2.14 (关于饱和解在紧集上定理)

设 $x = \varphi(t)$ 是系统 (2.44) 定义在区间 (α,β) 上的饱和解，，$\beta < +\infty$。那么对于 G 中的任何有界闭集 D，存在一个正数 δ 使得对于所有 $t \in (\beta-\delta,\beta)$，$(t,\varphi(t)) \notin D$。♡

对于区间的左端点也有类似的定理成立。

定理 2.15

设 $x = \varphi(t)$ 是定义在区间 (α,β)，$\alpha > -\infty$ 上的系统 (2.44) 的饱和解。那么对于任何有界闭集 $D \subset G$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $t \in (\alpha,\alpha+\delta)$ 时，$(t,\varphi(t)) \notin D$。♡

2.7 可比较于线性系统的系统

考虑系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{2.18}$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$， $X(t,x) = \begin{pmatrix} X_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ X_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$，

函数 $X(t,x)$ 在区域 $G \subset R^{n+1}$ 中关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，$G = \{(t,x) : t \in (a,b), \|x\| < +\infty\}$, (不排除情况 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty$ 的情况)。

定义 2.8

如果存在在区间 (a,b) 上连续且非负的函数 $M(t)$ 和 $N(t)$，使得对任意 $(t,x) \in G$ 都有

$$\|X(t,x)\| \le M(t)\|x\| + N(t), \tag{2.19}$$

则称系统 (2.54) 为可比较于线性系统的系统。♣

定理 2.16

如果 (2.54) 是可比较于线性系统的系统，则它的任意解的最大存在区间等于 (a,b)。

考虑以下系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t) \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t) \end{cases} \tag{2.20}$$

其中所有函数 $p_{jk}(t)$，$q_j(t)$ 都在区间 (a,b) 上连续，$j=1,2,...,n$，$k=1,2,...,n$。

定义 2.9

系统 (2.60) 被称为线性系统。

我们将证明在线性系统在区域 G 内满足定理 2.16 的条件。

系统 (2.60) 是系统 (2.54)，其中

$$X_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k + q_j(t).$$

函数 $X_j(t,x)$ 在区域 G 中连续，并且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件（因为在 G 中有连续偏导数 $\dfrac{\partial X_j(t,x)}{\partial x_k} = p_{jk}(t)$，$j=1,2,...,n$，$k=1,2,...,n$）。

设 $p(t) = \max\limits_{j,k=1,\ldots,n}(|p_{jk}(t)|,|q_j(t)|)$。注意函数 $p(t)$ 在区间 (a,b) 上连续。

则有

$$|X_j(t,x)| \le \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}(t)||x_k| + |q_j(t)| \le p(t)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k| + 1\right). \tag{2.21}$$

由于 $|x_k| \le \|x\| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$，从 (2.61) 可以得出

$|X_j(t,x)| \le p(t)(n\|x\|+1)$,

和

$$\begin{aligned} \|X(t,x)\| &= \sqrt{X_1^2(t,x)+...+X_n^2(t,x)} \\ &\le \sqrt{np^2(t)(n\|x\|+1)^2} = n\sqrt{n}p(t)\|x\| + \sqrt{n}p(t). \end{aligned} \tag{2.22}$$

假设在 (2.62) 中 $M(t) = n\sqrt{n}p(t)$，$N(t) = \sqrt{n}p(t)$，我们得到系统 (2.60) 右侧估计值 (2.55)。因此，线性系统 (2.60) 是一个可比较与线性系统的系统，定理 2.16 对它成立。

让我们以定理的形式表述所获得的结果。

定理 2.17

线性系统 (2.60) 的任何解的最大存在区间等于 (a,b)。

第 3 章 线性微分方程组

引言

定义 3.1

称方程

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = q(t), \tag{3.1}$$

为 n 阶线性微分方程组，其中 $x^{(k)} = \dfrac{d^k x}{dt^k}$，且所有函数 $p_k(t)$ 和函数 $q(t)$ 在区间 (a,b) 上连续，$k = 1, 2, \ldots, n$。

如果在 (a,b) 上 $q(t) \equiv 0$，则称方程 (3.1) 是齐次的；否则，方程 (3.1) 是非齐次的。

让我们根据一般规则将方程 (3.1) 转换到系统（已在前一章中解释过）。

我们记

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x},\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

那么

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n,$$

并且，由（3.1）得出，

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = -p_1(t)x_n - \cdots - p_{n-1}(t)x_2 - p_n(t)x_1 + q(t).$$

因此，我们得到系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \cdots - p_1(t)x_n + q(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

如第二章最后一节所示，该系统的所有解都可以在区间 (a,b) 上延拓，因此方程 (3.1) 的所有解也可以在 (a,b) 上延拓。以下，我们所说的方程 (3.1) 的解是指定义在区间 (a,b) 上的解。

设 $t_0 \in (a,b)$，$x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})^T \in R^n$。对于系统 (3.2)，柯西问题陈述如下：

$$t = t_0,\ x_1 = x_{10},\ x_2 = x_{20},\ ...,\ x_n = x_{n0}, \tag{3.3}$$

以及对于方程 (3.1) 的初值是

$$t = t_0,\ x = x_{10},\ \dot{x} = x_{20},\ ...,\ x^{(n-1)} = x_{n0}. \tag{3.4}$$

求解柯西问题（3.1）（3.4）意味着：找到方程（3.1）的解 $x = \varphi(t)$，使得 $\varphi(t_0) = x_{10}$，$\dot{\varphi}(t_0) = x_{20}$，...，$\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}$。

系统（3.2）中等式的右端关于 x_k（对任何 $k=1,2,...,n$）在区域

$$G=\{(t,x_1,...,x_n):t\in(a,b),|x_k|<+\infty,k=1,2,...,n\},$$

内连续且连续可微

因此，任何柯西问题 (3.2)(3.3) 都有唯一解。故此，方程 (3.1) 的柯西问题 (3.4) 在区间 (a,b) 上有唯一解。

让我们用 $L(x)$ 表示方程 (3.1) 左端：

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)},$$

其中 $p_0(t)\equiv 1$，$x^{(0)}=x$。

注$L(x)$ 是一个线性微分算子。也就是说：对于任何定义在 (a,b) 上的函数 $x_1(t),x_2(t)$, 和任意常数 c_1,c_2.

$$L(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))=c_1L(x_1(t))+c_2L(x_2(t))$$

3.1 齐次线性微分方程组解的主要性质

考虑线性齐次方程

$$L(x)=0. \tag{3.5}$$

定理 3.1

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)$ 是方程 (3.5) 的解。那么函数 $\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)$, 其中 $c_1,c_2,\ldots,c_m$ 是任意常数，在区间 (a,b) 上也是方程 (3.5) 的解。

3.2 线性无关函数

定义 3.2

函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 在区间 (a,b) 上连续，则称为在 (a,b) 上线性相关，如果存在常数 $c_1,c_2,\ldots,c_n$, 不全为零，使得在 (a,b) 上

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0 \tag{3.6}$$

。

否则，称函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 在 (a,b) 上线性无关。

笔记 换句话说，称区间 (a,b) 上的连续函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 是线性无关的，如果从恒等式（3.6）可以得出对于所有 $k=1,2,\ldots,n$ 有 $c_k=0$。

假设函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 在区间 (a,b) 上 $n-1$ 次连续可微。

考虑行列式

$$W(t)=W(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t)\\ \dot\varphi_1(t) & \dot\varphi_2(t) & \ldots & \dot\varphi_n(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

定义 3.3

行列式（(3.7) 称为函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 在区间 (a,b) 上的 Wronski 行列式或简称 Wronski。

定理 3.2

设函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 是线性相关的，并且在区间 (a,b) 上 $n-1$ 次连续可微。则在 (a,b) 上 $W(t) \equiv 0$。

注 定理 3.2 的逆命题通常来说并不成立。下面的例子说明了这一点。

例题 3.1 设 $n=2$，

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{若} \quad -1 < t \le 0, \\ t^2, & \text{若} \quad 0 < t < 1, \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} t^2, & \text{若} \quad -1 < t \le 0, \\ 0, & \text{若} \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 上连续可微，

$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix}, \quad \text{若} -1 < t \le 0,$$

和

$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{若} 0 < t < 1$$

因此，在区间 $(-1,1)$ 上 $W(t) \equiv 0$ 。

让我们证明函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 上线性无关。考虑恒等式

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \equiv 0. \tag{3.8}$$

首先令 $t = 1/2$ 代入 (3.10)，我们得到 $c_1 = 0$。现在再令 $t = -1/2$ 代入 (3.10)，我们得到 $c_2 = 0$。因此，从恒等式 (3.10) 可以得出 $c_1 = c_2 = 0$，并且函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 上线性无关。

现在考虑齐次线性方程

$$L(x) = 0, \tag{3.9}$$

其中，如前所述，$L(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}$，$p_0(t) \equiv 1$，$x^{(0)} = x$，且对于 $k = 1, 2, ..., n$ 函数 $p_k(t)$ 在区间 (a,b) 上连续。

如果 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ 是方程 (3.11) 的解，则比定理 3.2 的逆更强的陈述是正确的。

定理 3.3

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ 是方程 (3.11) 的解。如果存在一点 $t_0 \in (a,b)$ 使得 $W(t_0) = 0$，则函数 $\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ 在区间 (a,b) 上线性相关。

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 是方程（3.11）的解。从定理 3.2 和定理 3.3 可以得出以下两个结论。

推论 3.1

如果存在一点 $t_0 \in (a,b)$ 使得 $W(t_0) = 0$，则 $W(t) \equiv 0$，并且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 在 (a,b) 上是线性相关的。

推论 3.2

若存在一点 $t_1 \in (a,b)$ 使得 $W(t_1) \neq 0$，则对于任意的 $t \in (a,b)$ 都有 $W(t) \neq 0$，且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 在区间 (a,b) 上是线性无关的。

3.3 基本解组

考虑齐次线性方程

$$L(x)=0, \tag{3.10}$$

其中 $L(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)}$，$p_0(t)=1$，$x^{(0)}=x$. 并且在区间 (a,b) 上, 对所有 $k=1,2,\dots,n$ 函数 $p_k(t)$ 均连续。

定义 3.4

方程 (3.14) 的 n 个线性无关解组成的集合 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ 称为方程 (3.14) 的一个基本解组。♣

定理 3.4

齐次线性方程 (3.14) 存在一个基本解组。♡

定义 3.5

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),,\varphi_n(t)$ 为方程 (3.14) 的基本解组，且 $c_1,c_2,,c_n$ 为任意常数。考虑公式：

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t), \tag{3.11}$$

式（3.15）的右边称为方程（3.14）的通解。♣

定理 3.5

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),,\varphi_n(t)$ 为方程 (3.14) 的基本解组，则有

1) 对于任何一组常数 $c_1,c_2,,c_n$，公式 (3.15) 给出方程 (3.14) 的一个解;

2) 如果 $x=\xi(t)$ 是方程 (3.14) 的解, 则存在一组常数 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,,\bar{c}_n$ 使得 $\xi(t)=\bar{c}_1\varphi_1(t)+\bar{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\bar{c}_n\varphi_n(t)$。♡

3.4 非齐次线性微分方程

考虑非齐次线性微分方程

$$L(x)=q(t), \tag{3.12}$$

其中 $L(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)}$, $p_0(t)\equiv 1$, $x^{(0)}=x$, 函数 $p_k(t)$, $k=1,2,\dots,n$, 与 $q(t)$ 在区间 (a,b) 上连续。

对应于方程 (3.18) 的齐次方程为:

$$L(x)=0 \tag{3.13}$$

定理 3.6

设 $x=\psi(t)$ 是方程 (3.18) 的解，而 $x=\varphi(t)$ 是方程 (3.19) 的解。那么 $x=\varphi(t)+\psi(t)$ 是方程 (3.18) 的解。♡

定义 3.6

设函数 $\psi(t)$ 是方程 (3.18) 的解, 函数集 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ 是方程 (3.19) 的基本解组, 并且 $c_1,c_2,\dots,c_n$ 是任意常数。

考虑公式:

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+\psi(t). \tag{3.14}$$

公式（3.20）的右侧被称为方程（3.18）的通解。♣

定理 3.7

设 $\psi(t)$ 是方程 (3.18) 的解，而 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ 是方程 (3.19) 的基本解组。那么

1) 对于任何一组常数 $c_1,c_2,\dots,c_n$，公式（3.20）给出方程 (3.18) 的一个解；

2) 如果 $x=\xi(t)$ 是方程 (3.18) 的一个解，则存在一组常数 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n$ 使得 $\xi(t)=\bar{c}_1\varphi_1(t)+\bar{c}_2\varphi_2(t)+\cdots+\bar{c}_n\varphi_n(t)+\psi(t)$。♡

3.5 拉格朗日方法

考虑非齐次线性微分方程

$$L(x)=q(t), \tag{3.15}$$

以及相应的齐次线性微分方程

$$L(x)=0, \tag{3.16}$$

$L(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)},\quad p_0(t)\equiv 1,\quad x^{(0)}=x$, 其中函数 $p_k(t)$，$k=1,2,\dots,n$，和 $q(t)$ 在区间 (a,b) 上连续。

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ 是方程 (3.24) 的基本解组。方程 (3.23) 的特解 $x=\psi(t)$ 将以以下形式求得：

$$\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\varphi_j(t), \tag{3.17}$$

其中 $u_j(t)$ 是未知函数，$j=1,2,\dots,n$。

我们有

$$\dot{\psi}(t)=\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\dot{\varphi}_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\dot{u}_j(t)\varphi_j(t).$$

设

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{u}_j(t)\varphi_j(t)=0, \tag{3.18}$$

因此，

$$\dot{\psi}(t)=\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\dot{\varphi}_j(t),$$

以及

$$\ddot{\psi}(t)=\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\ddot{\varphi}_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\dot{u}_j(t)\dot{\varphi}_j(t).$$

设

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{u}_j(t)\dot{\varphi}_j(t)=0,$$

同样地，我们进一步假设对于所有的 $s=1,\dots,(n-2)$，

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) = 0. \tag{3.19}$$

那么，

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) \tag{3.20}$$

对于所有 $s = 1, \dots, (n-1)$ 成立，并且，

$$\psi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t). \tag{3.21}$$

现在让我们将函数 $\psi(t)$ 及其导数代入方程 (3.23)，使用公式 (3.25),(3.29), (3.30) 和 $\phi_j(t)$ 在区间 (a,b) 上满足 $L(\varphi_j(t)) \equiv 0$ 的事实。

$$\begin{aligned} L(\psi(t)) = L\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n} p_k(t)\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)L(\varphi_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

并且 $x = \psi(t)$ 是方程 (3.23) 的解，如果

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = q(t). \tag{3.22}$$

因此，由公式 (3.25) 定义函数 $\psi(t)$,，是方程 (3.23) 的解，如果条件 (3.26),(3.27),(3.30) 成立。让我们把这些条件收集到一个系统中。

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t)\varphi_1(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2(t) + \ldots + \dot{u}_n(t)\varphi_n(t) = 0, \\ \dot{u}_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{\varphi}_2(t) + \ldots + \dot{u}_n(t)\dot{\varphi}_n(t) = 0, \\ \ldots \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-2)}(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-2)}(t) + \ldots + \dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) = q(t). \end{cases} \tag{3.23}$$

定义 3.7

系统 (3.31) 被称为变分系统。♣

对于任何 $t \in (a,b)$，系统 (3.31) 是一个关于 $\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \ldots, \dot{u}_n(t)$ 的非齐次线性代数系统。这个系统的行列式是 Wronski 行列式 $W(t)$，且 $W(t) \neq 0$。因此，对于任何 $t \in (a,b)$，系统 (3.31) 有一个解 $\dot{u}_j(t) = f_j(t)$，$j = 1, 2, \ldots, n$。

线性系统 (3.31) 的所有系数在区间 (a,b) 上连续依赖于 t，并且该系统的解也连续依赖于这些系数。因此，所有的函数 $f_j(t)$ 在 (a,b) 上都是连续的，$j = 1, 2, \ldots, n$，并且 $u_j(t) = \int f_j(t)dt$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

根据公式 (3.25)，

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int f_j(t)dt,$$

现在前一节中的公式 (3.20) 用于方程 (3.23)，得到其通解的形式为

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\int f_j(t)dt.$$

3.6 常系数齐次线性微分方程

设

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{(n-k)}, \tag{3.24}$$

其中 $a_0=1$，a_k 是实数 $(k=1,2,\ldots,n)$。

考虑齐次线性微分方程

$$L(x)=0. \tag{3.25}$$

我们寻找方程 (3.32) 的解的形式为 $x=e^{\lambda t}$。将函数 $e^{\lambda t}$ 代入 $L(x)$：

$$L(e^{\lambda t})=P(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{3.26}$$

其中

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k. \tag{3.27}$$

定义 3.8

多项式 $P(\lambda)$ 称为特征多项式。方程

$$P(\lambda)=0 \tag{3.28}$$

称为特征方程，其根称为方程 (3.33) 的特征值。

♣

我们将证明函数 $x=e^{\lambda t}$ 是方程 (3.33) 的解当且仅当 λ 是特征方程 (3.36) 的根。

设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是方程 (3.36) 的根。让我们构造方程 (3.33) 的基本解组。我们的论证将分为几种情况讨论。

A 如果所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 都是实数且简单（即不是重根），那么方程 (3.33) 有基本解组 $e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\ldots,e^{\lambda_n t}$.
我们先讨论其它所有情况，稍后会证明这些函数的线性无关性。

B 假设所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 都是简单的（即不是重根），但是在它们之中存在复数。

引理 3.1

如果 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是实函数，并且复值函数 $w(t)=u(t)+iv(t)$（其中 $i=\sqrt{-1}$）是方程 (3.33) 的解，那么 $u(t)$ 和 $v(t)$ 也是方程 (3.33) 的解。

♡

证明 引理 *3.1* 的证明。我们知道 $L(w(t))=0$。我们也知道 $L(w(t))=L(u(t)+iv(t))=L(u(t))+iL(v(t))$. 因此，$L(u(t))+iL(v(t))=0$，所以 $L(u(t))=0$ 并且 $L(v(t))=0$。从最后两个等式可以得出 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是方程 (3.33) 的解。引理 3.1 得证。

假设 $\lambda_j=\alpha+i\beta$，$j\in\{1,2,\ldots,n\}$，是特征方程 (3.36) 的一个根，且 $\beta\neq 0$。那么 $\overline{\lambda}_j=\alpha-i\beta$ 也是特征方程的一个根，并且函数 $e^{\lambda_j t}$ 和 $e^{\overline{\lambda}_j t}$ 是方程 (3.33) 的解。

根据欧拉公式

$$e^{\lambda_j t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\cos(\beta t)+ie^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

并且由于上述引理，函数

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t)\quad 和\quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

是方程 (3.33) 的解。这一对函数在基本解组中对应于特征方程 (3.36) 的一对根 λ_j 和 $\overline{\lambda}_j$。

C 假设特征方程的根中有重根，并且根 λ_j，$j \in \{1, 2, ..., n\}$，有重数 $d \geq 2$。这意味着

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = P''(\lambda_j) = ... = P^{(d-1)}(\lambda_j) = 0. \tag{3.29}$$

让我们对等式 (3.34) 关于 λ 求 m 次导数。

一方面，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(e^{\lambda t}) &= \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}} e^{\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}} \left(\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} e^{\lambda t} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}} \left(t^m e^{\lambda t} \right) = L(t^m e^{\lambda t}), \end{aligned} \tag{3.30}$$

另一方面，根据莱布尼茨公式，

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left(P(\lambda) e^{\lambda t} \right) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s P^{(s)}(\lambda) \frac{\partial^{m-s}}{\partial \lambda^{m-s}} e^{\lambda t} = \sum_{s=0}^{m} C_m^s P^{(s)}(\lambda) t^{m-s} e^{\lambda t}. \tag{3.31}$$

从等式 (3.34)，(3.38) 和 (3.39) 可以得出

$$L(t^m e^{\lambda t}) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s P^{(s)}(\lambda) t^{m-s} e^{\lambda t}. \tag{3.32}$$

现在在 (3.40) 中令 $\lambda = \lambda_j$，并且 $m = 1, 2, ..., (d-1)$。那么从 (3.37) 可以得出等式 (3.40) 的右边等于零，并且 $L(t^m e^{\lambda_j t}) = 0$ 对于所有 $m = 1, 2, ..., (d-1)$ 都成立。因此方程 (3.33) 恰好有 d 个解

$$e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, ..., t^{d-1} e^{\lambda_j t}, \tag{3.33}$$

这些解在基本解组中对应于重数为 d 的根 λ_j。若 $\lambda_j = \alpha + i\beta$ 是方程 (3.36) 的 d 重根，其中 $\beta \neq 0$，则 $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ 也是方程 (3.36) 的 d 重根。将解 (3.41) 中的实部与虚部分离，我们得到 $2d$ 个解

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), t e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^2 e^{\alpha t} \cos(\beta t), ..., t^{d-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t),$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t), t e^{\alpha t} \sin(\beta t), t^2 e^{\alpha t} \sin(\beta t), ..., t^{d-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

这些解对应于特征方程 (3.36) 的一对根 λ_j 和 $\overline{\lambda}_j$ 的 d 重性。

因此，我们构建了 n 个不同的解，它们对应于特征方程 (3.36) 的 n 个根。

让我们证明实际上构建的是线性无关的解组。

定理 3.8

所构建的解组是基本的。

3.7 常系数非齐次线性微分方程

设

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{(n-k)}$$

其中 $x^{(0)} = x$，$a_0 = 1$; 且所有 a_k 是实数，$k = 1, 2, \ldots, n$。

我们考虑如下的非齐次线性微分方程

$$L(x) = q(t), \tag{3.34}$$

其中函数 $q(t)$ 在 $t \in R$ 上连续。

与方程 (3.46) 对应的齐次方程是

$$L(x) = 0. \tag{3.35}$$

方程 (3.47) 的特征方程是

$$P(\lambda) = 0, \tag{3.36}$$

其中 $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$。

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 是方程 (3.47) 的一个基本解组（这样的解组在前一节已经构建）。

为了得到非齐次方程 (3.46) 的通解，只需要找到方程 (3.46) 的一个特解 $x = \psi(t)$。这个特解可以通过拉格朗日方法找到，但如果方程 (3.47) 是常系数方程，并且函数 $q(t)$ 具有特殊形式，则可以通过待定系数法找到特解 $x = \psi(t)$，下面概述这种方法。

1. 如果方程 (3.46) 的非齐次项具有如下形式

$$q(t) = R_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{3.37}$$

其中 $R_m(t)$ 是 m 次多项式：$R_m(t) = \sum_{j=0}^{m} r_j t^{m-j}$。

定理 3.9

如果 λ_0 不是特征方程 (3.48) 的根（即，$P(\lambda_0) \neq 0$），那么具有非线性项 (3.49) 的方程 (3.46) 拥有形式为

$$\psi(t) = Q_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{3.38}$$

的解，其中 $Q_m(t)$ 是一个 m 次多项式：$Q_m(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^{m-j}$。

♡

定理 3.10

如果 λ_0 是特征方程 (3.48) 的根, 重数 $d \geq 1$：

$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = P''(\lambda_0) = \ldots = P^{(d-1)}(\lambda_0) = 0, \quad P^{(d)}(\lambda_0) \neq 0, \tag{3.39}$$

则具有非线性项 (3.49) 的方程 (3.46) 有形如

$$\psi(t) = t^d Q_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{3.40}$$

的解，其中 $Q_m(t)$ 是一个 m 次多项式：$Q_m(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^{m-j}$。

♡

2. 假设方程 (3.46) 的非齐次项具有如下形式

$$q(t) = e^{\alpha_0 t} \left(\tilde{R}_{m_1}(t) \cos(\beta_0 t) + \hat{R}_{m_2}(t) \sin(\beta_0 t) \right), \tag{3.41}$$

其中 $\tilde{R}_{m_1}(t)$ 和 $\hat{R}_{m_2}(t)$ 分别是 m_1 次和 m_2 次多项式。

定理 3.11

如果 $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ 不是特征方程 (3.48) 的根，则具有非线性项 (3.59) 的方程 (3.46) 有如下形式的解

$$\psi(t) = e^{\alpha_0 t} \left(\tilde{Q}_m(t) \cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_m(t) \sin(\beta_0 t) \right), \tag{3.42}$$

其中 $m=\max(m_1,m_2)$，$\tilde{Q}_m(t)$ 和 $\hat{Q}_m(t)$ 是 m 次多项式。

定理 3.12

如果 $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ 是特征方程 (3.48) 的重数为 d 的根，则具有非线性项 (3.59) 的方程 (3.46) 有如下形式的解

$$\psi(t)=t^d e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{3.43}$$

其中 $m=\max(m_1,m_2)$，$\tilde{Q}_m(t)$ 和 $\hat{Q}_m(t)$ 是 m 次多项式。

在证明定理 3.11 和 3.12 之前，我们先证明一个简单的命题。

命题 3.1

如果 $\psi_1(t)$ 是方程 $L(x)=q_1(t)$ 的解，而 $\psi_2(t)$ 是方程 $L(x)=q_2(t)$ 的解，那么函数 $\psi_1(t)+\psi_2(t)$ 是方程 $L(x)=q_1(t)+q_2(t)$ 的解。

证明 定理 *3.11* 和 *3.12* 的证明.

为了完成证明，我们需要证明一个简短的引理。

引理 3.2

如果复值函数 $w(t)=u(t)+iv(t)$ 是方程 (3.46) 的解，其中 $q(t)=f(t)+ih(t)$，而 $u(t)$，$v(t)$，$f(t)$，$h(t)$ 都是实值函数，那么 $u(t)$ 是方程 $L(x)=f(t)$ 的解，而 $v(t)$ 是方程 $L(x)=h(t)$ 的解。

第 4 章 线性微分方程组

引言

考虑线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t),\\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t),\\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t),\end{cases} \tag{4.1}$$

其中所有函数 $p_{jk}(t), q_j(t)$ 在区间 (a,b) 上连续。

系统 (4.1) 是一个标准形式的系统。

系统 (4.1) 中所有方程的右端

$$X_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k + q_j(t)$$

在区域 $G = \{(t,x) : t \in (a,b), \|x\| < +\infty\}$ 中是连续的，并且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，因为在 G 中存在连续偏导数 $\dfrac{\partial X_j(t,x)}{\partial x_k} = p_{jk}(t)$。

因此，对于系统 (4.1) 的 Cauchy 问题

$$t = t_0,\ x_1 = x_{10},\ x_2 = x_{20},\ \ldots,\ x_n = x_{n0}, \tag{4.2}$$

其中 $t_0 \in (a,b), x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})^T \in R^n$，存在唯一的解。

此外，在第二章的第七节中证明了线性系统的所有解都在区间 (a,b) 上有定义。因此，我们假设系统 (4.2) 的所有解都在 (a,b) 上定义。

定义 4.1

如果 $q_j(t) \equiv 0, j = 1,2,\ldots,n$，则称系统 (4.1) 为齐次的。否则，称该系统为非齐次的。♣

4.1 线性系统的向量表示法

首先，让我们回顾一下后面将要用到的矩阵理论中的知识。

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

我们将把它写成形式 $A_{[n\times m]} = \{a_{jk}\}$ 或 $A = \{a_{jk}\}_{[n\times m]}$，或形式 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$，其中 a_j 是矩阵 A 的第 j 列。

如果 $A_{[n\times m]} = \{a_{jk}\}$，$B_{[n\times m]} = \{b_{jk}\}$，那么 $(A+B)_{[n\times m]} = \{a_{jk} + b_{jk}\}$。

如果 $B_{[s\times n]} = \{b_{jl}\} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$，$A_{[n\times m]} = \{a_{lk}\}$，那么 $(BA)_{[s\times m]} = \left\{\sum_{l=1}^{n} b_{jl}a_{lk}\right\}$，或 $(BA)_{[s\times m]} = (Ba_1, Ba_2, \ldots, Ba_m)$。

如果矩阵 A 是 n 维方阵，那么矩阵 A 的范数是算子范数

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

这里（像以前一样）$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 是向量 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 的欧几里得范数。
不难证明以下不等式成立

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

如果 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$，那么

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

(这个不等式称为矩阵算子范数与向量欧几里得范数之间的一致性性质)。

矩阵 $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jl}(t)\}$ 在区间 $\langle a, b\rangle$ 上连续，如果所有函数 $u_{jl}(t)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上连续，并且当所有 $u_{jl}(t)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上连续可微时，它是连续可微的。其中 $U'(t)_{[s\times n]} = \{\dot{u}_{jl}(t)\}$.

如果矩阵 $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jl}(t)\}$ 和 $V(t)_{[n\times m]} = \{v(t)_{lk}\}$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上连续可微，则它们的乘积在 $\langle a, b\rangle$ 上也是连续可微的，并且容易证明

$$\frac{d}{dt}(U(t)V(t)) = U'(t)V(t) + U(t)V'(t).$$

如果矩阵 $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jl}(t)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，那么根据定义

$$\int_a^b U(t)dt = \left\{\int_a^b u_{jl}(t)dt\right\}.$$

不难证明对于一个 n 维方阵 $U(t)$

$$\left\|\int_a^b U(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|U(t)\|dt.$$

设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$, $q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \ldots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$。

我们将线性系统 (4.1) 写成向量形式

$$\dot{x} = P(t)x + q(t). \tag{4.3}$$

我们假设矩阵 $P(t)$ 和向量 $q(t)$ 在区间 (a, b) 上连续。

回忆一下，系统 (4.1) 的解是定义在 (a, b) 上的向量函数 $x = \varphi(t)$，当它代入 (14.1) 时，使系统成为恒等式。

系统 (4.1) 的柯西问题的初值是 $t = t_0$，$x = x_0$,

其中 $t_0 \in (a, b), x_0 \in R^n$。

4.2 矩阵方程。齐次线性系统的主性质。

首先考虑齐次线性系统

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{4.4}$$

其中矩阵 $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ 在区间 (a, b) 上连续。

设向量函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 是系统 (4.3) 的解。构造矩阵

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)). \tag{4.5}$$

考虑矩阵方程

$$\dot{X} = P(t)X. \tag{4.6}$$

其中 X 是任何具有 n 行的矩阵。

记方程 (46.) 的解为矩阵 $X = X(t)$，在 (a, b) 上连续可微并且满足方程 (4.6)。

命题 4.1

如果 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ 是系统 (4.4) 的解，当且仅当矩阵 $\Phi_m(t)$ 是方程 (4.6) 的解。

注 对于矩阵方程 (4.6)，我们可以设定柯西问题 $t = t_0$, $X = A_0$, 其中 $t_0 \in (a, b)$ 而 A_0 是一个具有 n 行的矩阵。当然，这个问题的解的存在性和唯一性定理也是成立的。

定理 4.1 (齐次线性系统的主要性质)

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ 是系统 (4.4) 的解。则向量函数

$$\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_m\varphi_m(t),$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 是任意常数，在区间 (a, b) 上也是系统 (4.4) 的解。

4.3 齐次线性系统的线性无关解

我们考虑一个齐次线性系统

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{4.7}$$

其中矩阵 $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ 在区间 (a, b) 上连续。

设向量函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 是系统 (4.7) 的解，并且

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \tag{4.8}$$

是由这些解组成的矩阵。

定义 4.2

若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$，使得在 (a, b) 区间上有

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_m\varphi_m(t) \equiv 0. \tag{4.9}$$

则称系统 (4.7) 的解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在线段 (a, b) 上是线性相关的。

笔记 定义 4.2 也可以使用矩阵 (4.8) 来重新表述。称解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在区间 (a, b) 上是线性相关的，如果存在 m 维常数向量 $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ 满足 $c \neq 0$，并且 $\Phi_m(t)c \equiv 0$ 在整个区间 (a, b) 上成立。

定义 4.3

解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在区间 (a, b) 上线性无关，如果它们在这个区间上不是线性相关的。

笔记 换句话说，称解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在区间 (a, b) 上是线性无关，如果从恒等式 $\Phi_m(t)c \equiv 0$ 可以推出向量 c 等于零。

定理 4.2

设解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在区间 (a, b) 上线性相关。那么对于任何 $t \in (a, b)$ 有 $\operatorname{rank}\Phi_m(t) < m$.

注 在证明定理 4.2 的过程中，我们没有使用到 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 是系统 (4.7) 的解这一事实。定理 4.2 对定义在区间 (a, b) 上的任意一组向量函数都是正确的。

定理 4.3

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 是系统 (4.7) 的解。如果存在点 $t_0 \in (a, b)$，使得 $\operatorname{rank} \Phi_m(t_0) < m$,，则 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在区间 (a, b) 上线性相关。♡

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 是系统 (4.7) 的解，$t \in (a, b)$。那么根据定理 4.2 和定理 4.3 可以得出两个推论。

推论 4.1

如果存在点 $t_0 \in (a, b)$ 使得 $\operatorname{rank} \Phi_m(t_0) < m$，则对于所有 $t \in (a, b)$ 都有 $\operatorname{rank} \Phi_m(t) < m$，且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在 (a, b) 上线性相关。♡

推论 4.2

如果存在点 $t_1 \in (a, b)$ 使得 $\operatorname{rank} \Phi_m(t_1) = m$，则对于所有 $t \in (a, b)$ 都有 $\operatorname{rank} \Phi_m(t) = m$，且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ 在 (a, b) 上线性无关。♡

定理 4.4

系统 (4.7) 不能有多于 n 个线性无关的解。♡

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 是系统 (4.7) 的一组 (n 个) 解。我们构造矩阵 $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$.

定义 4.4

$\Phi(t)$ 的行列式被称为函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 在区间 (a, b) 上的 Wronski 行列式或 Wronski。$W(t) = \det \Phi(t)$. ♣

推论 4.3

如果存在点 $t_0 \in (a, b)$ 使得 $W(t_0) = 0$，则 $W(t) \equiv 0$ 在 (a, b) 上恒成立，且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 在区间 (a, b) 上是线性相关的。♡

推论 4.4

如果存在点 $t_1 \in (a, b)$ 使得 $W(t_1) \neq 0$，则 $W(t) \neq 0$ 对所有 $t \in (a, b)$ 都成立，且解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 在区间 (a, b) 上是线性无关的。♡

注 对于线性系统 (4.7)，Wronskian 的定义是对于 n 阶齐次线性方程相应定义的推广。不难证明，当从一个方程过渡到一个系统时，按照第三章引言处描述的方法，系统的 Wronski 定义可以从方程的 Wronski 定义中得出。

4.4 基本解组. 通解.

考虑齐次线性系统

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{4.10}$$

其中矩阵 $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ 在区间 (a, b) 上连续。

定义 4.5

系统 (4.12) 的一组线性无关解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 称为系统 (4.12) 的基本解组。由这些解组成的矩阵

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \tag{4.11}$$

称为系统 (4.12) 的基本解矩阵。♣

定理 4.5

线性系统 (4.12) 有一个基本解组。♡

定义 4.6

设 $\Phi(t)$ 是系统 (4.12) 的基本解矩阵。另设 c 是任意一个 n 维的常数向量。考虑公式:

$$x(t) = \Phi(t)c. \tag{4.12}$$

公式 (4.13) 的右侧称为系统 (4.12) 的通解。♣

定理 4.6

设 $\Phi(t)$ 是系统 (4.12) 的基本解矩阵。那么

1) 对于任意常数向量 c，公式 (4.15) 给出了系统 (4.12) 的解，

2) 如果 $x = \xi(t)$ 是系统 (4.12) 的解，则存在向量 $\bar{c}$ 使得对任何 $t \in (a, b)$，有 $\xi(t) = \Phi(t)\bar{c}$。♡

定理 4.7 (系统 (4.12) 的基本矩阵的一般表达式)

设 $\Phi(t)$ 是系统 (4.12) 的基本解矩阵。

1) 如果 B 是任意一个 n 阶方阵，且 $\det B \neq 0$，则矩阵 $\Psi(t) = \Phi(t)B$ 也是系统 (4.12) 的基本解矩阵。

2) 如果 $\Psi(t)$ 是系统 (4.12) 的基本解矩阵，则存在一个 n 阶方阵 B，$\det B \neq 0$，使得对于任何 $t \in (a, b)$ 有 $\Psi(t) = \Phi(t)B$。♡

定义 4.7

设 $\Phi(t)$ 是系统 (4.12) 的基本解矩阵。设 B 是任意一个 n 阶方阵，满足 $\det B \neq 0$。考虑公式:

$$X(t) = \Phi(t)B. \tag{4.13}$$

公式 (4.17) 的右侧称为系统 (4.12) 基本解矩阵的一般表达式。

基本解矩阵 $X(t, t_0)$，当 $t = t_0$ 时变为单位矩阵，称为基本柯西矩阵。♣

注 如果 $\Phi(t)$ 是系统 (4.12) 的任一基本解矩阵，则 $X(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ 是基本柯西矩阵。

实际上，$X(t_0, t_0) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0) = E$。

4.5 Liouville 公式.

让我们把齐次线性系统写成如下形式

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.14}$$

设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ 是系统 (4.18) 的解，

$$\varphi_m(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1m}(t) \\ \cdots \\ \varphi_{nm}(t) \end{pmatrix},$$

$m = 1, 2, \ldots, n$。

考虑这组解的 Wronski 行列式:

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

根据定义，

$$W(t)=\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\varphi_{1j_1}(t)\cdots\varphi_{nj_n}(t),$$

其中求和符号表示按照行列式的规则进行求和，即对所有自然数 $(1,2,\ldots,n)$ 的排列 $\Delta=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ 求和。如果排列 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ 为偶排列，则 $\alpha=0$；如果排列 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ 为奇排列，则 $\alpha=1$。

$$\dot{W}(t)=\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\sum_{s=1}^{n}\varphi_{1j_1}(t)\ldots\varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t)\dot{\varphi}_{sj_s}(t)\varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t)\ldots\varphi_{nj_n}(t)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\varphi_{1j_1}(t)\ldots\varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t)\dot{\varphi}_{sj_s}(t)\varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t)\ldots\varphi_{nj_n}(t).$$

上述等式中的内部求和是一个行列式，它与 Wronski 行列式（Wronski）的区别仅在于第 s 行是系统 (4.18) 的解在相应分量的导数。

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dot{\varphi}_{s1}(t) & \dot{\varphi}_{s2}(t) & \cdots & \dot{\varphi}_{sn}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

由于 $\varphi_m(t)$ 是系统 (4.18) 的解，则有

$$\dot{\varphi}_{sm}(t)=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{km}(t).$$

因此，

$$W(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k2}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix},$$

或

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{k1}(t) & \varphi_{k2}(t) & \cdots & \varphi_{kn}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

对于在最后一个公式中的求和符号下的行列式:

1) 当 $s\neq k$ 时，它们与 Wronski 行列式不同之处在于第 s 行被第 k 行所替代。这些行列式等于零，因为它们包含两行相同的元素。

2) 当 $s=k$ 时，求和号下的行列式与 Wronski 行列式重合。因此，

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)W(t),$$

或

$$\dot{W}(t)=W(t)\mathrm{Tr}P(t), \tag{4.15}$$

其中 $P(t)=\{p_{jk}(t)\}_{[n\times n]}$。

对等式 (4.19) 进行积分，我们得到

$$W(t)=c\exp\left(\int\mathrm{Tr}P(t)dt\right), \tag{4.16}$$

或

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}P(\tau)d\tau\right), \tag{4.17}$$

其中 $t_0\in(a,b)$。

定义 4.8

公式 (4.20) 和 (4.21) 称为刘维尔 (Liouville) 公式。 ♣

注 从齐次线性系统的刘维尔公式中，我们可以很容易地获得 n 阶齐次线性方程的类似公式

$$x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(t)\dot{x}+p_n(t)x=0. \tag{4.18}$$

根据第三章引言描述的标准化过程，使用记号

$$x_1=x, x_2=\dot{x}, x_3=\ddot{x},\ldots,x_n=x^{(n-1)},$$

可以将方程 (4.22) 简化为一个齐次线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \quad\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=-p_n(t)x_1-p_{n-1}(t)x_2-\cdots-p_1(t)x_n.\end{cases} \tag{4.19}$$

根据系统 (4.23) 的 Wronski 的刘维尔公式 (4.20)，(4.21)，我们得到方程 (4.22) 的 Wronski 的刘维尔公式：

$$W(t) = c\exp\left(-\int p_1(t)dt\right),$$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)d\tau\right),$$

其中 $t_0 \in (a,b)$。

4.6 非齐次线性系统的通解

我们考虑一个非齐次线性系统

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), \tag{4.20}$$

其中矩阵 $P(t)$ 和向量函数 $q(t)$ 在 $t \in (a,b)$ 上连续。

同时考虑对应的齐次线性系统：

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{4.21}$$

定理 4.8

设 $x = \psi(t)$ 是非齐次线性系统 (4.24) 的解，而 $x = \varphi(t)$ 是齐次线性系统 (4.25) 的解。那么 $x = \varphi(t) + \psi(t)$ 也是非齐次线性系统 (4.24) 的解。

定义 4.9

设 $\psi(t)$ 是 (4.24) 的解，$\Phi(t)$ 是 (4.25) 的基本解矩阵，c 是任意 n 维常数向量。考虑公式：

$$x(t) = \Phi(t)c + \psi(t). \tag{4.22}$$

上述公式的右侧称为 (4.24) 的通解。

定理 4.9

设 $\Phi(t)$ 是 (4.25) 的基本解矩阵。那么

1) 对于任何常数向量 c 公式 (4.26) 给出 (4.24) 的解，

2) 如果 $x = \xi(t)$ 是 (4.24) 的解，则存在向量 $\bar{c}$，使得对任何 $t \in (a,b)$ 有 $\xi(t) = \Phi(t)\bar{c} + \psi(t)$。

Lagrange's (常数) 变易法

假设我们已经知道了系统 (4.25) 的基本解矩阵 $\Phi(t)$。我们将寻找系统 (4.24) 的一个特解 $x = \psi(t)$，其形式为

$$\psi(t) = \Phi(t)u(t), \tag{4.23}$$

其中 $u(t)$ 是一个向量函数。

从等式 (4.28) 和等式 $\dot{\psi}(t) = P(t)\psi(t) + q(t)$ 可以得出

$$\dot{\Phi}(t)u(t) + \Phi(t)\dot{u}(t) = P(t)\Phi(t)u(t) + q(t). \tag{4.24}$$

注意到 $\dot{\Phi}(t) = P(t)\Phi(t)$，因此等式 (6) 可以重写为

$$\Phi(t)\dot{u}(t) = q(t),$$

或

$$\dot{u}(t) = \Phi^{-1}(t)q(t).$$

因此，$u(t) = \int \Phi^{-1}(t)q(t)dt$,

这里的不定积分可以是任意一个，例如 $u(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau$ 其中 $t_0\in(a,b)$。

于是，根据非齐次线性系统 (1) 的通解公式 (3)，再考虑到等式 (5)，可表示为

$$x(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)q(t)dt. \tag{4.25}$$

对于系统 (4.24)，柯西问题在初值 $t=t_0,x=x_0$, 下的解具有如下形式

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau, \tag{4.26}$$

或

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)q(\tau)d\tau, \tag{4.27}$$

其中 $\Phi(t,t_0)$ 是基本柯西矩阵。

公式 (4.31)-(4.32) 被称为非齐次线性系统 (4.24) 的柯西公式。

4.7 常系数齐次线性系统

我们考虑一个齐次线性系统

$$\dot{x}=Ax, \tag{4.28}$$

其中 A 是一个 n 阶常数方阵。

我们寻找系统 (4.33) 的形如 $x=\gamma e^{\lambda t}$ 的解，其中 γ 是 n 维常数向量，λ 是标量。

将向量函数 $\gamma e^{\lambda t}$ 代入 (4.33)，我们得到

$$\lambda\gamma e^{\lambda t}=A\gamma e^{\lambda t}.$$

因此，

$$(A-\lambda E)\gamma=0. \tag{4.29}$$

线性系统 (4.34) 有非零解当且仅当

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{4.30}$$

定义 4.10

方程 (4.35) 被称为系统 (4.33) 的特征方程。显然方程 (4.35) 的根是矩阵 A 的特征值。它们被称为特征数。♣

从等式 (4.34) 可知，向量函数 $x=\gamma e^{\lambda t}$ 是系统 (4.33) 的解当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征值，而 γ 是对应于这个特征值的特征向量。

设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，$\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ 是与这些特征值对应的特征向量。

让我们构造系统 (4.33) 的基本解组。我们将在下一节证明所构建的解组的线性无关性。

A 如果所有特征数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 都是实数且简单（即没有重根），那么系统 (4.33) 有基本解组

$$\gamma_1e^{\lambda_1t},\gamma_2e^{\lambda_2t},...,\gamma_ne^{\lambda_nt}.$$

B 假设所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 都是简单的（即没有重根），但其中有些是复数。

引理 4.1

如果 $u(t),v(t)$ 是实向量函数，且复值函数 $w(t)=u(t)+iv(t)$ 是系统 (4.33) 的解，则 $u(t)$ 和 $v(t)$ 也是系统 (4.33) 的解。♡

设 $\lambda_j=\alpha+i\beta$，$\beta\neq0$，$j\in\{1,2,...,n\}$ 是矩阵 A 的特征值，而 γ_j 是对应的特征向量。那么 $\overline{\lambda}_j=\alpha-i\beta$ 也是矩阵 A 的特征值，且 $\overline{\gamma}_j$ 是对应的特征向量。

函数 $\gamma_j e^{\lambda_j t}$ 和 $\overline{\gamma}_j e^{\overline{\lambda}_j t}$ 是系统 (4.33) 的解，并根据引理 4.1，实函数 $\mathrm{Re}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ 和 $\mathrm{Im}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ 也是系统 (4.33) 的解。这一对函数在基本解组中对应于一对特征值 λ_j 和 $\overline{\lambda}_j$。

C 设特征方程 (4.35) 的特征值中有重根。

如果实根 λ_j，$j \in \{1, 2, ..., n\}$，有重数 $d \geq 2$，则系统 (4.33) 的解应按以下形式寻求

$$x = \gamma_j(t) e^{\lambda_j t}, \tag{4.31}$$

其中 $\gamma_j(t)$ 是次数为 $(d-1)$ 的向量多项式。恰好有 d 个这种类型的线性无关解。

如果 $\lambda_j = \alpha + i\beta$，其中 $\beta \neq 0$ 是重数为 d 的特征值，那么 $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ 也是重数为 d 特征值。在形如 (4.36) 的解中分离出实部和虚部，我们得到 $2d$ 个线性无关的解。

使用上述方法，我们可以构建与方程 (4.33) 的 n 个根相对应的 n 个不同的解。

在下一节中，我们将证明这样一个系统确实是基本的。同时，我们将阐明在矩阵 A 具有多重特征值情况下解 (4.36) 的形式。

4.8 常系数齐次线性系统的矩阵积分法

首先，让我们回顾一些矩阵理论的知识。

1. 称矩阵序列 $A_k = \left\{a_{jm}^{[k]}\right\}_{n \times n}$ 收敛到矩阵 $A = \{a_{jm}\}_{n \times n}$（我们仅写 $A_k \xrightarrow{k \to +\infty} A$），如果 $\|A_k - A\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$。

   请注意，$A_k \xrightarrow{k \to +\infty} A$ 当且仅当对于所有的 $j = 1, 2, \ldots, n$，$m = 1, 2, \ldots, n$，有 $a_{jm}^{[k]} \xrightarrow{k \to +\infty} a_{jm}$。

2. 称矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 收敛到矩阵 A 如果它的部分和序列收敛到 A。记号是 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = A$。

   显然，$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = A$ 当且仅当对于所有的 $j = 1, 2, \ldots, n$，$m = 1, 2, \ldots, n$，有 $\sum\limits_{k=1}^{s} a_{jm}^{(k)} \xrightarrow{s \to +\infty} a_{jm}$。

3. 如果数列 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛，并且对于所有的 $k \in N$，有 $\|A_k\| \leq b_k$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 也收敛。

设 $A = \{a_{jm}\}_{n \times n}$ 为常数矩阵。考虑级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{4.32}$$

其中 $A^0 = E_{n \times n}$。

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$, 并且数列 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ 收敛($\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$), 因此级数 (4.37) 也收敛。

定义 4.11

级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ 的和称为矩阵 A 的指数。记作 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^A$。

♣

设 $A_{[n \times n]}$ 和 $B_{[n \times n]}$ 是任意两个方阵。通常情况下，e^{A+B} 不等于 $e^A e^B$。但如果 A 和 B 可交换，则有以下结论成立。

引理 4.2

设 $A_{[n \times n]}$ 和 $B_{[n \times n]}$ 是两个方阵。如果 $AB = BA$，则 $e^{A+B} = e^A e^B$.

♡

引理 4.3

设 $A_{n \times n}$ 和 $B_{n \times n}$ 是方阵，并存在矩阵 $S_{n \times n}$ 使得 $\det S \neq 0$，且 $A = SBS^{-1}$。那么 $e^A = Se^B S^{-1}$.

♡

考虑一个齐次线性系统

$$\dot{x} = Ax, \tag{4.33}$$

其中 A 是 n 阶常数方阵。

定理 4.10

e^{At} 是 (4.38) 的基本解矩阵。

设 B 为矩阵 A 的 Jordan 标准形，S 为约化矩阵，$\det S \neq 0$，且 $A = SBS^{-1}$。则根据引理 4.3 有 $e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}$。现在我们来确定矩阵 e^{Bt} 的形式。

B 是一个分块对角矩阵，其分块为 $B_1, B_2, \dots, B_d$：

$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \dots, B_d). \tag{4.34}$$

设 v_s 为分块 B_s 的大小，$s = 1, 2, \dots, d$。那么

$$B_s = \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_p \end{pmatrix}_{v_s \times v_s}.$$

分块 B_s 可以表示为

$$B_s = \lambda_p E_s + H_s, \tag{4.35}$$

其中 λ_p 是矩阵 A 的特征值，E_s 是维数为 v_s 的单位矩阵，而 $H_s = \{h_{jm}\}$ 是一个阶数为 v_s 的方阵，该矩阵在主对角线下方的元素为 1，其余元素均为 0。换句话说，当 $m = j - 1$，$j = 2, 3, \dots, v_s$ 时，$h_{jm} = 1$；若 $m \neq j - 1$，则 $h_{jm} = 0$。

从等式 (4.40) 可以得出，

$$e^{B_s t} = e^{(\lambda_p E_s + H_s)t},$$

根据引理 4.2，由于单位矩阵与任何矩阵可交换，则有

$$e^{B_s t} = e^{\lambda_p E_s t} e^{H_s t}. \tag{4.36}$$

根据矩阵指数的定义，我们得到

$$e^{\lambda_p E_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} E_s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} E_s = E_s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} = E_s e^{\lambda_p t}. \tag{4.37}$$

考虑 $H_s^2 = \left\{h_{jm}^{[2]}\right\}$。显然，当 $m = j - 2$，$j = 3, 4, \dots, v_s$ 时，$h_{jm}^{[2]} = 1$；若 $m \neq j - 2$，则 $h_{jm}^{[2]} = 0$。

类似地，如果 $k \leq v_s - 1$，那么 $H_s^k = \left\{h_{jm}^{[k]}\right\}$，其中当 $m = j - k$，$j = (k+1), \dots, v_s$ 时，$h_{jm}^{[k]} = 1$；若 $m \neq j - k$，则 $h_{jm}^{[k]} = 0$。

另外，当 $k \geq v_s$ 时，$H_s^k = 0$，这里 $0 = 0_{[v_s \times v_s]}$ 表示零矩阵。

因此，

$$e^{H_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} H_s^k = E_s + tH_s + \frac{t^2}{2} H_s^2 + \cdots + \frac{t^{v_s - 1}}{(v_s - 1)!} H_s^{v_s - 1}, \tag{4.38}$$

然后

$$e^{H_st}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ t & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{t^2}{2} & t & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ \frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!} & \dots & \dots & t & 1\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]}$$

由等式 (4.41)-(4.43) 我们得到：

$$e^{B_st}=e^{\lambda_pt}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ t & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{t^2}{2} & t & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0\\ \frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!} & \dots & \dots & t & 1\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]}$$

或者

$$e^{B_st}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_pt} & 0 & \dots & 0 & 0\\ te^{\lambda_pt} & e^{\lambda_pt} & 0 & \dots & 0\\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_pt} & te^{\lambda_pt} & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_pt} & 0\\ \frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!}e^{\lambda_pt} & \dots & \dots & te^{\lambda_pt} & e^{\lambda_pt}\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]}. \tag{4.39}$$

从矩阵指数的定义和公式 (4.39) 可以得出，e^{Bt} 是一个分块对角矩阵：

$$e^{Bt}=\operatorname{diag}\left(e^{B_1t},e^{B_2t},\dots,e^{B_dt}\right), \tag{4.40}$$

该矩阵中的每个分块都具有 (4.44) 的形式。

将等式 $e^{At}=Se^{Bt}S^{-1}$ 从右边乘以 S，我们得到：$e^{At}S=Se^{Bt}$.

S 是常数矩阵，$\det S\neq 0$，根据第四节定理 4.7，$e^{At}S$ 是系统 (4.38) 的基本解矩阵。因此，Se^{Bt} 也是 (4.38) 的基本解矩阵。由 (4.44) 和 (4.45) 可知，该矩阵的列有如下形式 $x=\gamma_p(t)e^{\lambda_pt}$,

其中 $\gamma_p(t)$ 是次数不超过 $(d-1)$ 的向量多项式，d 是特征值 λ_p 的重数。

这证明了构造系统 (4.38) 基本解组的方法（来自第 7 节），并证明了构成的这个基本解组的解的线性无关性。

注 对于非齐次线性系统

$$\dot{x}=Ax+q(t), \tag{4.41}$$

其中 $A_{[n\times n]}$ 是常数矩阵，$q(t)$ 是特殊形式的连续向量函数，为了找到其特解 $x=\psi(t)$，有一种待定系数法，类似于非齐次线性方程对应的待定系数法。

我们给出这种方法的定理而不进行证明（这里的证明与线性方程对应定理的证明类似）。

与 (14.46) 相对应的齐次线性系统的方程为 (4.38)。考虑系统 (4.38) 的特征方程

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{4.42}$$

1. 设系统 (4.46) 的非齐次项具有如下形式

$$q(t)=R_m(t)e^{\lambda_0t}, \tag{4.43}$$

其中 $R_m(t)$ 是 m 次向量多项式。

定理 4.11

如果 λ_0 不是特征方程 (4.47) 的根，则具有非线性项 (4.48) 的系统 (4.46) 有如下形式的解

$$y(t) = Q_m(t)e^{\lambda_0 t},$$

其中 $Q_m(t)$ 是 m 次向量多项式。

♡

定理 4.12

如果 λ_0 是特征方程 (4.47) 的 $d \geq 1$ 重根，则具有非线性项 (4.48) 的系统 (4.46) 有如下形式的解

$$y(t) = Q_{m+d}(t)e^{\lambda_0 t},$$

其中 $Q_{m+d}(t)$ 是 $(m+d)$ 次向量多项式。

♡

2. 设方程 (4.46) 的非齐次项具有如下形式

$$q(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{4.44}$$

其中 $\tilde{R}_{m_1}(t)$ 和 $\hat{R}_{m_2}(t)$ 分别是 m_1 和 m_2 次向量多项式。

定理 4.13

如果 $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ 不是特征方程 (4.47) 的根，则具有非线性项 (4.49) 的方程 (4.46) 有如下形式的解 $y(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right)$，其中 $m = \max(m_1, m_2)$，$\tilde{Q}_m(t)$ 和 $\hat{Q}_m(t)$ 是 m 次向量多项式。

♡

定理 4.14

如果 $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ 是特征方程 (4.47) 的重根，重数为 $d \geq 1$，那么具有非线性项 (4.49) 的方程 (4.46) 有如下形式的解

$$\psi(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_{m+d}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_{m+d}(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

其中 $m = \max(m_1, m_2)$，$\tilde{Q}_{m+d}(t)$ 和 $\hat{Q}_{m+d}(t)$ 是次数为 $(m+d)$ 的向量多项式。

♡

第 5 章 解关于初值和参数的微分性质

引言

在本章中，我们考虑一个方程组，其右侧依赖于参数

$$\dot{x} = X(t, x, \mu), \tag{5.1}$$

其中 $x \in R^n$，向量函数 $X(t, x, \mu)$ 在 $(t, x) \in G \subset R^{n+1}$ 上连续，并且 $\mu \in F \subset R^m$。

设 $x = \varphi(t, \theta, \xi, \mu)$ 是系统 (5.1) 的解，初值条件为 $t = \theta$，$x = \xi$。我们将研究这个解对所有变量的微分性质。

5.1 积分连续性定理

引理 5.1

考虑两个系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{5.2}$$

$$\dot{y} = Y(t, y), \tag{5.3}$$

其中 $x \in R^n$，$y \in R^n$，函数 $X(t, x)$ 和 $Y(t, y)$ 在集合 $D \subset R^{n+1}$ 上连续，并且 $X(t, x)$ 在集合 D 上关于 x 满足利普希茨条件：(即对于来自集合 D 的任意两点 $(t, \overline{x})$，$(t, \overline{\overline{x}})$ 有：

$$\|X(t, \overline{x}) - X(t, \overline{\overline{x}})\| \leq L\|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\| \tag{5.4}$$

)

设 $x = \varphi(t)$ 是系统 (5.2) 的解，而 $y = \psi(t)$ 是系统 (5.3) 的解，它们在区间 $[c, d]$ 上定义，$\theta \in [c, d]$。那么对于任何 $t \in [c, d]$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \left(\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| + \int_c^d \|X(t, \psi(t)) - Y(t, \psi(t))\| d\tau\right) e^{L|t-\theta|}. \tag{5.5}$$

♡

接下来考虑系统

$$\dot{x} = X(t, x, \mu), \tag{5.6}$$

其中 $x \in R^n$，对 $(t, x) \in G$，$\mu \in F$ 向量函数 $X(t, x, \mu)$ 连续，G 是 R^{n+1} 中的区域，而 $F \subset R^m$。

我们假设对于任何 $\mu \in F$,$X(t, x, \mu)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件。

定理 5.1

设系统 (5.9) 的解 $x = \varphi(t, \theta_0, \xi_0, \mu_0)$ 定义在区间 $t \in [a, b]$ 上，且 $\theta_0 \in [a, b]$。那么对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得如果

$$|\theta - \theta_0| < \delta, \theta \in [a, b], \|\xi - \xi_0\| < \delta, \|\mu - \mu_0\| < \delta, \tag{5.7}$$

则在区间 $[a, b]$ 上存在系统 (5.9) 的解 $x = \psi(t, \theta, \xi, \mu)$，并且对于任何 $t \in [a, b]$ 都有

$$\|\varphi(t, \theta_0, \xi_0, \mu_0) - \psi(t, \theta, \xi, \mu)\| < \varepsilon \tag{5.8}$$

成立。

♡

考虑一个没有参数的系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{5.9}$$

其中 $x \in R^n$，向量函数 $X(t,x)$ 在区域 $G \subset R^{n+1}$ 中连续并且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件。

定理 5.2

设系统 (5.20) 的解 $x = \varphi(t,\theta_0,\xi_0)$ 定义在 $t \in [a,b]$ 上，其中 $\theta_0 \in [a,b]$。那么存在常数 $\delta > 0$，$M > 0$ 和 $L > 0$，使得如果

$$|\theta - \theta_0| < \delta,\ \theta \in [a,b],\ \|\xi - \xi_0\| < \delta, \tag{5.10}$$

则在区间 $[a,b]$ 上定义了系统 (5.20) 的解 $x = \psi(t,\theta,\xi)$，且

$$\|\varphi(t,\theta_0,\xi_0) - \psi(t,\theta,\xi)\| \le (M|\theta - \theta_0| + \|\xi - \xi_0\|)e^{L|t-\theta|} \tag{5.11}$$

对于任意 $t \in [a,b]$ 都成立。

♡

推论 5.1

设系统 (5.20) 的解 $x = \varphi(t,\theta_0,\xi_0)$ 在 $t \in [a,b]$，$\theta_0 \in [a,b]$ 上有定义。那么存在常数 $\delta > 0$ 和 $K > 0$，使得如果条件 (5.21) 成立，则在区间 $[a,b]$ 上存在系统 (5.20) 的解 $x = \psi(t,\theta,\xi)$，并且

$$\|\varphi(t,\theta_0,\xi_0) - \psi(t,\theta,\xi)\| \le K(|\theta - \theta_0| + \|\xi - \xi_0\|) \tag{5.12}$$

对于任何 $t \in [a,b]$ 都成立。

♡

考虑系统

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{5.13}$$

其中 $x \in R^n$，向量函数 $X(t,x)$ 在区域 $G \subset R^{n+1}$ 中关于 x 连续可微。

定理 5.3

假设系统 (5.24) 的解 $x = \varphi(t,\theta_0,\xi_0)$ 在 $t \in [a,b]$ 上有定义，其中 $\theta_0 \in [a,b]$。那么存在 $\delta > 0$，使得如果 $|\theta - \theta_0| < \delta$, $\theta \in (a,b)$, $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, 则系统 (5.24) 的解 $x = \psi(t,\theta,\xi)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，并且关于 θ 和 ξ 连续可微。

♡

第 6 章 Lyapunov 稳定性

6.1 Lyapunov 稳定性的定义

考虑系统

$$\dot{y} = Y(t, y), \tag{6.1}$$

其中 $y \in R^n$，$Y(t, y)$ 在区域 $G \subset R^{n+1}$ 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件。

设 $y = \varphi(t)$ 是系统 (6.1) 的解，定义在 $t \in [t_0, +\infty)$ 上。

定义 6.1

称解 $y = \varphi(t)$ 为 Lyapunov 稳定，如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得系统 (6.1) 的任何解 $y = \psi(t)$，其初值条件满足不等式

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta,$$

并且定义于 $t \in [t_0, +\infty)$ 上，同时满足不等式

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

对于任意 $t \in [t_0, +\infty)$ 成立。

否则称解 $y = \varphi(t)$ 为 Lyapunov 不稳定。

♣

定义 6.2

称系统 (6.1) 的解 $y = \varphi(t)$ 为 Lyapunov 渐近稳定，如果它是 Lyapunov 稳定的，并且存在 $\Delta > 0$ 使得系统 (6.1) 的任何解 $y = \psi(t)$，其初值条件满足不等式

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \Delta,$$

则有

$$\lim_{t \to +\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$$

成立。

♣

注 在有限区间 $[a, b]$ 上，解的初值的 δ-接近保证了解的 ε-接近，这是由积分连续性定理保证的。但对于稳定性，则要求在半直线 $[t_0, +\infty)$ 上解的初值 δ-接近保证了解的 ε-接近。

我们对系统 (6.1) 做替换 $y = \varphi(t) + x$.

则有 $\dot{\varphi}(t) + \dot{x} = Y(t, \varphi(t) + x)$ 以及 $\dot{\varphi}(t) = Y(t, \varphi(t))$.

因此，系统 (6.1) 可以化简为系统

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{6.2}$$

其中 $X(t, x) = Y(t, \varphi(t) + x) - Y(t, \varphi(t))$.

系统 (6.1) 的解 $y = \varphi(t)$ 对应于系统 (6.2) 的解 $x = 0$，研究系统 (6.1) 中解 $y = \varphi(t)$ 的稳定性就转化为研究系统 (6.2) 中解 $x = 0$ 的稳定性。

6.2 线性系统的解的稳定性

考虑非齐次线性系统

$$\dot{y} = P(t)y + q(t), \tag{6.3}$$

其中矩阵 $P(t)$ 和向量 $q(t)$ 在 $t \in [t_0, +\infty)$ 上连续。

同时考虑对应的齐次线性系统

$$\dot{y} = P(t)y, \tag{6.4}$$

定理 6.1

系统 (6.3) 的任何解 $y = \varphi(t)$ 的稳定性类型与系统 (6.4) 的解 $y \equiv 0$ 的稳定性类型相同。♡

因此，系统 (6.3) 的所有解具有相同的稳定性类型。

定义 6.3

称线性系统 (6.3)（以及线性系统 (6.4)）为稳定的、渐近稳定的或不稳定的，如果齐次线性系统的解 $y \equiv 0$ 是稳定的、渐近稳定的或不稳定的（对于系统 (6.4)）。♣

定理 6.2 (齐次线性系统的稳定性判别)

下列条件等价。

1. 系统 (6.4) 的解 $y \equiv 0$ 是 Lyapunov 稳定的。
2. 系统 (6.4) 的任意解在 $+\infty$ 上是有界的（在每个 $[t_0, +\infty)$ 上）。
3. 系统 (6.4) 的任一基本矩阵在 $+\infty$ 上是有界的。
4. 系统 (6.4) 存在一个在 $+\infty$ 上有界的基本解矩阵。

（下面提到的“有界”均指“在 $+\infty$ 上有界”）。♡

定理 6.2 可以重新表述如下。

定理 6.3 (齐次线性系统的不稳定判别)

以下条件是等价的。

1. 系统 (6.4) 的解 $y \equiv 0$ 是不稳定的。
2. 存在系统 (6.4) 的一个在 $+\infty$ 无界的解。
3. 存在系统 (6.4) 的一个在 $+\infty$ 无界的基本解矩阵。
4. 系统 (6.4) 的任何基本解矩阵在 $+\infty$ 都是无界的。♡

定理 6.4 (齐次线性系统的渐近稳定性判别)

以下条件是等价的。

1. 系统 (6.4) 的解 $y \equiv 0$ 是渐近稳定的。
2. 对于系统 (6.4) 的任何解 $y = \psi(t)$，有 $\|\psi(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$。
3. 对于系统 (6.4) 的任何基本解矩阵 $\Phi(t)$，有 $\|\phi(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$。
4. 存在一个系统 (6.4) 的基本解矩阵 $\Phi(t)$，使得 $\|\phi(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$。♡

6.3 常系数齐次线性系统的解的稳定性

考虑一个常系数齐次线性系统

$$\dot{y} = Ay, \tag{6.5}$$

其中 A 是一个 n 阶的常数方阵，$t \in R$，$y \in R^n$。

我们研究解 $y \equiv 0$，$t \in [0, +\infty)$ 的稳定性。

$\Phi(t) = e^{At}$ 是系统 (6.5) 的基本解矩阵。

首先，我们证明关于矩阵 $e^{At}, t \geq 0$ 的一些性质。

设 J 是矩阵 A 的 Jordan 标准型，且存在一个非奇异矩阵 S，使得 $A = SJS^{-1}$。

引理 6.1

1. 当 $t\in[0,+\infty)$ 时，矩阵 e^{At} 有界当且仅当矩阵 e^{Jt} 有界。
2. 当 $t\to+\infty$ 时，$\|e^{At}\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ 当且仅当 $\|e^{Jt}\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$。

♡

设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值。

引理 6.2

如果对于任何 $j=1,2,...,n$，都有 $\operatorname{Re}\lambda_j<0$，那么 $\|e^{At}\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$。

♡

定理 6.5 (关于基本解矩阵 e^{At} 范数的估计)

设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值。那么对于任意 $\delta>\max\limits_{j=1,2,...,n}(\operatorname{Re}\lambda_j)$，存在一个常数 $K\geq 1$ 使得

$$\|e^{At}\|\leq Ke^{\delta t}.$$

♡

定理 6.6 (具有常系数的齐次线性系统的稳定性类型，非临界情况)

设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值。

1. 如果对所有的 $j=1,2,...,n$ 都有 $\operatorname{Re}\lambda_j<0$，则系统 (6.5) 的解 $y\equiv 0$ 是渐近稳定的。
2. 如果存在某个 λ_j，$j\in\{1,2,...,n\}$，使得 $\operatorname{Re}\lambda_j>0$，则系统 (6.5) 的解 $y\equiv 0$ 是不稳定的。

♡

定理 6.7 (常系数齐次系统的稳定性类型，临界情形)

设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，对于任意 $j=1,2,...,n$，有 $\operatorname{Re}\lambda_j\leq 0$，并且存在特征值 λ_j 使得 $\operatorname{Re}\lambda_j=0$。

1. 如果每个特征值 λ_j（使得 $\operatorname{Re}\lambda_j=0$）对应于一维的 Jordan 块（在矩阵的 Jordan 标准型中），则系统 (6.5) 的解 $y\equiv 0$ 是稳定的，但不是渐近稳定的。
2. 如果存在 λ_j 使得 $\operatorname{Re}\lambda_j=0$，并且这个 λ_j 对应于大于一维的 Jordan 块，则系统 (6.5) 的解 $y\equiv 0$ 是不稳定的。

♡

6.4 第一近似下的稳定性

考虑系统

$$\dot{y}=Y(t,y), \tag{6.6}$$

其中 $y\in R^n$，$Y(t,y)$ 在区域 $G\subset R^{n+1}$ 内关于 t 连续且关于 y 连续可微。

设 $y=\varphi(t)$ 是系统 (6.8) 的一个解，在 $t\in[t_0,+\infty)$ 上有定义。

我们假设存在 $\rho_0>0$ 使得集合 $\{(t,y):t\in[t_0,+\infty),\|y-\varphi(t)\|<\rho_0\}$ 包含在区域 G 中。

通过代换 $y=\varphi(t)+x$ 可将系统 (6.8) 化简为 $\dot{x}=Y(t,\varphi(t)+x)-Y(t,\varphi(t))$, 或等价地化简为

$$\dot{x}=P(t)x+g(t,x), \tag{6.7}$$

这里 $P(t)=\dfrac{\partial Y(t,\varphi(t))}{\partial y}$，$g(t,0)=0$，$\lim\limits_{\|x\|\to 0}\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}=0$。

定义 6.4

系统

$$\dot{x}=P(t)x, \tag{6.8}$$

称为系统 (6.9) 的第一近似系统。

♣

设 $\Phi(t,\tau)$ 为系统 (6.10) 的基本 Cauchy 矩阵。

定理 6.8 (关于第一近似系统的零解的稳定性)

若存在常数 $K \geq 1$，$\sigma > 0$ 和 $c \in (0, \sigma/K)$，使得

$$\|\Phi(t,\tau)\| \leq Ke^{-\sigma(t-\tau)} \tag{6.9}$$

对任何 $t, \tau \in R$，$t_0 \leq \tau < t < +\infty$ 成立，并且

$$\|g(t,x)\| < c\|x\| \tag{6.10}$$

对任何 $t \geq t_0$ 成立。则系统 (6.9) 的解 $x \equiv 0$ 是渐近稳定的。 ♡

现在我们考虑系统

$$\dot{x} = Ax + g(t,x), \tag{6.11}$$

其中 A 是一个 n 阶常数方阵，函数 $g(t,x)$ 在区域 $G \subset R^{n+1}$ 中连续，且对于某些 $\rho_0 > 0$ 有 $\{(t,x) : t \in [t_0,+\infty), \|x\| < \rho_0\} \subset G$，并且 $g(t,0) = 0$。

从这些条件可以得出，系统 (6.19) 有一个解 $x \equiv 0$，它在 $t \in [t_0,+\infty)$ 上有定义。

我们假设 $\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}$ 当 $\|x\| \to 0$ 时一致地趋向于零，对 $t \in [t_0,+\infty)$ 成立。

系统 (6.19) 的第一近似系统是一个具有常数系数的齐次线性系统

$$\dot{x} = Ax. \tag{6.12}$$

定理 6.9 (关于具有常数矩阵线性部分的一阶近似系统零解的渐近稳定性)

设 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，对于任意 $j = 1, 2, ..., n$ 有 $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$，且当 $\|x\| \to 0$ 时，$\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}$ 在 $t \in [t_0,+\infty)$ 上一致地趋于零。

则系统 (6.19) 的解 $x \equiv 0$ 是渐近稳定的。 ♡

我们还提供了一个关于不稳定性的定理，但不加证明。

定理 6.10 (关于线性部分具有常数矩阵的一阶近似系统零解的不稳定性)

设矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 中存在 λ_j，使得 $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$，且 $\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}$ 当 $\|x\| \to 0$ 时在 t 上一致地趋于零。那么系统 (6.19) 的解 $x \equiv 0$ 是不稳定的。 ♡

注 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值。若对任何 $j = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq 0$，并且存在特征值 λ_j，使得 $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$，那么系统 (6.19) 的解 $x \equiv 0$ 的稳定性类型取决于函数 $g(t,x)$。

第 7 章 自治系统

7.1 基本定义，自治系统的特征性质

考虑系统

$$\dot{x} = F(x), \tag{7.1}$$

其右侧不明显的依赖于 t。这里 $x \in M \subset R^n$，$t \in R$，向量函数 $F(x)$ 在区域 M 内连续并且满足局部利普希茨条件。

定义 7.1

如果微分方程组的右侧不明显的依赖于 t，则称该微分方程组为自治系统。区域 M 称为自治系统 (7.1) 的相空间。♣

设 $x = \varphi(t)$ 是系统 (7.1) 的一个解，在 $t \in \langle a, b\rangle$ 上定义。

回顾一下，解曲线，即集合 $\Gamma_{\varphi(t)} = \{(t, x) : x = \varphi(t), t \in \langle a, b\rangle\}$ 被称为积分曲线。

定义 7.2

积分曲线 $x = \varphi(t)$ 在相空间 M 上的投影，即集合 $L_{\varphi(t)} = \{\varphi(t) : t \in \langle a, b\rangle\}$，称为该解的轨线。♣

笔记 自治系统 (7.1) 的几何解释。

系统 (7.1) 在相空间 M 上诱导出一个向量场。每个点 $x \in M$ 对应一个向量 $F(x)$，该向量与通过该点的轨线相切。变量 t 成为这条曲线的参数。

定理 7.1 (自治系统的特征性质)

设 $x = \varphi(t)$ 是系统 (7.1) 的解，(a, b) 是解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间。那么对于任意常数 c，函数 $x = \varphi(t + c)$ 也是系统 (1) 的解，并且 $(a - c, b - c)$ 是这个解的最大存在区间。♡

注 显然，解 $x = \varphi(t)$，$t \in (a, b)$，和 $x = \varphi(t + c)$，$t \in (a - c, b - c)$，对应于相同的轨线：$L_{\varphi(t)} = L_{\varphi(t+c)}$。

定理 7.2

对应于不同解的轨线要么不相交，要么重合。♡

7.2 轨线类型

考虑一个自治系统

$$\dot{x} = F(x), \tag{7.2}$$

其中 $x \in M \subset R^n$，$t \in R$，函数 $F(x)$ 在区域 M 中连续并满足局部 Lipschitz 条件。设 $\varphi(t) \equiv x_0$，$x_0 \in M$ 是系统 (7.2) 的一个解。那么这个解对应的轨线就是点：$L_{\varphi(t)} = \{x_0\}$。

定义 7.3

轨迹 $L_{\varphi(t)} = \{x_0\}$（或点 x_0）称为系统 (7.2) 的平衡点或奇点。♣

引理 7.1

点 x_0 是系统 (7.2) 的平衡点当且仅当 $F(x_0) = 0$。♡

引理 7.2 (解的周期性条件)

设 $x=\varphi(t)$ 是系统 (7.2) 的解，在区间 (a,b) 上有定义，$\varphi(t)\neq$ 常数，且 (a,b) 是解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间。设存在 $t_1\in(a,b)$ 和 $t_2\in(a,b)$，使得 $t_1\neq t_2$，$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$。那么 $(a,b)=\mathbb{R}$ 并且对于任何 $t\in\mathbb{R}$ 有 $\varphi(t+(t_2-t_1))=\varphi(t)$，即 $x=\varphi(t)$ 是周期为 (t_2-t_1) 的周期解。

定义 7.4

如果 $x=\varphi(t)$ 是周期解，$\varphi(t)\neq$，那么轨线 $L_{\varphi(t)}$ 是一条闭曲线，称为一个闭轨线。

因此，系统 (7.2) 的任意轨线是以下三种类型之一：

1) $L_{\varphi(t)}$ 为平衡点。此时 $\varphi(t)\equiv x_0$，且该解对任何 $t\in R$ 都有定义。
2) $L_{\varphi(t)}$ 为周期轨线。此时 $x=\varphi(t)$ 是周期解，且该解对任何 $t\in R$ 都有定义。
3) $L_{\varphi(t)}$ 为一般轨线。此时 $\varphi(t)\neq$ 常数，且 $x=\varphi(t)$ 是非周期解，且该解可以对任何 $t\in R$ 或区间 $(a,b)\neq R$ 有定义。

定理 7.3 (关于一般轨线的结构)

设 $L_{\varphi(t)}$ 是一般轨线，对应于解 $x=\varphi(t)$，$t\in(a,b)$。那么映射 $\varphi:(a,b)\to L_{\varphi(t)}$ 是正则的。

定理 7.4 (关于周期轨道的结构)

设 $x=\varphi(t)$ 是系统 (7.2) 的周期解，$\varphi(t)\neq$ 常数。那么函数 $\varphi(t)$ 存在最小正周期，且周期轨道 $L_{\varphi(t)}$ 是圆的正则像。

7.3 二阶齐次线性系统的奇点的 Poincaré 分类

我们考虑一个二阶齐次线性自治系统

$$\dot{y}=Ay, \tag{7.3}$$

其中 $y=(y_1,y_2)^T\in R^2$，A 是一个 [2×2] 阶常数矩阵，$\det A\neq 0$。

系统 (7.3) 具有唯一的平衡点 $y=0$。

设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的特征值，J 是 A 的 Jordan 标准型，$A=S^{-1}JS$，$\det S\neq 0$。然后系统（(7.3) 可以重写为形式 $\dot{y}=S^{-1}JSy$ 或者 $S\dot{y}=JSy$，通过代换 $x=Sy$ 可以得到系统

$$\dot{x}=Jx. \tag{7.4}$$

让我们研究系统 (7.4) 在相平面上的轨线的行为。请注意，系统（7.4）也具有唯一的平衡点 $x=0$。

1. 假设 λ_1,λ_2 是实数，并且 $\lambda_1\neq\lambda_2$。那么 $J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，系统（7.4）可以重写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1x_1,\\ \dot{x}_2=\lambda_2x_2.\end{cases} \tag{7.5}$$

系统（7.5）的解为

$$\begin{cases}x_1=c_1e^{\lambda_1t},\\ x_2=c_2e^{\lambda_2t}, \quad t\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{7.6}$$

解 $x_1=0$，$x_2=0$，对应于轨线 $L_0=\{(0)\}$。解 $x_1=c_1e^{\lambda_1t}$，$x_2=0$，当 $c_1>0$ 时，对应于轨线 $L_{1,0}=\{(x_1,0):x_1>0\}$，如果 $c_1<0$，则对应于轨线 $L_{-1,0}=\{(x_1,0):x_1<0\}$。同样地，解 $x_1=0$，$x_2=c_2e^{\lambda_2t}$，当 $c_2>0$ 时，对应于轨线 $L_{0,1}=\{(0,x_2):x_2>0\}$，如果 $c_2<0$，则对应于轨线 $L_{0,-1}=\{(0,x_2):x_2<0\}$。

对于 $c_1c_2 \neq 0$ 时的（7.6）解，对应的轨线为

$$L_{\varphi(t)} = \left\{(x_1, x_2) : x_2 = c_2\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}\right\}. \tag{7.7}$$

a)

如果 $\lambda_1\lambda_2 < 0$，那么轨线 (7.7) 是位于其中一个坐标象限的双曲线（取决于 c_1 和 c_2 的符号）。

如果 $c_1 > 0$，$c_2 > 0$，那么轨线 (7.7) 确定在 $x_1 > 0$ 且位于第一坐标象限。如果 $c_1 > 0$，$c_2 < 0$，那么这个轨线确定在 $x_1 > 0$ 且位于第四象限。同样地，当 $c_1 < 0$ 时，轨线 (7.7) 确定在 $x_1 < 0$。这个轨线如果 $c_2 > 0$ 则位于第二坐标象限，如果 $c_2 < 0$ 则位于第三象限。

在相平面上轨线的这种分布下，系统 (7.4) 的奇点 $x = 0$ 被称为鞍点。轨线 $L_{1,0}$，$L_{-1,0}$，$L_{0,1}$ 和 $L_{0,-1}$ 称为鞍点的分离线。

假设 $\lambda_1 < 0$，$\lambda_2 > 0$。那么随着 t 的增加，相点 $(x_1, 0)$ 沿着轨线 $L_{1,0}$ 和 $L_{-1,0}$ 向奇点 $x = 0$ 移动，而相点 $(0, x_2)$ 沿着轨线 $L_{0,1}$ 和 $L_{0,-1}$ 远离奇点移动。图 7.1 中的箭头显示了这些运动。图 7.1 中还用箭头表示了沿类型 (7.7) 轨线的相点运动。

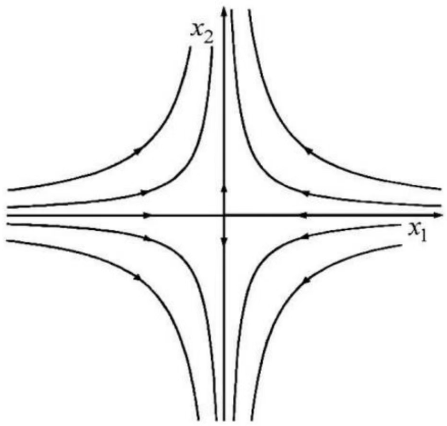

图 7.1: (奇点 $x = 0$ 为鞍点，$\lambda_1 < 0$，$\lambda_2 > 0$)。

b)

如果 $\lambda_1\lambda_2 > 0$，则轨线 (7.7) 是位于其中一个坐标象限内的抛物线（取决于 c_1 和 c_2 的符号）。

在相平面上轨线的这种分布下，系统 (7.7) 的奇点 $x = 0$ 被称为结点。

假设 $\lambda_1 < 0$ 且 $\lambda_2 < 0$，并且 $|\lambda_1| < |\lambda_2|$。那么随着 t 的增加，相点 (x_1, x_2) 沿着所有轨线向奇点 $x = 0$ 移动，图 7.2 中的箭头显示了这一运动。由于 $|\lambda_1| < |\lambda_2|$，轨线 (7.7) 在原点处与水平轴相切。

2. 设 λ_1, λ_2 为实数，且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$。那么矩阵 A 的 Jordan 标准形 J 可以表示为 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 或 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$。

a)

如果 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$，则系统 (7.4) 可以写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases} \tag{7.8}$$

系统 (7.8) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t},\ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.9}$$

解 $x_1 = 0$，$x_2 = 0$，对应于轨线 $L_0 = \{0\}$。解 $x_1 = c_1 e^{\lambda t}$，$x_2 = 0$，当 $c_1 > 0$ 时对应于轨线 $L_{1,0} = \{(x_1, 0) :$

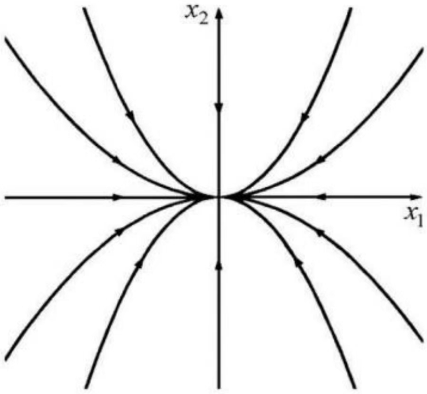

图 7.2: （奇点 $x=0$ 是结点，$\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$，$|\lambda_1|<|\lambda_2|$）。

$x_1>0\}$，当 $c_1<0$ 时，则对应于轨线 $L_{-1,0}=\{(x_1,0):x_1<0\}$。同样地，解 $x_1=0$，$x_2=c_2e^{\lambda t}$，当 $c_2>0$ 时对应于轨线 $L_{0,1}=\{(0,x_2):x_2>0\}$，而当 $c_2<0$ 时，则对应于轨线 $L_{0,-1}=\{(0,x_2):x_2<0\}$。对于 $c_1c_2\neq 0$ 时 (7.8) 的解对应的轨线为

$$L_{\varphi(t)}=\left\{(x_1,x_2):x_2=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)x_1\right\}, \tag{7.10}$$

这些轨线位于其中一个坐标象限内（取决于 c_1 和 c_2 的符号）。
在相平面上轨线的这种分布下，在系统 (7.4) 中，奇点 $x=0$ 被称为星形结点。
设 $\lambda<0$ 已确定。那么随着 t 的增加，相点 (x_1,x_2) 沿着所有轨线向奇点 $x=0$ 移动，在图 7.3 中这种运动用箭头表示。

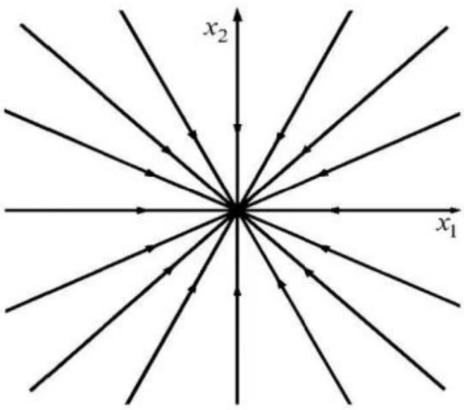

图 7.3: （奇点 $x=0$ 为星形结点，$\lambda<0$）。

b).
如果 $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，则系统 (7.4) 可以写成如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda x_1+x_2,\\ \dot{x}_2=\lambda x_2.\end{cases} \tag{7.11}$$

系统 (7.11) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t},\ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.12}$$

解 $x_1 = 0$，$x_2 = 0$，对应于轨线 $L_0 = \{0\}$。解 $x_1 = c_1 e^{\lambda t}$，$x_2 = 0$，当 $c_1 > 0$ 时对应于轨线 $L_{1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$，而如果 $c_1 < 0$，则对应于轨线 $L_{-1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 < 0\}$。
对于 $c_2 \neq 0$ 时 (7.11) 式中的解对应于轨线

$$L_{\varphi(t)} = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \ln \frac{x_2}{c_2} \right) x_2 \right\}, \tag{7.13}$$

这些是位于上半平面或下半平面上的轨线 (取决于 c_2 的符号)。
在相平面上轨线的这种分布下，奇点 $x = 0$ 被称为单向结点。
假设 $\lambda < 0$。那么随着 t 的增加，相点 (x_1, x_2) 沿着所有轨线向奇点 $x = 0$ 移动，在图 7.4 中用箭头表示这种运动。

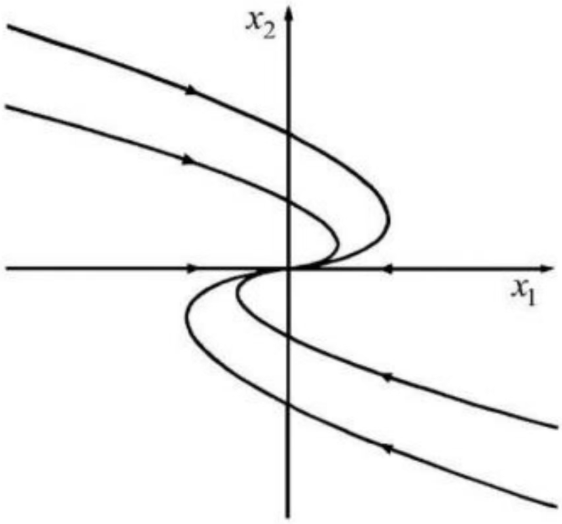

图 7.4: (奇点 $x = 0$ 为单向结点，$\lambda < 0$)。

3. 假设 λ_1, λ_2 为共轭复数：$\lambda_1 = \alpha + i\beta$，$\lambda_2 = \alpha - i\beta$，$\beta \neq 0$。则有 $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$，
系统 (7.4) 可以写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2. \end{cases} \tag{7.14}$$

让我们将系统 (7.14) 重写为极坐标形式：

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta,\ \theta \in R. \end{cases} \tag{7.15}$$

我们得到

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = \alpha r\cos\theta - \beta r\sin\theta, \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = \beta r\cos\theta + \alpha r\sin\theta, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r, \\ \dot{\theta} = \beta. \end{cases} \tag{7.16}$$

系统 (7.16) 的解为

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta = \theta_0 + \beta t. \end{cases} \tag{7.17}$$

a).

如果 $\alpha \neq 0$，那么与解 (7.17) 对应的轨线是当 $\alpha > 0$ 时朝正方向趋向奇点的螺旋线（螺旋汇），而当 $\alpha < 0$ 时则是朝负方向趋向奇点的螺旋线（螺旋源）。

在相平面上轨线的这种分布下，系统 (7.4) 中的奇点 $x = 0$ 被称为焦点。

设 $\alpha < 0$，$\beta < 0$。那么随着 t 的增加，相点沿螺旋线向奇点移动。图 7.5 中用箭头表示了这种运动。

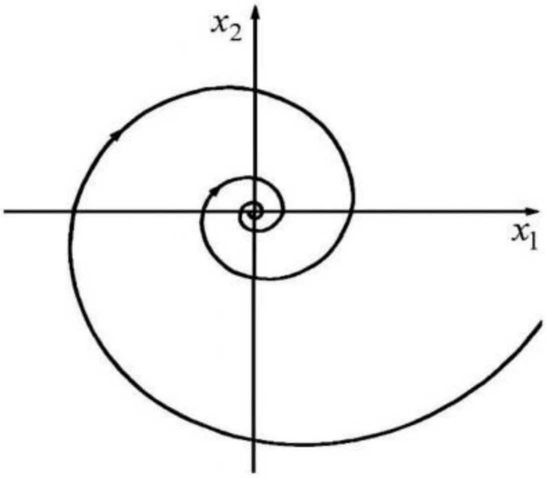

图 7.5:（奇点 $x = 0$ 是焦点，$\alpha < 0$，$\beta < 0$）。

b).

如果 $\alpha = 0$，那么轨线 (7.17) 是圆。

在相平面上轨线的这种分布下，奇点 $x = 0$ 被称为中心。

设 $\beta > 0$。那么随着 t 的增加，相点 (x_1, x_2) 沿圆周以正方向移动。图 7.6 中用箭头表示了这种运动。

注 系统 (7.3) 的相图是通过使用仿射坐标变换从系统 (7.4) 的相图得到的。系统 (7.3) 的奇点 $y = 0$ 与系统 (7.4) 的奇点 $x = 0$ 具有相同的庞加莱类型。在图 7.7 中显示了系统 (7.3) 的相图，在该情况下系统的奇点是一个鞍点。鞍点的分离轨线方向由矩阵 A 的特征向量确定。

7.4 二阶系统的平衡状态

我们考虑一个二阶自治系统

$$\dot{x} = Ax + g(x), \tag{7.18}$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$，A 是 $[2 \times 2]$ 常数矩阵，$\det A \neq 0$，$g(x) \in C^2(M)$，M 是 R^2 中的一个区域，$0 \in M$，$g(0) = 0$，并且

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

假设平衡点 $x = 0$ 是孤立的（即，在点 $x = 0$ 的某个邻域内没有系统 (7.18) 其他的平衡点）。

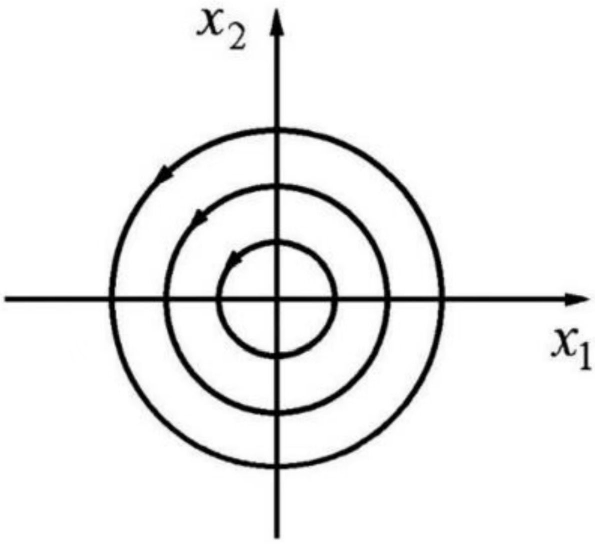

图 7.6: （奇点 $x=0$ 是中点，$\alpha=0$，$\beta>0$）。

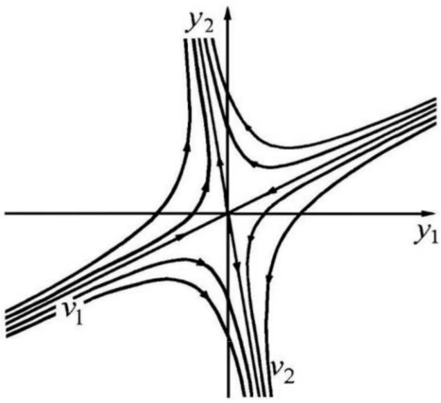

图 7.7: （奇点 $y=0$ 是鞍点，$\lambda_1<0$，$\lambda_2>0$

考虑系统 (7.18) 在点 $x=0$ 邻域内的线性化

$$\dot{x}=Ax \tag{2}$$

定理 7.5 (庞加莱)

设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的特征值。如果 $\mathrm{Re}\,\lambda_j\neq 0$，$j=1,2$，那么系统 (7.18) 的平衡点 $x=0$ 与系统 (7.19) 的平衡点 $x=0$ 具有相同的庞加莱类型。