整数规划的理论与求解

——指派问题与匈牙利算法

运筹学研究所
哈尔滨工业大学经济与管理学院

经典指派问题

n个员工分配作 n 项工作，i 个员工做 j 项工作的成本为c_{ij}，要求一个人只做一项工作，一项工作只能由一个人做，i =1,…, n; j = 1,…, n。求最佳分配方案

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

指派问题的解应对应于成本矩阵的不同行与不同列，且总成本最小

例

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

c_{ij}

指派问题的数学模型

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & 第i员工分配做第j项工作\\ 0 & 否则\end{cases}$$

$$\text{Min } z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij}=0或1, \qquad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n$$

指派问题的性质

定理： 对于指派问题，成本矩阵的任一行(或列)减去(或加上)一个相同的数得到的新指派问题与原问题同解

$$z' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{kj} \pm s)x_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} + (\pm s)\sum_{j=1}^{n} x_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} + (\pm s)$$

$$= z + (\pm s)$$

匈牙利法的基本思路：

对指派矩阵C的行和列减去某个常数，将C化成有n个位于不同行不同列的零元素，令这些零元素对应的变量取1，其余变量取零，既得指派问题的最优解

说明：

1. 书上的算法比较繁琐, 且计算量大, 一般教材中采用本课件提供的算法.

2. 课堂上讲的算法本质上是这种算法的变形, 不再列出.

例：求费用矩阵为右表的指派问题的最优解

人 \ 工作 费用	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	12
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	6

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

第一步：每行减去最小元素，每列减掉最小元素;

第二步：对零元素画圈打×;

第三步：划线覆盖零元素;

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{l} -7 \\ -6 \\ -7 \\ -6 \\ -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 0 & \cancel{0} & 4 \\ \cancel{0} & 6 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{lllll} \surd & & & & \end{array} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{array}$$

$\boxed{\text{得4个○，且不存在没打×的0}}$

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 6 & 3 & 6 & 2
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \surd \\ \\ \surd
\end{array}
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccc}
\surd & & & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
7 & 0 & 2 & \cancel{0} & 2 \\
4 & 3 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\
0 & 8 & 3 & 5 & 3 \\
11 & 8 & \cancel{0} & 0 & 4 \\
\cancel{0} & 4 & 1 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

匈牙利法的具体步骤：

第一步：变换指派问题的费用矩阵，使其在各行各列都出现0元素：

方法：首先每行元素减去该行的最小元素，然后每列减去该列的最小元素

第二步：进行试指派（画○）

方法：从含0元素最少的行或列开始，圈出一个0元素，用 ○表示，然后划去该○所在的行和列中的其余0元素，用×表示，依次类推。

若矩阵中的○的个数等于n，则得最优解

若矩阵中的○的个数 < n，则进行第三步

第三步：做能复盖所有0元素的**最小直线集合**：

1) 对没有○的行打√号
2) 对打√号的行上所有0元素的列打√号
3) 再对打√号的列上所有○的行打√号
4) 重复以上步骤直到得不出新的打√号为止
5) 对没有打√号的行画横线，所有打√号的列画纵线，所得到的直线既是复盖所有0元素的最小直线集合

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。

练习

$$
\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & \cancel{0} & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & \cancel{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \surd \\ \surd \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cccc} & \surd & & \end{array} &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & \cancel{0} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 6 & 2 & \cancel{0} \end{bmatrix}
$$

一般指派问题

- 最大化指派问题
- 人数和工作数不等的指派问题
- 一个人可做几项工作的指派问题
- 某项工作一定不能由某人做的指派问题

最大化指派问题

最大化指派问题

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 12 & 9 & 2 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 11 & 7 & 17 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

最大值

$$\begin{bmatrix} 17-4 & 17-8 & 17-7 & 17-15 & 17-12 \\ 17-12 & 17-9 & 17-2 & 17-14 & 17-10 \\ 17-6 & 17-9 & 17-12 & 17-8 & 17-7 \\ 17-11 & 17-7 & 17-17 & 17-6 & 17-10 \\ 17-6 & 17-9 & 17-12 & 17-10 & 17-6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 15 & 3 & 7 \\ 11 & 8 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 0 & 11 & 7 \\ 11 & 8 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

最小化指派问题

人数和工作数不等的指派问题

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 \\ 12 & 9 & 2 & 14 \\ 6 & 9 & 12 & 8 \\ 11 & 7 & 17 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 0 \\ 12 & 9 & 2 & 14 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 0 \\ 11 & 7 & 17 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

一个人可做几项工作的指派问题

A_1可同时做三项工作

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_1' \\ A_1'' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

反例1

1	1	3	0	3	3	3	3	0
1	1	0	0	1	2	2	2	0
1	2	0	3	3	1	3	2	3
1	0	0	3	0	2	0	0	1
2	0	0	0	1	1	0	2	0
0	2	0	3	1	1	2	0	2
2	3	1	0	0	0	2	2	0
2	1	3	0	2	0	3	0	1
0	3	0	1	0	3	2	0	3

反例2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

线性规划有关的英文词汇

- **Operational/operations research 运筹学**
- **Linear programming 线性规划 Feasible domain 可行域**
- **Convex set 凸集 Basic feasible solutions 基础可行解**
- **Simplex algorithm 单纯型法 Pivot 主元 Pivoting 主元变换**
- **Revised, dual simplex algorithm 修正、对偶单纯型法**
- **Relative cost 相对成本(机会成本) Shadow price 影子价格**
- **Slack, Surplus, Artificial variable 松弛，剩余，人工变量**
- **Unbounded, Infeasible, Degenerate solution 无界解, 无可行解, 退化解**
- **Duality 对偶性 Primal, dual problem 原问题，对偶问题**
- **Complementary slackness 互补松弛 Sensitivity analysis 灵敏度分析**
- **Ttransportation problem 运输问题**
- **Assignment problem 任务分配(指派) 问题**
- **Bipartite matching 两部图匹配 Hungarian method 匈牙利算法**

小结

- 会用分枝定界法
- 会用割平面法
- 会用0-1规划建模
- 会解指派问题