§5.4 几类函数的积分

1. 有理函数的积分

定义：设$P_n(x)$，$Q_m(x)$都是多项式，称

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+a_m} \qquad (*)$$

为有理函数. $n\geqslant m$，$(*)$式为假分式；$n<m$，$(*)$式为真分式.

注：任一假分式都可以写成一个多项式与一个真分式之和的形式. 例如：$\dfrac{x^3+2x^2-2x+4}{x^2+1}=x+2+\dfrac{-3x+2}{x^2+1}$.

定理：任何既约有理真分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$均可表示为有限个最简分式之和：如果分母多项式$Q(x)$在实数域上的质因式分解式为

$Q(x)=b_0(x-a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}\cdots$，$\lambda,\mu$为正整数，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可唯一地分解为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\lambda}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{A_{\lambda}}{x-a}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{x^2+px+q}+\cdots$$

其中诸A_i，M_i，N_i都是常数，可由待定系数法确定，式中每个分式叫做$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的部分分式.

例1. $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x+1}\mathrm{d}x$.

例2. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

例3. $\displaystyle\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+4x}$.

例4. $\displaystyle\int \frac{5x-3}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

例5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}$.

例6. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,\mathrm{d}x$.

例7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^{10}+1)}\,\mathrm{d}x$.

例8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{11}}\,\mathrm{d}x$.

2. 三角函数有理式的积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=\tan\frac{x}{2}} \int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

例9. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x$.

例10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin 2x}$.

3. 简单无理函数的积分

例11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

例12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

例13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

例14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

例15. 设$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

例16. 已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.