姓名：__________ 班号：________ 学号：__________

2018 年春实变函数第二次测验题

一、 判断题（每题 7 分，共 70 分）

1. 如果 $f \in L(E)$，记 $E_n = E(|f| < n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} mE_n = mE$。 ( )

2. 若 f_n 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$，则 f 也是 Riemann 可积的。 ( )

3. 若 f 是可测集 E 上有界可测函数，则 $f^2 \in L(E)$。 ( )

4. 若 $u_n \in L(E)$，且 $\int_E |u_n| dm \le \dfrac{1}{n^2} \ (n = 1,2,\cdots)$，则对几乎所有 $x \in E$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都收敛。 ( )

5. 若 $f:[0,1] \to [0,\infty)$ 可测，且对任何自然数 n，有 $\sup\limits_{n} \int_{[0,1]} f^n dm < +\infty$，则对几乎所有 $x \in [0,1]$，有 $|f(x)| \le 1$。

6. 若 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界变差函数，则 f^2 在 $[a,b]$ 上也是有界变差函数。 ( )

7. 若 $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是绝对连续函数，则 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是绝对连续函数。 ( )

8. 已知 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 可积，$f(0) = 0$，$f'(0)$ 存在，那么 $x^{-3/2} f(x) \in L[0,1]$。 ( )

9. 若 $f \in L[0,1]$，且 $-1 \le \int_{[0,1]} f dm \le 1$，则对几乎所有 $x \in [0,1]$，成立 $-1 \le f(x) \le 1$。 ( )

10. 若 $f_n \in L[0,1]$，且 $f_n \xrightarrow{m} f$。若 $\sup\limits_{n} \int_E |f_n| dm < +\infty$，则 $f \in L[0,1]$。 ( )

二、 证明题（每题 10 分）

姓名：___________ 班号：_________ 学号：____________

---

1. 证明 $\int_{(0,1)}\frac{x}{1-x}\ln\frac{1}{x}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

2. 若 $f_n, f\in L(E)$ 且 $f_n\to f\ (a.e.)$，若

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n|dm=\int_E|f|dm,$$

则 $\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|dm=0$

3. 设 $mE<+\infty$， $f:E\to \mathbb{R}$ 可测，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}mE\left(|f|\geq n\right)$ 收敛，则 $f\in L(E)$。