

树与最小支撑树

Tree and minimum spanning tree

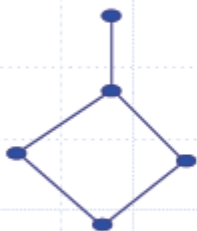
运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

一、树的概念(Tree)

无圈的连通图称为树

例 判断下面图形哪个是树：



(A)



(B)



(C)

二、树的性质

性质1 如果树 T 的点数不小于2，那么至少有两个悬挂点

性质2 如果一个图 G 具有 n 个顶点，那么图 G 是一个树的充分必要条件是图 G 不含圈且恰有 $n-1$ 条边。

性质3 如果一个图 G 具有 n 个顶点，那么图 G 是一个树的充分必要条件是图 G 是连通图且恰有 $n-1$ 条边

性质4 图 G 是一个树的充分必要条件是任意两个顶点恰有一条链

二、树的性质

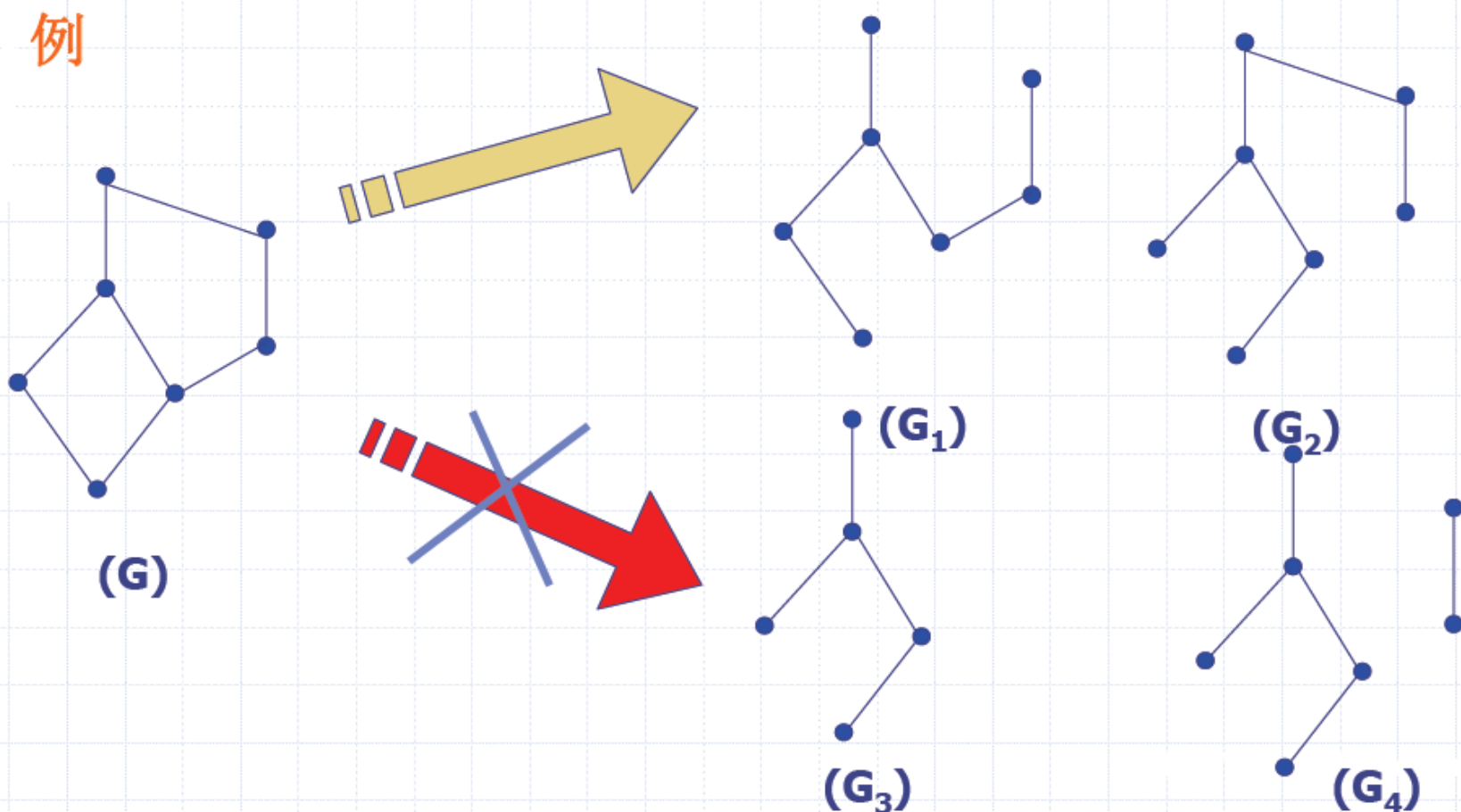
设 T 是一个点数大于3的树，则下列六个定义是等价的：

- (1) T 连通且无回路；
- (2) T 有 $n-1$ 条边且无回路；
- (3) T 连通且有 $n-1$ 条边；
- (4) T 连通且每条边都是割边；
- (5) T 的任两点间都有唯一的路相连；
- (6) T 无回路，但在任一对不相邻的点间加连一条边，则构成唯一的一个回路。

三、图的支撑树(spanning tree)

若一个图 $G = (V, E)$ 的支撑子图 $T = (V, E')$ 构成树，则称 T 为 G 的支撑树，又称生成树、部分树。

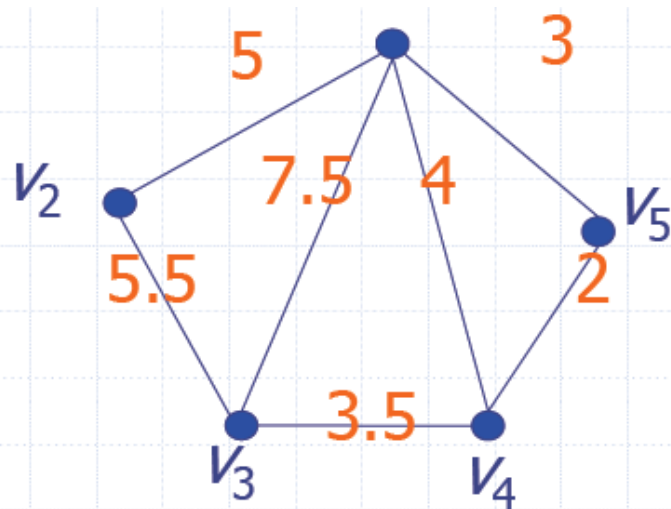
例



三、图的支撑树(minimum spanning tree)

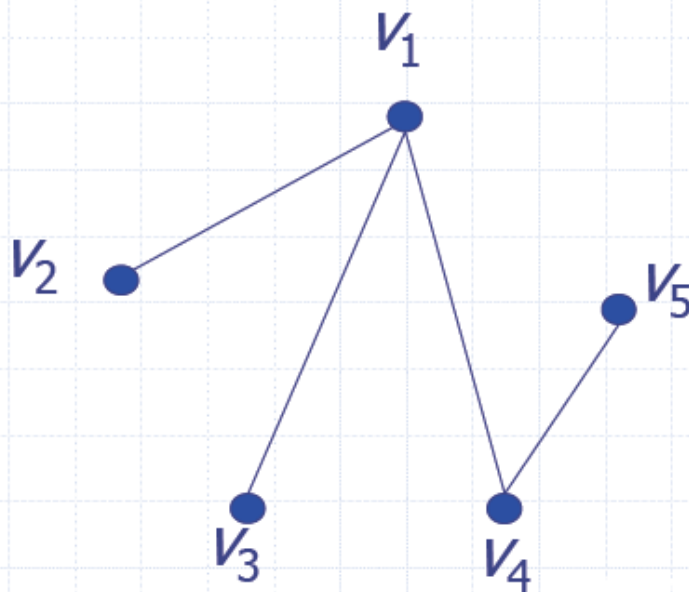
图的支撑树的应用举例

例 某地新建**5**处居民点，拟修道路连接**5**处，经勘测其道路可铺成如图所示。为使**5**处居民点都有道路相连，问至少要铺几条路？



解：

该问题实为求图的支撑树问题，共需铺**4**条路。

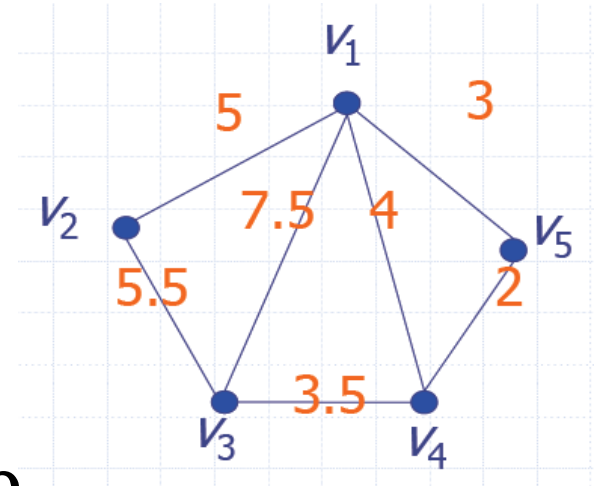
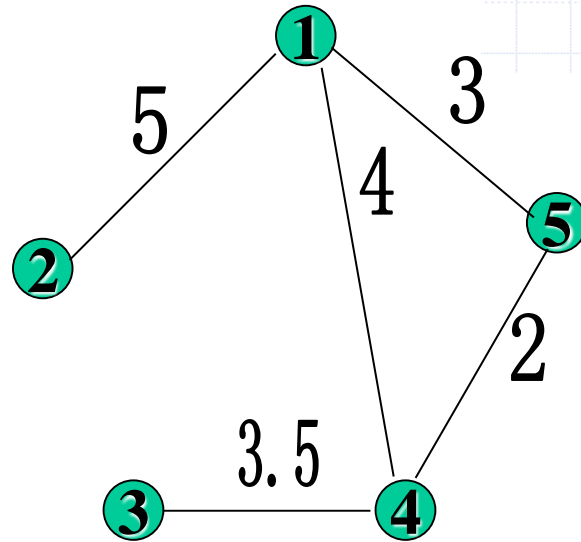


三、图的最小支撑树

图G权最小的支撑树称为最小支撑树

算法1(避圈法,
Kruskal法)

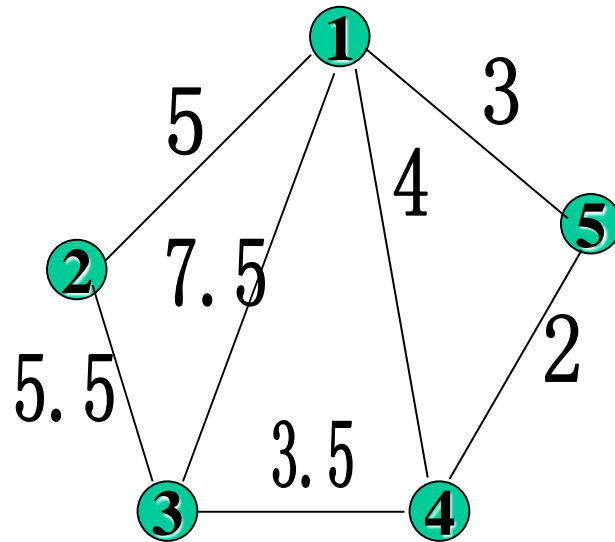
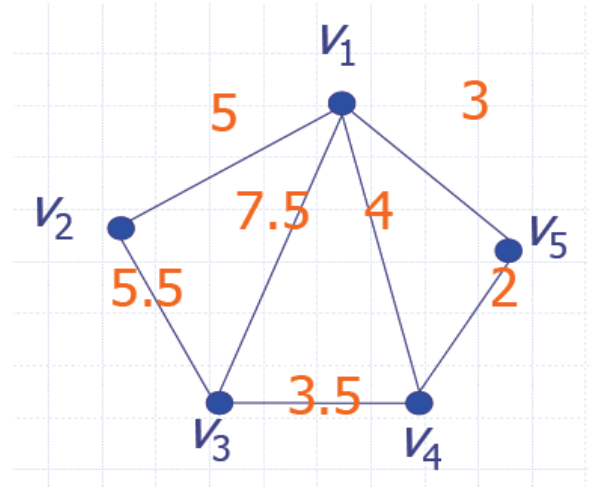
将边按权从小到大依次添入图中, 若出现圈, 则删去其中最大边, 直至填满 $n-1$ 条边为止(n 为顶点数)。



三、图的最小支撑树

算法2(破圈法)

在图中找圈，并删除其中最大边.如此进行下去,直至图中没有圈止.



三、图的最小支撑树

算法3(Prim法) 一点一点加入最小支撑树，加入的原则是该点与已加入点中的某一点形成的边是连接已加入点和未加入点的所有边中权重最小的。

