1. 广义(R)可积而不(L)可积.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$$

广义(R)积分. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$.

但是 $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx=+\infty$, 取区间 $(0+2n\pi,\ \pi+2n\pi)$.

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx\geq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{\pi+2n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y+2n\pi}\,dy\geq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\pi+2n\pi}\,dy.$$

$$\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi+2n\pi}=+\infty.$$

2. 在每个子集上都(L)可积,但并集上并不(L)可积

(有限个成立的).

1). f 在 E_n 上可测 $\Rightarrow$ f 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 上可测的.

2). 令 $E_n=\left(\frac{1}{2n+1},\ \frac{1}{2n-1}\right]$. $n=1,2,3,\cdots$

E_n 两两不交, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=(0,1]$.

3) 令 $f(x)=\begin{cases}n, & \frac{2n}{4n^2-1}<x\leq\frac{1}{2n-1}\\ -n, & \frac{1}{2n+1}<x\leq\frac{2n}{4n^2-1}\end{cases}$

a) f 在每个 E_n 上都是有界可测函数. 故(L)可积.

且 $\int_{E_n}f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2n}{4n^2-1}}(-n)\,dx+\int_{\frac{2n}{4n^2-1}}^{\frac{1}{2n-1}}n\,dx$

$$=-n\left(\frac{2n}{4n^2-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{2n}{4n^2-1}\right)=0.$$

b). $\int_0^1|f|\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}}n\cdot dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$

从而 $|f|$ 在 $(0,1]$ 上并不(L)可积, 从而 f 在 $(0,1]$ 上也不(L)可积.

3. 使 Fatou 引理中等号不成立的函数序列.

取 $E=[0,1]$. $f_n(x)=nx\cdot e^{-nx^2}$ $n=1,2,3\cdots$.

则 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数. 且.

$$\int_E f_n(x)\,dx=\int_0^1 n\cdot x\cdot e^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot e^{-n}$$

因而 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$,

另一方面, 对 $\forall x\in E$, 都有 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

因此. $\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0$.

可见. $\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx<\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx$.

4. 变号的收敛可测序列. Fatou 引理的结论不成立.

取 $E=(0,1)$ 定义函数序列. $f_n(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{n+1}<x<1\\ -n & 0<x\leq\frac{1}{n+1}\end{cases}$

令 $f(x)\equiv1$. 则 $\forall x\in E$. $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1=f(x)$.

$\therefore$ $\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=1$.

另一方面. $\int_E f_n(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{n+1}}-n\,dx+\int_{\frac{1}{n+1}}^1 dx=-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}=0$.

$\therefore$ $\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx>\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=0$.