线性规划的对偶理论

——对偶单纯形法

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

单纯形法与对偶单纯形法比较

1. 单纯形法中的b对应于对偶单纯形法中的σ

2. 单纯形法中的σ作为检验数，对偶单纯形法中的b作为检验数

3. 单纯形法中的$b \geq 0$，对偶单纯形法中的$\sigma \leq 0$

4. 单纯形法中当$\sigma \leq 0$时得到最优解

   对偶单纯形法中当$b \geq 0$时得到最优解

5. 单纯形法的可行解$X = B^{-1}b$，对偶单纯形法的可行解$Y = C_B B^{-1}$

   (由于松弛变量X_S对应的检验数为$-C_B B^{-1}$，由于X_S与Y对应，又由于$-C_B B^{-1} \leq 0$，可得$Y = C_B B^{-1} \geq 0$)

单纯形法的步骤

第 1 步　求得基可行解（$X = B^{-1}b$）

第 2 步　判定基可行解是最优解(判定法则：检验数 $\sigma \le 0$)

第 3 步　变量交换

3.1　确定非基变量 x_j 成为基变量

规则：$\sigma_j = \max\{\sigma_k \mid \sigma_k > 0\}$

3.2　确定基变量 x_t 成为非基变量(x_t 为 i 行的基变量)

规则：$$a_{ij} = \min\{\frac{b_k}{a_{kj}} \Big| a_{kj} > 0\}$$

第四步　矩阵变换——新的基矩阵变成单位矩阵，同时形成新的检验数

对偶单纯形法的步骤

第 1 步　求得基可行解（$Y=C_BB^{-1}$）

第 2 步　判定基可行解是最优解(判定法则：检验数 $b\geq 0$)

第 3 步　变量交换

3.1　确定基变量 x_t 成为非基变量(x_t 为 i 行的基变量)

规则：$b_i=\min\{b_k \mid b_k<0\}$

3.2　确定非基变量 x_j 成为基变量

规则：$a_{ij}=\min\{\dfrac{\sigma_k}{a_{ik}} \mid a_{ik}<0\}$

第 4 步　矩阵变换——新的基矩阵变成单位矩阵，同时形成新的检验数

例： $\min Z = 2x_1 + x_2$

$$s.t\begin{cases}3x_1 + x_2 \ge 3\\4x_1 + 3x_2 \ge 6\\x_1 + 2x_2 \le 3\\x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

标准化

$$\max \ Z' = -2x_1 - x_2$$

$$s.t\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 = 3\\4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6\\x_1 + 2x_2 + x_5 = 3\\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\end{cases}$$

$$\max \ Z' = -2x_1 - x_2$$

$$s.t\begin{cases}-3x_1 - x_2 + x_3 = -3\\-4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6\\x_1 + 2x_2 + x_5 = 3\\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\end{cases}$$

c_j			-2	-1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-3	-3	-1	1	0	0
0	x_4	-6	-4	-3	0	1	0
0	x_5	3	1	2	0	0	1
检验数			-2	-1	0	0	0

c_j			-2	-1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-3	-3	-1	1	0	0
0	x_4	**-6**	-4	**-3**	0	1	0
0	x_5	3	1	2	0	0	1
检验数			-2	-1	0	0	0
θ			1/2	**1/3**	—	—	—

1.根据最小资源系数规则确定出基变量

2.根据θ规则确定入基变量

C_j			-2	-1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-1	-5/3	0	1	-1/3	0
-1	x_2	2	4/3	1	0	-1/3	0
0	x_5	**-1**	**-5/3**	0	0	-1/3	1
检验数			-5/3	0	0	-2/3	0
θ			**1**	—	—	2	—

C_j			-2	-1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	0	0	0	1	-3/5	-2/5
-1	x_2	6/5	0	1	0	-1	-1
-2	x_1	3/5	1	0	0	4/5	1/5
检验数			0	0	0	-2/5	-3/5

所有资源系数均大于等于0，获得最优解

$$
\text{解线性规划问题的方法}\begin{cases}\text{单纯形法}\\\text{对偶单纯形法}\end{cases}
$$

如何用？

1. 表中有单位矩阵 I，当 $b \geq 0$ 时用单纯形法

2. 表中有单位矩阵 I，当 $\sigma \leq 0$ 时用对偶单纯形法

3. 二者都不满足时，引入人工变量或用两阶段法

练习：用对偶单纯形法求解下列问题

$$\min \ Z = x_1 + x_2$$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优解和最优值：$\begin{cases} X^* = \left(\dfrac{21}{13}, \ \dfrac{10}{13} \right) \\ Z^* = \dfrac{31}{13} \end{cases}$