线性规划的求解
The Solution of Linear Programming

1. 解的相关概念
2. 二维线性规划的图解法
3. 线性规划的单纯形法

1. 线性规划一般形式模型的概念

（1）可行解：使得约束条件均成立的解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$。

（2）可行域：全部可行解的集合称为可行域。

（3）最优解：使目标函数达到**最优值**的可行解。

2. 线性规划标准形式模型的概念

$$\max \quad z = CX \qquad\qquad \max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t. \begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$A = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$$

（1）**基(basis)**：设A为线性规划模型约束条件系数矩阵 (m × n，m ≤ n），而B为其m × m子矩阵，若|B|≠0，则称B为该线性规划模型的一个基。显然基B由A的m个列向量组成。

（2）基变量(basic variable)：若 P_k 为基B中的一个列向量，则称变量 x_k 为基变量，P_k为基向量。

2. 线性规划标准形式模型的概念

$$\max \quad z = CX \qquad\qquad \max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t. \begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

(3) 非基变量(basic variable)： 若 P_k不为基B中的一个列向量，则称变量 x_k 为非基变量， P_k为非基向量。

(4) 基解(basic solution)： 令所有非基变量的值为0，则普通约束条件成为 m个方程、m个未知数的方程组，具有唯一解，称这个解为基解。

(5) 基可行解(basic feasible solution)： 既可行解，又是基解

(6) 可行基 (feasible basis)： 基可行解对应的基。

(7) 退化解：若基变量的值为0，则相应基解为退化解

例：

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{标准化}}$

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

原模型可行解：X=(0，0)^T，X=(0，1)^T，X=(1/2，1/3)^T。

标准模型的可行解：X=(0, 0, 3, 4)^T，X=(1, 1, 1, 1)^T。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \left[P_3, P_4\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则变量x_3, x_4是基变量。

令 x_1=x_2=0，则 x_3=3，x_4=4，X=(0, 0, 3, 4)^{T}是基可行解

例：

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{标准化}}$

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = [P_1, P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则变量x_1, x_3是基变量。

令 $x_2 = x_4 = 0$，则 $x_1 = 4$, $x_3 = -1$，$X=(4, 0, -1, 0)^T$是非基可行解

复习思考题：

1. 可行解和可行域有怎样的关系？
2. 一个标准化LP模型，最多可有多少个基？
3. 基解是如何定义的？怎样才能得到基解？
4. 可行解、基解、基可行解三者之间有什么关系？在LP模型中是否一定存在？
5. 什么是可行基？
6. 基可行解有什么特征

1.2　线性规划问题的图解方法

利用作图方法求解

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \text{------------}(1) \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \text{----------------}(2) \\ 4x_1 \le 16 \text{-------------------}(3) \\ 4x_2 \le 12 \text{-------------------}(4) \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.2 线性规划问题的图解方法

步骤

（1）作平面直角坐标系，标上刻度；

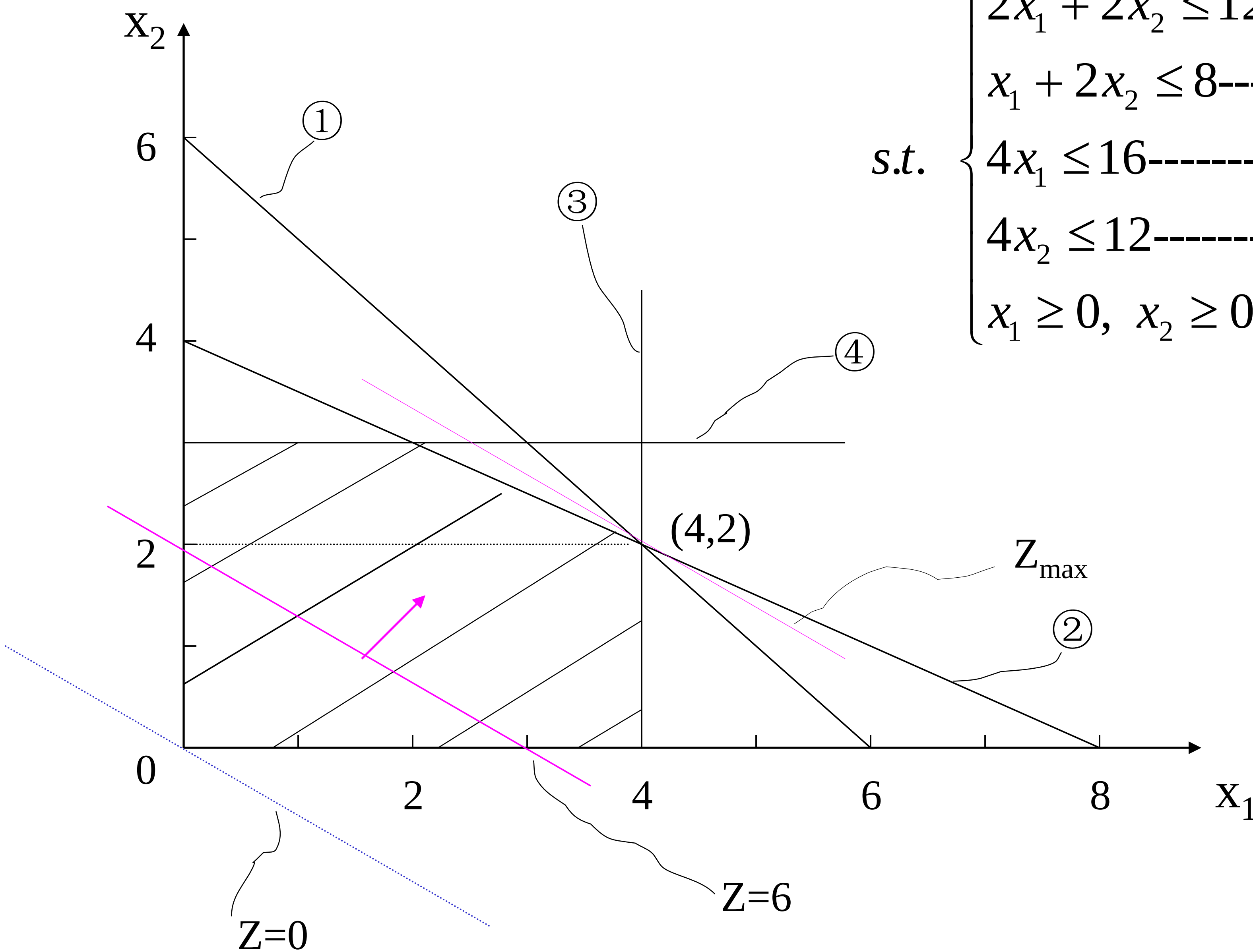
（2）做出约束方程所在直线，确定可行域；

（3）做出一条目标函数等值线，判定优化方向；

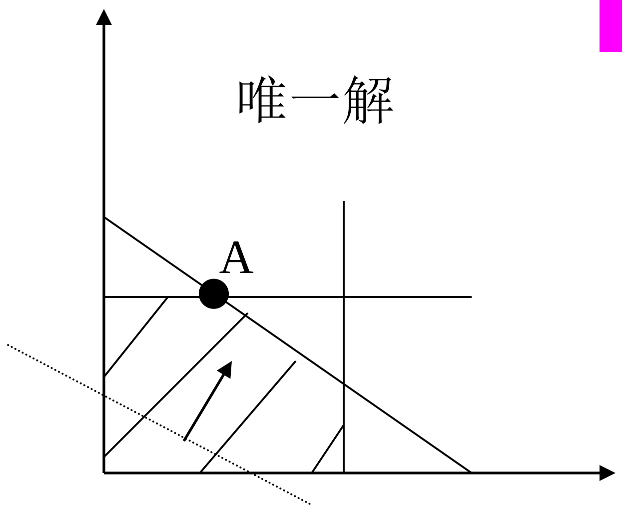
（4）沿优化方向移动，确定与可行域相切的点，确定最优解，并计 算最优值。

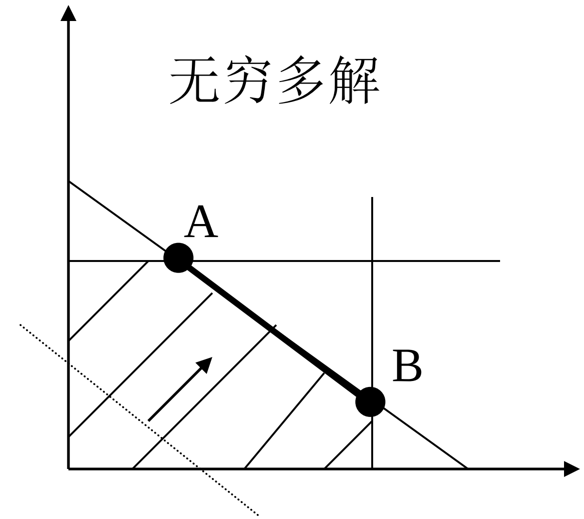
$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

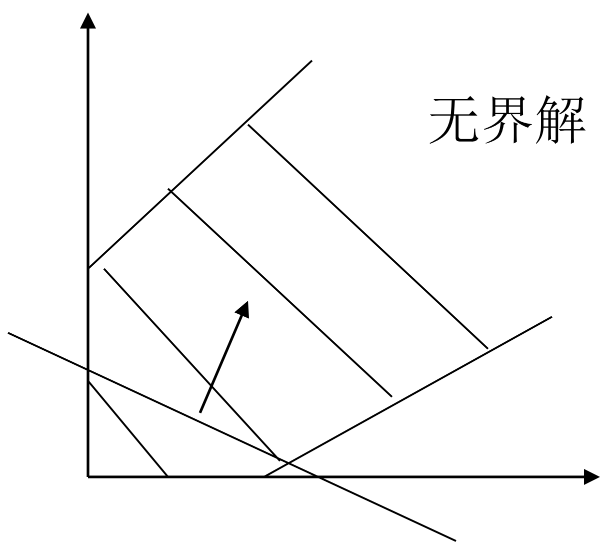
$$s.t.\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \text{------------}(1) \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \text{---------------}(2) \\ 4x_1 \le 16 \text{--------------------}(3) \\ 4x_2 \le 12 \text{--------------------}(4) \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

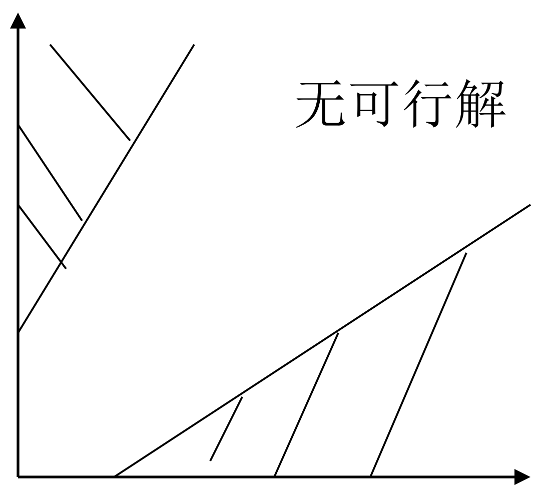


线性规划的解









复习思考题：

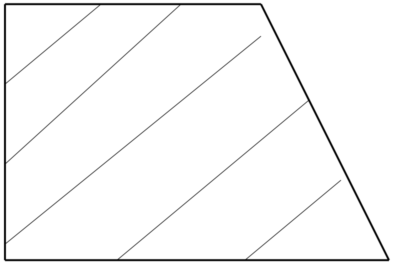
1. LP模型的可行域是否一定存在?
2. 图解中如何去判断模型有唯一解、无穷多解、无界解和无可行解？
3. LP模型的可行域的顶点与什么解具有对应关系？
4. 你认为把所有的顶点都找出来，再通过比较目标函数值大小的方式找出最优解，是否是最好的算法？为什么？

1.3 单纯形法的基本原理（Simplex Method）

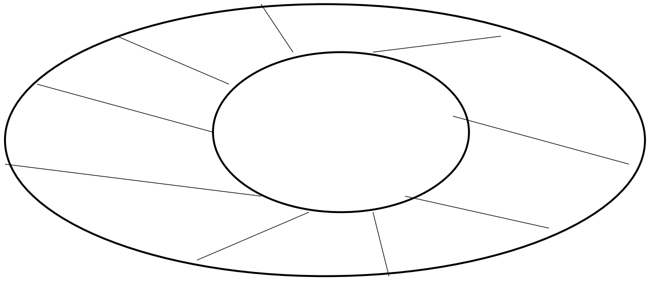
1.3.1 两个概念：

（1）凸集： 对于集合C中任意两点连线上的点，若也在C内，则称C为凸集。

代数定义： 任给$X_1 \in C$，$X_2 \in C$，$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \in C$ $(0<\alpha<1)$，则C为凸集。



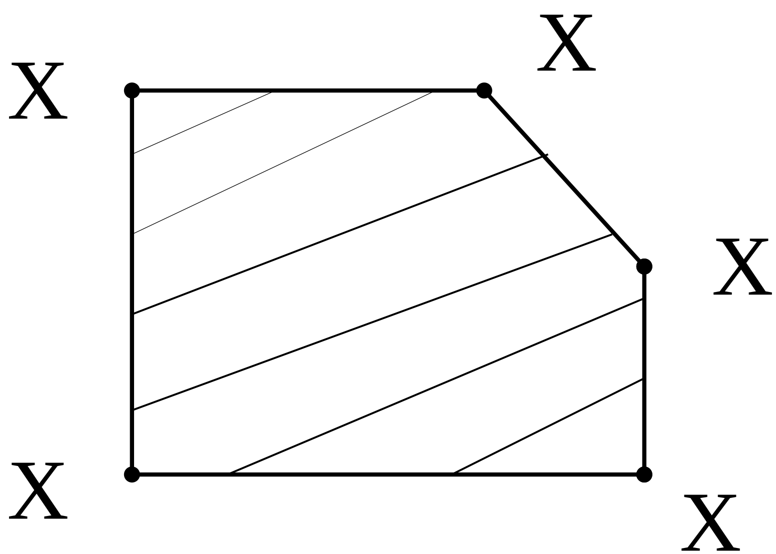
凸集



非凸集

(2) **顶点：** 凸集中不成为任意两点连线上的点，称为凸集顶点

代数定义： 设C为凸集，对于$X \in C$，不存在任何$X_1 \in C$，$X_2 \in C$，且$X_1 \neq X_2$，使得$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \in C$，　（$0<\alpha<1$），则X为凸集顶点。



1.3.2　三个基本定理：

定理1： 若线性LP模型存在可行解，则可行域为凸集。

证明： 设　$\max z=CX$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} AX=b \\ X\geq 0 \end{cases}$$

并设其可行域为C，若X_1、X_2为其可行解，且$X_1\neq X_2$，

则 $X_1\in C$，$X_2\in C$，　即$AX_1=b$，$AX_2=b$，$X_1\geq 0$，$X_2\geq 0$，

又 X为X_1、X_2连线上一点，即 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C$，　$(0<\alpha<1)$，

∴ $AX=\alpha AX_1+(1-\alpha)AX_2=\alpha b+(1-\alpha)b=b$，$(0<\alpha<1)$，　且 $X\geq 0$，

∴ $X\in C$，

∴ C为凸集。

引理：线性规划问题的可行解$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的技术向量线性独立。

证：

（1）必要性：X基可行解⇒X的正分量所对应的技术向量线性独立

可设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$，若X为基可行解，显然，由基可行解定义可知$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$所对应的系数列向量$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$应该线性独立。

（2）充分性：X的正分量所对应的技术向量线性独立⇒ X为基可行解

若A的秩为m，则X的正分量的个数$k \le m$；

当k=m时，则$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$的技术向量$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$恰好构成基，

∴ X为基可行解。

当k<m时，**则必定可再找出m-k个技术向量与$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$一起构成基**，

∴ X为基可行解。

思考题：

对于线性规划问题的标准模型，已知技术矩阵的秩为m，现在已经找到k个线性独立的基向量，试设计一种方法在剩余的n-k个技术向量中找到m-k个技术向量，与现有的k个技术向量构成基。

例：
$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

标准模型的基可行解：X=(0, 0, 3, 4)^T

$$\left[P_3, P_4\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

标准模型的非基可行解：X=(1, 1, 1, 1)^T。

$$[\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理2：线性规划模型的基可行解对应其可行域的顶点。

证：用反证法 **X非基可行解⇔X非凸集顶点**

（1）必要性：X非基可行解⇒ X非凸集顶点

不失一般性，设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$，为非基可行解，

∵ X为可行解，

∴ $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$， 即 $\sum_{j=1}^{m} p_j x_j = b \quad \cdots\cdots(1)$

又 X是非基可行解， ∴ $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_m$线性相关，即有

$\delta_1 P_1+\delta_2 P_2+\cdots\cdots+\delta_m P_m=0$， 其中$\delta_1$，$\delta_2$， ……，$\delta_m$不全为0，两端同乘$\mu\neq0$，得

$\mu\delta_1 P_1+\mu\delta_2 P_2+\cdots\cdots+\mu\delta_m P_m=0$， ……（2）

由 (1)+(2)得　$(x_1+\mu\delta_1)P_1+(x_2+\mu\delta_2)P_2+\cdots\cdots+(x_m+\mu\delta_m)P_m=b$

由 (1)−(2)得　$(x_1-\mu\delta_1)P_1+(x_2-\mu\delta_2)P_2+\cdots\cdots+(x_m-\mu\delta_m)P_m=b$

令$X_1=(x_1+\mu\delta_1,\ x_2+\mu\delta_2,\ \cdots\cdots,\ x_m+\mu\delta_m,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)^T$

$X_2=(x_1-\mu\delta_1,\ x_2-\mu\delta_2,\ \cdots\cdots,\ x_m-\mu\delta_m,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)^T$

取μ充分小,使得 $x_j\pm\mu\delta_j\geq0$，　则 X_1、X_2均为可行解，

但 $X=0.5X_1+(1-0.5)X_2$，　∴ X是X_1、X_2连线上的点，

∴　X非凸集顶点。

（2）充分性： X非凸集顶点⇒ X非基可行解

设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$为非凸集顶点，则必存在Y、Z两点，使得

$X=\alpha Y+(1-\alpha)Z$，$(0<\alpha<1)$，且Y、Z为可行解

或者　$x_j=\alpha y_j+(1-\alpha)z_j$　$(0<\alpha<1)$，（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$），　$y_j\ge 0$，$z_j\ge 0$

∵ $\alpha>0$，$1-\alpha>0$ ，当$x_j=0$，　必有$y_j=z_j=0$

∴

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j = \sum_{j=1}^{r} p_j y_j = b \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j z_j = \sum_{j=1}^{r} p_j z_j = b \quad \cdots\cdots(2)$$

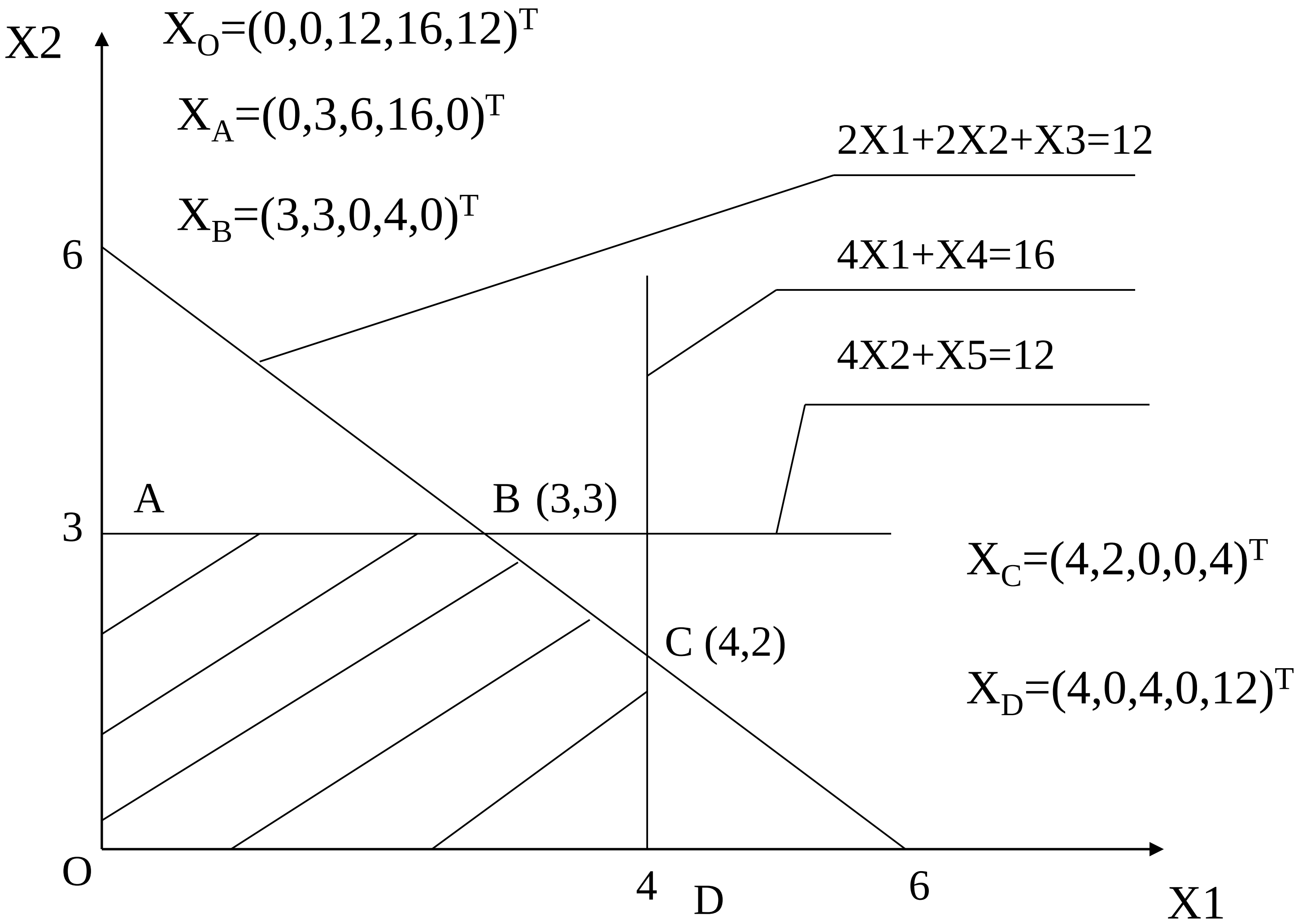
，(1)－(2)，得　$\sum_{j=1}^{r} (y_j - z_j) p_j = 0$

即　$(y_1 - z_1)P_1 + (y_2 - z_2)P_2 + \cdots\cdots + (y_r - z_r)P_r = 0$

∵ Y、Z为不同两点，∴ $y_j - z_j$不全为0，

∴ $P_1, P_2, \cdots\cdots; P_r$线性相关，

∴ X非基本可行解。


X2
$X_O=(0,0,12,16,12)^T$
$X_A=(0,3,6,16,0)^T$
$X_B=(3,3,0,4,0)^T$
2X1+2X2+X3=12
4X1+X4=16
4X2+X5=12
6
A
B (3,3)
3
$X_C=(4,2,0,0,4)^T$
C (4,2)
$X_D=(4,0,4,0,12)^T$
O
4
D
6
X1

定理3： 若线性规划模型有最优解，则一定存在一个基可行解为最优解。

证： 设 $X^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots; x_n^0)^T$ 是线性规划模型的一个最优解，

$$z^0=z_{max}=CX^0$$

若X^0非基可行解，即非顶点，只要取δ充分小，

则必能找出$X^1= X^0-\delta\geq 0$，$X^2 = X^0+\delta\geq 0$，即X^1、X^2为可行解，

$$z^1=CX^1=CX^0-C\delta=z_{max}-C\delta \text{，} z^2=CX^2=CX^0+C\delta=z_{max}+C\delta$$

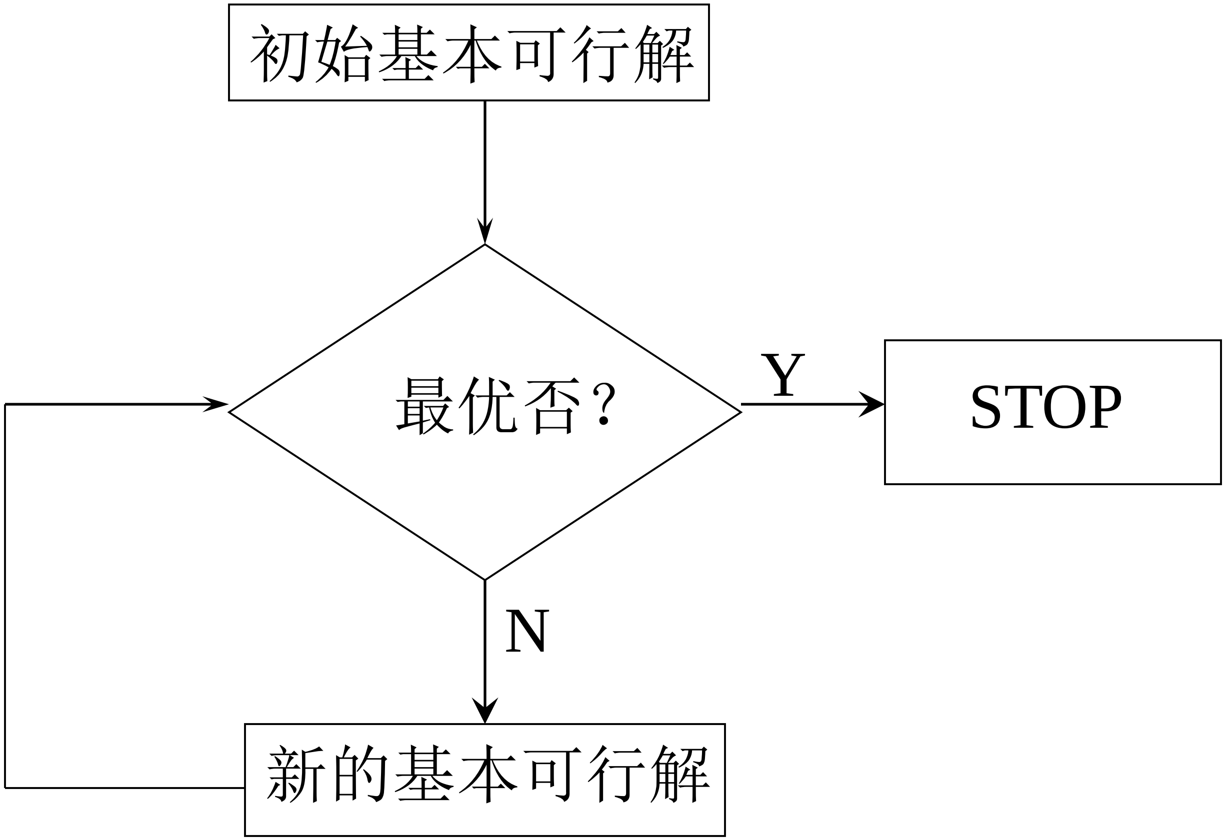
$\because$ $z^0 = z_{max} \geq z^1$， $z^0 = z_{max} \geq z^2$，

$\therefore$ $z^1 = z^2 = z^0$，即 X^1、X^2也为最优解，

若X^1、X^2仍不是顶点，可如此递推，直至找出一个顶点为最优解。

从而，必然会找到一个基可行解为最优解。

单纯形法的计算步骤：



1．初始基本可行解的确定：

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{s1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{s2} = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{sm} = b_m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad x_{si} \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

1. 初始基本可行解的确定：

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

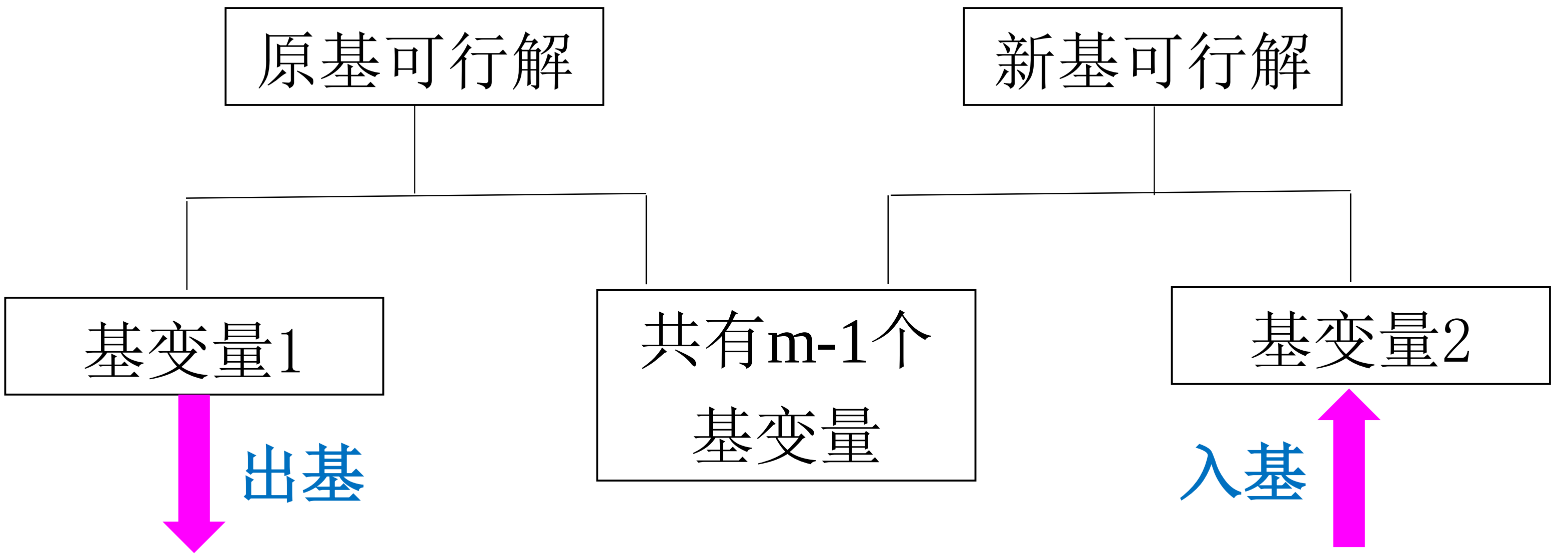
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{s1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{s2} = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{sm} = b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad x_{si} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sm})^T = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n\text{个}0}, b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$$

X为可行解，且为基可行解

2．从一个基可行解向另一个基可行解转换

思路1



2．从一个基可行解向另一个基可行解转换

思路2

m个非负分量的解
(基可行解)

→

m+1个非负分量的解
(非基可行解)

↓

新的m个非负分量的解
(基可行解)

2．从一个基可行解向另一个基可行解转换

$$\max\ z = CX \qquad \text{或} \qquad \max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

为了方便，设基可行解 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ 的前 m 个分量为正值，秩为 m，其技术矩阵为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \mathrm{P_1} & \mathrm{P_2} & \cdots & \mathrm{P_m} & \mathrm{P_{m+1}} & \cdots & \mathrm{P_j} & \cdots & \mathrm{P_n} \end{array} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,\mathrm{m+1}} & \cdots & a_{1\mathrm{j}} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,\mathrm{m+1}} & \cdots & a_{2\mathrm{j}} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{\mathrm{m,m+1}} & \cdots & a_{\mathrm{mj}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \end{array}$$

由 $AX^0 = b$ 可得 $$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i^0 = b \qquad (1)$$

又根据技术矩阵 A，非基技术向量 P_j 是 m 个基向量 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的线性组合，即

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i$$

设θ为正数，则有 $$\theta \cdot \left(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i \right) = 0 \qquad (2)$$

(1)+(2)可得 $$\sum_{i=1}^{m} P_i (x_i^0 - \theta a_{ij}) + P_j \theta = b \qquad (3)$$

令 θ 足够小便有 $x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0$

定义 $X^1 = (x_1^0 - \theta a_{1j}, x_2^0 - \theta a_{2j}, \ldots, x_m^0 - \theta a_{mj}, 0, \ldots, \theta, \ldots, 0)$

根据(3)有 $AX^1 = b$，则 X^1 是问题的一个可行解。

显然X^1中有m+1个非零分量，不能保证其为基可行解。但令

$$\theta=\min_i\left\{\frac{x_i^0}{a_{ij}}\middle| a_{ij}>0\right\}$$

即可保证X^1的前m个分量必有一为0. 从而，X^1中将最多有m个非零分量，必为基可行解。

例子

$$X^0=(2,3,1,0,0)^T \qquad A=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

当 $j=4$ 时 $\quad X^1=(2-\theta,\ 3-2\theta,\ 1+\theta,\ \theta,\ 0)^T$

计算 $\theta=3/2 \Rightarrow X^1=(1/2,\ 0,\ 5/2,\ 3/2,\ 0)^T$

当 $j=5$ 时 $\quad X^1=(2-2\theta,\ 3-3\theta,\ 1-2\theta,\ 0,\ \theta)^T$

计算 $\theta=1/2 \Rightarrow X^1=(1,\ 3/2,\ 0,\ 0,\ 1/2)^T$

3. 最优解的判别

对于解 $$X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-m\text{个}0})^T$$

$$z^0=CX^0=c_1x_1^0+c_2x_2^0+\ldots+c_mx_m^0$$

对于新解

$$X^1=(x_1^0-\theta a_{1j},x_2^0-\theta a_{2j},\ldots,x_m^0-\theta a_{mj},0,\ldots,\theta,\ldots,0)^T$$

$$z^1=CX^1=\left\{\sum_{i=1}^{m}c_i\left(x_1^0-\theta a_{ij}\right)\right\}+c_j\theta$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i^0+\theta\left\{c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}\right\}$$

$$=z^0+\theta\left\{c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}\right\}\left(\text{令}\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}\right)$$

$$=z^0+\theta\boxed{\sigma_j}$$ 检验数

单纯形法的计算及示例

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

c_j			**2**	**3**	**0**	**0**	**θ_i**
C_B	**X_B**	**b**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	[2]	0	1	4/2=2
检验数σ_j			**2**	**3**	**0**	**0**	

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	[2]	0	1	$\boxed{4/2=2}$
检验数σ_j			2	$\boxed{3}$	0	0	

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	[1/2]	0	1	-1/2	$\boxed{2}$
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	4
检验数σ_j			$\boxed{1/2}$	0	0	-3/2	

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	2	1	0	2	-1	
3	x_2	1	0	1	-1	1	
检验数σ_j			0	0	-1	-1	

单纯形法的思想

1. 如何得到初始顶点

——千里之行，始于足下

2. 如何从一个顶点到另外一个顶点

——欲穷千里目，更上一层楼

3. 如何得到最优解

——会当临绝顶，一览众山小

单纯形法的步骤

第一步：在单纯形表中表达线性规划模型

(1) 表达模型的常量A、b、C和变量X

(2) 要求A中的基向量必须为单位向量

(3) 给出各行的基变量及其价值系数

第二步：计算检验数，当所有检验数非正时结束，否则转入第三步。

第三步：根据最大检验数规则，确定入基变量。根据θ规则，确定出基变量。根据入基变量和出基变量的下标，确定主元。

第四步：以主元为中心进行矩阵变换。转到第二步。

练习：

$$\max\ z = 6x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解的判定规则

1. 唯一最优解

规则1：最优表中，所有非基变量的检验数均小于0(非退化)

规则2：最优表中，退化情形下对于检验数为0的非基变量，其作为入基变量时θ值总为0

2. 无穷多最优解

规则1：最优表中，存在 一个非基变量的检验数为0(非退化)

规则2：最优表中，退化情形下存在某非基变量检验数为0，但该变量作为入基变量时θ值大于0

3. 无界解

规则：非优表，非基变量的技术向量≤0, 但检验数大于0

解决一般性线性规划模型的方法——大M法

$$\min \ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max \ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

问题1：技术矩阵A中没有明显的单位阵，不能使用前述的单纯形方法进行求解。

问题2：不能获得初始基可行解

解决一般性线性规划模型的方法——大M法

解决办法:

(1) 引入人工变量，使得技术矩阵中出现单位阵，十分容易地获得初始可行解。

(2) 令人工变量的价值系数为 – M(M为任意大的正实数)，可通过人工模型来获得原模型的最优解

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 - \mathrm{M}x_4 - \mathrm{M}x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

求解过程:

$C_j \rightarrow$			-2	-3	0	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-M	x_4	3	1	1	-1	1	0	3/1=3
-M	x_5	4	1	[2]	0	0	1	4/2= $\boxed{2}$
检验数			-2+2M	$\boxed{-3+3M}$	-M	0	0	
-M	x_4	1	[1/2]	0	-1	1	-1/2	$\boxed{2}$
-3	x_2	2	1/2	1	0	0	1/2	4
检验数			$\boxed{-1/2+M/2}$	0	-M	0	3/2-M/2	
-2	x_1	2	1	0	-2	2	-1	
-3	x_2	1	0	1	1	-1	1	
检验数			0	0	-1	1-M	1-M	

大M法的总结：

判断1：在最优表中，所有人工变量均为非基变量，则可获得原模型的最优解。

判断2：在最优表中，且不发生退化的情形下，存在一个人工变量为基变量，则判定原模型无解

判断3：求得的人工模型的最优目标函数值为负无穷大，则判定原模型无解。

缺点1：当出现退化时，尽管可以获得最优解，但可能无法得到原模型的最优基可行解。

缺点2：在计算机上M为一个足够大的数，具体多大没有定论。

练习：

$$\min \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解决一般性线性规划模型的方法——两阶段法

解决办法：

(1) 引入人工变量，使得技术矩阵中出现单位阵，十分容易地获得初始可行解。

(2) 令人工变量的价值系数为 1，原有变量的价值系数为0，可通过人工模型来获得原模型的一个基可行解

(3) 把获得的基可行解作为初始基可行解，再使用单纯形方法求解原模型

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min\ z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

解决一般性线性规划模型的方法——两阶段法

第一阶段

人工模型标准化，使用单纯形法求解，以获得原模型的一个基可行解。

$$\min\ z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max\ z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_4 - x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

求解过程:

$C_j \rightarrow$			0	0	0	-1	-1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_4	3	1	1	-1	1	0	3/1=3
-1	x_5	4	1	[2]	0	0	1	$\boxed{4/2=2}$
检验数			2	$\boxed{3}$	-1	0	0	
-1	x_4	1	[1/2]	0	-1	1	-1/2	$\boxed{2}$
0	x_2	2	1/2	1	0	0	1/2	4
检验数			$\boxed{1/2}$	0	-1	0	1	
0	x_1	2	1	0	-2	2	-1	
0	x_2	1	0	1	1	-1	1	
检验数			0	0	0	-1	-1	

解决一般性线性规划模型的方法——两阶段法

第二阶段

把获得的基可行解，反映到原模型，直至获得最优解。

c_j			**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_1	2	1	0	-2	2	-1
0	x_2	1	0	1	1	-1	1
检验数			0	0	0	-1	-1

c_j			**-2**	**-3**	**0**
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3
-2	x_1	2	1	0	-2
-3	x_2	1	0	1	1
检验数			0	0	-1

两阶段法的总结：

判断1：在第一阶段的最优表中，所有人工变量均为非基变量，则可获得原模型的一个基可行解。

判断2：在第一阶段的最优表中，存在人工变量为基变量，但最优目标函数值为0，则可获得原模型的一个可行解

判断3：第一阶段的最优目标函数值非0，则问题无解。

缺点1：判断2情形下得不到基可行解，不能完美实现求解目的。

初始表和其它表之间的关系

对单纯形表编号为0, 1, 2, … ，设初始表编号为0.

针对初始表和第k个表：假设初始表的资源系数向量为b, 技术矩阵为A；假设第 k 个表的资源系数向量为$b^{(k)}$,相应的技术矩阵为A_k，相应的基为B_k，基的逆为B_k^{-1}

则 $$A_k = B_k^{-1}A \qquad b^{(k)} = B_k^{-1}b$$

对应关系： B_k在初始表中找，对应第 k 个表的单位阵；

B_k^{-1}在第 k 个表中找，对应初始表的单位阵。

初始表 $A \mid b \Longleftrightarrow (\,H_k\,,\ I\,) = (B_k,\ N_k\,) \mid b$

第 k 表 $A_k \mid b^{(k)} \Longleftrightarrow (B_k^{-1}H_k,\ B_k^{-1}) = (\,I\,,\ B_k^{-1}N_k) \mid B_k^{-1}b$

初表

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	[2]	0	1	4/2=2
检验数σ_j			**2**	**3**	**0**	**0**	

第2表

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	[1]	0	1	-1/2	**2**
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	4
检验数σ_j			**1/2**	**0**	**0**	**-3/2**	

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

验证 $$b^{(2)} = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = B_2^{-1} A$$

三个公式

对于线性规划的标准模型 $\max\ z = CX$, $s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$，在实行单纯形法时，必须有单位阵存在，则

$$\begin{cases} A = (H,\ I\ ) = (B,\ N) \\ X = (X_H,\ X_I) = (X_B,\ X_N) \\ C = (C_H,\ C_I) = (C_B,\ C_N) \end{cases}$$

其中B为基，N为非基

三个公式

$$\max \ z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \ z = \mathrm{C_H X_H + C_I X_I}$$
$$s.t.\begin{cases} \mathrm{HX_H + I\,X_I} = b \\ \mathrm{X_H} \geq 0, \mathrm{X_I} \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \ z = \mathrm{C_B X_H + C_N X_N}$$
$$s.t.\begin{cases} \mathrm{BX_B + NX_N} = b \\ \mathrm{X_B} \geq 0, \mathrm{X_N} \geq 0 \end{cases}$$

三个公式

$$\max \ z = C_B X_H + C_N X_N \qquad (7)$$

$$s.t.\begin{cases} BX_B + NX_N = b & (8) \\ X_B \geq 0, X_N \geq 0 & (9) \end{cases}$$

将(8)式移项后得到

$$BX_B = b - NX_N \Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \qquad (10)$$

将(10)式代入(7)式后得到

$$z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \qquad (11)$$

令$X_N = 0$，则 $\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ z = C_B B^{-1} b \end{cases}$

对于(11)式中X_N的系数，可得 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$

三个公式

基变量的检验数为0，是因为 $\sigma_B = C_B - C_B B^{-1} B = 0$

由于 $C = (C_B,\ C_N),\ \ A = (B, N),\ \ A = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n)$

可得

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_B \\ \sigma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B - C_B B^{-1} B \\ C_N - C_B B^{-1} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_N - C_B B^{-1} N \end{pmatrix}$$

即 $\sigma = C - C_B B^{-1} A$

分量化 $\sigma_{\mathrm{j}} = c_j - C_B B^{-1} P_{\mathrm{j}} = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} a_{ij}^{(k)}$

其中 $A_k = \left[a_{ij}^{(k)} \right]_{m \times n}, C_B = (c_{B1}, c_{B2}, .., c_{Bm})$

第k个单纯形表的结构

			C_B	C_N
			X_B	X_N
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$
检验数			0	$C_N - C_B B^{-1}N$

			C_H	C_I
			X_H	X_I
C_B	X_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}H$	B^{-1}
检验数			$C_H - C_B B^{-1}H$	$C_I - C_B B^{-1}$

例 用单纯形法解线性规划问题时，有如下二个单纯形表，试把表中未知数字$a, d \ldots, y$ 补全。

c_j			c_1	c_2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	h	*i*	1	0	
0	x_4	*a*	j	k	0	1	
检验数σ_j			m	n	p	q	

⋮

c_j			c_1	c_2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	d	r	s	2	-1	
3	x_2	1	*v*	*w*	-1	1	
检验数σ_j			*y*	*g*	-1	-1	

例　用单纯形法解线性规划问题时，有如下二个单纯形表，试把表中未知数字$a, d \ldots, y$补全。

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	
0	x_4	4	1	2	0	1	
检验数σ_j			2	3	0	0	

⋮

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	2	1	0	2	-1	
3	x_2	1	0	1	-1	1	
检验数σ_j			0	0	-1	-1	