大学物理学

第 2 篇 电 磁 学

电磁学(electromagnetism)研究对象

电磁相互作用及其运动规律

主要特点: 研究对象不再是分离的实物, 而是连续分布的场; 用空间函数(如 $\vec{E}$, U, $\vec{B}$ 等)描述其性质.

电磁学 →

静电场

恒定磁场

变化中的电磁场

电磁学篇

第6章 电荷与电场

第6章 电荷与电场

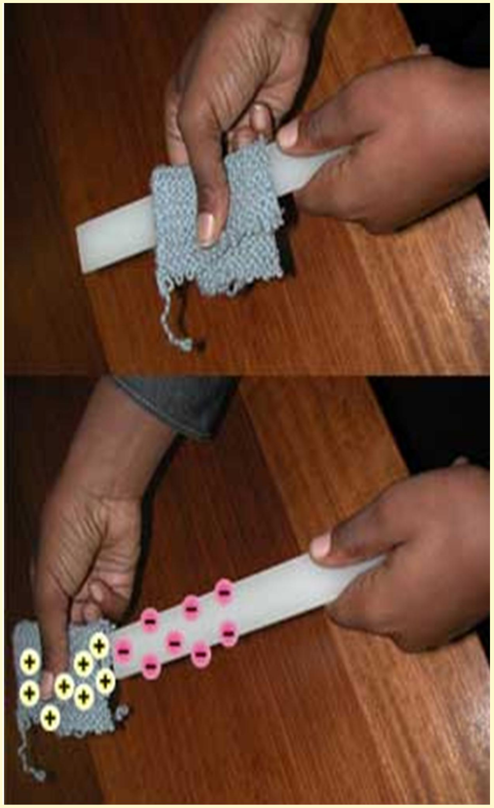
本章任务: 研究相对于观察者静止的电荷在空间激发的电场——静电场(electrostatic field)的规律.

§6-1 库仑定律与电场强度

6.1.1 电荷及其性质

电荷(electric charge): 物质所带的电, 它是物质的固有属性. 自然界中存在着两种不同性质的电荷, 一种称为**正电荷**, 另一种称为**负电荷**.

电荷的基本性质: 电荷与电荷之间存在相互作用力, 同性相斥; 异性相吸.



电量(electric quantity): 带电体所带电荷的量值, 一般用q表示, SI制中, 其单位为库仑(C).

电荷量子化: $q=ne$ $(n=1,2,3,\ldots)$

基本电荷量: $e=1.602\times10^{-19}$ C

电荷守恒定律: 在一个孤立的带电系统中, 无论发生什么变化, 系统所具有的正负电荷电量的代数和保持不变.

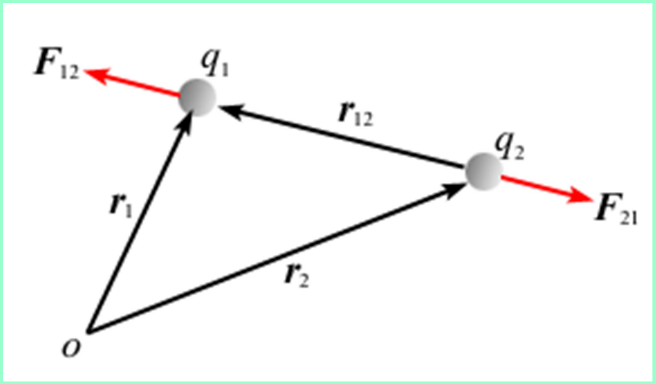
电荷的运动不变性: 一个电荷的电荷量与它的运动状态无关, 即系统所带电荷量与参考系的选取无关.

6.1.2 库仑定律

1. 点电荷(理想模型): 带电体的大小和带电体之间的距离相比很小时, 就可看作点电荷. (忽略其形状和大小)

2. 库仑定律(Coulomb's law): 真空中两静止点电荷之间的作用力与它们的电量的乘积成正比, 与它们之间距离的平方成反比.

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}}$$



ε_0: 真空中介电常数(真空中电容率)

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ (\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{C}^2)$$

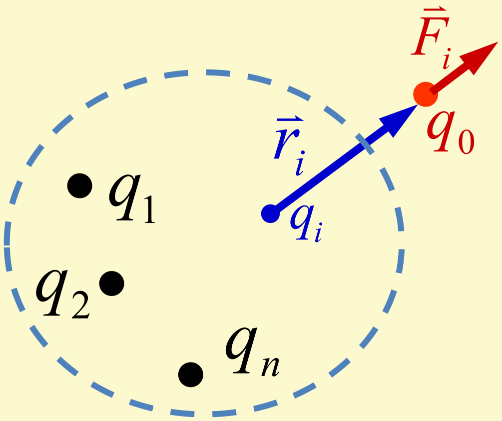
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

3. 静电力叠加原理

两点电荷间相互作用力不因其它电荷的存在而改变. 点电荷系对某点电荷的作用等于系内各点电荷单独存在时对该电荷作用的**矢量和**.

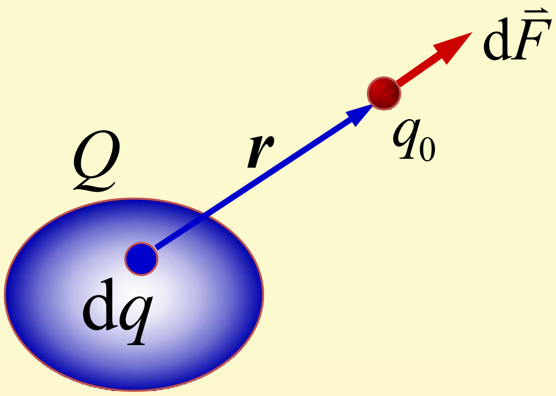
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$= \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$



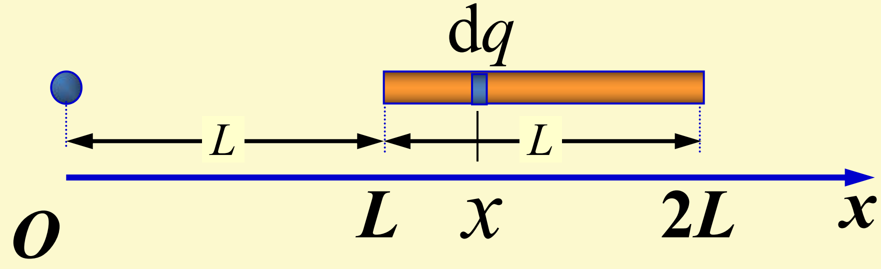
对连续分布带电体, 选取**电荷元(elementary charge) dq**, 应用库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{q_0 \mathrm{d}q}{r^2}\hat{r}$$



适用条件: 点电荷

例6-1 如图所示，一长度为L、带电量为q的细棒，其一端点与带电量也为q的点电荷相距L. 求两带电体间的静电力.



解 建立如图所示坐标系

在杆上选电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x=\frac{q}{L}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}F=\frac{q\cdot\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

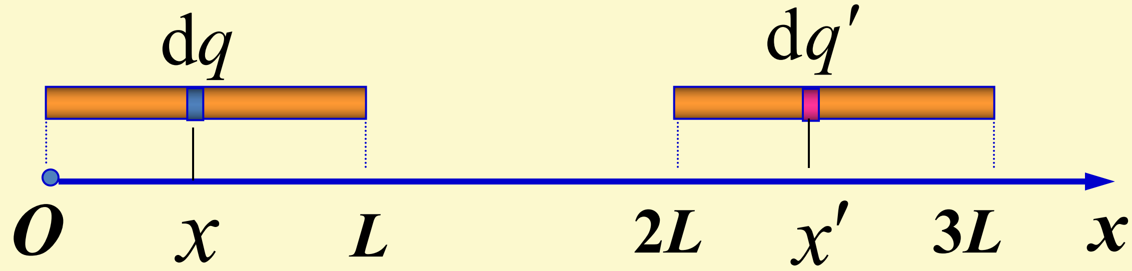
方向: →

$$F=\int_L^{2L}\frac{q\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L^2}$$

方向: →

练习 已知两带电细杆电荷线密度均为λ、长度均为L，端点相距L. 求两带电直杆间的静电力.

解 建立如图所示坐标系



在左、右两杆上分别选电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}q'=\lambda\mathrm{d}x'$$

$$\mathrm{d}F=\frac{\lambda\mathrm{d}x\lambda\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}$$

$$F=\int_{2L}^{3L}\mathrm{d}x'\int_0^L\frac{\lambda^2\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$

6.1.3 电场与电场强度

1.“场”概念的提出

17世纪:

英国牛顿: 力可以通过一无所有的空间以无穷大速率传递, 关键是归纳力的数学形式而不必探求力传递机制.

法国笛卡尔: 力靠充满空间的“以太”的涡旋运动和弹性形变传递.

18世纪:力的超距作用思想风行欧洲大陆.

英国法拉第: 探索电磁力传递机制, 由电极化现象和磁化现象提出“场”的概念.

19 世纪: 英国麦克斯韦建立电磁场方程, 定量描述场的性质和场运动规律.

电荷 $\rightleftarrows$ 电场 $\rightleftarrows$ 电荷

电场(electric field): 电荷周围存在着的一种特殊**物质**.

场的物质性体现:

➢给电场中的带电体施以力的作用
—— **电场具有动量**

➢当带电体在电场中移动时, 电场力作功——**电场具有能量**.

电场与实物的最大特征区别:

实物具有不可入性, 以空间间断形式存在, 可以作参考系; **场**具有可入性, 以连续形式存在, 具有可叠加性, 不能作为参考系.

电场强度 $\vec{E}$: 带电体在场中受力角度描述场

电势U: 电场力移动电荷作功, 即能量角度描述场

2. 电场强度(electric field intensity)

场源电荷: 产生电场的点电荷、点电荷系、或带电体.

试验电荷: 电量足够小的点电荷

与场点对应

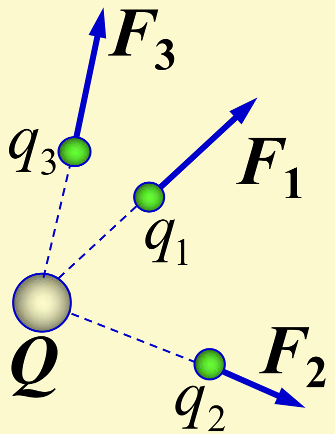
略去对场源电荷分布的影响

基本事实:

1) 在电场的不同点上放同样的正试验电荷q_0

电场中各处的力学性质不同.

2) 在电场的同一点上放不同的试验电荷



$$\frac{\vec{F}_1}{q_1}=\frac{\vec{F}_2}{q_2}=\frac{\vec{F}_3}{q_3}=\cdots=\frac{\vec{F}_0}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

结论: $\boxed{\dfrac{\vec{F}}{q_0}=\text{恒矢量}}$

定义为电场强度

定义 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$ $\begin{cases} \text{大小: 等于单位试验电荷在该点所受电场力} \\ \text{方向: 与正试验电荷受力方向相同} \\ \text{单位: N · C}^{-1}\text{ 或 V·m}^{-1} \end{cases}$

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r}$$

讨论:

① 反映电场本身的性质, 与试验电荷无关.

② 电场强度是点函数 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$ 静电场 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$

③ 均匀电场: 电场强度在某一区域内, 大小、方向均相同.

④ 电场中电荷受力:

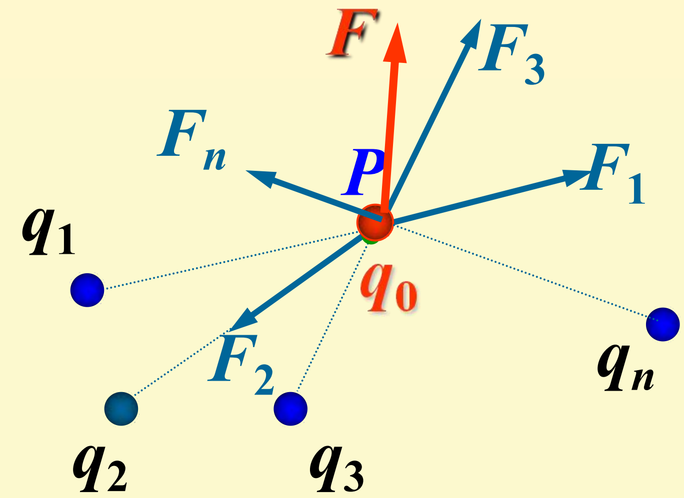
$$\vec{F}=q\vec{E} \qquad \vec{F}=\int_Q \vec{E}\,\mathrm{d}q$$

6.1.4 场强叠加原理

由静电场力叠加原理

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$



$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_i^n \vec{E}_i}$$

场强叠加原理: 点电荷系电场中某点总场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强**矢量和.**

静电场为空间矢量函数

研究静电场即对各种场源电荷求其 $\vec{E}$ 分布

电场强度的计算

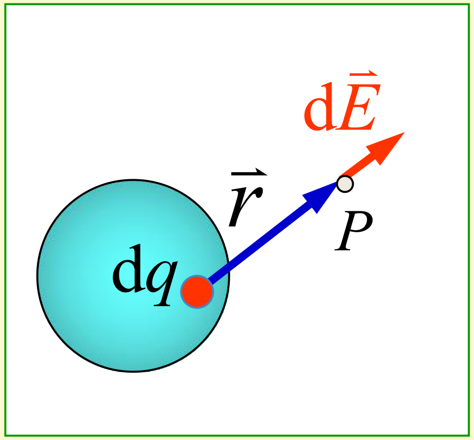
1. 点电荷的电场

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

2. 点电荷系电场

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$$

3. 连续带电体电场



$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\vec{r}\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$$

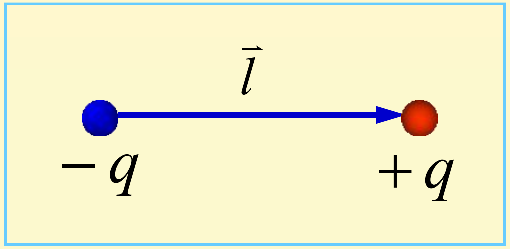
$$\mathrm{d}q = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{d}l \\ \sigma\,\mathrm{d}S \\ \rho\,\mathrm{d}V \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = \int \mathrm{d}E_x \\ E_y = \int \mathrm{d}E_y \\ E_z = \int \mathrm{d}E_z \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

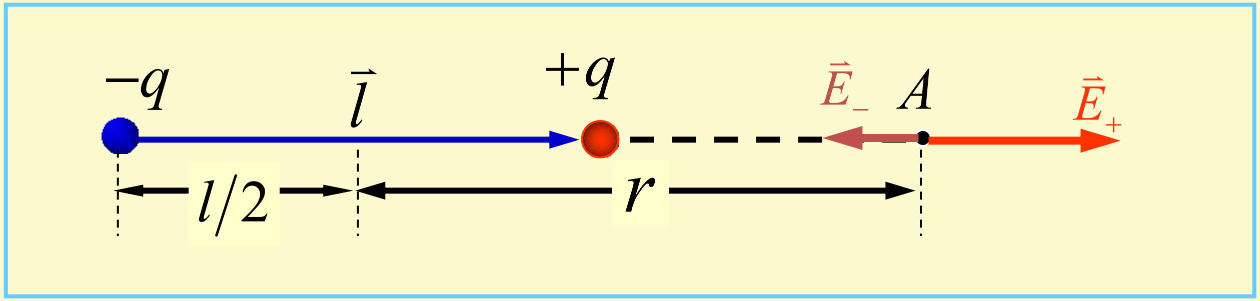
例6-2 求电偶极子(electric dipole)的电场.

电偶极子: 相距很近的等量异号电荷

电偶极矩(electric moment): $\vec{P}_{\mathrm{e}} = q\vec{l}$



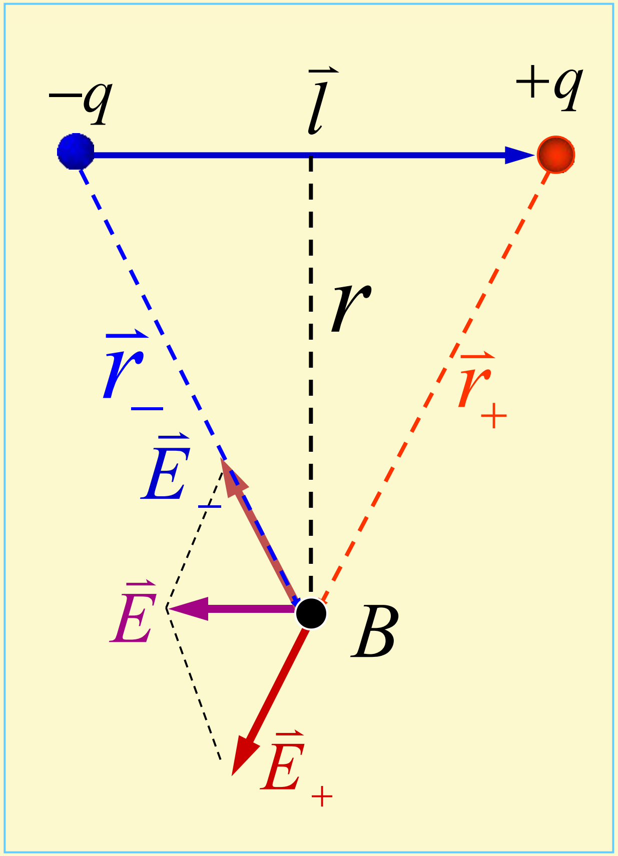
解 1) 轴线延长线上A的场强



$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_+ + \vec{E}_-\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2} \xrightarrow{r>>l} \vec{E} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{e}}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

解 2) 中垂面上B的场强



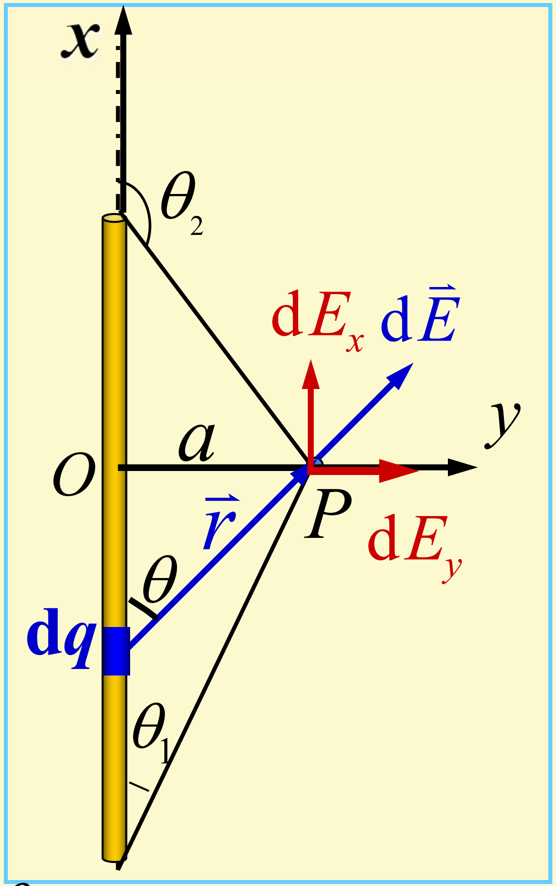
$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_+ +\vec{E}_- =\frac{q\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3}+(-\frac{q\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3})}$$

$r>>l$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\vec{r}_+ -\vec{r}_-)=-\frac{q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$=-\frac{\vec{P}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例6-3 求长度为l、电荷线密度为λ的均匀带电直细棒周围空间的电场.



解 建立坐标系O-xy

取电荷元$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\begin{cases}\text{大小:}\ \mathrm{d}E=\dfrac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\ \text{方向:与}\ x\ \text{轴夹}\ \theta\ \text{角}\end{cases}$$

各电荷元在P点场强方向不同, 用分量积分:

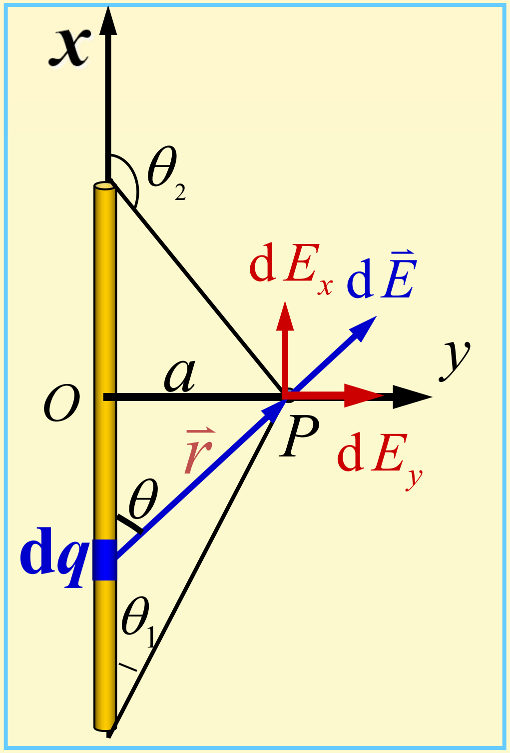
$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta \qquad E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta \qquad E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$

统一变量:

$$x = -a\,\mathrm{ctan}\theta \qquad \mathrm{d}x = a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_P = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

与 $+x$ 夹角 $\alpha = \arctan\dfrac{E_y}{E_x}$

讨论:

1) 棒延长线上一点 $\mathrm{d}\vec{E}_x = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$

$$\vec{E} = \int_b^{b+l} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i} = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 b(b+l)}\vec{i}$$

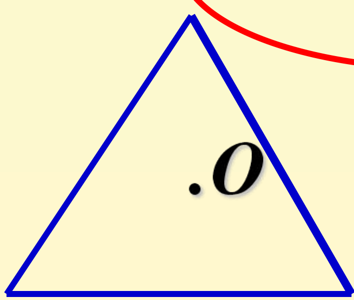
$$b >> l \qquad E \approx \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

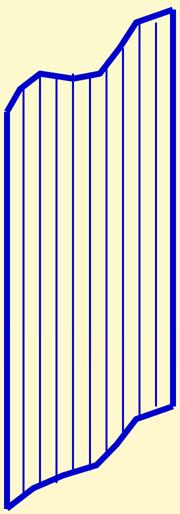
2) 靠近直线场点

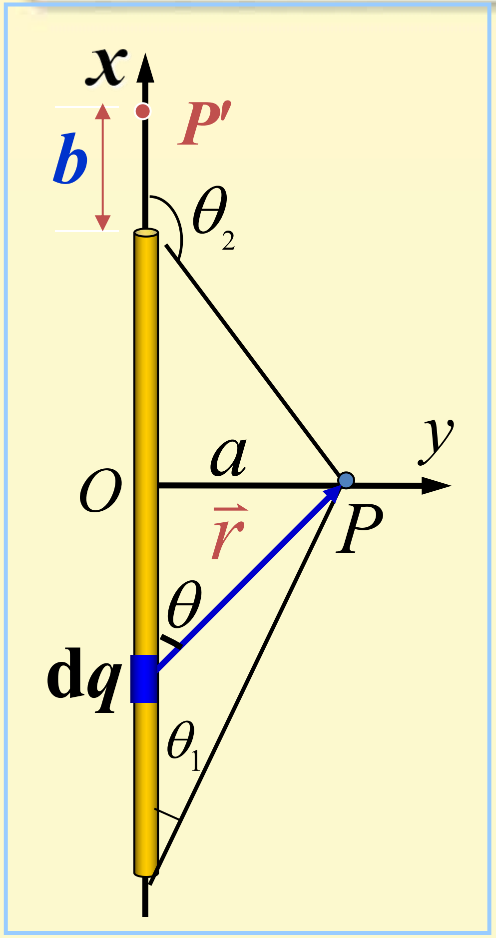
$$a << \text{棒长} \quad \theta_1 \approx 0,\ \theta_2 \approx \pi$$

$$E_x = 0 \qquad E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

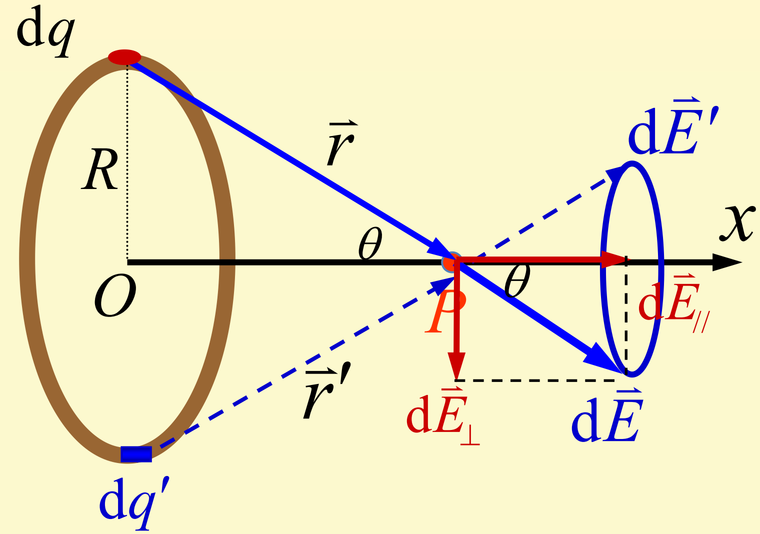
理想模型:无限长带电直线场强公式







例6-4. 求半径为R、带电量为q的均匀带电细圆环轴线上的电场.



解 在圆环上取电荷元$\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

各电荷元在P点$\mathrm{d}\vec{E}$方向不同, 分布于一个圆锥面上

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}\vec{E}_{\perp} + \mathrm{d}\vec{E}_{//}$$

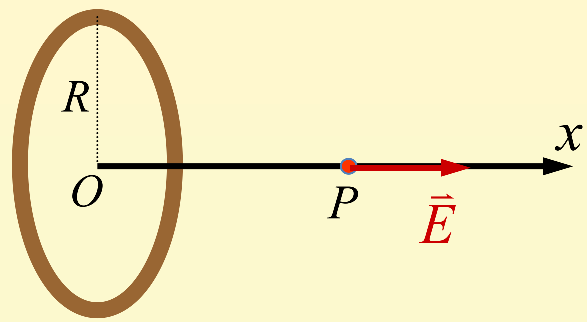
由对称性可知 $E_{\perp} = \int \mathrm{d}E_{\perp} = 0$

$$E = E_{//} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}\cdot\frac{x}{r}$$

$$= \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



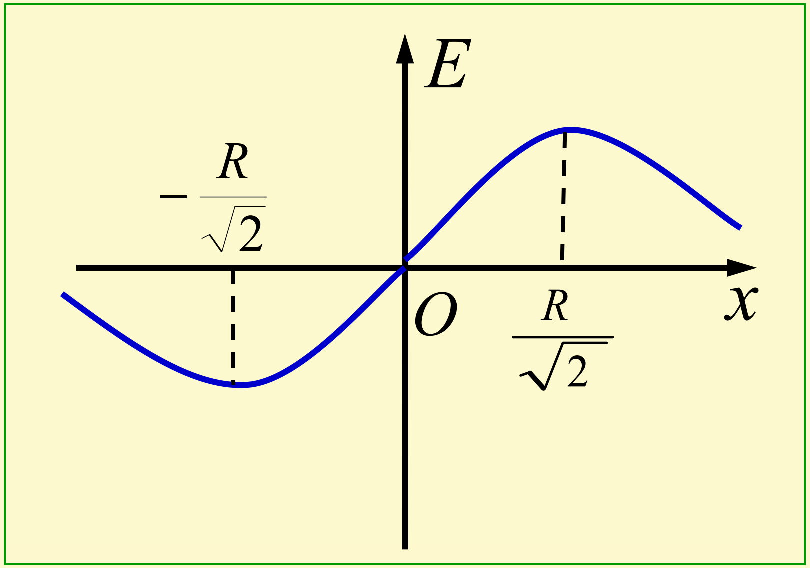
讨论: 环心处 $E=0$

$x\to\infty \quad E\to 0$

由 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $x=\pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

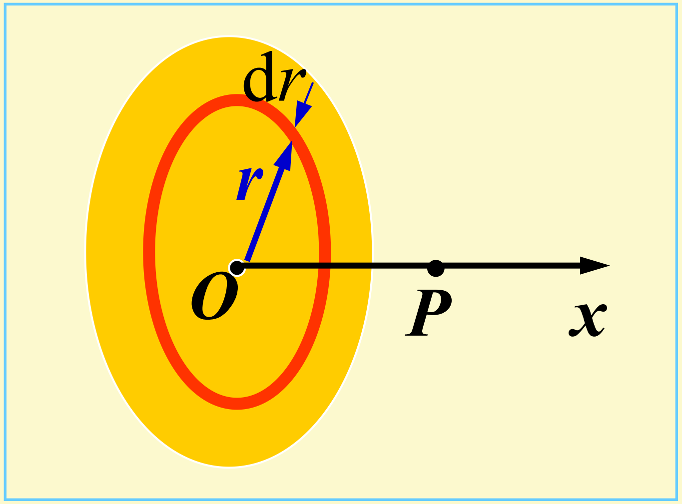
处 E 取极大值

$x>>R \quad E\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



练习: 求无限大均匀带电平面的电场(电荷面密度σ).

利用例6-4结果简化计算: 无限大平面即为半径$R\to\infty$的圆盘 —— 由许多均匀带电圆环组成.



思路

$$\mathrm{d}q=?$$

$$\mathrm{d}E=?$$

$$E=\int\mathrm{d}E=?$$

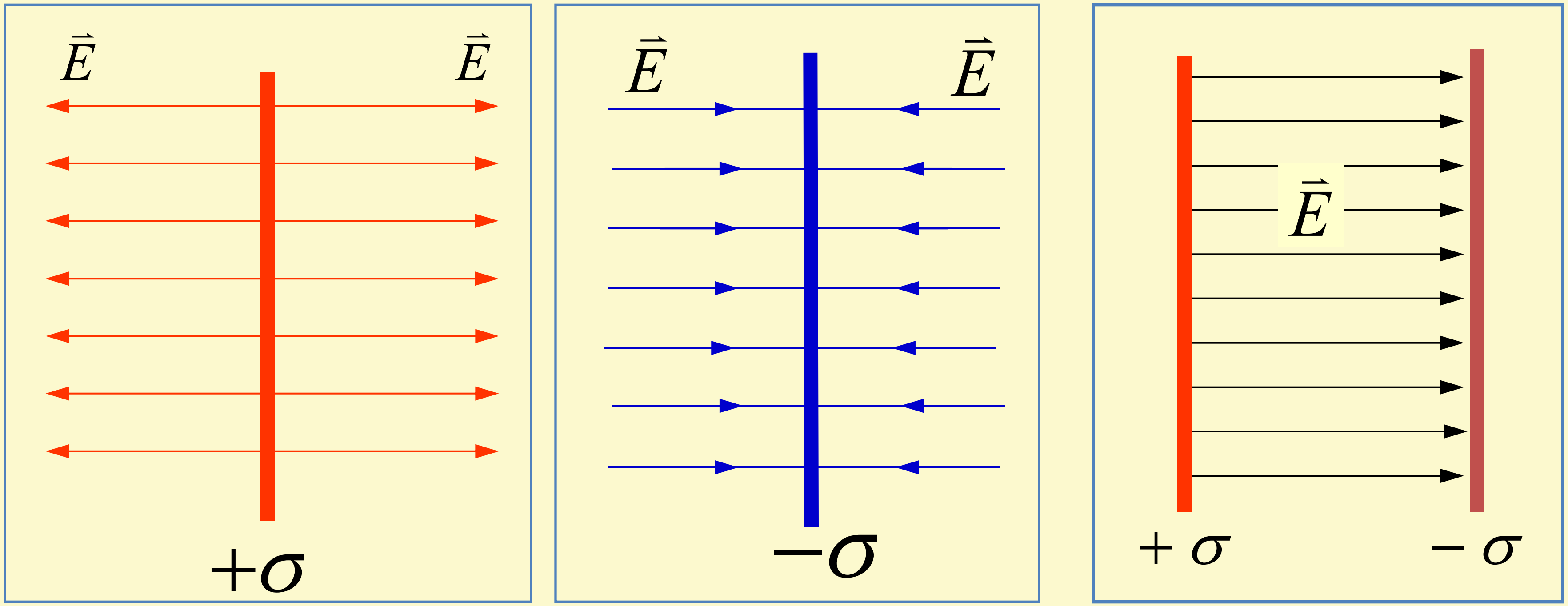
$$\mathrm{d}q=2\pi r\sigma\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\cdot\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E=\int_0^\infty\frac{\sigma\cdot x\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

结论:

1. 无限大带电平面产生与平面垂直的均匀电场 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



2. 两平行无限大带电平面（$+\sigma$,$-\sigma$ ）的电场

$$E=E_{+}+E_{-}=\begin{cases}\sigma/\varepsilon_0 & \text{两平板间} \\ 0 & \text{两平板外侧}\end{cases}$$

§6-2 电通量与高斯定理

6.2.1 电场线(electric field line)

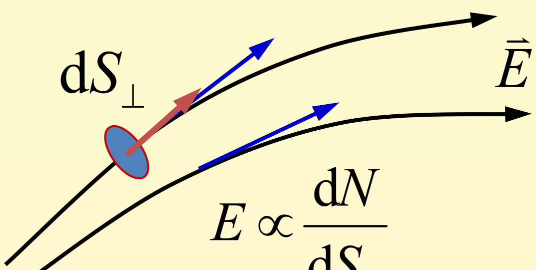
定量研究电场: 对给定场源电荷求出其分布函数

定性描述电场整体分布: 电场线方法

规定电场线:

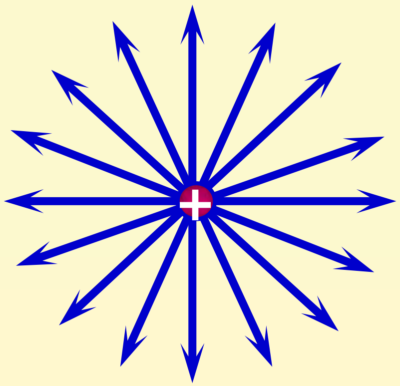
其上每点切向: 该点$\vec{E}$方向

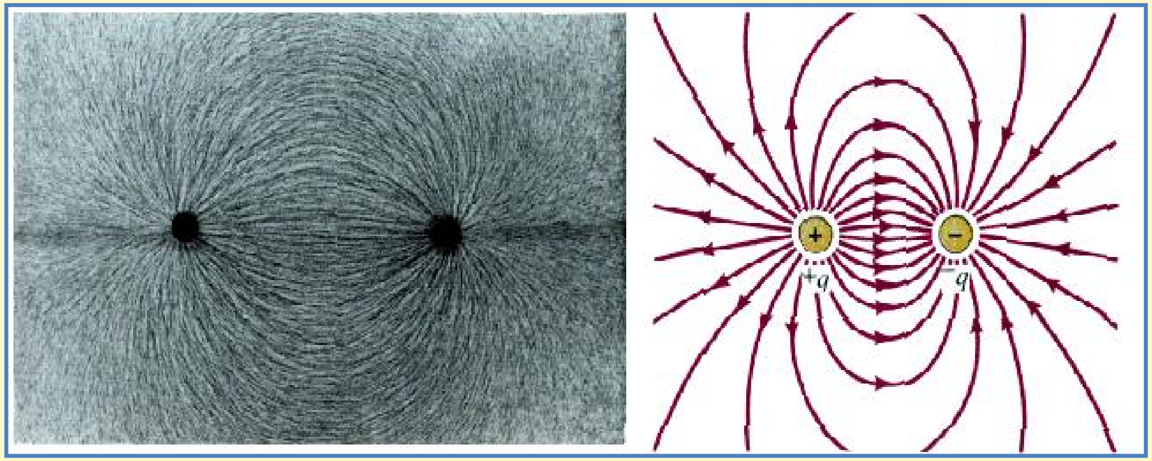
通过垂直$\vec{E}$的单位面积的条数等于场强的大小, 即其疏密与场强的大小成正比.



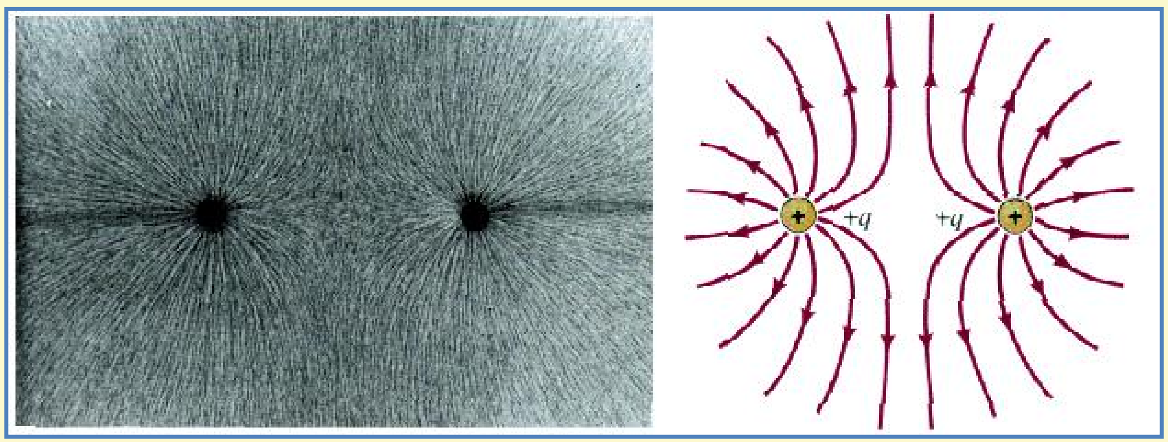
$$E \propto \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

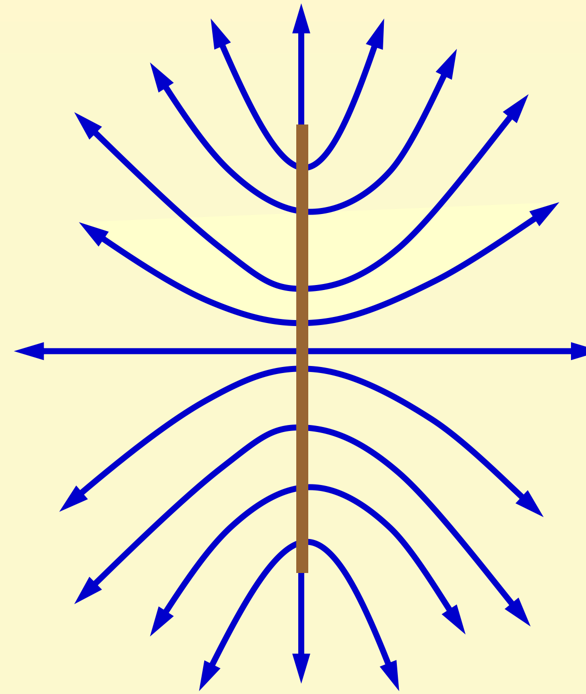




电偶极子的电场线

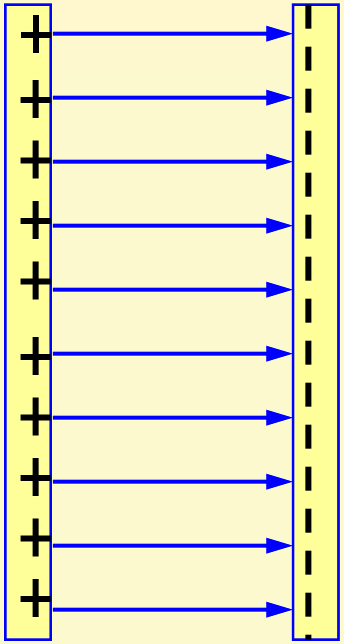


一对正电荷的电场线



均匀带电直导线的电场线

平板电容器中的电场线



静电场中电场线的特点:

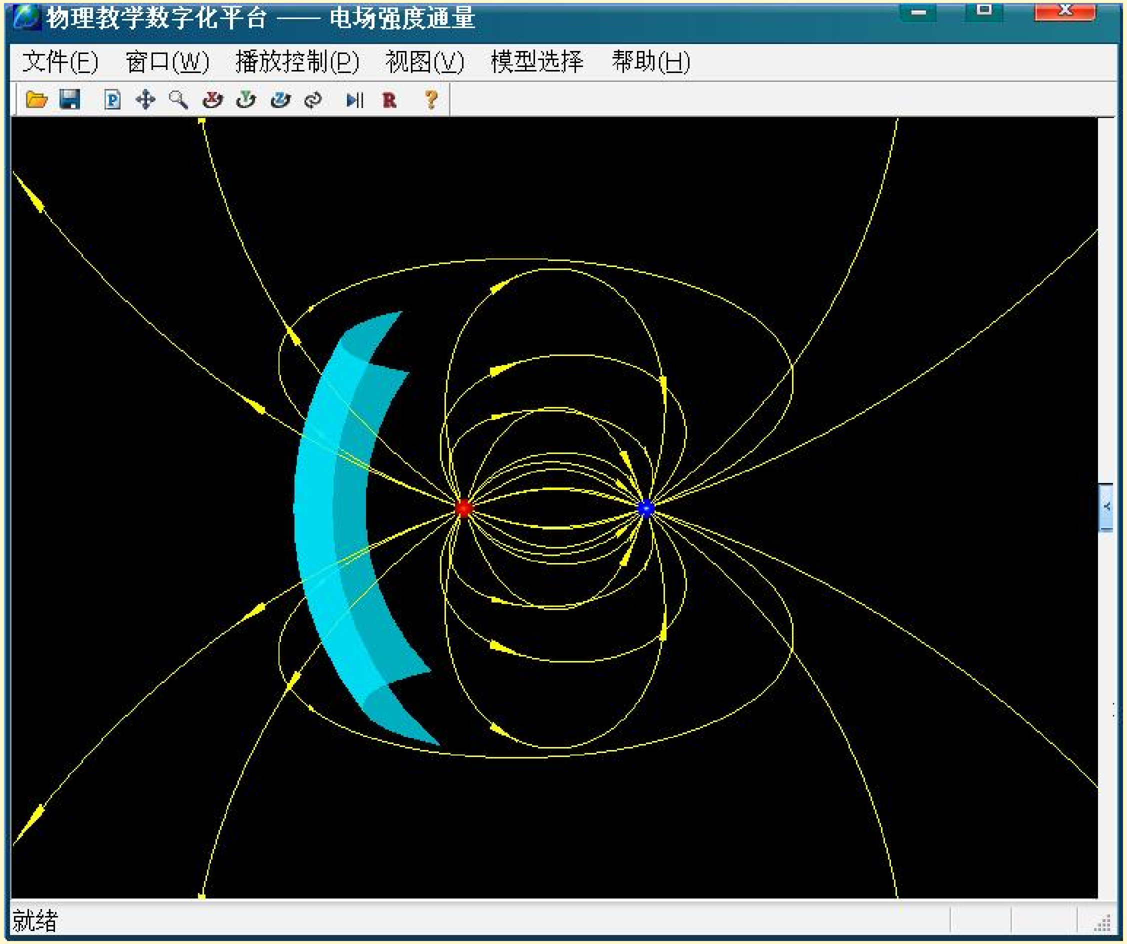
1. 电场线起始于正电荷, 终止于负电荷.

2. 电场线不闭合, 不相交.

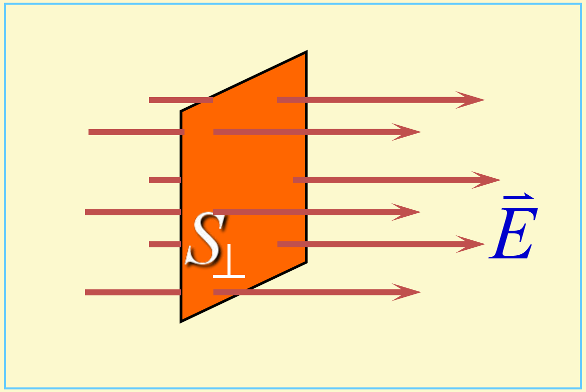
3. 电场线密集处电场强, 电场线稀疏处电场弱.

6.2.2 电通量

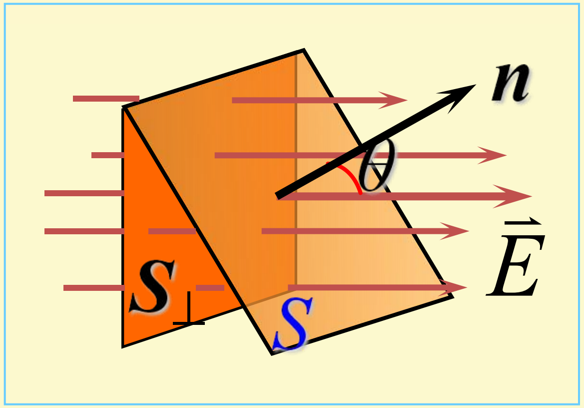
通过电场中某一给定面的电场线的总条数叫做通过**该面**的电通量(electric flux).



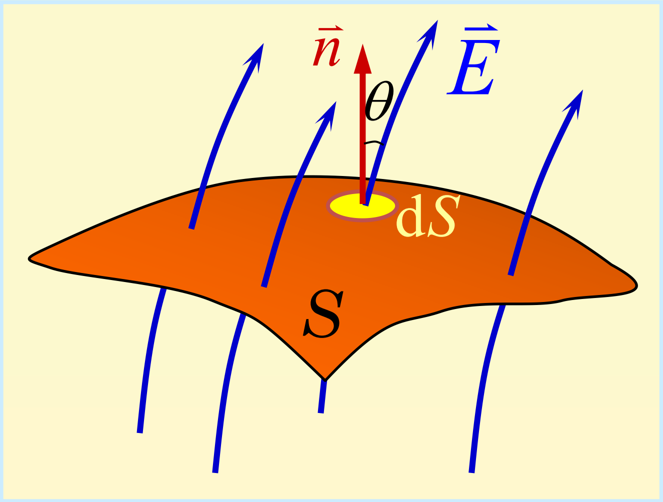
通过电场中某一给定面的电通量Φ_e=?



$$\Phi_e = ES_\perp$$



$$\Phi_e = ES_\perp = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$



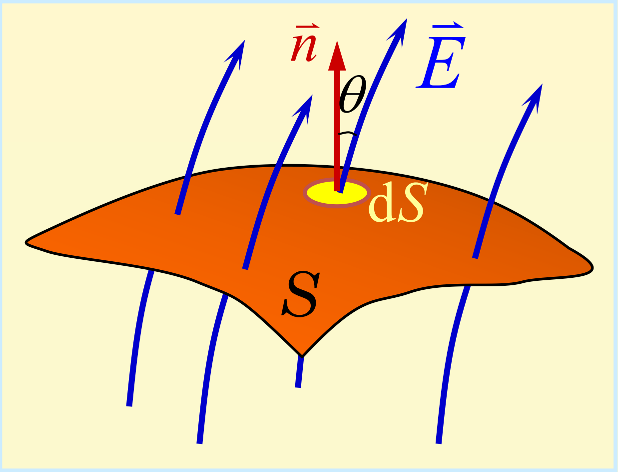
面积元矢量： $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$

面积元范围内 $\vec{E}$ 视为均匀

(1) 通过面元的电通量

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = E\mathrm{d}S_{\perp} = E(\mathrm{d}S\cos\theta)$$

$$= \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



(2) 通过曲面S的电通量

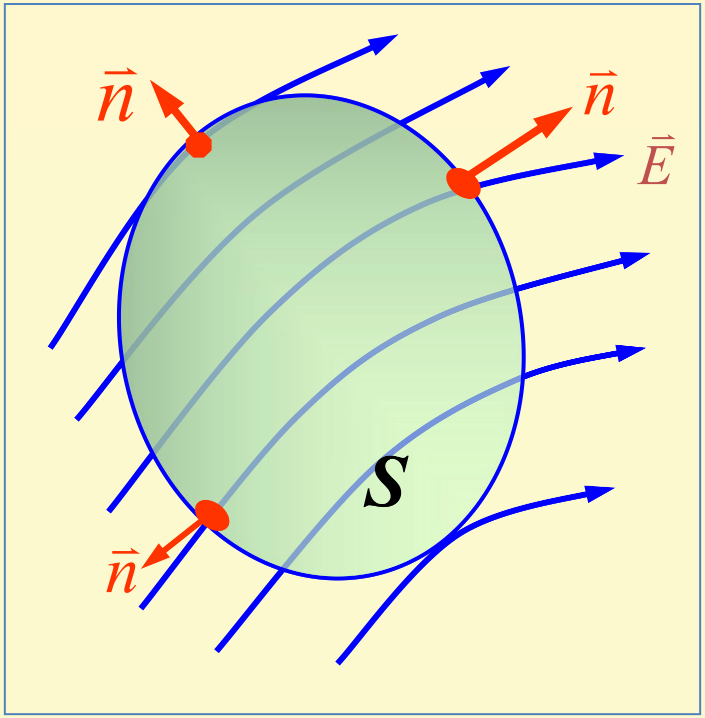
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\quad \begin{cases} \theta < \dfrac{\pi}{2} & \Phi_{\mathrm{e}} > 0 \\ \theta > \dfrac{\pi}{2} & \Phi_{\mathrm{e}} < 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \Phi_{\mathrm{e}} = 0 \end{cases}$$

(3) 通过封闭曲面的电通量 $\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

通过封闭曲面的电通量

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



规定: 封闭曲面外法向为正

穿入的电场线 $\Phi_e < 0$

穿出的电场线 $\Phi_e > 0$

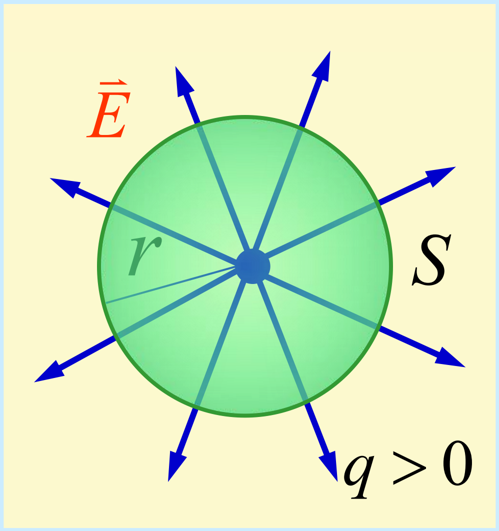
练习1. 空间有点电荷q, 求下列情况下穿过曲面的电通量.

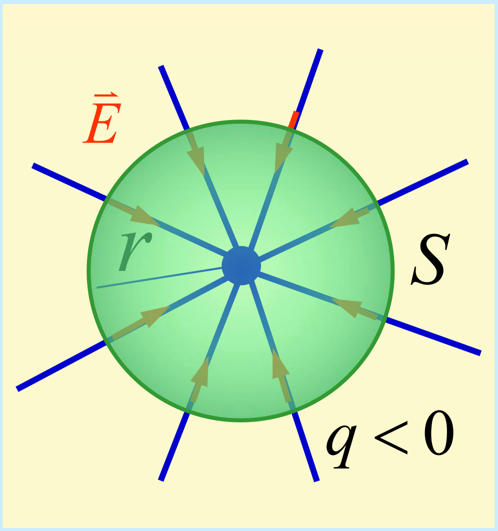
(1) 曲面为以电荷为中心的球面

(2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面

(3) 曲面为不包围电荷的任意封闭曲面

(1) 曲面为以电荷为中心的球面





$q>0: \quad \Phi_e > 0$

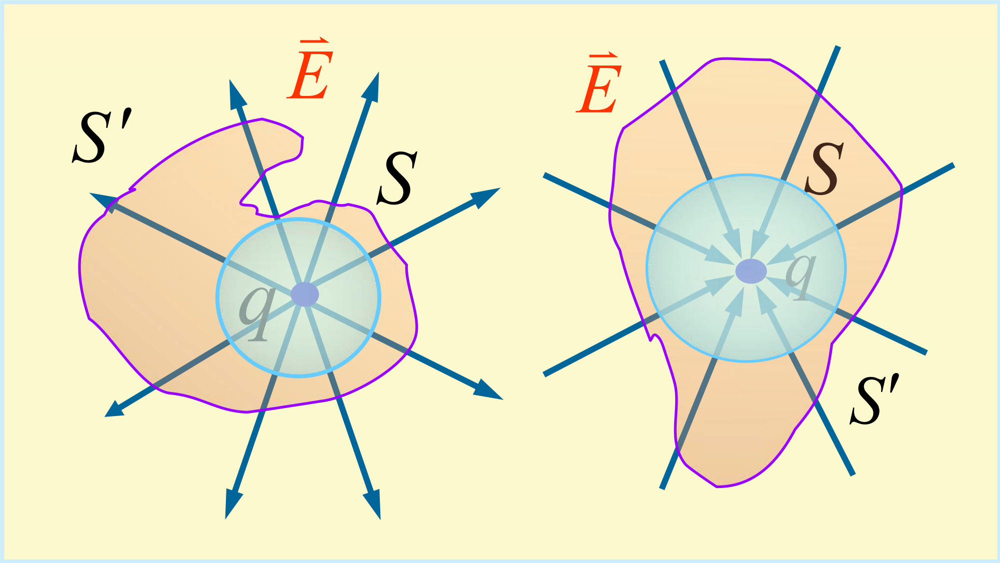
$q<0: \quad \Phi_e < 0$

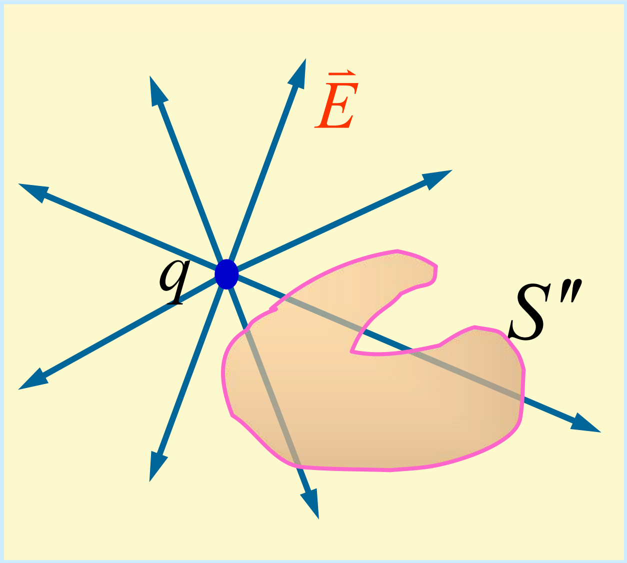
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{q\vec{r}\cdot d\vec{S}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

与 r 无关

单个点电荷场中, 由 $+q$ 发出的电场线延伸到∞, 由∞而来的电场线到 $-q$ 终止. 在无电荷处, 电场线不中断、不增加.

(2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面





$$\Phi_{eS'} = \Phi_{eS} = \frac{q}{\varepsilon_0}\begin{cases} q>0: & \Phi_e > 0 \\ q<0: & \Phi_e < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{eS''} = 0$$

(3) 曲面为不包围电荷的任意封闭曲面

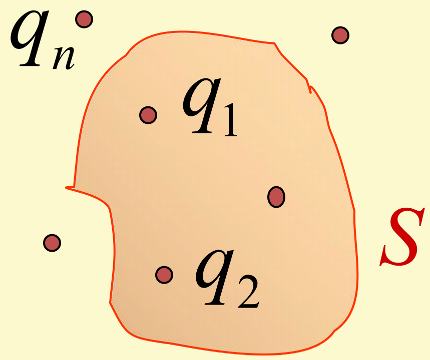
结论

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & (q\text{在}S\text{内}) \\ 0 & (q\text{在}S\text{外}) \end{cases}$$

思考: 1) 是否存在 q 恰好在S上的情况?

2)上述结论与库仑定律 $F\propto 1/r^2$ 有何关系?

练习2: 空间有点电荷系$q_1,q_2,\ldots q_n$, 求穿过空间任意封闭曲面S的电通量.



曲面上各点处电场强度:

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

包括S内、S外所有电荷的贡献.

穿过S的电通量:

$$\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S\vec{E}_1\cdot d\vec{S}+\oint_S\vec{E}_2\cdot d\vec{S}+\cdots+\oint_S\vec{E}_n\cdot d\vec{S}$$

$$=\Phi_{e1}+\Phi_{e2}+\cdots+\Phi_{en}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

只有S内的电荷对穿过S的电通量有贡献.

6.2.3 真空中高斯定理(Gauss theorem)

真空中静电场内，通过任意封闭曲面(高斯面)的电通量等于该封闭曲面所包围的电量代数和的$1/\varepsilon_0$倍:

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

讨论:

1. 式中各项的含义

S: 任意封闭曲面, **高斯面**

ε_0: 真空电容率(介电常数)

$\vec{E}$: 总场, S内外所有电荷的贡献

$\sum q_{内}$: S内的净电荷

2. 揭示了静电场中"场"和"源"的关系

场线 "头" "汇" $\longrightarrow$ "源"

静电场的重要性质之一:

静电场是**有源场**

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

3. 反映了库仑定律的平方反比关系

4. 利用高斯定理可方便求解具有某些对称分布的静电场

成立条件: 静电场

求解条件: 电场分布具有某些对称性

找到恰当的高斯面, 使 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式提到积分号外, 从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布.

常见类型: 场源电荷分布
- 球对称性
- 轴对称性
- 面对称性

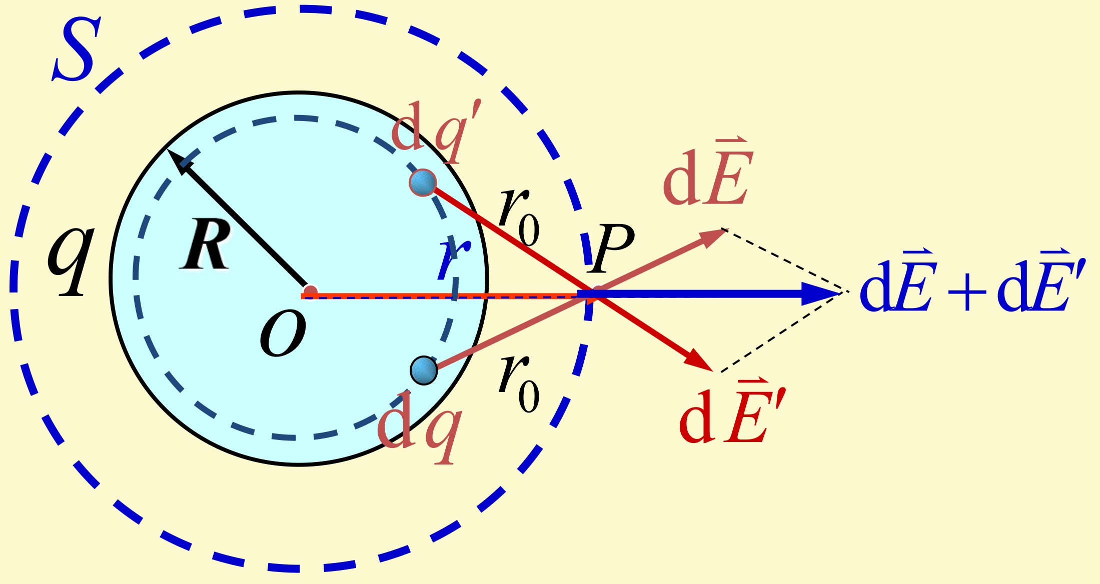
例6-5 求均匀带电球体(q、R)的电场分布.

对称性分析:

作以O为中心, r为半径的球形面S

S面上各点彼此等价

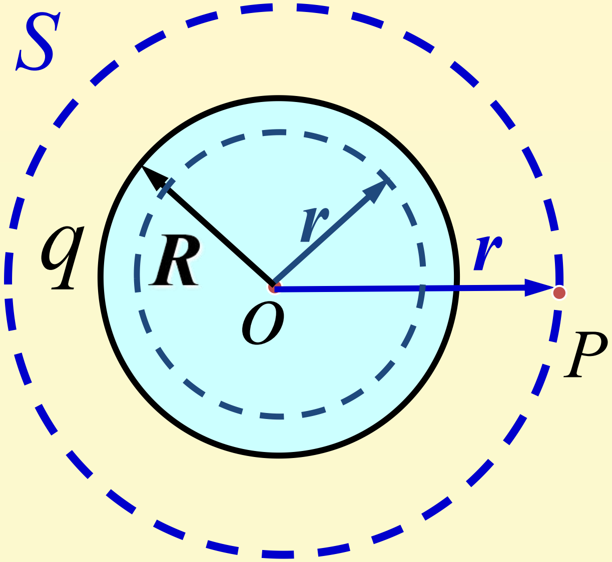
$\vec{E}\begin{cases}\text{大小相等}\\\text{方向沿径向}\end{cases}$



以S为高斯面: $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos 0^\circ \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$

由高斯定理: $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

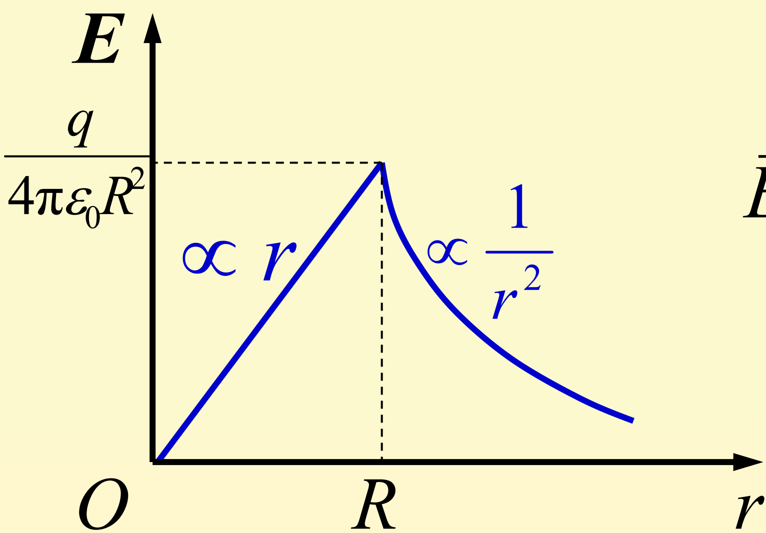
$$E = \left(\sum q_{内}\right)\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$



$$r \ge R: \quad \sum q_{内} = q \qquad E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r \le R: \quad \sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



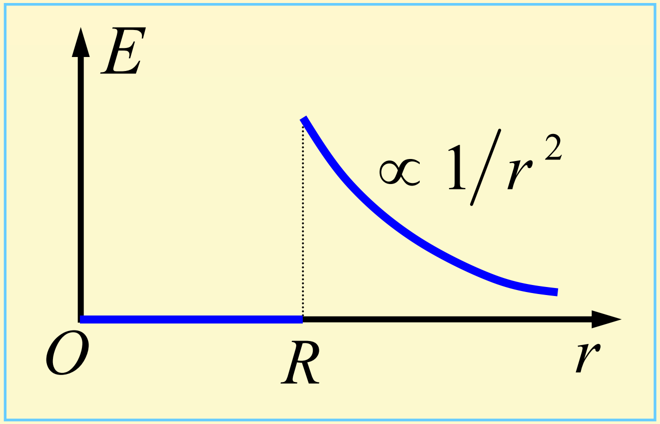
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \le R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r \ge R) \end{cases}$$

球体内区域 $E \propto r$

球体外区域~电量集中于球心的点电荷

练习: 1. 求均匀带电球面(R,q已知)的电场分布, 并画出$E\sim r$曲线.

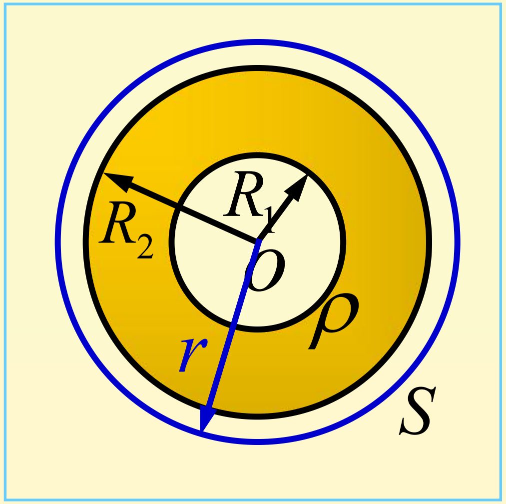
$$\vec{E}=\begin{cases}0 & (r\le R)\\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$



2. 如何理解带电球面 $r=R$ 处 E 值突变?

实际计算带电层内及其附近的场强 → 放弃面模型, 还其体密度分布的本来面目.

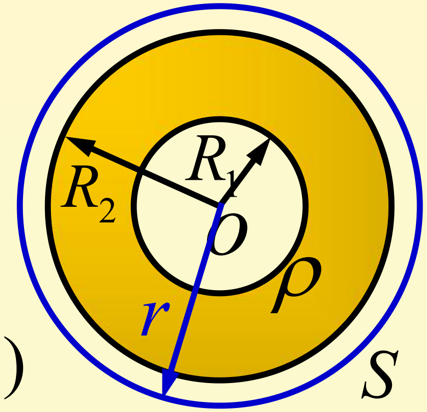
3. 计算带电球层(R_1, R_2, ρ)的电场分布.

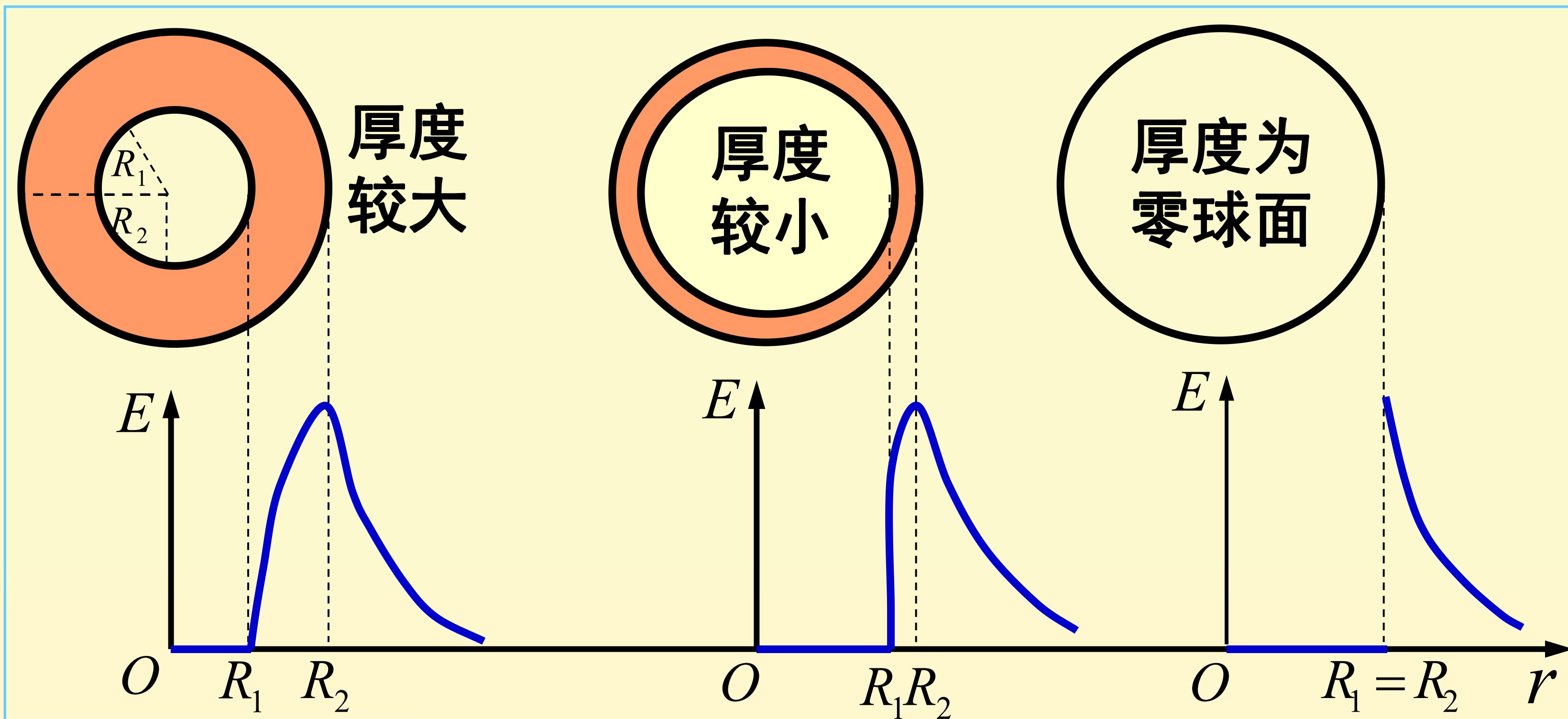


解 选一半径为r 的球形高斯面S

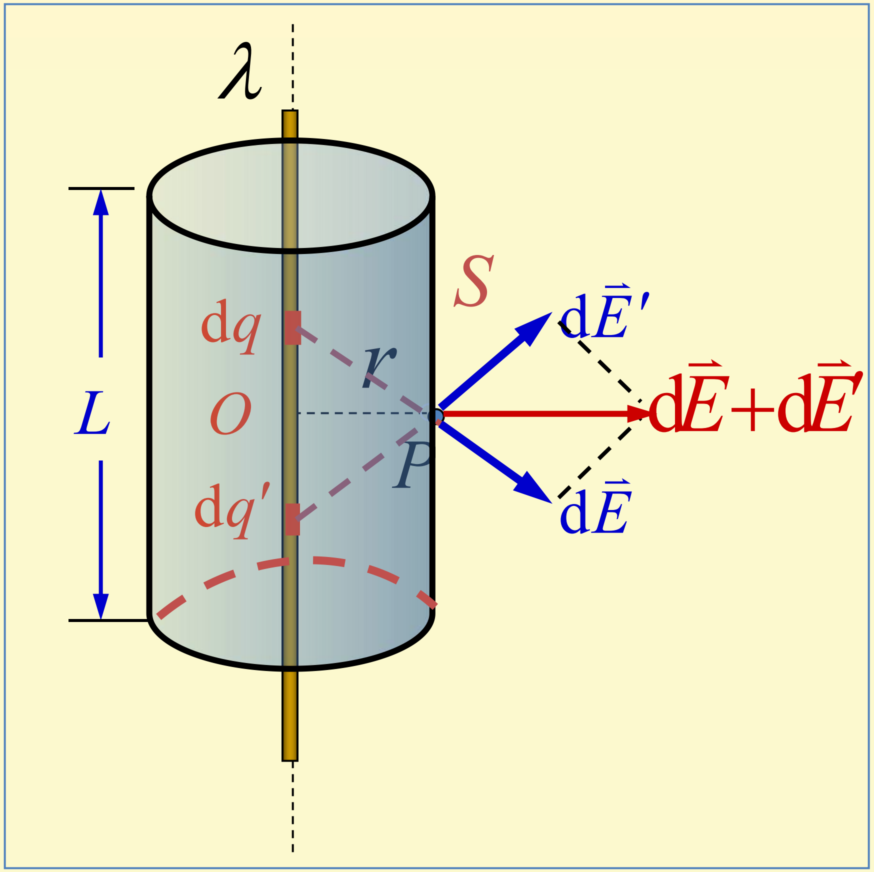
由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$$E=\frac{1}{4\pi r^2\varepsilon_0}\sum q_{内}=\begin{cases}0 & (r\le R_1)\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}) & (R_1\le r\le R_2)\\ \dfrac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r\ge R_2)\end{cases}$$





例6-6 求无限长均匀带电直线(λ)的电场.



对称性分析:

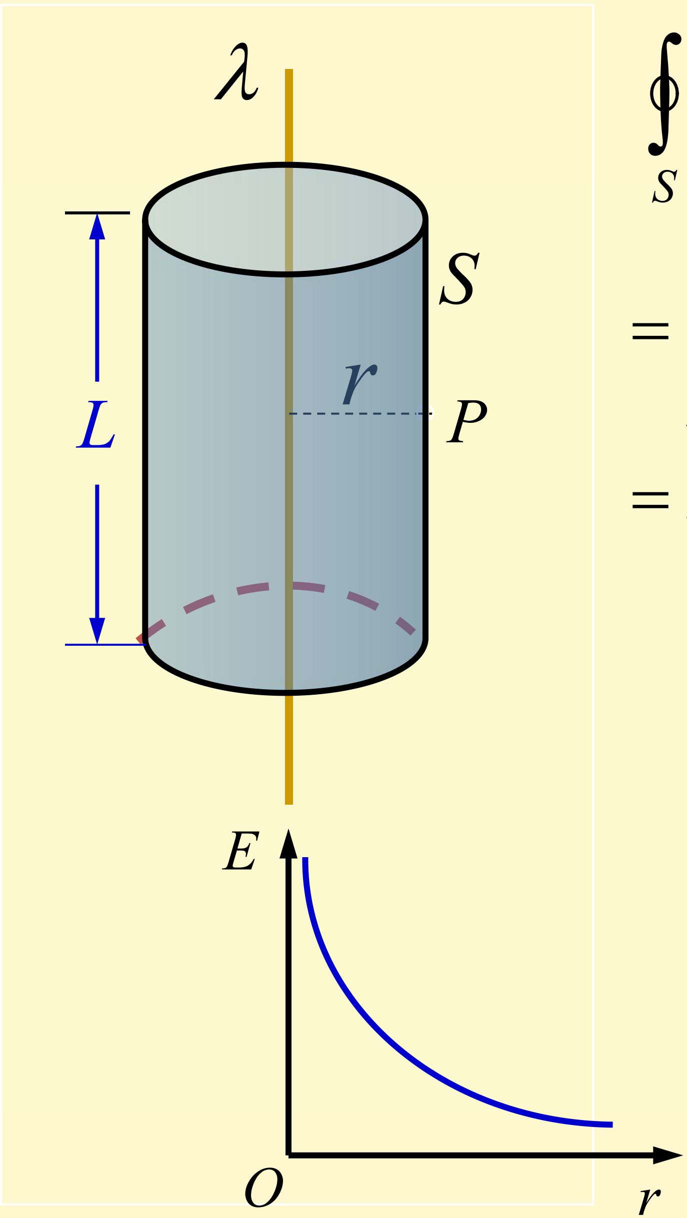
P点处合场强 $\vec{E}$

垂直于带电直线,

与P地位等价的点的集合为以带电直线为轴的圆柱面.

高斯面:

取长 L 的圆柱面, 加上底、下底构成高斯面S



$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}=\int_{上}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\int_{下}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\int_{侧}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_{上}E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S+\int_{下}E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S+\int_{侧}E\cos 0^\circ\,\mathrm{d}S$$

$$=E\cdot 2\pi rL$$

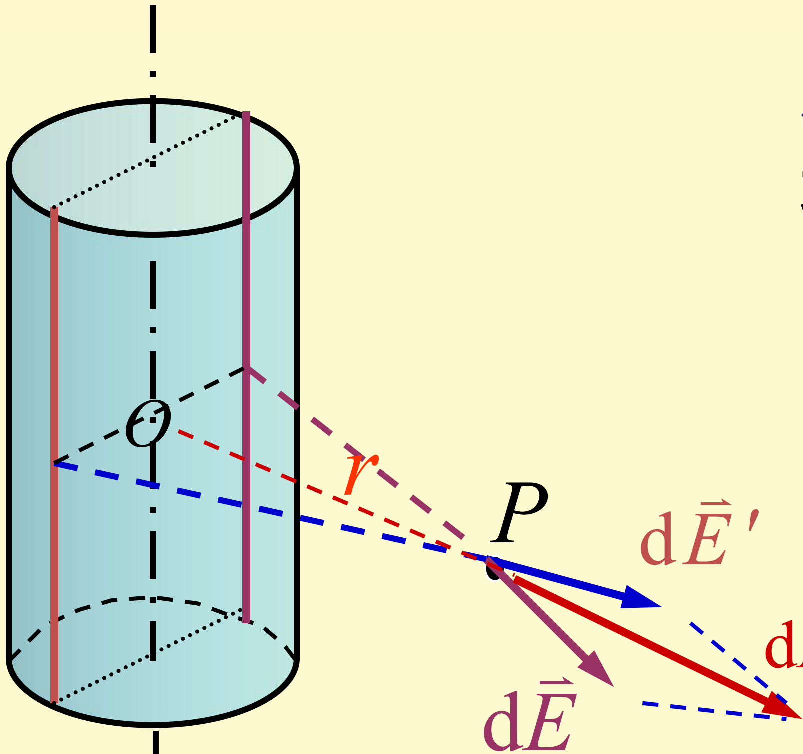
由高斯定理

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\cdot 2\pi rL$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

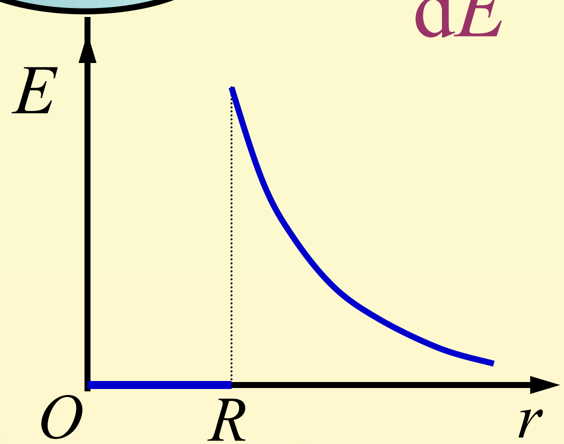
讨论： 1. 无限长均匀带电柱面的电场分布?



对称性分析: 视为无限长均匀带电直线的集合

选同轴圆柱型**高斯面;**

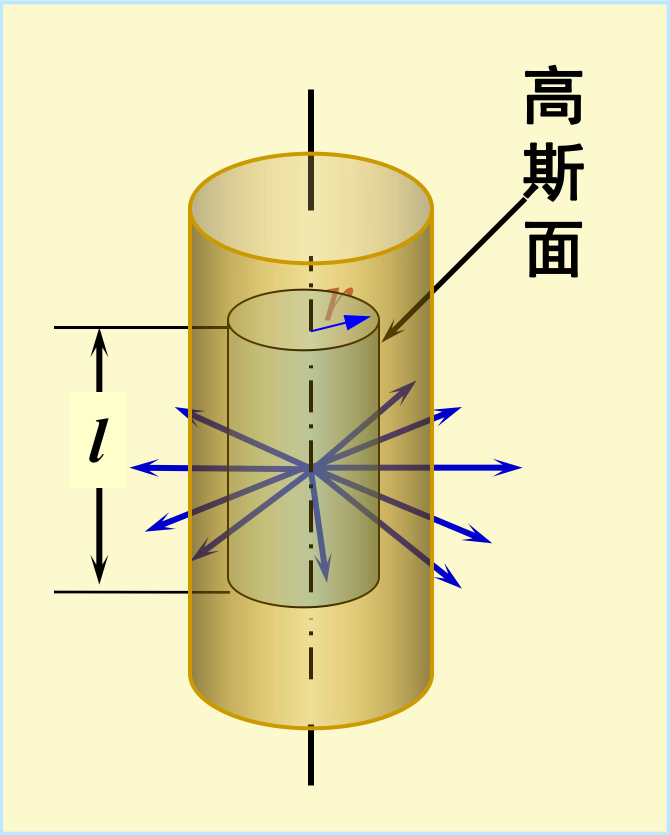
由高斯定理计算

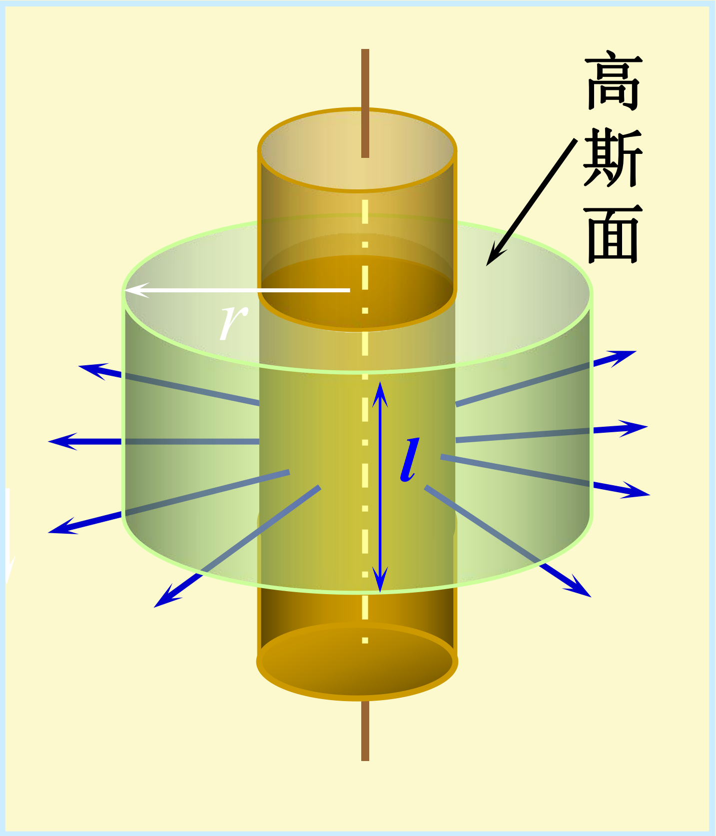


$$r<R: \quad E=0$$

$$r>R: \quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

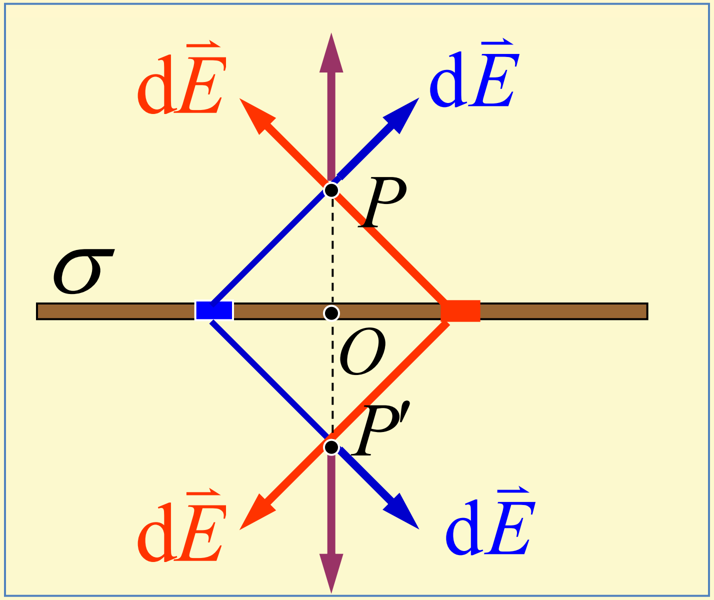
2. 求无限长、均匀带电柱体的电场分布时，高斯面如何选取?





3. 当带电直线，柱面，柱体不能视为无限长时，能否用高斯定理求电场分布?

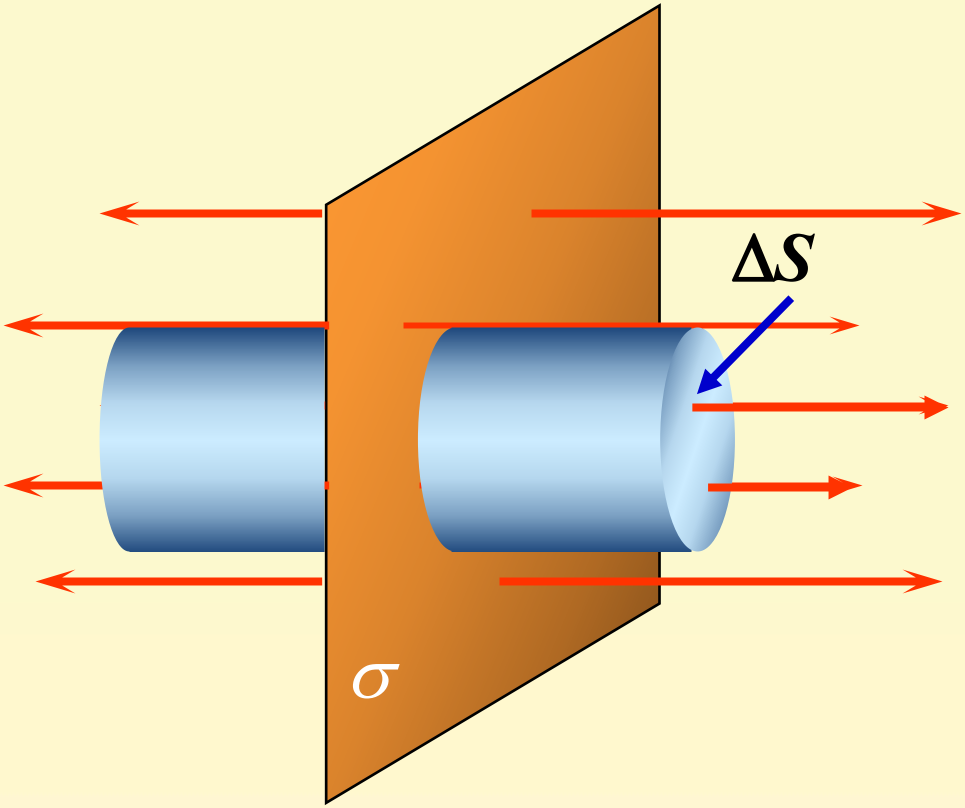
例6-7 求无限大均匀带电平面的电场(电荷面密度σ).

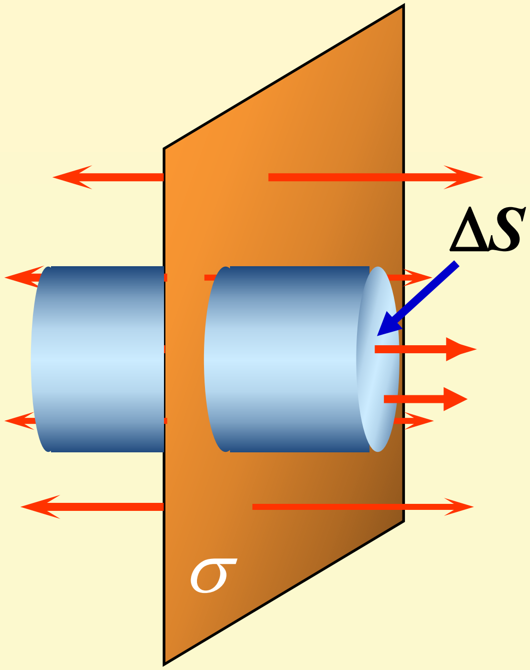


对称性分析:

$\vec{E}$方向垂直于带电平面, 离带电平面距离相等的场点彼此等价

如何构成封闭的高斯面?





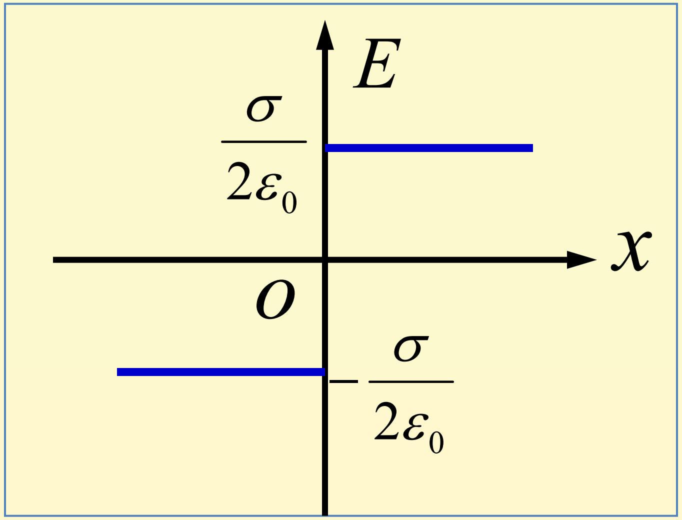
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{左} E\cos 0^\circ dS + \int_{右} E\cos 0^\circ dS + \int_{侧} E\cos\frac{\pi}{2} dS$$

$$= 2E\cdot\Delta S$$

由高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E\cdot\Delta S$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

其指向由σ的符号决定

电场线的作图方法

① 确定电场与电场线的关系: 设平面上某点电场强度$\vec{E}$的二个分量为E_x、E_y, 与电场线在该点的无穷小线元$\mathrm{d}\vec{S}$的二个分量dx、dy成比例, 即

$$\mathrm{d}\vec{S} \,//\, \vec{E} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{E_x}$$

给任意一个参数t, 则有 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{E_y}{E_x}$$

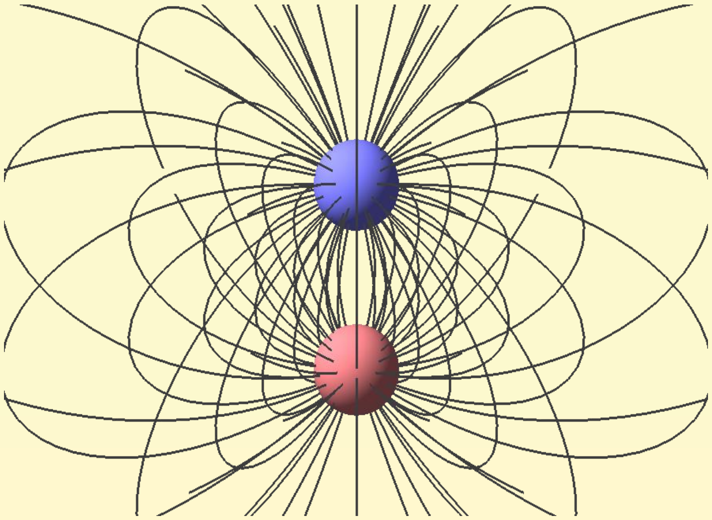
于是有 $$\begin{cases} y = y + E_y\,\mathrm{d}t \\ x = x + E_x\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

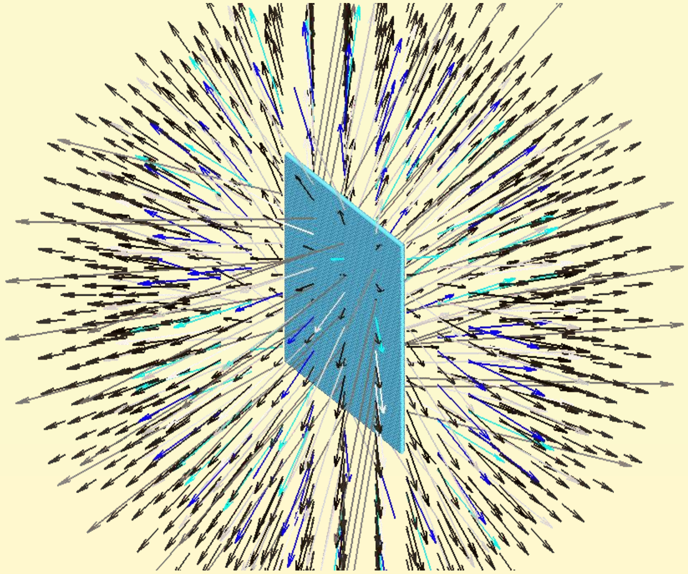
其中比例因子已包含在dt中

② 确定绘图精度: 实际计算中常取$\mathrm{d}t=\dfrac{\alpha}{E}$

α为常数, 其大小可依作图的精度要求而定, E是合场强大小.

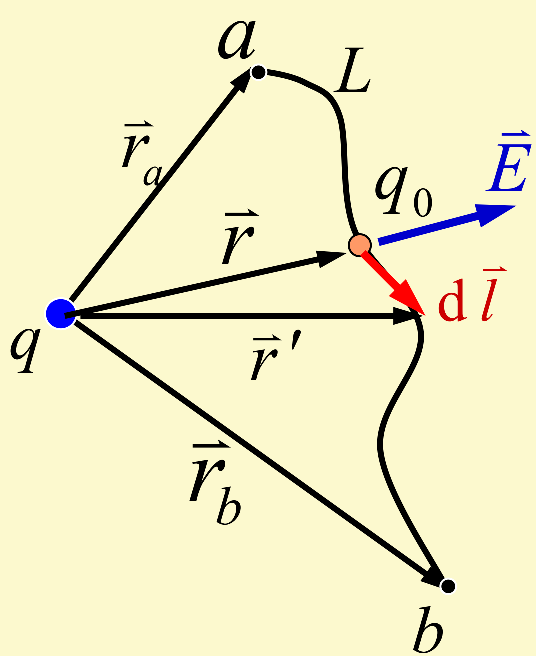
③ 电场线的出发点及终止点分别是正电荷和负电荷, 选取电场线叠代方程的初始值也应由正电荷及负电荷位置和电量大小来决定.





§6-3　静电场的环路定理与电势

6.3.1 静电力的功



场源电荷: q

检验电荷: q_0

$$\vec{F}=q_0\vec{E}$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{q_0 q\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q_0 q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$A=\int_L \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q_0 q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

静电力做功只与检验电荷起点, 终点的位置有关, 与所通过的路径无关.

由叠加原理→点电荷系的电场 $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$

由静电力做功只与检验电荷起点、终点的位置有关，与所通过的路径无关 —— 静电力是保守力.

$$A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场中任意闭合路径

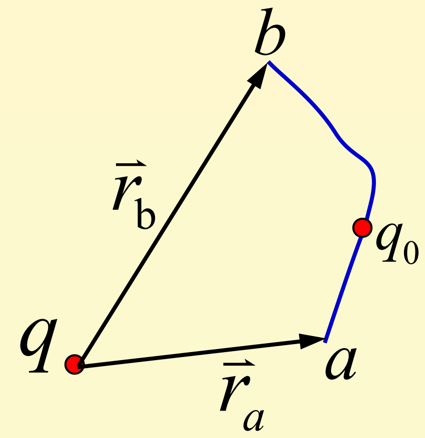
静电场环路定理: $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$

路径上各点的总场强

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零. 反映了静电场的保守性.

凡保守力都有与其相关的势能，静电场是有势场.

6.3.2 电势(electric potential)



1. 电势能(electric potential energy)

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b$$

令W_b= 0 得: $\boxed{W_a=q_0\int_a^{\text{零势点}}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$ 单位: 焦耳(J)

注意:

W_a: 静电场与场中电荷q_0共同拥有

W_a/q_0取决于电场分布→可用以描述静电场自身的特性

2. 电势

$$\boxed{U_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_a^{\text{零势点}}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

3. 电势差(electric potential difference)

$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在SI中, 电势差和电势的单位相同:

焦耳/库仑($J\cdot C^{-1}$), 也称为伏特(V), 即 $1V=1J\cdot C^{-1}$

点电荷q在静电场中a点沿任意路径移至b点过程中静电力做的功

$$A_{ab}=q\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q(U_a-U_b)$$

注意: 1. U 具有相对意义, 其值与零势点选取有关; 但U_{ab}与零势点选取无关.

2. 电势遵从叠加原理: $U=\Sigma U_i$ (零势点相同)

即点电荷系场中任一点的电势等于各点电荷单独存在时在该点产生的电势的**代数和**.

6.3.3 电势的计算(两种基本方法)

1. 场强积分法(由定义求)

(1) 确定$\vec{E}$分布

(2) 选零势点和便于计算的积分路径

(3) 由电势定义

常选无穷远或地球电势为零点

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E\cos\theta\,\mathrm{d}l \text{ 计算 } U_a$$

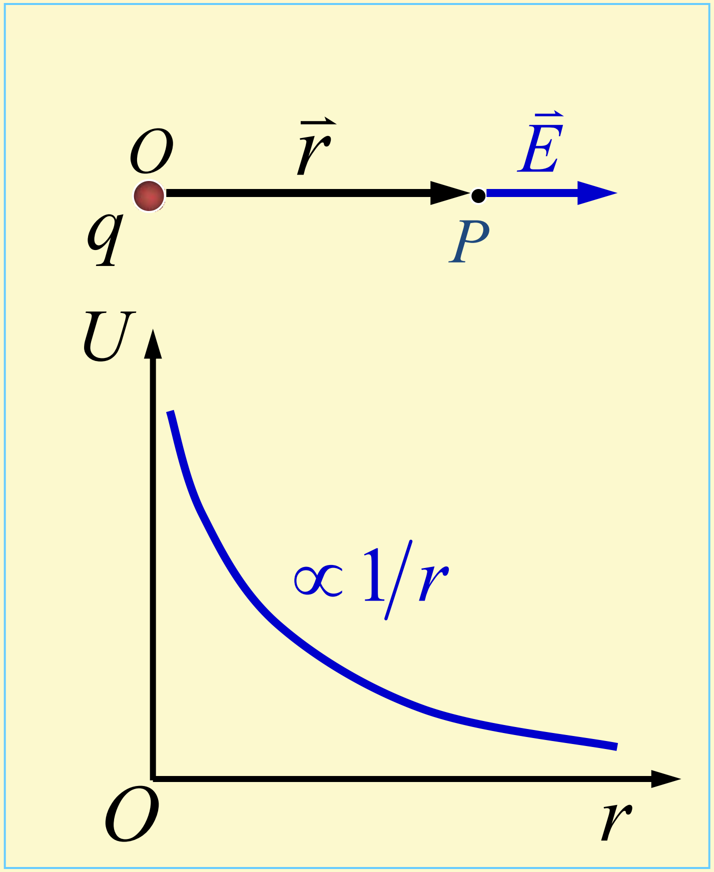
2. 叠加法

(1) 将带电体划分为若干电荷元dq

(2) 选零势点, 写出某一dq在场点的电势dU

(3) 由叠加原理得 $U = \int \mathrm{d}U$

例6-8 求点电荷q场中的电势分布.



解 $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

令 $U_\infty = 0$

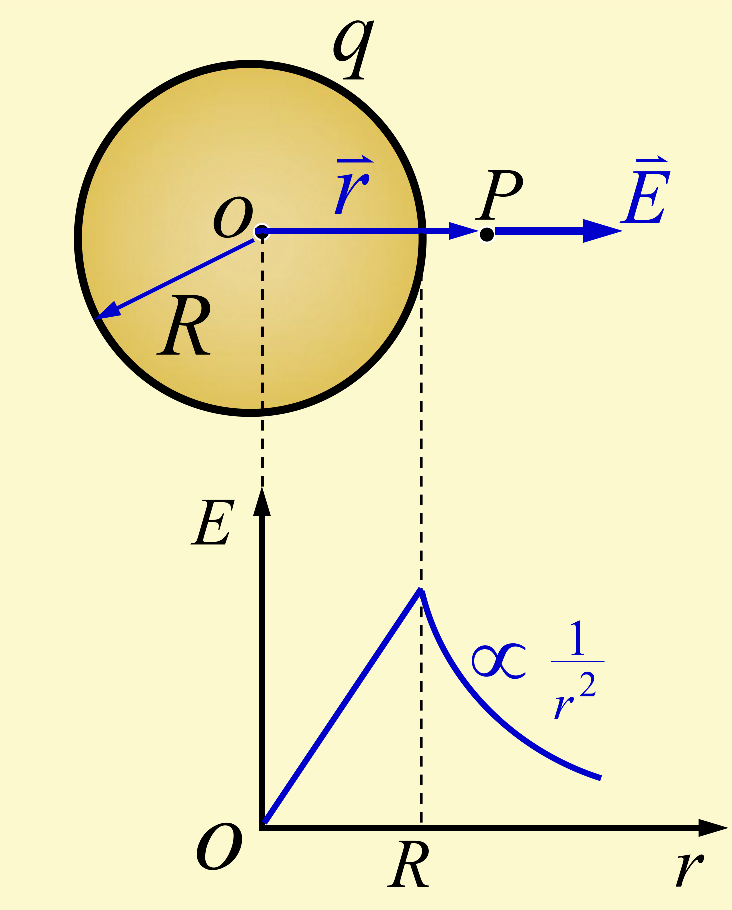
沿径向积分

$$U = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r}\cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$= \int_r^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例6-9 一半径为R的均匀带电球体, 带电量为q. 求其电势分布.

解 由电荷分布可知, 电场沿径向



由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi R^3/3}\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r<R$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r>R$$

$r < R$

$$U_1 = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \mathrm{d}r$$

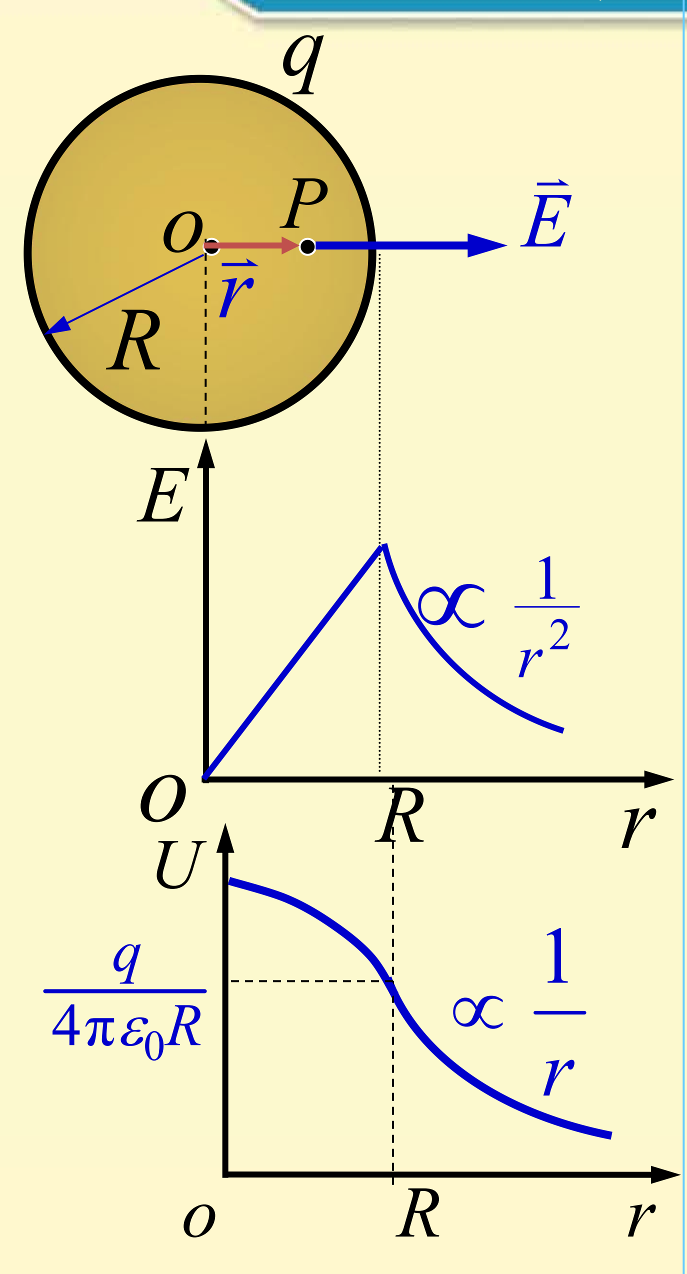
$$= \int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

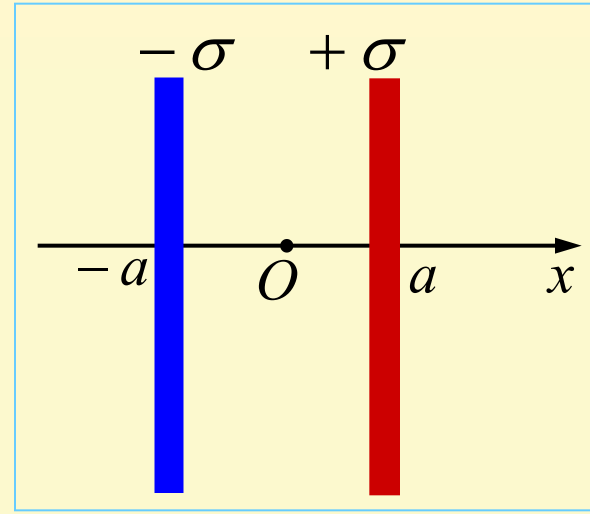
$r > R$

$$U_2 = \int_r^\infty E_2 \mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



例6-10 求无限大均匀带电平面($\pm\sigma$)场中电势分布.



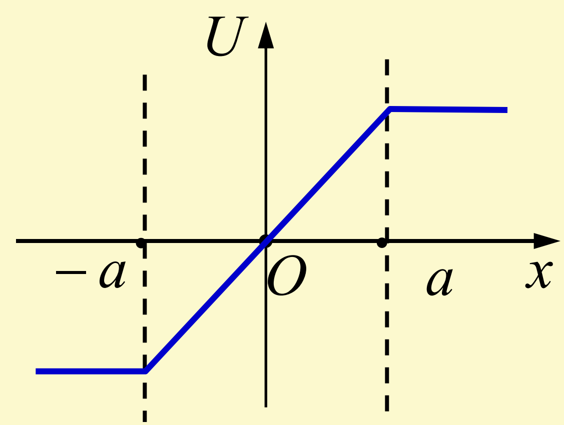
解 电场分布

$$E=\begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (-a<x<a) \\ 0 & (x<-a,\ x>a) \end{cases}$$

设$U_0=0$, 沿x轴正向积分

$x<-a$ 区域:

$$U=\int_x^{-a} E\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0} E\mathrm{d}x=0+(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0})=-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$



$-a\leq x\geq a$区域:

$$U=\int_x^{0} E\mathrm{d}x=(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0})(-x)=\frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$$

$x>a$ 区域: $U=\int_x^{0} E\mathrm{d}x+\int_0^{a} E\mathrm{d}x=0+(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0})(-a)=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$

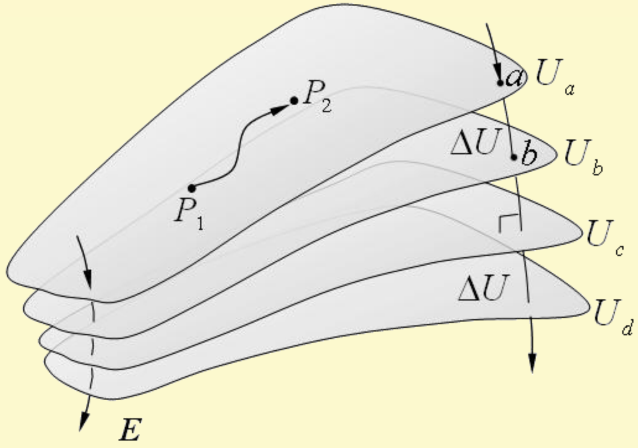
6.3.4 等势面 电势梯度

1. 等势面(equipotential surface)

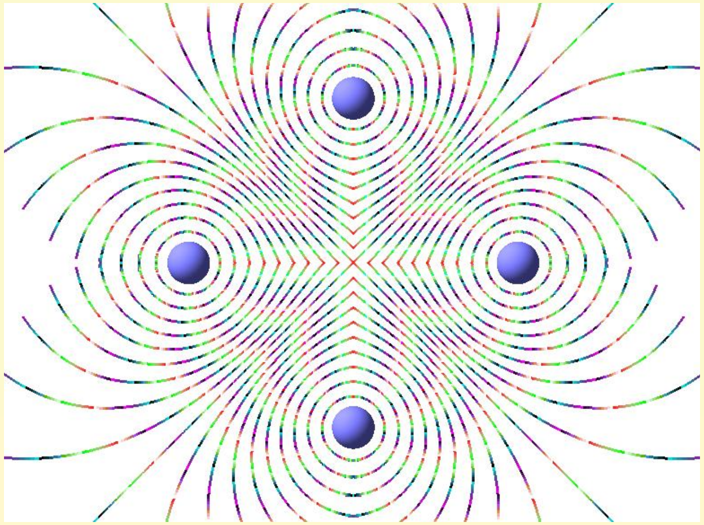
等势面: 电场中电势相等的点组成的面

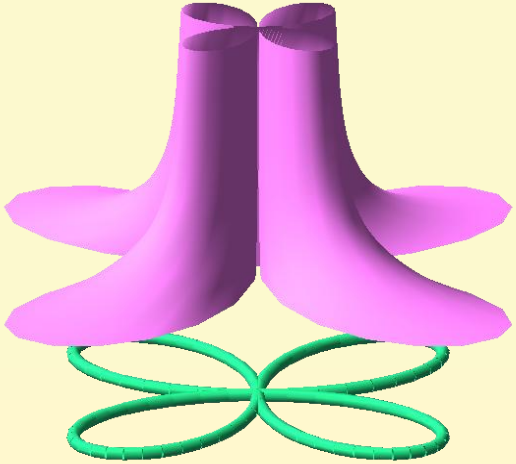
规定: 相邻等势面之间的电势差相等

$$\boxed{\Delta U_{ab} = \Delta U_{bc} = \Delta U_{cd}}$$



等势面的疏密反映了场的强弱



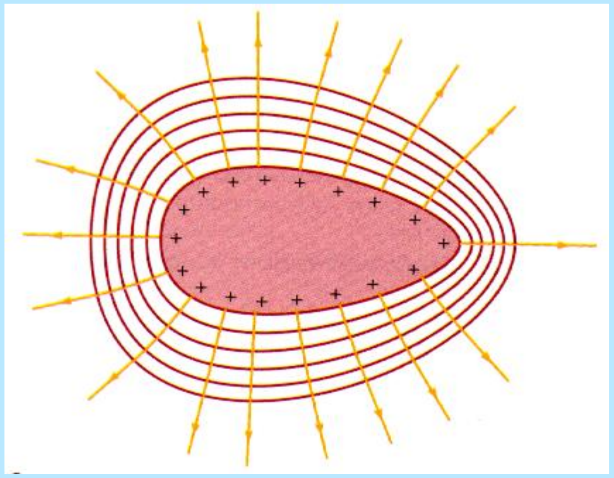


2. 电场线与等势面的关系

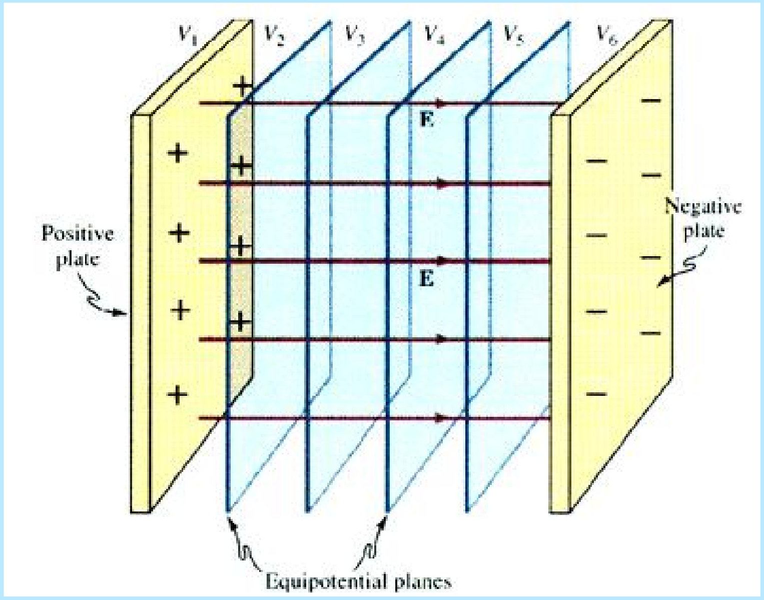
1) 电场线处处垂直于等势面

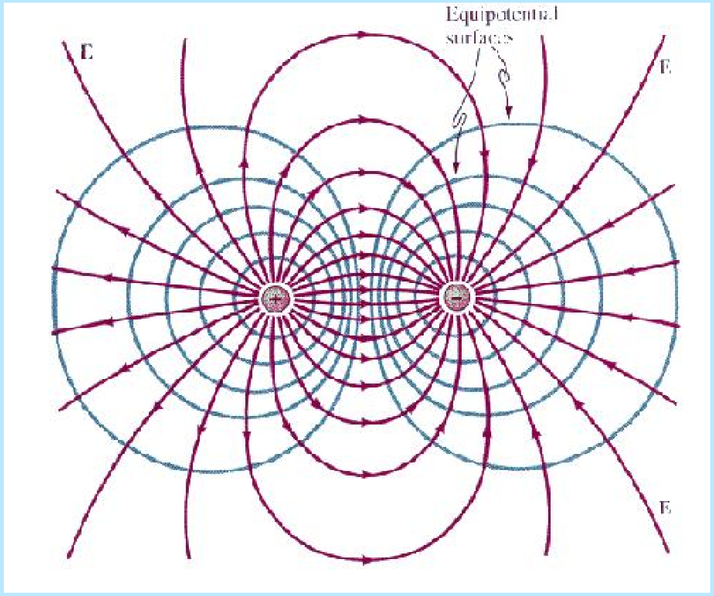
在等势面上任取两点P_1、P_2, 则

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{P_1} - U_{P_2} \xrightarrow{\text{等势}} = 0$$



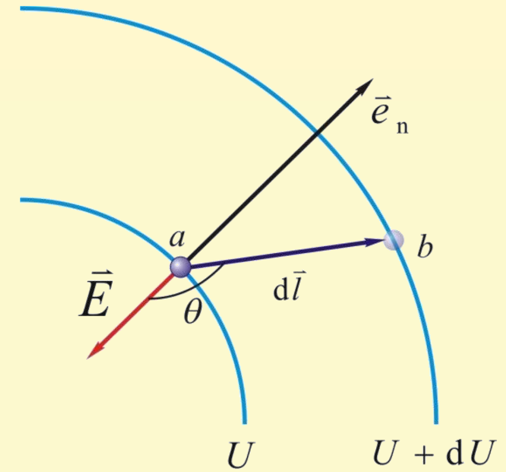
2) 电力线指向电势降的方向





3. 电场强度与电势的关系

电势分别为U和$U+\mathrm{d}U$的邻近等势面, $\vec{e}_{\mathrm{n}}$为等势面法向且指向电势升高的方向, 如有正的试验电荷从a点移到b点, 则电场力做功:



$$\mathrm{d}A_{ab}=q_0\left[U-\left(U+\mathrm{d}U\right)\right]=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

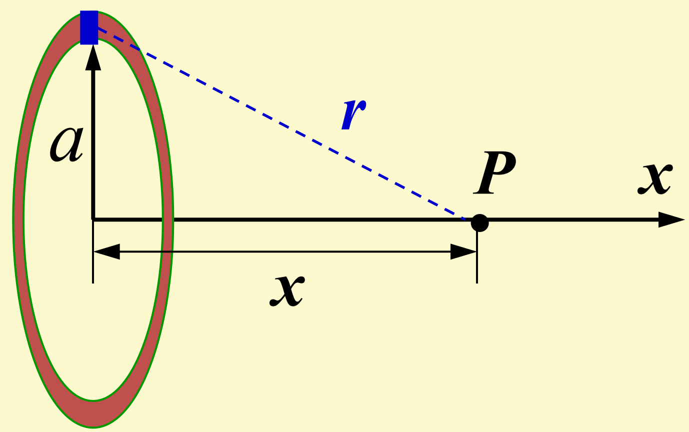
$$-\mathrm{d}U=E\cos\theta\,\mathrm{d}l \qquad E\cos\theta=E_l=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{n}}=-\boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$ 称电势梯度矢量, 记为grad$U$或 ∇U

电势梯度的大小等于电势在该点最大空间变化率, 方向沿等势面法向, 指向电势增加的方向.

$$\boxed{\vec{E}=-\mathrm{grad}\,U=-\nabla U} \qquad \mathrm{grad}\,U=\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

例6-11 均匀带电圆环, 带电量为q, 半径为a. 求轴线上任意一点的P电势和电场强度.



解 在圆环上取点电荷dq,

令$U_\infty = 0$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi a}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 ar}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 ar}\int_L \mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

§6-4　静电场中的导体

静电场 $\vec{E}_0$ ⟷ 导体、电介质

相互作用

相互影响

导体、电介质 → 感应电荷　极化电荷

→ 电荷重新分布 → $\vec{E}'$

影响　原有电场

→ 电场重新分布

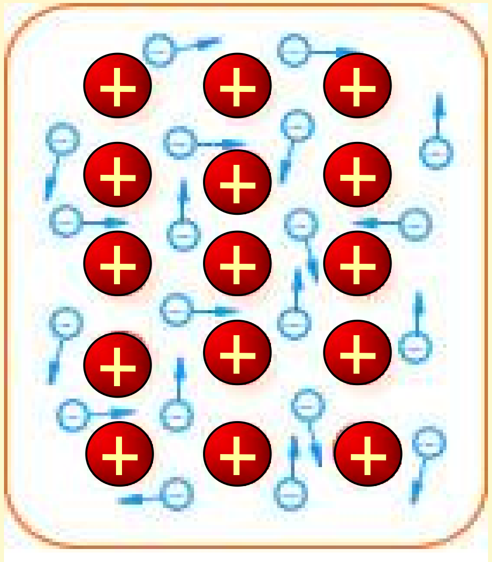
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

电场重新分布 → 静电平衡状态 → 基本定理的特殊应用 → 静电场

仅限于各向同性的均匀金属导体和电介质

6.4.1 导体的静电平衡性质

1. 金属导体(conductor)的电结构

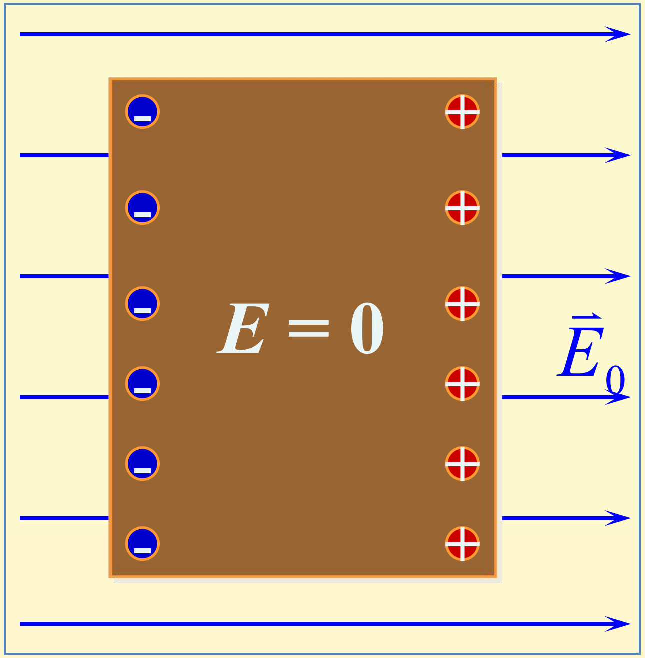


自由电子 + 晶格点阵

$\Sigma q=0$, $E_0=0$时, 只有微观的热运动.

静电感应(electrostatic induction):

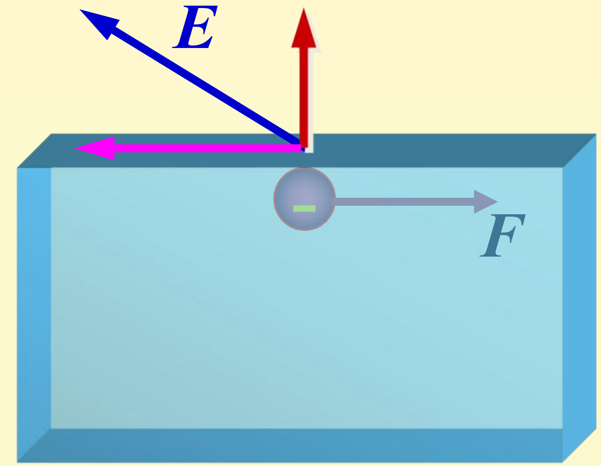
在外电场影响下, 导体表面不同部分出现正负电荷重新分布的现象.



静电平衡(electrostatic equilibrium):

导体内部和表面没有电荷的宏观定向运动.

2. 静电平衡下导体中的电场特征

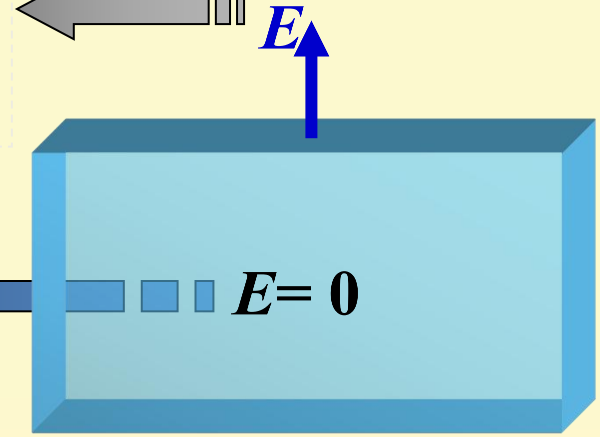


① 导体内部场强处处为零，导体表面附近场强垂直于导体表面(静电平衡条件)

② 导体内部和导体表面处处电势相等，整个导体是个等势体.

$$E=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau_{\text{切线方向}}}=0$$

$$E=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l_{\text{任意方向}}}=0$$

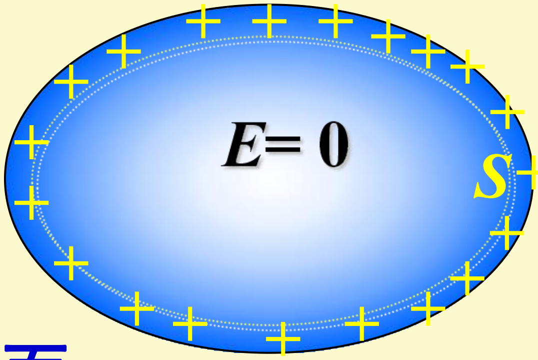


!! 达静电平衡体时导体表面电荷分布?

3. 静电平衡时导体上的电荷分布

在静电平衡下, 导体所带的电荷只能分布在导体的外表面, 导体内部没有净电荷(net charge).

(1) 实心导体在静电平衡时的电荷分布



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \qquad \vec{E}=0 \Rightarrow \sum q_i = 0$$

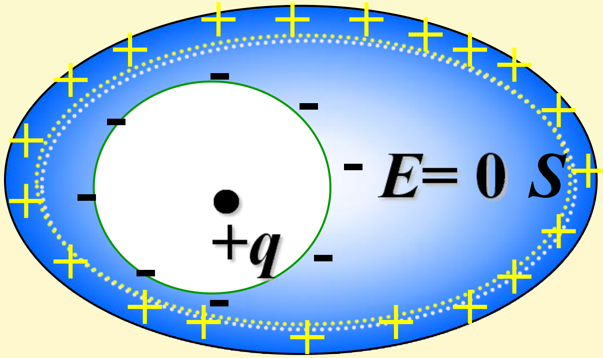
导体内部无净电荷, 电荷分布在导体外表面.

(2) 空心导体, 空腔内无电荷 $\vec{E}=0 \Rightarrow \sum q_i = 0$

电荷分布在导体外表面, 导体内部和内表面无净电荷

(3) 空心导体, 空腔内有电荷q

$$\vec{E}=0 \Rightarrow \sum q_i = 0 \qquad q' = -q$$

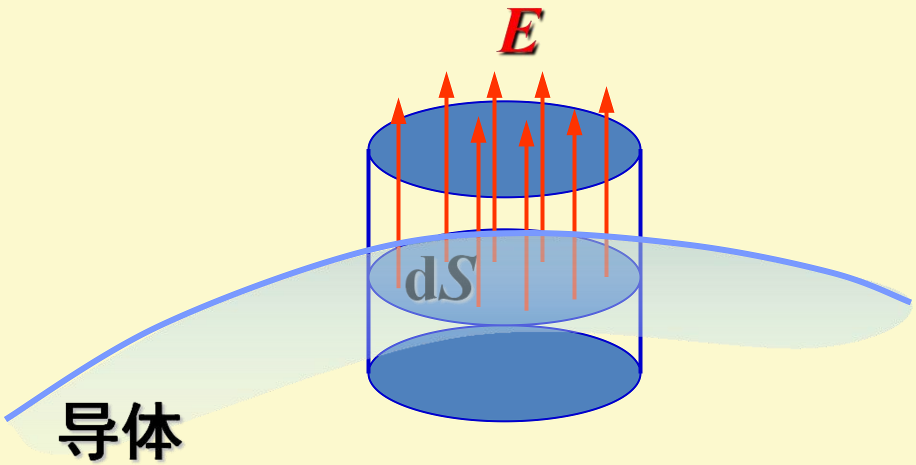


电荷分布在导体内外两个表面:

内表面带电荷-q,外表面带电荷q.

4. 带电导体表面附近的场强

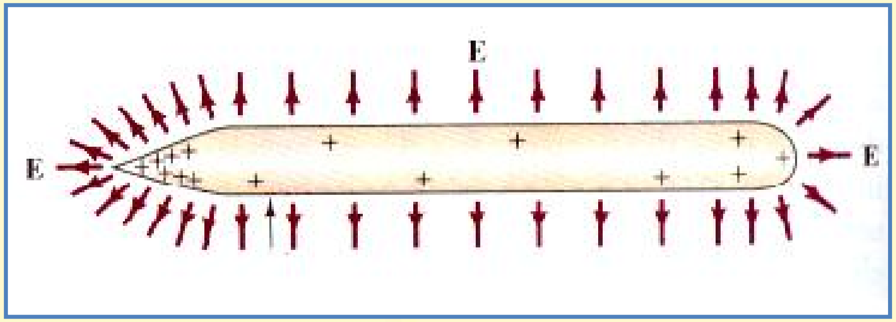
1) 处于静电平衡的导体, 其表面上各点的电荷密度与表面邻近处场强的大小成正比.

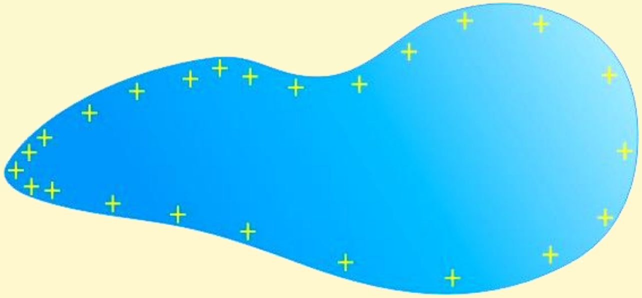


高斯定理: $$E\mathrm{d}S=\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$$

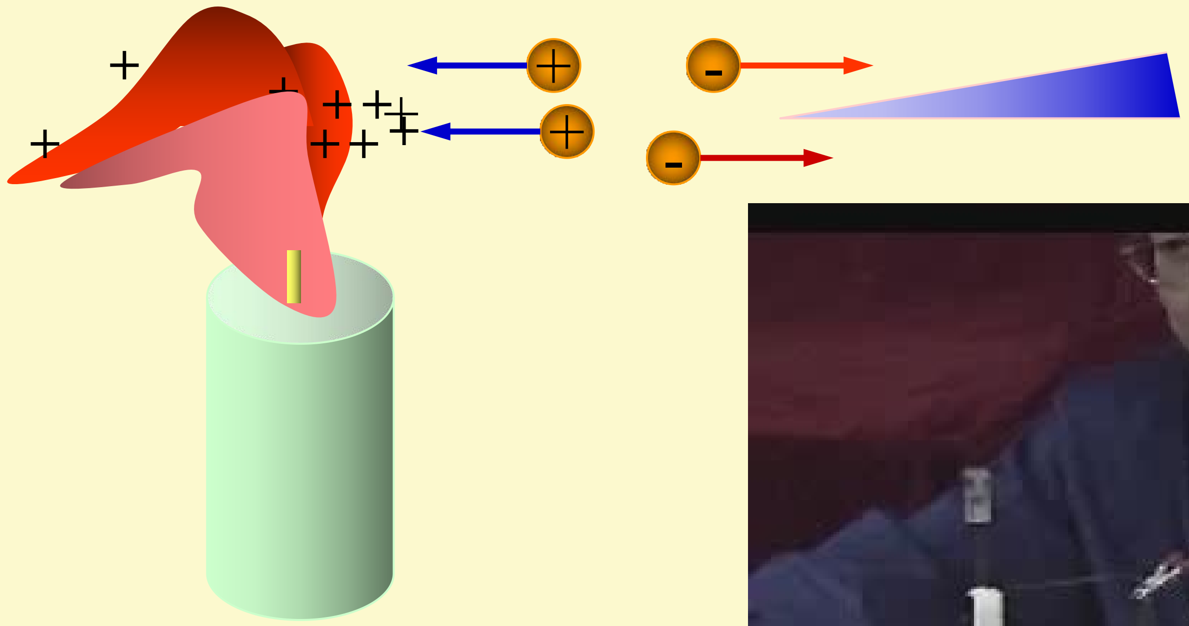
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2) 静电平衡下的孤立导体, 其表面处面电荷密度σ与该外表面曲率有关, 曲率$(1/R)$越大的地方电荷密度也越大, 曲率越小的地方电荷密度也小.





尖端放电(discharge at sharp point): 对于有尖端的带电导体, 尖端处电荷面密度大, 则导体表面邻近处场强也特别大. 当电场强度超过空气的击穿场强时, 就会产生空气被电离的放电现象, 称为尖端放电.



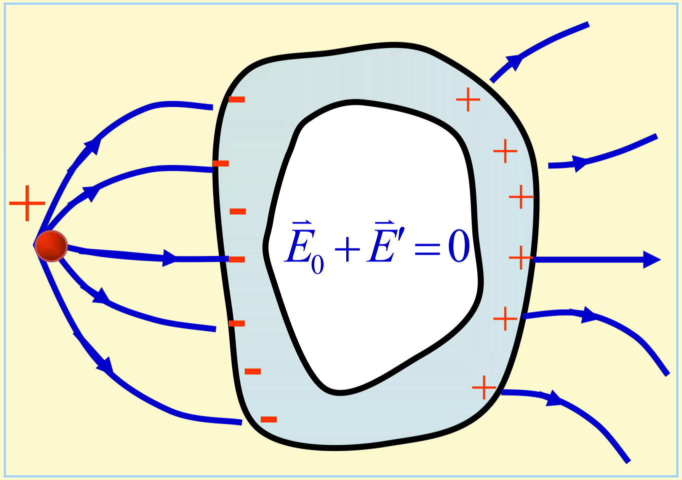
静电吹烛

尖端放电

避雷针

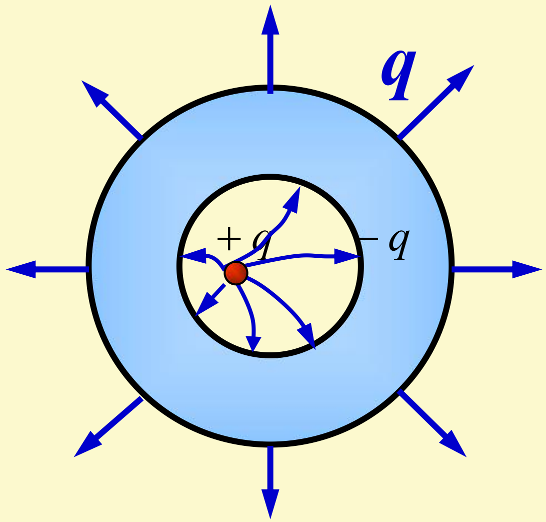
6.4.2 空腔导体和静电屏蔽

1. 空腔导体

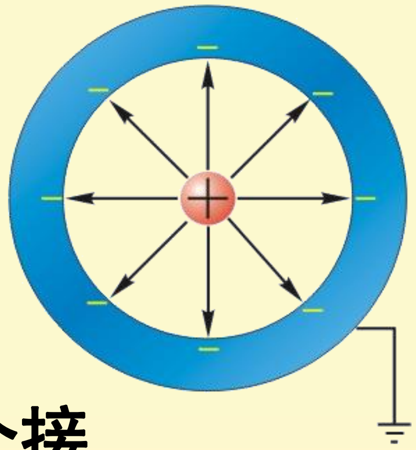


1) 腔内没有电荷 空腔导体起到屏蔽外电场的作用.

2) 腔内存在电荷



接地的空腔导体可以屏蔽内、外电场的影响.



2. 静电屏蔽(electrostatic shielding): 一个接地的空腔导体可以隔离内外电场的影响.

法拉第笼

军用屏蔽帐篷

防电磁辐射屏蔽服

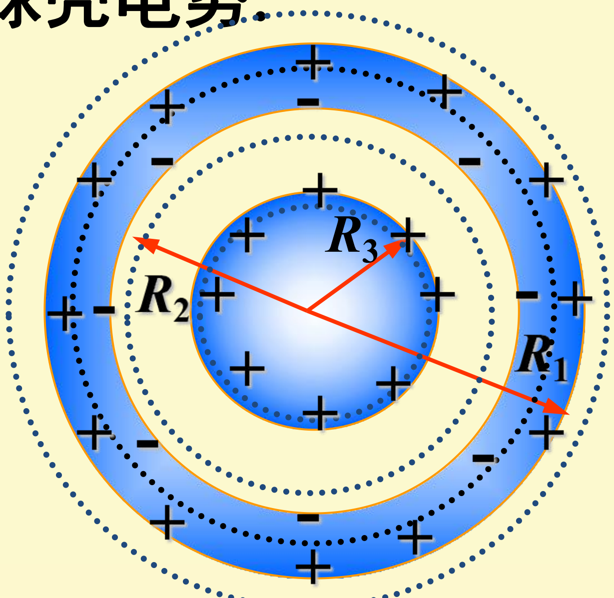
防静电屏蔽袋

6.4.3 有导体存在时的*E*和*U*分布

求解思路:

静电平衡条件
电荷守恒定律
} 导体上的电荷分布 → 计算 $\vec{E}$, U 分布（方法同前）

例6-12 有一外半径R_3、内半径R_2的金属球壳, 其中放一半径为R_1的金属球, 球壳和球均带有电量10^{-8}C的正电荷. 求: (1) 两球电荷分布; (2) 球心的电势; (3) 球壳电势.



解: (1) 电荷分布如图所示

球面q, 壳内表面$-q$,壳外表面$2q$

$$\vec{E}_3 = 0 \qquad (r < R_3)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_3 < r < R_2)$$

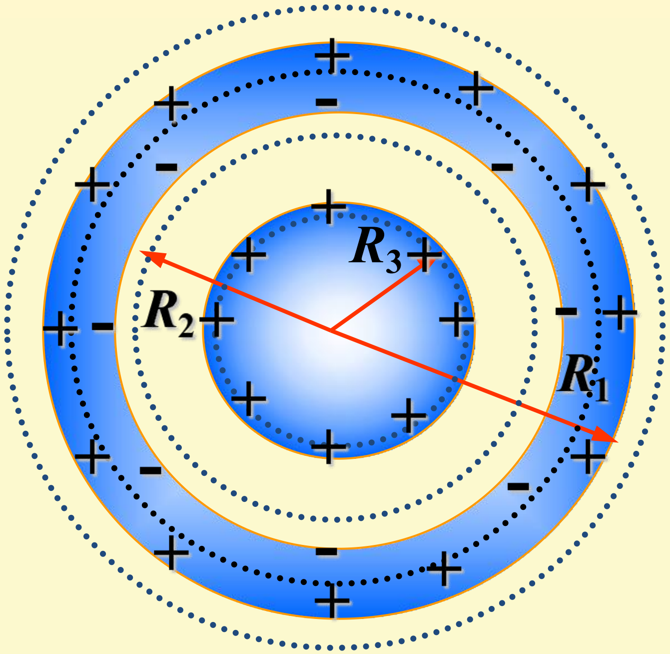
$$E_1 = 0 \qquad (R_2 < r < R_1) \qquad E_0 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R_1)$$

(2) $$U_o=\int_0^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_0^{R_3}+\int_{R_3}^{R_2}+\int_{R_2}^{R_1}+\int_{R_1}^{\infty}$$

$$=\int_{R_3}^{R_2}E_2 dr+\int_{R_1}^{\infty}E_0 dr$$

$$=\int_{R_3}^{R_2}\frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

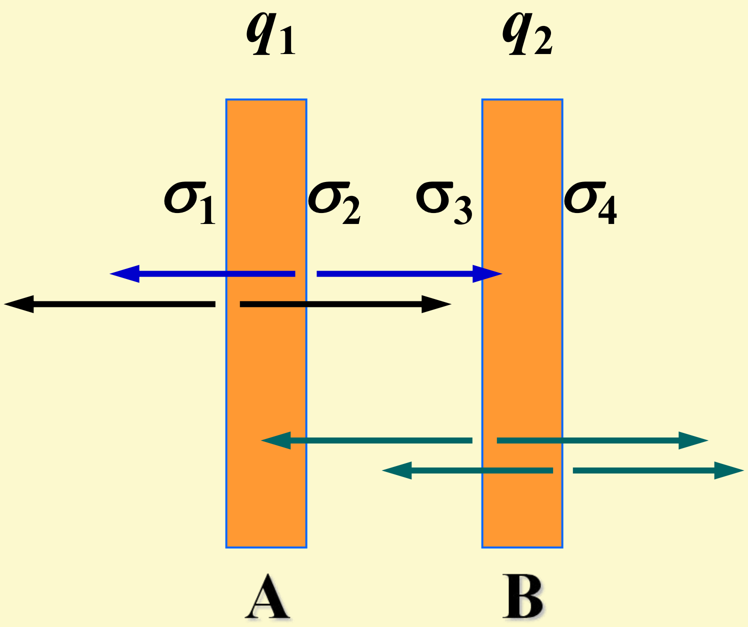
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)$$



(3) $$U_1=\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

例6-13 两块大导体平板，面积为S，分别带电q_1和q_2，两极板间距远小于平板的线度. 求平板各表面的电荷密度.

解 设四板面密度如图所示



由电荷守恒 $\sigma_1 S+\sigma_2 S=q_1$

$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=q_2$$

由静电平衡条件，导体板内E=0

$$E_{\mathrm{A}}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$E_{\mathrm{B}}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{q_1+q_2}{2S} \qquad \sigma_2=-\sigma_3=\frac{q_1-q_2}{2S}$$

$\boxed{\text{如}q_1=-q_2\text{，结果如何?}}$

6.4.4 电容和电容器

1. 孤立导体(isolated inductor)的电容(capacitance)

真空中半径为R、带电量为Q的孤立导体球电势为

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\qquad \text{当}R=\text{常量时},U\propto Q,\text{但}\frac{Q}{U}=\text{定值}$$

导体处于静电平衡时, U一定, q分布定; 同一U下, 导体形状不同, q 不同; —— 导体容纳电的能力, **电容**

定义: 孤立导体所带电量Q与其电势U的比值.

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$

单位: 法拉 “F” $1\,\mathrm{F}=10^6\,\mu\mathrm{F}=10^{12}\,\mathrm{pF}$

物理意义: 用单位电势差容纳的电量来表征导体容电能力

注: ➢ 只与导体本身的形状、大小和结构有关;

➢ 与是否带电无关.

电容的计算

例6-14 求半径R的孤立金属球的电容.

解 设其带电量为Q, 令$U_\infty = 0$ 则金属球电势: $U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

由电容定义: $$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

2. 电容器(capacitor)及其电容

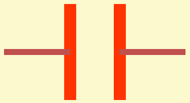
电容器: 由电介质隔开的两金属薄片组成的导体组

电容器极板

特点: 将电场集中在有限空间

电容器电容: 极板电量q与极板间电势差ΔU之比值

$$\boxed{C=\frac{q}{\Delta U}}$$

电容器的符号: 

说明: (1) C 是描述电容器储电本领的物理量;

(2) C取决于电容器两板的形状、大小、相对位置及中间电介质的种类和分布情况;

(3) q为一个极板所带电量的绝对值.

电容器电容的计算步骤:

1. 假设电容器的两个极板A、B分别带 $+q$ 和$-q$ 电荷;
2. 求两极板间的电场 $\vec{E}$ 分布, 并由 $U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 计算两极板间电势差U_A-U_B .
3. 由定义式 $C=\dfrac{q}{U_A-U_B}$ 计算电容C.

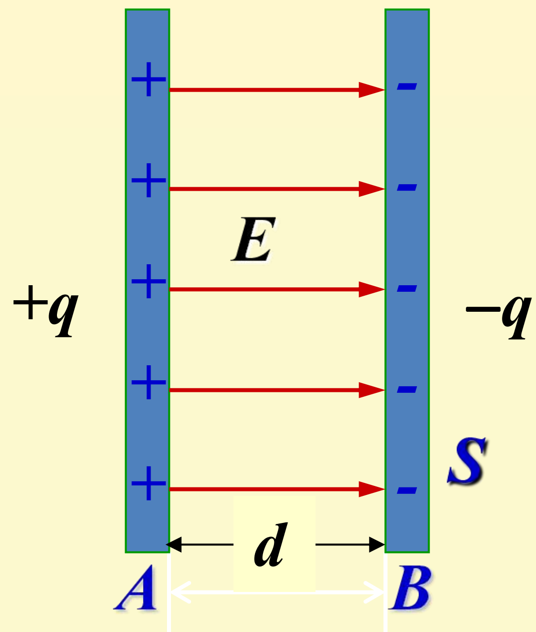
平板电容器

第一步: 假设带电量$\pm q$

第二步: 求场强分布及板间电势

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

$$U_A-U_B=\int_0^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$



第三步: 按电容定义求解

电容: $$\boxed{C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

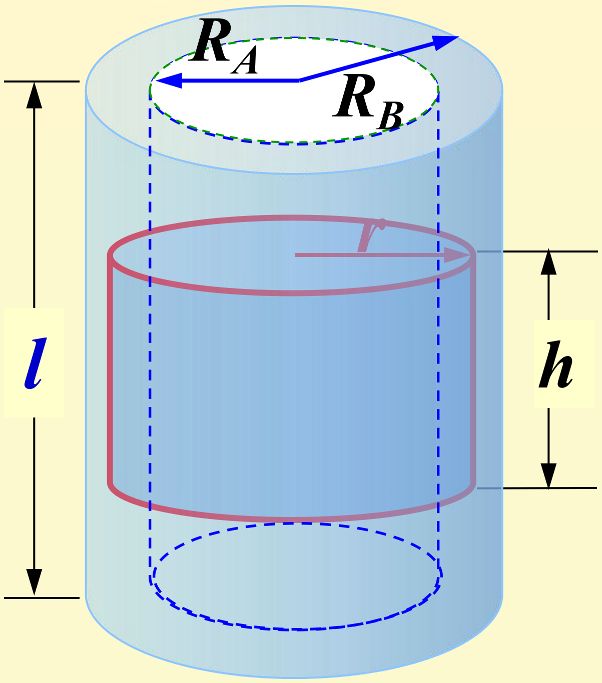
影响因素 $\begin{cases} C\propto S \\ C\propto 1/d \end{cases}$

圆柱形电容器

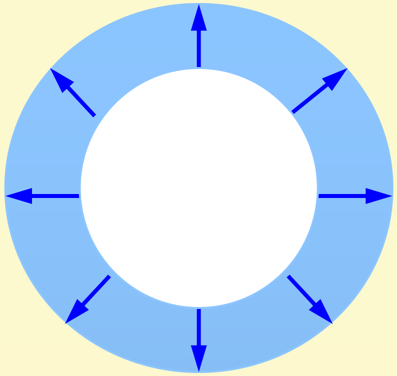
第一步: 假设带q电量

第二步: 求场强分布及板间电势

选高斯面, 应用高斯定理:



$$E\cdot 2\pi rh=\frac{q}{\varepsilon_0 l}h \qquad E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl}$$

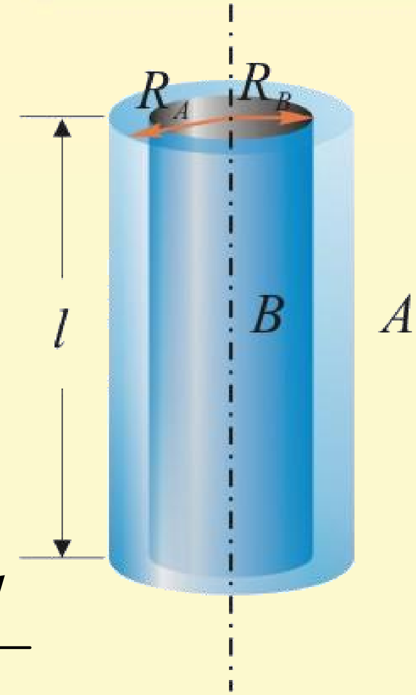


$$\Delta U=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 lr}$$

$$\Delta U=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

第三步: 按电容定义求解

圆柱形电容器电容:



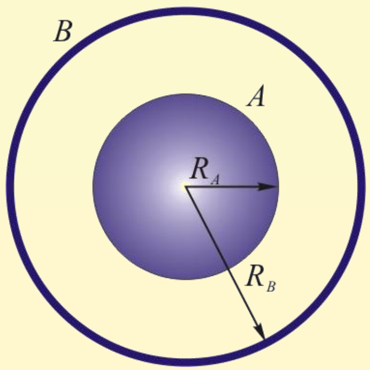
$$\boxed{C=\frac{q}{\Delta U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln R_B/R_A}}$$

设极板间距为d, $R_B=R_A+d$

当$d \ll R_A$: $$\ln\frac{R_B}{R_A}=\ln\frac{R_A+d}{R_A}=\ln\left(1+\frac{d}{R_A}\right)\approx\frac{d}{R_A}$$

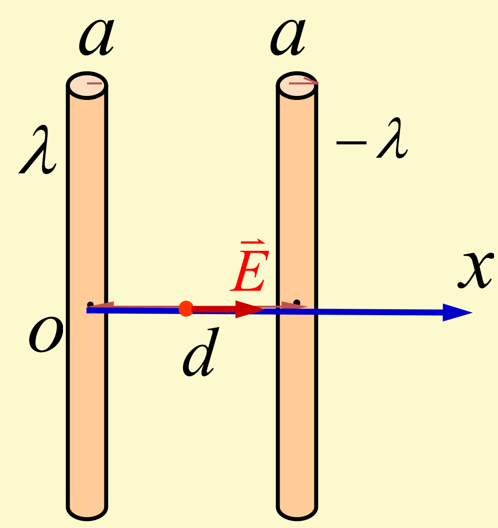
$$C\approx\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{d/R_A}=\frac{2\pi\varepsilon_0 lR_A}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

对于球形电容器, 其电容:



$$C=\frac{q}{\Delta U}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_AR_B}{R_B-R_A}$$

例6-15 半径为a的两根无限长平行直导线, 其中心间距为d ($d>>a$). 若导线带电, 可认为电荷均匀分布, 试求导线单位长度的电容.



解 建立坐标, 设单位长度带电$\pm\lambda$

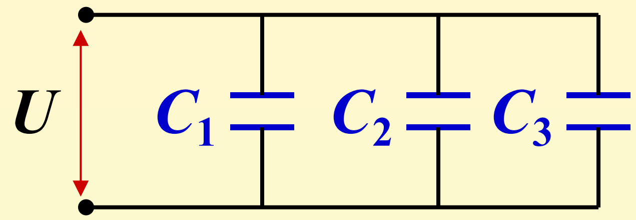
$$E=\begin{cases}0 & \text{(导体内)}\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)} & \text{(导体棒间)}\end{cases}$$

$$\Delta U=\int\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{d-a}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$C=\frac{\lambda}{\Delta U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d-a)/a}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln d/a}$$

3. 电容器的连接

1) 电容器的并联



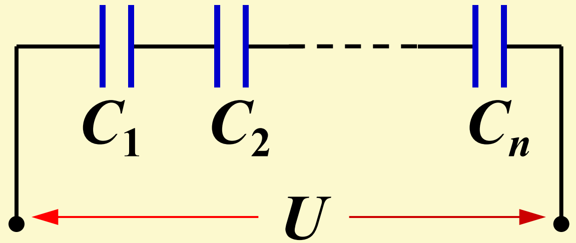
$$q_1 = C_1 U,\ q_2 = C_2 U, \cdots$$

总电量: $$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = (C_1 + C_2 + \cdots C_n)U$$

等效电容: $$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

结论: 并联电容器的等效电容等于个电容器电容之和.

2) 电容器的串联



等效电容: $$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

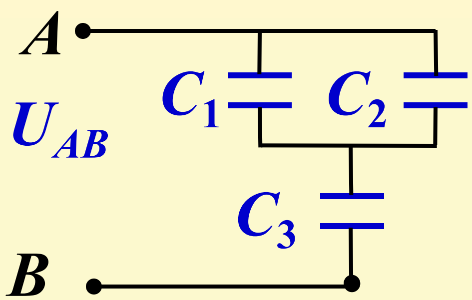
结论: 串联电容器的等效电容的倒数等于各电容的倒数之和.

例6-16 如图已知C_1=10μF, C_2=5μF, C_3=5μF, U_{AB}=100V. 求:

(1) *A*、*B*两端的等效电容;

(2) C_2上的电量和电压;

(3) 若C_1被击穿, 求C_3上的电量和电压.



解 (1) $$C_{AB}=\frac{C_{12}\cdot C_3}{C_{12}+C_3}=\frac{(C_1+C_2)\cdot C_3}{C_1+C_2+C_3}=3.75\,\mu\text{F}$$

(2) $$U_{AB}=U_{12}+U_3$$

$$q=C_3U_3=(C_1+C_2)U_{12}$$

$$U_{12}=\frac{C_3U_{AB}}{C_1+C_2+C_3}=25\,\text{V}$$

$$q_2=C_2V_{12}=1.25\times10^{-4}\,\text{C}$$

(3) C_1击穿短路, 电压加在C_3上

$$U_3=U_{AB}=100\,\text{V}$$

$$q_3=C_3U_3=5.0\times10^{-4}\,\text{C}$$

§6-5 静电场中的介质 介质中的高斯定理

6.5.1. 电介质的电结构和电极化

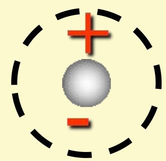
1. 电介质(dielectric)的电结构

电阻率(resistivity)很大, 导电能力很差的物质, 即绝缘体.

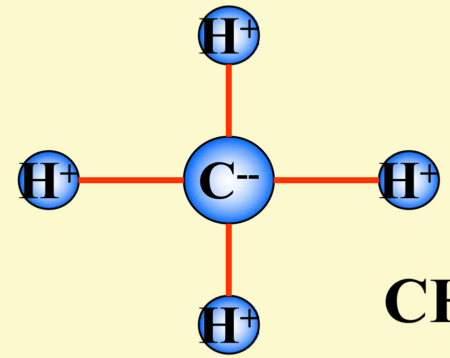
（常温下电阻率大于10^7欧·米）

电结构特点: 分子中的正负电荷束缚的很紧, 介质内部几乎没有自由电荷.

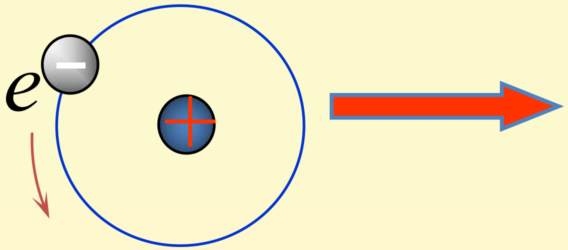
两类电介质分子结构:

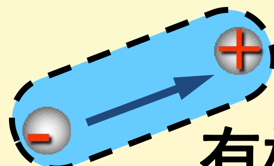


无极分子

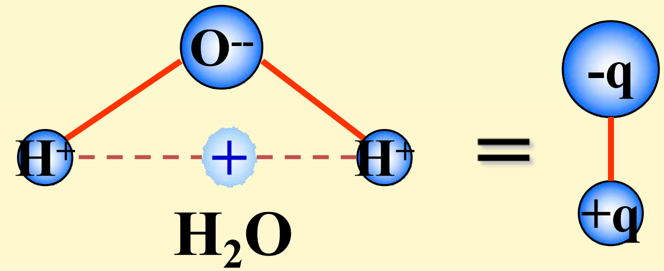


CH_4





有极分子



H_2O

2. 电介质在外电场中的极化(polarize)现象

静电场 $\vec{E}_0$ ⟷ 导体、电介质

相互作用

相互影响

感应电荷

极化电荷

电荷重新分布 $\rightarrow \vec{E}'$

影响 原有电场

电场重新分布

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

静电平衡状态

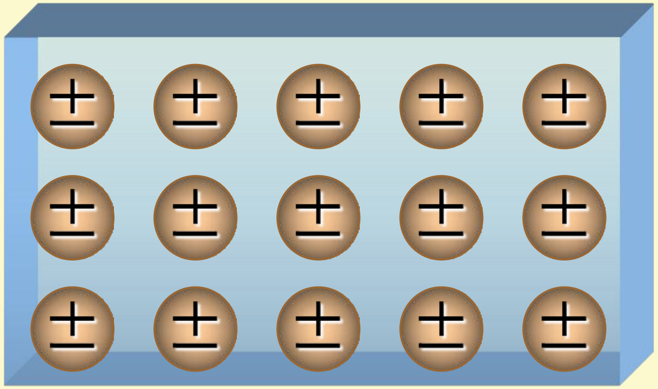
基本定理的特殊应用

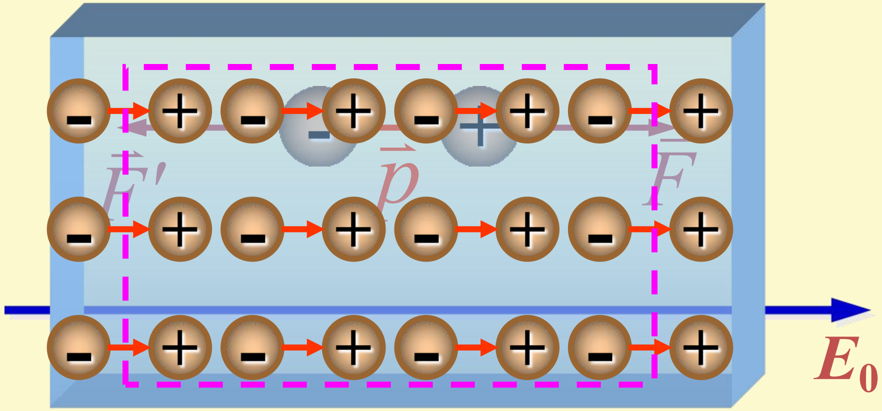
仅限于各向同性的均匀金属导体和电介质

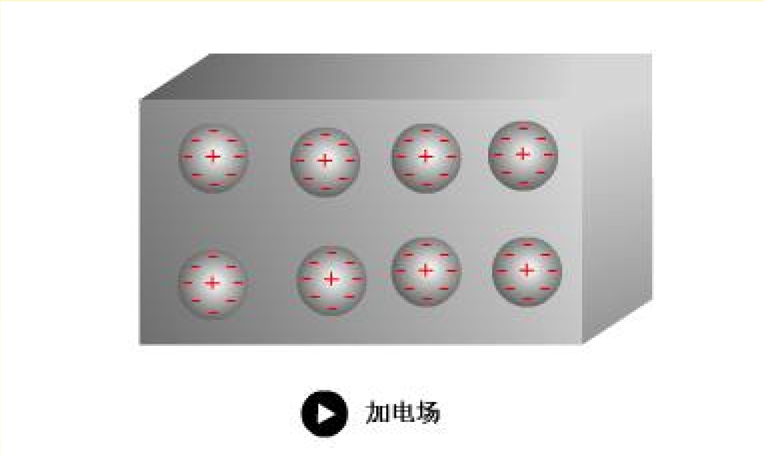
电介质极化: 在外电场的作用下，介质表面产生电荷的现象.

极化电荷/束缚电荷

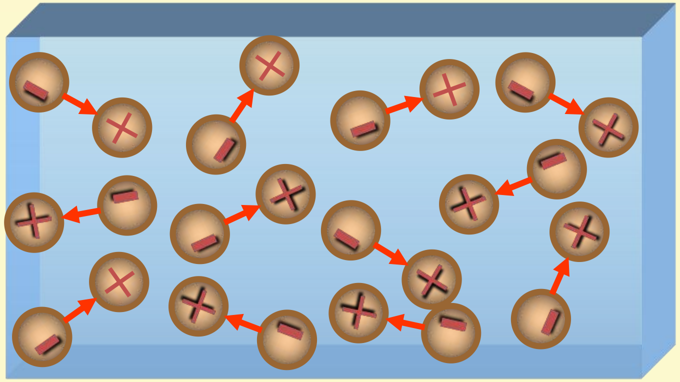
无极分子(nonpolar molecule)的位移极化(displacement polarization)

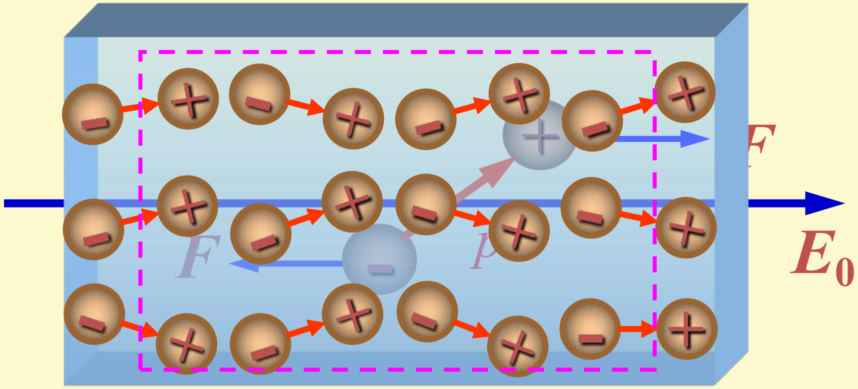


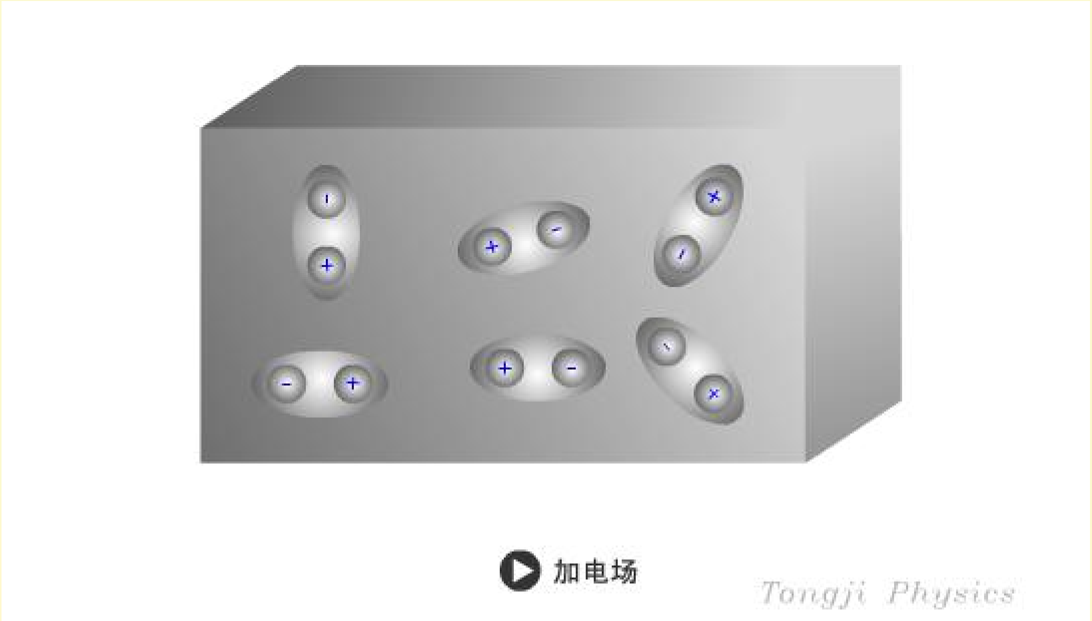




有极分子(polar molecule)的转向极化(orientation polarization)



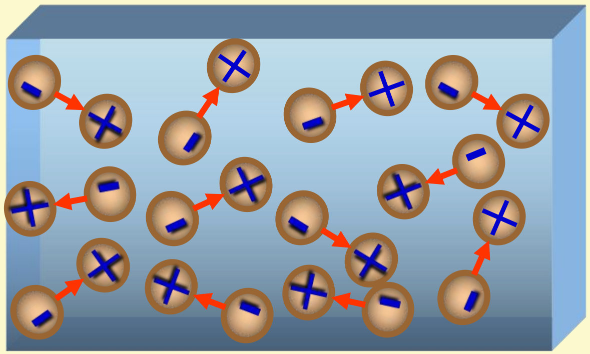


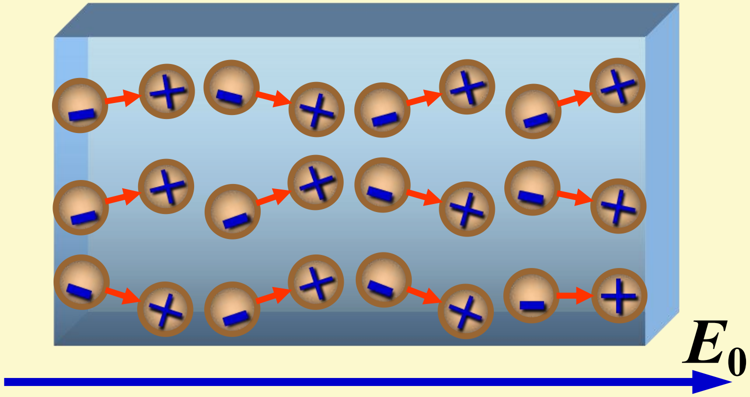


6.5.2 电极化强度矢量

——描述介质的极化程度

1. 电极化强度(polarization intensity)定义





没极化: $\sum \vec{P}_e = 0$

极化时: $\sum \vec{P}_e \neq 0$

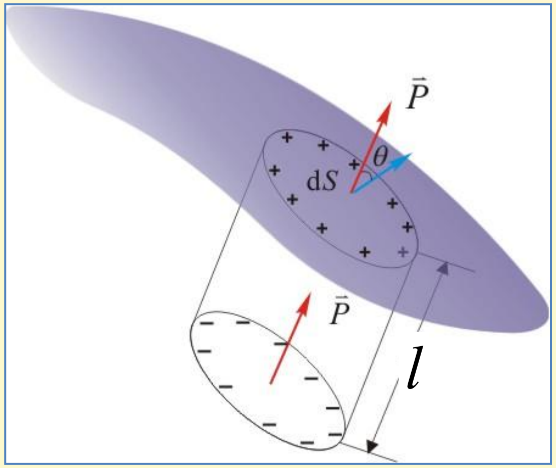
定义: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$

实验规律: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

χ_e与E无关, 取决于电介质的种类.

电极化率　　总场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

2. 电极化强度矢量与极化电荷的关系



设均匀电介质中一斜柱体, 体积为

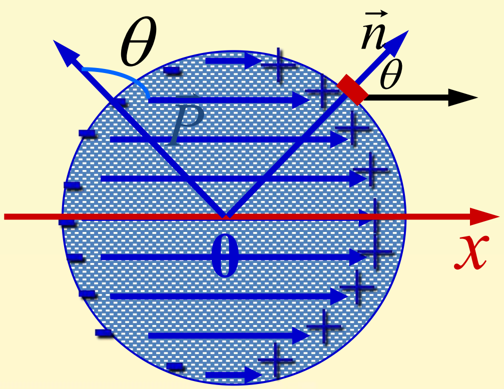
$$\Delta V = \mathrm{d}S \cdot l\cos\theta$$

$$\sum \vec{p}_i = \sigma' \mathrm{d}S\vec{l} = q'\vec{l}$$

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\sum \vec{p}_i\right|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \cdot \mathrm{d}S \cdot l}{\mathrm{d}S \cdot l\cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\sigma' = \left|\vec{P}\right| \cdot \cos\theta = P_{\mathrm{n}}}$$

结论: 均匀电介质表面产生的极化电荷面密度等于该处电极化强度沿表面外法线方向的投影.



$\theta < \dfrac{\pi}{2}$: 极化电荷为正电

$\theta > \dfrac{\pi}{2}$: 极化电荷为负电

3. 电介质中的电场强度

总场=外场+极化电荷附加电场

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

外场 $\rightarrow \vec{P} \rightarrow q'(\sigma',\rho')$

$\vec{E} \leftarrow \vec{E}_0+\vec{E}'$

4. 有电介质时静电场的高斯定理 电位移矢量

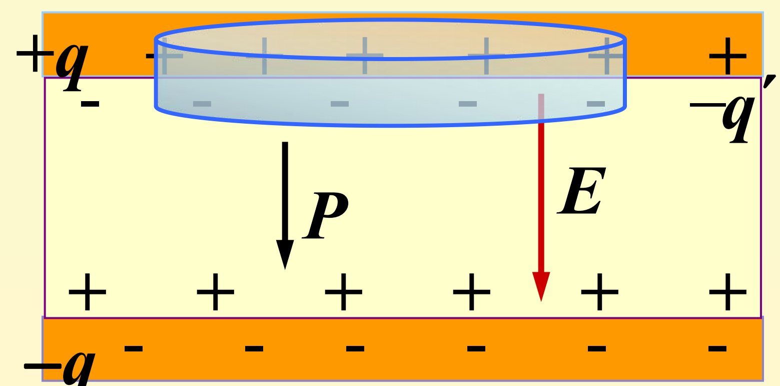
真空中的高斯定理: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

介质中的高斯定理: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_i+\sum q_i'\right)$

以平板电容器为例:

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=-\int_S \sigma' dS=-\sum q_i'$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i-\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \qquad \oint_S \left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\cdot d\vec{S} = \sum q_i$$

定义电位移矢量(electric displacement vector)(辅助量):

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

介质中的高斯定理: 在任何静电场中,通过任意闭合曲面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷(free charge)的代数和.

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i}$$

注: 1. 介质中的高斯定理具有普适性.

2. D是总场,与q、q'有关,其通量仅与q有关.

3. 真空 — 特殊介质 $\vec{P}=0 \Rightarrow \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum q_i \xrightarrow{\text{真空}} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

$\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系

对于各向同性的电介质：$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}$$

令 $\varepsilon_r=1+\chi_e$ $\qquad$ $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$

相对介电常数

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$

$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$: 介电常数

注： $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 是定义式，普遍成立.

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 只适用于各向同性的均匀介质.

真空中：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$ $\qquad$ 介质中：$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

$$\varepsilon_0\vec{E}_0=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\vec{E}_0=\varepsilon_r\vec{E}$$

6.5.5 有电介质时静电场的计算

1. 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

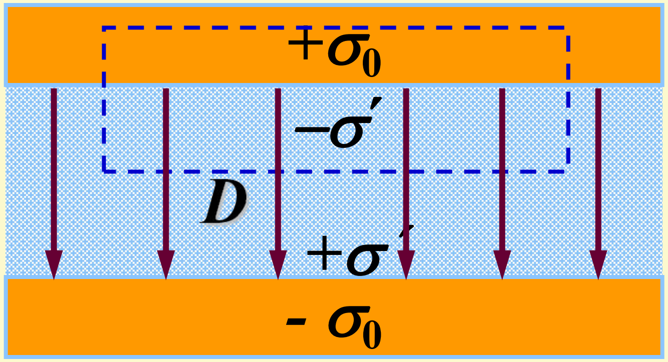
2. 根据电场强度与电位移矢量的关系计算场强

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

本课程只要求特殊情况
- 各向同性电介质
- q_0, q'分布具有某些对称性

电介质分布的对称性
- 均匀无限大介质充满全场
- 介质分界面为等势面
- 介质分界面与等势面垂直

例6-17 自由电荷面密度为σ_0的平行板电容器，其极化电荷面密度为多少？



解 由介质中的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D\cdot S = \sigma_0 S \qquad D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

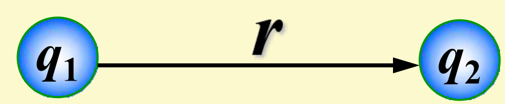
$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - E' \longrightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$$

§6-6 电场的能量

带电系统带电: 电荷相对移动→外力克服电场力做功→电场能量.



6.6.1 点电荷系统的能量

电能: $$W = A_{\infty r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

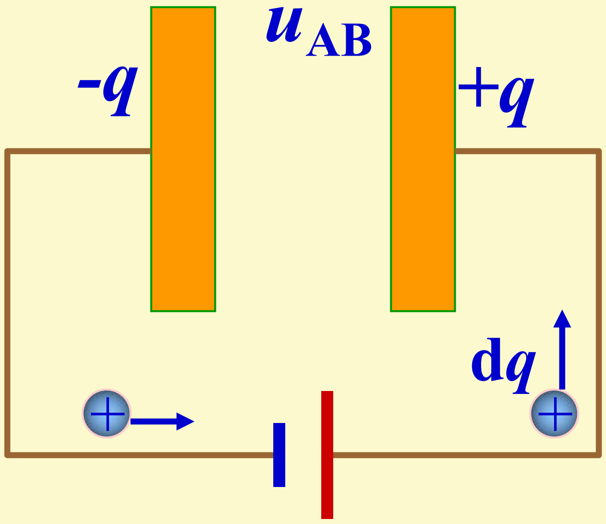
$$W = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2$$

***n*个点电荷系统的电能:** $$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i$$

连续分布带电体的电能: $$W = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}q = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V u\rho\,\mathrm{d}V \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_S u\sigma\,\mathrm{d}S \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_L u\lambda\,\mathrm{d}l \end{cases}$$

6.6.2 电容器的能量

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}q \cdot u_{\mathrm{AB}} = \mathrm{d}q\,\frac{q}{C}$$



$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$W_e = A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad Q = CU$$

电容器的电能: $$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

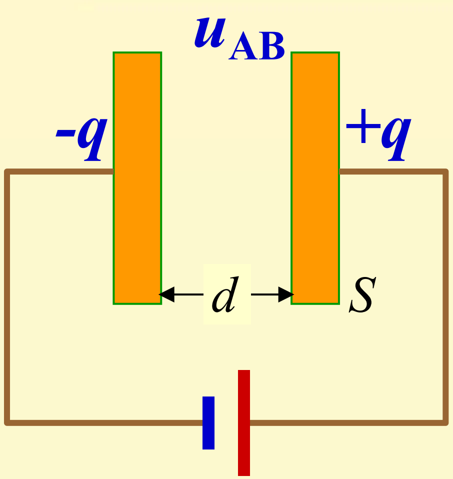
6.6.3 电场的能量　能量密度

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$U = Ed$$

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd$$



*V=Sd*为电容器体积→电能是储存在(定域在)电场中.

电场的能量密度(energy density): 单位体积电场所具有的能量.

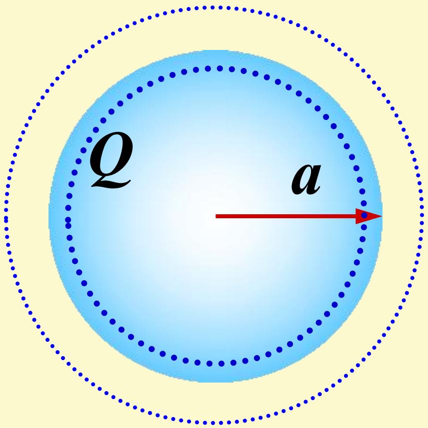
$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

电场能量(energy of electric field):

$$\boxed{W = \int_V w_e \mathrm{d}V}$$

注: 对任意电场均成立

例6-18 求真空中一半径为a、带电量为Q的均匀球体的静电场能.



$$\rho=\frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

解一

$$E_1\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{4\pi a^3/3}\frac{4\pi r^3/3}{\varepsilon_0}$$

球内场强:

$$E_1=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

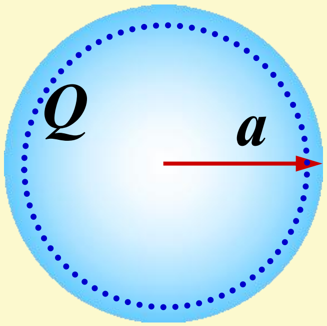
球外场强:

$$E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$u=\int_r^a E_1\mathrm{d}r+\int_a^\infty E_2\mathrm{d}r$$

$$u=\int_r^a \frac{Qr\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\int_a^\infty \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$W_e=\frac{1}{2}\int u\rho\,\mathrm{d}V$$



$$=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\cdot\frac{Q}{4\pi a^3/3}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^4}\int_0^a r^2\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

解二

$$W_e=\int w_e \mathrm{d}V=\int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 \mathrm{d}V+\int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V$$

$$=\int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r+\int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

电场能是以体密度定域分布在空间内的静电能.

思考: 半径为R、带电量为Q的均匀带电球面, 其静电能与球体的静电能相比, 哪个大?