8.2 动态规划的基本原理

动态规划的目标

1. 有多个方案, 且每个方案都有一个总指标函数值
2. 动态规划的目标是找到最优的方案, 也就是找到使得总指标函数最优(最大或最小)方案, 即

$$\max\left\{V_{1,n+1}\right\} = \max\left\{V_1(u_1, s_1) + V_2(u_2, s_2) + \ldots + V_n(u_n, s_n)\right\}$$

或

$$\min\left\{V_{1,n+1}\right\} = \min\left\{V_1(u_1, s_1) + V_2(u_2, s_2) + \ldots + V_n(u_n, s_n)\right\}$$

在总指标函数中, 一般来说s_1是给定的，其它的变量都是不确定的，这样一来总指标函数有2n-1个变量，直接求极值非常困难。动态规划的最优化原理提供了另外一种求解思路。

最优化原理的语言描述

一个过程的最优策略具有这样的性质，即无论初始状态及初始决策如何，对于先前决策所形成的状态而言，其以后的所有决策必构成最优策略。

理解1：如果第一阶段到第k阶段形成的策略是最优策略的话，那么从第一阶段到第t阶段所形成的策略也必须是最优策略（t<k)

例如在一个图中，若从点1到点5的最短路线为

$$1 \to 2 \to 3 \to 5$$

则1→2→3 **是点1到点3的最短路线，** 1→2**是点1到点2的最短路线**

最优化原理的语言描述

一个过程的最优策略具有这样的性质，即无论初始状态及初始决策如何，对于先前决策所形成的状态而言，其以后的所有决策必构成最优策略。

理解2：如果第k阶段到第n阶段形成的策略是最优策略的话，那么从第t阶段到第n阶段所形成的策略也必须是最优策略（t>k)

例如在一个图中，若从点1到点5的最短路线为

$$1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow5$$

则$2\rightarrow3\rightarrow5$ 是**点2到点5的最短路线**，$3\rightarrow5$是**点3到点5的最短路线**

最优化原理的数学描述——和形式

1. 利用前部子指标函数来描述

$$
\begin{aligned}
opt\left\{V_{1,k+1}\right\} &= opt\left\{V_1(u_1,s_1)+V_2(u_2,s_2)+\ldots+V_k(u_k,s_k)\right\} \\
&= opt\left\{V_{1,k}+V_k(u_k,s_k)\right\} \\
&= opt\left\{opt\left\{V_{1,k}\right\}+V_k(u_k,s_k)\right\}
\end{aligned}
$$

由于$opt\{V_{1,t+1}\}$仅仅与状态s_{t+1}有关，因而也称$opt\{V_{1,t+1}\}$为前部最优值函数，用$f_t\{s_{t+1}\}$来表示，则上式可表示为

$$
\begin{cases}
f_1(s_2)=opt\left\{V_1(u_1,s_1)\right\} \\
f_k(s_{k+1})=opt\left\{f_{k-1}(s_k)+V_k(u_k,s_k)\right\}\ (2\le k\le n)
\end{cases}
$$

$\boxed{\text{其中}opt\text{表示"max"或"min"}}$

最优化原理的数学描述——和形式

$$\begin{cases} f_1(s_2) = opt\{V_1(u_1, s_1)\} \\ f_k(s_{k+1}) = opt\{f_{k-1}(s_k) + V_k(u_k, s_k)\}\ (2 \le k \le n) \end{cases}$$

为了递推方程形式的统一, 可以引入$f_0(s_1)=0$, 这样一来上面的递推公式就可写为下式

$$\begin{cases} f_0(s_1) = 0 \\ f_k(s_{k+1}) = opt\{f_{k-1}(s_k) + V_k(u_k, s_k)\}\ (1 \le k \le n) \end{cases}$$

由于$f_0(s_1)=0$是专门引入的，特称之为边界条件

最优化原理的数学描述——和形式

2. 利用后部子指标函数

$$opt\{V_{k,n+1}\} = opt\{V_k(u_k, s_k) + V_{k+1}(u_{k+1}, s_{k+1}) + \dots + V_n(u_n, s_n)\}$$

$$= opt\{V_k(u_k, s_k) + V_{k+1,n+1}\}$$

$$= opt\{V_k(u_k, s_k) + opt\{V_{k+1,n+1}\}\}$$

由于$opt\{V_{t,n+1}\}$仅仅与状态s_t有关，因而也称$opt\{V_{t,n+1}\}$为后部最优值函数，用$f_t\{s_t\}$来表示，则上式可表示为

$$\begin{cases} f_n(s_n) = opt\{V_n(u_n, s_n)\} \\ f_k(s_k) = opt\{f_{k+1}(s_{k+1}) + V_k(u_k, s_k)\} (1 \le k \le n-1) \end{cases}$$

最优化原理的数学描述——和形式

$$\begin{cases} f_n(s_n) = opt\{V_n(u_n, s_n)\} \\ f_k(s_k) = opt\{f_{k+1}(s_{k+1}) + V_k(u_k, s_k)\} (1 \le k \le n-1) \end{cases}$$

为了递推方程形式的统一, 可以引入$f_{n+1}(s_{n+1})=0$, 这样一来上面的递推公式就可写为下式

$$\begin{cases} f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \\ f_k(s_k) = opt\{f_{k+1}(s_{k+1}) + V_k(u_k, s_k)\} (1 \le k \le n) \end{cases}$$

由于$f_{n+1}(s_{n+1})=0$是专门引入的，也称之为边界条件

动态规划的无后效性

1. 基于前部最优值指标函数递推方程

由于最优值指标函数$f_k(s_{k+1})$中与状态变量$s_t\ (1\le t\le k)$和决策变量$u_t\ (1\le t\le k)$无关，这意味着以前的状态和决策不影响后面的优化过程, 也就是$f_{k+1}(s_{k+2})$仅仅与$f_k(s_{k+1})$ 有关，把这种特性称之为无后效性。

2. 基于后部最优值指标函数递推方程

由于最优值指标函数$f_k(s_k)$中与状态变量$s_{t+1}(k\le t\le n)$和决策变量$u_t\ (k\le t\le n)$无关，这意味着以前的状态和决策不影响以后的优化过程，也就是$f_{k-1}(s_{k-1})$仅仅与$f_k(s_k)$ 有关，把这种特性称之为无后效性。

最优化原理的数学描述——积形式

1. 利用前部子指标函数来描述

$$opt\{V_{1,k+1}\} = opt\{V_1(u_1,s_1)\cdot V_2(u_2,s_2)\cdot\ldots\cdot V_k(u_k,s_k)\}$$

$$= opt\{V_{1,k}\cdot V_k(u_k,s_k)\}$$

$$= opt\{opt\{V_{1,k}\}\cdot V_k(u_k,s_k)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_0(s_1)=1 \\ f_k(s_{k+1}) = opt\{f_{k-1}(s_k)\cdot V_k(u_k,s_k)\}\ (1\le k\le n) \end{cases}$$

其中$f_0(s_1)$=1为引入的边界条件

最优化原理的数学描述——积形式

2. 利用后部子指标函数

$$
\begin{aligned}
opt\left\{V_{k,n+1}\right\} &= opt\left\{V_k(u_k,s_k)\cdot V_{k+1}(u_{k+1},s_{k+1})\cdot\ldots\cdot V_n(u_n,s_n)\right\}\\
&= opt\left\{V_k(u_k,s_k)\cdot V_{k+1,n+1}\right\}\\
&= opt\left\{V_k(u_k,s_k)\cdot opt\left\{V_{k+1,n+1}\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} f_{n+1}(s_{n+1}) = 1 \\ f_k(s_k) = opt\left\{ f_{k+1}(s_{k+1})\cdot V_k(u_k,s_k)\right\} \quad (1\le k\le n) \end{cases}
$$

其中$f_{n+1}(s_{n+1})$=1是引入的边界条件