

14-19 设波函数 $\psi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}a^2x^2}$ (a 为常量), 求归一化常数 A .

解: 根据归一化条件.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{A^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{A^2} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}$$

14-20 假设粒子的波函数如下：

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ 或 } x > a, \\ Cx(a-x) & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

a 为常量, 求归一化系数 C .

解: $\int_0^a |\psi(x)|^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_0^a x^3(a-x)^3 = \frac{1}{C^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{3}a^2x^3 \Big|_0^a = \frac{1}{C^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{30}a^5 = \frac{1}{C^2}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{30}{a}} \cdot \frac{1}{a^2}$$

14-21 利用不确定关系, 粗略估计氢原子的基态能量 (假设电子坐标不确定度为 $\Delta x = \frac{a_0}{2}$, 动量不确定度为 $\Delta p = p$, $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$)

解: $p = \frac{\hbar}{a_0}$

14-22 计算一维无限深势阱中, 粒子处于第一激发态时的概率最大值位置.

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right).$$

$$\frac{2\pi}{a}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{a}{4}, \frac{3a}{4}.$$

a 为势阱宽度.

14-26 假设氢原子处于 $n = 3, l = 1$ 的激发态, 则原子的轨道角动量在空间有哪些可能取向? 计算各可能取向的角动量与 z 轴之间的夹角.

解: $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \sqrt{2} \hbar$

$$m_l = \{0, \pm 1\} \quad L_z = \pm \hbar, 0.$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{L_z}{L} \quad \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$$

14-27 计算氢原子第一激发态与基态之间的能量差. 假设火焰 (温度为 2 700 K) 中含有 10^{20} 个氢原子, 如果火焰中氢原子能级按玻耳兹曼分布, 求氢原子处于第一激发态时的原子个数 n_2 , 设火粉中每秒放射光子数为 $10^8 n_2$, 求光的强度.

解:

$$n_2 = P(E_2) \cdot n_1 = e^{-\frac{E_1 - E_2}{kT}} \cdot n_1 = e^{-\frac{10.21 \times 10^{-19} \times 1.6}{1.38 \times 10^{-23} \times 2700}} = e^{-44} n_1.$$

$$n_2 = P(E_2) \cdot n_1 < 1.$$

$$n_1 + n_2 = 10^{20}$$