目录

第一章 引　论

1.1 常用公式

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
2. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
5. $\cos n\pi = (-1)^n$

例题 1.1 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^k = -1$

解 二项式定理

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k \times 1^{n-k} - 1 = (-1+1)^n - 1 = -1$$

例题 1.2 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

解 由恒等式

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(k^3 - (k-1)^3\right) &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\\ n^3 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\end{aligned}$$

整理可得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

例题 1.3 证明:

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

证明 利用棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

令 $n = 3$, 将左端展开得到

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta\\ &= \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta\end{aligned}$$

分别比较等式两边的实部与虚部得到

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

例题 1.4 (后续章节会用到) 证明:

(1) $\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$
(2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$
(3) $(\sin^6 x + \cos^6 x)' = -\frac{3}{2}\sin 4x$

解 *(1)*

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sin^6 x + \cos^6 x)' &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x \\ &= 6\sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) \\ &= 6\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -3\sin 2x\cos 2x = -\frac{3}{2}\sin 4x\end{aligned}$$

例题 1.5 证明:

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$$

解 *法 I. 考虑积化和差公式*

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

我们有

$$\begin{aligned}1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx &= 1 + \frac{1}{\sin x}\sum_{k=1}^{n} 2\sin x\cos 2kx \\ &\xlongequal{\text{积化和差}} 1 + \frac{1}{\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\right] \\ &= 1 + \frac{1}{\sin x}\left(\sin(2n+1)x - \sin x\right) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\end{aligned}$$

法 II. 利用欧拉公式, 我们有

$$\begin{aligned}1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= e^{\mathrm{i}0x} + \sum_{k=1}^{n}(e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx}) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}kx} \\ &\xlongequal{\text{等比数列}} \frac{e^{-\mathrm{i}nx}(e^{i(2n+1)x} - 1)}{e^{\mathrm{i}x} - 1} = \frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x} - e^{-\mathrm{i}nx}}{e^{\mathrm{i}x} - 1} \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - e^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{e^{\mathrm{i}x/2} - e^{-\mathrm{i}x/2}} \\ &= \frac{2\mathrm{i}\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\mathrm{i}\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

例题 1.6 证明: $\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cot\frac{\pi}{2n}$

证明 由欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, 所以有

$$\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} = e^{\frac{k\pi}{n}i}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}&=\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\pi}{n}i}\\&\xlongequal{\text{等比}}\frac{e^{\frac{\pi}{n}i}\left(1-(e^{\pi i/n})^{n}\right)}{1-e^{\frac{\pi}{n}i}}=\frac{1-e^{\pi i}}{e^{-\frac{\pi}{n}i}-1}\\&=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{n}-1-i\sin\frac{\pi}{n}}=-1+i\cot\frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

分离实部与虚部

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\cot\frac{\pi}{2n}$$

练习 1.1 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot^{2}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{n(2n-1)}{3}$

证明 Let $\theta\in\mathbb{R}$. By taking imaginary part of the identity $e^{i(2n+1)\theta}=(e^{i\theta})^{2n+1}$, it follows that

$$\sin(2n+1)\theta=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^{k}\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k+1}\theta.$$

Dividing both sides by $(-1)^{n}\cos^{2n}\theta\sin\theta$, for $t=\tan^{2}\theta$ we have

$$(-1)^{n}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta\cos^{2n}\theta}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}t^{k}.\tag{*}$$

We know that the LHS vanishes for $\theta=\frac{\pi}{2n+1},\cdots,\frac{n\pi}{2n+1}$, which gives n different zeros

$$t_{k}=\tan^{2}\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right),\quad k=1,\cdots,n.$$

Since the RHS of $(*)$ is a monic polynomial of degree n, it follows that

$$(t-t_{1})\cdots(t-t_{n})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}t^{k}.$$

So if we write $a_{k}=(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}$ so that $(t-t_{1})\cdots(t-t_{n})=a_{0}+a_{1}t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+t^{n}$, then

$$\frac{1}{t_{1}}+\cdots+\frac{1}{t_{n}}=-\frac{a_{1}}{a_{0}}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

例题 1.7 证明: $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\ (n\in\mathbb{N})$.

解 注意到方程 $x^{2n}-1=0$ 的根为

$$x_{k}=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k=1,2,\cdots,2n.$$

其中 $x_{n}=-1,x_{2n}=1,x_{2n-k}=\bar{x_{k}}$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n}-1}{x^{2}-1}&=1+x^{2}+\cdots+x^{2n-2}\\&=\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_{k})(x-\bar{x_{k}})=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^{2}+1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

令 $x=1$ 即得

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^{2}\frac{k\pi}{2n}\right),$$

整理后即得

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

定理 1.1 (三角形不等式)

设 a, b 为任意实数，则 $||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$

证明 因为 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|, -|b| \leqslant b \leqslant |b|$, 所以有 $-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$, 即得 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. 将式中的 b 改为 $-b$, 上式仍然成立, 所以

$$|a \pm b| \leqslant |a|+|b|$$

由于 $|a|=|(a+b)-b| \leqslant |a+b|+|b|$, 所以 $|a|-|b| \leqslant |a+b|$. 同理可得 $|b|-|a| \leqslant |a+b|$, 从而得到 $||a|-|b|| \leqslant |a+b|$. 将式中的 b 改为 $-b$ 上式仍然成立, 所以

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b|$$

定理 1.2 (Jordan 不等式)

设 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

定理 1.3 (伯努利 (Bernoulli) 不等式)

设 $x>-1, n \in \mathbf{N}^{+}, n \geqslant 2$, 则 $(1+x)^{n} \geqslant 1+n x$

例题 1.8 证明: $(\cos x)^{p} \leqslant \cos (p x), \quad x \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad 0<p<1$.

证明 方法 1 对 $x \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 有

$$\begin{aligned}
\cos (p x) & =\cos \big(p x+(1-p) \cdot 0\big) \\
& \geqslant p \cos x+(1-p) \cos 0=1-p(1-\cos x)
\end{aligned}$$

又由伯努利不等式 $(1+y)^{1 / p} \geqslant 1+\dfrac{1}{p} y, \ y \geqslant-1$ 可得

$$\big(\cos (p x)\big)^{1 / p} \geqslant\big(1-p(1-\cos x)\big)^{1 / p} \geqslant 1-\frac{p(1-\cos x)}{p}=\cos x,$$

从而 $(\cos x)^{p} \leqslant \cos (p x), \quad x \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad 0<p<1$

例题 1.9 设 $0<x, y<1$, 证明: $x^{y}+y^{x}>1$.

解 由 *Bernoulli* 不等式得

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{y}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}-1\right)^{y}}>\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-1\right) y}=\frac{x}{x+y-x y}>\frac{x}{x+y}$$

同理可得

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^{x}}>\frac{y}{x+y}$$

从而

$$x^{y}+y^{x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{y}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^{x}}>\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$$

定理 1.4 (柯西 (Cauchy) 不等式)

设 $x_{1}, x_{2}, \cdots, x_{n}, y_{1}, y_{2}, \cdots, y_{n}$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}\right)^{2} \leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}\right)^{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i}\right)^{2}\right)$$

例题 1.10 设 $a_{n}=\arctan \dfrac{1}{n^{2}+n+1}$ 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k}^{1 / 2}}{k^{2}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}$

解 *(by 向禹)* 由 *Cauchy* 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{1/2}}{k^2}\leqslant\sqrt{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\Big)}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{n+1-n}{1+(n+1)n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n+1)-\arctan n)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

由例*15.8*知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{1/2}}{k^2}\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi^4}{90}}\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

定理 1.5 (均值不等式)

$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$ 被称为均值不等式。简记为“调几算方”。

其中 :$H_n=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$，被称为调和平均数

$G_n=\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，被称为几何平均数

$A_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，被称为算术平均数

$Q_n=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$，被称为平方平均数

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立.

例题 1.11 (2021, 数学 I) 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求曲线 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

解 *(by 向禹)* 分析：点 (x,y,z) 到 xOy 坐标面距离为 $|z|$，所以只需求 z 的取值范围即可.
由条件得

$$\begin{cases}x^2+2y^2=6+z\\4x+2y=30-z\end{cases}\tag{1.1}$$

那么由 $(16+2)(x^2+2y^2)\geqslant(4x+2y)^2$ 可得

$$18(6+z)\geqslant(30-z)^2\Rightarrow 12\leqslant z\leqslant 66$$

取等条件为: $\dfrac{x^2}{16}=\dfrac{2y^2}{2}$，并代入(1.1)可得

$$16y^2+2y^2=6+66\Rightarrow y=\pm2\Rightarrow x=\pm8$$

因此，所求的最大距离 $(-8,-2,66)$ 到 xOy 坐标面距离，最大值为 66.

例题 1.12 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解

解 (by 曾熊) 由三元均值不等式

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x^3+\frac{7}{2}x^3+\frac{108}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{7}{2}x^3\times\frac{7}{2}x^3\times\frac{108}{49}}=9x^2 & (1.2a)\\ 7y^3+7y^3+\frac{27}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{7y^3\times 7y^3\times\frac{27}{49}}=9y^2 & (1.2b)\\ \frac{21}{2}z^3+\frac{21}{2}z^3+\frac{12}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{21}{2}z^3+\frac{21}{2}z^3+\frac{12}{49}}=9z^2 & (1.2c)\end{cases}$$

(1.2a) + (1.2b) + (1.2c) 可得

$$7x^3+14y^3+21z^3+3\geqslant 9(x^2+y^2+z^2)\Longleftrightarrow 7x^3+14y^3+21z^3\geqslant 6 \tag{1.3}$$

式(1.3) 取等条件

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x^3=\frac{108}{49}\Longrightarrow x=\frac{6}{7}\\ 7y^3=\frac{27}{49}\Longrightarrow y=\frac{3}{7}\\ \frac{21}{2}z^3=\frac{12}{49}\Longrightarrow z=\frac{2}{7}\end{cases}$$

例题 1.13 证明:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

解 注意到

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}&=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}}\\&<\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{aligned}$$

例题 1.14 对任意正实根 a 及任意大于 1 的整数 n, 下面的不等式成立:

$$\left(1+\frac{n+1}{2n}a\right)^n>\frac{na(1+a)^n}{(1+a)^n-1}$$

且系数 $\frac{n+1}{2n}$ 是不可改进的, 即对任一小于 $\frac{n+1}{2n}$ 的正实数 c, 可取 a 使得 $(1+ca)^n$ 小于不等式的右边.

解 (by 西西) 令 $b=1+a>1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\left(\frac{n-1}{2n}+\frac{n+1}{2n}b\right)^n>\frac{nab^n}{b^n-1}=\frac{nb^n}{1+b+\cdots+b^{n-1}}\\&\Leftrightarrow\left[(n-1)+(n+1)b\right]^n(1+b+\cdots+b^{n-1})>2^n\cdot n^{n+1}b^n\end{aligned}$$

因此

$$n-1+(n+1)b\geqslant 2nb^{\frac{n+1}{2n}}\Rightarrow\left[(n-1)+(n+1)b\right]^n\geqslant 2^n n^n b^{\frac{n+1}{2}} \tag{1.4}$$

$$1+b+\cdots+b^{n-1}\geqslant nb^{\frac{n-1}{2}} \tag{1.5}$$

(1.4) × (1.5) 即可.

1.2 映射与函数

反函数

定义 1.1 (反函数)

设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射[a], 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$, 称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

[a]单射: 每一个 x 都有唯一的 y 与之对应. 即只允许一对一, 不允许一对多

性质 单调函数一定存在反函数

例题 1.15 求 $y = \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 的反函数.

解 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$x = \arcsin y, \quad x \in [0, \pi/2]$$

当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$. 又 $y = \sin x = -\sin(x - \pi)$

$$y = -\sin(x - \pi) \Rightarrow x - \pi = \arcsin(-y) \Rightarrow x = \pi - \arcsin y$$

$$x = \pi - \arcsin y, \quad x \in [\pi/2, 3\pi/2]$$

当 $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \Rightarrow x - 2\pi \in [-\pi/2, 0] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 又 $y = \sin x = \sin(x - 2\pi)$

$$y = \sin(x - 2\pi) \Rightarrow x - 2\pi = \arcsin y \Rightarrow x = 2\pi + \arcsin y$$

$$x = 2\pi + \arcsin y, \quad x \in [3\pi/2, 2\pi]$$

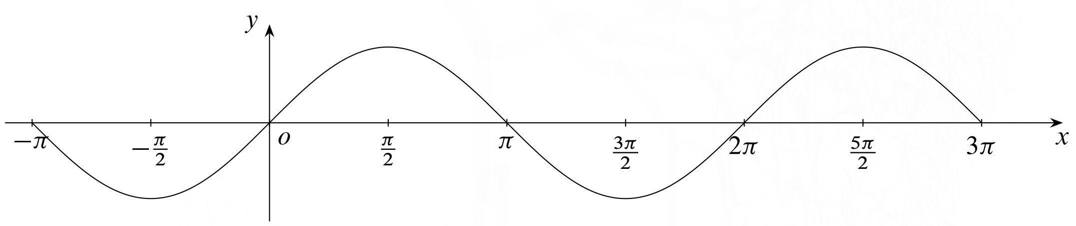
平移变换: “左加右减”、“上加下减”

- 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 时, 我们把 $y = \sin x$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图形向右平移 π 个单位, 并关于 x 轴对称.

$$x - \pi = \arcsin(-y) \Rightarrow x = \pi - \arcsin y$$

- 当 $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 时, , 我们把 $y = \sin x$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图形向右平移 2π 个单位.

$$x - 2\pi = \arcsin y \Rightarrow x = 2\pi + \arcsin y$$



例题 1.16 求定积分: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

解 由反函数定义我们知

$$\arccos(\cos 狗) = 狗, \quad 狗 \in [0, \pi)$$

结合诱导公式

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)) = x - \tfrac{\pi}{2}$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$$

例题 1.17 设可导函数 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$, 可导函数 $g(x)$ 的原函数是 $G(x)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的反函数, 则 ( )

A. $F'(x)G'(x) = 1$ B. $f'(x)g'\big(f(x)\big) = 1$

C. $\dfrac{\mathrm{d}G\big(f(x)\big)}{\mathrm{d}x} = -1$ D. $\dfrac{\mathrm{d}F\big(g(x)\big)}{\mathrm{d}x} = 1$

证明 注意到 (反函数与原函数的公式)

$$g\big(f(x)\big) = x\ ,\quad f\big(g(x)\big) = x$$

于是

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = x' = 1 = g'\big(f(x)\big)f'(x) \Longrightarrow g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)} \Longrightarrow B\ \checkmark$$

例题 1.18 (周明强, P13) 证明: 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$ 为非周期函数.

解 *(反证法) 假定 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $0 = f(x+T) - f(x)$ 即*

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sin(x+T) + \sin\big(\sqrt{2}(x+T)\big)\Big) - \big(\sin x + \sin\sqrt{2}x\big) \\ &\xlongequal{\text{和差化积公式}} 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) - 2\sin\frac{T}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{2}x + \frac{T}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

由此知 $\sin\dfrac{T}{2} = 0 = \sin\dfrac{T}{\sqrt{2}}$. 从而 $2n\pi = \sqrt{2}m\pi$, $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$ 但 m, n 是正整数

例题 1.19 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, $a > 0, b > 0$. 证明: 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 则

$$f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$$

解 *令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减*

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)g(a+b) = ag(a+b) + bg(a+b) \\ &\leqslant ag(a) + bg(b) = f(a) + f(b) \end{aligned}$$

1.2.1 函数图像的变换

定理 1.6 (函数图像的变换)

函数图像的变换

1. *平移变换: “左加右减”, “上加下减”*
2. *对称变换*
   - *函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 的图象关于 $x = a$ 对称*
   - *函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称*
3. *伸缩变换*

1.2.2 函数方程

例题 1.20 设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 n 次复合函数为

$$\big(f \cdot f \cdot f \cdot \cdots \cdot f\big)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

解 *当 $n = 2$ 时,*

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

当 $n = 3$ 时,

$$f\big(f\big(f(x)\big)\big) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

于是假定 $n=k$ 时, k 次复合函数满足

$$(f\cdot f\cdot f\cdot\cdots\cdot f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对 $n=k+1$ 时, 其 $k+1$ 次复合函数为

$$\begin{aligned}(f\cdot f\cdot f\cdot\cdots\cdot f)(x)&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}\end{aligned}$$

根据数学归纳法即得所证

例题 1.21 (MSE, 1996141) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 若 $f(f(x))=x^2-x+1$ 求 $f(0)$.

解 由已知易得

$$f(f(0))=1,\quad f(f(1))=1$$

原方程中将 x 置换为 $f(x)$ 代入

$$f(f(f(x)))=f(x)^2-f(x)+1. \tag{1.6}$$

将 $x=0$ 代入 (1.6) 式

$$f(1)=f(0)^2-f(0)+1. \tag{1.7}$$

变形

$$f(0)^2-f(0)+1-f(1)=0.$$

将 $x=1$ 代入 (1.6) 式

$$f(1)=f(1)^2-f(1)+1.$$

变形

$$(f(1)-1)^2=0\quad\Rightarrow\quad f(1)=1.$$

代入 (1.7) 式

$$f(0)^2=f(0)\quad\Rightarrow\quad f(0)=0\text{ 或 }f(0)=1,$$

若 $f(0)=0$ 则 $f(f(0))=f(0)=0$. 但 $f(f(0))=1$. 矛盾! 因此, $f(0)=1$.

注 (钓鱼题)[1] 已知 $f(f(x))=x^2+x$, 求 $f(x)$.

例题 1.22 设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{1}{3}x\right)=x$, 求 $f(x)$.

解 (*by* 予一人)[2]. 原方程中将 x 置换为 $x/3$ 代入, 得

$$\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3^2}\sin f\left(\frac{1}{3^2}x\right)=\frac{1}{9}x \tag{1.8}$$

再将 (1.8) 中的 x 置换为 $x/3$ 代入, 然后反复不断地这样操作, 就可以归纳得到

$$\frac{1}{3^k}\sin f\left(\frac{1}{3^k}x\right)-\frac{1}{3^{k+1}}\sin f\left(\frac{1}{3^{k+1}}x\right)=\frac{1}{9^k}x \tag{1.9}$$

将 (1.9) 从 $k=0$ 到 $k=n$ 作和, 就有

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{3^k}\sin f\left(\frac{1}{3^k}x\right)-\frac{1}{3^{k+1}}\sin f\left(\frac{1}{3^{k+1}}x\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{9^k}x$$

注意左端是套缩和 (*Telescope Sum*), 可以前后相消, 于是就有

$$\sin f(x)-\frac{1}{3^{n+1}}\sin f\left(\frac{1}{3^{n+1}}x\right)=\left(1+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9^n}\right)x \tag{1.10}$$

现对 (1.10) 取 $n \to \infty$ 的极限, 注意到左端第二项是无穷小与有界变量的乘积, 将有

$$\sin f(x) = \frac{9}{8}x$$

于是利用反三角函数, 可以将 $f(x)$ 表为

$$f(x) = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{9}{8}x\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

定义域为 $|x| \leqslant \frac{8}{9}$.

例题 1.23 (博士数学论坛, 20538) 确定所有的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 其中 $\mathbb{R}$ 是实数集, 使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 恒有

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

成立.

证明 (by tian27546) 首先, 我们令 $x = y = 0$ 以及 $f(0) = C$, 得到

$$f(-C) = f(C) + C - 1 \Rightarrow C \neq 0$$

令 $x = f(y)$ 得

$$f(x) = \frac{C+1}{2} - \frac{x^2}{2} \tag{1.11}$$

再令 $y = 0$, 得到

$$f(x - C) = f(C) + Cx + f(x) - 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x - C) - f(C) = Cx + f(x) - 1$$

由于 $C \neq 0$, 故这样的集合 $\{f(x - C) - f(C), x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, 所以存在 y_1, y_2 使得 $x = y_1 - y_2$

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 = C - \frac{x^2}{2} \tag{1.12}$$

结合 (1.11),(1.12) 可得 $C = 1$, 所以 $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ 验证也满足题意.

例题 1.24 (谢惠民, P155) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一对一连续映射, 有不动点, 且满足

$$f(2x - f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

证明: $f(x) \equiv x$.

解 由于 $f(x)$ 是一对一的连续映射, 所以 $f(x)$ 严格单调. 不妨设 f 严格单调递减, 则对 $\forall x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 从而

$$2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2),$$

代入条件, 两边取函数值得到

$$f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)),$$

即 $x_1 > x_2$, 矛盾! 假设不成立. 因此, $f(x)$ 只能是严格单增.

法 I(by ggg_000_111). 设 f 的不动点为 a, 即有 $f(a) = a$, 又设存在 x_1 使得 $f(x_1) = x_2$ 且

$$b = x_2 - x_1 \neq 0$$

(下证这是矛盾的, 从而结论成立.) 由

$$f(x_1) = x_2 = f(2x_2 - f(x_2)) \Rightarrow x_1 = 2x_2 - f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = x_2 + b$$

又由

$$f(2x_2 + 2b - f(x_2 + b)) = x_2 + b = f(x_2) \Rightarrow f(x_2 + b) = x_2 + 2b,$$

如此下去得到, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$f(x_2 + nb) = x_2 + (n + 1)b$$

现在分两种情况讨论 $b \neq 0$ 的矛盾性:

- 若 $b>0$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$x_2+(n_0-1)b<a \leqslant x_2+n_0 b$$

则三边取函数值得到

$$x_2+n_0 b<a \leqslant x_2+(n_0+1)b$$

这就是个矛盾

- 若 $b<0$, 则类似也得到矛盾.

法 *II*(by 徐大顺)[3]. 假设存在实数 x_0 使得 $f(x_0)>x_0$, 作双向无穷数列 $\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, 使得

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_{n-1}=f^{-1}(x_n).$$

由已知条件有

$$f(x)+f^{-1}(x)=2x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1}+x_{n-1}=2x_n$$

即 $\{x_n\}$ 是等差数列. 由于 f 有不动点, 故在大于 x_0 和小于 x_0 的范围内至少有一个有不动点. 不妨设存在一个大于 x_0 的不动点. 设 $A=\{c>x_0 | f(c)=c\}$, 并记 $\eta=\inf A$, 则根据连续性有

$$\eta>x_0 f(\eta)=\eta.$$

再根据 η 的定义, 对任意 $t\in[x_0,\eta)$, 都有 $f(t)>t$. 由于 f 严格单调递增, 所以对任意 $t\in[x_0,\eta)$, 都有

$$\eta>f(t)>t$$

故由数学归纳法可证明

$$\eta>x_{n+1}>x_n.$$

但 $\{x_n\}$ 是等差数列, 因而无上界, 矛盾. 同理, 也不可能存在实数 x_0 使得 $f(x_0)<x_0$, 所以一定有 $f(x)\equiv x$, 证毕.

补充的几个函数

定义 1.2 (符号函数)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

♣

定义 1.3 (Dirichlet 函数)

Dirichlet 函数:

$$D(x):=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数},\\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

♣

定义 1.4 (Riemann 函数)

Riemann 函数:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(p\in\mathbb{N}^+, q\in\mathbb{Z}, q\neq 0, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互素}),\\ 1, & x=0,\\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

♣

1.3 实数系的建立

1.3.1 有理数与无理数

笔记 发现无理数的相关背景

- 无理数的发现导致了第一次的数学危机
- 毕达哥拉斯 (*Pythagoras*) 及其学派把" 万物皆数"(*Numerology*) 作为基本信念. "一切事物和现象都可以归结为整数与整数的比", 这就是所谓 "数的和谐".
- 最早被发现的无理数是? 很多人认为最早被发现的无理数是 $\sqrt{2}$, 并归功于 *Pythagoras* 学派的 *Hippasus*。也有人主张 *Hippasus* 更可能发现的无理数是 "黄金分割", 之后又发现了 $\sqrt{2}$ 并公布然后被扔海里给弄死了[1].
  也有人说 *Pythagoras* 本人也发现了 $\sqrt{2}$ 是无理数. 但是因为违背其哲学未公布.

例题 1.25 证明: $\sqrt[n]{2}$ 为无理数

证明 当 $n=2$ 时, $\sqrt{2}$ 显然为无理数. 下面讨论 $n \geqslant 3$.
采用反证法. 若 $\sqrt[n]{2}$ 为有理数, 于是存在两个互素（或互质）的正整数 p,q 使得

$$\sqrt[n]{2}=\frac{q}{p} \Longleftrightarrow 2=\frac{q^n}{p^n} \Longleftrightarrow q^n=p^n+p^n$$

最后的等式与费马大定理 (Fermat's Last Theorem) 矛盾, 证毕

定理 1.7 (Fermat's Last Theorem)
当 $n \geqslant 3$ 时, $x^n+y^n=z^n$ 无整数解

例题 1.26 证明: 若 $n \in N^+$ 非完全平方数, 则 $\sqrt{n}$ 为无理数.

证明 (by 予一人)[4] 利用反证法. 设若 $\sqrt{n}$ 是有理数, 则可设 $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, 其中 p,q 是互素的正整数, 于是 $p^2=nq^2$. 因为 p,q 互素, 则依裴蜀定理 (Bézout's theorem), 存在整数 a,b 使得 $ap+bq=1$. 如此, 则有

$$p=ap^2+bpq=anq^2+bpq=(anq+bp)q,$$

这意味着

$$\sqrt{n}=\frac{p}{q}=anq+bp \in \mathbb{N}^+,$$

与 n 非完全平方数矛盾. 证毕.

1.3.2 实数的公理化描述

定义 1.5 (实数)
存在唯一的完备全序域, 我们称为实数域

定义 1.6 (域)
域 $\approx$ "能够做四则运算的集合". 即: $\mathbb{F}$, *field*, $(\mathbb{F},+,\times,0,1(\text{且}\,0\neq 1))$ 如果它们满足以下性质:

① 加法封闭性: 若 $x,y\in\mathbb{F}$, 则 $x+y\in\mathbb{F}$
② 加法交换律: 对于任何 $x,y\in\mathbb{F}$, 有 $x+y=y+x$
③ 加法结合律: 对于任何 $x,,y,z\in\mathbb{F}$, 有 $(x+y)+z=z+(y+z)$
④ 加法存在零元: 存在元素 $0\in F$ 满足: 对于任何 $x\in\mathbb{F}$, $x+0=0+x=x$
⑤ 加法存在负元: 对于任何 $x\in\mathbb{F}$, 存在唯一[a]一个元素 y 满足 $x+y=y+x=0$. 称之为 x 的相反数, 记作 "$-x$"(可定义减法: $x-y:=x+(-y)$)

[1]解决不了问题, 那就解决提出问题的人, 秒啊! 秒啊!

⑥ 乘法封闭性：若 $x, y \in \mathbb{F}$, 则 $xy \in \mathbb{F}$
⑦ 乘法交换律：对于任何 $x, y \in \mathbb{F}$, 有 $xy = yx$
⑧ 乘法结合律：对于任何 $x,, y, z \in \mathbb{F}$, 有 $(xy)z = z(yz)$
⑨ 乘法单位元存在：存在元素 $1 \in F$ 满足: 对于任何 $x \in \mathbb{F}$, $1x = x$
⑩ 非零存在逆元：对于任何 $x \in \mathbb{F}$ 且 $x \neq 0$, 存在唯一一个元素 y 使得 $xy = yx = 1$. 称之为 x 的倒数, 记为 x^{-1}. (可定义除法：$x/y := x \cdot y^{-1}$)
⑪ 分配律：对于任何 $x,, y, z \in \mathbb{F}$, 有 $x(y+z) = xy + xz$

则称 $(\mathbb{F}, +, \times, 0, 1(\text{且}\, 0 \neq 1))$ 为一个域

[a]由②③④⑤可以推知：y 是唯一的

$$y_1, y_2 \Rightarrow y_1 = y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0 + y_2 = y_2$$

定义 1.7 (全序域)

如果满足定义 1.6中 ① – ⑪ 成立, 且以下六条性质成立
⑫ 对于任何 $x \in \mathbb{F}$, 有 $x \leqslant x$
⑬ 对于任何 $x, y \in \mathbb{F}$, 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则 $x = y$
⑭ 对于任何 $x, y \in \mathbb{F}$, 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$
⑮ 对于任何 $x, y \in \mathbb{F}$, 有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$
⑯ 对于任何 $x, y, z \in \mathbb{F}$, 若 $y \leqslant z$, 则 $x + y \leqslant z + z$
⑰ 对于任何 $x, y \in \mathbb{F}$, 若 $x \leqslant y$ 且 $z \geqslant 0$, 则 $xz \leqslant yz$

则称 $(\mathbb{F}, +, \times, 0, 1, \leqslant)$ 为一个全序域

定理 1.8 (完备性[2])

对于 $\mathbb{F}$ 的两个非空子集 A, B, 若对于任何的 $x \in A$, $y \in B$, 都有 $x \leqslant y$, 则存在一个 $c \in \mathbb{F}$, 使得对于任何 $x \in A$, $y \in B$ 都有 $x \leqslant c \leqslant y$

定理 1.9 (存在性)

在 ZF 集合论中, 存在一个集合 $\mathbb{F}$ 和它的两个元素 $(0$ 和 1 且 $0 \neq 1)$ 以及 $\mathbb{F}$ 上的两个运算 $(+, \times)$, 一个关系 $(\leqslant)$ 满足之前的 ①-⑰.

定理 1.10 (唯一性)

设 $(\mathbb{F}_1, +, x_1, 0_1, 1_1, \leqslant_1)$ 和 $(\mathbb{F}_2, +, x_2, 0_2, 1_2, \leqslant_2)$ 是两个完备全序域, 则存在唯一的双射[a] $f : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ 使得

1. 保加法: $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$;
2. 保乘法: $f(x \times_1 y) = f(x) \times_2 f(y)$;
3. 保 0: $f(0_1) = 0_2$
4. 保 1: $f(1_1) = 1_2$
5. 保序: 若 $x_1 < y$, 则 $f(x) \leqslant_2 f(y)$.

(若有这样的 f, 则称 $\mathbb{F}_1$ 和 $\mathbb{F}_2$ 同构).

[a]双射 (又叫一一对应): 每一个 x 都有 y 与之对应, 每一个 y 都有 x 与之对应

定理 1.11 (稠密性)

设 F 是一个全序域, 则对于任何 $x < y$, 存在 $z \in F$ 使得 $x < z < y$.

定理 1.12 (Archimedes 性)

对于任何 $x > 0$ 以及 $y \in \mathbb{Q}$, 一定有 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $nx > y$.

推论 1.1 (有理数的稠密性)

对于任何 $x < y \in \mathbb{R}$, 存在 $z \in \mathbb{Q}$, 使得 $x < z < y$.

1.3.3 实数的构造: Dedekind 分割法

实数的几种定义方法优缺点对比[5]:

1. 无穷小数法
   - 优点: 直观、易于证明完备性
   - 缺点: 不易于定义四则运算、与实数不是一一对应的
2. Dedekind 分割法
   - 优点: 可以证明各种性质 (包括四则运算、完备性等)
   - 缺点: 不够直观、证明过程比较冗长
3. Cantor 基本列法
   - 优点: 易于证明各种性质 (包括四则运算、完备性等)
   - 缺点: 需要先讲数列极限、需要等价关系和商集知识
4. 公理法
   - 优点: 不必谈论具体构造, 直接从公理出发
   - 缺点: 公理系统的相容性依赖前三种构造

此时, 我们假装不知道 "无理数" 和 "实数" 这两个概念, 我们现在只知道:
1. 什么是有理数?
2. 有理数能够做四则运算
3. 有理数能够比较大小

我们要说明无理数的存在性! 以有理数为基础来构造实数

下面构造实数的方法是 Dedekind 在 1872 年发明的, Dedekind 是以有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的切割为基础导出无理数定义, 进而定义整个实数系的. 这种方法以 Dedekind 分割而著称.

分划的引入

定义 1.8 (Dedekind 分割)

称 $\mathbb{Q}$ 的子集 X 是一个**戴德金分割**, 它满足以下三个条件:

(I) $X \neq \varnothing, X \neq \mathbb{Q}$;

(II) 若 $p \in X, q \in \mathbb{Q}$ 且 $q < p$, 则 $q \in X$;

(III) 对 $\forall p \in X, \exists r \in X$ s.t. $p < r$.

把所有戴德金分割组成的集合记为 $\mathbb{R}$.

推论 1.2

(III) 可以说明 X 没有最大元; (II) 暗含着两件可以直接运用的事实

1. 若 $p \in X$, 且 $q \notin X$, 则 $p < q$;
2. 若 $r \notin X$, 且 $r < s$, 则 $s \notin X$.

注 可以看到戴德金分割将数轴一分为二, 从某点处切为两段, 左边为 X, 右边为 X'. 切点将会有两种情况:

1. 切到有理数

$$X = \{x|x < 2\} \quad \Rightarrow \quad \text{确定有理数 } 2$$

2. 未切到有理数, 即切空 (切到“缝隙”). 则定义切点为无理数

$$X = \{x|x < 0\} \cup \{x|x^2 < 2\} \quad \Rightarrow \quad \text{定义无理数 } \sqrt{2}$$

在 $\mathbb{R}$ 中引入序

定义 1.9 (序关系)

设 X, Y 表示戴德金分割, 规定“$X < Y$”表示 $X \subseteq Y$ 且 $X \neq Y$

引理 1.1

$(\mathbb{R}, <)$ 是全序集

证明 “$<$”显然是序, 我们首先说明它是全序, 即对任意的 $X, Y \in \mathbb{R}$, 必有

$$X < Y, \quad X = Y, \quad X > Y$$

之一成立. 或者

$$X \leqslant Y \quad \text{或} \quad Y \leqslant X$$

必有一个成立. 为了证明至少有一种成立, 不妨设 $X \nleqslant Y$, 即 $X \nsubseteq Y$. 于是存在 $p \in X \backslash Y$. 由戴德金分割的定义, p 成为 Y 的一个上界 (否则, 若有 $q \in Y$, $p < q$, 则 $p \in Y$), 于是 Y 中元素全是 X 中元素 (因为对 $\forall q \in Y \subset Q$, $q < p \Rightarrow q \in X$) 所以 $Y \subseteq X$, 则 $Y \leqslant X$.

完备性

引理 1.2

若 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A 有上界, 则必有上确界

证明 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, 则 A 是 ⓠ 的一些戴德金分割组成的集合. 于是我们可以定义

$$Y = \bigcup_{X \in A} X,$$

则 Y 是一个戴德金分割, 因为

① Y 显然非空

② A 有上界, $Z \in \mathbb{R}$, 即对 $\forall X \in A$, $X \subseteq Z$, 于是 $Y \subseteq Z$, 于是 $Y \neq$ ⓠ

③ 若 $p \in Y$, 则 p 其实是 A 中某一 X 的元素. 若 $q < p$, 则 $q \in X$, 于是 $q \in Y$

④ 与 ® 同理

接下来说明 Y 就是 A 的上确界, Y 显然是 A 的上界, 我们只需说明 Y 是最小的, 即若有 $Z < Y$, 则 Z 一定不是 A 的上界. $Z \subset Y$ 意味着 Z 是 A 的真子集. 于是存在 $q \in Y \backslash Z$, q 其实属于某个 $X \in A$, 因为 $q \notin Z$, 于是 $X \notin Z$, 所以必有 $Z \subset X$, 即 Z 不是 A 的上界.

定义加减乘除

接下来要在 $\mathbb{R}$ 中定义域所需的元素和运算

例题 1.27 若 α 是无理数, 证明: $\{n\alpha\}\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上稠密.

解 *([6],P96)* 对 $\forall\varepsilon>0$, $x_0\in[0,1]$ 将 $[0,1]$ N 等分, 且 $\dfrac{1}{N}>\varepsilon$. 则 $\{\alpha\},\cdots,\{(N+1)\alpha\}$ 中至少有两数在同一等分中. 从而存在 $k_1>k_2$ 使得

$$0<\{k_1\alpha\}-\{k_2\alpha\}=(k_1-k_2)\alpha-([k_1\alpha]-[k_2\alpha])<\varepsilon,$$

或者

$$-\varepsilon<\{k_1\alpha\}-\{k_2\alpha\}=(k_1-k_2)\alpha-([k_1\alpha]-[k_2\alpha])<0$$

由于两种情形类似, 因此, 这里仅对第一种情形处理. 令

$$k_1-k_2=p\in\mathbb{N}^+,\quad [k_1\alpha]-[k_2\alpha]=q\in\mathbb{N}^+$$

则

$$0<p\alpha-q=\beta<\varepsilon,\quad p\alpha=q+\beta,$$

对 $\forall k\in\mathbb{N}^+$, $1\leqslant k<\dfrac{1}{\beta}$ 满足 $\{kp\alpha\}=k\beta$, 故 $\{kp\alpha\}$ 在 $[0,1]$ 上均匀分布并且相邻两项之差为 β, 即 $k_0\in\mathbb{N}^+$ *s.t.* $\{k_0p\alpha\}$ 与 x_0 的距离小于 ε. 再令 $n_0=k_0p$ 即可得到

$$|\{n_0\alpha\}-x_0|<\varepsilon$$

所以当 α 是无理数时, $\{n\alpha\}\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上稠密.

1.4 实数的基本定理

实数的基本定理[3] 分别是确界原理、单调有界定理、有限覆盖定理、聚点定理、致密性定理、闭区间套定理和柯西收敛准则 7 个定理

定理 1.13 (Dedekind 确界原理)

非空有上 (下) 界的数集必有上 (下) 确界

例题 1.28 设 A,B 为非空有界数集, $S=A\cup B$, 证明:

$$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$$

解 由于 $S=A\cup B$ 显然是非空有界数集, 因此 S 的上, 下确界都存在

一方面, $\forall x\in S$, 有 $x\in A$ 或 $x\in B\Longrightarrow x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B$

从而有 $x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$, 故得

$$\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$$

另一方面, 因为 $A\subset S\Longrightarrow\sup A\leqslant\sup S$, 同理又有 $B\subset S\Longrightarrow\sup B\leqslant\sup S$. 所以

$$\sup S\geqslant\max\{\sup A,\sup B\}$$

综上，即所得

$$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$$

定理 1.14 (单调有界定理)

递增有上界数列必有极限, 递减有下界数列必有极限。

[3]实数的基本定理的互推参考: 杨艳萍的《数学分析中的重要定理》[7]

证明 法 I(确界定理). 不妨设数列 $\{a_n\}$ 是单调增有上界, 由确界定理知具有上确界。记为 $\alpha=\sup\{a_n\}$, 显然 α 就是其极限. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, 由上确界定义知, $\exists a_N$, 使 $a_n>a-\varepsilon$, 由单增性知, 当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\alpha-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant\alpha$$

另一方面, 由于 α 是 $\{a_n\}$ 的上界, 故对 $\forall a_n$ 都有 $a_n\leqslant\alpha<\alpha+\varepsilon$. 所以当 $n\geqslant N$ 时,

$$\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon\,,\ |a_n-a|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$.

法 II(柯西收敛准则). 只证递增有上界数列必有极限的情形. 不妨设 $\{x_n\}$ 为递增有上界数列, 下面用反证法证明数列 $\{x_n\}$ 有极限.

假设 $\{x_n\}$ 不存在极限. 由柯西收敛准则知, $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall N$, $\exists n>N$, 使得 $x_n-x_N=|x_n-x_N|>\varepsilon_0$. 依次取

$$N_1=1,\exists n_1>N_1\text{ 使得 }x_{n_1}-x_1>\varepsilon_0;$$

$$N_1=n_1,\exists n_2>n_1\text{ 使得 }x_{n_2}-x_{n_1}>\varepsilon_0;$$

$$\vdots$$

$$N_1=n_{k-1},\exists n_k>n_{k-1}\text{ 使得 }x_{n_k}-x_{n_{k-1}}>\varepsilon_0;$$

把以上式子相加得 $x_{n_k}-x_1>k\varepsilon_0$, 对任意的实数 G, 当 $k>\dfrac{G-x_1}{\varepsilon_0}$ 时有 $x_{n_k}>G$, 这与 $\{x_n\}$ 有上界矛盾。故数列 $\{x_n\}$ 有极限.

法 VI(致密性定理). 妨设数列 $\{x_n\}$ 递增有界, 则由致密性定理知, 必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\xi$, 则

$$\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall k>K,|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon,$$

即 $\xi-\varepsilon<x_{n_k}<\xi+\varepsilon$.

取 $N=n_{K+1}$, 当 $n>N=n_{K+1}$ 时有 $n_n\geqslant n\geqslant n_K$, 由 $\{x_n\}$ 递增得

$$\xi-\varepsilon<x_{n_{K+1}}\leqslant x_n\leqslant x_{n_n}<\xi+\varepsilon.$$

故得 $\xi-\varepsilon<x_n<\xi+\varepsilon$.

所以数列 $\{x_n\}$ 的极限为 ξ.

定理 1.15 (闭区间套定理,Cartor)

设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个闭区间套序列, 即

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ n=1,2,\cdots$$

且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的 ξ, 使得 $\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$.

证明 法 I(确界定理). 令数集 $S=\{a_n\}$, 显然 S 非空有上界 (例如 b_1), 故由确界定理知, S 存在上确界, 设 $\xi=\sup S$. 下面证明 ξ 即为所求.

因 ξ 为 S 的一个上界, 故 $a_n\leqslant\xi(n=1,2,\cdots)$; 再由 ξ 为 S 的最小上界知, 假设由某个 $b_m<\xi$ 不是 S 的上界, 即 $\exists a_k>b_m$, 这与 $\{[a_n,b_n]\}$ 为区间套矛盾 $a_i>b_j$. 所以对任意的 b_n 都有 $b_n\geqslant\xi$, 故得 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n(n=1,2\cdots)$.

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n](n=1,2\cdots)$, 则 $|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to0$, 故 $\xi=\xi'$. 从而唯一性得证。

例题 1.29 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且有 $f(a)>a$, $f(b)<b$, 则存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

解 记 $F(x)=f(x)-x$, 则有 $F(a)>0$, $F(b)<0$. 若 $f(\frac{a+b}{2})=\frac{a+b}{2}$, 则结论成立. 否则二等分取闭子区间 $[a_1,b_1]$

- 若 $f(\frac{a+b}{2})>\frac{a+b}{2}$, 则取 $[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$;
- 若 $f(\frac{a+b}{2})<\frac{a+b}{2}$, 则取 $[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$.

始终有 $f(a_1)>a_1$, $f(b_1)<b_1$. 再对 $[a_1,b_1]$ 二等分, 重复以上操作可知:

- 要么存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.
- 要么存在一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 使得 $F(a_n)>0$, $F(b_n)<0$. 取法可知必有 $\{a_n\}$ 递增, $\{b_n\}$ 递减. 于是必然

有 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 根据闭区间套定理知, 必存在唯一 $x_0\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$, 并且 $\lim_{n\to\infty}a_n=b_n=x_0$. 再结合 $f(x)$ 的单调性

$$a_n<f(a_n)\leqslant f(x_0)\leqslant f(b_n)<b_n$$

令 $n\to\infty$ 即得 $f(x_0)=x_0$.

定理 1.16 (Weierstrass 聚点定理)

有界无穷点集至少有一个聚点.

证明 法 I(确界定理). 设 S 是直线上的有界无限点集, 则由确界存在定理有 $\eta=\sup S, \xi=\inf S$.

若 η,ξ 中有一点不是 S 的孤立点, 则显然是 S 的聚点. 否则, 令 $E=\{x\in R|S$ 中仅有有限个数小于 $x\}$, 显然 E 非空且有上界, 故有上确界, 设 $\eta'=\sup E$, 则由 E 的构造方法可知, $\forall\varepsilon>0$ 必有 $\eta'+\varepsilon\notin E$, 即 S 中有无限个数小于 $\eta'+\varepsilon$, 大于 η', 所以 $(\mu'-\varepsilon,\eta'+\varepsilon)$ 中含有 S 的无限个数, 故 η' 是 S 的聚点.

法 II(单调有界定理). 设 S 是直线上的有界无限点集, 所以 $\exists M>0$, 对任意的 $x\in S$ 都有 $-M\leqslant x\leqslant M$, 令 $[a_1,b_1]=[-M,M]$, 则 $[a_1,b_1]$ 含有 S 的无穷多个点.

将 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个小区间, 则其中至少有一个闭区间含有 S 的无穷多个点, 记这样的小闭区间为 $[a_2,b_2]$ 这样无限进行下去, 得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 此闭区间套的左端点所组成的数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 b_1, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 必有极限, 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=\xi$, 由闭区间套的做法知 $\xi\in[a_n,b_n]$.

下面证明 ξ 是 S 的聚点.

$\forall\varepsilon>0$, 因 $b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0(n\to\infty)$, 所以 $\exists N>0$, 使 $[a_N,b_N]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$, 由 $[a_N,b_N]$ 中含有 S 的无穷多个点知 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ 中含有 S 的无穷多个点.

所以 ξ 是 S 的聚点.

定理 1.17 (Cantor 区间套定理)

任何闭区间套必有唯一的公共点.

证明 法 I(确界定理). 令数集 $S=\{a_n\}$, 显然 S 非空有上界 (例如 b_1), 故由确界定理知, S 存在上确界, 设 $\xi=\sup S$. 下面证明 ξ 即为所求.

因 ξ 为 S 的一个上界, 故 $a_n\leqslant\xi(n=1,2,\cdots)$; 再由 ξ 为 S 的最小上界知, 假设由某个 $b_m<\xi$, b_m 不是 S 的上界, 即 $\exists a_k>b_m$, 这与 $\{[a_n,b_n]\}$ 为区间套矛盾 $(a_i>b_j)$. 所以对任意的 b_n 都有 $b_n\geqslant\xi$, 故得 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$.

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$, 则 $|\xi-\xi'|\leqslant|a_n-b_n|\to 0$, 故 $\xi=\xi'$,

从而唯一性得证.

定理 1.18 (Bolzano-Weierstrass 致密性定理)

有界数列必有收敛子列.

证明 将数列的所有项作成一个有界数集，如果该数集是有限集，则表明数列中有无穷多个项取相同的数值，那么取这些项作成的子列就是收敛的，如果此数集是无限集，由聚点定理知它至少有一个聚点 x，那么任意取定一个正实数 ε_1，则数集中有无穷多个数落在 $(x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1)$ 内并且不等于 x，任取其中一个记为 a_{n_1}，即它在原数列中的下标是 n_1，则再取 $\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2}\varepsilon_1,|x-a_{n_1}|\}$，又可以选落在区间 $(x-\varepsilon_2,x+\varepsilon)$ 中并且不等于 x 的项 a_{n_2}，这里 n_2 的选法要保证 $n_2>n_1$，因为是有无穷多个数落在区间内，所以这总是可以办到的。依次类推，得出一个子列 $a_{n_1},a_{n_2},\ldots$，显然这个子列是收敛到 x 的。

法 II(单调有界定理). 设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列, 首先证明 $\{x_n\}$ 中存在单调子数列.

(1) 若 $\{x_n\}$ 中存在单调递增子数列 $\{x_{n_k}\}$, 则得证.

(2) 若 $\{x_n\}$ 中无单调递增子数列, 那么 $\exists n_1$, 当 $n>n_1$ 时恒有 $x_{n_1}>x_n$; 同样在 $\{x_{n_k}\}(n>n_1)$ 中也无单调递

增子数列, 于是又 $\exists n_2$, 当 $n_2 > n$ 时恒有 $x_{n_2} < x_n < x_{n_1}$; 如此无限进行下去, 便可得到一严格递减子数列 $\{x_{n_k}\}$.

由上可知, $\{x_n\}$ 中存在单调子数列 $\{x_{n_k}\}$, 而 $\{x_n\}$ 有界, 所以 $\{x_{n_k}\}$ 有界. 故由单调有界定理知, $\{x_{n_k}\}$ 必收敛, 即有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

例题 1.30 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n - a_m| > \dfrac{1}{n}$, $(n < m)$, 求证: $\{a_n\}$ 为无界数列.

解 法 I(by ytdwdw). 反证法. 若 $\{a_n\}$ 为有界数列, 则它有收敛子列, 不妨设它的收敛子列 $\{a_{m_k}\}$ 收敛到 0, 于是 $|a_n - a_{m_k}| > \dfrac{1}{n}$, $m_k \neq n$. 令 $k \to +\infty$ 得到 $|a_n| \geqslant \dfrac{1}{n}$.

任取 $n > 1$. 将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 从小到大排列, 设为 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}$, 则

$$|a_{k_1} - a_{k_n}| = \sum_{j=1}^{n-1} |a_{k_j} - a_{k_{j+1}}| \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{k_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{k_n} \geqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$$

立即得到矛盾

法 II(by ytdwdw). 由假设, 可得 $|a_n - a_m| > \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2m}$ $(m \neq n)$. 因此, 区间列 $\left\{[a_n - \frac{1}{2n}, a_n + \frac{1}{2n}]\right\}$ 两两不交. 这表明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n - \dfrac{1}{2n}, a_n + \dfrac{1}{2n}\right]$ 是无界集, 从而 $\{x|\exists n \geqslant 1, s.t.\ |a_n - x| \leqslant 1\}$ 是无界集. 因此, $\{a_n\}$ 为无界数列.

法 III(by 楚坛). 由题设可得 $|a_n - a_m| > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)$. 任取 $n > 1$, 将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 从小到大排列, 设为 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}$, 则

$$\begin{aligned}
|a_{k_1} - a_{k_n}| &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_{k_j} - a_{k_{j+1}}| \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j} + \frac{1}{k_{j+1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j} + \frac{1}{k_1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j} + \frac{1}{k_1}\right) \geqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}
\end{aligned}$$

由此知

$$\sup_{i \neq m} |a_i - a_m| \geqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}, \ \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

令 $n \to \infty$ 即知 $\sup\limits_{i \neq m} |a_i - a_m| = +\infty$, 即数列 $\{a_n\}$ 无界

例题 1.31 数列 $\{a_n\}$ 无上界 $\Leftrightarrow$ 必有子列 $\{a_{n_k}\} \to +\infty$ $(k \to +\infty)$.

证明 ($\Leftarrow$) 设 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{n_k}\} \to +\infty$ $(k \to +\infty)$, 则 $\forall A > 0, \exists K = K(A) \in \mathbb{N}$, s.t. 当 $k > K$ 时, $a_{n_k} > A$, 所以 A 不为数列 $\{a_n\}$ 的上界. 从 A 任取知, 数列 $\{a_n\}$ 无上界.

($\Rightarrow$) 设 $\{a_n\}$ 无上界, 则 1 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界, 故 $\exists a_{n_1} > 1$. 又因 $\max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界, 故 $\exists a_{n_2} > \max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$, 显然 $n_1 < n_2$. 依此类推就得到 $a_{n_k} > \max\{k, a_1, \cdots, a_{n_{k-1}}\}$, 显然, $n_{k-1} < n_k$. 所以 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列, 且 $a_{n_k} > k$. 由极限定义知, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = +\infty$

定理 1.19 (Heine-Borel 有限覆盖定理)

设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的一个 (无限) 开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

证明 法 I(确界定理). 设 H 为 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 令数集

$$S = \{x | a < x \leqslant b, [a, x] \text{能被 } H \text{ 中的有限个开区间覆盖}\},$$

显然 S 有上界 b, 因为 a 点的邻域 $(a - \delta, a + \delta)$ 必含有 $[a, b]$ 中的点, 设为 x, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 必覆盖 $[a, x]$, 故 S 非空.

由确界存在定理知 S 必有上确界, 设 $\xi = \sup S$.

下面证明 $\xi = b$. 反证法! 若 $\xi \neq b$, 则 $a < \xi < b$, 由 H 覆盖闭区间 $[a, b]$ 知, 一定存在 $(\alpha_1, \beta_1) \in H$, 使 $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$, 取 x_1, x_2 使 $a < x_1 < \xi < x_2 < \beta$, 且 $x_1 \in S$, 则 $[a, x_1]$ 能被 H 中有限个开区间覆盖, 把 (α_1, β_1) 加进去, 就可推出 $x_2 \in S$, 这与 $\xi = \sup S$ 矛盾, 故 $\xi = b$, 即定理的结论成立。

1.5 无理测度

例题 1.32 若 x 为无理数, 则存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}(q>0)$, 使得 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.

解 ([8],P5) 反证法. 假定只有有限个有理数满足上述不等式, 即

$$\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{1}{q_i^2}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

令 $\delta=\min\left\{\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|:i=1,2,\cdots,m\right\}$, 取 $N:N>\frac{1}{\delta}$, 且作整数 $p,q(0<q<N)$, 使得

$$|qx-p|<\frac{1}{N},\quad\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}<\frac{1}{q^2}$$

但因 q 是正整数, 故又有 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}<\frac{\delta}{q}<\delta$. 根据 δ 之定义, $\frac{p}{q}\neq\frac{p_i}{q_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 这与源假设矛盾, 证毕.

定理 1.20 (狄利克雷 (Dirichlet) 逼近定理[9])

设 x 是无理数, 则存在无穷多对整数 (p,q) 使得

$$0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.\tag{1.13}$$

例题 1.33 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos n)^n$ 的敛散性.

证明 (周明强, P172) 对于 π, 存在 $p_n\in\mathbb{Z},q_n\in\mathbb{N}$, 使得 $|\pi-p_n/q_n|<1/q_n^2$. 由此知

$$|\cos p_n|=|\cos(q_n\pi-p_n)|>\cos\frac{1}{q_n}=1-2\sin^2\frac{1}{2q_n}>1-\frac{1}{2q_n^2}.$$

从而得

$$|\cos p_n|^{p_n}>\left(1-\frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n}>1-\frac{p_n}{q_n}\frac{1}{2q_n}$$

这说明该级数不满足收敛的必要条件, 即发散

定义 1.10 (刘维尔数)

我们称实数 x 为刘维尔数, 如果对于任何 $n\geqslant1$, 存在整数 p 以及整数 $q>1$ 使得

$$0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^n}.\tag{1.14}$$

例题 1.34 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.

解 法 I[10]. 设 m,n 是正整数, 使得 $m>1$, $|n-m\pi|<\frac{\pi}{2}$, 那么, $m<n$, 注意到 (美国数学月刊,1983,648)

$$|n-m\pi|>m^{-41},$$

因此,

$$1>|\sin n|>|\sin(n-m\pi)|>\frac{2}{\pi}|n-m\pi|>\frac{2}{\pi}m^{-41}$$

由此, $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$, 而 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$ 是显然的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.

法 II. 由于 π 不是刘维尔数, 因此, 存在正整数 m, 对任何整数 p 和整数 $q>1$, 有

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{q^m}\Longleftrightarrow|q\pi-p|\geqslant\frac{1}{q^{m-1}}$$

因此, 对任意的正整数 n, 存在 q_n 使得

$$|q_n\pi-n|\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow0\leqslant q_n\leqslant\frac{n+\frac{\pi}{2}}{\pi}\Rightarrow0\leqslant q_n\leqslant\frac{n+2}{\pi}\Rightarrow0\leqslant q_n\leqslant n+2$$

故有,

$$|q_n\pi-n|\geqslant\frac{1}{q_n^{m-1}}\geqslant\frac{1}{(n+2)^{m-1}}$$

故有

$$|\sin n| = |\sin(q_n\pi - n)| = \sin|q_n\pi - n| \geqslant \sin\frac{1}{(n+2)^{m-1}}$$

综上,

$$\left(\sin\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant |\sin n|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|} = 1$.

定理 1.21 (关于丢番图逼近的刘维尔定理[9])

设 $n \geqslant 2$, 无理数 x 是某个 n 次整系数多项式的零点, 则存在常数 $A > 0$ 使得对于任何正整数 p 和整数 q, 有

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}. \tag{1.15}$$

定义 1.11 (无理测度)

对于实数 x, 定义它的无理测度为

$$\mu(x) := \inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\left\{\alpha \,\middle|\, \text{有无穷多对整数 } (p,q) \text{ 使得 } 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}\right\}. \tag{1.16}$$

易见, 任取常数 $C > 0$, 则

$$\mu(x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\left\{\alpha \,\middle|\, \text{有无穷多对整数 } (p,q) \text{ 使得 } 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^\alpha}\right\}. \tag{1.17}$$

目前已知的上界估计[a]: 为 $\mu(e) = 2$, $\mu(\pi) \leqslant 7.1032$, $\mu(\pi^2) \leqslant 5.0954$.

[a] https://mathworld.wolfram.com/IrrationalityMeasure.html

例题 1.35 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^8} = 0$.

证明 [4] 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^8} \neq 0$。不失一般性还假设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\tan n}{n^8} = A > 0$,
先假设 A 为有限, 则存在正整数的子列 $\{a_n\}$, 使得

$$\forall A > \varepsilon > 0\,,\ \exists N\,,\ n > N \Longrightarrow \left|\frac{\tan a_n}{a_n^{a_n}}\right| < \varepsilon \Longrightarrow a_n^{a_n}(-\varepsilon + A) < \tan a_n$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{a_1^{a_1}}$, 选择一个 $b_1 \in \{a_n\}$ 使得

$$-1 + A < -1 + Aa_1^{a_1} < \tan b_1$$

再取 $\varepsilon = \frac{1}{a_2^{a_1}}$, 选择一个 $b_2 \in \{a_n\} > b_1$ 使得

$$-1 + A \times 2^8 < -1 + Aa_1^{a_1} < \tan b_1$$

然后再取 $\varepsilon = \frac{1}{a_3^{a_1}}$, 选择一个 $b_3 \in \{a_n\} > b_2$ 使得

$$-1 + A \times 3^8 < -1 + Aa_1^{a_1} < \tan b_1$$

归纳可得一个单调递增的数列 $\{b_n\}$, 使得 $\{b_n\} \subset \{a_n\}$,
且对于每个 b_n 有 $\frac{\tan b_n + 1}{A} > n^8$, 可见我们可以要求所有的 $\tan b_n$ 都 > 0.
而且还可以假设 $\{\tan b_n\}$ 也是递增的, 否则从中抽出递增的子列即可
现在再构造一个新数列 $\{c_n\}$, 且 $0 < c_n < \frac{\pi}{2}$, 而且 $b_n = c_n \pmod \pi$
因为 $\tan x$ 为周期 π 的函数, 则 $\tan b_n = \tan c_n$.

[4] https://tieba.baidu.com/p/4405686469?pn=2

此时有 $0 < c_n < \frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\pi}{2}$，$\frac{\tan b_n + 1}{A} > n^8$，$\{c_n\}$ 单调递增

又有 $b_n = c_n \pmod{\pi}$ 而 b_n 为整数 $\Longrightarrow c_n = M_n - \pi N_n$，其中 $M, N \in \mathbb{N}$

利用 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\ (x > 0)$ 以及不等式 $\arctan x < \pi$ 有

$$\tan c_n > An^8 - 1 \Longrightarrow c_n > \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{An^8 - 1}\right) > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{An^8 - 1}$$

$$\Longrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - c_n < \frac{1}{An^8 - 1}$$

将 $c_M = M_M - \pi N_n$ 代入，有

$$0 < \pi - \frac{2M_n}{2N_n + 1} < \frac{1}{2N_N + 1} \cdot \frac{1}{An^8 - 1} < \frac{C}{n^{7.7}} \quad \text{其中}C\text{为一常数}$$

由此可见所有 $\left\{\frac{2M_N}{2N_N + 1}\right\}$ 均满足无理数测度的定义，

所以 $\mu(\pi) \geqslant 7.7$，但这和已知上界 $\mu(\pi) \leqslant 7.6063$ 矛盾。

若 A 为无限，则随便取一个有限的 $D > 0$，仿照上面的方法，

同样有数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{\tan b_n + 1}{D} > n^8$

综上，即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan n}{n^8} = 0$

定义 1.12 (无理测度)

设 $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$，称正实数 μ 是 x 的无理测度，若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $q_0(\varepsilon) > 0$，使得对所有满足 $q \geqslant q_0(\varepsilon)$ 的数组 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$，有

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}.$$

♣

例题 1.36 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n)}{2^n}$ 的敛散性.

证明 (by MSE)[11]. 由1.11得到，当 $C_\mu > 0$ 充分小时，对任何一对正整数 (p, q) 都有

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{C_8}{q^8}$$

我们得到

$$\left|n - (\ell + \frac{1}{2})\pi\right| = \frac{2\ell + 1}{2}\left|\frac{2n}{2\ell + 1} - \pi\right| > \frac{C_8}{2(2\ell + 1)^7} \sim \frac{\pi^7 C_8}{2^8 n^7}$$

注意到

$$|\tan x| \sim \frac{1}{|x - (\ell + \frac{1}{2})\pi|} \quad \text{for} x \sim (\ell + \frac{1}{2})\pi$$

因此，

$$|\tan n| \lesssim \frac{2^8 n^7}{\pi^7 C_8} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan n}{2^n} \quad \text{绝对收敛.}$$

.

第二章 极限论

2.1 数列的极限

定义 2.1 ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$

注 $\forall$ 和 $\exists$ 的位置是不能交换的!

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \cdots$, 即任意选定 ε 之后可以求得满足条件的 N, 这 N 与 ε 有关
- $\exists N > 0, \forall \varepsilon > 0, \cdots$, 即可以先求得 N 对任意选定的 ε 满足条件, 这 N 与 ε 无关

详细可参考：楼红卫的《微积分进阶》, P25

例题 2.1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9} = 1.$

证明 因为 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}| = \dfrac{1}{10^n}$, 要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}-1| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$, 即 $n > \ln\dfrac{1}{\varepsilon}$.

所以 $\forall \varepsilon > 0$(不妨取 $\varepsilon < 1$), 取 $N = \left[\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}-1| < \varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9} = 1.$

进一步分析：https://www.zhihu.com/question/19607903/answer/20456641

注 在非标准分析中，有无穷多个不同的元素，大于等于任何 (有限的) $0.999\cdots9$ 而小于等于 1

例题 2.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

解 法 I. 应用几何-算术平均不等式得

$$\begin{aligned}1 \leqslant \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} &= \left(1\cdots1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

故要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2}$ 即可.

对于任意的正数 ε, 取 $N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \varepsilon$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

法 II. 注意到 $n > 1$ 时, 有 $\sqrt[n]{n} > 1$. 因此, 令 $h_n = \sqrt{n} - 1 > 0\ (n > 1)$. 从而当 $n > 1$ 时, 有

$$n = (1+h_n)^n \geqslant nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

故

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 = h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n > 1$$

故对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[1 + \dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

笔记 错误的证明：要使 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 只要使 $\dfrac{\ln n}{n}<\ln(1+\varepsilon)$. 从而由

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}.$$

得 $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$. 当 $n>N$ 时, 必有 $0<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

错因分析：取 $N=\left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$, 当 $n>N$ 时能推出 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$.

$$\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}\not\Longrightarrow\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}\Longleftrightarrow\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon.$$

例题 2.3 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

解 对固定 a, 存在 $N_0>0$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $n>|a|$, 即 $\dfrac{|a|}{n}<1$. 考察

$$\begin{aligned}\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|&=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N_0}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}\\&=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\underbrace{\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}}_{\text{每一项都}<1}\cdot\frac{|a|}{n}\\&<\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{M}{n}\quad\left(\text{其中}M=\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\right)\end{aligned}$$

故要使 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|\leqslant\dfrac{M}{n}<\varepsilon$, 只要 $n>\dfrac{M}{\varepsilon}$ 即可.

对于任意的正数 ε, 取 $N=\max\left\{N_0,\left\lfloor\dfrac{M}{\varepsilon}\right\rfloor+1\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

注 关于 N 的取值问题, 取整后是否要 $+1$？我们举个例子：假设 $\dfrac{M}{\varepsilon}=99999.1$, 那么

$$n>\frac{M}{\varepsilon}=99999.1\Rightarrow\min n=100000\Rightarrow N=100000$$

取整后不加 1

$$n>\left\lfloor\frac{M}{\varepsilon}\right\rfloor=99999\Rightarrow\min n=100000\Rightarrow N=100000$$

取整后加 1

$$n>\left\lfloor\frac{M}{\varepsilon}\right\rfloor+1=100000\Rightarrow\min n=100001\Rightarrow N=100001$$

根据数列极限的定义可知: N 的取值可以不唯一. 因此, 取整后加不加 1 无所谓. 对于本题你甚至可以取

$$N=\max\left\{N_0,\left\lfloor\frac{M}{\varepsilon}\right\rfloor+520\right\}$$

例题 2.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-a_{n-1})=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

证明 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon\Longleftrightarrow|a_n|<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}$$

从而得

$$\begin{aligned}|a_n|&<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a_{n-2}|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{1}{2^2}|a_{n-2}|\\&<\cdots\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\quad(n>N)\end{aligned}$$

由此知

$$|a_n| < \varepsilon + \frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\ (n > N)$$

易知存在 $N_1 > N$, 使得 $\frac{|a_N|}{2^{n-N}} < \varepsilon\ (n > N_1)$. 最后我们有 $|a_n| < 2\varepsilon\ (n > N_1)$. 即得所证

例题 2.5 (Cauchy 命题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

证明 [12] [8] 当 $a \in \mathbb{R}$ 时,

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \\
=&\left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
\leqslant&\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - a| + |a_{N_1+2} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
\leqslant&\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

其次, 记 $M = |a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|$, 且取 N_2, 使得当 $n > N_2$ 时, 有 $\frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

当 $a \to +\infty$ 时,

$\forall M > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $a_n > 2M + 2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n - N_1}{n} = 1 > \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} = 0 > -1\,,$$

由定理 2.8 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > N_1$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}\,, \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} > -1.$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_n}{n} \\
&> -1 + \frac{n - N_1}{n}(2M + 2) > -1 + \frac{2A + 2}{2} = M
\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$

当 $a \to -\infty$ 时,

$\forall M > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $a_n < -2M - 2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n - N_1}{n} = 1 > \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} = 0 < 1\,,$$

由定理 2.8 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > N_1$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}\,, \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} > -1.$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_n}{n} \\
&< 1 + \frac{n - N_1}{n}(-2M - 2) > 1 + \frac{-2A - 2}{2} = -M
\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = -\infty$

笔记 当 $a = \infty$ 时, 结论不一定成立, 反例: $a_n = (-1)^{n-1}n$.

- 本题的思路：要知道数列极限考虑的是当 n 充分大后的结果. 因此, 在 n 充分大之前的项, 我们可以看作是

有限项, 对于这个有限个的情形我们可以看作“常数”.

例题 2.6 若 $a_n > 0\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

解 当 $a=0$ 时, 应用几何--算术平均不等式得

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\leqslant\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 知, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right|&\leqslant\left|\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}-a\right|\\&=\left|\frac{\left(\frac{a_1}{1}-a\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}-a\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right)}{n}\right|\\&\leqslant\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\left|\frac{a_2}{a_1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n}\\&=\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n}\\&\leqslant\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=\left|\dfrac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

当 $a>0$ 时, 应用均值不等式得

$$1\left/\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}\right.\leqslant\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\leqslant\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

不等式左边, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\iff\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a}$ 知, 由极限的定义 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$,

当 $n>N_1$ 时, 有 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right|\\\leqslant&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{a_1}{a_2}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n}\\=&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n}\\\leqslant&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=\left|\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\dfrac{1}{a}\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}=\dfrac{1}{a}$, 右边不等式同 $a=0$ 时

于是由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

例题 2.7 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2} = \dfrac{a^2}{2}$

解 我们有

$$x_n = a + a_n$$

这里 $\{a_n\}$ 是无穷小数列. 于是

$$\begin{aligned}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2} &= \frac{(a+a_1)+2(a+a_2)+\cdots+n(a+a_n)}{n^2}\\ &= \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\cdots+\frac{n}{n}a_n}{n}\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\cdots+\frac{n}{n}a_n}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{n}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2} &= \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\cdots+\frac{n}{n}a_n}{n}\\ &= \frac{a}{2}+0 = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

注 类似分析, 我们只需考虑 n 充分大之后的项, 而在 n 充分大之前的项, 我们可以看作是有限项, 对于这个有限个的情形我们可以看作 "常数" .

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+\cdots+nx_n &= x_1+2x_2+\cdots+Nx_N+(N+1)x_{N+1}+\cdots+nx_n\\ &= \text{常数} + \frac{(N+1+n)(n-N)}{2}\cdot a\end{aligned}$$

例题 2.8 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

解 对于 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$. 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$$

而

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$$

由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整数 m, 设 $m=np+i$, 其中 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列, 下面极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p},\ \text{故}\ \lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$$

例题 2.9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=a.$$

其中 $\lambda_k>0$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda=+\infty$

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知, $\forall\,\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 且 $\exists M_1>0, \forall n\in\mathbb{M}\ s.t.\ |a_n-a|\leqslant M_1$ 用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}-a\right|\\ =&\left|\frac{\lambda_0(a_0-a)+\lambda_1(a_1-a)+\cdots+\lambda_n(a_n-a)}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\lambda_0|a_0-a|+\lambda_1|a_1-a|+\cdots+\lambda_{N-1}|a_{N-1}-a|}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\frac{\lambda_N|a_N-a|+\cdots+\lambda_n|a_n-a|}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n} \\
&\leqslant \frac{M_1(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{N-1})}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\lambda_N+\cdots+\lambda_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\right) \\
&\leqslant \frac{M_2}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda=+\infty$, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2\in\mathbb{N}$, $s.t.$ $\forall n\geqslant N_2$, $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n>\dfrac{2M_2}{\varepsilon}$ 从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$,
则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}-a\right|<\frac{M_2}{M_2}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=a$.

例题 2.10 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 用 $\varepsilon-N$ 法证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}=ab$$

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 故数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都有界,
即 $\exists$ 数 $M>0$, 使得 $|a_n|<M$, $|b_n|<M$, $|a|<M$.
对任意 $\forall\varepsilon>0$, 由条件知 $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 使当 $n>N_1$ 时, 有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M}\ ,\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

其次, 记 $K=|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{MK}{n}=0$
且取 $N_2=\dfrac{2MK}{\varepsilon}$, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{MK}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
固定 N_1, 取自然数 $N>\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}-ab\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}\left[(a_0b_n-ab)+(a_1b_{n-1}-ab)+\cdots+(a_{n-1}b_1-ab)+(a_nb_0-ab)+\frac{ab}{n}\right]\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}\left[b_n(a_0-a)+a(b_n-b)+\cdots+b_0(a_n-a)+a(b_0-b)\right]+\frac{ab}{n}\right| \\
\leqslant&\frac{M}{n}\left[|a_0-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_0-b|+\cdot+|b_n-b|+|b|\right] \\
\leqslant&\frac{M}{n}\left[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdot+|b_{N_1}-b|+|b|\right] \\
&+\frac{M}{n}\left[|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_{N_1+1}-b|+\cdot+|b_n-b|\right] \\
=&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n}(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}=ab$$

例题 2.11 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha$$

解[1] 由 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$ 可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^t=1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以任给 ε, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

于是, 当 $n>N$ 时, 将 $\dfrac{a_N}{a_{N+1}},\dfrac{a_{N+1}}{a_{N+2}},\cdots,\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ 的不等式同序相乘, 得

$$\frac{\frac{1}{N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}<\frac{a_N}{a_n}<\frac{\frac{1}{N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

即

$$\frac{a_N\cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}<a_n<\frac{a_N\cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

从而

$$\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}$$

考虑到

$$\sqrt[n]{\frac{c}{n^t}}=e^{\frac{\ln c-t\ln n}{n}}=1-\frac{t\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以当 $n\to+\infty$ 时, 上述不等式左右两端分别收敛于 $\alpha-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $\alpha-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此, 存在 $N_1>N$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有

$$\alpha-\varepsilon<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\alpha+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha.$$

练习 2.1 设

$$a_n=L_n-\frac{4\ln n}{\pi^2},L_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x,n=1,2\ldots.$$

证明 $\{a_n\}$ 为有界数列.

解 *法 1.* 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{2}{x}, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1-\dfrac{2}{\pi}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$. 从而

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=L_{n1}+L_{n2}.$$

其中

$$0\leqslant L_{n1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot(1-\frac{2}{\pi})=1-\frac{2}{\pi}.$$

[1]赵显曾《数学分析拾遗》

$$
\begin{aligned}
L_{n2} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u \geqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u\\
&\geqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\int_{i+1}^{i+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \frac{4}{\pi^2}\int_1^{2n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+2)\\
&\geqslant \frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)
\end{aligned}
$$

类似可得到估计

$$
L_{n2} \leqslant 1+\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2).
$$

从而

$$
\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2) \leqslant L_n \leqslant \frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)+2.
$$

$$
\frac{4\ln 2}{\pi^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{4\ln 2}{\pi^2}+2, n=1,2,\ldots.
$$

故 $\{a_n\}$ 有界.

法 2. 事实上, 由于被积函数为偶函数, 故

$$
L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x
$$

先估计 $\{a_n\}$ 的下界. 根据 $\sin u \leqslant u, u\in[0,\pi/2]$, 得到

$$
\begin{aligned}
L_n &\geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\frac{2}{(i+1)\pi}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\\
&\geqslant \frac{4}{\pi^2}\left(1+\sum_{i=1}^{2n}\int_i^{i+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \frac{4}{\pi^2}(1+\ln(2n+1))\\
&\geqslant \frac{4}{\pi^2}(\ln n+1+\ln 2).
\end{aligned}
$$

从而

$$
a_n \geqslant -\frac{4+4\ln 2}{\pi^2}.
$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 现在估计 $\{a_n\}$ 的上界. 以下设 $n\geqslant 4$.

$$
L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = L_{n1}+L_{n2}.
$$

其中

$$
L_{n1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\cdot(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}.
$$

$$
L_{n2} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}} \left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} \left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&\leqslant \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi(2n+1)}\int_{1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left(\ln\tan\frac{\pi(n-1)}{4n+2} - \ln\tan\frac{\pi}{4n+2}\right) + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}} \\
&\leqslant \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 5 - \ln\pi) + \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
L_n \leqslant \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 5 - \ln\pi) + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}, n \geqslant 4.
$$

$$
a_n \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{5}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}, n \geqslant 4.
$$

即 $\{a_n\}$ 有上界.

2.1.1 上极限和下极限

定义 2.2 (上、下极限)

以数列极限为例, 对于数列 $\{a_n\}$, 其上下极限依次定义为

$$
\varlimsup_{n\to+\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geqslant n} a_k, \quad \varliminf_{n\to+\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geqslant n} a_k
$$

♣

例题 2.12 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n} > 2$. 证明: $\{x_n\}$ 无界.

证明 令 $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n}$. 取 $\alpha \in (2,\beta)$, 则存在正整数 N, 使得

$$
\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n} > \alpha, \forall n \geqslant N.
$$

记 $\lambda_1 = \frac{\sqrt{4\alpha+1}-1}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{4\alpha+1}+1}{2}$. 则 $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$. 以上不等式可以等价地写成

$$
x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1} > \lambda_1(x_{n+1} + \lambda_2 x_n), \forall n \geqslant N.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1} &> \lambda_1(x_{n+1} + \lambda_2 x_n) \\
&> \lambda_1^2(x_n + \lambda_2 x_{n-1}) \\
&> \cdots \lambda_1^{n-N+1}(x_{N+1} + \lambda_2 x_N), \forall n \geqslant N.
\end{aligned}
$$

注意到 $\lambda_1 > 1$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1}\right) = +\infty$. 故 $\{x_n\}$ 无界.

例题 2.13 设正数序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} \leqslant \frac{x_{n+1}+x_n}{2},\ n=1,2,\cdots$$

求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在

解[13] 易见 $0<x_n\leqslant \max\{x_1,x_2\}$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是

$$L \triangleq \varlimsup_{n\to+\infty} x_n \in [0,+\infty).$$

从而对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 时, 使得当 $n\geqslant N$ 时. $x_n\leqslant L+\varepsilon$. 可以断言

$$x_n \geqslant L-3\varepsilon\,,\quad \forall n\geqslant N+1.$$

否则, 存在 $m\geqslant N+1$ 满足 $x_m<L-3\varepsilon$. 这样就有

$$x_{m+1}\leqslant \frac{x_m+x_{m-1}}{2}\leqslant \frac{L-3\varepsilon+L+\varepsilon}{2}=L-\varepsilon.$$

由此立即可得

$$x_m\leqslant \max\{x_m,x_{m-1}\}\leqslant L-\varepsilon\,,\quad \forall n\geqslant m+1.$$

这与 L 为 $\{x_n\}$ 的上极限矛盾. 从而

$$L-3\varepsilon\leqslant x_n\leqslant L+\varepsilon\,,\quad \forall n\geqslant N+1$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=L$

例题 2.14 设 $0<q<1$, 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$a_n=b_n-qa_{n+1}\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $\{a_n\},\{b_n\}$ 有界. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

解[13] 充分性显然. 下证必要性. 假设 $\{b_n\}$ 收敛. 由于 $\{a_n\}$ 有界, 所以

$$L\triangleq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n\,,\quad \ell\triangleq \varliminf_{n\to+\infty} a_n$$

有限. 另外, 对题中递推公式两边分别取上极限和下极限可得

$$L=\lim_{n\to+\infty} b_n-q\ell,$$
$$\ell=\lim_{n\to+\infty} b_n-qL.$$

两式相减 $L-\ell=q(L-\ell)$. 由于 $q\in(0,1)$, 所以 $L=\ell$. 即 $\{a_n\}$ 收敛.

例题 2.15 设 $\{x_n\}$ 满足

$$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m\cdot x_n\,,\quad \forall m,n\geqslant 1.$$

证明 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 的极限存在.

解[13] 容易得到 $0\leqslant x_n\leqslant x_1^n, \forall n\geqslant 1$. 从而

$$0\leqslant L\triangleq \varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}<+\infty.$$

可以断言

$$\sqrt[n]{x_n}\geqslant L\,,\quad \forall n\geqslant 1. \tag{2.1}$$

不妨设 $x_1>0$. 固定 $m\geqslant 1$, 对于任何 n 有分解 $n=k_nm+\ell_n$, 其中 k_n,ℓ_n 均为整数, $0\leqslant \ell\leqslant m-1$. 则 k_n,ℓ_n 由 n(及 m) 唯一确定, 且当 $n\to+\infty$ 时,

$$\frac{k_n}{n}\to\frac{1}{m}\,,\quad \frac{\ell_n}{n}\to 0.$$

由假设条件, 可得 $x_n\leqslant x_m^{k_n}x_1^{\ell_n}$. 从而

$$L=\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant \lim_{n\to+\infty} x_m^{k_n}x_1^{\ell_n}=x_m^{\frac{1}{m}}.$$

这样 (2.1) 时成立. 从而又有 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}\geqslant L$. 这就证明了

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n},$$

即 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 收敛.

例题 2.16 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n\,,\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^+.$$

证明: 数列 $\{a_n/n\}$ 的极限存在.

解 任意固定 $k\in\mathbb{N}^+$, 则一切不小于 k 的正整数 n 都可以表示成

$$n=mk+l\ (l\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}),$$

这里 m 为正整数. 因此, 由题设条件, 可知

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_{mk+l}}{n}\leqslant\frac{a_{mk}+a_l}{n}\leqslant\frac{ma_k+a_l}{n}\\&=\frac{ma_k}{mk+l}+\frac{a_l}{n}=\frac{a_k}{k+l/m}+\frac{a_l}{n}\end{aligned}$$

因为 k 是固定的, 所以当 $n\to\infty$ 时, $m\to\infty$. 由此可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}\ (k=1,2,3,\cdots).$$

在上式中, 令 $k\to\infty$, 取下极限, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_k}{k}$$

这只能有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

因为 $0\leqslant a_n/n\leqslant a_1(n\in\mathbb{N}^+)$, 所以 $\{a_n/n\}$ 有界. 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/n)$ 存在.

例题 2.17 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x-n^2\ln 2}{\ln n}$

解 *(by ytdwdw) (i)* 易见

$$\lim_{n\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{2}{3}$$

记

$$U(\alpha)=\sup_{x\in(0,\alpha)}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)\quad L(\alpha)=\inf_{x\in(0,\alpha)}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)$$

则

$$\lim_{\alpha\to0^+}U(\alpha)=\lim_{\alpha\to0^+}L(\alpha)=\frac{2}{3}$$

而

$$L(\alpha)\frac{\sin^4 nx}{x}\leqslant\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\leqslant U(\alpha)\frac{\sin^4 nx}{x}\tag{2.2}$$

对任何 $\alpha>0$, 注意到 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^4 nx}{x}\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{3+\cos 4x-4\cos 2x}{8x}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{3}{8x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

这表明对任何 $\beta > \alpha > 0$, 成立

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin^4 nx}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

结合(2.2)得到

$$\begin{aligned}\frac{3L(\alpha)}{8} &\leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{3U(\alpha)}{8},\quad \forall\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

令 $\alpha\to 0^+$ 可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

(ii) 由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \ln 2$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\alpha}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x - n^2\ln 2}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\int_0^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x - n^2\ln 2}{\ln n}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{\int_0^{y\alpha}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x - \ln 2}{y^{-2}\ln y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{\alpha\sin^4(y\alpha)}{(y\alpha)^3}}{y^{-3}(1-2\ln y)} = 0\end{aligned}$$

结合 *(i)-(ii)* 得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x - n^2\ln 2}{\ln n} = \frac{1}{4}$$

2.1.2 柯西极限存在准则

定理 2.1 (Cauchy 审敛原理)

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $m > N, n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

例题 2.18 设数列满足条件: $|a_{n+1}-a_n| < r^n, n = 1,2,\cdots$, 其中 $r\in(0,1)$.
求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 若 $n < m$, 则

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &\leqslant |a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|\\ &\leqslant r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1} = \frac{r^n-r^m}{1-r} < \frac{r^n}{1-r}\end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1-r} = 0$. 于是 $\forall\varepsilon > 0, \exists N, n > N, \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$.
若 $m > n > N$, 就有

$$|a_n-a_m| \leqslant \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$$

由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛.

例题 2.19 对给定的 y 值, 方程 $x-\alpha\cdot\sin x=y$ $(0<\alpha<1)$ 有唯一解

证明 令 $y=x_0$, 且 $x_1=y+\alpha\cdot\sin x_0$, $x_n=y+\alpha\cdot\sin x_{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$. 因为 $|\sin t|<|t|$ 所以对任意自然数 n 及 p, 可知

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\alpha|\sin x_{n+p}-\sin x_n|\\&\leqslant\alpha|x_{n+p-1}-x_{n-1}|\leqslant\alpha^2|x_{n+p-2}-x_{n-2}|\\&\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x_p-x_0|=\alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}|\leqslant\alpha^{n+1}\end{aligned}$$

由于 $0<\alpha<1$, 故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而是收敛列

现在令 $x_n\in\xi$ $(n\to\infty)$, 易知 $\xi=y+\alpha\sin\xi$. 进一步, 若该方程另有一解 $x=\eta$,

则由 $|\eta-\xi|=\alpha|\sin\eta-\sin\xi|\leqslant\alpha|\eta-\xi|$, 可知 $\eta=\xi$

例题 2.20 设 $a_1=a>0, a_2=b>0$, 且满足

$$a_{n+2}=2+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\frac{1}{a_n^2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 (by 白朗)[14] 易见, 恒有 $a_n>2(n\geqslant 3)$. 于是

$$a_n<2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{2},\ n\geqslant 5.$$

从而有 $n\geqslant 6$ 时

$$\begin{aligned}|a_{n+2}-a_{n+1}|&=\left|\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}\right|=\left|\frac{(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1})}{a_{n+1}^2a_{n-1}^2}\right|\\&\leqslant\left|\frac{(a_{n+1}-a_{n-1})\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)}{2^2\times 2^2}\right|=\frac{5}{16}|a_{n+1}-a_{n-1}|\\&\leqslant\frac{5}{16}\Big(|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|\Big).\end{aligned}$$

记 $b_n=|a_{n+1}-a_n|$, 则

$$0\leqslant b_{n+1}\leqslant\frac{5}{16}(b_n+b_{n-1}),\ n\geqslant 6.$$

进一步地, 可得 $n\geqslant 6$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}b_n\leqslant b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n&\leqslant\frac{5}{16}(b_n+b_{n-1})+\frac{1}{2}b_n\\&=\frac{13}{16}b_n+\frac{5}{16}b_{n-1}\leqslant\frac{7}{8}\left(b_n+\frac{1}{2}b_{n-1}\right)\\&\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{7}{8}\right)^{n-5}\left(b_6+\frac{1}{2}b_5\right).\end{aligned}$$

因此有

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant\left(\frac{7}{8}\right)^{n-5}(2b_6+b_5),\ n\geqslant 5.$$

最后, Cauchy 收敛原理确定了数列收敛.

2.1.3 单调有界定理

2.1.3.1 “单调有界”型数列

单调有界定理：单调递减有下界；单调递增有上界。

- 判断单调性：
  1. 直接来比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小, 如: $a_{n+1}-a_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 放缩
  2. 建立递推 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$ 用数学归纳法让符号传递.
  3. 利用导数来判断单调性。
- 判断有界：数学归纳法, Cauchy 不等式, 均值不等式

例题 2.21 设 $\{x_n\}$ 满足：$-1<x_0<0$, $x_{n+1}=x_n^2+2x_n\ (n=0,1,2,\cdots)$,
证明: $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{x\to 0} x_n$

证明 当 $n=0$ 时,

$$x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1\in(-1,0)$$

当 $n=1$ 时,

$$x_2=x_1^2+2x_1=(x_1+1)^2-1\in(-1,0)$$

假设当 $n=k$ 时, $x_{k+1}\in(-1,0)$, 当 $n=k+1$ 时

$$x_{k+2}=x_{k+1}^2+2x_{k+1}=(x_{k+1}+1)^2-1\in(-1,0)$$

由数学归纳法可得 $-1<x_n<0$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$x_{n+1}-x_n=x_n^2+x_n=x_n(x_n+1)<0$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,
记 $\lim\limits_{x\to 0} x_n=A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} x_{n+1}=A$. 故有

$$A=A^2+2A\Longrightarrow A=0 \text{ 或 } A=1$$

由于 $1<x_0<0$ 以及数列 $\{x_n\}$ 单调递减，知 $\lim\limits_{x\to 0} x_n=-1$

注 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2+x_n>1\not\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 递增. 因为 $-1<x_n<0$

例题 2.22 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对 $\forall x\geqslant 1$, 有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$

证明 由题意知 $f'(x)>0$, $\therefore x\geqslant 1$ 时, $\forall f(x)\geqslant 1\Longrightarrow \dfrac{1}{x^2+f^2(x)}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^t f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^t\frac{1}{x^2+f^2(x)}\,\mathrm{d}x<\int_1^t\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以

$$f(t)-f(1)<\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以 $\forall x$

$$f(t)<\arctan t-\frac{\pi}{4}+1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)<1+\frac{\pi}{4}$$

由上式知 $f(x)$ 有上界, 故由单调有界定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

例题 2.23 (数学 III, 2018) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0$, $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$
证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 *(by 向禹)* 首先由 $x_1>0$, $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$ 归纳可知所有 $x_n>0$.

考虑函数 $f(x)=e^x$, 由拉格朗日中值定理可得

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n}\ ,\quad \xi\in(0,x_n).$$

这就说明 $x_n>x_{n+1}>0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\geqslant 0$.

在等式 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 两边取极限得 $xe^x=e^x-1$. 如果 $x>0$, 则 $e^x=\dfrac{e^x-1}{x}<e^x$, 矛盾. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x=0$.

注 $xe^x=e^x-1$ 这个超越方程是不可解的, 不要直接写解得 $x=0$

例题 2.24 求级数: $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!}$

解

$$\int_0^1(1-t)^ne^t\,\mathrm{d}t=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right),\quad n\in\mathbb{N}^+$$

$\{x_n\}_{n\geqslant k}:x_n=\displaystyle\sum_{i=k}^{n}C_i^k\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)$, $k\in\mathbb{N}^+$, 显然 $x_{n+1}-x_n>0$,

$$x_n\leqslant\sum_{i=k}^{n}C_i^k\frac{e}{(i+1)!}\leqslant\sum_{i=k}^{n}\frac{e}{k!(i-k)!}\leqslant\frac{e^2}{k!}$$

由于

$$x_n=\sum_{i=k}^{n}C_i^k\frac{1}{i!}\int_0^1(1-t)^ie^t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-t)^ke^t\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!}\right)\mathrm{d}t$$

且

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!}<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!}=e^{1-t}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-t)^ke^te^{1-t}\,\mathrm{d}t=\frac{e}{(k+1)!}$$

即 $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!}=\frac{e}{(k+1)!}$

例题 2.25 设 $g(x)>0$, $f(x)>0$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^bg(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\int_a^bg(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x}$$

解 令 $a_n=\displaystyle\int_a^bg(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x$, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 注意到

$$a_{n+1}=\int_a^bg(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^bg(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x=Ma_n\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant M$$

即 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 有上界. 由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}a_{n+1}^2&=\left(\int_a^bg(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left((f(x))^{\frac{n+2}{2}}(g(x))^{\frac{1}{2}}\cdot(f(x))^{\frac{n}{2}}(g(x))^{\frac{1}{2}}\right)^2\\&\leqslant a_{n+2}a_n\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

即 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 单调递增. 由单调有界定理, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=M$$

例题 2.26 设 $a_1=\sqrt{1+2015}, a_2=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016}},\cdots,$

$$a_n=\sqrt{\left(1+2015\sqrt{\left(1+2016\sqrt{\left(1+\cdots+(2014+n)\sqrt{1+(2013+n)}\right)}\right)}\right)}$$

求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值

证明 $x\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, 设

$$f_n(x)=\sqrt{\left(1+x\sqrt{\left(1+(x+1)\sqrt{\left(1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)}\right)}\right)}\right)}$$

则

$$f_n(x)=\sqrt{1+xf_{n-1}(x+1)} \tag{2.3}$$

由数学归纳法易得 $f_n(x)\leqslant x+1$, 所以对固定的 x, $\{f_n(x)\}$ 单调递增有上界,
所以 $\{f_n(x)\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 记 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 则

$$F(x)\leqslant x+1,\ F(x)=1+xF(x+1),$$

今往证 $F(x)=x+1$, 因为

$$f_n(x)>\sqrt{x\sqrt{x\cdots\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}=x^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

取极限得 $F(x)\geqslant x$, 设 $b_0=0, b_{n+1}=\dfrac{1+b_n}{2}$, 则当 $F(x)\geqslant x+b_n$ 时, 由 (2.3) 得

$$F(x)=\sqrt{1+x\sqrt{F(x+1)}}\geqslant\sqrt{1+x(x+1+b_n)}\geqslant x+\frac{1+b_n}{2}=x+b_{n+1},$$

即 $F(x)\geqslant x+b_{n+1}$, 所以 $F(x)\geqslant x+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x+1$, 又 $F(x)\leqslant x+1$, 所以 $F(x)=x+1$, 得证一般结论. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=F(2015)=2016$.

定理 2.2 (导数与数列单调性)

对 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$, $x_n\in I$.

1. 若 $f'(x)>0, x\in I$, 则数列 $\{x_n\}$ 单调,
   (a). 当 $x_2>x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调增;
   (b). 当 $x_2<x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调减.
2. 若 $f'(x)<0, x\in I$, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调.

例题 2.27 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 其中 $y_n=1+\dfrac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$, $y_0=1$

证明 易得 $1\leqslant y_n\leqslant 2$, 且因为

$$y_{n+1}=f(y_n)\Longrightarrow f(x)=1+\frac{x}{1+x}\Longrightarrow y'=\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

$y_1-y_0=1+\dfrac{y_0}{1+y_0}-y_0=\dfrac{1}{2}>0\Longrightarrow y_1>y_0$ 故数列 $\{y_n\}$ 单调递增,
或者设 $y_n>y_{n-1}$, 即数列 $\{y_n\}$ 单调递增. 考虑数学归纳法
$y_1-y_0=1+\dfrac{y_0}{1+y_0}-y_0=\dfrac{1}{2}>0\Longrightarrow y_1>y_0$
现假设 $n=k$ 时成立, 即有 $y_k>y_{k-1}$. 当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}y_{k+1}-y_k&=\left(1+\frac{y_k}{1+y_k}\right)-\left(1+\frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}}\right)\\&=\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}}=\frac{y_k-y_{k-1}}{(1+y_k)(1+y_{k-1})}>0\end{aligned}$$

因此由单调有界定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在并记极限为 A, 两边取极限

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{或} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{舍去}$$

例题 2.28 (江西首届高校杯数学联赛) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a > 1$, 且满足递推

$$x_{n+1} = 1 + \ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right), n = 2, 3, \cdots$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值

证明 (by 西西) 先利用数学归纳法证明 $x_n > 1$, 现在假设 $x_n > 1$ 则只需要证明

$$\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right) > 0 \Longleftrightarrow x_n^2 - 1 - \ln x_n > 0$$

考虑函数 $f(x) = x^2 - 1 - \ln x, x > 1$, 易得 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x) > f(1) = 0$

接着证明 $x_n < x_{n+1}$, 那么只要证明

$$x_{n+1} - 1 - \ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right) > 0$$

考虑函数

$$g(x) = x - 1 - 2\ln x + \ln(1+\ln x), x > 1$$

易得

$$g'(x) = \frac{x - 1 + x\ln x - 2\ln x}{x(1+\ln x)}, x > 1$$

考虑函数 $h(x) = x - 1 + x\ln x - 2\ln x, x > 1$, 易得 $g(x) > 0$

或者考虑

$$G(x) = 1 + 2\ln x + \ln(1+\ln x) \Longrightarrow G'(x) = \frac{1+2\ln x}{x(1+\ln x)}$$

利用导数易得 $x(1+\ln x) \geqslant 1 + 2\ln x, x \geqslant 1$, 故有 $0 < G'(x) < 1$

那么有

$$0 < x_{n+1} = G(x_n) = \int_1^{x_n} G'(x)\,\mathrm{d}x + 1 \leqslant 1 + (x_n - 1) = x_n$$

综上知: 数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限值为 A, 有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = A$$

即

$$A = 1 + \ln\left(\frac{A^2}{1+A}\right) \Longrightarrow A = 1$$

2.1.3.2 “不单调有界”型数列

“不单调有界型”数列的处理思路:

- 先求极限再利用此极限迭代证明: $0 < |x_n - A| < k|x_{n-1} - A| < \cdots \to 0$.
- 分奇偶: 可能有单调性;
- 求出数列通项, 如: 差分方程, 迭代法, 不动点法;
- 利用上、下极限处理;
- 利用 Cauchy 审敛原理.
- 利用极限定义. 如: 直接解, 放缩, 分段估计

练习 2.2 设 $0 < p \leqslant 1, x_1 > 0, a > 0, b > 0, x_{n+1} = a + \dfrac{b}{x_n^p}, n \in \mathbb{N}$.

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 令 $f(x)=a+\frac{b}{x^p}, x\in(0,+\infty)$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微, 方程 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解, 记为 x^*. $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n}\}$ 单调递减, 或 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增. 易知, $a<x_n<a+\frac{b}{a^p}, \forall n\geqslant 2$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$ 均存在, 极限值分别记为 A 和 B. 由递推公式知,

$$A=a+\frac{b}{B^p}=f(B), B=a+\frac{b}{A^p}=f(A).$$

以下证明 $A=B(=x^*)$. 事实上, 总有 $f(f(A))=A$, $f(f(B))=B$, $f(f(x^*))=x^*$.
由此易知, 若 $A\neq B$, 则 A, B, x^* 为 g 的三个不同的不动点, 其中 $g(x)=f(f(x))$. 根据 Lagrange 定理, 存在 $0<\xi_1<\xi_2$ 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=1$. 然而

$$g'(x)=f'\big(f(x)\big)f'(x)=\frac{b^2p^2}{(ax+bx^{1-p})^{p+1}}$$

为 $(0,+\infty)$ 上严格减函数 (注意到 $0<p\leqslant 1$), 矛盾. 矛盾说明必有 $A=B$. 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.29 证明数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \cdots$ 收敛, 并求其值.

证明 令 $x_0=\sqrt{7}, x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}, x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, n=0,1,2,\cdots$, 若极限存在, 则易得极限值为 2. 它是方程 $x=f(x)$ 的根, 其中 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$.
根据递推公式, 我们只需证明两个子数列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 的极限都是 2 即可.
由拉格朗日中值定理

$$|f(x)-2|=|f(x)-f(2)|=|f'(\xi)||x-2|\ ,\ \xi\in(2,x)$$

若 $0\leqslant x_n\leqslant 7$, 则

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\cdot\sqrt{7+\xi}}\right|\leqslant\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{14}}\cdot\sqrt{7}}\right|=\alpha<1.$$

由数学归纳法易证对于所有的 n 都有 $0\leqslant x_n\leqslant 7$. 于是

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant\alpha|x_n-2|,$$

从而

$$|x_{2k}-2|\leqslant\alpha^k|x_0-2|\to 0\ ,\quad |x_{2k+1}-2|\leqslant\alpha^k|x_1-2|\to 0\quad (k\to\infty)$$

这表明两个子数列都收敛于 2.

例题 2.30 设 $x_1>x_2>0, x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求极限

证明 由 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, 易得

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}\Longrightarrow x_{n+2}=x_2\sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdots\frac{x_1}{x_2}}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{n+1}}}$$

由于

$$x_2<x_3=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<x_1,\ x_2<x_4=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_3}}<x_3\sqrt{\frac{x_1}{x_3}}=x_3<x_1,$$

推断出 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2k}\}$ 单调递增, 且 $x_2<x_{2k+1}, x_{2k}<x_1$. 应用数学归纳法证明
假设 $x_2<x_{2k-1}<x_{2k-3}, x_{2k-2}<x_{2k}<x_1$, 则

$$x_{2k+1}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k}}}<x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}}=x_{2k-1}>x_2$$

$$x_{2k+2}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k+1}}}>x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}}=x_{2k}<x_1$$

由单调有界定理可知 $\{x_{2k-1}\}, \{x_{2k}\}$ 极限存在. 并且设

$$\lim_{n\to\infty}x_{2k-1}=a\ ,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2k}=b$$

于是由

$$x_{2k-1}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}}\,,\quad x_{2k}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}}$$

两边取极限可得

$$a=x_2\sqrt{\frac{x_1}{b}}\,,\quad b=x_2\sqrt{\frac{x_1}{a}}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{x_1x_2^2}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

例题 2.31 设 $x_1=a\geqslant 0$, $y_1=b\geqslant 0$, 且

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\,,\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)\,,\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

证明 $x_n\geqslant 0$, $y_n\geqslant 0$ 是显然的. 由

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\geqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}\,,$$

得

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_nx_n}=x_n\,,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n\,.$$

知 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少, 又

$$x_n\leqslant y_n\leqslant y_1\,,\ y_n\geqslant x_n\geqslant x_1$$

所以 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 存在.

对 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 两边取极限, 得

$$B=\frac{1}{2}(A+B)\Longrightarrow A=B$$

例题 2.32 (上海交通大学 1991 年竞赛题) 设 $x_1=1, x_2=2$, 且

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证明 令 $y_n=\ln x_n$, 则由 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}$ 得 $y_{n+2}=\dfrac{1}{2}(y_{n+1}+y_n)$, 故

$$\begin{aligned}y_{n+2}-y_{n+1}&=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(y_n-y_{n-1})\\&=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(y_2-y_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2\end{aligned}$$

移项得

$$\begin{aligned}y_{n+2}&=y_{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=y_n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2\\&=\cdots=y_1+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2\right]\\&=\ln 2\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\\&=\ln 2\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2=\dfrac{2}{3}\ln 2$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=\lim_{n\to\infty}e^{y_{n+2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+2}}=2^{\frac{2}{3}}$$

例题 2.33 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=2, y_1=1$, 且满足

$$x_{n+1}=x_n^2+1\,,\quad y_{n+1}=x_ny_n$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 假设极限为 A , 并且证明 $A<\sqrt{7}$

证明 由题设知

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\frac{x_n^2+1}{x_ny_n}=\frac{x_n}{y_n}+\frac{1}{y_{n+1}}$$

由上式知 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 为严格增数列, 且当 $n\geqslant 2$ 时

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+\frac{1}{y_n}=\frac{x_{n-2}}{y_{n-2}}+\frac{1}{y_{n-1}}+\frac{1}{y_n}=\cdots=\frac{x_1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+\cdots+\frac{1}{y_n}\tag{2.4}$$

由条件 $x_{n+1}=x_n^2+1$ 知 $x_{n+1}\geqslant 2x_n$, $n=1,2\cdots$, 从而 $\{x_n\}$ 严格增, 并且
易得 $x_n\geqslant 2^{n-1}x_1=2^n$. 由条件 $y_{n+1}=x_ny_n$ 知, 对 $n\geqslant 2$,

$$\frac{\frac{1}{y_{n+1}}}{\frac{1}{y_{n+1}}}=\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{1}{x_n}$$

容易算出 $x_2=5, y_2=2, y_3=10$ 利用上式知及 $\{x_n\}$ 的单调性知, 对 $n\geqslant 3$,

$$\frac{\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_2}}=\prod_{i=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{y_i}}{\frac{1}{y_{i-1}}}\right)=\prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_{i-1}}\leqslant=\prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

于是在 (2.4) 式中, 当 $n\geqslant 2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{y_n}&\leqslant\frac{x_1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\left(1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right)\\&<\frac{x_1}{y_1}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{y_2}=\frac{2}{1}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=2.625<\sqrt{7}\,(\approx 2.646)\end{aligned}$$

从而由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 并且由极限的保不等式性知此极限 $A<\sqrt{7}$

例题 2.34 设 $a_0=3, a_n=a_{n-1}^2-2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}=\sqrt{5}$

证明 [15]

$$\begin{aligned}a_n^2-4&=(a_n-2)(a_n+2)=a_{n-1}^2(a_{n-1}^2-4)\\&=a_{n-1}^2a_{n-2}^2(a_{n-2}^2-4)\\&=\cdots\\&=a_{n-1}^2a_{n-2}^2\cdots a_0^2(a_0^2-4)=5a_0^2a_1^2\cdots a_{n-1}^2\,,\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n^2-4}}{a_0a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{4}{a_n^2}}}=\sqrt{5}\,.$$

2.1.3.3 “加边型”型数列

“加边型”数列的处理思路:

- Stolz 建立关系式, 再用 Taylor 公式展开, 以 $a_n \sim n^{-\frac{1}{p}}$ 为例.

$$a_n \sim n^{-\frac{1}{p}} \Longleftrightarrow \lim \frac{a_n^{-p}}{n} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim \frac{a_{n+1}^{-p}-a_n^{-p}}{(n+1)-n} = \begin{cases} \xlongequal{a_{n+1}=f(a_n)} \lim a_{n+1}^{-p} - a_n^{-p} \xlongequal{\text{Taylor}} \\ \xlongequal[a_n=f(n)]{a_{n+1}^k-a_n^k=f(n)} \end{cases}$$

- Toeplitz 定理
- 幂级数

练习 2.3 假设 $x_0=1, x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$, 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $x_n-\frac{\pi}{2}=o\left(\frac{1}{n^n}\right)$.

证明 法 I. 先证 $1\leqslant x_n<\frac{\pi}{2}$, 得到 $x_n-x_{n-1}>0$, 由单调有界定理可知 x_n 极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{\pi}{2}$. 用归纳法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=0$. 假设

$$\lim_{n\to\infty} n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\cos x_n-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3\\
&= -\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{3n}}\left[n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)\right]^3=0.
\end{aligned}$$

法 II. 令 $y_n=\frac{\pi}{2}-x_n$, 得到 $y_n=y_{n-1}-\sin y_{n-1}$. 可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n^3}=\frac{1}{6}.$$

因此当 $n>N$ 时, 我们有

$$\frac{y_{n+1}}{y_n^3}<\frac{1}{2}.$$

因此

$$0<y_n<\frac{1}{2}y_{n-1}^3<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3}y_{n-2}^{3^2}<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3+\cdots+3^{n-N-2}}y_{N+1}^{3^{n-N-1}},$$

即

$$0<y_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{(3^{n-N-1}-1)/2}y_{N+1}^{3^{n-N-1}}.$$

例题 2.35 设 $a\geqslant 0, x_0=0, x_{n+1}=\sqrt{x_n+a(a+1)}, n=0,1,2,\cdots$. 计算

$$\lim_{n\to\infty}(a+1)^{2n}(a+1-x_n)$$

证明 (by MSE[2]) 由递推式, 易得

$$x_{n+1}^2=x_n+a(a+1)\Rightarrow(a+1)^2-x_{n+1}^2=(a+1)-x_n$$

[2] https://math.stackexchange.com/questions/779823/sequence-x-n1-sqrtx-naa1

可以化为

$$\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n}=\frac{1}{(a+1)+x_{n+1}}$$

$$2(a+1)\frac{(a+1)-x_{n+1}}{(a+1)-x_n}=\frac{2(a+1)}{(a+1)+x_{n+1}}=1+\frac{(a+1)-x_{n+1}}{(a+1)+x_{n+1}}$$

于是

$$\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n}=\frac{1}{2(a+1)}\left(1+\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1+x_{n+1}}\right)$$

归纳可得

$$a+1-x_i\leqslant\frac{(a+1)-x_0}{(a+1)^i}$$

进而得到

$$a+1-x_n=\frac{1}{2^n(a+1)^n}(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right)$$

即

$$(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right)$$

收敛. 到一个常数 $f(a)\in(0,\infty)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}2^n(a+1)^n(a+1-x_n)=f(a)$$

显然, 我们很容易得到

$$f(a)=\begin{cases}\infty & a>1\\ \dfrac{\pi^2}{4} & a=1\\ 0 & a<1\end{cases}$$

例题 2.36 设 $\{a_n\}$ 为实数列满足 $e^{a_n}+na_n=2$, 求证:

1. $\{a_n\}$ 极限存在.
2. 若非零常数 A,B,C 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A-n^Ba_n)=C$, 求 $A+B+C$.

证明 (by 予一人). (1) 置 $f_n(x):=e^x+nx,(n=1,2,\cdots)$. 显然, 对于每个取定的 n, $f_n'(x)=e^x+n>0$, 这表明 $f_n(x)$ 严格单调递增, 于是 a_n 作为 $f_n(x)=0$ 的根, 显然是唯一的. 此时, 又注意到

$$f_n(0)=1<2,\ f_n\left(\frac{2}{n}\right)=e^{\frac{2}{n}}+2>2,$$

由连续函数的零点定理, 知 $0<a_n<\dfrac{2}{n}$. 令 $n\to\infty$, 由夹逼定理, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
(2) 很显然, 这式子要能成立, 必须先要 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Ba_n=A$. 注意到,

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(2-e^{a_n})=1.$$

若 $B=1$, 则 $A=1$, 于是

$$C=\lim_{n\to\infty}n(1-na_n)=\lim_{n\to\infty}n(e^{a_n}-1)=\lim_{n\to\infty}na_n=1.$$

所以 $A+B+C=3$. 至于其他情形是不可能的, 因为

- 若 $B>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Ba_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{B-1}na_n\to+\infty$, 与 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Ba_n=A$ 矛盾;
- 若 $B<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Ba_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{B-1}na_n=0$. 于是 $A=0$, 这违反了 A 非零的题设条件.

例题 2.37 设函数 $f_n(x)=x^n+nx-2$, 证明: $f_n(x)$ 在 $x>0$ 的范围内仅有一个根 a_n, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

证明 由于

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+n=n(x^{n-1}+1)>0,\quad(x>0)$$

所以函数 $f_n(x)$ 在 $x>0$ 时严格单调增加, 也即 $f_n(x)=0$ 至多有一个根. 并且注意到

$$f_n(0)=-2<0\ ,\quad f(2)=4+2(n-1)\geqslant 4>0,\quad (n\geqslant 1)$$

所以 $f_n(x)$ 有且仅有唯一的正根.

- 当 $n=1$ 时, 有
$$f_n(x)=x+x-2=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow a_1=1$$
- 当 $n>1$ 时, 由 $f_n(x)>f_n(1)=1+n-2>0$, 可知, 函数的根必须在位于 $(0,1)$ 区间内.

根据函数表达式的结构, 尝试探索令 $x=\frac{1}{n}$ 时,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}+1-2=\frac{1}{n^n}-1<0$$

随着 n 增加, 差距减小, 考虑$x=\frac{2}{n}$ 代入, 得

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2^n}{n^n}+2-2=\frac{2^n}{n^n}>0$$

即当 $n\geqslant 2$ 时, 函数的根 $\frac{1}{n}<a_n<\frac{2}{n}$. 于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<(1+a_n)^n<\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

容易计算左边极限为 e, 右边极限为 e^2, 夹逼准则使用失败!

尝试放大 $\frac{1}{n}$ 或者缩小 $\frac{2}{n}$ 减小一个数量级, 比如考察 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}$, 则有

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)&=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-2=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+\frac{1}{n}-1\\&<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1<0\ (n>3)\\f_n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)&=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-2=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n-\frac{2}{n}\\&\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-\frac{2}{n}=-\frac{2}{n^2}<0\end{aligned}$$

所以可以考虑的区间为 $\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}\right],\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$

于是分别求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+1}{n}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{2n-2}{n^2}}=e^2$$

所以由以上分析可知方程的根位于 $\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$ 区间内,

并且可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^2$

例题 2.38 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1\ a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{a_n-\ln n}{\ln n}$

解 *(by 向禹)* 首先由递推式 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$ 显然归纳可得 $a_n>\ln(n+1)$.

因此

$$(a_{n+1}-\ln(n+1))-(a_n-\ln n)=e^{-a_n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0.$$

这说明 $b_n=a_n-\ln n$ 是单调递减的正数列, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 存在. 代入原递推式可得

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}.$$

如果 $b>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$ 时, $b_n>\frac{b}{2}$ 都成立. 则

$$b_{n+1}<b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{1}{n+1}-\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{C}{n}.$$

这里 $C>0$ 为常数. 由调和级数的发散性可知这不可能, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b=0$. 因此

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)b_n+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$nb_{n+1}=(n-1)b_n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=(1+o(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n).$$

这说明 $b_n=\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}n\frac{a_n-\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

练习 2.4 设方程 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的根为 a_n $(n\in N^+)$

(1) 求证: 数列 a_n 是单调递增

(2) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

(3) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-1)=1$

(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\frac{\ln n}{n}\right)=1$ 的值

解 *(by 西西) (1)* 设 $f_n(x)=x^n+x-1$, 则有

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+1=>0,\quad\forall x>0.$$

故函数 $f_n(x)$ 在 $x>0$ 时严格单调增加. 故 $f_n(x)=0$ 至多有一个根. 并注意到

$$f_n(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0,\quad(n\geqslant 1)$$

由零点定理可知 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 之间存在正根. 综上, 可以断言, x_n 唯一, 且 $(\forall n)x_n\in(0,1)$, 数列 $\{x_n\}$ 有界.

$$f_{n+1}(a_{n+1})=0\Longrightarrow(a_{n+1})^{n+1}+a_{n+1}=1$$

$$f_n(a_n)=0\Longrightarrow(a_n)^n+a_n=1$$

那么有

$$a_{n+1}-a_n=a_n^n-a_{n+1}^{n+1}\geqslant a_n^n-a_{n+1}^n$$

若 $a_n>a_{n+1}$ 则上式不成立, 故只能 $a_{n+1}\geqslant a_n$. 即数列 $\{a_n\}$ 单调递增. 由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由极限的保序性, 有 $0\leqslant a\leqslant 1$. 若 $0\leqslant a<1$, 注意到

$$0<a_n^n<a^n\to 0\Rightarrow a_n^n\to 0\quad(n\to\infty),$$

但由于 $a_n^n+a_n=1$, $a_n\to 1(n\to\infty)$, 矛盾. 故而只能是 $a=1$.

(2) 注意到 $0<a_n<1$ 且对任意 $\varepsilon>0$, 我们考虑

$$f_n(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon)^n+(1-\varepsilon)-1=(1-\varepsilon)^n-\varepsilon\to-\varepsilon\to 0,\ n\to\infty$$

故 $1-\varepsilon<a_n<1$, $n\to\infty$. 由于 ε 的任意性, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

(3) 法 *1.* 令 $a_n=1-\varepsilon$, 则有

$$(1-\varepsilon)^n-\varepsilon=0\Longrightarrow n=\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}\approx\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon},\ (\varepsilon\to 0)$$

则我们只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-1)=1\Longleftrightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\frac{\ln x}{\ln(1-x)}}{\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(1-x)}\right)}=1$$

注意到
$$\ln(1-x)=-x+o(x^2)\Longrightarrow x\cdot\frac{\ln x}{\ln(1-x)}=-\ln x+o(\ln x)$$
令 $u=x\cdot\dfrac{\ln x}{\ln(1-x)}$, 则原极限等价于求
$$\lim_{x\to0}\frac{u}{\ln u-\ln x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln u}{u}-\frac{\ln x}{u}}=1$$
法 2. 由于
$$\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\sim\frac{n}{\ln n}\ln\frac{n}{\ln n}=\frac{n}{\ln n}\big(\ln n-\ln\ln n\big)\sim n$$
可得 $\varepsilon\to\dfrac{\ln n}{n}$, $(n\to\infty)$, 所以有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\varepsilon=1$$
(4). 设 $a_n=1-\dfrac{1}{n}(\ln n)b_n$, 则有 $(a_n)^n=1-a_n$ 即 $n\ln a_n=\ln(1-a_n)$, 也就是
$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right)=\ln\left(\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right).$$
注意到 $a_n\to1$ 和 $\ln(1-x)=-x+O(x^2)$ 当 $x\to0$ 时,
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right)=-\frac{1}{n}(\ln n)b_n+o(1/n).$$
由 (3) 知: $b_n\to1,\ln b_n=o(1)$ 则有
$$-(\ln n)b_n+o(1)=\ln\ln n-\ln n+o(1)$$
也就是
$$b_n=1-\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o(1/\ln n),$$
意思是
$$1-a_n-\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln\ln n}{n}=o(1/n),$$
等价于
$$\frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\frac{\ln n}{n}\right)=-1+o(1/\ln\ln n),$$
那么有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\frac{\ln n}{n}\right)=1.$$

练习 2.5 设 $\{a_n\}_{n\geqslant2}$ 为
$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}.$$
显然, 可以证明 $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell-a_n}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

证明 (by ytdwdw[3]) 显然数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 对于一切 n 皆有 $2^n>\ln n$, 故有
$$e^{2^n}>n\qquad(n=1,2,\cdots)$$
这样
$$a_n<\sqrt{e^2+\sqrt{e^{2^2}+\cdots+\sqrt{e^{2^n}}}}<e\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}=\frac{e}{2}(1+\sqrt{5})$$

[3] http://tieba.baidu.com/p/4841341640

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在. 对于 $x \geqslant 1$, 记

$$a_n(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1+\sqrt{x+2+\cdots+\sqrt{x+n-1}}}}\,, \quad \ell(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

易见

$$\ell = \ell(1) = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+\ell(n+1)}}}}\,,$$

$$\sqrt{n} \leqslant \ell(n) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\cdots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}\,,$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\ell(n+1)}}{\sqrt{n}} = 1\,.$$

又记

$$f_n(x) = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+x}}}}\,, \quad x \geqslant -n\,.$$

则存在 $\xi \in (0, \ell(n+1))$ 使得

$$\begin{aligned}\ell - a_n &= f_n(\ell(n+1)) - f_n(0) = f_n'(\xi)\ell(n+1)\\ &= \ell(n+1)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{j+\sqrt{j+1+\cdots+\sqrt{n+\xi}}}}\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)} \leqslant \ell - a_n \leqslant \frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}$$

对于正数列 $\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在, 则由 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln b_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\,.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ell(n)} = 1$$

因此, 由夹逼准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell - a_n} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

例题 2.39 设 $\{x_n\}_{n\geqslant 2}$ 是方程 $x^{-n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x+k)^{-n}$ 的唯一正整数解.

(1) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = A$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{n} - A\right)$ 存在, 并求极限

(3) 若第 2 问得到的极限为 B, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[n\left(\dfrac{x_n}{n} - A\right) - B\right]$ 存在, 并证明该极限值为无理数.

解 *法 I(by 楚坛)*[16]. (1) 对 $\forall b \geqslant 2$, 考虑函数 $\Phi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{x+k}\right)^n$. 易见 $\Phi_n(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的连续增函数. 注意

$$\lim_{x\to 0}\Phi_n(x) = \lim_{x\to 0} x^n\zeta(n) = 0.$$

又

$$\Phi_n(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{x+1}{n-1}\left(\frac{x}{x+k}\right)^n \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

由介值定理知 $\Phi_n(x) = 1$ 存在正根, 再注意到 $\Phi_n(x)$ 的单调性知, 该正根是唯一确定的. 由题设, 它为 x_n, 即 $\Phi_n(x_n) = 1$. 令 $y_n = \frac{x_n}{n}$. 对 $\forall \alpha > 0$, 由几何---代数均值不等式知

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{1}{n+1}\left(n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)+1\right) = 1 + \frac{\alpha}{n+1}.$$

因此

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n < \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{2.5}$$

置 $\alpha = \frac{k}{y_n}$, 即得

$$\left(\frac{x_n}{x_n+k}\right)^n = \left(\frac{ny_n}{ny_n+k}\right)^n > \left(\frac{(n+1)y_n}{(n+1)y_n+k}\right)^{n+1}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x_n+k}\right)^n > \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)y_n}{(n+1)y_n+k}\right)^{n+1}.$$

即 $\Phi_n(x_n) > \Phi_{n+1}((n+1)y_n)$. 因而

$$\Phi_{n+1}(x_{n+1}) = 1 = \Phi_n(x_n) > \Phi_{n+1}((n+1)y_n).$$

因 $\Phi_{n+1}(x)$ 严格增加, 故 $x_{n+1} > (n+1)y_n$, 即 $y_{n+1} > y_n$ 这表明 $\{y_n\}$ 为单调序列. 另一方面, 对 $\forall n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\Phi_n(3n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+k}\right)^n > \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{3n}{3n+k}\right)^n \\ &\geqslant 3\left(\frac{3n}{3n+3}\right)^n = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} > \frac{3}{e} > 1 = \Phi_n(x_n).\end{aligned}$$

从而由 $\Phi_n(x)$ 严格增加 $x_n < 3n$, 故 $y_n < 3$, $\forall n \geqslant 3$. 从而由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. 下面求 A. 对任意 $\lambda > 0$,

$$\Phi_n(\lambda n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{\lambda n+k}\right)^n.$$

记 $a_{n,k} = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n+k}\right)^n$, 在 (2.5) 式中置 $\alpha = \frac{k}{\lambda}$, 即知 $a_{n,k}$ 为关于 n 递减的正数列, 易知

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = e^{-\frac{k}{\lambda}} \triangleq b_k,$$

且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\lambda}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2,k}$ 收敛. 利用命题

命题 2.1

设 $\{a_{n,k}\}$ 为双指标实数列, 并且对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_{n,k} \to b_k$, $n \to +\infty$, 且 $|a_{n,k}| \leqslant a_k$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

立得

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(\lambda n) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\lambda}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}.$$

特别地, 取 $\lambda=\dfrac{1}{\ln 2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n\left(\dfrac{n}{\ln 2}\right)=1=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x_n)$. 对任意 $s>\dfrac{1}{\ln 2}$, 因

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(sn)=\frac{1}{e^{\frac{1}{s}}-1}>1=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x_n)$$

利用极限的保号性知, 存在 N, 对 $\forall n>N$ 均有

$$\Phi_n(sn)>\Phi_n(x_n)\Rightarrow sn>x_n,\quad \forall n>N$$

这表明 $A=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant s$, 因而 $A\leqslant\dfrac{1}{\ln 2}$, 完全类似地可以证明 $A\geqslant\dfrac{1}{\ln 2}$, 故 $A=\log_2 e$.

(2) 由 *(1)* 可见 $x_n<An$. 对 $\Phi_n(x)$ 使用微分中值定理知, 存在 $\xi_n\in(x_n,An)$, 使

$$\Phi_n(An)-\Phi_n(x_n)=\Phi_n'(\xi_n)(An-x_n). \tag{2.6}$$

计算可知,

$$\Phi_n'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{x+k}\right)^{n-1}\frac{k}{(x+k)^2}$$

将 $x=An$ 代入, 得

$$\Phi_n'(An)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{An}{An+k}\right)^{n-1}\frac{kn^2}{(An+k)^2}\sim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{A^2}e^{-\frac{k}{A}},\quad n\to\infty.$$

类似地, 将 $x=\xi_n$ 代入, 注意到 $x_n<\xi_n<An$, 同样有

$$\Phi_n'(\xi_n)\sim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{A^2}e^{-\frac{k}{A}}=\frac{2\ln^2 2}{n},\quad n\to\infty. \tag{2.7}$$

将 $\Phi_n(x_n)=1$ 代入 (2.6) 式可知

$$An-x_n=\frac{\Phi_n(An)-1}{\Phi_n'(\xi_n)}. \tag{2.8}$$

(2.7) 式中已经得到了 $\Phi_n'(\xi_n)$ 关于 n 的阶, 我们只需再求出上式中分子 $\Phi_n(An)-1$ 关于 n 的阶即可. 而

$$\Phi_n(An)-1=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{An}{An+k}\right)^n-\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{A}}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{A}}b_{n,k},$$

其中

$$\begin{aligned}
b_{n,k}=e^{\frac{k}{A}}\left(\frac{An}{An+k}\right)^n-1&=\exp\left\{\frac{k}{A}+n\ln\left(1-\frac{k}{An+k}\right)\right\}-1\\
&=\exp\left\{\frac{k}{A}+\frac{kn}{An+k}-\frac{n}{2}\left(\frac{k}{An+k}\right)^2+O(\frac{1}{n^2})\right\}-1\\
&=\exp\left\{\frac{k^2}{2A^2n}+O(\frac{1}{n^2})\right\}-1=\frac{k^2}{2A^2n}+O(\frac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

因此

$$\Phi_n(An)-1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{A}}\frac{k}{2A^2}+O(\frac{1}{n^2})=\frac{3\ln^2 2}{n}+O(\frac{1}{n^2}). \tag{2.9}$$

最后, 将 (2.7),(2.9) 两式结果代入 (2.8), 即得

$$\lim_{n\to\infty}(An-x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\ln^2 2}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{\frac{2\ln^2 2}{n}}=\frac{3}{2}.$$

即 $B=-\dfrac{3}{2}$.

(3) 此问要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\big(x_n-An-B\big)$ 存在, 我们还是采用类似于 *(2)* 中的方法, 首先, 由微分中值定理知, 存在 η_n 介于 x_n 与 $An+B$ 之间, 使

$$\Phi_n(x_n)-\Phi_n(Ax_n+B)=\Phi_n'(\eta_n)(x_n-An-B).$$

类似于 (2) 中讨论

$$\Phi_n'(\eta_n) \sim \frac{2\ln^2 2}{n}, \quad n \to \infty.$$

而

$$\Phi_n(An+B) - \Phi_n(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{An+B}{An+B+k}\right)^n - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{A}} c_{n,k},$$

其中

$$\begin{aligned}
c_{n,k} &= e^{\frac{k}{A}}\left(\frac{An+B}{An+B+k}\right)^n - 1 \\
&= \exp\left\{\frac{k}{A} + n\ln\left(1 - \frac{k}{An+B+k}\right)\right\} - 1 \\
&= \exp\left\{\frac{k}{A} + \frac{kn}{An+B+k} - \frac{n}{2}\left(\frac{k}{An+B+k}\right)^2 + \frac{n}{3}\left(\frac{k}{An+B+k}\right)^3 + O(\frac{1}{n^3})\right\} - 1 \\
&= \exp\left\{\frac{k(k+2B)}{2A^2 n} + \frac{3kB^2 + 6k^2 B + 2k^3}{3A^3 n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right\} - 1 \\
&= \frac{k(k+2B)}{2A^2 n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{3kB^2 + 6k^2 B + 2k^3}{3A^3} + \frac{k^2(k+2B)^2}{8A^4}\right) + O(\frac{1}{n^3}).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\Phi_n(An+B) - \Phi_n(x_n) \\
=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{A}}\frac{k(k+2B)}{2A^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{A}}\left(\frac{3kB^2 + 6k^2 B + 2k^3}{3A^3} + \frac{k^2(k+2B)^2}{8A^4}\right) + O(\frac{1}{n^3}) \\
=&\frac{1}{n^2}\left(2\frac{B^2}{A^3} + 6\frac{2B}{A^3} + 26\frac{2}{3A^2} + 150\frac{1}{8A^4} + 26\frac{B}{2A^4} + 6\frac{B^2}{2A^4}\right) + O(\frac{1}{n^3}) \\
=&\frac{1}{n^2}\left(\frac{23}{6}\ln^3 2 + 6\ln^4 2\right) + O(\frac{1}{n^3}).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\big(x_n - An - B\big) &= -\lim_{n\to\infty} n\frac{\Phi_n(An+B) - \Phi_n(x_n)}{\Phi_n'(\eta_n)} \\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{23}{6}\ln^3 2 + 6\ln^4 2\right) + O(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n}\cdot\frac{2\ln^2 2}{n}} = -\frac{23}{12}\ln 2 - 3\ln^2 2.
\end{aligned}$$

显然该极限值为无理数.

法 II(by 逆逆)[17]. 方程

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^n}$$

等价于

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^n}{(x+k)^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{-n}$$

因为右边关于 x 单调递增, 所以关于 x 有唯一正数解. 首先根据 $1 + \dfrac{k}{x} \leqslant e^{\frac{k}{x}}$ 可得

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{kn}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{n}{x}} - 1}.$$

于是有 $\dfrac{n}{x} \geqslant \ln 2$. 根据恒等式

$$a^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{-n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-(1+\frac{k}{x})t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}e^t}{e^{\frac{t}{x}}-1}\,\mathrm{d}t.$$

令 $\alpha=n-1$, $y=\frac{\alpha}{x}=\frac{n-1}{x}\geqslant\frac{n}{2x}\geqslant\frac{\ln 2}{2}$, $(n\geqslant 2)$, 那么变量代换可得原方程等价于

$$\frac{\alpha^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{(te^{-t})^{\alpha}}{e^{ty}-1}\,\mathrm{d}t=1.$$

因为函数 te^{-t} 在 $t=1$ 时取最大值, 所以 $\alpha\to+\infty$ 时积分的主要部分将会集中在 $t=1$ 附近. 取正常数 $\delta<\frac{1}{e}$, 我们有

$$\int_0^{\delta}\frac{(te^{-t})^{\alpha}}{e^{ty}-1}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\delta}\frac{t^{\alpha}}{ty}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{y}\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\delta^{\alpha}}{y\alpha}\ll\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}.$$

根据 *Stirling* 公式可得 $\frac{\alpha^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha)}\sim\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{\alpha}$, 于是

$$\frac{\alpha^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{(te^{-t})^{\alpha}}{e^{ty}-1}\,\mathrm{d}t=1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\delta e)^{\alpha}\Big),$$

即在 $t=0$ 附近分母较小的地方不会有很大的贡献. 当 $t\geqslant\delta$ 时, 函数 $\frac{1}{e^{ty}-1}\leqslant\frac{1}{e^{\frac{\ln 2}{2}\delta}-1}$ 有界, 于是

$$\int_{[\delta,1-\varepsilon]\cup[1+\varepsilon,+\infty]}t^m(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t\ll\int_{|1-t|\geqslant\varepsilon}(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\varepsilon^6}\int_0^{+\infty}(1-t)^6(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

根据 $\int_0^{+\infty}t^m(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\alpha^{1+\alpha+m}}$, 可得

$$\int_0^{+\infty}t^m(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\left(\frac{15}{\alpha^3}+\frac{340}{\alpha^4}+\frac{720}{\alpha^5}\right)\ll\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\alpha^{-3},$$

于是

$$\frac{\alpha^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{(te^{-t})^{\alpha}}{e^{ty}-1}\,\mathrm{d}t=1+O(\alpha^{-3}),$$

即积分的主要部分集中在 $t=1$ 附近. 在 $t=1$ 附近用 $\frac{1}{e^y-1}$ 近似代替 $\frac{1}{e^{ty}-1}$, 可得

$$\frac{1}{e^y-1}=1+o(1),$$

也即 $y=\ln 2+o(1)$. 根据 *Taylor* 公式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{ty}-1}&=\frac{1}{e^y-1}+\frac{ye^y}{(e^y-1)^2}(1-t)+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^3}(1-t)^2\\&\quad+\frac{y^3e^y(4e^y+e^{2y}+1)}{6(e^y-1)^4}(1-t)^3+\frac{y^4e^y(11e^y+11e^{2y}+e^{3y}+1)}{24(e^y-1)^5}(1-t)^4\\&\quad+\frac{y^5e^y(26e^y+66e^{2y}+26e^{3y}+e^{4y}+1)}{120(e^y-1)^6}(1-t)^5+O\big((1-t)^6\big).\end{aligned}$$

首先根据 $\int_0^{+\infty}t^m(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\alpha^{1+\alpha+m}}$, 可得

$$\int_0^{+\infty}(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}},$$

$$\int_0^{+\infty}(1-t)(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\Big(-\frac{1}{\alpha}\Big),$$

$$\int_0^{+\infty}(1-t)^2(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}\Big),$$

$$\int_0^{+\infty}(1-t)^3(te^{-t})^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\Big(-\frac{5}{\alpha^2}-\frac{6}{\alpha^3}\Big)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\Big(-\frac{5}{\alpha^2}+O(\alpha^{-3})\Big),$$

$$\int_0^{+\infty}(1-t)^4(te^{-t})^\alpha\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\left(\frac{3}{\alpha^2}+\frac{26}{\alpha^3}+\frac{24}{\alpha^4}\right)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\left(\frac{3}{\alpha^2}+O(\alpha^{-3})\right),$$
$$\int_0^{+\infty}(1-t)^5(te^{-t})^\alpha\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\left(-\frac{35}{\alpha^3}-\frac{154}{\alpha^4}-\frac{120}{\alpha^4}\right)\ll\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\alpha^{-3},$$
$$\int_0^{+\infty}(1-t)^6(te^{-t})^\alpha\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\left(\frac{15}{\alpha^3}+\frac{340}{\alpha^4}+\frac{720}{\alpha^4}\right)\ll\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{1+\alpha}}\alpha^{-3},$$

将 $\frac{1}{e^{ty}-1}$ 的 Taylor 展开取为前四项加上余项 $O\big((1-t)^4\big)$, 可得

$$\frac{1}{e^y-1}-\frac{ye^y}{(e^y-1)^2}\alpha^{-1}+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^3}\alpha^{-1}=1+O(\alpha^{-2}).$$

两边同乘以 e^y-1 可得

$$e^y-1=1-\frac{ye^y}{e^y-1}\alpha^{-1}+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^2}\alpha^{-1}+O(\alpha^{-2}).$$

再根据 $y=\ln 2+o(1)$ 有

$$e^y-1=1+\big(-2\ln 2+3(\ln 2)^2\big)\alpha^{-1}+O(\alpha^{-1}).$$

也即

$$y=\ln 2+\left(-\ln 2+\frac{3}{2}(\ln 2)^2\right)\alpha^{-1}+O(\alpha^{-1}).$$

将 $\frac{1}{e^{ty}-1}$ 的 Taylor 展开取为前六项加上余项 $O\big((1-t)^6\big)$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{e^y-1}-\frac{ye^y}{(e^y-1)^2}\alpha^{-1}+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^3}(\alpha^{-1}+2\alpha^{-2})\\&\quad-\frac{y^3e^y(4e^y+e^{2y}+1)}{6(e^y-1)^4}5\alpha^{-2}+\frac{y^4e^y(11e^y+11e^{2y}+e^{3y}+1)}{24(e^y-1)^5}3\alpha^{-2}=1+O(\alpha^{-3}).\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}e^y-1=1&+\left(-\frac{ye^y}{e^y-1}+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^2}\right)\alpha^{-1}\\&+\left(6(\ln 2)^2-\frac{65}{3}(\ln 2)^3+\frac{75}{4}(\ln 2)^4\right)\alpha^{-2}+O(\alpha^{-2}).\end{aligned}$$

再根据 $y=\ln 2+\big(-\ln 2+\frac{3}{2}(\ln 2)^2\big)\alpha^{-1}+o(\alpha^{-1})$ 可得

$$\begin{aligned}&-\frac{ye^y}{e^y-1}+\frac{y^2e^y(e^y+1)}{2(e^y-1)^2}\\=&\big(-2\ln 2+3(\ln 2)^2\big)+(-2+8\ln 2-7(\ln 2)^2)(y-\ln 2)+o(\alpha^{-1})\\=&\big(-2\ln 2+3(\ln 2)^2\big)+\left(2\ln 2-11\big(\ln 2\big)^2+19(\ln 2)^3-\frac{21}{2}(\ln 2)^4\right)\alpha^{-1}+o(\alpha^{-1}).\end{aligned}$$

于是有

$$e^y-1=1+\big(-2\ln 2+3(\ln 2)^2\big)\alpha^{-1}+\left(2\ln 2-5(\ln 2)^2-\frac{8}{3}(\ln 2)^3+\frac{33}{4}(\ln 2)^4\right)\alpha^{-2}+O(\alpha^{-2}).$$

也即

$$y=\ln 2+\left(-\ln 2+\frac{3}{2}(\ln 2)^2\right)\alpha^{-1}+\left(\ln 2-3(\ln 2)^2+\frac{1}{6}(\ln 2)^3-3(\ln 2)^4\right)\alpha^{-2}+O(\alpha^{-2}).$$

因此

$$\begin{aligned}x=\frac{\alpha}{y}&=\frac{\alpha}{\ln 2}\left(1+\left(-1+\frac{3}{2}\ln 2\right)\alpha^{-1}+\left(1-3\ln 2+\frac{1}{6}(\ln 2)^2-3(\ln 2)^3\right)\alpha^{-2}+o(\alpha^{-2})\right)^{-1}\\&=\frac{\alpha}{\ln 2}+\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2\ln 2}+\frac{3}{2}+\frac{23}{24}\ln 2+3(\ln 2)^2\right)\alpha^{-1}+o(\alpha^{-1})\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{\ln 2} - \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2\ln 2} + \frac{3}{2} + \frac{23}{24}\ln 2 + 3(\ln 2)^2 \right) n^{-1} + o(n^{-1})$$

注：此答案方法应该是没毛病的，但最终结果是错的，懒得验证了.

2.1.4 Toeplitz 定理和 Stolz 定理

定理 2.3 (Toeplitz 定理)

设 $n,k \in \mathbb{N}, t_{nk} \geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = a$

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, $\exists M > 0$, 使 $|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 固定 N_1, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$.
故 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$0 \leqslant t_{nk} \leqslant \frac{\varepsilon}{2N_2 M}, \ k = 1, 2, \cdots, N_2.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 利用等式 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$ 有

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k - a \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} t_{nk} (a_k - a) \right| \\
&\leqslant t_{n1}|a_1 - a| + \cdots + t_{nN_1}|a_{N_1} - a| + t_{nN_1+1}|a_{N_1+1} - a| + \cdots + t_{nn}|a_n - a| \\
&< M(t_{n1} + \cdots + t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1} + \cdots + t_{nn}) \\
&\leqslant M \cdot N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_1 M} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = a$

例题 2.40 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足

1. $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty, (n \to +\infty)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s$

解 设 $t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$. 显然 $t_{nk} > 0$, 且

$$\sum_{k=0}^{n} t_{nk} = 1, \ \lim_{n\to+\infty} t_{nk} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 0$$

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \left(b_0 \frac{a_0}{b_0} + b_1 \frac{a_1}{b_1} + \cdots + b_n \frac{a_n}{b_n} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \cdot \frac{a_k}{b_k} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} t_{nk} \frac{a_k}{b_k} \xlongequal{Topelitz} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = s
\end{aligned}$$

例题 2.41 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$$

解 设 $t_{nk}=\dfrac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$, $k=1,2,\cdots,n$, $n=1,2,\cdots$, 则 $t_{nk}>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$. 再由 $p_k>0\Rightarrow p_1+p_2+\cdots+p_n>p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}$. 于是

$$0<t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}}\to 0\ (n\to\infty)$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$.

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 可知 $\exists M>0$, s.t. 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $|a_n-a|<M$. 同时, 对任意的 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

固定 N_1, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$ 可知 $\exists N_2\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2N_1M},\ k=1,2,\cdots,N_1$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}t_{nk}|a_k-a|<M(t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn})<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$

例题 2.42 (武大,2011) 已知数列 $\{a_n\}$ 非负且单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=b$$

解 设 $t_{nk}=\dfrac{a_{n-k+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, $k=1,2,\cdots,n$, $n=1,2,\cdots$, 则 $t_{nk}>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$. 再由 $a_n\geqslant 0, a_n\leqslant a_{n-1}\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{n-k+1}\geqslant(n-k+1)a_{n-k+1}$. 于是

$$0\leqslant t_{nk}\leqslant\frac{a_{n-k+1}}{(n-k+1)a_{n-k+1}}=\frac{1}{n-k+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$.

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 可知 $\exists M>0$, s.t. 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $|b_n-b|<M$. 同时, 对任意的 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

固定 N_1, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$ 可知 $\exists N_2\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2N_1M},\ k=1,2,\cdots,N_1$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-b\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}b_k-b\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}b_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}b\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}t_{nk}|b_k-b|<M(t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn})<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=b$

例题 2.43 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt{n+1-k}}$.

解 (by Love Raz[4]) 令 $t_{n,k}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n+1-k}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{n,k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}-\frac{k}{n}}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=1$$

$$\lim_{n\to\infty}t_{n,k}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n+1-k}}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt{n+1-k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2t_{n,k}\sqrt[k]{k}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt[n]{n}=2$$

定理 2.4 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式)

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 且 $\{x_n\}$ 严格增.
如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\ (\text{实数},\ +\infty,\ -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

证明 [18] 令 $a_n=y_n-y_{n-1}, b_n=x_n-x_{n-1}$, 其中 $y_0=0=x_0$. 于是 $b_n>0$. 令

$$t_{nm}=\frac{b_m}{b_1+b_2+\cdots+b_n},\quad m=1,2,\cdots,n$$

则 $t_{nm}>0$, 且

$$t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nm}=\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}t_{nm}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_m}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_m-x_{m-1}}{x_n}=0$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{b_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(t_{n1}\cdot\frac{a_1}{b_1}+\cdots+t_{nn}\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)\\&\xlongequal{\text{Toeplitz}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\end{aligned}$$

例题 2.44 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)}{n^3}\\&\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3-(n-1)^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{3n^2-3n+1}\end{aligned}$$

[4] https://www.zhihu.com/question/430337363/answer/1576311333

$$= \frac{1}{6}$$

例题 2.45 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)个1}}{10^n}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)个1}}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} 10^i}{10^n} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+1} 10^i}{10^{n+1}-10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+2}-1}{10-1}}{10^n(10-1)} = \frac{100}{81}$$

例题 2.46 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} - \ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum\limits_{k=0}^{n+1} \ln k}{2n+1}$$

$$\xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}$$

例题 2.47 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

证明 记

$$x_n = \left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

取对数

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\ln \frac{2}{2^2-1} + 2\ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right)$$

因为 $2^{n-1} \to +\infty$ 应用 Stolz 定理, 得

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = -\ln 2$$

例题 2.48 求极限: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\dfrac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

解 记

$$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

取对数

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{4}{7} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{3} + 2\ln\frac{4}{7} + \cdots + 2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)$$

应用 *Stolz* 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = \ln\frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

例题 2.49 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2011}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$

解 根据推广的积分第一中值定理, 对每个正整数 $n\exists\ \theta_n\in(0,1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = ((2n+\theta_n)\pi)^{2010}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

由此得

$$\begin{aligned}&\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ &= ((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010}))\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ &= ((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010}))\left(\frac{\cos 5x}{80}-\frac{\cos 3x}{48}-\frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\\ &= \frac{4}{15}((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010}))\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

另外

$$(2n+1)^{2011}-(2n-1)^{2011} = 4022(2n)^{2010}+o(n^{2010})\ \ (n\to\infty)$$

根据 *Stolz* 定理

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2011}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x}{(2n+1)^{2011}-(2n-1)^{2011}}\\ &= \frac{2}{30165}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^{2010}+o(n^{2010})}{(2n)^{2010}+o(n^{2010})}\\ &= \frac{2\pi^{2010}}{30165}\end{aligned}$$

此题的更一般结果为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^p\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{2\pi^p}{15(p+1)}(p>0)$$

练习 2.6 (知乎, 479655650) 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)\ln(k+2)}$.

解 法 I(by 予一人)[19] 首先, 通过倒序作和, 有

$$s_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)\ln(k+2)} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\ln(n-k+3)},$$

其次

$$\begin{aligned}\left|s_n-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\ln(n+2)}\right| &= \frac{1}{\ln(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\ln(n-k+3)}\ln\left(1+\frac{k-1}{n-k+3}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n-k+3)\ln(n-k+3)}\\ &= \frac{1}{\ln(n+2)}\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k\ln k}.\end{aligned}$$

依 *Stolz* 定理, 可以求得这末式极限为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k\ln k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n+2)\ln(n+2)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)\ln(n+2)}=0,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\ln(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}=1.$$

练习 2.7 对 $n\in\mathbb{N}_+$, 定义

$$S_n=1+\frac{n-1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}+\cdots+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2n}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\pi}{2}$

解 *(by AoPs)*[20] *First, we simplify the expression for* S_n*:*

$$\begin{aligned}S_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k+1)}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!/(n-k-1)!}{(n+k+1)!/(n+1)!}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!}\\ &= (n+1)!(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{n-k-1}\\ &= \frac{1}{\binom{2n}{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\\ &= \frac{1}{\binom{2n}{n+1}}\cdot\frac{1}{2}\left[\left[\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\right]-\binom{2n}{n}\right]\\ &= \frac{1}{2\binom{2n}{n+1}}\left[2^{2n}-\binom{2n}{n}\right]\end{aligned}$$

$$S_n = \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\binom{2n}{n+1}}$$

Then, we hammer at the resulting expression with Stirling's approximation:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\sqrt{n}\binom{2n}{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{(2n)!}{n!n!}}{2\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}}{2\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(n)^{n}\sqrt{2\pi n}(n)^{n}}}{2\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{(2n)^{2n}}{\sqrt{\pi n}(n)^{2n}}}{\left(\frac{2\sqrt{n}\sqrt{n}(2n)^{2n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}}{\left(\frac{(2n)^{2n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\left(2^{2n} - \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)}{\frac{(2n)^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}2^{2n}\left(\sqrt{\pi n}-1\right)}{(2n)^{2n+1}\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\pi n}-1\right)}{2n^{2n+\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n+\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}{2n^{2n+\frac{3}{2}}} \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}
\end{aligned}$$

定理 2.5 ($\frac{\bullet}{\infty}$ 型 Stolz 公式)

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (注意: 不必 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$). 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \text{ (实数, } +\infty\text{, } -\infty\text{)},$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

笔记 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$ 时, $\{x_n\}$ 严格增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 时, 并不能推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\infty$$

反例: $x_n=n$, $y_n=\left[1+(-1)^n\right]n^2$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}\neq\infty$

定理 2.6 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 公式)

设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\ (\text{实数},\ +\infty,\ -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

例题 2.50 设 $x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall n\geqslant1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

证明 法 I. 由数学归纳法可得 $0<x_n<1,\forall n\geqslant1$, 故 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$, 由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n(1-x_n)\Rightarrow a=a(1-a)\Rightarrow a=0\text{ 或 }a=1(\text{舍去})$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)\xlongequal{\text{通分}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1,$$

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=1.$$

法 II. 首先由归纳法容易证明:

$$x_n<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n>\frac{n-1}{n}.$$

因而 $\{nx_{n+1}\}$ 是递增数列, 且

$$nx_{n+1}<\frac{n}{n+1}<1.$$

这意味着 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_{n+1}$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$ 存在. 我们假设

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\beta\leqslant1.$$

用反证法, 如果 $\beta<1$, 我们取 $\lambda=\frac{\beta+1}{2}<1$, 则存在充分大的 k 使得

$$\forall\, n\geqslant k:\quad x_n<\frac{\lambda}{n}\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant1-\frac{\lambda}{n}.$$

并且

$$\log\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\geqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\frac{\lambda}{n},\quad\forall\, n\geqslant k.$$

所以

$$\frac{x_m}{x_k}\geqslant\prod_{n=k}^{m-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\Rightarrow x_m\geqslant x_k\exp\left\{-\frac{\lambda+1}{2}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{n}\right\}.$$

可知

$$\lim_{m\to\infty}mx_m=+\infty.$$

得到矛盾. 所以 $\beta=1$.

笔记[21](by maorenfeng88) 考虑 $p>0$ 的情况，套路如下：
已知 $a_{n+1}=f(a_n)$ 和 a_1，证明 a_n 与 $n^{-\frac{1}{p}}$ 同阶。

1. 第一步，证明 $a_n\to 0$。(根据要证的结果可以看出，这个肯定是对的。)
2. 第二步，把 $n^{-\frac{1}{p}}$ 次数去掉，然后用 stolz：$\lim\frac{a_n^{-p}}{n}=\lim\frac{a_{n+1}^{-p}-a_n^{-p}}{(n+1)-n}$.
3. 第三步，把 $a_{n+1}=f(a_n)$ 代入，并利用归结原则换元 $a_n=t$：$\lim\frac{a_{n+1}^{-p}-a_n^{-p}}{(n+1)-n}=\lim\limits_{t\to 0}[f^{-p}(t)-t^{-p}]$

例题 2.51 设 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$, 令 $x_n=\sin x_{n-1}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\frac{nx_n^2}{3}\right)=\frac{3}{5}$

解 (1) 由数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界. 由 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$, 得

$$0<x_1=\sin x_0<x_0<\frac{\pi}{2};$$

假设 $n=k$ 时, 有 $0<x_k<\frac{\pi}{2}$ 成立. 当 $n=k+1$ 时,

$$0<x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\frac{\pi}{2},$$

所以 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 且易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 由 Stolz 定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$, 我们有 $\sin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. 由 (1) 知, 数列 $\{1/x_n^2\}$ 单调增加且趋向于正无穷大.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n^2}\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{1/x_n^2-1/x_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{(x_{n-1}-\sin x_{n-1})(x_{n-1}+\sin x_{n-1})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^2}{(x-\sin x)(x+\sin x)}\xlongequal{tayor}3\end{aligned}$$

(3) 求原极限. 由泰勒公式可得 $\sin^2 x=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}x^6+o(x^6)$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\frac{nx_n^2}{3}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^2}{\ln n}\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)\xlongequal{nx_n^2=3}3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)\\&\xlongequal{Stolz}3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln(n+1)-\ln n}\\&\xlongequal{通分}3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3x_n^2-3x_{n+1}^2-x_n^2x_{n+1}^2}{3x_n^2x_{n+1}^2}\right)\\&=3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3x_n^2-3\sin^2 x_n-x_n^2\sin^2 x_n}{3x_n^2\sin^2 x_n}\right)\\&\xlongequal{泰勒展开}3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{1}{5}x_n^6+o(x_n^6)}{3x_n^4}\right)\\&=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}n\left(x_n^2+o(x_n^2)\right)=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

例题 2.52 设 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{1}{\ln a_n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n\ln a_n}{n}$ 存在并求其值.

证明 (by 予一人) 归纳可证 $(\forall n)a_n>1$, 于是 $a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{1}{\ln a_n}>a_{n+1}\Rightarrow\{a_n\}\nearrow$, 所以这序列或是收敛于有限极限, 或是发散到正无穷。

- 假设序列收敛于有限极限, 设 $a_n\to a<+\infty$, 则

$$a=a+\frac{1}{\ln a}\Rightarrow\frac{1}{\ln a}=0\Rightarrow a\text{ 无实数解}\Rightarrow\text{假设不成立.}$$

于是只能成立后者, 即 $a_n \to +\infty$. 现在, 可以证明 $\ln a_{n+1} \sim \ln a_n$. 这是因为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n + \ln\left(1+\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}\right)}{\ln a_n} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}\right)}{\ln a_n} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}}{\ln a_n} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n \ln a_{n-1} \ln a_n} \\
&= 1 + 0 = 1.
\end{aligned}$$

于是, 再依 Stolz 定理, 即有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \ln a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\ln a_{n+1} - a_n \ln a_n}{(n+1)-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\ln a_{n+1} - a_n \ln a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{\ln a_{n-1}}\right)\left[\ln a_n + \ln\left(1+\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}\right)\right] - a_n \ln a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{\ln a_{n-1}}\right) \ln\left(1+\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}\right) + \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{\ln a_{n-1}}\right) \ln\left(1+\frac{1}{a_n \ln a_{n-1}}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{\ln a_{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{a_n \ln a_{n-1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} \\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

例题 2.53 (AMM12079) 设 $x_1 \in (0,1)$. 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+x_k)\,,\ \forall n \geqslant 1$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln n$

解 显然有 $\forall n \geqslant 1$, $x_n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+x_k) = \frac{1}{n}\left((n-1)\times\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+x_k) + \ln(1+x_n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\Big((n-1)x_n + \ln(1+x_n)\Big) \leqslant x_n
\end{aligned}$$

综上, $\{x_n\}$ 单调递减有下界 0. 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k) \xlongequal{\text{Cauchy 命题}} \lim_{n\to\infty} \ln(1+x_n)$$

从而易得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1/x_n} &\xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{n(x_n - x_{n+1})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\big((n-1)x_n + \ln(1+x_n)\big)x_n}{x_n - \ln(1+x_n)} = 2
\end{aligned}$$

例题 2.54 (AMM12084) 设 $0 < x_0 < \pi$. 且

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x_k), \forall n \geqslant 1$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{\ln n}$.

解 由递推关系式有

$$x_{n+1}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x_k)+\sin(x_n)}{n+1}=\frac{nx_n+\sin(x_n)}{n+1}$$

又 $0<x_0<\pi$, 从而

$$0<x_{n+1}<\frac{nx_n+x_n}{n+1}<x_n$$

故由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n+\sin(x_n)}{n+1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=l=0$$

由 *Taylor* 公式可得

$$x_{n+1}=\frac{nx_n+x_n-\frac{x_n^3}{6}+o(x_n^3)}{n+1}=x_n\left(1-\frac{x_n^2}{6(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right)$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}^2}&=\frac{1}{x_n^2}\left(1-\frac{x_n^2}{6(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right)^{-2}\\&=\frac{1}{x_n^2}\left(1+\frac{x_n^2}{3(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{x_n^2}+\frac{1}{3(n+1)}+\frac{o(1)}{n+1}\end{aligned}$$

由 *Stolz* 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\sqrt{\ln n})^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{x_n^2}}\overset{Stolz}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{3(n+1)}+\frac{o(1)}{n+1}}=3$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\sqrt{\ln n}=\sqrt{3}$.

练习 2.8 $a_n>0$, 且$a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n\geqslant 1)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$

证明 假设 $0<a_n<M$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow a_n-a_1=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant 2\frac{n-1}{M}$$

令 $n\to+\infty$, a_n 无界, 与假设矛盾! 显然 a_n 严格单调递增, 故 $a_n\to+\infty(n\to+\infty)$

将 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2+\frac{1}{a_{n+1}^2}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+4$$

从而

$$a_n+\frac{1}{a_n}=\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}$$

用 Stolz 公式, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}+\frac{1}{a_{n+1}}}=1$$

例题 2.55 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}(a_n-\sqrt{2n})$

解 *(by ytdwdw)* 首先, a_n 为正, 且严格单调增加. 用反证法立即得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. 所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{n} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{a_n^2}\right)=2$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}(a_n-\sqrt{2n}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n+\sqrt{2n})(a_n-\sqrt{2n})}{2\sqrt{2}\ln n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-2n}{2\sqrt{2}\ln n} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-2}{2\sqrt{2}\ln\frac{n+1}{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2\sqrt{2}a_n^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

例题 2.56 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}$

证明 记

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

若 a_n 有界, 则 $\exists M>0$ s.t $a_n\leqslant M$ 且 $S_n\leqslant nM$, 故

$$a_k-a_{k-1}=\frac{1}{S_{k-1}}\geqslant\frac{1}{(k-1)M},\ k=2,3,\cdots$$

将以上 $k-1$ 个式子累加可得

$$a_n-a_1\geqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}{M}\to\infty\,(n\to+\infty)$$

从而 a_n 无界. 由数学归纳法可知 $a_n>0$, 从而 a_n 严格单调递增且趋于 $+\infty$, 所以

$$1<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{1}{a_nS_n}<\frac{1}{na_n}$$

从而

$$1<n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}<\frac{1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=1$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{S_n}\cdot\frac{1}{a_nS_n}\right)=0$$

再由 Stolz 定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n}\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{S_n}+\frac{1}{S_n^2}\right)=1$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}=1$.

例题 2.57 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{n}{a_n}$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

解 由题意易得 $a_2=1$,

$$a_{n+1}=\frac{n}{a_n}\Rightarrow a_{n+2}=\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}a_n \tag{2.10}$$

由(2.10)可得

$$a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-2}=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}a_{n-4}$$
$$=\cdots=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-3}{n-4}\cdots\dfrac{3}{2}a_2, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-3}{n-4}\cdots\dfrac{2}{1}a_1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

注意到

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}},\quad\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

从而

$$b_n=\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-\frac12}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}(2n)^{-\frac12}\sum_{k=1}^{n}b_k$$
$$\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{2\sqrt2}{\sqrt\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-\frac12}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-\frac12}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

例题 2.58 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{\ln n}-1\right)=\frac12$$

解 我们先证里面层的，就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=1$, 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}}{n}=1$

由条件得 $a_{n+1}>a_n$, 所以数列严格递增，因此有有限正极限或者极限为 $+\infty$,

若 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 则有

$$A=A+e^{-A}\Longrightarrow 0=e^{-A}$$

因此只能有 $A=+\infty$, 这样就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

$$e^{a_{n+1}}=e^{a_n}\cdot e^{\frac{1}{e^{a_n}}}=e^{a_n}(1+e^{-a_n}+o(e^{-a_n}))\qquad(n\to+\infty)$$

所以就有

$$e^{a_{n+1}}=e^{a_n}+1+o(e^{-a_n})\qquad(n\to\infty)$$

O.Stolz 马上看到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}}{n}=1$, 这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=1$, 而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{\ln n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-n\ln n}{a_n}$$

又由 *O.Stolz* 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-n\ln n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n-((n+1)\ln(n+1)-n\ln n)}{a_{n+1}-a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(a_n+e^{-a_n})-na_n-\ln\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}{e^{-a_n}}$$
$$\xlongequal{a_n\sim\ln n}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac1n(n+1)-n\ln\left(1+\frac1n\right)}{\frac1n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac12+o\left(\frac1n\right)\right)=\frac12$$

例题 2.59 假设 $x\to 0^+$ 时, 函数 $f(x)=x-Ax^{1+\alpha}+Bx^{1+2\alpha}\ln x+O(x^{1+3\alpha})$ 其中 $A,\alpha>0$. 如果数列 a_n 递减于 0, 并且 $a_{n+1}=f(a_n)$, 那么我们有

$$a_n=\frac{1}{(\alpha An)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{B}{2\alpha^3A^2}\frac{(\ln n)^2}{n}-\frac{2B\ln\alpha A+\alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha^3A^2}\frac{\ln n}{n}+O(n^{-1})\right)$$

解 *(by 逆逆)* 记 $b_n=a_n^{-\alpha}$, 则 $b_n\to\infty$ 且有

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{1}{a_{n+1}^{a}}=b_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-\alpha}\\
&=b_n\left(1-Aa_n^{\alpha}+Ba_n^{2\alpha}\ln a_n+O\left(a_n^{3\alpha}\right)\right)^{-\alpha}\\
&=b_n\left(1-\frac{A}{b_n}-\frac{B}{\alpha b_n^2}\ln b_n+O\Big(\frac{1}{b_n^3}\Big)\right)^{-\alpha}\\
&=b_n\left(1+\frac{\alpha A}{b_n}+\frac{B}{b_n^2}\ln b_n+\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\cdot\frac{A^2}{b_n^2}+O\Big(\frac{\ln b_n}{b_n^3}\Big)\right)\\
&=b_n+\alpha A+B\cdot\frac{\ln b_n}{b_n}+\frac{\alpha(1+\alpha)A^2}{2}\cdot\frac{1}{b_n}+O\Big(\frac{\ln b_n}{b_n^2}\Big)
\end{aligned}$$

根据 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}-b_n=\lim_{n\to\infty}\alpha A+O\Big(\frac{\ln b_n}{b_n}\Big)=\alpha A$$

于是

$$\begin{aligned}
b_n&=b_1+\alpha A(n-1)+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\ln k}{k}\right)\\
&=\alpha An+O\left((\ln n)^2\right)=\alpha An\left(1+O\Big(\frac{(\ln n)^2}{n}\Big)\right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
b_n&=b_1+\alpha A(n-1)+B\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln\alpha An+O\big(\frac{(\ln n)^2}{\pi}\big)}{\alpha\cdot An\left(1+O\big(\frac{(\ln n)^2}{n}\big)\right)}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}A^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+O\big(\frac{(\ln n)^2}{n}\big)}{\alpha An}+O(1)\\
&=\alpha An+B\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln\alpha An}{\alpha An}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}A^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha An}+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\ln n)^3}{n^2}\right)+O(1)\\
&=\alpha An+\frac{B}{\alpha A}\left(\frac{(\ln n)^2}{2}+\ln\alpha A\ln n\right)+\frac{(1+\alpha)A}{2}\ln n+O(1)\\
&=\alpha An+\frac{B}{2\alpha A}(\ln n)^2+\frac{2B\ln\alpha A+\alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha A}\ln n+O(1)
\end{aligned}$$

这样就不难得到

$$a_n=b_n^{-\frac{1}{a}}=\frac{1}{(\alpha An)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{B}{2\alpha^3A^2}\frac{(\ln n)^2}{n}-\frac{2B\ln\alpha A+\alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha^3A^2}\frac{\ln n}{n}+O(n^{-1})\right)$$

例题 2.60 正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)=1$, 且 $p>-1$ 是已知常数,

求 A,B, 使得 A,B 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A-na_n^{p+1})=B$$

解 设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p$, 容易证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

由 O.Stolz 定理得到

$$\lim_{n\to\infty}na_n^{p+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^{p+1}}-\frac{1}{a_n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}^{p+1}-S_n^p}$$

而

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^{p+1}-S_n^{p+1} &= S_{n+1}^{p+1}-(S_{n+1}-a_{n+1}^p)^{p+1}\\
&= S_{n+1}-\sum_{k=0}^{p+1}C_{p+1}^k(-1)^k S_{n+1}^{p+1-k}\cdot a_{n+1}^{pk}\\
&= (p+1)S_{n+1}a_{n+1}-\frac{(p+1)p}{2!}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p}+\cdots\\
&= (p+1)+o(1)\qquad (n\to+\infty)
\end{aligned}$$

所以 $A=\dfrac{1}{p+1}$, 同时有 $(p+1)a_n^{p+1}\sim\dfrac{1}{n}$, 这时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A-na_n^{p+1})=\lim_{n\to\infty}na_n^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1}-n}{\ln n}$$

又有 *O.Stolz* 定理

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1}-n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{A(S_{n+1}^{p+1}-S_n^p)-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{p+1}((p+1)-\frac{(p+1)p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_n^{2p}+\cdots)}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p}+o(S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p})}{(p+1)a_{n+1}^{p+1}}\\
&= -\frac{p}{2(p+1)}
\end{aligned}$$

所以

$$B=-\frac{p}{2(p+1)^2}$$

例题 2.61 设 k 是一个大于 1 的整数，且 $x_0>0$, 满足 $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{\sqrt[k]{x_n}}$,

求: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_n^{k+1}}{n^k}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{k+1}}{n^k}-\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

解 *(by* 西西*)* 我们将要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{k+1}}{n^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

为此，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{k}$$

而归纳得到 $x_{n+1}>x_n, x_n>0$, 因此，x_n 的单调递增序列。设 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, 则有 $A=+\infty$. 说明 $x_n\to+\infty, n\to+\infty$.

$$\begin{aligned}
(x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-x_n^{1+\frac{1}{k}}) &= x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)\\
&= x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)\right]-1\right)\\
&\sim \frac{k+1}{k}(n\to+\infty)
\end{aligned}$$

所以，由 *O.Stolz* 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{k}$$

对于加强版本，我们先看一个事实，对任意一个收敛的序列，比如说 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 那么，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n^k - A^k)}{a_n - A} = kA^{k-1}$$

这样，设 $a_n = \frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}$, 就有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{k+1}{k} = A$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n^k - A^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n - A)\cdot k \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

于是，只要证 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n - A) = \frac{1}{2k}$, 就是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} - A\right) = \frac{1}{2k}$$

$$\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} - A\right) = \frac{x_n^{\frac{k+1}{k}} - nA}{\ln n}$$

这时，可以用 *O.Stolz* 定理了。就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{\frac{k+1}{k}} - nA}{\ln n} \underline{\underline{\;O.Stolz\;}} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - x_n^{1+\frac{1}{k}} - A}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right) - A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right) - 1\right) - A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right) - 1\right) - A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)^2\right) - A\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{k+1}{2k^2}\frac{n}{x_n^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

因此，命题得证。

定理 2.7 (函数极限的 Stolz 定理)

设函数 $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, 满足:

(1) $g(x+T) > g(x), \forall x \geqslant a$, 其中 $T > 0$ 为常数;

(2) 函数 f, g 在 $[a, +\infty)$ 的任何有限子区间有界;

(3) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

若

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A$$

那么 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

证明 由题意, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>a$, 当 $x\geqslant\Delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

对 $\forall x>\Delta+T,\exists k\in\mathbb{N}$, 使 $x=\Delta+kT+r,0\leqslant r<T$, 显然, $x\to+\infty\Leftrightarrow k\to+\infty$. 排出一系列不等式:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x-T)}{g(x)-g(x-T)}<A+\varepsilon$$
$$\vdots$$
$$A-\varepsilon<\frac{f(x-(k-1)T)-f(x-kT)}{g(x-(k-1)T)-g(x-kT)}<A+\varepsilon$$

应用合分比公式

$$\begin{aligned}A-\varepsilon&=\frac{f(x)-f(x-T)+f(x-T)-f(x-2T)+\cdots+f(x-(k-1)T)-f(x-kT)}{g(x)-g(x-T)+g(x-T)-g(x-2T)+\cdots+g(x-(k-1)T)-g(x-kT)}\\&=\frac{f(x)-f(x-kT)}{g(x)-g(x-kT)}=\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}<A+\varepsilon\end{aligned}$$

由 f,g 在 $[\Delta,\Delta+T]$ 中有界及 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 有

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\leqslant A+\varepsilon\,,\quad\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\geqslant A-\varepsilon$$

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\leqslant A+\varepsilon$$

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\geqslant A-\varepsilon$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任取的, 故有

$$A\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

例题 2.62 求极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$

解 *(by 向禹)* 令 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t,\ g(x)=\ln x$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\pi)-f(x)}{g(x+\pi)-g(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+\frac{\pi}{x})}\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\pi}\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\pi\xi}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\,,\ \xi\in[x,x+\pi]\\&\xlongequal{\text{周期性}}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

例题 2.63 设 $f(x)=|\sin x|$, 记 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

解 *(by 向禹)* 令 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t,\ g(x)=x^{m+1}$, 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\pi)-f(x)}{g(x+\pi)-g(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(x+\pi)^{m+1}-x^{m+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(m+1)\pi x^m}$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\xi^m}{(m+1)\pi x^m}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\ ,\ \xi\in[x,x+\pi]$$

$$= \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(m+1)\pi}$$

2.1.5 收敛数列的性质

性质 *收敛数列的性质*

1. *(唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.*
2. *(有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.*
3. *(保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a>0$ (或 $a<0$), 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 都有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$).*

证明

1. (唯一性) 法 I. 用反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a<b$. 根据数列极限的定义有

$$\text{令 } \varepsilon_0 = \frac{b-a}{2} > 0, \begin{cases} \exists N_1\in\mathbf{N}^+, \forall n>N_1, \text{有 } |x_n-a|<\varepsilon_0. \\ \exists N_2\in\mathbf{N}^+, \forall n>N_2, \text{有 } |x_n-b|<\varepsilon_0. \end{cases}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, 同时有

$$|x_n-a|<\varepsilon_0 \quad \text{与} \quad |x_n-b|<\varepsilon_0,$$

即同时有 $x_n < a+\varepsilon_0 = \dfrac{a+b}{2}$ 与 $x_n > b-\varepsilon_0 = \dfrac{a+b}{2}$, 这是不可能的.
所以假设 $a<b$ 不成立. 同理可证假设 $a>b$ 也不成立,
从而 $a=b$, 即极限是唯一的. 证毕.
法 II. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a-b)=0$, 根据数列极限的定义有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N},\ \text{当 } n>N_1 \text{ 时, 有 } |x_n-a|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N},\ \text{当 } n>N_2 \text{ 时, 有 } |x_n-b|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a-b-0| = |(x_n-a)-(x_n-b)| \leqslant |x_n-a|+|x_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a-b)=0 \Rightarrow a=b$. 因此, 极限是唯一的.

2. (有界性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0=1$, 则 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有不等式

$$|x_n-a|<1.$$

于是, 当 $n>N$ 时,

$$|x_n| = |(x_n-a)+a| \leqslant |x_n-a|+|a| < 1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$, 则对一切 x_n, 都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界. 证毕.

3. (保号性) 当 $a>0$ 时, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0=\dfrac{a}{2}$, 则存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a-\frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

同理可证 $a<0$ 的情形. 证毕.

例题 2.64 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$, 证明: $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在两个不相等的实根

证明 由题意 $f'(a)f'(b)>0$, 故不妨设 $f'(a)>0$, $f'(b)>0$, 由导数定义可得:

$$f'(a)=f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0\,,\quad f'(b)=f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0$$

由极限的保号性可知 $\exists x_1\in(a,a+\delta_1)$ 和 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 使得

$$f(x_1)>0,\ f(x_2)<0$$

其中 δ_1, δ_2 为充分小的正数, 显然 $x_1<x_2$。在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用介值定理得: $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$. 再由 $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$ 及罗尔定理可知: 存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$ 使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$$

注 事实上, 本题的重点是保号性!

定理 2.8

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>b$ (或 $<b$), 则 $\exists N_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $a_n>b$ (或 $<b$)

推论 2.1

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$), 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 那么 $a\geqslant 0$ (或 $a\leqslant 0$)

定理 2.9 (收敛数列与子列的关系)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 那么它的任一子列也收敛, 且极限也是 a.

证明 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的子列, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
根据数列极限的定义, $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

由于 $n_k\geqslant k$, 故当 $k>N$ 时, 有 $n_k\geqslant k>N$, 从而有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 证毕.

2.2 函数的极限

定义 2.3 ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\iff\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 }0<|x-x_0|<\delta\text{ 时, }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

例题 2.65 证明: 当 $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证明 为使 $x=x_0$ 的去心邻域有定义, 即 $x\geqslant 0$, 不妨先大致限定范围

$$0<|x-x_0|<\delta_1\Leftrightarrow x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1\Rightarrow x_0\geqslant\delta_1$$

于是, 我们不妨设 $|x-x_0|\leqslant x_0$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon.$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $x \geqslant 0$, 且

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. 证毕.

例题 2.66 证明: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = 2.$

证明 首先有

$$\left|\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2x-1}\right|$$

为使 $x = 1$ 的去心邻域有定义, 即 $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$, 不妨先大致限定范围

$$0 < |x - 1| < \delta_1 \Leftrightarrow 1 - \delta_1 < x < 1 + \delta_1 \Rightarrow 0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$$

于是, 我们不妨设 $|x - 1| < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4} \Rightarrow |2x - 1| > \dfrac{1}{2}$, 于是

$$\left|\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2x-1}\right| < 6|x - 1| < \varepsilon$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|\dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2\right| < \varepsilon$, 只要 $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{6}$, 又 $|x - 1| < \dfrac{1}{4}$,

即只要取 $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2\right| < \varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = 2.$

例题 2.67 证明: $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{7}{16x^2 - 9}} = 1$

证明 首先, 我们可以得到

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} - 1\right| = \left|\frac{7/(16x^2 - 9) - 1}{\sqrt{7/(16x^2 - 9)} + 1}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{7}{16x^2 - 9} - 1\right| = \frac{16|1 + x||1 - x|}{|(4x + 3)(4x - 3)|}$$

为使 $x = 1$ 的去心邻域有定义, 即 $4x + 3 \neq 0$ 且 $4x - 3 \neq 0$, 也即 $x \neq \pm\frac{3}{4}$, 不妨先大致限定范围

$$0 < |x - 1| < \delta_1 \Leftrightarrow 1 - \delta_1 < x < 1 + \delta_1 \Rightarrow 1 - \delta_1 > \tfrac{3}{4} \Rightarrow 0 < \delta_1 < \frac{1}{4}$$

我们不妨设 $|x - 1| < \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{7}{8} < x < \frac{9}{8}$, 于是

$$\frac{16|1 + x||1 - x|}{|(4x + 3)(4x - 3)|} < \frac{16|1 + \frac{9}{8}||1 - x|}{|(4 \times \frac{7}{8} + 3)(4 \times \frac{7}{8} - 3)|} = \frac{136}{13}|1 - x| < \varepsilon.$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\frac{1}{8}, \frac{13\varepsilon}{136}\}$, 则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} - 1\right| < \varepsilon$ 成立,

故 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} = 1.$

例题 2.68 证明 $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{6}} \dfrac{1}{5x + 1} = 6$

解 首先, 我们有

$$\left|\frac{1}{5x + 1} - 6\right| = \left|\frac{1 - 30x - 6}{5x + 1}\right| = \frac{30|x - (-\frac{1}{6})|}{|5x + 1|}$$

为使 $0 < |x - (-\frac{1}{6})| < \delta_1$ 中不含 $x = -\frac{1}{5}$,

$$0 < |x - (-\tfrac{1}{6})| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{6} - \delta_1 < x < \frac{1}{6} + \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{6} - \delta_1 > -\frac{1}{5} \Rightarrow 0 < \delta_1 < \frac{1}{30}$$

由于 $0 < \delta_1 < \frac{1}{30}$ 是任意的, 不妨取 $\delta_1 = \frac{1}{60}$. 即

$$|x - (-\tfrac{1}{6})| < \tfrac{1}{60} \Rightarrow -\tfrac{11}{60} < x < -\tfrac{9}{60},$$

于是就有

$$\frac{30|x-(-\frac{1}{6})|}{|5x+1|}<\frac{30|x-(-\frac{1}{6})|}{|5\times(-\frac{11}{60})+1|}=360\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\frac{1}{5x+1}-6|<\varepsilon$ 成立, 只需 $|x-(-\frac{1}{6})|<\frac{\varepsilon}{360}$, 又 $|x-(-\frac{1}{6})|<\frac{1}{60}$. 故取 $\delta=\min\{\frac{1}{60},\frac{\varepsilon}{360}\}$, 当 $0<|x-(-\frac{1}{6})|<\delta$ 时, 就有 $|\frac{1}{5x+1}-6|<\varepsilon$ 成立.

定义 2.4 ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$)

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\iff\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当 }|x|>X\text{ 时, 有 }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

♣

例题 2.69 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

证明 $|f(x)-A|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$, 即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$.

故取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$, 于是有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 证毕.

例题 2.70 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-3}=2$

证明 因为 $\forall\varepsilon>0$, 要找到 $M>0$, 使 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|=\frac{7}{|x^2-3|}<\varepsilon$$

而当 $|x|>3$ 时, $|x^2-3|>|x|$, 故要

$$\frac{7}{|x^2-3|}<\frac{7}{|x|}<\varepsilon$$

只需 $|x|>\frac{7}{\varepsilon}$. 故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\max\{3,\frac{7}{\varepsilon}\}$, 当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|<\varepsilon$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-3}=2$

例题 2.71 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$.

证明

$$\left|\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|\geqslant\frac{x^3}{6x^2}=\frac{x}{6},\quad x>100$$

因此, $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$, 只要 $\frac{x}{6}>M$, 即 $x>6M$,

即只要取 $X=\max\{100,6M\}$, 当 $x>X$ 时, 有 $\left|\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$ 成立,

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$.

2.2.1 函数极限的性质

性质 函数极限的基本性质

1. (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

2. (局部有界性)如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant M$.
3. (局部保号性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 而 $A>0$ (或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

证明

1. (局部有界性) 因为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以取 $\varepsilon=1$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有
$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$
记 $M=A+1$, 于是有 $|f(x)|\leqslant M$. 证毕.
2. (局部保号性) 仅就 $A>0$ 的情形证明.
因为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以给定 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0, \exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有
$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>-\frac{A}{2}+A=\frac{A}{2}>0.$$
类似地可以证明 $A<0$ 的情形.

推论 2.2

1. 如果 $\lim_{x\to x_0}=A\ (A\neq 0)$, 那么就存在着 x_0 的某一去心领域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)|>\frac{A}{2}$
2. 如果在 x_0 的某去心领域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)
$A\geqslant B$
3. 如果 $f(x)\geqslant g(x)$, 而 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$. 那么

例题 2.72 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $A<B$。
证明：在点 x_0 的某去心领域内 $f(x)<g(x)$

证明 因为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, s.t $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 因为 $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$, s.t $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时有 $|g(x)-B|<\varepsilon$
所以
$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \qquad B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon$$
所以
$$B-A-2\varepsilon<g(x)-f(x)$$
因为 $\varepsilon>0$ 任意, 所以取 $\varepsilon<\frac{B-A}{2}$ 就有 $g(x)-f(x)>0$.
所以 $g(x)-f(x)>0$

定理 2.10 (海涅定理)

如果极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n\neq x_0$ $(n\in\mathbb{N}^+)$, 那么相应的函数值数列 $f(x_n)$ 必收敛, 且
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

例题 2.73 证明 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.
证明 取两个数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$, 其中
$$x_n'=\frac{1}{2n\pi},\quad x_n''=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}.$$
则有
$$x_n'\neq 0, x_n''\neq 0(\forall n), \lim_{n\to\infty} x_n'=\lim_{n\to\infty} x_n''=0.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n''} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

这说明当 $\{x_n\}$ 取不同数列趋于 0 时, 对应的函数值数列趋于不同的值,
所以应用海涅定理知 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在

2.2.2 两个重要极限

2.2.2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

定理 2.11

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

注[5]

$$S_{\delta AOM} < S_{扇形 AOM} < S_{\delta AOB} \Longrightarrow \sin x < x < \tan x, \quad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

存在的问题:

1. 此证明用到了扇形的面积公式 $S_{扇形 AOM} = \frac{x}{2}$, 从而用到了圆面积公式. 而圆面积公式的证明涉嫌用到所要证明的极限. 这就存在着循环论证的可能.
2. 怎样定义函数 $\sin x$?
3. 如何说明圆周可求长?

例题 2.74 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数, 试证

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \leqslant |\sin x|$$

的充分必要条件为 $\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k \leqslant 1$

解 (必要性) 由于 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \leqslant |\sin x|$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|, x \neq 0$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{x}\right| = \sum_{k=1}^{n} k a_k \leqslant \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

(充分性) 要证明 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \leqslant |\sin x|$, 只需证明

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right|}{|\sin x|} < 1, \quad |\sin x| \neq 0.$$

[5]详细可参考楼红卫的《数学分析注记初稿五》P18

若 $|\sin x| = 0$, 不等式显然成立. 也即只需证明 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{\sin x}\right| \leqslant 1$, 而

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{\sin x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|, \quad \sum_{k=1}^{n} k a_k \leqslant 1.$$

故只要证明 $\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right| \leqslant k$, 即 $|\sin kx| < k|\sin x|$ 即可. 下面用数学归纳法证明:

当 $k = 1$ 时, 显然成立;

假设当 $k = n$ 时, 有 $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$; 当 $k = n+1$ 时,

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| &= |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx| \\ &\leqslant |\sin nx| + |\sin x| \leqslant (n+1)|\sin x| \end{aligned}$$

综上可知结论成立

例题 2.75 求极限: $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解 当 $x = 0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = 1$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

例题 2.76 设 $a_n = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$. 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$

证明 当 $\theta \neq 0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\right) = 0$$

当 $\theta \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\ln\cos\frac{\theta}{2^k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{\theta}{2^k}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\ln\sin\theta - \ln\theta) = \frac{1}{\theta} - \cot\theta \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \frac{1}{\theta} - \cot\theta, & \theta \neq 0. \end{cases}$$

例题 2.77 计算极限: $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{3}{n^2} + \cdots + \sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$.

解 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, *s.t.* 当 $0 < |x| < \delta$ 时, $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, 即 $|\sin x - x| < \varepsilon x$. 因此, 取 $N = [\frac{2}{\delta}] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 由于

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{3}{n^2} < \cdots < \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n} < \delta,$$

我们有,

$$\left|\sin\frac{2k-1}{n^2} - \frac{2k-1}{n^2}\right| < \frac{2k-1}{n^2}\varepsilon, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right| \\ &< \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}-1\right|<\varepsilon$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$$

2.2.2.2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

例题 2.78 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^2}\right)^x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e\end{aligned}$$

例题 2.79 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}}-\ln 2^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}}}{2^{2x}}\\ &=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}-2x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x}}{2^{2x}}\\ &=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\\ &=\ln\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot e\right)=\frac{1}{4}\ln 2+1\end{aligned}$$

例题 2.80 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{x}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}}{x^2}\\ &=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}}\\ &=\frac{e}{2}\end{aligned}$$

例题 2.81 证明 $\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$

证明

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\text{分部积分}} \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = -\gamma
\end{aligned}
$$

例题 2.82 设 $n \in \mathbb{N}$, 证明

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geqslant 2$$

证明 利用伯努利 (Bernoulli) 不等式 $(1+x)^n \leqslant 1+nx$, 有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant 1+\frac{n}{n-1} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1+\frac{n+1}{n}$$

因为

$$\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2-n^2-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} > 0, \quad n \geqslant 2.$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

例题 2.83 利用平均值不等式证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明 利用平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})$$

中 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$, 则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right] = 1+\frac{1}{n+1}$$

两边 $n+1$ 次方, 得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

例题 2.84 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

证明 由 $\sqrt{i(n-i)} \leqslant \dfrac{n}{2}$, 则 $\dfrac{1}{2}\left[\ln i + \ln(n-i)\right] \leqslant \ln\dfrac{n}{2}$ 从而

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln i \leqslant (n-1)\ln\frac{n}{2}, \quad (n-1)! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

两边同乘以 $\dfrac{n}{2}$, 得 $\dfrac{1}{2}n! \leqslant \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 于是

$$n! \leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^n < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

即

$$n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

再证 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$. 设 $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n$$

所以 (注意到 $x_1 = \frac{1}{e} < 1$)

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$$

从而证得

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$$

例题 2.85 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1$$

证明 当 $n = 2$ 时, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立

当 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

则对于 $n = k+1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}(k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即对于 $n = k+1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 $n > 1$, 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

例题 2.86 证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

证明

例题 2.87 证明不等式: $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

证明 法 1. 对 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, 有

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

因此有

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1 < e < \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

连乘得到 $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$, 再变形 . . .

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

法 2(数学归纳法). 注意到对任意正整数 m 有 $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m \leqslant e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}$。回到原问题，即是证明

$$(n+1)^n < e^n \cdot n! < (n+1)^{n+1}$$

当 $n=1$ 时，显然成立

设 $n=k$ 时成立，即是说

$$(k+1)^k < e^k \cdot k! < (k+1)^{k+1}$$

则 $n=k+1$ 有

$$\begin{aligned} e^{k+1}\cdot(k+1)! &= e^k \cdot k! \cdot e(k+1) > (k+1)^k \cdot e(k+1) = e(k+1)^{k+1} \\ &\geqslant (1+\frac{1}{k+1})^{k+1}(k+1)^{k+1} = (k+2)^{k+1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} e^{k+1}\cdot(k+1)! &= e^k \cdot k! \cdot e(k+1) < (k+1)^{k+1} \cdot e(k+1) = e(k+1)^{k+2} \\ &\leqslant (1+\frac{1}{k+1})^{k+2}(k+1)^{k+2} = (k+2)^{k+2} \end{aligned}$$

于是，由归纳法，对所有正整数 n 成立。

例题 2.88 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}}\right)$

解 由不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \cdot (n+1)$$

得

$$\frac{n+1}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

令

$$a_n = \left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}}\right) = (n!)^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$

则有

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) < a_n < \frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$

一方面, 有

$$\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) = \left((n+1)(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)\right)\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{e} \to \ln e \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(n\to\infty)$$

另一方面, 令 $t_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, 于是

$$a_n = \left(\frac{e}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 = \left(\frac{e}{1+t_n}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \Longrightarrow n+1 = \frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1 + a_n}$$

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1 + a_n}a_n\right)$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{e}{1+t_n}}{\ln (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{e} \frac{\ln \frac{e}{1+0}}{\ln e} = \frac{1}{e}$$

或者 (另一方面)

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$$

得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} \left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}} \left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right) \\
=& \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} (n+1) \left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right) \\
=& \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} - \frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{n}\right) \\
=& \frac{1}{e}(1 - 1 \times 0) = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

根据夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{e}$$

2.3 极限的运算法则

2.3.1 极限的四则运算

例题 2.89 证明 $3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$.

证明

$$\begin{aligned}
3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2\times 4} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times 6}}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

例题 2.90 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1+2}{n^3} + \cdots + \frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right)$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j} i}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1+2}{n^3} + \cdots + \frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)}{2n^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{2n^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

例题 2.91 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$

解 注意到

$$
\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{2k(2k+1)(2k+2)} \\
&= 12\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\right) \\
&= 12\left[(1-\ln 2)-\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right] = 18-24\ln 2
\end{aligned}
$$

例题 2.92 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2}{(n-1)n}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)k+1}{k(k-1)+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)n}\frac{(n+1)n+1}{2(2-1)+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n+2}{3(n-1)n} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

例题 2.93 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$.

解 注意到

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= (2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1) \\
&= \frac{(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)}{2^{2^0}-1} \\
&\xlongequal{\text{平方差}} \frac{(2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)}{1} \\
&= \cdots = 2^{2^{n+1}}-1
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{1+2^1+2^2+\cdots+2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}} = 2.
$$

例题 2.94 (IMC,2019) 计算 $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$

解 令 $a_n=\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$, 注意到

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}=\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)\cdot(n+2)(n^2-2n+4)}\\&=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\cdot\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.\end{aligned}$$

因此, $\forall N\geqslant 3$, 我们有

$$\begin{aligned}\prod_{n=3}^{N}a_n&=\left(\frac{n}{n-2}\right)\left(\frac{n}{n+2}\right)\left(\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right)\left(\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)\\&=\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{N^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)\big((N+1)^2+3\big)}\\&=\frac{72}{7}\cdot\frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})\big((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2}\big)},\end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=3}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N}a_n=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{72}{7}\cdot\frac{(1-\frac{1}{N})(1+\frac{3}{N^2})}{(1+\frac{1}{N})(1+\frac{2}{N})\big((1+\frac{1}{N})^2+\frac{3}{N^2}\big)}\right)=\frac{72}{7}.$$

例题 2.95 (知乎,478995971) 求极限: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{3}\right)^n$

解 *(by 予一人)*[22]. 置 $a_k:=\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{3}\right)^k$, 则有

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leqslant\frac{e}{3},$$

于是

$$a_k=a_1\prod_{j=1}^{k-1}\frac{a_{j+1}}{a_j}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{e}{3}\right)^{k-1}.$$

进而

$$0\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{e}{3}\right)^{k-1}\leqslant\frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^{k-1}\to 0.$$

例题 2.96 求极限 $\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}$

解 因为 $a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$, 所以有

$$a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=2\cos\frac{\pi}{8},$$

依次类推

$$a_n=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot 2\frac{\pi}{2^{n+3}}=\frac{\pi}{4}$$

练习 2.9 设 $x_0=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}, n\geqslant 1$, 求

$$\lim_{n\to\infty} 4^n\left(\frac{\pi^2}{9}+4^n(x_n-2)\right)$$

解 因为 $x_1=\sqrt{2+1}=2\cos\frac{\pi}{6}$, 所以有

$$x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{12}}=2\cos\frac{\pi}{12},$$

依次类推

$$x_n=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}=2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$$

利用 *Taylor* 公式, 我们得到

$$x_n=2-\frac{\pi^2}{9\cdot 4^n}+\frac{\pi^4}{972\cdot 4^{2n}}+o(1/2^{4n})$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} 4^n\left(\frac{\pi^2}{9}+4^n(x_n-2)\right)=\frac{\pi^4}{972}$$

例题 2.97 设 $-1<a_0<1, a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n(1-a_n)$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_1a_2\cdots a_n$

证明 (1). 设 $a_0=\cos\theta$. 则 $a_1=\cos\frac{\theta}{2}, a_2=\cos\frac{\theta}{4},\cdots,a_n=\cos\frac{\theta}{2^n}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n(1-a_n)=\lim_{n\to+\infty} 4^n\left(1-\cos\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\theta^2}{2}=\frac{\arccos^2 a_0}{2}$$

(2). 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_1a_2\cdots a_n&=\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}{2\sin\frac{\theta}{2^n}}\\&=\cdots=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sqrt{1-a_0^2}}{\arccos a_0}\end{aligned}$$

例题 2.98 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 由于 $\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3\end{aligned}$$

显然,

$$\frac{2n-1}{2^n}=\frac{an+b}{2^{n-1}}-\frac{cn+d}{2^n}=\frac{(2a-c)n-(d-2b)}{2^n}$$

$$\frac{2(n-1)-1}{2^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{2^{n-2}}-\frac{c(n-1)+d}{2^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{2^{n-2}}-\frac{cn+d-c}{2^{n-1}}$$

若通项能裂项，则需满足

$$\begin{cases} a = c \\ b = d - c \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} 2 = 2a - c \\ 1 = d - 2b \end{cases}$$

解之得, $a = c = 2, d = 3, b = 1$, 因此

$$\frac{2n-1}{2^n} = \frac{2n+1}{2^{n-1}} - \frac{2n+3}{2^n}$$

例题 2.99 设 $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})$ $(n \geqslant 2)$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解 因为

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}),\ (n \geqslant 3)$$

求积得

$$\prod_{i=3}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \prod_{i=3}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i-2})\right] = \prod_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

化简得

$$x_n - x_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)$$

求和得

$$x_n - x_1 = (b-a) \times \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{2})}$$

即

$$x_n = \frac{2}{3}(b-a)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] + a$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$$

例题 2.100 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是将方程 $\tan x = x$ 的全部正根按由小到大的次序编号而成的, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})$.

解 易知 $x_n \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$ $(n \in \mathbb{N})$, 故 $x_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tan x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

而由 $\tan x$ 的连续性可知, $\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 因此可得

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n - \pi) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) - \left(\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - x_{n+1}\right)\right) = 0$$

我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = \pi$

例题 2.101 把方程 $\tan x = x$ 的正根按从小到大顺序排成数列 $\{x_n\}$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n)$$

证明 (by 向禹) 首先容易得到 $x_n \in \left((n-1)\pi, (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $x_n - (n-1)\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 故

$$x_n = \tan x_n = \tan\left(x_n - (n-1)\pi\right)$$

所以 $\arctan x_n = x_n - (n-1)\pi$, 且 $x_n - (n-1)\pi \to \frac{\pi}{2}, n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(\arctan x_{n+1} - \arctan x_n + \pi) \\
&= -\lim_{n\to+\infty} n^2\pi^2 \sin\arctan\frac{x_{n+1} - x_n}{1 - x_{n+1}x_n} \\
&= -\lim_{n\to+\infty} n^2\pi^2 \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - x_{n+1}x_n} = -\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n)
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}\big(x_{n+1}-n\pi-(x_n-(n-1)\pi)\big)-\pi=-\pi$$

例题 2.102 设 $\{x_k\}$ 是超越方程 $\tan x = x$ 的正数根依次排成的序列. 求证:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k^2}=\frac{1}{10}$$

证明 (by 西西) 考虑定义在复数上的函数

$$f(z)=\sin z - z\cos z$$

我们发现它的零点有 $(x_k)_{k\geqslant 1}$, $(-x_k)_{k\geqslant 1}$ 和 0, 除了 0 是三重根外其他的都是单根. 由 Weierstrass factorizatio 定理, 我们可以把它写成

$$f(z)=\frac{z^3}{3}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)$$

另一方面, 通过在 $z=0$ 处展开 $f(z)$, 我们得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\frac{z^3}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6(-1)^n(n+1)z^{2n}}{(2n+3)!}$$

通过对比上面两个式子, 我们发现

$$S_n:=\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_n}\frac{1}{x_{k_1}^2x_{k_2}^2\cdots x_{k_n}^2}=\frac{6(n+1)}{(2n+3)!}$$

特别的, 对 $n=1$, 我们有

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k^2}=\frac{1}{10}$$

例题 2.103 记 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x 的最大整数, 记 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$

证明 利用二项式定理

$$(2+\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\sqrt{3})^k2^{n-k}$$

分成 k 为偶数项的和 A_n 及 k 为奇数项的和 B_n 两部分, 即

$$(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n$$

显而易见 $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n$, 由于 $0<2-\sqrt{3}<1$, 则 $A_n>B_n$

$$0<2-\sqrt{3}<1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n=0\Longrightarrow A_n-B_n\to 0$$

注意到 C_n^k 为整数, 故 $A_n>1$ 且为整数,

$$\frac{B_n}{A_n}=\frac{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right)}{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right)}\to 1\,,\quad n\to\infty$$

因为 A_n 为整数, 所以 B_n 随着 n 的增大也与整数相差很小, 即 $\{B_n\}=B_n-\lfloor B_n\rfloor\to 1$. 由此得

$$\{A_n+B_n\}=(A_n+B_n)-\lfloor A_n+B_n\rfloor=B_n-\lfloor B_n\rfloor\to 1$$

例题 2.104 设 $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, 其中 a_n,b_n 为正整数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

解 *法 1* 由题意

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{n+1}&=(1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3})=(a_n+b_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\\&=\underbrace{a_n+3b_n}_{a_{n+1}}+\underbrace{(b_n+a_n)}_{b_{n+1}}\sqrt{3}\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+3b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\frac{\frac{a_n}{b_n}+3}{\frac{a_n}{b_n}+1}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a$, 上式两端取极限得

$$a=\frac{a+3}{a+1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a=\sqrt{3}$$

法 2 类似上题

练习 2.10 设 $y_0\geqslant 2, y_n=y_{n-1}^2-2(n\in\mathbb{N}), S_n=\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$,

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$

证明 若 $y_0=2$, 则 $y_n=2, n\in\mathbb{N}$. 此时

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

若 $y_0>2$, 这时记 $\alpha=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$, 此时 $y_0=\alpha+\frac{1}{\alpha}$. 一般地,

$$y_n=\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

因此

$$\begin{aligned}y_0y_1y_2\cdots y_n&=(\alpha+\alpha^{-1})(\alpha^2+\alpha^{-2})(\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2})\cdots(\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n})\\&=\frac{\alpha^{2^{n+1}}-\alpha^{-2^{n+1}}}{\alpha-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+2}}-1}{\alpha^{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_0y_1y_2\cdots y_n}&=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^{n+2}}-1}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}+1-1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\\&=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}(\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{y_0y_1y_2\cdots y_k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{2^{k+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{k+2}}-1}\right)\\&=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\right)\end{aligned}$$

注意到 $\alpha<1$, 最终

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}+1\right)=\alpha=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

定理 2.12 (复合函数的极限运算法则)

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

例题 2.105 计算: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}+\ln 3+\ln x}{\ln\frac{\sin 2x}{2x}+\ln 2+\ln x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}}{\ln x}+\frac{\ln 3}{\ln x}+1}{\frac{\ln\frac{\sin 2x}{2x}}{\ln x}+\frac{\ln 2}{\ln x}+1}=1\end{aligned}$$

笔记 (抓大头) 当 $x \to +\infty$ 时, 有

$$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x} \ll x^{x}$$

其中 $\alpha, \beta > 0, a > 1$

2.3.2 夹逼准则

定理 2.13 (夹逼准则)

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

1. 从某项起, 即 $\exists N_0 \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 所以根据数列极限的定义,

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists N_1 \in \mathbf{N}^+, \forall n > N_1, \text{有 } |y_n - a| < \varepsilon. \\ \exists N_2 \in \mathbf{N}^+, \forall n > N_2, \text{有 } |z_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

同时成立. 由 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ (n > N_0)$, 所以当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$,, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 证毕.

例题 2.106 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$ 为常数).

证明 (1) 当 $a \geqslant 1$ 时, 设 $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \quad (h_n \geqslant 0)$, 下面先证 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
由牛顿二项式展开公式得

$$a = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2!}h_n^2 + \cdots + h_n^n,$$

所以 $a \geqslant 1 + nh_n$, 从而

$$0 \leqslant h_n \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a-1}{n} = 0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1$.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $\dfrac{1}{a} > 1$, 根据 (1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

证毕.

例题 2.107 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ ($a > 1, k$ 是正整数)

证明 令 $a = 1 + h, h > 0$, 则

$$\begin{aligned} a^n = (1+h)^n &= C_n^0 + C_n^1 h + \cdots + C_n^k h^k + C_n^{k+1} h^{k+1} + \cdots + C_n^n h^n \\ &\geqslant C_n^{k+1} h^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} h^{k+1} \end{aligned}$$

从而, $\forall n > k$, 有

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1} \to 0$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

例题 2.108 设数列 $\{a_n\}$ 恒满足不等式 $\sqrt{n}|a_n| \leqslant 3\ n = 1, 2, \ldots$ 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\left(\sum_1^n a_i\right)^2 + \left(\sum_2^n a_i\right)^2 + \cdots + \left(\sum_n^n a_i\right)^2\right] = 0$$

证明 利用 Cauchy 不等式当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\left(\sum_k^n a_i\right)^2 \leqslant (n-k+1)\left(\sum_k^n a_i^2\right) \leqslant 9(n-k+1)\sum_k^n \frac{1}{i} \leqslant 9n\sum_1^n\frac{1}{i}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n\left(\sum_k^n a_i\right)^2 \leqslant 9(n-1)n\sum_1^n\frac{1}{i} + \frac{9}{n}$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[9(n-1)n\sum_1^n\frac{1}{i} + \frac{9}{n}\right] = 0$$

利用夹逼准则即得结论.

例题 2.109 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right) + 4\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)\right\}$

解

$$\tan\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\tfrac{6n}{11}\right]}\right) = \tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\tfrac{6n}{11}\right]} - n\pi\right)$$

$$\pi\sqrt{n^2+\left[\tfrac{6n}{11}\right]} - n\pi = \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}}\pi$$

考虑下列不等式

$$\frac{\frac{6}{11}n-1}{\sqrt{n^2+\frac{6}{11}n}+\sqrt{n^2}} \leqslant \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}} \leqslant \frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{2n} \leqslant \frac{3}{11}$$

当 $n \to \infty$, 左边等于 $\dfrac{3}{11}$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\tfrac{6n}{11}\right]}\right) = \tan\frac{3}{11}\pi$$

同样的方法，可以计算出

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\tfrac{8n}{11}\right]}\right) = \sin\frac{2}{11}\pi$$

对于 $\tan\dfrac{3}{11}\pi + 4\sin\dfrac{2}{11}\pi = \sqrt{11}$ 的计算, 这里不再给出。

例题 2.110 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}$

解 注意到

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

当 $n > k$ 时有

$$\begin{aligned}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} &= (n+1-k)\left[n\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right]^{-1}\\ &= \frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+2)}n^{-2} \leqslant 2n^{-2}\end{aligned}$$

所以原式有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2n^{-2} = \frac{2}{n} \to 0$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} = 0$$

例题 2.111 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

解 将和式分段

$$\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n^{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \overbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=3}^{N} n^{\frac{1}{k}}}^{\text{有限项}} + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} n^{\frac{1}{k}} \triangleq I_1+I_2+I_3$$

一方面, $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$; 另一方面, 我们取 $N=[\sqrt{n}]$,

$$I_2 \leqslant \frac{(N-2)\sqrt[3]{n}}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \to 0$$

再着, 由于 $\dfrac{(n-N)n^{\frac{1}{n}}}{n} \leqslant I_3 \leqslant \dfrac{(n-N)n^{\frac{1}{N}}}{n}$, 故而由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} I_3 = 1$. 综上,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}(I_1+I_2+I_3) = 2.$$

例题 2.112 (AMM12143[6]) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right)$$

解 利用不等式

$$\left(\frac{n-i}{n}\right)^n \leqslant e^{-i}$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}$$

另一方面，对于固定的正整数 k，截取题目数列的后 $k+1$ 项，由于是有限项，所以可以逐项求极限，可得原极限大于等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{k}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{k} e^{-i} = \frac{1-e^{-k-1}}{1-e^{-1}}$$

再令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{e-1}$$

推广[23]: 设 $f:(0,1]\in\mathbb{R}_+$ 可微, 且 $f'(1)>0$, $\dfrac{f'}{f}$ 递减则,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n = \begin{cases} 0 & \textit{if } f(1)<1, \\ \dfrac{1}{1-e^{-f'(1)}} & \textit{if } f(1)=1, \\ +\infty & \textit{if } f(1)>1. \end{cases}$$

例题 2.113 (IMC, 1994) 求极限: $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\log^2 N}{N}\sum\limits_{k=2}^{N-2}\dfrac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}$.

[6] http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/AMM/AMM12143.pdf

解 [7] 显然

$$A_N=\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\geqslant\frac{\log^2 N}{N}\cdot\frac{N-3}{\log^2 N}=1-\frac{3}{N}\tag{2.11}$$

取 M 满足 $2\leqslant M\leqslant\frac{N}{2}$, 则由 $\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}$ 在 $(2,\frac{N}{2})$ 单调递减, 以及表达式关于 $\frac{N}{2}$ 的对称性可得

$$\begin{aligned}A_N&=\frac{\log^2 N}{N}\left\{\sum_{k=2}^{M}+\sum_{k=M+1}^{N-M-1}+\sum_{k=N-M}^{N-2}1\right\}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\\&\leqslant\frac{\log^2 N}{N}\left\{2\frac{M-1}{\log 2\cdot\log(N-2)}+\frac{N-2M-1}{\log M\cdot\log(N-M)}\right\}\\&\leqslant\frac{2}{\log 2}\cdot\frac{M\log N}{N}+\left(1-\frac{2M}{N}\right)\frac{\log N}{\log M}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\end{aligned}$$

取 $M=[\frac{N}{\log^2 N}]+1$ 得到

$$\begin{aligned}A_N&\leqslant\left(1-\frac{2}{N\log^2 N}\right)\frac{\log N}{\log N-2\log(\log N)}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\\&\leqslant 1+O\left(\frac{\log(\log N)}{\log N}\right)\end{aligned}\tag{2.12}$$

由 (2.11) 和 (2.12) 得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}=1$$

例题 2.114 设 $\{a_n\}$ 是正序列, 且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, 证明:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_1+\cdots+a_n}=1$$

证明 注意到

$$1=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_1+\cdots+a_n}$$

所以只要估计 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的一个上界即可。而由 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ 知,

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时 $a_n\leqslant(1+\varepsilon)^n$ 设 $A=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k<A+\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}$$

而当 n 充分大时 $\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}>A$, 所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}}=1$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_1+\cdots+a_n}=1$$

例题 2.115 设 $a_n>0, n=1,2\cdots,\alpha=\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\ln a_n}{n}$, 且

$$x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}},\quad n=1,2,\cdots$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 当 $\alpha<\ln 2$ 时收敛, 而当 $\alpha>\ln 2$ 时发散。

[7] 向禹《1994-2018 年国际大学生数学竞赛》P7

证明 [8] 当 $\alpha < \ln 2$ 时，由上极限的定义，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n \geqslant n_0$ 时，就有 $\ln\ln a_n < n\ln 2$, 也就是 $a_n < e^{2^n}$, 这时对 $n \geqslant n_0$, 有

$$\begin{aligned}
x_n &= \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}} \\
&\leqslant \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + 1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \cdots + \sqrt{e^{2^n}}}} \\
&\leqslant \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} - 1} + e^{2^{n_0}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1}}}} \\
&\leqslant \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} - 1} + e^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

所以 x_n 是单调递增有上界的序列，故收敛。

当 $\alpha > \ln 2$ 时，存在 $\beta > 2$, 对任意的 n_0, 都有 $n > n_0$, 使得 $a_n > e^{\beta^n}$, 这时

$$\begin{aligned}
x_n &= \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}} \\
&> \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} - 1} + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0-1}}}} \\
&> e^{(\frac{\beta}{2})^n}
\end{aligned}$$

显然，$\{x_n\}$ 发散。

例题 2.116 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 其中 $y_n = 1 + \dfrac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$，$y_0 = 1$

证明 假设极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并记极限为 A, 两边取极限

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{或} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{舍去}$$

现在来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 因为

$$\begin{aligned}
0 < \left|y_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| &= \left|1 + \frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \left|\frac{y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}}{2\underbrace{(y_{n-1}+1)}_{>2}\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{>0.5}}\right| \\
&< \frac{1}{2}\left|y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right| \quad \text{(递推)} \\
&< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left|y_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right| \to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

于是由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

例题 2.117 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}^+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$

证明 [18] 由 $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ 平方可得 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \dfrac{1}{a_n^2} + 2$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 &= a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \geqslant a_n^2 + 2 \\
&\geqslant \cdots \geqslant a_0^2 + 2(n+1)
\end{aligned}$$

于是有

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_0^2 + 2(n+1) = 2n+3 \Longrightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

---

[8] http://pxchg1200.is-programmer.com/posts/43135.html

故

$$
\begin{aligned}
a_n^2 &= a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 \leqslant a_{n-1}^2 + \frac{1}{2n-1} + 2 \\
&\leqslant \cdots \leqslant a_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
a_0^2 + 2n \leqslant a_n^2 \leqslant a_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}
$$

$$
1 \leqslant \frac{a_n^2}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{n} \frac{n}{2n+1}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{H_{2n} - H_n}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}\big) - \frac{1}{2}\big(\ln n + \gamma + \varepsilon_n\big)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln n}{n} = 0
\end{aligned}
$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{2n+1} = 1$, 于是

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1
$$

定理 2.14 (夹逼定理)

如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件

(1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$, 那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$ 存在且等于 A.

例题 2.118 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \lim_{x\to 0^+} |x\ln x| &= \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{2\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+} \left|-2\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right| \\
&\leqslant \lim_{x\to 0^+} \left|-2\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+} \left|2\sqrt{x}\right| = 0
\end{aligned}
$$

故由夹逼则知

$$
\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0
$$

2.4 无穷小的比较

下面的定理说明无穷小与函数极限的关系.

定理 2.15

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $fx) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小.

定理 2.16 (等价无穷小的充要条件)

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

证明 先证必要性. 设 $\alpha \sim \beta$, 则

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

因此 $\beta - \alpha = o(\alpha)$, 即

$$\beta = \alpha + o(\alpha).$$

再证充分性. 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1,$$

因此 $\alpha \sim \beta$, 证毕.

例题 2.119 证明：当$x \to 0$ 时, 有 $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim x$

证明

$$\begin{aligned}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) &= \ln\left(1 + \left(x + \sqrt{1+x^2} - 1\right)\right) \\ &\sim \left(x + \sqrt{1+x^2} - 1\right) = x\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right) \sim x\end{aligned}$$

例题 2.120 求极限: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x}$

解 *(by ytdwdw)* 注意到

$$\left|\frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \leqslant \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|, \ \forall x \neq 0$$

由夹逼准则得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$$

但在承认 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$ 的前提下, 对于利用等价关系的算式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[x \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x^2 \sin\frac{1}{x}}\right] \\ &= \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

1. (2.13) 错误. 存在分母 $\sin\dfrac{1}{x} = 0$, 去心邻域无定义, 不满足极限定义.
2. (2.13) 正确. 因为在那些让 $x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ 为 0 的点上, 不妨认为 $\dfrac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x^2 \sin\frac{1}{x}}$ 的值为 1, 过于强调此题不能用等价关系是舍本逐末.

考研范围, 错的！

例题 2.121 求极限: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{1 - \cos^{\alpha} x}\sqrt{1 - \cos^{\beta} x}}$

解 注意到

$$1 - \cos^{\alpha} x = 1 - \left(1 + (\cos x - 1)\right)^{\alpha} \sim -\alpha(\cos x - 1) \sim \frac{\alpha}{2}x^2$$

于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{1 - \cos^{\alpha} x}\sqrt{1 - \cos^{\alpha} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}x^2}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}x^2}\sqrt{\frac{\beta}{2}x^2}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

例题 2.122 (CMC, 2009) 求 $x \to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解 注意到当 $x\to 1^-$ 时，$f(n)=x^{n^2}$ 在 $n\in[0,+\infty)$ 内单调递减，因此一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}t\\&<1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=1+\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x\,,\quad x\to 1^-\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}t>\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x\,,\quad x\to 1^-$$

故

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t+1\,,\quad x\to 1^-$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u]{t^2=u}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

定义 2.5 ($f(x)=O(g(x))$)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某个去心领域上有定义，且 $g(x)\neq 0$.

$$f(x)=O(g(x))\ (x\to a)\Leftrightarrow \exists M>0,\ s.t\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant M\text{ 在 }a\text{ 的某个去心领域上成立.}$$

♣

2.4.1 拆项法求极限

例题 2.123 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\=&\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{4x^2+x}-2x+2x)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\=&\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{4x^2+x}-2x)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\=&\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right)\right]\\=&\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]\\=&\frac{1}{4}\ln 2+1\end{aligned}$$

例题 2.124 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x}}-1}{x}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{e^x-1\sim x} e\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x}\\
&\xlongequal{\text{拆项}} e\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-2x+2x-\ln(1+2x)}{2x}\\
&=2e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{2x}+e\lim_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{2x}\\
&\xlongequal{x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2} 2e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}+e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x}=\frac{e}{2}
\end{aligned}
$$

进一步可参考我的文章 求极限：添项拆项法的应用

例题 2.125 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[(x+a)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x+a}}\right]+\lim_{x\to+\infty}a(x+a)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1\right]+a\\
&\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x\right]+a\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x}\ln x\right)+\left(\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x+a}\ln x\right)\right]+a\\
&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{a}{x^2}+\frac{a\ln x}{x(x+a)}\right]+a=a
\end{aligned}
$$

例题 2.126 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$

解

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+o(x^2)$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-\sin^2x+\sin^2x-2(1-\cos x)+4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-2(1-\cos x)}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\sin^4x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3}-\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^2)\right)}{x^4}\\
&=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6\times\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^4)}{x^4}\\
&=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

例题 2.127 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2\ln x}$.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2\ln x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-x}{x^2\ln x}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-e^{\ln x}+e^{\ln x}-x}{x^2\ln x}\\
&\xlongequal{\text{拆项}}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-e^{\ln x}}{x^2\ln x}+\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln x}-x}{x^2\ln x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln x}\left(e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)-\ln x}-1\right)}{x^2\ln x}+0 \\
&\xlongequal{\text{等价}} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)-\ln x\right)}{x^2\ln x} \\
&\xlongequal{\text{整理}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin x)-x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin x)-\sin x+\sin x-x}{x^2} \\
&\xlongequal{\text{拆项}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2} \\
&\xlongequal{\text{等价}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例题 2.128 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} &\xlongequal[f^g=e^{g\ln f}]{\text{取对数}} \exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right) \\
&= \exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e}\right) \\
&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x} \exp\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{ex} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x} \\
&\xlongequal{e^x-1\sim x} \exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\
&\xlongequal{x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

进一步可参考我的文章 求极限：取对数的“套路”

例题 2.129 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}}}{x^2}\left(e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}-1\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-\frac{\ln(1+x)-x}{x}-1\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^2 \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^2/2}{x}\right)^2=\frac{e^{e+1}}{8}
\end{aligned}
$$

例题 2.130 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right] \\
=&\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}=2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\ln 2}\sqrt{4+t}\ln(2+t)-1}{t} \\
=&2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\exp\ln\left(\frac{1}{2\ln 2}\sqrt{4+t}\ln(2+t)\right)-1}{t} \\
=&2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{-\ln 2-\ln\ln 2+\frac{1}{2}\ln(4+t)+\ln\ln(2+t)}{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=2\ln 2\left(\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{t}{4})}{t}+\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\frac{\ln(2+t)}{\ln 2}}{t}\right)\\
&=2\ln 2\left(\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}}{t}+\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{t}{2})}{\ln 2}\right)}{t}\right)\\
&=2\ln 2\left(\frac{1}{8}+\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t}{2\ln 2}}{t}\right)=\frac{1}{4}\ln 2+1
\end{aligned}
$$

例题 2.131 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)$

解 注意到

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{e}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}}-e^{\frac{\ln[(n)!]}{n}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln[(n)!]}{n}}-1\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln(n!)}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\frac{n\ln[(n+1)!]}{n+1}-\ln(n!)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\ln[(n+1)!]-\ln(n!)-\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}\right]\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)\right]\\
&=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)=\frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

例题 2.132 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)$

解 当 $x\to0$ 时, $\tan x-\sin x=\frac{x^3}{2}$, 于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x-\sin\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x\right)^3}{2}=-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}
\end{aligned}
$$

例题 2.133 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$

解 *(by ytdwdw)* 由

$$
\lim_{n\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{2}{3}
$$

得存在常数 C 使得

$$
\left|\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right|\leqslant\frac{C\sin^4 nx}{x}\leqslant Cn,\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).
$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^3 x\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{+\infty}\frac{6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{\textit{Froullani}} \ln 2\end{aligned}$$

2.5 函数的连续性与间断点

定义 2.6 ($f(x)$ 在 x_0 处连续)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,\quad \text{或者}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定义用“ε-δ”语言表述如下:

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ♣

例题 2.134 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}\ ,\ \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 点连续

证明 [24]

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\big[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\big]$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\big[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\big]$$

又, 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 点也连续; 由连续函数的和、差仍连续,
故 $\varphi(x),\psi(x)$ 在点 x_0 点连续

例题 2.135 设 f 与 g 为两个周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[f(x)-g(x)\big]=0$. 证明: $f=g$

证明 [18] 设 f 和 g 的周期分别为 T_f 和 T_g, 则对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\lim_{n\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\big[(f(x+nT_f)-g(x+nT_f)+\\ &\qquad (g(x+nT_f+nT_g)-f(x+nT_f+nT_g))+(f(x+nT_g)+g(x+nT_g))\big]\\ &=0+0+0=0\end{aligned}$$

故 $f(x)=g(x)$, 所以 $f=g$

例题 2.136 (华东师大; 南航) 设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$,
且 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 连续. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为常数

解 当 $x>0$ 时, 由已知条件, 有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x<0$ 时, $f(x)=f(x^2)=f(1)$

$$f(x)=f(x^2)=f(|x|^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}|x|^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x=0$ 时, $f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(1)=f(1)$.

综上知, $f(x)\equiv f(1)$(常数)

例题 2.137 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有定义, 且 $e^{xf(x)}$ 和 $e^{-f(x)}$ 都在 $(0,1)$ 内单调不减, 求证: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

证明 任意 $0<x_0,x<1$, 我们有

$$e^{-f(x)}-e^{-f(x_0)}=e^{-f(x_0)}\left[e^{f(x_0)-f(x)}-1\right]\geqslant0\Rightarrow f(x_0)\geqslant f(x)$$
$$e^{xf(x)}-e^{x_0f(x_0)}=e^{x_0f(x_0)}\left[e^{xf(x)-x_0f(x_0)}-1\right]\geqslant0\Rightarrow xf(x)\geqslant x_0f(x_0)$$

对于后者, 变形得

$$x[f(x)-f(x_0)]\geqslant(x_0-x)f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\geqslant\frac{x_0-x}{x}f(x_0)$$

因此

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x}f(x_0)\leqslant\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)\leqslant0$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

定理 2.17 (反函数的连续性)

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续.

2.5.1 函数的间断点

定义 2.7 (函数的间断点)

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义... 同 7p58

1. 第一类间断点
   - 可去间断点: 极限存在且不等于函数值 (甚至函数值可以无定义)
   - 跳跃间断点: 左右极限存在且不相等
2. 第二类间断点
   - 无穷间断点: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$
   - 震荡间断点: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 震荡不存在

2.5.2 闭区间上连续函数的性质

例题 2.138 证明: 对任给的正实数 $A_{1011},A_{1012},\cdots,A_{2021}$, 函数

$$y=A_{1011}\cos(1011x)+A_{1012}\cos(1012x)+\cdots+A_{2021}\cos(2021x)$$

在区间 $[0,2\pi]$ 上至少有 2021 个零点.

证明 (by mathe)[9] 构造函数

$$f_k(x)=\frac{A_{1011}}{1011^{4k}}\cos(1011x)+\frac{A_{1012}}{1012^{4k}}\cos(1012x)+\ldots+\frac{A_{2021}}{2021^{4k}}\cos(2021x)$$

显然对于充分大的 k, 必然有

$$\frac{A_{1011}}{1011^{4k}}>\frac{A_{1012}}{1012^{4k}}+\ldots+\frac{A_{2021}}{2021^{4k}},$$

于是函数

$$f_k(\frac{2k\pi}{1011})>0,\quad f_k(\frac{2k\pi+\pi}{1011})<0,$$

所以我们得出对于充分大的 k, 函数 $f_k(x)$ 在一个周期 $[0,2\pi]$ 中至少有 2022 零点. 另外由于如果周期为 L 的连续可微函数 $h(x)$ 在一个周期内有 s 个零点, 那么容易证明, $h'(x)$ 至少也有 s 个零点. 而函数 $f_k(x)$ 求导 $4k$ 次以后为 $f_0(x)$, 即题目中的函数, 所以 $f_0(x)$ 在一个周期 $[0,2\pi]$ 中也至少有 2022 个零点。

定理 2.18 (介值定理)

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$, 那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=C$.

证明 构造辅助函数, 设 $\varphi(x)=f(x)-C$,
则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\varphi(a)=A-C$ 与 $\varphi(b)=B-C$ 异号 (C 在 A 与 B 之间),
所以由零点定理知, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $\varphi(\xi)=0$. 而 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$,
于是得到

$$f(\xi)=C\quad(a<\xi<b).$$

该定理的几何意义是: 连续曲线 $y=f(x)$ 与数 A 和数 B 之间的任一条水平直线 $y=C$ 至少有一个交点

笔记 介值性定理的条件与结论分析:

(1) 不连续的函数不一定具有介值性

- 定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点不连续, 但在 $[1,1]$ 上具有介值性.

(2) 具有介值性的函数不一定连续

- [7] 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q},x\neq 0,1\\ -x, & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}\\ 1, & x=0\\ 0, & x=1\end{cases}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, 是一个处处不连续的函数, 其值域为 $[-1,1]$, 具有介值性.
- 康威十三进制函数. https://en.wikipedia.org/wiki/Conway_base_13_function

练习 2.11 设 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=1,g(0)=0$, 单调递增函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 0,f(x)\leqslant 1$. 证明: $f(x)=g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一定有解.

解 只需考察 $f(0)\neq g(0)$, 则 $f(0)>g(0)=0$. 由 $g\in C[0,1]$ 可知 $\exists\varepsilon_0>0$, 使得当 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon_0$ 时, 有

$$g(x)<f(0)\leqslant f(x).$$

令 $A=\{t:x\in[0,t],g(x)<f(x)\}$, 则 $\varepsilon_0\in A$, 记 $S=\sup A$. 若 $S=1$, 则对 $\forall x\in[0,1)$, 有 $g(x)<f(x)\leqslant f(1)$, 则

$$1\geqslant f(1)\geqslant\lim_{x\to 1^-}g(x)=g(1)=1,$$

[9] https://www.zhihu.com/question/486099188

因此 $f(1)=g(1)=1$. 若 $S<1$, 则对 $\forall x\in[0,S)$, 有 $g(x)<f(x)\leqslant f(S)$, 则

$$f(S)\geqslant \lim_{x\to S^-} g(x)=g(S),$$

则 $f(S)>g(S)$. 于是 $\exists\varepsilon_1>0$, 使得 $S\leqslant x\leqslant S+\varepsilon_1$ 时, 有 $g(x)<f(S)\leqslant f(x)$, 则 $S+\varepsilon_1\in A$, 与 $S=\sup A$ 矛盾.

2.5.3 一致连续性

问题 2.1 为什么要引入一致连续这个概念?

解 [25] 一致连续首先是定义在一个集合上。也就是说，只要这个集合上任意两点的距离足够小，它们对应的函数值的距离也要足够小。所以这是函数的一种 *global* 性质。具体在用途上

1. 函数的延拓 (*extension*)。具体是，定义在一个集合 A 上的一致连续函数，如果值域的空间是完备的，那这个函数可以唯一的 *extend* 到 A 的 *closure* 上去。
2. 一致连续函数能把柯西序列映射到柯西序列。而逐点连续函数则不一定，譬如反函数的例子。
3. 在严格定义黎曼积分时，需要一致连续。
4. 在分析中很重要的 *Arzela-Ascoli* 定理的叙述中，需要等度连续 (*equi-continuity*) 的概念。等度连续说的就是，一族连续函数，不仅每个函数都要一致连续，而且一致的“程度”都要差不多。

定义 2.8 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 中, 如果任给 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $x_1,x_2\in I$, 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 中**一致连续**.

♣

例题 2.139 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

证明 因为对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant|x_2-x_1|$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

例题 2.140 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 不上一致连续

证明 取原点附近的两点

$$x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数, 这样的 x_1,x_2 显然在 $(0,1]$ 上. 因

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$$

故只要 n 取得足够大, 总能使 $|x_1-x_2|<\delta$. 但这时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon$$

不符合一致连续的定义, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不上一致连续

例题 2.141 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界, 证明: $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

解 对任意 $0<x_1<x_2<+\infty$, 根据 *Cauchy* 中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi).$$

设 $M=\sup\{2|f'(x)|\sqrt{x}:x\in(0,+\infty)\}<+\infty$, 则

$$|f(x_2)-f(x_1)|=2|f'(\xi)|\sqrt{\xi}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\leqslant M\sqrt{x_2-x_1}.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

例题 2.142 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明:$m(x)=\min\limits_{t\in[a,x]}f(t),M(x)=\max\limits_{t\in[a,x]}f(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续。

解 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，事实上，对 $\forall\ a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$

$$0\leqslant m(x_1)-m(x_2)\leqslant\max_{t\in[x_1,x_2]}f(t)-\min_{t\in[x_1,x_2]}f(t)=\omega(f,[x_1,x_2])$$

根据 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知它在 $[a,b]$ 上一致连续，从而

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,st\ \ \forall\ a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$$

只要 $x_2-x_1<\delta$，就有 $\omega(f,[x_1,x_2])<\varepsilon$ 从而对这样的 δ,x_1,x_2, 必有

$$0\leqslant m(x_1)-m(x_2)<\varepsilon$$

从而 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，即连续. 类似地，当 $M(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 的最大值时，$M(x)$ 亦连续.

练习 2.12 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\forall x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}f(x+n)=0\quad(n\in\mathbb{N}).$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 [10] 因为 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x',x''\in[0,+\infty),|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将 $[0,1]$ 等分成 $0=x_0<x_1<\cdots<x_m=1$, 使每个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的长度 $\frac{1}{m}<\delta$. $\forall x\geqslant1$, $x-[x]\in[0,1)$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow[x]\to+\infty$. $\exists i\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$, s.t. $x-[x]\in[x_i,x_{i+1}]$, 即

$$0\leqslant x-[x]-x_i<\delta$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立, 故对

$$\forall x_i,i=0,1,2,\cdots,m.\ \lim_{n\to+\infty}f(x_i+n)=0.$$

因此, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时 $|f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对 $\forall i\in\{0,1,2,\cdots,m\}$ 成立. 当 $x>N>1$ 时, $[x]>N$, 且

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f([x]+x_i)+f(x_i+[x])|\\&\leqslant|f(x)-f([x]+x_i)|+|f(x_i+[x])|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

例题 2.143 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对 $\forall\alpha>0$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n\alpha)=0$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$.

解 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\forall x,y\in[0,+\infty).$$

对上述 ε, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n\delta)=0$ 知: $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|f(n\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$.
取 $A=N\delta,\forall x>A,\exists n\geqslant N$, 使得

$$n\delta\leqslant x<(n+1)\delta\Leftrightarrow0<x-n\delta<\delta.$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(n\delta)|+|f(n\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

[10] 徐森林《数学分析精选习题全解 (上)》, P73

定理 2.19 (连续周期函数必一致连续)

若函数 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明 设 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(x)$ 在 $[0,2T]$ 上一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in[0,2T]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 满足 $|x_1-x_2|<\delta<T$, 则必存在整数 m, 使 $x_1=mT+t_1, x_2=mT+t_2$, 且 $\min\{t_1,t_2\}\in[0,T]$. 于是, $t_1,t_2\in[0,2T]$ 且满足 $|t_1-t_2|\leqslant|x_1-x_2|<\delta$, 故

$$|f(t_1)-f(t_2)|=|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

例题 2.144 证明: $f(x)=\sin^2 x+\sin x^2$ 不是周期函数.

解 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续显然. 若 $f(x)$ 是周期函数由 (2.19) 知, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必一致连续, 所有只需要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一直连续即可. 事实上, 取 $x_1=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, x_2=\sqrt{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}, n=1,2,\cdots$. 尽管

$$|x_1-x_2|=\frac{\pi}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}}\to 0\ (n\to\infty),$$

但 $|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin^2 x_1-\sin^2 x_2-2|\to 2\neq 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. 这里应用了

$$\begin{aligned}|\sin^2 x_1-\sin^2 x_2|&=|\sin x_1-\sin x_2||\sin x_1+\sin x_2|\\&\leqslant 4\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\&\leqslant 2|x_1-x_2|\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

第三章 导数与微分

3.1 导数及其计算

定义 3.1 (导数)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义, 若

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

上式极限存在且有限, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

♣

笔记 **错误的证明:** 对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 因为 $f'(x_0)$ 存在, 则依定义有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3.1}$$

又由 *Lagrange* 中值定理

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi),\quad x_0\gtrless\xi\gtrless x \tag{3.2}$$

将 (3.2) 代入 (3.1), 得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(\xi) \tag{3.3}$$

由于 $x_0\gtrless\xi\gtrless x$, 所以在 x 趋于 x_0 的过程当中, ξ 也是趋于 x_0 的, 于是

$$\lim_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0) \tag{3.4}$$

于是断定, (3.4) 表明了 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 又由 x_0 的任意性, 知 $f'(x)$ 处处连续。

错误分析:

$$\lim_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)\not\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f'(x)=f(x_0).$$

- (3.4) 表明在 x_0 的去心邻域, 存在 ξ 的某个"集合"使得 $f(x_0)=f'(\xi)$. 但不能说明 ξ 可以取完 x_0 的去心邻域的内所有点.

例题 3.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任何 x,y 恒有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$, 求 $f(x)$ 的表达式

解 首先在等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=0$. 对固定的 x 以及任意的 $y\neq 0$ 都有

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

即

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x$$

令 $y\to 0$, 由 $f'(0)=1$ 则得到 $f'(x)=2x+1$ 解这个微分方程并注意到 $f'(0)=1$, 就有 $f(x)=x^2+x$

例题 3.2 设函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 处可导, 且对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$.

证明 在关系式 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 中令 $x=y=1$, 则得到 $f(1)=0$

$$f(xy)=yf(x)+xf(y)\Longleftrightarrow f(xy)-f(x)=yf(x)-f(x)+xf(y)$$

上式两边同除以 $x(y-1)$ 可得

$$\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{yf(x)-f(x)+xf(y)}{x(y-1)}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

令 $y\to 1$ 得

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$$

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$.

例题 3.3 如果 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 x_0 处可导当且仅当 $g(x_0)=0$

证明 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 于是 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$, 由导数定义我们有

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|x-x_0|g(x)-0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|x-x_0|g(x)-0}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0^-}g(x)=-g(x_0)$$

1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)\Longrightarrow g(x_0)=-g(x_0)\Longrightarrow g(x_0)=0$$

2) 若 $g(x_0)=0$, 显然有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处可导

例题 3.4 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0)=0$, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a.$$

证明: $f'(0)=a$.

解 先证明: $f'_+(0)=a$. 由已知条件, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$, 有

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-a\right|<\varepsilon$$

或

$$x(a-\varepsilon)<f(2x)-f(0)<x(a+\varepsilon) \tag{3.5}$$

由式 (3.5) 可得

$$\frac{x}{2}(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{x}{2}(a+\varepsilon)$$

$$\frac{x}{2^2}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)<\frac{x}{2^2}(a+\varepsilon)$$

$$\vdots$$

$$\frac{x}{2^n}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<\frac{x}{2^n}(a+\varepsilon)$$

将上述不等式相加, 可得

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a+\varepsilon),$$

$\forall n$, 令 $n\to\infty$, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以有

$$x(a-\varepsilon)<f(x)-f(0)<x(a+\varepsilon)$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-a\right|<\varepsilon.$$

这表明 $f'_+(0)=a$. 同理可证: $f'_-(0)=a$. 故 $f'(0)=a$

例题 3.5 (知乎,453263320) 设在 $(0,1)$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p^3}, & x=\dfrac{q}{p}\,(p,q\in\mathbb{N},p\text{ 与 }q\text{ 互素})\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

求证: $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 可微, $\alpha=\dfrac{b\sqrt{2}}{a}$, a,b 为自然数

证明 (by 予一人) 相当于证明 $L:=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ 存在, 依函数极限的归结原理, 对任意序列 $\{x_n\}$, 只要 $x_n\to\alpha$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}$ 存在且相等.

- 若 x_n 是无理数, 由于 α 也是无理数, 依定义即得 $f(x_n)\equiv 0=f(\alpha)$, 于是 $\dfrac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}=0$.
- 若 x_n 是有理数, 则设 $x_n:=\dfrac{q_n}{p_n}$, 其中 $p_n,q_n\in\mathbb{N}$, 于是有

$$\left|\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}\right|=\left|\frac{\frac{1}{p_n^3}-0}{\frac{q_n}{p_n}-\frac{b\sqrt{2}}{a}}\right|=\frac{a}{p_n^2|q_na-p_nb\sqrt{2}|}=\frac{a(q_na+p_nb\sqrt{2})}{p_n^2|q_n^2a^2-2p_n^2b^2|},$$

可以证明, $q_n^2a^2-2p_n^2b^2\neq 0$, 若其不然, 则 $\dfrac{q_na}{p_nb}=\sqrt{2}$, 这是不可能的. 但 $q_n^2a^2-2p_n^2b^2\in\mathbb{Z}$, $|q_n^2a^2-2p_n^2b^2|\geqslant 1$. 于是有

$$\left|\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}\right|\leqslant\frac{a(q_na+p_nb\sqrt{2})}{p_n^2}=\frac{a(ax_n+b\sqrt{2})}{p_n}.$$

注意到, α 是无理数, 依逼近定理, $x_n\to\alpha$ 必然蕴含 $p_n\to+\infty$. 于是 $\dfrac{a(ax_n+b\sqrt{2})}{p_n}\to 0(n\to\infty)$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}=0$. 综上两方面, 即证.

例题 3.6 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}$ 存在. 问 $f(x)$ 在 0 点是否可导?

解 *(by ytdwdw)* 可导. 不妨设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}=0$ 以及 $f(0)=0$. 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

因此, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得当 $0<|x|<\eta$ 时,

$$\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}<0$$

特别, 当 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\eta$ 时, 成立

$$\sin\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}}. \tag{3.6}$$

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, 由假设, 存在 $\varepsilon\in(0,\frac{\eta}{2})$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(\sin x)|\leqslant\varepsilon|x^3|$$

记 $a_0(x)=x, a_{n+1}(x)=\sin(a_n(x))$ 并取整数 k 满足 $\dfrac{1}{x^2}+1\leqslant k\leqslant\dfrac{4}{x^2}$. 则利用 (3.6) 归纳可证

$$|a_n(x)|=a_n(|x|)\leqslant\frac{2}{\sqrt{k+n}},\quad \forall n\geqslant 0.$$

从而

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f(a_n(x))-f(a_{n+1}(x))|\leqslant\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x)|^3$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(k+n)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \varepsilon \int_{k-1}^{+\infty} \frac{8}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t = \frac{16\varepsilon}{\sqrt{k-1}} \leqslant 16\varepsilon|x|, \quad \forall\, 0<|x|<\delta$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \leqslant 16\varepsilon, \quad \forall\, 0<|x|<\delta$$

从而得到 $f'(0)=0$.

例题 3.7 若 $f(x)$ 为在 $x=0$ 点处的可微函数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)$ 严格大于 0, 则有极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| = \frac{f'(0)}{\alpha}, \ \forall \alpha > 1$$

解 *(by Bruce)* 因为 $f(0)=0$, 且 $f(x)$ 可微, 则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. 由极限定义知 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有

$$x(|f'(0)|-\varepsilon) < f(x) < x(|f'(0)|+\varepsilon)$$

取 n 足够大, 使得 $\dfrac{1}{n}<\delta$, 并令 $x=\dfrac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 显然

$$|x| = \frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} < \frac{n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n} < \delta$$

故满足

$$\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}(|f'(0)|-\varepsilon) < \left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| < \frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}(|f'(0)|+\varepsilon) \tag{3.7}$$

注意到

$$k^{\alpha-1} < \int_{k}^{k+1} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{(k+1)^{\alpha}-k^{\alpha}}{\alpha}$$

$$k^{\alpha-1} > \int_{k-1}^{k} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{k^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}}{\alpha}$$

代回 (3.7) 式, 并对其求和

$$\frac{1}{n^{\alpha}}(|f'(0)|-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}}{\alpha} < \sum_{k=1}^{n}\left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| < \frac{1}{n^{\alpha}}(|f'(0)|+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha}-k^{\alpha}}{\alpha}$$

$$\frac{n^{\alpha}-0}{n^{\alpha}}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha} < \sum_{k=1}^{n}\left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| < \frac{(n+1)^{\alpha}-1}{n^{\alpha}}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha} \tag{3.8}$$

将 (3.8) 两侧同时取 $n\to\infty$, 并有 $\varepsilon\to 0$

$$\frac{f'(0)}{\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha} < \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| < \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}-1}{n^{\alpha}}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha} = \frac{f'(0)}{\alpha}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\right) \right| = \frac{f'(0)}{\alpha}, \ \forall \alpha > 1$$

连续, 去心邻域内连续, 邻域内连续, 可导, 去心邻域内可导, 邻域内可导, 连续可导, 二阶可导, 二阶去心邻域可导, 二阶邻域内可导, 二阶连续可导的对比分析

1. 连续: $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
2. 领域内连续
3. 可导 $\Leftrightarrow f'(a)$ 存在 $\nRightarrow$ 领域内连续;
4. 去心邻域内可导: $\lim_{x\to a} f'(x)$ 存在且有限, 但由于是去心的, $f(x)$ 在 $x=a$ 处可以没有定义;
5. 邻域内可导 $\lim_{x\to a} f'(x)$ 与 $f'(a)$ 存在且有限, 但是 $\lim_{x\to a} f'(x) \overset{?}{=} f'(a)$.
6. 连续可导 $\Leftrightarrow f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$

详细可参考: https://www.zhihu.com/question/450944524/answer/1798148908

例题 3.8 在一点可导不意味着在该点的领域内连续. 考虑

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ x^2, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

易得, $f'(0) = 0$ 而 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 点连续.

例题 3.9 在 $[a,b]$ 上可微的函数 f，它的导数不连续

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

例题 3.10 处处连续处处不可导的函数

- 德国数学家 Weierstrass 于 1872 年 7 月 18 日在普鲁士科学院出版的一篇论文

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中 $0 < a < 1$, b 为正的奇数, 使得: $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

- 荷兰数学家 Van Der Waerden 于 1930 年构造[1]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$$

$\varphi(x)$ 表示：x 与最邻近的整数之间的距离.

例题 3.11 (02,I) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界可导, 则 (　　).

A. 当 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

B. 当 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

C. 当 $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$

D. 当 $\lim_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$

解 本题正确选项为 *B*

(A) 取 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 则 $f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$. 因此 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在.

(B) 反证法. 设 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = k \neq 0$, 不妨设 $k > 0$, 由极限的保号性知存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有 $f'(x) > \frac{k}{2}$.

$$\int_M^x f'(x)\,\mathrm{d}x > \int_M^x \frac{k}{2}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow f(x) > \frac{k}{2}(x-M) + f(M)$$

上式与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界矛盾.

(C) , *(D)* 取 $f(x) = \sin x$

定理 3.1 (有限增量公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$

[1] http://math.fudan.edu.cn/math_anal/jiaoan/indiff.pdf

例题 3.12 设函数 y 在任意点 x 处的增量满足

$$\Delta y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta y+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta x\cdot\Delta y$$

且 $y(0)=0$. 计算极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\arctan x}y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

解 显然

$$\Delta x\cdot\Delta y=o(\Delta x)=o(\Delta y)\quad(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

故有

$$\Delta y\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

由定义可得 $f(x)$ 可微且

$$y'=\frac{x}{1+x^2}\Longrightarrow y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

又 $y(0)=0$, 故可得 $y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$$\int_0^{\arctan x}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\arctan x}\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\arctan x)^3\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x^2(x+\sqrt{1+x^2}-1)=x^3\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\sim x^3$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\arctan x}y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$$

定义 3.2 (切线方程与法线方程)

考虑曲线 $y=f(x)$ 和其上的点 $P(x_0,y_0)$

1. 切线方程

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

2. 法线方程

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

♣

例题 3.13 (1999.II) 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为__________

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}.$$

点 $(0,1)$ 对应参数 $t=0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$, 于是所求法线方程为

$$y-1=-2x\Longleftrightarrow 2x+y-1=0.$$

例题 3.14 求与抛物线族 $x=ay^2$ 正交的曲线族

解 由题 $x=ay^2\Longrightarrow a=\dfrac{x}{y^2}$, 等式 $x=ay^2$ 对 x 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2ay}=\frac{y}{2x}$$

由已知所求与 $x=ay^2$ 正交 (垂直), 故

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2ay}=\frac{y}{2x}$$

解此微分方程得

$$\frac{y^2}{2}+x^2=C$$

命题 3.1 (奇 (偶) 函数的导数)

在 $(-a,a)$ 内可导的奇函数的导数是偶函数;
在 $(-a,a)$ 内可导的偶函数的导数是奇函数。

命题 3.2 (周期函数的导数)

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数, 则 $f'(x)$ 仍是以 T 为周期的函数

证明 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 由导数定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+T+\Delta x)-f(x_0+T)}{\Delta x}=f'(x_0+T) \end{aligned}$$

例题 3.15 证明: $f(x)=\sin^2 x+\sin x^2$ 不是周期函数.
解[13] 易得 $f(x)$ 是连续可微函数. 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数. 于是结合连续性可得 $f'(x)$ 有界, 然而很明显

$$f'(x)=2\sin x\cos x+2x\cos x^2$$

是无界函数 (可考虑 $f'(\sqrt{2n\pi})$), 所以 $f(x)$ 不是周期函数.

定理 3.2 (反函数的求导法则)

如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x|x=f(y),y\in I_y\}$ 内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明 由于 $x=f(y)$ 在 I_y 内单调、可导 (从而连续), 由定理 2.17 知, $x=f(y)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在, 且 $f^{-1}(x)$ 在 I_x 内也单调、连续. 任取 $x\in I_x$, 给 x 以改变量 Δx $(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$, 由 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

又由于 $y=f^{-1}(x)$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

例题 3.16 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $y'\neq 0$, $y''\neq 0$, 试求 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2y},\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}$

解 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1/y'$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\right]\cdot\frac{1}{y'}\\ &=-\frac{1}{y'}\cdot\frac{1}{(y')^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=-\frac{y''}{(y')^3}.\\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{1}{y'} \end{aligned}$$

$$= -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2 y'' \cdot y''}{(y')^6} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

定理 3.3 (行列式函数的求导法则)

设函数 $f_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \ , n)$ 在区间 I 内可导，则行列式函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

也在 I 内可导，且

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

定理 3.4 (常用导数公式)

$(C)' = 0$ $\quad$ $(x^\mu)' = \mu\, x^{\mu-1}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\quad$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$ $\quad$ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x) = a^x \ln a$ $\quad$ $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad$ $(\cosh x)' = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$(\tanh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $\quad$ $(\coth x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$(\operatorname{arsinh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ $(\operatorname{arcosh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3.1.1 Darboux 定理

定理 3.5 (Darboux 中值定理, 导数的介值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则对于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的一切值 λ, 必 $\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $f'(\xi) = \lambda$

证明 令 $F(x) \triangleq f(x) - \lambda x$, $x \in [a,b]$. 则

$$F'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \ F'(b) = f'(b) - \lambda > 0.$$

由于

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) < 0,$$

由保号性知存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时, $F(x) - F(a) < 0$, 从而 a 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. 同理可证 b 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点.

另外, 由于 $F(x)$ 连续, 它在 $[a,b]$ 上有最小值, 设 $\xi\in[a,b]$ 是一个最小值点, 则 $\xi\in(a,b)$ 从而它是极小值点. 于是 $F'(\xi)=0$. 也即 $f'(\xi)=\lambda$.

例题 3.17 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上二阶可导, $f(0)=0, f'(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=1$. 证明: 存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$ 使得 $f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$.

证明 [13] 记 $F(x)=f'(x)-f^2(x)$. 则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上可导. 要证明的就是存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 由 Darboux 定理, 若结论不真, 则

$$F'(x)=f''(x)-2f(x)f'(x)>0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \tag{3.9}$$

或

$$F'(x)=f''(x)-2f(x)f'(x)<0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right). \tag{3.10}$$

若 (3.9) 式成立, 则

$$f'(x)-f^2(x)=F(x)>F(0)=1,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right],$$

即

$$\left(\arctan f(x)\right)'>1,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right].$$

于是又有

$$\arctan f(x)-x>\arctan f(0)-0=0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right],$$

特别地, $f(\frac{\pi}{4})>\tan\frac{\pi}{4}=1$. 与假设矛盾. 因此 (3.9) 式不成立. 类似可证 (3.10) 式也不成立.

因此, 必存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$ 使得 $f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$.

例题 3.18 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(x)>0$, 且 $2f'(\frac{1}{3})=f'(\frac{2}{3})$. 证明: 存在互不相同的 $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in(0,1)$, 使得

$$\frac{f'(\theta_1)}{\theta_1}+\frac{f'(\theta_2)}{\theta_2}=2\frac{f'(\theta_3)}{\theta_3}.$$

证明 (by 向禹) 令

$$F(x)=2f'(x)-x\left(\frac{f'(\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}}+\frac{f'(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}}\right)$$

分别令 $\theta_1=\frac{1}{3},\theta=\frac{2}{3}$ 并代入

$$F\left(\frac{1}{3}\right)=2f'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}f'\left(\frac{2}{3}\right)-f'\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}f'\left(\frac{2}{3}\right)$$

以及

$$F\left(\frac{2}{3}\right)=2f'\left(\frac{2}{3}\right)-f'\left(\frac{2}{3}\right)-2f'\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{2}{3}\right)-2f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

注意到 $F(\frac{1}{3})$ 与 $F(\frac{2}{3})$ 异号, $F(x)$ 具有介值性, 存在 $\theta_3\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 使得 $F(\theta_3)=0$.

例题 3.19 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

证明 (by ytdwdw[2]) 记 $c=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 令

$$g(x)=-\frac{6c}{(b-a)^3}\left[\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$

若存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$ 即结论成立. 不然, 则由 Darboux 定理,

$$f''(x)>-\frac{12c}{(b-a)^3}=g''(x),\quad \forall x\in(a,b)$$

[2]解答源自:《数学分析高等数学例题选解 V6》ytdwdw, P36

或

$$f''(x) < -\frac{12c}{(b-a)^3} = g''(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

则

$$f(x) < g(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

或

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

注意到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c,$$

我们得到矛盾. 所以反设不真. 即题中要证的结论成立

注

1. $g(x)$ 写成那样是提示为什么要引入这个函数. $g(x)$ 就是边界上为零, 两阶导数为相关常数的那个函数. 显然它是关于 $\frac{a+b}{2}$ 是对称的, 所以有如此表达式.
2. 只要题目是正确的, 这样构造的 $g(x)$ 的积分必须为 c.
3. 这里用到以下性质: 凸函数的最大值在边界上, 凹函数的最小值在边界上.
4. 作为 Darboux 定理的应用, 这题也许太简单了.

例题 3.20 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 2$, $f(1)=1$, $f(2)=6$, 证明: 存在 $\xi \in (0,2)$ 使得 $f'''(\xi) = 9$

证明 (by 西西[3]) 反证法, 假设结论不真, 由达布定理知在 $(0,2)$ 中, 只能有 $f'''(x) > 9$ 或者 $f'''(x) < 9$ 这二者之一. 我们假设是前一种情况, 后一种同理可得. 构造

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{3}{2}x^3 + 2x\right)$$

于是, 仍然有

$$h(0) = 0 \quad h'_+(0) = f'_+(0) - 2 = 0 \quad h'''(x) > 0 \quad (x \in (0,2))$$

因此 $h''(x)$ 在 $(0,2)$ 上是严格递增的,

$$f(1) = 1, f(2) = 6 \Rightarrow h(2) = 4h(1)$$

再次构造辅助函数, 令 $g(x) = h(2x) - 4h(x)$, 则

$$g(0) = 0 \quad g'_+(0) = 0 \quad g(1) = 0$$

而

$$g''(x) = 4(h''(2x) - h(x)) > 0$$

由于上面说的 $h''(x)$ 在 $(0,2)$ 上是严格递增的. 这表明 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上是严格递增的. 故

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = A \text{ 存在 (要么为有限值，要么为非正常极限)}$$

由 $g'_+(0) = 0$, 说明 $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = 0$, 即 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 因此, 在 $(0,1)$ 内, 由 $g'(x)$ 的严格递增, 有 $g'(x) > \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = 0$. 而 $g(0) = g(1) = 0$, 由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$. 这显然得出矛盾，所以命题得证。

例题 3.21 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内二阶可导, $|f(x)| \leqslant 1$, 且 $f^2(0) + [f'(0)]^2 > 1$. 证明: 存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$f''(\xi) + f(\xi) = 0.$$

[3] http://pxchg1200.is-programmer.com/categories/8320/posts?page=9

证明 根据已知

$$F(x):=f^2(x)+[f'(x)]^2\Rightarrow F'(x)=2f'(x)\big(f(x)+f''(x)\big),\quad x\in\mathbb{R}.$$

显然, 当 $f'(\xi)\neq 0$ 时, $F'(\xi)=0$ 即可, 注意到

$$f'(\xi)\neq 0\Rightarrow |f'(\xi)|^2=F(\xi)-f^2(\xi)>0$$

由于 $f(x)$ 可导, 可考虑证明存在一个 $F(x)>1$ 的极值点. 记 $F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=a>1$, 注意到 $|f(x)|\leqslant 1$, 于是只需说明存在 $f'(x)\leqslant\sqrt{a-1}$

1. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在一点 $\xi_1\in(0,\frac{2}{\sqrt{a-1}})$ 使得
$$|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(\frac{2}{\sqrt{a-1}})-f(0)}{\frac{2}{\sqrt{a-1}}}\right|\leqslant\sqrt{a-1}$$
于是 $F(\xi_1)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\leqslant 1+a-1=a=F(0)$
2. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, 类似地, 存在一点 $\xi_2\in(-\frac{2}{\sqrt{a-1}},0)$ 使得
$$F(\xi_2)\leqslant 1+a-1=a=F(0)$$

此时, 易见 $F(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上的最大值可在一内点 ξ 上取到. 于是 ξ 是 $F(x)$ 的极大值点. 从而

$$F'(\xi)=2f'(\xi)\big(f(\xi)+f''(\xi)\big)=0$$

另一方面,

$$|f'(\xi)|^2=F(\xi)-f^2(\xi)=\max F(x)-f^2(\xi)>a-1>0$$

注 或者微分方程法：将 ξ 全部换为 x

$$f''(\xi)+f(\xi)=0\Rightarrow f''(x)+f(x)=0$$

解微分方程

$$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x\Rightarrow f'(x)=C_1\cos x-C_2\sin x.$$

根据已知

$$f^2(x)+[f'(x)]^2=C_1^2+C_2^2\Rightarrow F(x):=f^2(x)+[f'(x)]^2$$

例题 3.22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=2$, $f'(0)=0$, $f(1)=e+e^{-1}$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)$$

证明 ([26],P45) 反证法：注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f'(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=f''(x)-f(x)$$

若存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$ 结论成立. 不然, 则由 Darboux 定理, 必有

$$f''(x)\geqslant f(x),\quad\forall x\in(0,1)$$

令 $F(x)=f'(x)-f(x),\forall x\in[0,1)$. 则

$$F'(x)+F(x)=f''(x)-f(x)\geqslant 0,\quad\forall x\in(0,1].$$

即

$$\left(e^x f(x)\right)'\geqslant 0\Longrightarrow e^xF(x)\geqslant e^0F(0)=-2,\quad\forall x\in(0,1].$$

类似地,

$$\left(e^{-x}f(x)\right)'=e^{-x}F(x)\geqslant -2e^{-2x},\quad x\in(0,1].$$

所以

$$e^{-x}f(x)\geqslant f(0)-\int_0^x 2e^{-2t}\,\mathrm{d}t=1+e^{-2x},\quad\forall x\in(0,1].$$

特别, $f(1) \geqslant e + e^{-1}$. 得出矛盾

3.2 高阶导数

笔记 关于高阶导数的记号

1. Newton 采用的记号:
$$\dot{y}, \quad \ddot{y}, \quad \dddot{y},$$
2. Leibniz 采用的记号:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},$$
3. Euler 采用的符号:
$$D_x y = D_x f(x),$$
4. Lagrange 采用的符号:
$$f', \quad f'', \quad f''', \quad f^{(n)},$$

例题 3.23 (梅加强, P129) 分析函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 的高阶可导性质.

解 利用导数定义可得 $f'(0) = 0$,
$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$
我们用归纳法说明
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ p_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$
其中 $p_k(t)$ 是次数为 $2k$ 的多项式. $k = 1$ 时 $p_1(t) = t^2$. 假设 $f^{(k)}$ 如上, 则显然, 而
$$f_+^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{p_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t p_k(t)}{e^t} = 0.$$
因此 $f^{(k+1)}(0) = 0$. 当 $x > 0$ 时
$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= p_k'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) e^{-\frac{1}{x}} + p_k\Big(\frac{1}{x}\Big) \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= p_{k+1}\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$
其中 $p_{k+1}(t) = t^2 p_k(t) - t^2 p_k'(t)$. 这就说明 f 是任意阶可导的光滑函数.

定理 3.6 (莱布尼茨 (Leibniz) 公式)

设 f 与 g 在区间 I 上都 n 阶可导, 则
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$
其中, $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ 为组合数, $g^{(0)} = g$, $f^{(0)} = f$

例题 3.24 求 $y = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ 的 n 阶导数.

证明 利用复数分解公式 $\dfrac{1}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{2ai}\Big(\dfrac{1}{x - ai} - \dfrac{1}{x + ai}\Big)$, 可知
$$\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right)^{(n)} = \frac{1}{2ai}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x - ai)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x + ai)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]$$

现在令 $x = a\cot\theta, 0 < \theta < \pi, \theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right)$, 则

$$x \pm ai = a\left(\cot\theta \pm i\right) = \frac{a\left(\cos\theta \pm i\sin\theta\right)}{\sin\theta}$$

由此可知

$$\frac{1}{(x\pm ai)^{n+1}} = \frac{\sin^{n+1}\theta}{a^{n+1}}\left[\cos(n+1)\theta \mp i\sin(n+1)\theta\right]$$

代入前式并注意 $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 我们有

$$\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{a^{n+2}}$$
$$= (-1)^n n!\frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arccot}(x/a)\right]}{a(x^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

例题 3.25 设 $y(x) = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(x)$

解 *(by 神琦冰河)*[27]

$$\left(\arctan x\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)^{(n-1)}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(1+x^2)^n}\left[\left(\sqrt{1+x^2}e^{i\arctan\frac{1}{x}}\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}e^{-i\arctan\frac{1}{x}}\right)^n\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)$$

例题 3.26 设 $y(x) = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$

解 *(徐森林,*[18]*)* $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y' = 1$. 利用 *Leibniz* 公式得

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + n\cdot 2xy^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2y^{(n-1)} = 0$$

令 $x = 0$ 得

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0)\,, n = 1,2,3,\cdots$$

由 $y(0) = 0$, $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 0$, 得

$$y''(0) = 0\,,\ y''''(0) = 0\,,\ \cdots\,,\ y^{2n} = 0$$

由 $y'(0) = 1$, 得

$$y^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0) = \cdots = (-1)^m(2m)!y'(0)\,,\quad m\in\mathbb{N}$$

故而 $y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!y'(0)$, $y'(0)$, 综上

$$y^{(n)} = \begin{cases} 0\,, & n \text{ 为偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

例题 3.27 设 $y(x) = \arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $\sqrt{1-x^2}y' = 1$. 再次求导, 得到

$$y''\sqrt{1-x^2} - y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow (1-x^2)'' - xy' = 0$$

利用 *Leibniz* 公式得

$$y^{(n+2)}(1-x^2) + ny^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2) - \left(xy^{(n+1)} + ny^{(n)}\right) = 0$$

整理后得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

现在用 $x=0$ 代入, 就得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0\Longrightarrow y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

由 $y(0)=0$, 得

$$y''(0)=0\,,\ y''''(0)=0\,,\ \cdots\,,\ y^{2n}=0$$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y'''(0)=1\,,\ y^{(5)}=3^2\,,\ y^{(7)}=5^2\cdot 3^2,\cdots\,,$$

即可总结为

$$y^{(2m+1)}(0)=[(2m-1)!!]^2\,,\quad m\in\mathbb{N}_+$$

综上

$$y^{(n)}=\begin{cases}0\,, & n=2m\\ [(2m-1)!!]^2\,, & n=2m+1\end{cases}$$

例题 3.28 求 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的 n 阶导数.

解 法 I(by 予一人)[28] 首先, 任取 $x,y>0$, 有

$$f(xy)=\frac{f(x)}{y}+\frac{f(y)}{x},$$

固定 x 后对 y 求 n 阶导数, 得

$$x^nf^{(n)}(xy)=f(x)\cdot\frac{(-1)^nn!}{y^{n+1}}+\frac{f^{(n)}(y)}{x}.$$

现令 $y=1$ 代入, 得

$$x^nf^{(n)}(x)=(-1)^nn!f(x)+\frac{f^{(n)}(1)}{x},$$

于是解得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^nn!\cdot\frac{\ln x}{x^{n+1}}+\frac{f^{(n)}(1)}{x^{n+1}}.$$

现在只需再求出 $f^{(n)}(1)$. 为此, 利用 *Cauchy* 乘积将 $f(x)$ 在 $x=1$ 展开, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln(1+(x-1))\cdot\frac{1}{1+(x-1)}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}(x-1)^i}{i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(x-1)^j\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\cdot(-1)^{n-k}}{k}\right)(x-1)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}H_n(x-1)^n,\end{aligned}$$

其中

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

再依函数幂级数展开与 *Taylor* 级数展开的同一性, 就有

$$f^{(n)}(1)=n!(-1)^{n+1}H_n.$$

代入即得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\cdot(\ln x-H_n).$$

法 II(by 神琦冰河)[27]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\frac{d^n}{dx^n}x^{\alpha-1}\\&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\left[(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}\right]\\&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}x^{\alpha-n-1}\right]\\&=\lim_{\alpha\to 0}\left[\Gamma(\alpha)\frac{\psi(\alpha)-\psi(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha-n)}x^{\alpha-n-1}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}x^{\alpha-n-1}\ln x\right]\\&=(-1)^{n-1}\frac{n!H_n}{x^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!\ln x}{x^{n+1}}=(-1)^{n-1}n!\frac{H_n-\ln x}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

练习 3.1 设 $f_n(x)=x^n\ln x, n\in\mathbb{N}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$

解 先求 $f_n(x)$ 的一阶导数, 有

$$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$$

两边同求 $(n-1)$ 阶导数得

$$f_n^{(n)}(x)=nf_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)!$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

将前 n 个排列起来相加, 即有

$$\begin{aligned}f_1'(x)&=(x\ln x)'=1+\ln x\\\frac{f_2''(x)}{2!}&=\frac{f_1'(x)}{1!}+\frac{1}{2}\\&\vdots\\\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}&=\frac{f_{n-2}^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}+\frac{1}{n-1}\\\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}&=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\ln x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$, 就是 $\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\ln\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$$

其中 γ 为 Euler 常数

例题 3.29 (北京市 1992 年竞赛题) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}, a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$,

求证: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛, 并求其和

证明 令 $F(x)=(1-x-x^2)f(x)$, 则 $F(x)=1$.

根据莱布尼茨公式, 对上式两边求 $(n+2)$ 阶导数, 有

$$F^{(n+2)}(x)=f^{(n+2)}(x)(1-x-x^2)+C_{n+2}^1f^{(n+1)}(x)(-1-2x)+C_{n+2}^2f^{(n)}(x)(-2)$$

$$= 0$$

令 $x = 0$ 得

$$(n+2)!a_{n+2} + C_{n+2}^{1}a_{n+1}(n+1)!(-1) + C_{n+2}^{2}a_n n!(-2) = 0$$

$$(n+2)!a_{n+2} - (n+2)!a_{n+1} - (n+2)!a_n = 0$$

于是 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 且

$$a_0 = \frac{1}{0!}f^{(0)}(0) = 1\,,\ a_1 = \frac{1}{1!}f'(0) = \left.\frac{-(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}\right|_{x=0} = 1$$

由数学归纳法可得 $n \to \infty$ 时有 $a_n \to \infty$. 原级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}}\right) \\ &= \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \to 2 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

于是级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛, 且和为 2

练习 3.2 设 $f(x) = e^x \sin 2x$ 求 $f^{(4)}(0)$

解 由麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

则

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)\left(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4)\right)$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为

$$\frac{2}{3!}x^4 - \frac{1}{3!}(2x)^3 \cdot x = -x^4$$

即有 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = -x^4$, 故 $f^{(4)}(0) = -24$.

例题 3.30 设 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2+x^4}$ 求 $f^{(100)}(0)$

解 因为

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2+x^4} = \frac{1+x^2}{1+x^6}$$

由带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 有

$$f(x) = (1+x^2)(1-x^6+\cdots+x^{96}-x^{102}+o(x^{102}))$$

所以 $f(x)$ 展开式的 100 次项为 *0*. 即 $\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!} = 0$, 故 $f^{(100)}(0) = 0$

推论 3.1 (奇 (偶) 函数在 $x = 0$ 处高阶导数)

- 奇函数的偶数阶导数为奇函数, 奇函数的奇数阶导数为偶函数.
- 偶函数的偶数阶导数为偶函数, 偶函数的奇数阶导数为奇函数.

例题 3.31 设 $f(x) = \arcsin\dfrac{x^4}{\sqrt[3]{1+x^2+\arctan^2 x}}$ 求 $f^{(5)}(0)$

解 由定理*3.1*可知

$$f(x)\text{偶函数} \Longrightarrow f^{(5)}(x)\text{奇函数}$$

又因为奇函数在 $x=0$ 处有定义时, 其值为 0. 即 $f^{(5)}(0)=0$.

3.3 隐函数及参数方程的求导

例题 3.32 求 $y=x^{x^x}$ 的导数

解 等式两边取对数得 $\ln y=x^x\ln x$, 注意到

$$(x^x)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=x^x(1+\ln x)$$

$\ln y=x^x\ln x$ 两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y}=x^x(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}x^x$$

整理可得

$$y'=x^{x^x}\left[x^{x-1}+x^x(1+\ln x)\ln x\right]$$

例题 3.33 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f\neq 0$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=$ ________

解 方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 的两边同时对 x 求导, 得

$$e^{f(y)}+xy'f'(y)e^{f(y)}=y'e^y\ln 29$$

又因为 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$, 故 $\frac{1}{x}+y'f'(y)=y'$, 即 $y'=\frac{1}{x(1-f'(y))}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=y''&=-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}+\frac{y'f''(y)}{x[1-f'(y)]^2}\\&=\frac{f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}\end{aligned}$$

例题 3.34 (北大,2019)[4] 设 $y=\arctan\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 *(by 冰河)* 注意到

$$\arctan x=\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{1-\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}x}$$

故

$$y=\arctan\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}=\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{x^4-4x^2+1-3\mathrm{i}x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1+3\mathrm{i}x(x^2-1)}$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{4x^3-8x-3\mathrm{i}(3x^2-1)}{x^4-4x^2+1-3\mathrm{i}x(x^2-1)}-\frac{4x^3-8x+3\mathrm{i}(3x^2-1)}{x^4-4x^2+1+3\mathrm{i}x(x^2-1)}\right]\\&=\frac{3(3x^2-1)(x^4-4x^2+1)-3x(x^2-1)(4x^3-8x)}{(x^4-4x^2+1)^2+9x^2(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

3.4 一阶微分及其形式的不变性

定义 3.3 (微分)

(同济 7, P111) 设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点

[4] https://wenku.baidu.com/view/779b34844a35eefdc8d376eeaeaad1f3469311ba.html

x_0 相应与自变量增量 Δx 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$, 即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

注：通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分, 记作 $\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x = \Delta x$

注 微分这个词是 Leibniz 于 17 世纪引进的, 在极限概念尚未弄清楚的情况下, 为了解释微分学的形式运算规律而引进的。他运用了在当时还没有明确定义的无穷小这一概念。在传统的教材里, 微分看作是一个“无穷小”, 这个说法比较接近 Leibniz 原来的说法, 但容易造成误解, 更不利于推广到 n 维和无穷维空间上去. 也不便于推广到流形上去。

定义 3.4 (微分)

(梅加强, P119) 设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 如果存在常数 A, 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

定理 3.7 (函数可微的充要条件)

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且当 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微时, 其微分一定是 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$

证明 (1) 必要性　设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微, 依定义有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \Longleftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x \to 0$, 由于 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小, 所以

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$, 故 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$.

(2) 充分性　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0$$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ 是 $\Delta x \to 0$ 的无穷小, 记作 α. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Longleftrightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

因为当 $\Delta x \to 0$ 时, $\alpha \to 0$, 所以 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, 且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx,

故由定义知函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微.

定理 3.8 (一阶微分的不变性)

一阶微分的不变性是指无论变量 u 是自变量还是中间变量, 均有

$$\mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

而对于高阶微分, 不成立相应的不变性.

注 事实上, 如一阶微分一样, 高阶微分也有相应的不变性. 比如, 对于二阶微分, 无论变量 u 是自变量还是中间变量, 均有

$$\mathrm{d}^2 f(u) = f''(u)(\mathrm{d}u)^2 + f'(u)\,\mathrm{d}^2u.$$

只有当 u 为自变量的时候, $\mathrm{d}^2u = 0$.

- 关于记号 $\mathrm{d}x^2$: 在高阶微分中 $\mathrm{d}x^2$ 表示的是 $(\mathrm{d}x)^2$. 应当说, 这并非一个好的记号, 但确实也是为了书写简洁

而导致的一种无奈的选择. $\mathrm{d}x^2$ 自然也可能表示 $\mathrm{d}x^2 = 2x\,\mathrm{d}x$. 至于具体表示是哪一个, 应该可以通过上下文弄明白. 必要时, 应该分别使用 $(\mathrm{d}x)^2$ 和 $\mathrm{d}(x^2)$, 以避免误解

3.5 曲率

定理 3.9 (曲率 (直角坐标系))

设 $y = f(x)$ 二次可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处的曲率值

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

定理 3.10 (曲率 (参数方程))

设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 二阶可导, 则 $K = \dfrac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}}$

证明 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

故

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

例题 3.35 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的曲率半径

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]\frac{1}{x'(t)} = \frac{\cos t - 1}{a(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2},$$

故摆线的曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|} = a(1 - \cos t)^2\left[1 + \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{1 - \cos t} = 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t} \end{aligned}$$

定理 3.11 (曲率 (极坐标系))

当曲线由极坐标形式 $r = f(\theta)$ 表示时, 则曲率为 $K = \dfrac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

定理 3.12 (弧微分)

$$y = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

第四章 微分中值定理与导数的应用

例题 4.1 已知 $|f(x)+f'(x)| \leqslant 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，证明：$|f(x)| \leqslant 1$.

证明 根据条件，可得

$$[e^x(1 \pm f(x))]' \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

故

$$e^x(1 \pm f(x)) \geqslant \lim_{x \to -\infty} e^x(1 \pm f(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此

$$1 \pm f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

即

$$|f(x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

例题 4.2 设 $f: R \to R$ 的二次可导函数, 且满足

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x), \quad x \in R$$

其中 $g(x) \geqslant 0, \forall x \in R$, 求证: f 是有界的

证明 (by 西西) 首先令 $f(-x)$ 换 $f(x)$, 即

$$f(-x) + f''(-x) = -xg(-x)f'(-x)$$

即 $f(-x)$ 也满足. 故只要证明 $x \geqslant 0$ 满足即可.

注意到: 当 $x \geqslant 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((f(x))^2 + (f'(x))^2\right) = 2f'(x)\big(f(x) + f''(x)\big) = -2xg(x)\left[f'(x)\right]^2 \leqslant 0$$

则 $(f(x))^2 + (f'(x))^2$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, 故

$$(f(x))^2 + (f'(x))^2 \leqslant f^2(0) + \left(f'(0)\right)^2$$

即

$$f^2(x) \leqslant f^2(0) + \left(f'(0)\right)^2$$

故 f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

4.1 微分中值定理

4.1.1 费马定理

定理 4.1 (费马 (Fermat) 定理)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意的 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{或}\, f(x) \geqslant f(x_0))$$

那么 $f'(x_0) = 0$

证明 [29] 不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (如果 $f(x) \geqslant f(x_0)$ 可以类似地证明).

于是, 对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 有

$$f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0),$$

从而, 当 $\Delta x > 0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0;$$

当 $\Delta x < 0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性, 便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

所以, $f'(x_0)=0$. 证毕

例题 4.3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$，

求证：存在 $\xi \in (0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

解 由题给不等式，令 $x \to 0$ 得 $f(0)=0$，且由 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$ 得

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

令

$$F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$$

(1) 若对一切 $x \geqslant 0$ 有 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，所以对任何正数 ξ 有

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

(2) 若存在 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)\neq\dfrac{x_0}{1+x_0^2}$，则 $F(x_0)<0$，由于

$$F(0)=f(0)-0=0\,,\quad F(+\infty)=f(+\infty)=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最小值，设最小值为 $F(\xi)$，由费马定理得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

-

4.1.2 罗尔定理

定理 4.2 (罗尔 (Rolle) 定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零, 即 $f'(\xi)=0$

证明 由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理, 在 $[a,b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 于是

(1) 若 $M=m$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数 M. 因此, 对任意 $x\in(a,b)$, 有 $f'(x)=0$. 所以, 任取 $\xi\in(a,b)$, 有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M>m$, 因为 $f(a)=f(b)$, 所以 M 与 N 中至少有一个不等于 $f(a)$ 与 $f(b)$, 不妨设 $M\neq f(a)$, 则在 (a,b)

内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=M$, 即

$$f(x)\leqslant f(\xi)=M\,,\quad \forall x\in[a,b].$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处可导, 下面证明 $f'(\xi)=0$. 利用导数的定义 (2-5), 有

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

注意到当 $x>\xi$ 时,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0;$$

当 $x<\xi$ 时,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0;$$

再结合函数在一点可导的条件及极限的保号性, 得到

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0,$$
$$f'(\xi)=f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0,$$

所以, $f'(\xi)=0$. 证毕.

罗尔定理构造函数思路

- ❏ 微分方程
- ❏ 常数 K 值法
- ❏ 行列式: 例4.36
- ❏ 待定多项式函数: 例4.29, 例4.35

例题 4.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$;

(2) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$, $\eta\neq\xi$, 使得 $f''(\eta)=f(\eta)$

证明 (1) 由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知存在 $f(\lambda)=0\,(a<\lambda<b)$, 令

$$g(x)=f(x)e^{-x}\Rightarrow g(\lambda)=g(a)=0$$
$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}\big(f'(x)-f(x)\big)$$

显然 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导, 由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi_1\in(a,\lambda)$, 使得

$$g'(\xi_1)=0\,,\quad (a<\xi_1<\lambda)$$

同理, 至少存在一点 $\xi_2\in(\lambda,b)$, 使得

$$g'(\xi_2)=0\,,\quad (\lambda<\xi_2<b)$$

(2) 法 I. 构造函数

$$h(x)=f^2(x)-[f'(x)]^2\Rightarrow h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$
$$\Rightarrow h'(x)=2f(x)f'(x)-2f'(x)f''(x)=2f'(x)\big(f(x)-f''(x)\big)$$

显然 $h(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上满足罗尔定理的条件, 因此至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$, $\eta\neq\xi$, 使得

$$h'(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)=f(\eta)$$

法 II(微分方程法). 将 η 替换为 x, 即 $f''(x)=f(x)$. 解微分方程

$$y''-y=0\Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{-x}\Rightarrow y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$$

去掉一个常数 (利用 (1) 的结论)

$$y-y'=2e^{-x}C_2\Rightarrow 2C_2=e^x(y-y')$$

从而构造函数

$$h(x)=e^{x}(f(x)-f'(x))\Rightarrow h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$

$$\Rightarrow h'(x)=e^{x}(f(x)-f''(x))$$

例题 4.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 试证: 至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$.

证明 令 $x=\tan t$, 构造

$$F(t)=\begin{cases} f(\tan t), & t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\\ A, & t=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

则由

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^{+}}F(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^{-}}F(t)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

得 $F(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 连续, 又 $F(t)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内可导, 且 $F(-\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})$, 根据罗尔定理, 存在 $\eta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 使得 $F'(\eta)=0$. 即

$$f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$$

由于 $\sec^2\eta\neq0$, 故 $f'(\tan\eta)=0$, 令 $\xi=\tan\eta$, 则 $f'(\xi)=0$.

例题 4.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 并且 $f(0)=f'(0)=0$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 证明: 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f'''(\xi)=0$.

证明 分析：三阶及以上一般优先考虑泰勒公式，但题目的等式，用泰勒会导致不一定可积。考虑罗尔定理。于是, 构造 $G(0)=G(1)=G(2)$, 且 $G'''(x)=f'''(x)$ 或者 $G^{(4)}(x)=f'''(x)$.

[30] [31] 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 令

$$G(x)=F(x)-x^3F(1)\Rightarrow G^{(4)}(x)=f'''(x)$$

易得

$$G(2)=G(1)=G(0)=G'(0)=G''(0)=0$$

首先, 对 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 分别用 Roller 定理知, 存在 $c_1\in(0,1)$, $c_2\in(1,2)$ 使得

$$G'(0)=G'(c_1)=G'(c_2)=0$$

接着, 对 $(0,c_1)$ 与 (c_1,c_2) 分别用 Roller 定理知， 存在 $d_1\in(0,c_1)$, $d_2\in(c_1,c_2)$ 使得

$$G''(0)=G''(d_1)=G''(d_2)=0$$

进一步, 对 $(0,d_1)$ 与 (d_1,d_2) 分别用 Roller 定理知， 存在 $e_1\in(0,d_1)$, $e_2\in(d_1,d_2)$ 使得

$$G'''(e_1)=G'''(e_2)=0$$

最后, 对 (e_1,e_2) 用 Roller 定理知， 存在 $\xi\in(e_1,e_2)\subset(0,2)$, 使得

$$G^{(4)}(\xi)=f'''(\xi)=0$$

例题 4.7 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得

$$\xi^2f(\xi)=\int_0^{\xi}(x^2+x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 法 I(by 独步)[32]. 记

$$y=\int_0^x(t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow x^2f(x)=\frac{x}{x+1}y'$$

则待证式化为

$$y=\frac{x}{x+1}y'\Rightarrow y=Cxe^{x}\Rightarrow\frac{\int_0^x(t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t}{xe^{x}}=C$$

故构造函数 $F(x)$ 如下: 设 $F(0)=0$, 且

$$F(x)=\frac{\int_0^x (t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t}{xe^x},\quad x\in(0,1]$$

根据下面的极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x (t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{1}{2}f(0),\tag{4.1}$$

反证法. 假设结论不成立, 则由

$$F'(x)=\frac{x^2f(x)-\int_0^x (t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t}{\frac{x^2}{x+1}e^x},$$

不妨设 $F'(x)>0\,(0<x<1)$, 于是

$$\int_0^x (t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t>0,\quad \forall x\in(0,1)$$

由积分第二中值定理知, 可选取 $\theta_i\,(i\in\mathbb{N})$ 满足

$$0\leqslant\theta_n\leqslant\theta_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\leqslant\theta_0:=1,$$

使得

$$\int_0^{\theta_0}(t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t=(\theta_0^2+\theta_0)\int_{\theta_1}^{\theta_0}f(t)\,\mathrm{d}t>0;$$

$$\int_0^{\theta_1}(t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t=(\theta_1^2+\theta_1)\int_{\theta_2}^{\theta_1}f(t)\,\mathrm{d}t>0;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\int_0^{\theta_{n-1}}(t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t=(\theta_{n-1}^2+\theta_{n-1})\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}}f(t)\,\mathrm{d}t>0;$$

因此, 数列 $\{\theta_n\}$ 收敛. 为使上述过程总可以延续下去, 我们要求 $\theta_n\to 0$. 不难发现

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\theta_1}^{\theta_0}f(t)\,\mathrm{d}t>0.$$

这与题中 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾!

法 II(by 白朗)[32]. 根据极限式(4.1)定义 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 如下:

$$g(0)=-\frac{1}{2}f(0),\quad g(x)=\frac{\int_0^x (t^2+t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}-f(x),\forall x\in(0,1]$$

若 $f(x)\equiv 0$, 结论成立. 接下来设 $f(x)\not\equiv 0$, 由 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 可知, 不等式 $f>0$, $f<0$ 均有解. 设 α,β 分别是 f 的最小、大值点, 则 $f(\alpha)<0<f(\beta)$, 且

$$g(\alpha)\geqslant\frac{\int_0^\alpha (t^2+t)f(\alpha)\,\mathrm{d}t}{x^2}-f(\alpha)=\frac{2\alpha-3}{6}f(\alpha)>0,$$

$$g(\beta)\leqslant\frac{\int_0^\beta (t^2+t)f(\beta)\,\mathrm{d}t}{x^2}-f(\beta)=\frac{2\beta-3}{6}f(\beta)<0,$$

由零点定理, $g(x)$ 在 α,β 之间有零点 ξ.

练习 4.1 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$. 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

证明 [18]. 先设 $f'(a)=f'(b)=0$, 又令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ 0, & x=a,\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 上可导, 且

$$\varphi'(x)=\frac{(x-a)f'(x)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2},\quad \varphi'(b)=-\frac{\varphi(b)}{b-a}.$$

分两种情况考虑.

(i) $\varphi(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即 $f(a)=f(b)$, 则由 $\varphi(a)=0$ 及 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$0=\varphi'(\xi)=\frac{1}{(\xi-a)^2}[(\xi-a)f'(\xi)-(f(\xi)-f(a))],$$

即 $(\xi-a)f'(\xi)=f(\xi)-f(a), \xi-a\neq 0$. 于是有这等价于

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

(ii) $\varphi(b)\neq 0$, 由 $\varphi'(b)\varphi(b)=\dfrac{\varphi^2(b)}{b-a}<0$, 知 $\varphi(b)$ 与 $\varphi'(b)$ 异号. 当 $\varphi(b)>0$ 时,

$$0>\varphi'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b},$$

$\exists\delta>0$, 在 $[b-\delta,b]$ 中, $\varphi(x)>\varphi(b)>0$, φ 在 (a,b) 内取到正的最大值; 同理, 当 $\varphi(b)<0$ 时, φ 在 (a,b) 内取到负的最小值. 此最值点 ξ 也是极值点, 所以总有 $\varphi'(\xi)=0$. 同 (i) 可得等式

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

再考虑 $f'(a)=f'(b)\neq 0$ 时的情形. 此时令

$$F(x)=f(x)-xf'(a)\Rightarrow F'(x)=f'(x)-f'(a)$$

于是有

$$F'(a)=f'(a)-f'(a)=0,\quad F'(b)=f'(b)-f'(a)=0$$

$F(x)$ 满足题设, $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $F'(\xi)=\dfrac{F(\xi)-F(a)}{\xi-a}$, 即

$$\begin{aligned}f'(\xi)-f'(a)&=\frac{f(\xi)-\xi f'(x)-f(a)+af'(a)}{\xi-a}\\&=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}-\frac{f'(a)(\xi-a)}{\xi-a},\end{aligned}$$

移项就得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

4.1.2.1 利用微分方程法构造辅助函数

例题 4.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(\xi)=\frac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 记 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$g'(x)=\frac{2g(x)}{1-x}\Rightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{2}{1-x}\Rightarrow(1-x)^2g(x)=C$$

构造辅助函数

$$F(x)=(1-x)^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

显然有 $F(0)=F(1)=0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$F'(\xi)=-2(1-\xi)\int_0^{\xi}f(t)\,\mathrm{d}t+(1-\xi)^2f(\xi)=0$$

变形即得

$$f(\xi)=\frac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 4.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\,\mathrm{d}x\,(k>1).$$

证明: 至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

解 微分方程法. 第一步: 将 ξ 全部换为 x

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)\Rightarrow f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$$

第二步: 解这个微分方程, 并写成 $C=\cdots$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1-\frac{1}{x}\Rightarrow \ln|f(x)|=x-\ln|x|+C\Longrightarrow xe^{-x}f(x)=C$$

第三步: 由于 C 不影响求导的结果, 为了简化, 我们令

$$F(x)=xe^{-x}f(x)$$

由积分中值定理,

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\,\mathrm{d}x=\eta e^{1-\eta}f(\eta),\ \eta\in(0,\tfrac{1}{k})\subset(0,1)$$

条件与辅助函数有差异, 我们可以根据 C 来改进辅助函数

$$\ln|f(x)|=x-\ln|x|+C\Rightarrow \ln|f(x)|=x-1-\ln|x|+C\Longrightarrow xe^{1-x}f(x)=C$$

于是令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$, 则 $F(\eta)=F(1)$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

例题 4.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证: 在 (a,b) 内必存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

证明 将 ξ 全部换为 x

$$f'(\xi)+f^2(\xi)=0\Rightarrow f'(x)+f^2(x)=0$$

解这个微分方程

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-1\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=-x+C\Rightarrow \text{失败}$$

换一种方式

$$f'(x)+f^2(x)=0\Rightarrow f(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|f(x)|+C$$

注意到 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x+C$, 于是有

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|f(x)|+C\Rightarrow \ln\left|f(x)e^{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x}\right|=C$$

因此, 我们构造

$$F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x}$$

显然 $F(a)=F(b)=0$, 且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 所以 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$\left(f'(\xi)+f^2(\xi)\right)e^{\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x}=0\Rightarrow f'(\xi)+f^2(\xi)=0$$

笔记 观察到辅助函数中 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 里面的 $f(x)$ 没啥用! 我们来尝试改造新题目. 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}$$

若有 $f(a)=f(b)=0$, 则 $F(a)=F(b)=0$. 求导验证

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}+f(x)f^{2021}(x)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}\\&=\left(f'(x)+f^{2022}(x)\right)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

改编: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证: 在 (a,b) 内必存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)+f^{2022}(\xi)=0.$$

类似分析

$$f'(x)+f^{2022}(x)=0\Rightarrow f^{2021}(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}$$

同时积分

$$\int f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|f(x)|+C$$

注意到

$$\int f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x+C,$$

于是有

$$\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|f(x)|+C\Rightarrow\ln\left|f(x)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}\right|=C$$

因此, 我们构造

$$F(x)=f(x)e^{\int_a^x f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x}$$

例题 4.11 设 $f(x)$ 二阶可导, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $f(1)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)-f'(\xi)+1=0$$

证明 先求能求的, 由题目条件

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}f(x)=0$$

由条件 $f(x)$ 二阶可导, 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$$

进一步得到

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$$

出题者认为我们会构造函数

$$F(x)=f'(x)-f(x)+x$$

但是 $f'(1)$ 无法求出的! 失败了! 而 C 可以继续搞事, 我们加进去

$$f'(x)-f(x)+x=C$$

观察条件 $f(1)=1$, $f(0)=0$, 暗示 $f(x)-x$.

$$\begin{aligned}F(x)&=f'(x)-1-f(x)+x+C\\&\overset{\text{观察}}{=\!=}\left(f(x)-x\right)'-\left(f(x)-x\right)+C\end{aligned}$$

通过观察/微分方程, 我们构造

$$G(x)=e^{-x}\left(f(x)-x\right)\Rightarrow G'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-1-f(x)+x\right)$$

显然有 $G(0)=G(1)=0$, 由罗尔定理可知: 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$G'(\eta)=0\quad\Rightarrow\quad f'(\eta)-1-f(\eta)+\eta=0$$

构造函数

$$F(x)=f'(x)-1-f(x)+x$$

显然有 $F(0)=F(\eta)=0$, 由罗尔定理可知: 存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=0\quad\Rightarrow\quad f''(\xi)-f'(\xi)+1=0$$

例题 4.12 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=2$, $f'(0)=-2$, $f(1)=1$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

证明 (by 予一人)[33]. 置

$$g(x):=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)\Rightarrow g'(x)=f(x)f'(x)+f''(x),$$

显然有 $g(0)=0$. 下面分两种情况进行讨论:

Case1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不存在零点.

- 注意到

$$g(x)=f^2(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{f''(x)}{f^2(x)}\right)=f^2(x)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{f(x)}\right)'$$

此时，置 $h(x):=\frac{1}{2}x-\frac{1}{f(x)}$, 则 $h(0)=h(1)=-\frac{1}{2}$, 于是依 Rolle 定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $h'(\xi)=0$, 但是, $g(x)=f^2(x)h'(x)$, 于是 $g(\xi)=0$, 这就得证了。

Case2. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在零点.

- 此时, 由于闭区间上连续函数的零点构成闭集 (closed set), 在这些零点中总存在最小者和最大者, 不妨分别记为 m 和 M, 显然 $0<m\leqslant M<1$. 于是 $f(x)$ 在 $[0,m)$ 和 $(M,1]$ 上恒正，所以 $f'(m)\leqslant 0, f'(M)\geqslant 0$. 进而

$$g(m)=f'(m)\leqslant 0,\quad g(M)=f'(M)\geqslant 0,$$

于是存在 $\xi\in[m,M]\subset(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$, 这同样得证了.

例题 4.13 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$$

证明 将 ξ 全部换为 x

$$f''(\xi)=\frac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2f(x)}{(1-x)^2}$$

解微分方程

$$f(x)=C_1(x-1)^2+\frac{C_2}{x-1}\Rightarrow f'(x)=2C_1(x-1)-\frac{C_2}{(x-1)^2}$$

消去一个常数 C_1 (避免分数)

$$2(x-1)f(x)-(x-1)^2f'(x)=3C_2$$

从而构造

$$F(x):=2(x-1)f(x)-(x-1)^2f'(x)\Rightarrow F(0)=F(1)=0$$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 所以 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$0=f''(\xi)=2f(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)\Rightarrow f''(\xi)=\frac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$$

例题 4.14 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$, 且存在 $c:a<c<b$, 使得 $f'(c)=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

证明 [8]. 将 ξ 替换为 x, 即

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{b-a}f(x)=\frac{f(a)}{b-a}$$

解微分方程,

$$C=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}$$

令 $F(x)=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}-C$. 由于 C 不影响 $F'(x)$, 因此, 通常我们令

$$F(x)=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}$$

故

$$F'(x)=\left(f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\right)e^{-\frac{x}{b-a}}$$

则 $F(a)=0$. 由 $f'(c)=0$ 可知

$$F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}$$

(i) 若 $F(c)=0$, 又 $F(a)=0$, 则由 Rolle 定理知：存在 $\xi\in(a,c)$, 使得

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

(ii) 若 $F(c)\neq 0$, 则存在 $\xi_1\in(a,c)$, 使得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a},\quad F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}=-\frac{c-a}{b-a}F'(\xi_1)$$

由此知 $F'(c)$ 与 $F'(\xi_1)$ 异号, 故根据连续性可知, 存在 $\xi\in(\xi_1,c)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 即

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

例题 4.15 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 上可导, 且 $f(1)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\frac{2\xi^2}{\pi}-\xi\sin\xi}f(x\ )$$

解 *(by 西西) 变形*

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\xi^2}}{\frac{2\xi^2}{\pi}-\xi\sin\xi}$$

两边同时积分

$$\ln\left(f(\xi)\right)=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)}{\frac{2}{\pi}-\frac{\sin\xi}{\xi}}=-\ln\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sin\xi}{\xi}\right)$$

于是, 我们构造

$$F(x)=f(x)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

显然有 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(1)=0$, 则由 *Rolle* 定理知: $\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})\subset(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=0$

例题 4.16 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续, 且在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 求证: $\exists\xi\in(0,2)$,

$$f'(\xi)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

解 *(by 西西) 构造*

$$F(x)=\left(2-\pi\cdot\frac{\sin x}{x}\right)f(x)$$

$$F'(x)=\pi\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)f(x)+f'(x)\left(\frac{2x-\pi\sin x}{x}\right)$$

由于 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(1)=0$, 由 *Rolle* 定理知 $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=0$

$$\pi\left(\frac{\sin\xi-\xi\cos\xi}{\xi^2}\right)f(\xi)+f'(\xi)\left(\frac{2\xi-\pi\sin\xi}{\xi}\right)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

例题 4.17 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

试证: (1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使 $f''(\eta)=f(\eta)$

分析: (1) 题目的极限形式立马应想到极限的保号性; (2) 本题只是二阶优先考虑罗尔定理, 结论是二阶, 至少需要 3 个点。由条件容易看出 $f(0)=f(1)=0$.

证明 将 η 替换为 x, 即 $f''(x)-f(x)=0$.

- 降阶法[34]: 令 $F(x)=(f'(x)+f(x))e^{-x}$, 若存在 $F(x_1)=F(x_1)$, 罗尔一次即可得证.
- 微分方程/观察: 令 $g(x)=f(x)e^x$, 若存在 $g'(x_1)=g'(x_2)=0\Rightarrow F(x_1)=F(x_2)=0$ 罗尔即可

因此, 我们的问题变成能不能找到第三个点使得 $f(\xi)=f(1)=f(0)=0$?

1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$. 因此,
$$f'(0)=f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1>0,\quad f'(1)=f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2>0$$
由极限的保号性可知 $\exists x_1\in(0,\delta_1)$ 和 $\exists x_2\in(1-\delta_2,1)$ 使得
$$f(x_1)>0,x_1\in(0,\delta_1)\quad f(x_2)<0,x_2\in(1-\delta_2,1)$$
显然有 $x_1<x_2$, 在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用介值定理得: $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$.
2. 令 $g(x)=f(x)e^x$, 则 $g'(x)=e^x(f'(x)+f(x))$, 易知 $g(1)=g(\xi)=g(0)=0$, 由罗尔定理知, 至少存在一点 $\eta_1\in(0,\xi)$ 以及 $\eta_2\in(\xi,1)$, 使得
$$g'(\eta_1)=0\,(0<\eta_1<\xi),\quad g'(\eta_2)=0\,(\xi_1<\eta_2<1)$$
3. 令 $F(x)=(f'(x)+f(x))e^{-x}$, 则 $F'(x)=e^{-x}(f''(x)-f(x))$, 易知 $F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$. 由罗尔定理知, 至少存在一点 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)$, $\eta\neq\xi$, 使得
$$F'(\eta)=e^{-\eta}(f''(\eta)-f(\eta))=0\Rightarrow f''(\eta)=f(\eta)$$

注: 也可直接用公式导出

$$y''-y=0\Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{-x}\Rightarrow y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$$

去掉一个常数

$$y+y'=2e^xC_1\Rightarrow 2C_1=e^{-x}(y+y')\Rightarrow F(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))$$

练习 4.2 (IMC,2013) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f(0)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(-\pi/2,\pi/2)$, 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)[1+2\tan^2\xi]$$

证明 法 I. 将 ξ 替换为 x, 即

$$f''(x)-f(x)(1+2\tan^2x)=0$$

解微分方程 (例题7.25)

$$f(x)=\frac{C_1}{\cos x}+C_2\left(\sin x+\frac{x}{\cos x}\right).$$

于是

$$f'(x)=\frac{C_1\sin x}{\cos^2x}+C_2\left(\cos x+\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2x}\right).$$

消去 C_1 得到

$$f'(x)\cos x-f(x)\sin x=2C_2\cos^2x\Rightarrow h(x)=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2x}$$

若存在 $h(\xi_1)=h(\xi_2)$, 由 Rolle 一次即可得证. 微分方程/观察, 令

$$g(x)=f(x)\cos x\Rightarrow g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$$

显然有

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

由 Rolle 定理, 那么有

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0,\qquad \xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

继续考虑

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2 x}=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

则显然有

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$

根据 Rolle 定理, 则有

$$0=h'(\xi)=\frac{1}{\cos\xi}[f''(\xi)-f(\xi)(1+2\tan^2\xi)]$$

法 II. 将 ξ 替换为 x, 即

$$f''(x)-f(x)(1+2\tan^2 x)=0$$

假设你运气好得到了一个非零特解 $f(x)=\sec x$

$$f(x)=\sec x\Rightarrow\frac{f(x)}{\sec x}=1\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)}{\sec x}=f(x)\cos x$$

同时求导

$$g'(x)=\frac{f'(x)\sec x-f(x)\big(\sec x\big)'}{\sec^2 x}=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$$

变形

$$\big(g'(x)\sec^2 x\big)=f'(x)\sec x-f(x)\big(\sec x\big)'$$

两边同时求导得

$$\big(g'(x)\sec^2 x\big)'=\sec x\Big(f''(x)-f(x)\big(1+2\tan^2 x\big)\Big)$$

因此构造

$$h(x)=g'(x)\sec^2 x=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

例题 4.18 (AMM,11313) 设 f 是在 R 上有四阶连续可导的函数, $x\in[0,1]$, 满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明：存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(c)=0$

证明 令 $G(t)=\displaystyle\int_{-t}^{t} g(x)dx-8\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} g(x)dx$, 其中

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

易得 $G(0)=0, G\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, 由 Rolle 定理有存在 $t_0\in(0,1/2)$ 使得 $G'(t_0)=0$. 由于

$$G'(t)=g(t)-4g(\frac{t}{2})-4g(-\frac{t}{2})+g(-t)$$

则 $G'(0)=0, G'(t_0)=0$, 则由 Rolle 定理有：$G''(t_1)=0$, 又

$$G''(t)=g'(t)-2g'(\frac{t}{2})+2g'(-\frac{t}{2})-g'(-t)$$

显然 $G''(0)=0$, 故由中值定理有 $G'''(t_2)=0$, 又

$$G'''(t)=(g''(t)-g''(\frac{t}{2}))-(g''(-\frac{t}{2})-g''(-t))$$

即

$$G'''(t_2)=(g''(t_2)-g''(\frac{t_2}{2}))-(g''(-\frac{t_2}{2})-g''(-t_2))$$

又由拉格朗日中值定理有存在 $\theta_+\in(t_2/2,t_2),\theta_-\in(-t_2,-\frac{t_2}{2})$,

$$(g''(t_2)-g''(\frac{t_2}{2}))-(g''(-\frac{t_2}{2})-g''(-t_2))=g'''(\theta_+)\frac{t_2}{2}-g'''(\theta_-)\frac{t_2}{2}$$

注意 $t_2\neq 0$, 即 $g'''(\theta_+)-g'''(\theta_-)=0$, 再利用拉格朗日中值定理 $g''''(\theta)=0$, 即 $f^{(4)}\left(\theta+\frac{1}{2}\right)=0$. 将 $\theta+\frac{1}{2}\to\theta$, 即有 $f^{(4)}(\theta)=0$.

4.1.2.2 常数 K 值法

定理 4.3 (K 值法 1)

1. 对结论进行适当的变形, 把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体, 并令其为常数 K, 构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形, 并且使等式右端为零
3. 再将等式左端中出现区间 (a,b) 的端点 a (或 b) 全部换成 x 并令左端为 $F(x)$, 此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数

例题 4.19 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 证明: 在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得

$$bf(b)-af(a)=\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right](b-a)$$

证明 变形

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

令 $K=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$, 令 $b=x$, 则

$$K=\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}\Longrightarrow xf(x)-af(a)-K(x-a)=0$$

故令 $F(x)=xf(x)-af(a)-K(x-a)$, 显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)-K=0$$

即

$$bf(b)-af(a)=\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right](b-a)$$

例题 4.20 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 开区间 (a,b) 内可导, 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 满足 $2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

证明

$$\xi\left[f(b)-f(a)\right]=(b^2-a^2)f'(\xi)\Longrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{\xi}$$

令 $K=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$, 再令 $b=x$.

$$K=\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}\Longrightarrow f(x)-f(a)-K(x^2-a^2)=0$$

故令 $F(x)=f(x)-f(a)-K(x^2-a^2)$, 显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow f'(\xi)-2\xi K=0$$

即

$$2\xi\big[f(b)-f(a)\big]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

注 本题不能使用柯西中值定理, $\xi\in(a,b)$ 内可能包含 0.

例题 4.21 证明: 若存在 $f''(0)$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^4}=f''(0)$.

证明 [8]

$$\frac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^4}=K\big(=K(h)\big)$$

作 $F(x)=f(2x)-2f(0)+f(-2x)-4Kx^2$, 则 $F(0)=0=F(h)$, 由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,h)$(或 $(h,0)$), 使得

$$F'(\xi)=0\iff 2f'(2\xi)-2f'(-2\xi)-8\xi=0,$$
$$\frac{2f'(2\xi)-2f'(-2\xi)}{8\xi}=\frac{[f'(2\xi)-f'(0)]-[f'(-2\xi)-f'(0)]}{\xi}=A$$

由此令 $h\to 0$, 即得 $A(h)\to f''(0)$

例题 4.22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数, 若 $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: 存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$ 使得

$$2f(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi^2}.$$

证明 变形为

$$f(\eta)=\frac{f(\xi)}{2\xi^2}$$

常数 K 值法, 令

$$K=f(\eta)=\frac{f(\xi)}{2\xi^2}\Rightarrow f(\xi)-2K\xi^2=0$$

构造函数

$$F(x)=f(x)-2Kx^2$$

根据题目条件 $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 由积分中值定理可知: 必存在 $x_0\in(0,\frac{1}{2})$, 使得 $f(x_0)=0$.

$$F(x_0)=f(x_0)-2Kx_0^2=-2Kx_0^2$$

另一方面, 注意到 $f(\eta)=K$

$$F(\eta)=f(\eta)-2K\eta^2=K-2K\eta^2=K(1-2\eta^2)$$

为使 $F(\eta)$ 与 $F(x_0)$ 异号, 我们需要限定 $1-2\eta^2\geqslant 0$, 即 $\eta\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$. 另外我们还需使 $\eta\neq x_0$, 再限定 $\eta\in(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. 最后根据零点定理, 存在 $\xi\in(x_0,\eta)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)-2K\xi^2\Rightarrow 2f(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi^2}.$$

例题 4.23 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 求证: 在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η 使得

$$24\eta f'(\xi)=\pi^2(1-\eta)^3\left(1+e^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)f'(\eta)$$

证明 先变形

$$f'(\xi)=\frac{\pi^2(1-\eta)^3}{24\eta}\left(1+e^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)f'(\eta)$$

考虑常数 K 值法, 令

$$K=f'(\xi)=\frac{\pi^2(1-\eta)^3}{24\eta}\left(1+e^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)f'(\eta)$$

因此构造函数

$$F(x)=\begin{cases}\pi^2(1-x)^3\left(1+e^{\frac{x}{x-1}}\right)f'(x)-24Kx, & x\in[0,1),\\ -24K, & x=1.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 注意到 $f'(\xi)=K$

$$F(\xi)=\pi^2(1-\xi)^3\left(1+e^{\frac{\xi}{\xi-1}}\right)K-24K\xi$$
$$=\left(\pi^2(1-\xi)^3\left(1+e^{\frac{\xi}{\xi-1}}\right)-24\xi\right)K$$

接着构造

$$H(x)=\pi^2(1-x)^3\left(1+e^{\frac{x}{x-1}}\right)-24x$$

注意到 $H(0)=2\pi^2>0$ 以及 $H(1/2)=\dfrac{\pi^2}{8}(1+e^{-1})-12<0$, 由介值定理: 必存在 $\xi\in(0,1/2)$ 使得

$$H(\xi)>0$$

从而得到 $F(1)$ 与 $F(\xi)$ 异号, 由零点定理可知: 存在 $\eta\in(\xi,1)$ 使得

$$F(\eta)=0$$

即可得到

$$\pi^2(1-\eta)^3\left(1+e^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)f'(\eta)-24K\eta=0$$

综上, 原命题成立.

例题 4.24 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi)$$

证明

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{12}(b-a)^3}=f''(\xi)$$

令 $K=\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{12}(b-a)^3}$, 再令 $b=x$.

$$K=\frac{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x-(x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2}}{\frac{1}{12}(x-a)^3}$$

故令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x-(x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2}-\frac{1}{12}(x-a)^3K$, 显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$, 因为

$$F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(x)}{2}-\frac{1}{2}f'(x)(x-a)-\frac{1}{4}(x-a)^2K$$

故 $F'(a)=0$, 从而由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,\xi_1)\subseteq(a,b)$ 使得 $F''(\xi)=0$.

$$F''(\xi)=\frac{1}{2}f''(\xi)-\frac{1}{2}K=0\Longrightarrow f''(\xi)=K$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi)$$

例题 4.25 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(a+b)^3f''(\xi)$$

证明 令 $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{1}{24}(x-a)^3K$ 则 $g(a)=g(b)=0$,
其中

$$K=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3}$$

所以由罗尔定理知存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g'(x_0)=0$. 又

$$g'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{x-a}{2}f'\left(\frac{x-a}{2}\right)-\frac{1}{8}(x-a)^2K$$

所以

$$f(x_0)=f\left(\frac{a+x_0}{2}\right)+\frac{x_0-a}{2}f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right)+\frac{1}{8}(x_0-a)^2K \tag{4.2}$$

在 $x=\dfrac{a+x_0}{2}$ 处将 $f(x)$ 泰勒展开，并令 $x=x_0$ 得到

$$f(x_0)=f\left(\frac{a+x_0}{2}\right)+\frac{x_0-a}{2}f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right)+\frac{1}{8}(x_0-a)^2f''(\xi) \tag{4.3}$$

其中 $\xi\in\left(x_0,\dfrac{a+x_0}{2}\right)\subseteq(a,b)$ 比较 (4.2)(4.3)，得 $K=f''(\xi)$。所以存在 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(a+b)^3f''(\xi)$$

练习 4.3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 5 次可微, 则

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{6}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{2880}(b-a)^5f^{(5)}(\xi),$$

其中 $a<\xi<b$.

证明 令 $a=c-h, b=c+h$, 即 $c=(a+b)/2, h=(b-a)/2$. 要证的等式可改写为

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}\big(f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)\big)-\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\xi).$$

若令

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}\big(f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)\big)-\frac{h^5}{90}K,$$

则只需要证明 $K=f^{(5)}(\xi)$. 为此定义函数

$$\varphi(x)=f(c+x)-f(c-x)-\frac{x}{3}\big(f'(c-x)+f'(c+x)+4f'(c)\big)+\frac{x^5}{90}K,$$

那么 $\varphi(x)$ 在 $[0,h]$ 上 4 次可微, 并且 $\varphi(0)=\varphi(h)=0$. 于是由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1\in(0,h)$ 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$. 又因为

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}\big(f'(c+x)+f'(c-x)-2f'(c)\big)-\frac{x}{3}\big(f''(c+x)+f''(c-x)\big)+\frac{x^4}{18}K,$$

所以 $\varphi'(0)=0$, 从而由 Rolle 定理, 存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi_2)=0$. 类似地, 由

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}\big(f''(c+x)+f''(c-x)\big)-\frac{x}{3}\big(f'''(c+x)+f'''(c-x)\big)+\frac{2}{9}x^3K,$$

可知 $\varphi''(0)=0$, 从而存在 $\xi_3\in(0,\xi_2)$ 使得 $\varphi'''(\xi_3)=0$. 最后注意

$$\begin{aligned}\varphi'''(x)&=-\frac{x}{3}\big(f^{(4)}(c+x)-f^{(4)}(c-x)\big)+\frac{2x^2}{3}K\\&=-\frac{x}{3}f^{(5)}\big((c+x)-(c-x)\big)+\frac{2x^2}{3}K=\frac{2}{3}x^2\big(K-f^{(5)}(\xi)\big),\end{aligned}$$

其中第二步应用了 Lagrange 中值定理, $\xi\in(c-x,c+x)\subseteq(c-h,c+h)$, 所以由 $\varphi'''(\xi_3)=0$ 得到

$$\frac{2}{3}\xi_3^2\big(K-f^{(5)}(\xi)\big)=0.$$

因为 $\xi_3\neq 0$, 所以 $K=f^{(5)}(\xi)$.

练习 4.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 证明：若 $f(x)$ 不是常数, 那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|>\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明 记

$$c=\frac{a+b}{2},\quad K=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

若对一切 $x \in (a,b)$ 都有 $f''(x) \leqslant K$, 利用 Lagrange 中值定理,

$$|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}| = |f''(\eta)| \leqslant K$$

即 $|f'(x)| \leqslant K(x-c)$, 于是

$$|f(c)-f(a)| \leqslant \int_a^c |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant K\int_a^c (c-x)\mathrm{d}x = \frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

同理可以得到

$$\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

于是

$$|f(b)-f(a)| \leqslant |f(b)-f(c)| + |f(c)-f(a)| \leqslant |f(b)-f(a)|$$

利用 $f'(x)$ 的连续性, 为使上式中的等号成立必须有 $|f'(x)| = K|x-c|$, 再利用 $f'(c)=0$ 得 $f'(x)=K(x-c)$ 或者 $f'(x)=K(c-x)$, 不论哪种情况都有 $f(b)=f(a)$, 即 $K=0$, 这和 $f(x)$ 不是常数相矛盾. 因此必定存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

例题 4.26 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 (a,b) 上二阶可导, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 满足

$$f''(\xi) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$

(注意: f' 未必连续, 所以不能用 Lagrange 中值定理.)

证明 解答出自:[35]. 设 $K = \dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, 构造函数:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 K\right),$$

则 $g'(x) = f'(x) - f'(a) - K(x-a)$, 且满足 $g'(a) = g'(b) = 0$, 注意到 $g''(x) = f''(x) - K$, 若不存在 $g''(\xi) = 0$, 则根据 Darboux 定理, $g''(x)$ 在 (a,b) 上一定恒正或者恒负. 不妨设

$$g''(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in (a,b)$$

任取 $c,d \in (a,b)$, 且满足 $c<d$, 根据闭区间 $[c,d]$ 上的 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in [c,d]$ 满足

$$\frac{g'(d)-g'(c)}{d-c} = g''(\xi) > 0,$$

所以 $g'(d) > g'(c)$, 于是在 (a,b) 上 $g'(x)$ 严格单调增.

现在考虑 $g'(a)$, 取一个单调递减趋于 a 的数列 x_n, 则有

$$g'(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a},$$

根据闭区间 $[a,x_n]$ 上的 Lagrange 中值定理, 存在另一个数列 $\{y_n\}$, 满足 $a<y_n<x_n$, 且

$$\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a} = g'(y_n) \Rightarrow g'(a) = \lim_{n\to\infty} g'(y_n)$$

任取 $c,d \in (a,b)$, 且满足 $c<d$, 一定存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n>N$ 时 $x_n<c$, 于是 $y_n<c$. 根据 $g'(x)$ 在 (a,b) 上的单调性, 应有 $g'(y_n) < g'(c)$, 取极限得 $g'(a) \leqslant g'(c)$. 同理可以证明 $g'(d) \leqslant g'(b)$, 于是我们得到

$$0 = g'(a) \leqslant g'(c) < g'(d) \leqslant g'(b) = 0$$

矛盾

定理 4.4 (K 值法 2)

1. 对结论进行适当的变形, 把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体, 并令其为常数 K, 构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形, 使等式左端为由 a 构成的代数式, 右端为由 b 构成的代数式

3. 上述等式关于区间 (a,b) 端点 a 和 b 的表达式是对称的[a], 此时只要把等式左端中出现的 a 全部换成 x, 并令左端为 $F(x)$, 此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数

[a]对称式: 将 b 换成 a, 原式呈 $0=0$

例题 4.27 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $a>0$ 证明: 在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$$

证明

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)\Longrightarrow K=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

分离 a,b. 则

$$\frac{f(b)+K}{b}=\frac{f(a)+K}{a}\Longrightarrow F(x)=\frac{f(x)+K}{x}$$

显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow\frac{xf'(\xi)-f(\xi)-K}{\xi^2}=0$$

即

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$$

例题 4.28 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可导，且 f,g 在 a 处二阶可导，满足 $g(a)\neq g(b)$ 且满足

$$\left[f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(a)\right]\cdot\left[f''(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g''(a)\right]>0$$

证明：存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\eta)-\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g'(\eta)-\frac{g(\eta)-g(a)}{\eta-a}\right]$$

证明 [1] 设

$$K=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow F(x)=f(x)-f(a)-K(g(x)-g(a))$$

我们有 $F(a)=F(b)=0$, $F'(a)\cdot F''(a)>0$, 于是

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2}F''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)\qquad(x\to a^+)$$

定义

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x-a}, & x\in(a,b],\\ F'(a), & x=a.\end{cases}$$

$H(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数, 又有 $H(b)=0$.

$$H'(x)=F'(x)\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{F(x)}{(x-a)^2}=\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}-\frac{1}{2}F''(a)+o(1)$$

所以就有

$$\lim_{x\to a^+}H'(x)=\frac{1}{2}F''(a)$$

若不存在这样的 η, 就是对任意的 $x\in(a,b)$ 有 $H'(x)\neq 0$, 不妨设 $H'(x)>0.(\forall x\in(a,b))$, 则 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，又由 $H(b)=0$ 知必有 $H(a)=F'(a)<0$, 推得 $F''(a)<0$, 这时就有

$$\lim_{x\to a^+}H'(x)=\frac{1}{2}F''(a)<0$$

[1]中值定理的推广题：http://pxchg1200.is-programmer.com/categories/8320/posts?page=3

也就是说存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in(a,a+\delta)$ 有

$$H'(x)<0$$

这与假设矛盾. 所以必然存在一点 $\eta\in(a,b)$ 使得 $H'(\eta)=0$, 这时, 不难算得

$$H'(\eta)=\frac{1}{\eta-a}\left[f'(\eta)-\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g'(\eta)-\frac{g(\eta)-g(a)}{\eta-a}\right]\right]=0$$

即

$$f'(\eta)-\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g'(\eta)-\frac{g(\eta)-g(a)}{\eta-a}\right]$$

4.1.2.3 待定多项式

例题 4.29 (2019, 数 II) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

证明 (by 向禹)

(1) 由积分中值定理知存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)=1=f(1)$, 于是由罗尔定理知存在 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 待定一组系数 a,b,c 使得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件 $f(0)=0$, $f(1)=1$. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 故考虑函数 $F(x)=f(x)+3x^2-4x$, 首先有 $F(0)=F(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1[f(x)+3x^2-4x]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1(3x^2-4x)\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由积分中值定理可知存在 $\eta_1\in(0,1)$ 使得 $g(\eta_1)=0$. 因此由罗尔定理知存在 $\eta_2\in(0,\eta_1)$, $\eta_3\in(\eta_1,1)$ 使得 $F'(\eta_2)=F'(\eta_3)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta\in(\eta_2,\eta_3)\subset(0,1)$; 使得 $F''(\eta)=f''(\eta)+6=0$, 从而 $f''(\eta)=-6<-2$, 证毕.

例题 4.30 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'''(\xi)=3$

证明 (by 向禹) 待定一个首项系数为 $\frac{1}{2}$[2] 的三次函数 $g(x)$ 使得它满足 $g(-1)=0$, $g(1)=1$, $g'(0)=0$ 这就要求

$$g(x)=\frac{1}{2}x^3+bx^2+\frac{1}{2}-b$$

还需满足 $g(0)=f(0)$, 那么 $b=\frac{1}{2}-f(0)$ 即可. 现在令

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2(x+1)+(1+x)(1-x)f(0)$$

$F(-1)=F(0)=F(1)=0$, $F'(0)=0$, 因此由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta_1\in(\xi_1,0)$, $\eta_2\in(0,\xi_2)$, 使得 $F''(\eta_1)=F''(\eta_2)$, 进一步存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(-1,1)$ 使得 $F'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0$, 得证.

例题 4.31 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

证明 法 II. 待定多项式 $P_2(t)$ 并使之满足

$$\begin{cases}P_2(a)=f(a)=0,\\P_2(b)=f(b)=0,\\P_2(x)=f(x)\end{cases}$$

---

[2]首项系数为 $\frac{1}{2}$ 是为了保证 $g'''(x)=3$

注意到 $P_2(t)$ 必过点 $(a,0),(b,0)$, 由零点式我们设

$$P_2(t)=A(t-a)(t-b)$$

又 $P_2(t)$ 过点 $(x,f(x))$, 故

$$P_2(x)=A(x-a)(x-b)=f(x)\Rightarrow A=\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}$$

从而得到 $P_2(t)$

$$P_2(t)=\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b)$$

对任何固定的 $x\in(a,b)$, 令

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b),\quad t\in[a,b],$$

则 $g(a)=g(x)=g(b)=0$, 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g''(\xi)=0$, 即

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\xi),\quad x\in(a,b).$$

从而

$$|f(x)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|,\quad \forall x\in[a,b].$$

例题 4.32 [36] 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)|\leqslant M$. 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 对 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 证明: $|F(x)|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2$.

证明 注意到 $F(a)=F(b)=0$, 待定多项式 $P_2(t)$ 并使之满足

$$\begin{cases}P_2(a)=F(a)=0,\\ P_2(b)=F(b)=0,\\ P_2(x)=F(x)\end{cases}$$

注意到 $P_2(t)$ 必过点 $(a,0),(b,0)$, 由零点式我们设

$$P_2(t)=A(t-a)(t-b)$$

又 $P_2(t)$ 过点 $(x,F(x))$, 故

$$P_2(x)=A(x-a)(x-b)=F(x)\Rightarrow A=\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)}$$

从而得到 $P_2(t)$

$$P_2(t)=\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b)$$

对任何固定的 $x\in(a,b)$, 令

$$G(t)=F(t)-\frac{(t-a)(t-b)F(x)}{(x-a)(x-b)},\quad t\in(a,b)$$

则 $G(t)$ 在 (a,b) 上二阶可微, 且 $G(a)=G(x)=G(b)=0$. 反复运用 Rolle 定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$, s.t $G''(\xi)=0$. 整理后得

$$F(x)=\frac{f'(\xi)}{2}(x-a)(x-b),\qquad x\in(a,b)$$

从而

$$|F(x)|\leqslant\frac{M}{2}(x-a)(b-x)\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}$$

例题 4.33 设 $f(x)$ 连续于 $[a,b]$, 三阶可导于 (a,b), 且 $f(a)=f(b)=f(c)=0, c\in(a,b)$. 证明: $\forall x\in(a,c)\cup(c,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-c)(x-b).$$

证明 待定多项式 $P_3(t)$ 并使之满足

$$\begin{cases} P_3(a) = f(a) = 0, \\ P_3(b) = f(b) = 0, \\ P_3(c) = f(c) = 0, \\ P_3(x) = f(x) \end{cases}$$

注意到 $P_3(t)$ 必过点 $(a,0),(b,0),(c,0)$ 由零点式我们设

$$P_3(t) = A(t-a)(t-b)(t-c)$$

又 $P_2(t)$ 过点 $(x, f(x))$, 故

$$P_3(x) = A(x-a)(x-b)(x-c) = f(x) \Rightarrow A = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

从而得到 $P_3(t)$

$$P_3(t) = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}(t-a)(t-b)(t-c)$$

故构造函数

$$F(t) = f(t) - P_3(t) = f(t) - \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}(t-a)(t-b)(t-c)$$

显然有

$$F(a) = F(b) = F(c) = F(x) = 0$$

反复利用 Rolle 定理: 由于 $F(t)$ 现在至少已有四个零点, 于是 $F'(t)$ 至少有三个零点, 于是 $F''(t)$ 至少有两个零点, 于是 $F'''(t)$ 至少有一个零点, 即: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$. 此时, 注意到

$$F'''(t) = f'''(t) - \frac{6f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0$$

即

$$f(x) = \frac{1}{6}f'''(t)(x-a)(x-b)(x-c), \quad \xi \in (a,b)$$

法 I(by 予一人)[37]. 任意取定 $x \in (a,b) \cup (b,c)$, 再置

$$g(t) := (x-a)(x-b)(x-c)f(t) - (t-a)(t-b)(t-c)f(x),$$

其中 $t \in [a,b]$, 则有

$$g(x) = g(a) = g(b) = g(c) = 0,$$

反复利用 Rolle 定理: 由于 $g(t)$ 现在至少已有四个零点, 于是 $g'(t)$ 至少有三个零点, 于是 $g''(t)$ 至少有两个零点, 于是 $g'''(t)$ 至少有一个零点, 即: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'''(\xi) = 0$. 此时, 注意到

$$g'''(t) = (x-a)(x-b)(x-c)f'''(t) - 6f(x),$$

代入即证。

例题 4.34 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 证明: 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证明 设 $c = (a+b)/2$, 待定多项式 $P_2(x)$ 并使之满足

$$\begin{cases} P_2(a) = f(a), \\ P_2(b) = f(b), \\ P_2(c) = f(c) \end{cases}$$

得到方程组

$$\begin{cases} f(a) = A\cdot a^2 + B\cdot a + C \\ f(b) = A\cdot b^2 + B\cdot b + C \\ f(c) = A\cdot c^2 + B\cdot c + C \end{cases}$$

我们只需解出 A

$$\begin{aligned} A &= \frac{(b-a)(f(c)-f(a))-(c-a)(f(b)-f(a))}{(c-a)(c-b)(b-a)} \\ &= \frac{2}{(b-a)^2}\left(f(b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2f(a)\right) \end{aligned}$$

因此我们构造函数

$$F(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) - \left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

显然有

$$F(a) = F(b) = F(c) = 0$$

反复利用 Rolle 定理: 由于 $F(t)$ 现在至少已有三个零点, 于是 $F'(t)$ 至少有两个零点, 于是 $F''(t)$ 至少有一个零点, 即：存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F''(\xi) = 0$. 此时, 注意到

$$F''(t) = f''(t) - 2A,$$

代入即证。

例题 4.35 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

证明 根据 n 个函数点的已知条件构造 $n-1$ 次多项式函数, 由题目中函数特征 $f(a)$, $f(b)$, $f'\left((a+b)/2\right)$, 再考虑 $f\left((a+b)/2\right)$, 则四个点特征可以构造三次多项式函数 $P_3(x)$. 令 $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 该函数满足

$$P_3(a) = f(a)\,,\quad P_3(b) = f(b)$$

$$P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

令 $\varphi(x) = f(x) - P_3(x)$, 则函数在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数, 并且满足

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0\,,\ \varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

应用 Rolle 定理可以得到三个 $\varphi'(x)$ 存在三个零点, 再两次应用 Rolle 定理, 则可知存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\varphi'''(\xi) = 0$ 即

$$f'''(\xi) - P_3(\xi) = f'''(\xi) - 6a_3 = 0$$

下面计算

$$a_3 = \frac{4}{(b-a)^3}\left[f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

由多项式函数满足的四个条件, 可得四个方程构成的关于 a_0, a_1, a_2, a_3 的四元一次方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1a + a_2a^2 + a_3a^3 = f(a) \\ a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 = f(b) \\ a_0 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ a_1a + 2a_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$$

由这个方程组, 即可计算得到

$$a_3 = \frac{4}{(b-a)^3}\left[f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

即存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'''(\xi)=6a_3$, 即

$$f'''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

例题 4.36 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

证明 利用行列式构造辅助函数, 令

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3 & f(x)\\ 1 & a & a^2 & a^3 & f(a)\\ 1 & b & b^2 & b^3 & f(b)\\ 1 & \frac{a+b}{2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ 0 & 1 & a+b & \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{vmatrix}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续导数, 且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,\ \varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

反复应用 Rolle 定理, 得存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'''(\xi)=0$, 即

$$\varphi'''(\xi)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & f'''(\xi)\\ 1 & a & a^2 & a^3 & f(a)\\ 1 & b & b^2 & b^3 & f(b)\\ 1 & \frac{a+b}{2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ 0 & 1 & a+b & \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{vmatrix}=0$$

行列式按第一行展开, 即得最终需要验证的结论

定理 4.5 (罗尔原话)

若 $f^{(n-1)}(x)$ 最多只有一个实零根, 则 $f(x)$ 最多只有 n 个不同实零点.

4.1.3 拉格朗日中值定理

定理 4.6 (拉格朗日 (Lagrange) 中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\,(a<\xi<b)$, 使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

证明 结论变形为

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即

$$\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}=0.$$

于是构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 于是有

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

例题 4.37 设 $x>0$, 且满足 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 证明: $\dfrac{1}{4}<\theta(x)<\dfrac{1}{2}$

解 *法 I(by 蓝兔兔). 反解 $\theta(x)$*

$$\theta(x)=\frac{1}{4(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}-x=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{x^2+x}-2x+1\right)$$

令 $g(x)=2\sqrt{x^2+x}-2x+1$, 则有 $g(0)=1$,

$$g'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}-2=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2+x}}\geqslant 0\Rightarrow g(x)\uparrow$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+2\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=2$

所以 $\theta(x)=\dfrac{1}{4}g(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

法 II(by Hilbert). 变形

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$
$$\Rightarrow\sqrt{1+x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}$$

反解 $\theta(x)$, 得到

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-x=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\\&=\frac{3\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

显然 $\theta(x)\uparrow$, 且 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$. 故 $\theta(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

例题 4.38 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 证明: 对任何非零实数 x, 存在唯一的 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

证明 (1) 对任意非零实数 x, 由拉格朗日中值定理知 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$ 存在, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一, 则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ $\theta_1(x)<\theta_2(x)$, 使得 $f'(x\theta_1(x))=f'(x\theta_2(x))$, 由罗尔定理, 存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$. 这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾, 所以 $\theta(x)$ 是唯一的

(2) 因为 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

例题 4.39 (数学 I, 2007) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$. 令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$, 则下列结论正确的是 (   ).

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

解 本题答案选 D. 选项 A 的反例为 $f(x)=x^2$, 选项 B 的反例为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 选项 C 的反例为 $f(x)=-\ln x$.

- 由条件 $f''(x)>0$, 即 $f(x)$ 凹函数. 直接画图很容易得到反例

若 $u_1<u_2$, 则存在 $k>0$, 使得 $u_2-u_1>k>0$. 在区间 $[1,2]$ 上应用 *Lagrange* 中值定理, 存在 $\xi_1\in(1,2)$ 使得

$$\frac{u_2-u_1}{2-1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\xi_1)>k>0.$$

又因为在 $(0,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$, 因此 $f'(x)$ 在 $(\xi_1,+\infty)$ 上单调增加, 于是对任意 $x\in(\xi_1,+\infty)$ 有

$$f'(x)>f'(\xi_1)>k>0.$$

在区间 $[\xi_1,x]$ 上应用 *Lagrange* 中值定理, 存在 $\xi_2\in(\xi_1,x)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(\xi_1)}{x-\xi_1}=f'(\xi_2)>k>0,$$

即 $f(x)=f(\xi_1)+f'(\xi_2)(x-\xi_1)\to+\infty\ (x\to+\infty)$, 即 $\{u_n\}$ 发散.

例题 4.40 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0$, $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 (by 向禹) 利用切线与截距可以得到

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

易知 $x\to 0$ 时 $u\to 0$. 由拉格朗日中值定理可知存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+f'(x\theta_1(x))x=f'(x\theta_1(x))x.$$
$$f(u)=f(0)+f'(u\theta_2(u))u=f'(u\theta_2(u))u.$$

且由于 $f''(x)\neq 0$, 故由导函数介值定理可知 $f''(x)$ 不变号, 即 $f'(x)$ 严格单调. 从而对于给定的 x 上述 $\theta_1(x),\theta_2(u)$ 是唯一的. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{u^3f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3f'(\theta_2(u)u)}{u^3f(\theta_1(x)x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta_2(u)u)}{\theta_2(u)u}\frac{\theta_1(x)x}{f'(\theta_1(x)x)}\frac{\theta_2(u)x^2}{\theta_1(x)u^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{f''(0)}\frac{x^2}{u^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x-f(x)/f'(x)}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-f(x)/(xf'(x))}\right)^2=4.\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(\theta_1(x)x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\theta_1(x)\frac{f'(\theta_1(x)x)}{\theta_1(x)x}\frac{x}{f'(x)}=\theta_1(x)$$

由于 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta_1(x)x)-f'(0)}{\theta_1(x)x}$, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta_1(x)x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta_1(x)=\dfrac{1}{2}$

例题 4.41 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，试证

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$$

解 设 $f(x)$ 在 $x=c\in(0,1)$ 取得最大值，因 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，故 $f'(c)=0$ 对于函数 $y=f'(x)$，因 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，在区间 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理得：存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c\,,$$
$$f'(1)-f'(c)=f''(\xi_2)(1-c)\,,$$

即

$$f'(0)=-f''(\xi_1)c\,,\quad f'(1)=f''(\xi_2)(1-c)$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f''(x_1)|c+|f''(x_2)|(1-c)\\&\leqslant Mc+M(1-c)=M\end{aligned}$$

例题 4.42 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $|f'(x)|<1$，$f(0)=f(1)$

证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$

证明 不妨设 $x_1<x_2$, 由题意对 $[0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,1]$ 分别使用拉格朗日中值定理得

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1\quad \xi_1\in(0,x_1)$$
$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1-x_2)\quad \xi_2\in(x_1,x_2)$$
$$f(1)-f(x_2)=f'(\xi_3)(1-x_2)\quad \xi_3\in(x_2,1)$$

以上式子相加, 并注意到 $f(0)=f(1)$, 得

$$2\big(f(x_1)-f(x_2)\big)=f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)$$

因为 $|f'(x)|<1$, 于是

$$\begin{aligned}2\big|f(x_1)-f(x_2)\big|&=\big|f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<\big|f'(\xi_1)x_1\big|+\big|f'(\xi_2)(x_1-x_2)\big|+\big|f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<x_1+(x_2-x_1)+(1-x_2)=1\end{aligned}$$

例题 4.43 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)$ 有界. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解 法 I[3]. 设 $|f''(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\exists\Delta_1>0$, 当 $x>\Delta_1$ 时, 有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

取 $\Delta_2>\Delta_1+\varepsilon$, 当 $x>\Delta_2$ 时, 再取 $x_0=x-\varepsilon>\Delta_1$, 由中值定理, $\exists\xi\in(x_0,x)(\xi>\Delta_1)$, *s.t.*

$$\big|f'(\xi)\big|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\frac{|f(x)|+|f(x_0)|}{\varepsilon}<\varepsilon$$

[3]徐森林《数学分析精选习题全解》P169

且 $x-\xi<x-x_0=\varepsilon$. 故 $\exists\eta\in(\xi,x)$, s, t

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=|f'(\xi)+f''(\eta)(x-\xi)|\\&\leqslant|f'(\xi)|+|f''(\eta)||x-\xi|\\&<\varepsilon+M\varepsilon=(M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

例题 4.44 (2019 江苏) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, $f(0)=f(1)=0$, 若 $a\in[0,1]$, $f(a)>0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'(\xi)|>2f(a)$.

证明 (by 白朗) (i) 若 $a\neq\frac{1}{2}$, 不妨设 $0<a<\frac{1}{2}$, 由拉格朗日中值定理

$$0<f(a)=f(a)-f(0)=f'(\xi)a<\frac{f'(\xi)}{2},\quad \xi\in(0,\tfrac{1}{2}).$$

(ii) 若 $a=\frac{1}{2}$, 反证法: 假设 $|f'(x)|\leqslant 2f(a)$, 则

$$\forall x\in(0,a],\ f'(x)\leqslant 2f(a)\tag{4.4}$$

$$\forall x\in[a,1),\ f'(x)\geqslant -2f(a)\tag{4.5}$$

若 (4.4) 中等号不恒成立, 则令 $g(x)=f(x)-2f(a)x,(0\leqslant x\leqslant a)$, 则 $g'(x)\leqslant 0$.

$$0=g(0)>g(a)=0$$

显然矛盾! 从而 (4.4) 中等号恒成立, 即

$$f(x)=2f(a)x,\ \ x\in[0,a].\tag{4.6}$$

同理可得,

$$f(x)=2f(a)(1-x),\ \ x\in[a,1].\tag{4.7}$$

由 (4.6)(4.7) 可知

$$f'(a)=2f(a)=-2f(a)\tag{4.8}$$

再由题意 $f(a)>0,a\in(0,1)$ 知 (4.8) 不存在！ 故结论成立.

综上所述, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'(\xi)|>2f(a)$.

练习 4.5 函数 f 在 (-1,1) 上二阶可微, $f(0)=f'(0)=0$, 且在该区间上成立不等式 $|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

解 设 x_0 是 $|f'(x_0)|$ 在 $[-1/2,1/2]$ 上取得最大值的点, 由 *Lagrange* 中值定理有

$$f'(x_0)-f'(0)=x_0f''(\theta x_0),0<\theta<1.$$

故结合已知, 有

$$|f'(x_0)|=|x_0||f''(\theta x_0)|\leqslant|x_0|(|f'(\theta x_0)|+|f(\theta x_0)|)\leqslant|x_0|(|f'(x_0)+|f(\theta x_0)|).$$

因 $f(\theta x_0)=\displaystyle\int_0^{\theta x_0}f'(t)dt$, 故 $|f(\theta x_0)|\leqslant\left|\displaystyle\int_0^{\theta x_0}|f'(t)|dt\right|\theta|x_0||f'(x_0)|$。因此

$$|f'(x_0)|\leqslant|x_0|(|f'(x_0)|+\theta|x_0||f'(x_0)|)=(|x_0|+\theta x_0^2)|f'(x_0)|.$$

因 $|x_0|+\theta x_0^2<1$, 故 $f'(x_0)=0$, 这说明 $f'(x)=0$, $\forall x\in[-1/2,1/2]$。

又因 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0$, $\forall x\in[-1/2,1/2]$。

取 ε, $0<\varepsilon<1/2$, 设 x_1 是 $|f'(x)|$ 在 $[1/2,1-\varepsilon]$ 上取得最大值的点。

由 *Lagrange* 中值定理, 有

$$f'(x_1)-f'\Big(\frac{1}{2}\Big)=\Big(x_1-\frac{1}{2}\Big)f''\Big(\frac{1}{2}+\theta_1\Big(x_1-\frac{1}{2}\Big)\Big),0<\theta_1<1.$$

故

$$\begin{aligned}|f'(x_1)| &= \left|x_1-\frac{1}{2}\right|\left|f''\Big(\frac{1}{2}+\theta_1\Big(x_1-\frac{1}{2}\Big)\Big)\right| \\ &\leqslant \Big(x_1-\frac{1}{2}\Big)(|f'(\xi)|+|f(\xi)|) \leqslant (|f'(x_1)|+|f(\xi)|)\end{aligned}$$

(记 $\xi = 1/2+\theta_1(x_1-1/2)$)。而

$$|f(\xi)| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^{\xi} f'(t)dt\right| \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} |f'(t)|dt \leqslant \theta_1\Big(x_1-\frac{1}{2}\Big)|f'(x_1)|.$$

于是，$f(x)$ 在 $[1/2, 1-\varepsilon]$ 上恒为 0，因 $\varepsilon > 0$ 可任意小，故 $f(x) = 0, \forall x \in [-1/2, 1)$。同理可证，当 $x \in (-1, 1/2]$ 时，$f(x) = 0$。

例题 4.45 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内二阶可导, $|f(x)| \leqslant 1$, 且 $f^2(0)+[f'(0)]^2 > 1$. 证明: 存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$f''(\xi)+f(\xi) = 0.$$

证明 根据已知

$$F(x) := f^2(x)+[f'(x)]^2 \Rightarrow F'(x) = 2f'(x)\big(f(x)+f''(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

显然, 当 $f'(\xi) \neq 0$ 时, $F'(\xi) = 0$ 即可, 注意到

$$f'(\xi) \neq 0 \Rightarrow |f'(\xi)|^2 = F(\xi) - f^2(\xi) > 0$$

由于 $f(x)$ 可导, 可考虑证明存在一个 $F(x) > 1$ 的极值点. 记 $F(0) = f^2(0)+[f'(0)]^2 = a > 1$, 注意到 $|f(x)| \leqslant 1$, 于是只需说明存在 $f'(x) \leqslant \sqrt{a-1}$

1. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在一点 $\xi_1 \in (0, \frac{2}{\sqrt{a-1}})$ 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(\frac{2}{\sqrt{a-1}}) - f(0)}{\frac{2}{\sqrt{a-1}}}\right| \leqslant \sqrt{a-1}$$

于是 $F(\xi_1) = f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2 \leqslant 1+a-1 = a = F(0)$

2. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 类似地, 存在一点 $\xi_2 \in (-\frac{2}{\sqrt{a-1}}, 0)$ 使得

$$F(\xi_2) \leqslant 1+a-1 = a = F(0)$$

此时, 易见 $F(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上的最大值可在一内点 ξ 上取到. 于是 ξ 是 $F(x)$ 的极大值点. 从而

$$F'(\xi) = 2f'(\xi)\big(f(\xi)+f''(\xi)\big) = 0$$

另一方面,

$$|f'(\xi)|^2 = F(\xi) - f^2(\xi) = \max F(x) - f^2(\xi) > a-1 > 0$$

例题 4.46 (知乎,371517976) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上具有二阶导数的函数, 且存在常数 a, b, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{R}$:

$$(f(x))^2 \leqslant a, \quad (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \leqslant b$$

证明: $(f(x))^2+(f'(x))^2 \leqslant \max\{a, b\}$. (提示, 用反证法).

证明 (by 予一人)[38] 为书写方便, 记 $k := \max(a, b)$. 此外, 又置

$$g(x) := f^2(x)+[f'(x)]^2.$$

反证法. 设若待证不真, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x_0) = k+\varepsilon$. 依 Lagrange 中值定理，有

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} = |f'(\xi)|, \quad x_0 \gtreqless \xi \gtreqless x$$

由于 $|f(x)| \leqslant \sqrt{a}$, 于是 $|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f(x)|+|f(x_0)| \leqslant 2\sqrt{a}$, 这表明上式左端分式分子是有界的，于是总可以选择 x 让分母足够大，直观上，也就是让 x 在 x_0 的左侧或者右侧充分远离 x_0, 以使得分式值也就是 $|f'(\xi)|$ 任意地小. 由此, 我们不难作出如下断言: 必定存在 $\alpha < x_0, \beta > x_0$ 使得

$$|f'(\alpha)| < \sqrt{\varepsilon}, \quad |f'(\beta)| < \sqrt{\varepsilon}.$$

现考察 $g(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的最大值, 请注意, 由题设并依 Weirstrass 第二定理, 这最大值是必然存在的. 首先, 很

清楚

$$g(x_0)=k+\varepsilon>f^2(\alpha)+[f'(\alpha)]^2=g(\alpha),$$

$$g(x_0)=k+\varepsilon>f^2(\beta)+[f'(\beta)]^2=g(\beta),$$

这表明已经存在 $x_0\in(\alpha,\beta)$ 使得 $g(x_0)>g(\alpha),g(x_0)>g(\beta)$, 于是 $g(x)$ 的最大值点不是区间端点, 而是区间内点, 进而就必是函数驻点. 假设这点是 $x=c\in(\alpha,\beta)$, 那么一方面

$$g'(c)=2f'(c)[f(c)+f''(c)]=0; \tag{4.9}$$

另一方面, $g(c)$ 必然不会小于 $g(x_0)$, 即

$$g(c)\geqslant g(x_0)=k+\xi>k. \tag{4.10}$$

但是, 由 (4.9) 可以推知:

- 或者 $f'(c)=0$, 此时 $g(c)=f^2(c)\leqslant a\leqslant k$;
- 或者 $f(c)+f''(c)=0$, 此时 $g(c)=[-f''(c)]^2+[f'(c)]^2\leqslant b\leqslant k$.

总之, 无论如何, 由 (4.9) 都有 $g(c)\leqslant k$, 但这与 (4.10) 明显矛盾. 于是推翻反设, 命题得证.

推论 4.1

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数

证明 充分性显然, 下面证明必要性.
在区间 I 上任取两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 在 $[x_1,x_2]$ 上应用 (3-1) 有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi<x_2).$$

由条件知 $f'(\xi)=0$, 从而 $f(x_1)-f(x_2)=0$, 即

$$f(x_1)=f(x_2).$$

因为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是区间上的任意两点, 所以 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例题 4.47 证明: $t\in[0,1]$, 恒有 $2\arcsin t+\arcsin(1-2t^2)=\dfrac{\pi}{2}$

证明 令 $f(t)=2\arcsin t+\arcsin(1-2t^2)$ 则

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{-4t}{\sqrt{1-(1-2t^2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{-4t}{\sqrt{4t^2-4t^4}}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{-2}{\sqrt{1-t^2}}=0\end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理知 $f(x)\equiv C$, 令 $x=0$ 得 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$

故 $\forall t\in[0,1]$, 恒有 $2\arcsin t+\arcsin(1-2t^2)=\dfrac{\pi}{2}$

注

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad x>0$$

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\quad x<0$$

例题 4.48 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$

解 利用恒等变形

$$\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab},\ ab>-1$$

得

$$\lim_{x\to\infty}x^4\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} x^4 \arctan \frac{\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \frac{2x^2+7}{x^2+2}}{1 + \frac{(2x^2+5)(2x^2+7)}{(x^2+1)(x^2+2)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^4 \arctan \frac{3}{5x^4+27x^2+37} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

4.1.3.1 利用拉格朗日中值定理证明不等式

例题 4.49 证明: $\ln 3 < \sqrt{3}\ln 2$

证明

$$\ln 3 < \sqrt{3}\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{2\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 4}{\sqrt{4}}$$

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow x > e^2, f'(x) < 0; 0 < x < e^2, f'(x) > 0$

$$\frac{\ln 4}{\sqrt{4}} - \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} = (4-3)f'(\xi) > 0, \quad \xi \in (3,4)$$

例题 4.50 证明: $\ln \pi > \sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$

证明

$$\ln \pi > \sqrt{\frac{\pi}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} > \sqrt{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} > \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} > \frac{\ln e}{\sqrt{e}}$$

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow x > e^2, f'(x) < 0; 0 < x < e^2, f'(x) > 0$

$$\frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} - \frac{\ln e}{\sqrt{e}} = (\pi - e)f'(\xi) > 0, \quad \xi \in (e,\pi)$$

例题 4.51 证明: $2^{\sqrt{15}} < 15$

证明

$$2^{\sqrt{15}} < 15 \Leftrightarrow \ln 2^{\sqrt{15}} < \ln 15 \Leftrightarrow \ln 2 < \frac{\ln 15}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \frac{4\ln 2}{4} < \frac{\ln 15}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \frac{\ln 16}{\sqrt{16}} < \frac{\ln 15}{\sqrt{15}}$$

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow x > e^2, f'(x) < 0; 0 < x < e^2, f'(x) > 0$

$$\frac{\ln 16}{\sqrt{16}} - \frac{\ln 15}{\sqrt{15}} = (16-15)f'(\xi) < 0, \quad \xi \in (15,16)$$

例题 4.52 证明: $3e\ln 2 < 4\sqrt{2}$

证明

$$3e\ln 2 < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow e\ln 8 < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln 8 < \frac{4\sqrt{2}}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln 8}{2\sqrt{2}} < \frac{2}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln 8}{\sqrt{8}} < \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}$$

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow x > e^2, f'(x) < 0; 0 < x < e^2, f'(x) > 0$

$$\frac{\ln 8}{\sqrt{8}} - \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = (8-e^2)f'(\xi) < 0, \quad \xi \in (e^2,8)$$

4.1.3.2 利用拉格朗日中值定理求极限

例题 4.53 求极限: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{\sin x} + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} - (e^{\tan x} + \tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$.

解 *(by fin3574)*

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sin x} + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} - (e^{\tan x} + \tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{\sin x - \tan x} \cdot \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

$$\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=\!=\!=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=\xi} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=0} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+x)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x}$$

$$= -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)-2}-1}{x} = -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)-2x}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=} -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}-2}{2x} = -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x-2x}{2x(e^x+x)}$$

$$= -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x-2x}{2x} \overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=} -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-2}{2} = \frac{3}{4}e^2$$

例题 4.54 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$

解 *(by 予一人)*[4] 令 $f(x):=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 则所求极限为

$$L:=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(\tan x)}{x^3}.$$

由 *Lagrange* 中值定理，有

$$f(\sin x)-f(\tan x)=f'(\xi)(\sin x-\tan x),\quad \sin x\gtrless\xi\gtrless\tan x,$$

于是

$$L:=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(\sin x-\tan x)}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f'(\xi).$$

当 $x\to 0$ 时，$\sin x,\tan x\to 0$, 于是 $\xi\to 0$. 同时注意到

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}(x-\ln(1+x)-x\ln(1+x))}{x^2(1+x)}=-\frac{\mathrm{e}}{2},$$

于是

$$\lim_{x\to 0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to 0}f'(\xi)=\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

所以

$$L:=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}=\frac{e}{4}.$$

4.1.4 柯西中值定理

定理 4.7 (柯西中值定理[5])

如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使等式 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立

证明 首先 $g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)\ (a<\eta<b)$, 由条件 (3) 知 $g'(\eta)\neq 0$, 所以有 $g(b)-g(a)\neq 0$. 其次将结论变形为

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

[4] https://www.zhihu.com/question/431898401/answer/1594422912

构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$, 则 $F(x)$ 满足

$$F(a)=\frac{g(b)f(a)-g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}=F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 于是有

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi),$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例题 4.55 设 x 与 y 均大于 0, 且 $x\neq y$. 证明: $\dfrac{1}{x-y}\begin{vmatrix} x & y \\ e^x & e^y\end{vmatrix}<1$

证明 注意到

$$\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix} x & y \\ e^x & e^y\end{vmatrix}=\frac{xe^y-ye^x}{x-y}\xlongequal{\text{分子分母同除以}xy}\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}<1$$

令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 连续, 又 $x\neq y$, 故 $f(x),g(x)$ 在 (x,y) 可导,
不妨设 $y>x$, $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 应用柯西中值定理,

$$\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{(y-x)\frac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{(y-x)\frac{-1}{\xi^2}}=e^{\xi}(1-\xi),\quad \xi\in(0<x<\xi<y)$$

又令 $h(x)=e^x(1-x)$, 则 $h'(x)=-xe^x<0$, $x\in(0,+\infty)$, 故 $\max\limits_{x\in(0,+\infty)}h(x)=h(0)=1$

因此不等式成立

4.1.5 多次中值定理

多次中值定理的解题思路 [39]

(1) 拉格朗日中值定理与柯西中值定理可以互相建立联系 (可以抵消).

- Lagrange 中值定理: $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
- Cauchy 中值定理: $f(b)-f(a)=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(b)-g(a))$

(2) 从形式上看: 拉格朗日中值定理是 1 个 ξ; 柯西中值定理是 2 个 ξ . 那么

① ξ 的个数为 1 个, 则用拉格朗日;

② ξ 的个数为 2 个 (乘除), 则用柯西.

③ 若要求 ξ_n 互不相等，则需要分段。分段方式[40] 大致有两种:

- 分段点可以抵消 (需要构造分段点的值);
- 分段点为 ξ_n，则可能是利用 Cauchy 中值定理反复求导来套娃

(3) 一把牛刀：Darboux 定理

(4) 常数 K 值法

- 可能不是中值定理的题目, 利用常数 K 值法将问题转化为零点存在问题

例题 4.56 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: 对任意的正数 a 和 b, 总存在 $\xi,\eta\in(0,1)$ $(\xi\neq\eta)$, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

证明 设 $0<c<1$, 对 $f(x)$ 在 $[0,c],[c,1]$ 上分别用 Lagrange 中值定理, 有

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c},\quad \xi_1\in(0,c)$$
$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c},\quad \xi_1\in(c,1)$$

故

$$\begin{aligned}\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}&=\frac{c}{f(c)}a+\frac{1-c}{1-f(c)}b\\&\xlongequal{\text{通分}}\frac{c\big(a-af(c)-bf(c)\big)+bf(c)}{(1-f(c))f(c)}\longrightarrow\text{常数}\end{aligned}\tag{4.11}$$

要使(4.11)式恒为常数[6], 只需要

$$a-af(c)-bf(c)=0\Rightarrow f(c)=\frac{a}{a+b}\in(0,1)$$

由介值定理知, 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$, 再代入(4.11)式得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{bf(c)}{(1-f(c))f(c)}=a+b$$

进一步可参考: 微分多中值等式命题证明的思路探索与典型例题分析[40]

例题 4.57 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 若 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 试证明: 对任意给定的 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 存在互不相等的 n 个数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(0,1)$, 使得:

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{a_n}{f'(\xi_n)}=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

证明 分析

- 由于 ξ_n 互不相等, 于是立马想到需要分段, 然后分别运用中值定理;
- [39] ξ_n 个数为 1, 于是我们考虑 Lagrange 中值定理.

法 I. 所证等价于

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)\sum\limits_{k=1}^n a_k}+\frac{a_2}{f'(\xi_2)\sum\limits_{k=1}^n a_k}+\cdots+\frac{a_n}{f'(\xi_n)\sum\limits_{k=1}^n a_k}=1$$

设 $0=c_0<c_1<\cdots<c_{n-1}<c_n=1$, 由 Lagrange 中值定理, 有

$$f(c_k)-f(c_{k-1})=f'(\xi_{k-1})(c_k-c_{k-1}),\quad \xi_k\in(c_{k-1},c_k)$$

从而有,

$$\frac{a_1}{f'(\xi_1)\sum\limits_{k=1}^n a_k}=\frac{a_1}{\big(f(c_1)-f(0)\big)\sum\limits_{k=1}^n a_k}(c_1-0),\quad \xi_1\in(0,c_1)$$
$$\frac{a_2}{f'(\xi_2)\sum\limits_{k=1}^n a_k}=\frac{a_2}{\big(f(c_2)-f(1)\big)\sum\limits_{k=1}^n a_k}(c_2-c_1),\quad \xi_2\in(c_1,c_2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_n}{f'(\xi_n)\sum\limits_{k=1}^n a_k}=\frac{a_n}{\big(f(1)-f(c_{n-1})\big)\sum\limits_{k=1}^n a_k}(1-c_{c_n-1}),\quad \xi_n\in(c_{n-1},1)$$

观察到

$$1\cdot(c_1-0)+1\cdot(c_2-c_1)+\cdots+1\cdot(1-c_{c_n-1})=1(\text{所证})$$

[6]这里的常数指的是: 可确定的常数. 式子的 $f(c)$ 可以用介值定理确定, 但 c 不行, 即我们只需要把含 c 的干掉

于是, 我们尝试令

$$f(c_k)-f(c_{k-1})=\frac{a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

代入, 可以解得

$$f(c_k)=\frac{a_0+a_1+\cdots+a_k}{a_1+\cdots+a_n}\in[0,1],\quad k=0,1,\cdots,n$$

从而得证.

例题 4.58 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f'(x)\neq 0$, 且 $f(a)=0$, $f(b)=2$, 证明: 在 (a,b) 内存在两个不同的点 ξ,η 使得

$$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1].$$

证明 先变形

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{bf'(\eta)-1}{f'(\eta)}\Rightarrow\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=b$$

从形式上看 ξ 乘除, 考虑 Cauchy; 对于 η 部分, 考虑到用 Lagrange 找原函数不方便, 故考虑 Cauchy. 并且为使得 $\xi\neq\eta$, 我们需从某点处分段.

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=\left.\frac{(xf(x))'}{f'(x)}\right|_{x=\xi}\Rightarrow \text{构造 } g(x)=xf(x)$$

设 $a<c<b$, 对 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 使用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(a,c)$ 使得

$$c=\frac{cf(c)-af(a)}{f(c)-f(a)}=\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}$$

对 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 使用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(c,b)$ 使得

$$\frac{b-c}{2-f(c)}=\frac{b-c}{f(b)-f(c)}=\frac{1}{f'(\eta)}$$

两式相加

$$c+\frac{b-c}{2-f(c)}=\frac{b+c(1-f(c))}{2-f(c)}\to\text{可确定常数}$$

我们只需干掉含 c 的部分, 即令 $1-f(c)=0\Rightarrow f(c)=1$, 并且我们由介值定理可知: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=1\in(0,2)$. 再回代

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=\frac{b}{2-1}=b\quad\checkmark$$

例题 4.59 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导 $(0<a<b)$, $f(a)\neq f(b)$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$$

解 考虑

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi}\Longrightarrow g'(x)=x^2\Longrightarrow\text{构造 } g(x)=x^2$$

令 $g(x)=x^2$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}\Longrightarrow f(b)-f(a)=\frac{(b^2-a^2)f'(\xi)}{2\xi}$$

考虑

$$\eta f'(\eta)=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}\Longrightarrow g'(x)=\ln x\Longrightarrow\text{构造 } g(x)=\ln x$$

令 $g(x)=\ln x$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\eta\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\eta f'(\eta)\Longrightarrow f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\eta f'(\eta)$$

故 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$. 得证

注 2 个 ξ (乘除) 的用柯西; 1 个 ξ 的用拉格朗日

例题 4.60 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

证明 令 $G(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 则 $G(0)=G(1)=0$, 则由 Lagrange 中值定理可知

$$G'(\xi)=\frac{G(\frac{1}{2})-G(0)}{\frac{1}{2}-0}\Rightarrow f'(\xi)-\xi=2G(\tfrac{1}{2}),\quad \xi\in(0,\frac{1}{2})$$

$$G'(\eta)=\frac{G(1)-G(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(\eta)-\eta=-2G(\tfrac{1}{2}),\quad \eta\in(\frac{1}{2},1)$$

故 $G'(\xi)+G'(\eta)=0\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$

例题 4.61 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$

证明: 存在两个不同的常数 $\eta,\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

分析: (1) 由于 $\xi\neq\eta$, 于是立马想到需要在某点处分段, 然后分别运用中值定理; (2)[39] ξ,η 个数为 1, 于是我们考虑 Lagrange 中值定理.

证明 [40] 设 $0<x_0<1$, 在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上分别对 $f(x)$ 用 Lagrange 中值定理可得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0},\quad \xi\in(0,x_0)$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0},\quad \eta\in(x_0,1)$$

于是, 有

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(x_0)\big(1-f(x_0)\big)}{x_0(1-x_0)}=1 \tag{4.12}$$

不妨先假设(4.12)成立, 于是我们有

$$f(x_0)\big(1-f(x_0)\big)=x_0(1-x_0)$$

解得,

$$f(x_0)=1-x_0\quad \text{或}\quad f(x_0)=x_0.$$

于是, 我们只需说明存在 $x_0\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0)=x_0\quad \text{或}\quad f(x_0)=1-x_0$$

(1) 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=F(1)=0$. 介值定理不能判断.

(2) 令 $F(x)=f(x)+x-1$. 因为 $F(0)F(1)<0$, 由零点定理知: 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=f(x_0)+x_0-1=0$, 即 $f(x_0)=1-x_0$

从而结论得证

例题 4.62 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$.

解 *(by 啦神)* 由柯西中值定理知, $\forall\xi\in(0,\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\pi^2})\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\sin 2\xi-\sin(2\cdot 0)}=\frac{f''(\omega)}{2\cos(2\omega)},\quad \omega\in(0,\xi)\in(0,\tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{2}{\pi^2})$$

令 $\eta=\dfrac{1}{\pi\cdot\cos(2\omega)}\in(\frac{1}{\pi},\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$, 有

$$f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$$

更多类似题目: 多次中值定理题目的解题思路[39]

例题 4.63 [7] 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 求证在 (a,b) 内存在相异的两点 ξ 和 η 使得

$$f'(\xi)f'(\eta)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2$$

证明 法 I(by 向禹, Acid) 首先若 $f(a)=f(b)$, 则存在一点 $f'(\eta)=0$, 所以 $\forall\xi$, $f'(\xi)f'(\eta)=0$.
若 $f(a)\neq f(b)$, 构造函数

$$g(x)=f(x)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

则 $g(a)=f(a)-f(b)$, $g(b)=f(b)-f(a)$, 故必有一点 $c\in(a,b)$ 使得 $g(c)=0$. 此时有

$$f(c)=-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\left(c-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

则

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{(c-b)(f(a)-f(b))}{(a-b)(c-a)}\frac{(c-a)(f(a)-f(b))}{(a-b)(c-b)}=\left(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)^2$$

因此, 由中值定理, 必存在两点 $\xi\in(a,c)$, $\eta\in(c,b)$ 使得

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\left(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)^2$$

法 II(by 予一人[8], MSE) 令

$$F(x):=[f(x)-f(a)]^2-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2(x-a)^2,$$

则有 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Lagrange 中值定理, 存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $F'(\eta)=0$, 也即

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\cdot f'(\xi)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2,$$

再由 Lagrange 中值定理，存在 $\eta\in(a,\xi)$ 使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(\eta),$$

于是

$$f'(\xi)f'(\eta)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2.$$

法 III(by 予一人). 令

$$\varphi(x):=[f(x)-f(a)]^2,\quad \psi(x):=(x-a)^2,$$

则由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

也就是

$$\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\cdot f'(\xi)$$

再由 Lagrange 中值定理，存在 $\eta\in(a,\xi)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(\eta)$, 代入即得结论。

练习 4.6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则必定存在互不相同的 n 个点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n.$$

证明 令

$$\varphi(x):=[f(x)-f(a)]^n,\quad \psi(x):=(x-a)^n$$

[7] MSE: https://math.stackexchange.com/questions/3715271/prove-there-exist-two-distinct-points-eta-xi-in-a-b-such-that-f-etaf

[8] https://www.zhihu.com/question/400768411/answer/1277727701

由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得

$$\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{(f(\xi_1)-f(a))^{n-1}}{(\xi_1-a)^{n-1}} f'(\xi_1)$$

同法, 依次类推,

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n.$$

例题 4.64 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, $f(a)=0$, $f(b)=2$, 求证: 在 (a,b) 内存在相异的两点 ξ 和 η 使得

$$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)] = f'(\xi)[bf'(\eta)-1].$$

证明 注意到

$$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)] = f'(\xi)[bf'(\eta)-1] \Rightarrow \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)} + \frac{1-bf'(\eta)}{f'(\eta)} = 0.$$

考虑 Cauchy 中值定理, 设 $a<c<b$, 则在 (a,c) 内, 存在一点 ξ 使得

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{cf(c)-af(a)}{f(c)-f(a)} = \frac{cf(c)}{f(c)} \xlongequal{f'(x)\neq 0} c.$$

在 (c,b) 内, 存在一点 η 使得

$$\frac{1-bf'(\eta)}{f'(\eta)} = \frac{(b-bf(b))-(c-bf(c))}{f(b)-f(c)} = \frac{-b-c+bf(c)}{2-f(c)}.$$

两式相加

$$c + \frac{-b-c+bf(c)}{2-f(c)} = \frac{-b+c+(b-c)f(c)}{2-f(c)} \tag{4.13}$$

为使得(4.13)等于 0 恒成立, 只需

$$-b+c+(b-c)f(c) = 0 \Rightarrow f(c)=1$$

4.2 洛必达法则

定理 4.8 ($\frac{0}{0}$ 不定型极限, L'Hospital 法则)

设

(1) 当 $x \to a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于 0;

(2) 在点 a 的某去心领域内, $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注 出题人设置的坑点: “设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导”

(1) 二阶可导 $\Rightarrow$ 一阶连续可导, 可对 $f(x)$ 用洛必达;

(2) 二阶可导 $\not\Rightarrow$ 二阶领域内可导, $f'(x)$ 不能再使用洛必达, 故本题求 $f''(0)$ 只能用导数定义.

例题 4.65 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可微, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)=A\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^4} &\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)+f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)}{4x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{(x-\sin x)f''(\xi)}{x^3}}_{\xi\text{在}x\text{与}\sin x\text{之间}}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{4x^2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin x)}{x}$$

$$=\frac{A}{24}+\frac{1}{8}\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}f''(\sin x)=\frac{A}{6}$$

例题 4.66 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 内的具有二阶连续导数的函数, 且

$$\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\leqslant 1$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明 对分式表达式 $\dfrac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ 使用两次洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f'(x)+xf(x)\right]e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right]e^{\frac{x^2}{2}}}{(x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}}=0$$

例题 4.67 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

解

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$$

$$\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0+}\frac{\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)e^u-\sqrt{1+u^6}}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{\frac{u^2e^u}{2}-\frac{3u^5}{\sqrt{1+u^6}}}{3u^2}=\lim_{u\to0+}\frac{\frac{e^u}{2}-\frac{3u^3}{\sqrt{1+u^6}}}{3}\xlongequal{\text{代值}}\frac{1}{6}$$

例题 4.68 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\tan(\frac{\pi}{4}+x)\right)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\tan(\frac{\pi}{4}+x)\right)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x^2}=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2}-1}{x^2}$$

$$\xlongequal{e^x-1\sim x}e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}e^2\lim_{x\to0}\frac{2\csc\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-2}{3x^2}$$

$$=\frac{2}{3}e^2\lim_{x\to0}\frac{\sec(2x)-1}{x^2}=\frac{4}{3}e^2$$

例题 4.69 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

解

$$\text{原式}\xlongequal{\text{取对数}}\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)$$

$$\xlongequal{\text{等价}}\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}-1\right)$$

$$\xlongequal{\text{整理}}\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{3x^2}=\exp\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\xlongequal{\text{等价}}e^{-\frac{1}{6}}$$

例题 4.70 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}\xlongequal{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\arcsin t}{(\arcsin t)^3}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}{6t}=-\frac{1}{3}$$

例题 4.71 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{x=-t}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1-t}{-1-t}\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1-t}{1+t}\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\arctan t\right)\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\arctan\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{t}}=\exp\lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln\left(\arctan\frac{1}{t}\right)}{t}$$
$$\xlongequal{①}\exp\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=1$$

① $-\ln(\arctan\frac{1}{t})\sim\ln t$, 是由于

$$-\ln\left(\arctan\frac{1}{t}\right)=-\ln\left(\frac{1}{t}\times\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1/t}\right)=\ln t-\ln\left(\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1/t}\right)\sim\ln t$$

例题 4.72 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\ln\left(\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}\right)}}{(x+\sin x)^2}$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)+\ln(\sqrt[2]{\cos x})+\cdots+\ln(\sqrt[n]{\cos x})}{(x+\sin x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{2(x+\sin x)(1+\cos x)}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{x+\sin x}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x+2\sec^2 2x+3\sec^2 3x+\cdots+n\sec^2 nx}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1}{8}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{16}$$

例题 4.73 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$ 傲娇小魔王

解

$$\text{原式}=\frac{1}{3^4}\lim_{x\to0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x^4}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\frac{1}{4\cdot3^4}\lim_{x\to0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^{\sin x}\cos x}{x^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^x\cos x+e^x\cos x-e^{\sin x}\cos x}{x^3}\\
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\sin\frac{e^x-1+x}{2}\sin\frac{x-e^x+1}{2}}{x^3}+\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cos x\cdot\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}\right)\\
&= \frac{1}{4\cdot 3^4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{4\cdot 3^5}=-\frac{1}{972}
\end{aligned}
$$

例题 4.74 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\{e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}=+\infty.$

解 令

$$
F(t)=\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{\text{换序}} F(t)=2\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^x\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}y.
$$

根据 *L'Hopital* 法则

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}e^{-t}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{e^t}&=2\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{x-t}}{t-x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=2\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=+\infty.
\end{aligned}
$$

例题 4.75 设 $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^x,\ f_3(x)=x^{x^x},\cdots,f_n(x)=\underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}}_{n\text{个}x}$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}f_n(x)$

解

$$
\lim_{x\to 0+}f_n(x)=\begin{cases}0, & n=2m-1(\text{奇数})\\ 1, & n=2m(\text{偶数})\end{cases}\quad m=1,2,\cdots.
$$

用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时易证结论成立. 假定 $m=k$ 时结论成立, 即

$$
\lim_{x\to 0+}f_{2k-1}(x)=0\,,\quad \lim_{x\to 0+}f_{2k}(x)=1
$$

都成立. 当 $m=k+1$ 时, 由归纳假定可知

$$
\lim_{x\to 0+}f_{2k+1}(x)=\lim_{x\to 0+}x^{f_{2k}(x)}=0
$$

并且当 x 充分小 (不妨设 $0<x<\delta<1$) 有 $\frac{1}{2}<f_{2k}(x)<\frac{3}{2}$, 从而

$$
x^{\frac{1}{2}}>x^{f_{2k}(x)}>x^{\frac{3}{2}},
$$

进而

$$
x^{x^{\frac{1}{2}}}>f_{2k+2}(x)>x^{x^{\frac{3}{2}}}<x^{x^{\frac{3}{2}}}.
$$

又因 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^{\frac{3}{2}}}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0+}f_{2k+2}(x)=1$.
由数学归纳法可知结论成立

例题 4.76 设 $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^x,\cdots,f_n(x)=x^{f_{n-1}(x)}$, 求极限

$$
\lim_{x\to 1}\frac{f_n(x)-f_{n-1}(x)}{(1-x)^n}
$$

解 当 $n=2$ 时,

$$
\lim_{x\to 1}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^{x-1}-1)}{(1-x)^2}=1
$$

当 $n>2$ 时,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{f_n(x)-f_{n-1}(x)}{(1-x)^n} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^{f_{n-1}(x)}-x^{f_{n-2}(x)}}{(1-x)^n}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^{f_{n-2}(x)}(x^{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)}-1)}{(1-x)^n}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x))\ln x}{(1-x)^n}\\
&= -\lim_{x\to 1}\frac{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)}{(1-x)^{n-1}}\\
&= \cdots = \lim_{x\to 1}(-1)^{n-2}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{(1-x)^2}\\
&= (-1)^{n-2} = (-1)^n
\end{aligned}$$

例题 4.77 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$

解 *(by ytdwdw)*[41] **引理**: 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 且对 $0<|x|<\delta$ 成立 $f(x)\neq g(x)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan f(x)-\tan g(x)}{f(x)-g(x)}=1 \tag{4.14}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7} &\xlongequal{\text{用}x\text{代替}\tan x} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan\sin\arctan x}{x^7}\\
&\xlongequal{4.14} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\sin x-\sin\arctan x}{x^7}\\
&\xlongequal{\sin\arctan x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^7}\\
&\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{7x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}-\frac{1}{(1+x^2)^3}}{14x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^4 x-\left(\frac{1+\sin^2 x}{1+x^2}\right)^3}{14x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^4 x-\frac{3(x^2-\sin^2 x)}{1+x^2}}{14x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}
\end{aligned}$$

接下来可以这样计算

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\frac{15-16\cos 2x+\cos 4x}{8}}{14x^6}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{24x^2-4(15-16\cos x+\cos 2x)}{7x^6}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{24x-2(16\sin x-2\sin 2x)}{21x^5}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{24-2(16\cos x-4\cos 2x)}{105x^4}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8\sin x-4\sin 2x}{105x^3}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8\cos x-8\cos 2x}{315x^2}-\frac{1}{14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x+8\sin 2x}{315x}-\frac{1}{14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

也可以这样算

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(1-\cos x-\frac{\sin^2 x\cos x}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\frac{\sin^3 x}{2}\right)}{140x^3}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \frac{9}{280}-\frac{11}{12\times 14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{3\left(\arcsin x-x-\frac{x^3}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1-\frac{x^2}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1-\frac{x}{2}\right)}{35x^2}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{3\left((1-x)^{-\frac{3}{2}}-1\right)}{140x}-\frac{11}{12\times 14}\\
&= \frac{9}{280}-\frac{11}{12\times 14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

4.3 泰勒公式

笔记 *Taylor* 展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$$

结合例题 *3.23* 可知: 它在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开恒为 *0.*

皮亚诺余项

定理 4.9 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\\ \cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)\ (x\to x_0).$$

注 求极限：泰勒公式应展开到第几阶？[42]

例题 4.78 (群友) 如何将 $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x}$ 泰勒展开到三阶.

$$\frac{\ln(1+x)}{e^x}=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

解 利用多项式的除法

$$
\begin{array}{r l}
 & x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots \\
\cline{2-2}
1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\,\big) & x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots \\
 & x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots \\
\cline{2-2}
 & \quad -\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots \\
 & \quad -\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3+\cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad \frac{4}{3}x^3+\cdots \\
 & \qquad\quad \frac{4}{3}x^3+\cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 0+\cdots
\end{array}
$$

例题 4.79 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right)$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}-e^{\pi}x\right)\\
&=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}-x\right)\\
&=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\right)\\
&=-2e^{\pi}
\end{aligned}
$$

注:

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad x>0$$

例题 4.80 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$

解

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\ (0<\theta_{n+1}<1)$$

$$n!e=\underbrace{n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}_{\text{整数}}+\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$$

从而,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)&=\lim_{n\to\infty}n\sin\Bigg[2\pi en!-\overbrace{2\pi n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}^{\sin(x\pm 2k\pi)=\sin x,\,k\in\mathbb{Z}}\Bigg]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)=2\pi
\end{aligned}
$$

练习 4.7 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}$

解

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(\sin x)^x \ln x} - e^{x^{\sin x} \ln \sin x}}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^x \ln x} - e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)} \ln\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)} \ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x - x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)} \ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)} - 1}{x^2} \\
&=1 \times \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x - x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)} \ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^x - x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\right]\ln x}{x^2} - \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)}{x^2} \\
&=0 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

练习 4.8 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n.$$

解 *(by Hansschwarzkopf)* 令

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n.$$

注意到

$$1-\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2, \forall x \in [0,1],$$

得到

$$\left(1-\frac{n+1}{4n^2}\right)^n \leqslant a_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)^n \leqslant \left(1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{48n^4}\right)^n.$$

故

$$a_n = \left(1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{4}}+o(1), \quad n\to\infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{1}{4}}.$$

练习 4.9 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

解 *(by 西西)* 记

$$I = n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

则

$$I = \frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(\exp\left(n\ln\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-1\right)$$

注意到

$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (n\to+\infty)$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to+\infty)$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)}{4n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{4}+n\left[-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=-\frac{15}{96n}-\frac{\pi^2}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

这里得注意到事实

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\sim\frac{\pi^2}{n^2}$$

所以就有

$$\lim_{n\to\infty}I=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(e^{-\frac{15}{96n}-\frac{\pi^2}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)=-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{15}{96}+\frac{\pi^2}{6}\right)$$

练习 4.10 求极限

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5}-n\left(n\left(\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)-\frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right]$$

解 (by 西西)[43] 我们如果利用泰勒公式就可以达到很好的结果

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

注意到

$$e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}\left(1-\frac{k^2}{2n}+\frac{k^3(3k-8)}{24n^2}-\frac{k^4(k^2-8k+12)}{48n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

且注意到

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \frac{e}{e-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-k} = \frac{e(e+1)}{(e-1)^3}$$

和

$$\sum_{k=0}^{n} k^3(3k-8)e^{-k} = \frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4(k^2-8k+12)e^{-k} = \frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7}$$

带入即可得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n &= \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2n}\cdot\frac{e(e+1)}{(e-1)^3} + \frac{1}{24n^2}\cdot\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5} \\ &\quad - \frac{1}{48n^3}\cdot\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

那么我们可以达到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5} - n\left(n\left(\frac{e}{e-1} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right) - \frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right] \\ &= \frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{48(e-1)^7}\end{aligned}$$

例题 4.81 (U340) 令

$$A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

求极限:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) - \frac{1}{4}\right]$$

Proposed by Yong Xi Wang, China

解 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内三阶可导, $[a,b]\in[0,1]$. 由 *Taylor* 公式

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2}f''(b)(x-b)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-b)^3,$$

其中 $\xi\in(x,b)$. 可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)(b-a) - \frac{1}{2}f'(b)(b-a)^2 + \frac{1}{6}f''(b)(b-a)^3 + O\big((b-a)^4\big)$$

对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 有,

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

相加即得到

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}\sum_{k=1}^{n} f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.15}$$

进一步有

$$f(1)-f(0) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.16}$$

以及

$$f'(1)-f'(0)=\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)+O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{4.17}$$

由 (4.15),(4.16), (4.17) 得到

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{1}{2n}[f(1)-f(0)]-\frac{1}{12n^2}[f'(1)-f'(0)]+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

于是, 我们令

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{4};\\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=A_n;\\ f(1)-f(0)&=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2};\\ f'(1)-f'(0)&=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2};\end{aligned}$$

代入即得到

$$\frac{\pi}{4}=A_n+\frac{1}{4n}+\frac{1}{24n^2}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}n\left[n\Big(\frac{\pi}{4}-A_n\Big)-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}.$$

例题 4.82 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}{\sin\tan x-\tan\sin x}$

解 [9]*It is convenient to do the computation in the general form. Let*

$$f(x)=x+ax^3+bx^5+cx^7+o(x^7)\quad\text{and}\quad\phi(x)=x+\alpha x^3+\beta x^5+\gamma x^7+o(x^7)$$

be the Taylor expanxions of two odd infinitely differentiable functions with the gerivatives at $x=0$ equal to 1. Then

$$\begin{aligned}f(\phi(x))&=x+\alpha x^3+\beta x^5+\gamma x^7+a(x+\alpha x^3+\beta x^5)^3+b(x+\alpha x^3)^5+cx^7+o(x^7)\\&=x+(a+\alpha)x^3+(b+3a\alpha+\beta)x^5+(c+3a\beta+3a\alpha^2+5b\alpha+\gamma)x^7+o(x^7)\end{aligned}$$

Since the coefficients at x^3 and x^5 are symmetric with respect to exchanging Latin and Greek letters, the expansion of $f(\phi(x))-\phi(f(x))$ starts only with x^7. This is a bad news, but the good news is that the coefficient at x^7 depends on the Taylor coefficients of $f(x)$ and $\phi(x)$ only up to order x^5.

$$f(\phi(x))-\phi(f(x))=\big[3a\alpha(\alpha-a)+2(b\alpha-\beta a)\big]x^7+o(x^7)$$

On the other hand, if $\phi(x)=f^{-1}(x)=x+Ax^3+Bx^5+o(x^5)$, then

$$x=f(f^{-1}(x))=x+(a+A)x^3+(b+aA+B)x^5+o(x^5)$$

i.e. $A=-a$, and $B=3a^2-b$. Substituting into $3a\alpha(\alpha-a)+2(b\alpha-\beta a)$ respectively: $-a$ for a, $-\alpha$ for α, $3a^2-b$ for b, and $3\alpha^2-\beta$ for β, we find:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\phi^{-1}(x))-\phi^{-1}(f^{-1}(x))&=[3a\alpha(a-\alpha)+2(a(3\alpha^2-\beta)-\alpha(3a^2-b))]x^7+o(x^5)\\&=-[3a\alpha(a-\alpha)+2(b\alpha-\beta a)]x^7+o(x^7)\end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(\phi^{-1}(x))-\phi^{-1}(f^{-1}(x))}{f(\phi(x))-\phi(f(x))}=1$$

[9]https://math.berkeley.edu/~giventh/lim.pdf

命题 4.1

设实函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = 0$ 点附近解析, $f(x) \neq g(x)$, 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = 1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)} = 1$ 其中 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ 依次为 $f(x)$, $g(x)$ 的反函数.[9]

例题 4.83 设 $a > 0$, 求

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\ln(1+(\cdots\ln(1+a/n)\cdots)))$$

式中包含 n 重括号.

解[44] 可以证明, 当 $0 < x < 1$ 时,

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{2x}{2+x-x^2}$$

令 $t_0 = a/n$, $t_{i+1} = \ln(1+t_i)\ (i \geqslant 0)$. 那么非负数列 $t_i\ (i \geqslant 0)$ 单调减少. 由上述不等式得知

$$t_{i+1} \geqslant \frac{2t_i}{2+t_i}, \quad \frac{1}{t_{i+1}} \leqslant \frac{1}{t_i} + \frac{1}{2},$$

于是

$$\frac{1}{t_n} \leqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{t_0} = \frac{n(a+2)}{2a} \Longrightarrow nt_n \geqslant \frac{2a}{a+2}.$$

因此 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} nt_n \geqslant \dfrac{2a}{a+2}$.

类似地,

$$t_{i+1} \leqslant \frac{2t_i}{2+t_i-t_i^2}, \quad \frac{1}{t_{i+1}} \geqslant \frac{1}{t_i} + \frac{1}{2} - \frac{t_i}{2} \geqslant \frac{1}{t_i} + \frac{1}{2} - \frac{t_0}{2},$$

于是

$$\frac{1}{t_n} \leqslant \frac{n(1-t_0)}{2} + \frac{1}{t_0} = \frac{na-a^2+2n}{2a} \Longrightarrow nt_n \geqslant \frac{2a}{a+2-a^2/n}.$$

因此, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} nt_n \leqslant \dfrac{2a}{a+2}$.

综上, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\ln(1+(\cdots\ln(1+a/n)\cdots))) = \dfrac{2a}{a+2}$.

注 此题很容易就陷入了等价无穷小的误区, 但由于嵌套了 n 次, 阶也可能发生了改变.

拉格朗日余项

定理 4.10 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 在 x 与 x_0 之间.

泰勒公式证明题

- 区间中点展开
- 区间端点展开
- 极值点或最值点展开
- 任意点展开

例题 4.84 证明不等式: $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} - \cos y\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$, $x, y \in (-\infty, +\infty)$.

解 将 $\sin x$ 在点 y 处展开成一阶泰勒公式

$$\sin x=\sin y+\cos y\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2,\ (\xi\text{介于}x\text{与}y\text{之间})$$

则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|&=\left|\frac{\left|\sin y+\cos y\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2\right|-\sin y}{x-y}-\cos y\right|\\&=\left|-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2\right|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

例题 4.85 求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001

证明 由泰勒公式 $\sin t=t-\dfrac{\sin(\theta t)}{2}t^2\ (0<\theta<1)$. 令 $t=\dfrac{1}{x}$ 得

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2},$$

代入原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501\Longrightarrow x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$$

由此知 $x>500,\ 0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$, 则有

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$$

所以, $x=501$ 是满足条件的解

例题 4.86 设函数 $f(x)$ 满足 $[0,1]$ 内二阶可导, 且 $|f(x)|\leqslant a,|f''(x)|\leqslant b$. 证明: $|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$

证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开, 其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 \quad ①$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \quad ②$$

由 ②–① 得:

$$\begin{aligned}&f(1)-f(0)=f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\\\Longrightarrow\ &f'(x_0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|f'(x_0)\right|&\leqslant\left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\right|\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}\left[(1-x_0)^2+x_0^2\right]=2a+\frac{b}{2}\underbrace{\left(1+2x_0^2-2x_0\right)}_{x_0\in(0,1)}\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}\end{aligned}$$

练习 4.11 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 也存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$$

证明 由题设极限存在条件, 记

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a,\quad\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=b$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_x)h^3 \tag{4.18}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(\eta_x)h^3 \tag{4.19}$$

其中 $\xi_x\in(x,x+h),\eta_x\in(x-h,x)$.
(4.18) 与 (4.18) 两式相加, 得

$$f''(x)=\big(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\big)+\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)-f'''(\eta_x)\big)$$

在式中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=(a+a-2a)-\frac{1}{6}(b-b)=0$$

(4.18) 与 (4.18) 两式相减, 得

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\Big[f(x-h)-f(x+h)-\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)+f'''(\eta_x)\big)\Big] \tag{4.20}$$

在式 (4.20) 中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在, 由 Lagrange 中值定理,

$$f(x-h)-f(x+h)=2hf'(\theta)\ ,\quad \theta\in(x-h,x+h)$$

在式 (4.20) 中令 $x\to\infty$, 那么 $\theta\to+\infty$, 于是 $a=a-\dfrac{h^2b}{6}$, 因此 $b=0$ 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$
在 (4.18) 中, 令 $x\to+\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

练习 4.12 设 $f(x)\in C^{(2)}(0,1)$, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$. 若存在 $M>0$, 使得

$$(1-x)^2|f''(x)|\leqslant M\quad(0<x<1)$$

则 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0$

证明 对 $t,x\in(0,1):t>x$, 用 Taylor 公式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+f''(\xi)\frac{(t-x)^2}{2},x<\xi<t$$

并取 $t=x+(1-x)\delta$, $(0<\delta<\dfrac{1}{2})$, 我们有

$$f(t)-f(x)=\delta(1-x)f'(x)+\frac{\delta^2}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow(1-x)f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{\delta}-\frac{\delta}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$|f'(x)(1-x)|\leqslant\frac{|f(t)-f(x)|}{\delta}+\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2$$

注意到 $\xi=x+(t-x)\theta,\ 0<\theta<1$

$$\Rightarrow(1-\xi)^2=(1-x)^2(1-\delta\theta)^2>\frac{1}{4}(1-x)^2$$

(这里是由于 $0<\delta\theta<\dfrac{1}{2}$) 及条件 $(1-x)^2|f''(x)|\leqslant M(0<x<1)$

$$\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2=|f''(\xi)|(1-\xi)^2\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-\xi)^2}\cdot\frac{\delta}{2}<2M\delta$$

$$\Rightarrow|f'(x)(1-x)|\leqslant\frac{|f(t)-f(x)|}{\delta}+2M\delta$$

现在, 对 $\forall\varepsilon$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$ 对上述 $\delta\varepsilon$, 存在 $\eta>0$, 对 $\forall 0<1-x<\eta$, 有 $|f(t)-f(x)|<\dfrac{\delta\varepsilon}{2}$
这样, 对 $\forall 0<1-x<\eta$, 就有 $\Rightarrow|f'(x)(1-x)|<\varepsilon$ 故得

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0$$

例题 4.87 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\left|f''(\xi)\right|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证明 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处分别泰勒展开得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_a)(x-a)^2,\quad \xi_a\in(a,x)$$
$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_b)(x-b)^2,\quad \xi_b\in(x,b)$$

在以上两式分别令 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_a')(b-a)^2,\quad \xi_a\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)\tag{4.21}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_b')(a-b)^2,\quad \xi_a\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)\tag{4.22}$$

由 (4.22) – (4.21) 得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}\left(f''(\xi_a')-f''(\xi_b')\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\left|f(b)-f(a)\right|&\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\left(\left|f''(\xi_a')\right|+\left|f''(\xi_b')\right|\right)\\&\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max\left(\left|f''(\xi_a')\right|,\left|f''(\xi_b')\right|\right)=\frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(\xi)\right|\end{aligned}$$

这里 ξ 为 $\left|f''(\xi_a')\right|$ 或 $\left|f''(\xi_b')\right|$ 由此即得原式

例题 4.88 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)$ 有界. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解 法 *II*[10]. 设 $|f''(x)|\leqslant M,\forall x\geqslant 0$. 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}$, *s,t.* $\dfrac{M}{2N}<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 固定 N, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 故 $\exists\Delta>0$. 当 $x>\Delta$ 时, 有 $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3N}$, 由 *Tayor* 公式得

$$f(x+\tfrac{1}{N})-f(x)=\frac{f'(x)}{N}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\left(N^{-1}\right)^2$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=N|f(x+\tfrac{1}{N})-f(x)-\tfrac{1}{2N^2}f''(\xi)|\\&\leqslant N(|f(x+\tfrac{1}{N})|+|f(x)|)+\frac{|f''(\xi)|}{2N}\\&<N\left(\frac{\varepsilon}{3N}+\frac{\varepsilon}{3N}\right)+\frac{M}{2N}<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

例题 4.89 (Landau-Kolmogorov 不等式)[11] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 m 次可导, 且有

$$M_k=\sup\left\{|f^{(k)}(x)|:-\infty<x<+\infty\right\}<+\infty\quad(k=0,1,\cdots,m;\ m\geqslant 2),$$

则 $M_k\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-k/m}M_m^{k/m}$ $(k=1,\cdots,m-1)$.

证明 当 $m=2$ 时的情形. 依 Taylor 定理, 任取 $h>0$, 有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1h),\quad 0<\theta_1<1,$$
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x-\theta_2h),\quad 0<\theta_2<1.$$

[10]徐森林《数学分析精选习题全解》P169

[11]https://mathworld.wolfram.com/Landau-KolmogorovConstants.html

两式相减, 得到

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\Big(f(x+h)-f(x-h)\Big)-\frac{h}{4}\Big(f''(x+\theta_1 h)-f''(x-\theta_2 h)\Big),$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant\frac{1}{2h}\Big(|f(x+h)|+|f(x-h)|\Big)+\frac{h}{4}\Big(|f''(x+\theta_1 h)|+|f''(x-\theta_2 h)|\Big)\\&\leqslant\frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2,\ \forall h>0.\end{aligned}$$

取 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$, 即得所证.

当 $m\geqslant 2$ 时的情形. 现采用归纳法: 假设对 m 结论成立, 我们有

$$f^{(m-1)}(x+h)=f^{(m-1)}(x)+hf^{(m)}(x)+\frac{h^2}{2}f^{(m+1)}(x+\theta_1 h),$$

$$f^{(m-1)}(x-h)=f^{(m-1)}(x)-hf^{(m)}(x)+\frac{h^2}{2}f^{(m+1)}(x-\theta_1 h).$$

从而知

$$\begin{aligned}f^{(m)}(x)=&\frac{1}{2h}\left(f^{(m-1)}(x+h)-f^{(m-1)}(x-h)\right)\\&-\frac{h}{4}\left(f^{(m+1)}(x+\theta_1 h)-f^{(m+1)}(x-\theta_1 h)\right)\end{aligned}$$

由此可得

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{M_{m-1}}{h}+\frac{h}{2}M_{m+1}\ (h>0).$$

现取 $h=\sqrt{2M_{m-1}/M_{m+1}}$, 得 $M_m\leqslant\sqrt{2M_{m-1}/M_{m+1}}$. 根据归纳法假设, 有

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-k/m}M_m^{k/m}.$$

以 M_m 的上述估计代入, 则得

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(m+1-k)}{2}}M_0^{1-k/(m+1)}M_{m+1}^{k/(m+1)}.$$

证毕.

柯西余项

定理 4.11 (带 Cauchy 余项的 Taylor 公式)

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个领域, 对于该领域内的任一 x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \theta\in(0,1)$.

练习 4.13 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 且存在常数 $C\geqslant 0$, 使得对所有 $n\in\mathbf{N}_+$ 和 $x\in[-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!C^n$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明 不妨设 $C>0$. 令 $\delta=\min\{1,\dfrac{1}{2C}\}$, 则对任何 $x\in[-\delta,\delta]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和所给条件, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0, x\in[-\delta,\delta]$. 从而

$$f^{(n)}(x)\equiv 0, x\in[-\delta,\delta], n=0,1,2,\ldots.$$

令

$$a=\inf\{\alpha\in[-1,0):f(x)=0,\forall x\in[\alpha,0]\},b=\sup\{\beta\in(0,1]:f(x)=0,\forall x\in[0,\beta]\},$$

则根据已证结果, $-1\leqslant a<b\leqslant 1$. 我们断言必有 $a=-1,b=1$. 先证 $b=1$. 若 $b<1$, 取 $\delta_1=\min\{\delta,1-b\}$. 则对任何 $x\in[b,b+\delta_1]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和已证结果, 存在 $\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i+\frac{f^{(n+1)}(b+\theta_1(x-b))}{(n+1)!}(x-b)^{(n+1)}\right|\leqslant 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0,x\in[b,b+\delta_1]$, 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[0,b+\delta_1]$, 这与 b 的定义矛盾. 矛盾说明必有 $b=1$. 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[0,1]$. 类似可证 $a=-1$. 从而 $f(x)\equiv 0,x\in[-1,0]$. 最后得到 $f(x)\equiv 0,x\in[-1,1]$

积分余项

定理 4.12 (带积分余项的 Taylor 公式)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域 $U(x_0)$ 内有连续的 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x\in U(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$.

例题 4.90 证明: $1+\dfrac{n}{1!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}>\dfrac{e^n}{2}$ 对于每个整数 $n\geqslant 0$ 成立

解 由于 $e^n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$, 问题等价于证明

$$n!>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t\iff\underbrace{\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=n!}>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=n-t$, 上式化为

$$\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t>2\int_0^nu^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

从而其等价于

$$\int_n^{+\infty}u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u>\int_0^nu^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

设 $f(u)=u^ne^{-u}$, 则只要证明

$$f(n+h)\geqslant f(n-h)\,,\quad 0\leqslant h\leqslant n$$

则问题得证. 以下证明上式成立. 上式等价于证明

$$(n+h)^ne^{-n-h}\geqslant(n-h)e^{h-n}$$

即

$$n\ln(n+h)\geqslant n\ln(n-h)+h$$

令 $g(h)=n\ln(n+h)-n\ln(n-h)-2h$, 则 $g(0)=0$, 并且对 $0<h<n$, 有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}=\frac{n}{n+h}+\frac{n}{n-h}-2=\frac{2n^2}{n^2-h^2}-2>0$$

从而当 $0<h<n$ 时, $g(h)>0$. 这样问题得证

笔记 利用这一结论我们可以证明如下结论。证明存在 $50<a<100$. 使得

$$\int_0^ae^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}\right)\mathrm{d}x=50$$

✍ **练习 4.14** 设 $a>1$，试证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x=1$$

解 首先,

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-y}y^n\,\mathrm{d}y=1.$$

其次, 取 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $a\lambda>1$. 命

$$f(x)=e^{-\lambda x}x\Rightarrow f'(x)=e^{-\lambda x}(1-\lambda x)<0,\quad\forall x\in[a,\infty).$$

因此, $\forall x\in[a,\infty)$, 有 $e^{-\lambda x}x\leqslant e^{-\lambda a}a$.

$$\begin{aligned}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^\infty\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x&=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^\infty e^{-(1-\lambda)xn}\left(e^{-\lambda x}x\right)^n\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{n^{n+1}}{n!}\left(e^{-\lambda a}a\right)^n\int_a^\infty e^{-(1-\lambda)xn}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n^{n+1}}{n!}\left(e^{-\lambda a}a\right)^n\frac{e^{-(1-\lambda)an}}{(1-\lambda)n}=\frac{n^n}{n!}a^n\frac{e^{-an}}{1-\lambda}\\&\sim\frac{1}{(1-\lambda)\sqrt{2n\pi}}\left(ae^{1-a}\right)^n\to0.\end{aligned}$$

由此可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a\left(e^{-x}x\right)^n\mathrm{d}x=1.$$

✍ **练习 4.15** 设 $a>1$，试证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{na}{1!}+\frac{(na)^2}{2!}+\ldots+\frac{(na)^n}{n!}}{e^{na}}=0$$

解 令 $nx=t$, 则原极限等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{na}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=1.$$

注意到

$$1=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t,$$

上式又等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=0.$$

事实上, 容易算出

$$\int_{na}^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=\left((na)^n+n(na)^{n-1}+n(n-1)(na)^{n-2}+\ldots+n!\right)e^{-na}.$$

由 $a>1$ 易知

$$(na)^n+n(na)^{n-1}+n(n-1)(na)^{n-2}+\ldots+n!<(n+1)(na)^n.$$

因此

$$\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t<\frac{(n+1)(na)^ne^{-na}}{n!}.$$

根据 *Stirling* 公式和 $e^{a-1}>a(a>1)$,

$$\frac{(n+1)(na)^ne^{-na}}{n!}\sim\frac{(n+1)(na)^ne^{-na}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n\to0(n\to\infty).$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=0,\ a>1.$$

注意上式即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{na}{1!}+\frac{(na)^2}{2!}+\ldots+\frac{(na)^n}{n!}}{e^{na}}=0, a>1.$$

练习 4.16 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

解 *(西西):* 我们有

$$e^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

因此，只要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right)$$

下面来估计 $\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t&=n^{n+1}\int_0^1 e^{nz}(1-z)^n dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{n(z+\ln(1-z))}dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)}dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right)\\=&\frac{n!e^n}{n^n}-2n\left[\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\right]\\=&\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)+2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\end{aligned}$$

其中 $\theta_n\in(0,1)$. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(z^3)\right)dz=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-z}zdz+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{4}{3}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

练习 4.17 (Bernstein's limit). Proof that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}=\frac{1}{2}$$

解 法 I[15]. 由带积分余项的泰勒展开式知

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

因而原命题等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

再利用斯特林公式

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\ \theta\in(0,1)$$

知原命题等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

首先, 注意到 $e^{-\frac{x^2}{2}}\geqslant(1-x)e^x\ (x\geqslant 0)$, 于是:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

其次, 对任何 $\alpha>1$ 考虑辅助函数

$$f(x)=(1-x)e^x-e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},\ x\leqslant 0.$$

因为 $f'(x)=xe^x\left(\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1\right)$, 而

$$\lim_{x\to0^+}\left(\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1\right)=\alpha-1>0,$$

故存在实数 $x_\alpha\in(0,1)$, 使得当 $x\in(0,x_\alpha)$ 时,

$$\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1>0$$

因而, $f(x)$ 在 $[0,x_\alpha]$ 内递增, 故 $(1-x)e^x\geqslant e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}$ $(x\in[0,x_\alpha])$. 从而,

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{n\alpha x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

再由 α 的任意性知

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

综上所述, 可得:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

法 II(by ytdwdw). 由带积分余项的泰勒展开式知

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

得到

$$\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=1-e^{-n}\int_0^n\frac{(n-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t=n!$, 要证明的结论等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\int_n^{+\infty}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t}=1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=1,$$

其中 $f(t)=te^{1-t}$. 为了证明上述不等式, 除了利用积分的收敛性, 我们证明主要利用以下性质: $\forall\beta>1>\gamma>0$,

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{f(\beta t)}{f(t)} \leqslant f(\beta) < 1,\ t \in [1, +\infty), \\ \dfrac{f(\gamma t)}{f(t)} \leqslant f(\gamma) < 1,\ t \in (0, 1]. \end{cases}$$

(2) 存在 $\varepsilon = \varepsilon_{\beta,\gamma} \in (0, 1)$ 使得

$$f(1 + \beta s) \leqslant f(1 - s) \leqslant f(1 + \gamma s), \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

上式由 $f(1 + t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\ (t \to 0)$ 推得.

由 (1),

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\int_\beta^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\beta \int_1^{+\infty} f^n(\beta t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \beta f^n(\beta) = 0.$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^\gamma f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\gamma \int_0^1 f^n(\gamma t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \gamma f^n(\gamma) = 0.$$

于是结合 (2) 得到

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\int_{1-\varepsilon}^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{1+\beta\varepsilon} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\int_0^\varepsilon f^n(1-t)\,\mathrm{d}t}{\beta \int_0^\varepsilon f^n(1+\beta t)\,\mathrm{d}t} \geqslant \frac{1}{\beta},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_{1-\varepsilon}^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{1+\gamma\varepsilon} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^\varepsilon f^n(1-t)\,\mathrm{d}t}{\gamma \int_0^\varepsilon f^n(1+\gamma t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{1}{\gamma},$$

由 $\beta > 1 > \gamma > 0$ 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t} = 1$ 从而结论得证.

解法 2

$$\because\ \ (1 + n + \frac{n^2}{n!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}) = e^n - \int_0^n e^t \frac{(n-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \xlongequal{n-t=x} e^n - e^n \int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\therefore\ a_n = 1 - \int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

下面求 $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$

令 $\eta = n^{-\frac{1}{2}+z}, 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
\because\ \int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x &\xlongequal{x=n(z+1)} \int_{-1}^0 \frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^n n^{n+1}}{n!} dz \\
&= n\frac{n^n}{n!e^n} \int_{-1}^0 e^{-nz}(z+1)^n dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1 + o(\frac{1}{n})] \int_{-1}^0 [e^{-z}(z+1)]^n dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1 + o(\frac{1}{n})][\int_{-1}^\eta [e^{-z}(z+1)]^n dz + \int_{-\eta}^0 [e^{-z}(1+z)]^n dz] \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

设 $f(z) = e^{-z}(1+z), (z \leqslant 0), f'(z) = -e^{-z} \cdot z \geqslant 0$

$$\therefore \int_{-1}^\eta [e^{-z}(1+z)]^n dz < (1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n < [e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

$$\therefore\ I_1 = o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2z}})$$

下面考虑 I_2

$$\because\ e^{-z}(1+z)=e^{-z+\ln(z+1)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}}\quad(0<\theta(z)<1)$$

$$\begin{aligned}I_2&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^{0}e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3})}dz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^{0}e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^{0}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x\\&=1-(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2))\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^{0}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^3}{3}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=1-\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}(-\frac{2}{3})\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

从这个解答也可以看出

$$\begin{aligned}&(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!})\\&=e^n-e^n\int_0^n\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n!}\int_0^n(x+n)^ne^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{n^n}{n!}\int_0^n(1+\frac{x}{n})^ne^{-x}\mathrm{d}x\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\end{aligned}$$

解法 3 由带积分余项的 *Taylor* 展开式知

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^ne^x(n-x)^n\mathrm{d}x$$

得到

$$\begin{aligned}1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}&=e^n-\int_0^ne^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{n-t=x}e^n-e^n\int_0^n\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

注意到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x=1$, 于是

$$\begin{aligned}1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}&=e^n\left(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^n\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x\right)\\&=e^n\int_n^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_n^{+\infty}x^ne^{n-x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{n-x=-t}\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}(n+t)^ne^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^ne^{-x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

下面证明

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

利用 *Taylor* 公式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}+o(\frac{x^3}{n^3})}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2n}\int_0^n e^{-t^2}e^{o(\frac{1}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

下面考察

$$\begin{aligned}\frac{n^n}{n!}\int_1^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\ &< \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为

$$\ln(n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}) = (n+1)\ln n - \frac{n^2}{2} = n^2\left[(1+\frac{1}{n})\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\right]$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}} = 0$, 且由 $e^{\frac{nx}{2}} > \frac{(\frac{nx}{2})^{n+2}}{(n+2)!} \Rightarrow e^{-\frac{nx}{2}} < \frac{(n+2)!}{(\frac{nx}{2})^{n+2}}$

$$\Rightarrow \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x < \frac{n^{n+1}e^{-\frac{z^2}{2}}(n+1)(n+2)}{(\frac{n}{2})^{n+2}}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+2}} = 0. \quad \lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

所以

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x}{e^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\ &\xlongequal{Striling}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

法 *IV*(中心极限定理) 设 $x_1, x_2, \cdots$ 为相互独立且服从参数 λ 的普阿松分布 $P(x_i = k) = \frac{1}{k!}e^{-\lambda}$. 因此, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 服从参数 $n\lambda$ 的普阿松分布, 即

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = k\right) = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$$

因为 $E(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) = n\lambda$, $\text{var}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) = n\lambda$, 由中心极限定理对任意的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

因为

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < n\lambda + x\sqrt{n\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]} \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]} \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

于是, 取 $x = 0, \lambda = 1$ 即得到: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

练习 4.18 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$$

解 *(by 逆逆)* 可以证明

$$\begin{aligned} e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right) &= \frac{1}{n!}\int_n^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{n^n}{n!e^n}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

考虑函数列

$$f_n(t) = \sqrt{n}\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t)$$

根据 $\log(1+x) = x - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(x^4)$ 可得

$$f_n(t) = \sqrt{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}+O(\frac{t^4}{n})} - 1\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t) \to f(t) = \frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

再根据 $\log(1+x) \leqslant x - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, 以及 $e^x - 1 \leqslant xe^x$ 可得

$$\begin{aligned} f_n(t) &\leqslant \sqrt{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}} - 1\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t) \\ &\leqslant \frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}}\chi_{(0,\sqrt{n})}(t) \leqslant g(t) = \frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

根据控制收敛定理可得

$$\int_0^{\sqrt{n}}\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

另一方面, 存在 $c > 0$ 使得 $x \geqslant 1$ 时 $\log(1+x) \leqslant (1-c)x$, 于是有

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-c\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-cn}}{c\sqrt{n}}.$$

根据

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t = \frac{2e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}$$

可以得到估计式

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}+\left(\frac{2}{3}+o(1)\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

因此根据 *Stirling* 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O(\frac{1}{n})\right)$ 可得

$$e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

练习 4.19 求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}-\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{23}{270\sqrt{2\pi}}$$

解 *(by ytdwdw)* 可以证明:

$$\sqrt{s}\int_0^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{s}}+\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k\Gamma(\frac{k+1}{2})}{s^{\frac{k}{2}}}+o\left(\frac{1}{s^{\frac{m}{2}}}\right),\ (s\to+\infty).$$

$$\sqrt{s}\int_{-1}^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m}\frac{2a_k\Gamma(k+\frac{1}{2})}{s^k}+o\left(\frac{1}{s^m}\right),\ (s\to+\infty).$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2}\sqrt{2}, & a_1&=-\frac{1}{3},\\
a_2&=\frac{1}{12}\sqrt{2}, & a_3&=-\frac{4}{135},\\
a_4&=\frac{1}{432}\sqrt{2}, & a_5&=\frac{4}{2835},\\
a_6&=-\frac{139}{194400}\sqrt{2}, & a_7&=\frac{8}{25515},\\
a_8&=-\frac{571}{32659200}\sqrt{2}, & a_9&=-\frac{1124}{37889775},\\
a_{10}&=\frac{163879}{12345177600}\sqrt{2}, & a_{11}&=-\frac{41768}{7388506125},
\end{aligned}$$

并由此得到 (用到 $a_0,a_1,\cdots,a_5$)

$$\frac{\int_s^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3\sqrt{2s}}-\frac{23}{270\sqrt{2\pi s^3}}+\frac{23}{3024\sqrt{2\pi s^5}}+o(s^{\frac{5}{2}}),\ (s\to+\infty)$$

4.3.1 方程的近似解

定理 4.13 (Newton 迭代法)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)<0, f(b)>0$, 且对任意 $x\in[a,b]$ 有 $f'(x)>0, f''(x)>0.$, 且数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\cdots,\ x_0=b.$$

那么就有

1. 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内恰有一个根 ξ;
2. 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$.

证明 [36] 1. 因为 $f(a)<0, f(b)>0$, 由连续函数的零点定理知, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$. 又 $f'(x)>0$, 因此方程的根唯一.

2. 由泰勒公式

$$f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{f''(\eta_n)}{2}(\xi-x_n)^2\quad \eta_n\text{ 在 } x_n \text{ 与 } \xi \text{ 之间}$$

又 $f(\xi)=0,\ f''(x)>0$, 于是

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)=-\frac{f''(\eta_n)}{2}(\xi-x_n)^2<0$$

由此即得到

$$\xi<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}_+$$

由递推公式得 $\forall f(x_n)>0$ 有 $x_{n+1}<x_n$ 成立. 由于初始值 $x_0=b$ 处有 $f(b)>0$, 而当 $x_n>\xi$ 时就有 $f(x_n)>0$, 因此, 数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列, 且以 ξ 为下界. 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$. 递推式两端取极限

$$A=A-\frac{f(A)}{f'(A)}\Longrightarrow f(A)=0$$

由于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中根唯一, 因此 $A=\xi$.

3. 现在用泰勒公式估计迭代误差

$$\begin{aligned}0<x_{n+1}-\xi=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\xi&=\frac{(x_n-\xi)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}\\&=\frac{f''(\theta_n)(x_n-\xi)^2}{2f'(x_n)}\end{aligned}$$

其中 $\theta_n\in(\xi,x_n)$. 利用 $f''(x)$ 连续且处处大于 0, 就有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}=\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\neq 0$$

因此 $\{x_n\}$ 二阶收敛于 ξ.

4.3.2 插值多项式

定理 4.14 (Lagrange 插值多项式)

如果 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $n+1$ 个不同的点且函数 f 在这些点处的函数值是已知的, 则唯一存在一个次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 满足

$$f(x_k)=P(x_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

用插值基函数的方法可得

$$P(x)=f(x_0)L_{n,0}(x_0)+\cdots+f(x_n)L_{n,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}(x)$$

对任意 $k=0,1,2,\cdots,n$, 有

$$L_{n,k}(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是区间 $[a,b]$ 内的不同的点且 $f\in C^{n+1}[a,b]$, 则对任意 $x\in[a,b]$, 存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

例题 4.91 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

证明 法 I. 对 $f(x)$ 以 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 两点为插值节点作一次插值,

$$L_1(x)=f(a)\cdot\frac{x-b}{a-b}+f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a},$$

而根据 $f(a)=f(b)=0$ 易知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一次 Lagrange 插值多项式为

$$L_1(x)=f(a)\cdot\frac{x-b}{a-b}+f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a}=0.$$

最后由 Lagrange 插值误差余项知

$$f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b),\quad \xi\in(a,b)$$

从而

$$|f(x)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|,\quad \forall x\in[a,b].$$

例题 4.92 设 $f(x)$ 连续于 $[a,b]$, 三阶可导于 (a,b), 且 $f(a)=f(b)=f(c)=0, c\in(a,b)$. 证明: $\forall x\in(a,c)\cup(c,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-c)(x-b).$$

证明 法 II(by Perplexboy)[37]. 由题意, 对 $f(x)$ 以 $(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))$ 三点为插值节点作二次插值,

$$L_2(x)=f(a)\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

而根据 $f(a)=f(b)=f(c)=0$ 易知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的二次 Lagrange 插值多项式为 $L_2(x)=0$. 最后由 Lagrange 插值误差余项知

$$f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)(x-b)(x-c),\quad \xi\in(a,b)$$

也即 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-b)(x-c)$$

例题 4.93 (AMM,11517) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是三次可微函数, 且 $f(a)=f(b)$, 证明:

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^4}{192}\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|.$$

证明 设 $c=(a+b)/2$, $P(x)$ 是过点 $(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))$ 的二次插值多项式

$$P(x)=f(a)\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

则

$$f(x)=P(x)+\frac{f'''(\theta x)}{6}(x-a)(x-b)(x-c),\quad \theta(x)\in[a,b]$$

并且

$$\int_a^c P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)}{24}\big(5f(a)+8f(c)-f(b)\big)$$

$$\int_c^b P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)}{24}\big(-f(a)+8f(c)+5f(b)\big)$$

且注意到 $f(a)=f(b)$, 于是有

$$\int_a^c P(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b P(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因此,

$$\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_a^c \frac{f'''(\theta x)}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\,\mathrm{d}x-\int_c^b \frac{f'''(\theta x)}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|\int_a^b |(x-a)(x-b)(x-c)|\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^4}{192}\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|.$$

例题 4.94 求 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}$

解 设

$$f(x)=x^{n+1}-x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

由插值公式我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{(x-j)}{k-j}\right)f(k)$$

比较两边 x^n 系数:

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{k^{n+1}}{k-j}\right)$$

化简得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}=\frac{n(n+1)!}{2}$$

定理 4.15 (Hermite 插值多项式)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导数, 在 (a,b) 上 $n+1$ 阶导数, 且对于 $a\leqslant x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant b$, 存在唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$ (称为插值多项式) 使得

$$P_n^{(l)}(x_j)=f^{(l)}(x_j),\quad 0\leqslant l\leqslant n_j-1;\ j=0,1,\cdots,m,$$

其中 $m\geqslant 0$, $1\leqslant n_j\leqslant n+1$, $n+1=n_0+n_1+\cdots+n_m$. 则对任意 $x\in[a,b]$, 上述插值问题有误差估计

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_m)^{n_m},$$

这里 ξ 介于 $x_{\min}=\min(x_0,x_1,\cdots,x_m,x)$ 和 $x_{\max}=\max(x_0,x_1,\cdots,x_m,x)$ 之间的一个数 (一般依赖于 x).

例题 4.95 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有四阶连续导数, 三次多项式 $p_3(x)$ 满足 $p_3(0)=f(0)$, $p_3'(0)=f'(0)$, $p_3(1)=f(1)$, $p_3'(1)=f'(1)$, 证明:

$$|f(x)-p_3(x)|\leqslant\frac{1}{384}\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(4)}(x)|.$$

证明 (by 予一人). 置 $R_3(x):=f(x)-p_3(x)$, 其中, $p_3(x)$ 就是满足题设条件的三次 Hermite 插值多项式, 这 $R_3(x)$ 就是插值余项. 由于

$$R_3(0)=R_3'(0)=R_3(1)=R_3'(1)=0,$$

可设 $R_3(x)=x^2(1-x)^2\varphi(x)$. 于是, 再置

$$F(t):=f(t)-p_3(t)-t^2(1-t)^2\varphi(x),$$

则 $F(t)$ 至少已有三个零点, 即 $t=0,x,1$, 依 Rolle 定理, $F'(t)$ 至少在区间 $(0,x),(x,1)$ 内各有一个零点, 但 $t=0,1$ 本身也是 $F'(t)$ 零点, 于是 $F'(t)$ 至少已有四个零点, 如此再反复利用 Rolle 定理, $F''(t)$ 至少有三个零点, $F'''(t)$ 至少有两个零点, $F(4)(t)$ 至少有一个零点, 即: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\cdot\varphi(x)=0$, 进而

$$|f(x)-p_3(x)|=\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\cdot x^2(1-x)^2\leqslant\frac{1}{4!\cdot 16}\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(4)}(x)|.$$

帕德 (Padé) 近似

定理 4.16 (帕德 (Padé) 近似)

给定自然数 m 和正整数 n, 函数 $f(x)$ 的 $[m,n]$ 阶帕德近似为

$$R(x)=\frac{\sum_{j=0}^{m}a_jx^j}{1+\sum_{k=1}^{n}b_kx^k}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}$$

并且

$$\begin{gathered}f(0)=R(0)\\ f'(0)=R'(0)\\ f''(0)=R''(0)\\ \vdots\\ f^{(m+n)}(0)=R^{(m+n)}(0)\end{gathered}$$

对于给定的 m,n 函数 $f(x)$ 的 $[m,n]$ 阶帕德近似是唯一的。函数 $f(x)$ 的帕德近似记为 $[m/n]_f(x)$.

注 注意到

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}=\frac{\sum_{k=0}^{m}a_kx^k}{1+\sum_{k=1}^{n}b_kx^k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

计算对应项的系数

$$\left(1+\sum_{k=1}^{m}b_k\,x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^k$$

例题 4.96 求 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处 $[2,2]$ 阶的帕德逼近 $[2,2]\ln(1+x)$.

解

$$[2,2]\ln(1+x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x+b_2x^2}$$

由 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x)$$

要求

$$\ln(1+x)\left(1+b_1x+b_2x^2\right)-\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\frac{1}{5}x^5+\cdots$$

即要求 $\ln(1+x)$ 与 $[2,2]\ln(1+x)$ 在 0 处的前 4 项系数相等. 简化计算, 我们令

$$\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\left(1+b_1x+b_2x^2\right)-\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=0$$

对应系数为 0, 得到

$$\begin{cases}a_0=0\\ (1-a_1)x=0\\ (b_1-a_2-\frac{1}{2})x^2=0\\ (b_2-\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{3})x^3=0\\ (-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}b_1-\frac{1}{2}b_2)x^4=0\end{cases}$$

解得

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad b_1=1,\quad b_2=\tfrac{1}{6}.$$

于是得到 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处 $[2,2]$ 阶的帕德逼近

$$[2,2]\ln(1+x)=\frac{x+\frac{1}{2}x^2}{1+x+\frac{1}{6}x^2}=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}$$

进一步有

表 4.1: $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的帕德近似

	1	2	3
0	x	$\frac{2x-x^2}{2}$	$\frac{6x-3x^2+2x^3}{6}$
1	$\frac{2x}{2+x}$	$\frac{6x+x^2}{4x+6}$	$\frac{24x+6x^2-x^3}{24+18x}$
2	$\frac{12x}{12+6x-x^2}$	$\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}$	$\frac{30x+21x^2+x^3}{30+36x+9x^2}$
3	$\frac{24x}{24+12x-2x^2+x^3}$	$\frac{90x+57x^2}{90+102x+21x^2-x^3}$	$\frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3}$

例题 4.97 (知乎,431773140) 证明:

$$2^{\frac{2}{5}}+\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 2}<0.$$

证明 法 I(构造法). 首先, 我们大致估计下精度

$$2^{\frac{2}{5}}+\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 2}\sim -0.00242$$

注意到

$$\ln 2<\frac{61}{88},\quad \ln 5>\frac{103}{64}$$

不等式等价于证明

$$2^{\frac{2}{5}}+\frac{\ln 2-\ln 5}{\ln 2}=2^{\frac{2}{5}}+1-\frac{\ln 5}{\ln 2}<2^{\frac{2}{5}}+1-\frac{\frac{103}{64}}{\frac{61}{88}}<0$$

即证明

$$2^{\frac{2}{5}}<\frac{88\cdot 103}{61\cdot 64}-1=\frac{645}{488}$$

也即

$$4<\left(\frac{161}{122}\right)^5<\left(\frac{645}{488}\right)^5\approx 4.033366$$

法 II(构造法).

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^{\frac{4}{5x}}+x^{\frac{2}{5(x-1)}}\right)+\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{2}{x+3}\right)<0,\quad \forall x>1$$

代入 $x=2$ 即可

4.4 函数的单调性与曲线的凹凸性

笔记 一个可微函数 $f(x)$, 使得 $f'(x_0)>0$, 但 $f(x)$ 在点 x_0 的任何邻域内都不是单调的.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

例题 4.98 设 $a>b>1$. 证明: $a^{b^a}>b^{a^b}$

证明 (by Hansschwarzkopf)

1) 若 $b^a > a^b$, 则

$$a^{b^a} > b^{b^a} > b^{a^b}.$$

2) 若 $b^a \leqslant a^b$, 则 $\frac{\ln a}{\ln b} \geqslant \frac{a}{b}$. 注意到 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上为严格减函数,

从而 $\frac{\ln b}{b-1} > \frac{\ln a}{a-1}$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a^b}{b^a}$. 因此

$$\frac{\ln a}{\ln b} \geqslant \frac{a}{b} > \frac{a^b}{b^a}.$$

即

$$a^{b^a} > b^{a^b}.$$

例题 4.99 设 a, b, c, d 是 4 个不等于 1 的正数, 满足 $abcd = 1$, 问 $a^{2010} + b^{2010} + c^{2010} + d^{2010}$ 和 $a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} + d^{2011}$ 哪个数大? 为什么?

解

$$f(x) = a^x + b^x + c^x + d^x (x > 0)$$

则有

$$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + d^x \ln d$$

且有 $f'(0) = 0$. 二阶导数

$$f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b + c^x \ln^2 c + d^x \ln^2 d > 0$$

故有 $f'(x) > 0, x > 0. f(x)$ 严格单调递增, 故

$$f(2010) < f(2011)$$

本题的推广: 设 $a_i > 0, p > q, p, q \in \mathbb{R}$ 若 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则 $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^q$.

例题 4.100 (东京大学,1999) 请证明: $e^\pi > 21$

解 切线法 (by sammy711)[45] 记从点 (t, e^t) 引出的切线为 $g(x)$, 则 $g'(x) = e^t$. 设 $h(x) = e^x - g(x)$, 则 $h(t) = 0$, 以及

$$h'(x) = e^x - e^t \Rightarrow \begin{cases} h''(x) = e^x > 0 \Rightarrow h'(x) \uparrow \\ h'(t) = 0 \end{cases}$$

可知, 当 $x > t$ 时, $h'(x) > 0$, 又 $h(t) = 0 \Rightarrow h(x) > 0 (x > t)$. 取 $t = 3$, 则

$$g(x) = e^3(x-3) + e^3$$

令 $x = \pi$, 则 $e^\pi > g(\pi) \Rightarrow e^\pi > (\pi - 2)e^3$

$$e^\pi > (\pi - 2)e^3 > (3.1 - 2) \times 2.7^3 = 21.6513 > 21$$

例题 4.101 (知乎,465861734) 请证明: $e^\pi > 23$.

解 (by Ricky)[45]

$$\begin{aligned} e^\pi &= e^3 \cdot e^{\pi - 3} \\ &> (2.718)^3 \cdot e^{0.141} \\ &> 20 \times e^{0.141} \\ &> 20 \times [1 + 0.141 + \frac{1}{2} \times (0.141)^2] \\ &> 20 \times 1.15 = 23 \end{aligned}$$

例题 4.102 证明 $x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7 = 0$ 有且仅有一个正实根.

解[13] 我们只需证明

$$F(x) \equiv \frac{x^2+3x^2+7x^4-5x^6-8x^7}{x^4} = x^{-2}+3x^{-1}+7-5x^2-8x^3$$

在 $(0,+\infty)$ 内有且只要一个零点.

由于 $F(0^+)=+\infty$, 而 $F(+\infty)=-\infty$, 因此, $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个零点. 另一方面,

$$F'(x) = -2x^{-3}-3x^{-2}-10x-24x^2 < 0,\ \forall x>0.$$

因此, $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单减. 从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多只要一个零点.

例题 4.103 (徐森林, P115) 证明: $\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b < a-b$, 其中 $0<b<a$

证明 设 $f(x)=\arctan x$. 则 f 在 $[b,a]$ 上连续可导, $f'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
由拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, $\exists \xi(b,a)$, s.t

$$\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b) < a-b$$

为证明另一半不等式. 令 $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, 则

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b \iff \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\sec\alpha\sec\beta} < \alpha-\beta$$
$$\iff \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha < \alpha-\beta \iff \sin(\alpha-\beta) < \alpha-\beta$$

$\sin(\alpha-\beta) < \alpha-\beta$ 当 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 成立

或者, 令 $F(x)=\arctan x - \arctan b - \dfrac{x-b}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+b^2}}$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2-bx}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left[1-\frac{bx+1}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+x^2}}\right] > 0 \end{aligned}$$

$F(x)$ 单调增, 由 $a>b$ 得

$$\arctan a - \arctan b - \frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} = F(a)-F(b) > 0.$$

由此得 $\arctan a - \arctan b > \dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$

例题 4.104 试证: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$\tan x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

解 令 $f(x)=\tan x - \left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{1}{63}x^7\right)$, 则 $f(0)=0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2 x - \left(1+x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{9}x^6\right) \\ &= \tan^2 x - \left(1+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x^4\right)x^2 \\ &= \tan^2 x - \left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^2 x^2 \\ &\xlongequal{\text{平方差公式}} \left[\tan x - \left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right]\left[\tan x + \left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] \end{aligned}$$

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 上式第二个括号内显然为正. 记 $g(x)=\tan x - x - \dfrac{1}{3}x^3$. 则有

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 - x^2 \\ &\xlongequal{\text{平方差公式}} (\tan x - x)(\tan x + x) > 0, \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

又 $g(0)=0$, 因此 $g(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 所以 $f'(x)>0$. 又因 $f(0)=0$, 所以 $f(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

例题 4.105 设 $0<x<1$, 证明: $(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<4$

证明 (by Hansschwarzkopf) 两边取对数得

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<4\iff\frac{\ln(1+x)}{x}+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\ln 4$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{x^3}-\frac{4x^2+2x}{x^2(1+x)^2}=\frac{2}{x^3}\left(\ln(1+x)-\frac{2x^2+x}{(1+x)^2}\right).$$

令 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x^2+x}{(1+x)^2}$, 则 $g'(x)=\dfrac{x^2-x}{(1+x)^3}=\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}<0$, $\forall x\in(0,1)$, 故

$$g(x)<g(0)=0\,,\quad \forall x\in(0,1).$$

因此 $f''(x)<0$, $\forall x\in(0,1)$. 进一步有

$$f(x)<f(1)+f'(1)(x-1)=f(1)=\ln 4\,,\quad \forall x\in(0,1).$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{f(x)}<4\,,\quad \forall x\in(0,1)\,.$$

例题 4.106 证明: 当 $n\geqslant 2$ 时成立不等式:

$$\frac{3}{4}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}<1$$

证明 (by MSE)[46] 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}=\frac{n+1}{n^{n/(n-1)}}=\mathrm{e}^{u(n)},$$

$\forall x>1$, $u(x)=\log(x+1)-\dfrac{x}{x-1}\log x$. 则

$$u'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\left(\log(x)-2\frac{x-1}{x+1}\right),$$

令 $v(x)=\log(x)-2\dfrac{x-1}{x+1}$, 则

$$v'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

则当 $x>0$ 时, $v'(x)>0\Rightarrow v(x)\uparrow\Rightarrow v(x)\geqslant v(1)=0\Rightarrow\forall x>1, u'(x)>0\Rightarrow u(x)\uparrow$. 从而, $\log 3-2\log 2=u(2)\leqslant u(n)\leqslant u(+\infty)$,

$$u(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\log x}{x-1}\right)=0$$

从而, 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\frac{3}{4}=\mathrm{e}^{u(2)}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}<\mathrm{e}^{u(+\infty)}=1.$$

练习 4.20 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 证明: $\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

证明 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x}\tag{4.23}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1\end{aligned}$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x&=\frac{1}{3}\left(\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{-\frac{3}{4}}x\right)\\&>\sqrt[3]{\cos^{\frac{2}{3}}x\cdot\cos^{\frac{2}{3}}x\cdot\cos^{-\frac{3}{4}}x}=1\end{aligned}$$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'(x)>0$, 从而 $\varphi(x)$ 单调递增, 又 $\varphi(0)=0$, 因此 $\varphi(x)>0$, 即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0$$

由 (4.23) 式得 $f'(x)$<0 从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)&=\lim_{x\to0+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\tan x+x}{x}\times\lim_{x\to0+}\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\\&=2\times\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$$

例题 4.107 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 证明: $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}<1-\dfrac{4}{\pi^2}$.

证明 (by ytdwdw[26],P56) 定义

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right),\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

则

$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2}{\sin^3 x}\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}-\cos x\right)$$

考虑

$$g(x)=\ln\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{3}\ln\cos x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

则 $g(0^+)=0$,

$$g'(x)=\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\tan x=-\frac{1}{x\tan x}\left(\tan x-x-\frac{1}{3}x\tan^2 x\right)$$

再考虑

$$h(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x\tan^2 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

则 $h(0)=0$,

$$\begin{aligned}h'(x)&=\sec^2 x-1-\frac{1}{3}\tan^2 x-\frac{2}{3}x\tan x\sec^2 x\\&=\frac{2}{3}\tan x\sec^2 x(\sin x\cos x-x)\\&<0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

由此依次得到在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内, $h(x)<h(0)=0, g'(x)>0, g(x)>g(0)=0, f'(x)>0, f(x)<f(\frac{\pi}{2})=0$.
顺便证明了几个不等式

$$x^3\cos x<\sin^3 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x^3<\tan x\sin^2 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

例题 4.108 证明：当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时, 成立不等式

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x+\frac{1}{12\pi}x(\pi^2-4x^2).$$

证明 令 $f(x)=\sin x-\left(\frac{2}{\pi}x+\frac{1}{12\pi}x(\pi^2-4x^2)\right)$, 则

$$f'(x)=\cos x-\left(\frac{2}{11}+\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{\pi}x^2\right)$$

$$f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}x$$

$$f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{\pi}$$

令 $f'''(x)=0\Rightarrow\cos x_0=\frac{2}{\pi}$. 当 $x\in(0,\arccos\frac{2}{\pi})$ 时, $f'''(x)<0$; 当 $x\in(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2})$ 时, $f'''(x)>0$, 故 $x=\arccos\frac{2}{\pi}$ 为 $f''(x)$ 的极小值,

$$f''(x_0)=-\sin x_0+x_0\cos x_0=(x_0-\tan x_0)\cos x_0<0$$

又 $f''(0)=f''(\frac{\pi}{2})$, 故 $f''(x)\leqslant 0\Rightarrow f'(x)\downarrow$, 而

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)<0$$

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$ 或 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 而 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow f(x)\geqslant 0$

例题 4.109 (Redheffer 不等式) 设 $x\in\mathbb{R}$, 证明: $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}$.

证明 (by 予一人)[47]. 首先, 由于不等式两端的函数都是偶函数, 我们只需要证明不等式在 $x\geqslant 0$ 时成立即可.

- 当 $x=0,\pi$ 时, 若补充定义 $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1$, 不等式以等式形式平凡地成立;
- 当 $x>\pi$ 时, 引入新元 $t:=x-\pi>0$, 不等式化为

$$\frac{\sin t}{t}<\frac{2\pi^2+3\pi t+t^2}{2\pi^2+2\pi t+t^2},$$

  这依然成立, 因为显然有左端小于 1, 而右端大于 1.

如此, 我们仅需考查 $0<x<\pi$ 时的情形即可. 我们先来证明一个需要用到的不等式, 即

引理 4.1

若 $0<x<\pi$, 则 $x+\sin x>\frac{x^2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

证明. 只需令

$$f(x):=x+\sin x-\frac{x^2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

则有

$$f'(x)=1+\cos x-\frac{2x\sin x-x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{(\sin x-x)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}>0,$$

这表明 $f(x)$ 严格递增, 于是 $f(x)>f(0)=0$, 引理得证.

引理 4.2

若 $0<x<\pi$, 则 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}$.

为此, 置 $g(x):=\dfrac{x^2(x+\sin x)}{x-\sin x}$, 则

$$g'(x)=\frac{2x}{(x-\sin x)^2}\cdot\left(x^2(1+\cos x)-\sin x(x+\sin x)\right),$$

由此再置 $h(x):=x^2(1+\cos x)-\sin x(x+\sin x)$, 则有

$$h'(x)=\sin x\left(x+\sin x-\frac{x^2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)<0,$$

这里利用了引理 4.1 的结论. 于是 $h(x)$ 严格单调递减, 进而 $h(x)<h(0)=0$, 所以 $g'(x)<0$, 于是 $g(x)$ 也是严格单调递减, 故而 $g(x)>g(\pi)=\pi^2$, 也即

$$\frac{x+\sin x}{x-\sin x}>\frac{\pi^2}{x^2},$$

整理即证.

例题 4.110 (CMC, 2015) 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty$$

解 α 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$. 若 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 取 $x_n=(n\pi)^{-1}, y_n=\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)^{-1}$. 则

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|^{\alpha}}=2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1}\to\infty$$

下证 $\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}<+\infty$. 由于 $f(x)$ 为偶函数, 不妨设 $0\leqslant x<y$. 令

$$z=\sup\{u\leqslant y\,|\,f(u)=f(x)\}$$

则 $z^{-1}\leqslant y^{-1+2\pi}$.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|f(z)-f(y)|\\&\leqslant\int_z^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant|y-z|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant|x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y\left(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant|x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}|x-y|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

推广[48]: 对任意 $x,y>0$, 均有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant\sqrt{2|x-y|}$$

例题 4.111 证明: 当 $x\geqslant 1$ 时成立不等式:

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}}+x^{-\frac{1}{x}}>2$$

练习 4.21 某产品的需求函数和总成本函数分别为 $p=40-4q$ 和 $C(q)=2q^2+4q+10$, 政府对产品以税率 t 征税, 求:

(1) 厂方以税率 t 纳税后，获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.
(2) $t=12$ 和 $t=30$ 时，分别求厂方获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.
(3) 税率 t 为多少时，征税收益最大？此时产品的产量和单价为多少？

解 纳税后的利润函数

$$L_t(q)=R(q)-C(q)-tq=36q-6q^2-10-tq,\quad L'(q)=36-12q-t=0,$$

得唯一驻点 $q=\dfrac{36-t}{12}$，又 $L''(q)=-12<0$，所以 $q_t=q=\dfrac{36-t}{12}$ 是最大值点，此时

$$p_t=40-4q_t=28+\frac{t}{3},$$

因此，以税率 t 纳税时，当产量 $q_t=\dfrac{36-t}{12}$，单价 $p_t=28+\dfrac{t}{3}$ 时，厂方获得最大利润，此时征税收益 $T=tq_t=\dfrac{36t-t^2}{12}$.

(2) 把 $t=12$ 代入上述各值，得

$$q_{12}=\frac{36-12}{12}=2,\ p_{12}=28+\frac{12}{3}=32,\ T=12\times2=24,$$

再把 $t=30$ 代入，得

$$q_{30}=\frac{36-30}{12}=\frac{1}{2},\ p_{30}=28+\frac{30}{3}=38,\ T=30\times\frac{1}{2}=15,$$

(3) 由征税收益

$$T=\frac{36t-t^2}{12},\quad T'=\frac{18-t}{6}=0,\quad T''=-\frac{1}{6}$$

得唯一驻点 $t=18$，又 $T''(18)<0$，所以 $t=18$ 为最大值点．因此，当税率 $t=18$ 时，征税收益最大，此时

$$q_{18}=\frac{36-18}{12}=\frac{3}{2},\quad p_{18}=40-4q_{18}=40-4\times\frac{3}{2}=34,$$

征税收益

$$T=18\times\frac{3}{2}=27,$$

因此，当税率 $t=18$ 时，征税收益最大为 27，此时产品产出量为 1.5，单价为 34.

定理 4.17

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上 n 阶可导，且

$$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1),\quad f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)\ (x>a)$$

则当 $x>a$ 时有 $f(x)>g(x)$

证明 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$x\geqslant a$. 则

$$F^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

由 $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 及 $F(x)$ 在 $x=a$ 点的 $n-1$ 阶泰勒公式得

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n\quad(a<\xi<x)$$

因为 $F^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-g^{(n)}(\xi)>0$, 所以 $F(x)>0$. 即 $f(x)>g(x)$

例题 4.112 证明不等式: $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x$，$\left(0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

解

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x,\ \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)\Longleftrightarrow\sin^3x\cdot(\cos x)^{-1}\geqslant x^3,\ \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

记 $f(x)=\sin^3x\cdot(\cos x)^{-1}$, $g(x)=x^3$, 则

$$f'(x)=2\sin^2x+(\cos x)^{-2}-1,\ g'(x)=3x^2\Longrightarrow f'(0)=g'(0)=0.$$

$$f''(x)=4\sin x\cos x+2(\cos x)^{-3}\sin x,\ g'(x)=6x\Longrightarrow f''(0)=g''(0)=0.$$

$$f'''(x)=4\cos 2x-6(\cos x)^{-4}\sin x+2(\cos x)^{-2}\,,\ g'(x)=6\Longrightarrow f'''(0)=g'''(0)=6.$$

$$f^{(4)}(x)=\left[24(\cos x)^{-5}-8(\cos x)^{-3}-16\cos x\right]\sin x\,,\ g^{(4)}(0)=6.$$

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $0<\cos x<1$, 则

$$(\cos x)^{-5}>(\cos x)^{-3}>\cos x\,,\ f^{(4)}(x)>0=g^{(4)}(x).$$

故 $f(x)>g(x)\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 即有 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x$

由于不等式两边都是偶函数, 所以当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时不等式仍成立.

4.5 函数的极值与最大值最小值

定理 4.18 (极值的第三充分条件)

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内存在直到 $n-1$ 阶的导数, 且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在. 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则有

- 当 n 为奇数, x_0 一定不是极值点;
- 当 n 为偶数, 则 x_0 一定为 $f(x)$ 的极值点. 若 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点; 若 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点.

证明 由泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}+o\big((x-x_0)^n\big)=f(x_0)+\mu_n(x)(x-x_0)^n.$$

其中 $\mu_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$, 它在某领域 $U(x_0;\delta)$ 内恒与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.

(i) 当 n 为偶数, 而 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n>0,\ x\in U(x_0;\delta)$$

故 $f(x)\geqslant f(x_0)$, $x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极小值点;

又当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n<0,\ x\in U(x_0;\delta)$$

故 $f(x)\leqslant f(x_0)$, $x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极大值点.

(ii) 当 n 为奇数时, 有

$$(x-x_0)^n\begin{cases}<0\,, & x\in(x_0-\delta,x_0),\\ >0\,, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

从而 $\mu_n(x)(x-x_0)^n$ 在 x_0 左右两侧异号, 这就说明 x_0 不是极值点

例题 4.113 设函数 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}f''(x)+3x[f'(x)]^2=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln^2(1+x)-x$, 若 $x_0>0$ 是 $f(x)$ 的一个驻点, 能否确定 x_0 是 $f(x)$ 的极值点? 若是, 说明是极大值点还是极小值点.

解 由所给方程和 $f'(x_0)=0$ 知

$$f''(x_0)=(1+x_0)\ln^2(1+x_0)-x_0^2.$$

下面证明 $f''(x_0)<0$: 记 $\varphi(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, 因为

$$\varphi'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x\,,\ \varphi''(x)=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]$$

当 $x>0$ 时, 由 $\ln(1+x)<x$, 知 $\varphi''(x)<0$, 所以 $\varphi'(x)$ 单调减少, 又 $\varphi'(0)=0$, 得 $\varphi'(x)<0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 单调减少, 又 $\varphi(0)=0$, 所以 $\varphi(x)<0$.

根据上面的判断可知, $f(x)$ 在 x_0 取得极大值

例题 4.114 求函数

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

的极值, 其中 n 为正整数

解 $f(x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\\&=e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$, 可解得唯一驻点 $x=0$. 当 n 为奇数时,

$$f'(x)=\begin{cases}>0, & x<0\\<0, & x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=1$; 而当 n 为偶数时, $\forall x\neq 0$ 有 $f'(x)<0$ 所以此时 $f(x)$ 无极值

4.6 曲线的凹凸性与拐点

定义 4.1 (凹函数)

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凹的 (或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是 (向上) 凸的 (或凸弧).

♣

注 此定义为同济第七版《高等数学》中的定义.

- 数学分析教材与同济版高等数学教材的凹凸性定义不同

定理 4.19 (充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

1. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;
2. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

♡

例题 4.115 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 证明:

1. 对于 $a<x<x_0<y<b$, 存在 $\lambda(0<\lambda<1)$, 使 $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$;
2. 对于满足 $0<\lambda<1$ 的 λ, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

解 1. 令 $\frac{y-x_0}{y-x}=\lambda$, 则 $0<\lambda<1$, 且有

$$x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$$

2. 令 $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\exists\xi_1\in(x,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,y)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(y - x_0)^2$$

由于 $f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0, x \neq x_0, y \neq y_0$, 故有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(y) > f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0)$$

因此有

$$\begin{aligned}\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) > &\ \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ (1-\lambda) f(x_0) + (1-\lambda) f'(x_0)(y - x_0) \\ = &\ f(x_0) - f'(x_0)[\lambda x + (1-\lambda) y - x_0] \\ = &\ f(x_0) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)\end{aligned}$$

故得证

例题 4.116 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x) \leqslant 0$,
证明：若对于 $0 < a < b < a + b < 2$，有 $f(a) \geqslant f(a+b)$，则

$$\frac{af(a) + bf(b)}{a+b} \geqslant f(a+b).$$

证明 根据 $f''(x) \leqslant 0$, 可知 f 在 $[0,2]$ 上是凹函数. 故

$$f(b) = f\left(\frac{b-a}{b}(a+b) + \frac{a}{b}a\right) \geqslant \frac{b-a}{b} f(a+b) + \frac{a}{b} f(a).$$

再根据条件 $f(a) \geqslant f(a+b)$ 得到 $f(b) \geqslant f(a+b)$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{af(a) + bf(b)}{a+b} &= \frac{a}{a+b} f(a) + \frac{b}{a+b} f(b) \\ &\geqslant \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(a+b) = f(a+b).\end{aligned}$$

例题 4.117 求 $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< 1 + 2\sum_{n=2}^{100} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 1 + 2(10-1) = 19\end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

故

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} > 2\sum_{n=2}^{100} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2(\sqrt{101} - 1) > 18$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 *18*

例题 4.118 证明对于任何自然数 n, 有

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

证明 左边有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

右边, 注意到 (凹凸性, 面积法)

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})\\&=\frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{\sqrt{n}}{2}\\&<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{\sqrt{n}}{2}<\frac{2}{3}n\sqrt{n}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

笔记 *(by 向禹). 单点二阶导数大于 0 而不具有凹凸性的函数*

$$f(x)=\int_{0}^{x}t^{2}\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+\frac{x^{2}}{4}$$

定义 4.2 (拐点[12])

一般地, 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0,f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点

例题 4.119 曲线 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ ( ).

A. 有一个拐点 B. 有两个拐点 C. 有三个拐点 D. 无拐点

解 本题答案为 D.

$$y''=\frac{e^{x}(1+x^{2})}{(1+x)^{3}}=\begin{cases}<0, & x<-1\\>0, & x>-1\end{cases}$$

但 $x=-1$ 不满足拐点定义 (不连续).

定理 4.20 (第三充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0)=0\,(m=2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0\,(n\geqslant 3)$, 则当 n 为奇数时, $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

定义 4.3 (凸 (凹) 函数)

设 f 是区间 I 上的实值函数, 如果对任何 $\alpha\in(0,1)$ 以及 $x,y\in I$ 成立着

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant(\geqslant)\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

则称 f 是 I 上的凸 (凹) 函数. 如果上式当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 则称 f 为严格凸 (凹) 函数

注 此定义为楼红卫的《微积分进阶》内的定义

练习 4.22 设 $n\geqslant 1, a_1,a_2,\cdots,a_n>0$. 求证

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{n-1}{n}\max_{i,j\in R}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^{2}$$

解 *(by tian27546)* 设

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\max_i a_i=b,\min_i a_i=a$$

考虑任意 $a_i\geqslant a_j$ 则有

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i+\varepsilon,\cdots,a_j-\varepsilon,\cdots,a_n)\\&=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}-\sqrt[n]{a_1\cdots(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)\cdots a_n}\\&=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}(\sqrt[n]{(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)}-\sqrt[n]{a_ia_j})\end{aligned}$$

注意

$$aia_j-(a_i+\varepsilon)(a_j-\varepsilon)=\varepsilon(a_i-a_j)+\varepsilon^2\geqslant 0$$

故

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i+\varepsilon,\cdots,a_j-\varepsilon,\cdots,a_n)\leqslant 0$$

如此下去，我们只有当 a_i 中有 k 个值为 a，有 $n-k-1$ 个取 b，还有一个是任意的，不妨设是 $a_p=x>0$，故我们考虑

$$f(c)=\frac{ka+(n-k-1)b+x}{n}-\sqrt[n]{a^kb^{n-k-1}x}$$

显然有

$$f''(x)=\sqrt[n]{a^kb^{n-k-1}}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}-2}>0$$

故 f 是凸函数，那么只有当 $x=b$ 时取得最大. 故我们只要证明

$$\frac{ka+(n-k)b}{n}-\sqrt[n]{a^kb^{n-k}}\leqslant\frac{n-1}{n}(a-2\sqrt{ab}+b)$$

即等价证明

$$(n-1-k)+(k-1)b+n\sqrt[n]{a^kb^{n-k}}\geqslant(2n-2)\sqrt{ab}$$

这显然有 $2n-2$ 元均值不等式有

$$a+\cdots a+b+\cdots b+\sqrt[n]{a^nb^{n-k}}+\cdots+\sqrt[n]{a^nb^{n-k}}\geqslant(2n-2)\sqrt[2n-2]{a^{n-1-k}b^{k-1}a^kb^{n-k}}=(2n-2)\sqrt{ab}$$

证毕!

按照同样方法我们可以得到下界:

$$\frac{n^2-1}{6}\min_{i,j}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

例题 4.120 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界且 $f''>0$. 证明: f 为常值函数.

证明 (反证法[13]) 设若 $f(x)\neq 0$，则必存在不同的 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $f(a)\neq f(b)$。不妨设 $a<b$ 以及 $f(a)<f(b)$ 由题设条件 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 为凸函数，因此，对任意的 $x>b$ 都成立

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

也就是

$$f(x)\geqslant f(a)+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

令 $x\to+\infty$，则将有 $f(x)\to+\infty$，这与题设 $f(x)$ 有界性矛盾。从而得证

[13]https://www.zhihu.com/question/363950906

命题 4.2 (凸函数的最值点)

闭区间上凸函数的最大值必在 (某个) 边界点取得. 闭区间上凹函数的最小值必在 (某个) 边界点取得.

- 因此, 对于 $[a,b]$ 上凸函数 $f(x)$, 成立

$$f(x) \leqslant \max\big(f(a), f(b)\big),\ \forall x \in [a,b]$$

4.7 渐近线

定义 4.4 (水平渐近线)

曲线 $y = f(x)$ 上点 $\big(x, f(x)\big)$ 与直线 $y = c$ 的距离为 $\big|f(x) - c\big|$, 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ 三种情况之一成立, 直线 $y = c$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线

笔记 一条曲线最多两条水平渐近线

定义 4.5 (铅直渐近线)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \left(或 \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty 或 \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \right)$, 则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线

笔记 当 $x = c$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点时, $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线

定义 4.6 (斜渐近线)

若 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - kx\big] = b$, 则直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线

笔记 有时需要分 $x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$ 加以讨论. 一条曲线最多两条斜渐近线

定义 4.7 (极坐标渐近线)

对于以极坐标表示的曲线 $r = f(\theta)$, 其渐近线为 $r\sin(\theta_0 - \theta) = p$, 其中 $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} f(\theta) = \infty$, $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta_0 - \theta)$.

例题 4.121 求极坐标系下的曲线 $r = \frac{1}{3\theta-\pi}$ 的斜渐近线

解 写成参数方程形式

$$r = \frac{1}{3\theta - \pi} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\cos\theta}{3\theta - \pi} \\ y = \dfrac{\sin\theta}{3\theta - \pi} \end{cases}$$

当且仅当 $\theta \to \dfrac{\pi}{3}$ 时, 才有 $x \to \infty$. 所以曲线至多有一条斜渐近线, 由于

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - \sqrt{3}x) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}{3\theta - \pi} \xlongequal{洛必达} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta}{3} = \frac{2}{3}$$

所以, 有斜渐近线 $y = \sqrt{3}x + \dfrac{2}{3}$

第五章 不定积分

正确评估自己的能力, 手写题先上 Wolfram alpha

5.1 原函数和不定积分

定义 5.1 (原函数)

在区间 I 上, 如果 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的导函数, 即

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

注 区间内处处可导! 在后续的求定积分里使用 Newton-Leibniz 公式就需要验证, 否则

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan(\sec x)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi} = -\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

一般来说, 不定积分题目几乎不会验证是不是原函数, 除非那种专门考你原函数的分段函数的不定积分!

笔记 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间上不一定有界。

- $y = \sqrt{x}, x \in (0, 1]$
- $y = 1 - \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

定理 5.1 (原函数存在定理)

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$.
2. 含有第一类间断点、无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

注 对于 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ 仅仅只是一种记法, 不能认为 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在原函数.

5.1.1 分段函数的不定积分

例题 5.1 求 $\displaystyle\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x$

解 由于被积函数连续, 由原函数存在定理知不定积分存在.

$$\max\{1, |x|\} = \begin{cases} -x\,, & x < -1 \\ 1\,, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x\,, & x > 1 \end{cases}$$

可得

$$\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + C_1\,, & x < -1 \\ x + C_2\,, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + C_3\,, & x > 1 \end{cases}$$

由于原函数连续, 于是, 记 $C_2 = C$, 则 $C_1 = -\dfrac{1}{2} + C$, $C_3 = \dfrac{1}{2} + C$. 故

$$\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} + C\,, & x < -1 \\ x + C\,, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} + C\,, & x > 1 \end{cases}$$

例题 5.2 求 $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$.

解 由于函数满足连续, 故不定积分存在.

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^x+C_1\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+C_2\,, & x<0\end{cases}$$

由于原函数满足连续，所以

$$\lim_{x\to0^+}(e^x+C_1)=\lim_{x\to0^-}(-e^{-x}+C_2)\Longrightarrow C_2=C_1+2$$

因此,

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^x+C\,, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}+2+C\,, & x<0\end{cases}$$

例题 5.3 计算 $\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x\ (x\geqslant 0)$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 为取整函数

解 由 $\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C$, 将区间 $[0,x]$ 内插入整数点,

$$\begin{aligned}\int \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x&=\int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C\\ &=\int_0^1 \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\cdots\\ &\qquad+\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} \lfloor x\rfloor|\sin\pi x|\,\mathrm{d}x+C\\ &=2-\int_1^2\sin\pi x\,\mathrm{d}x+2\int_2^3\sin\pi x\,\mathrm{d}x+\cdots+\\ &\qquad(-1)^{\lfloor x\rfloor-1}(\lfloor x\rfloor-1)\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor}\sin\pi x\,\mathrm{d}x+(-1)^{\lfloor x\rfloor}\lfloor x\rfloor\int_{\lfloor x\rfloor}^{x}\sin\pi x\,\mathrm{d}x+C\\ &=\frac{1}{\pi}\cdot2+\frac{2}{\pi}\cdot2+\cdots+\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}(\lfloor x\rfloor-1)}{\pi}\cdot2(-1)^{\lfloor x\rfloor}\\ &\qquad+\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor+1}\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\cos\pi x-(-1)^{\lfloor x\rfloor}\right)+C\\ &=\frac{\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\lfloor x\rfloor-(-1)^{\lfloor x\rfloor}\cos\pi x\right)+C\end{aligned}$$

表 5.1: 部分初等函数积分表

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad \int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

5.1.2 借助基本公式

定理 5.2 ((半角公式与倍角公式))

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

例题 5.4 求不定积分: $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\frac{1}{\sin 2x+2\sin x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x}$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin 2x+2\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{4\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|\sec x - \cot x| + C\end{aligned}$$

定理 5.3 (积化和差和积化和差公式)

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

例题 5.5 求不定积分 $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int\sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\cos x\sin 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\cos 3x\sin 3x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int(\sin 2x+\sin 4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\sin 6x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C\end{aligned}$$

例题 5.6 [49] 计算: $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\tan\frac{3x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\frac{3x}{2}} &= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{3x}{2}} \xlongequal{\text{半角公式}} \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}\\ &\xlongequal{\text{积化和差}} \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2\cos x-1}{2\cos x+1}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\tan\frac{3x}{2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2 x)(1+\cos x)\frac{2\cos x-1}{2\cos x+1}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{部分分式}} \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[-\cos^3 x+\frac{3}{2}\cos x-\frac{3}{4(2\cos x+1)}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}(3 - 2\ln 2)}{8}$$

进一步可参考：神琦冰河的公众号《冰河的数学小世界》积分级数欣赏 (5) 解析

定理 5.4 ((欧拉公式))

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}} + e^{-x\mathrm{i}}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}} - e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \end{cases}$$

注 可以用, 一般挺麻烦!

例题 5.7 求不定积分 $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

解 由欧拉公式

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \int e^x \frac{e^{x\mathrm{i}} - e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int \left(e^{x(1+\mathrm{i})} - e^{x(1-\mathrm{i})}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)} e^{x(1+\mathrm{i})} - \frac{1}{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})} e^{x(1-\mathrm{i})} + C \\
&= e^x \left(\frac{(1-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}x} - (1+\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} e^x \left(\frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right)}{2\mathrm{i}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C
\end{aligned}$$

5.1.3 组合积分法

注 组合积分法

- 分子 $=$ A分母 $+$ B分母$'$, 解出 A, B.

例题 5.8 求不定积分 $\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

可得

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^n}{n!}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \,\mathrm{d}x \\
&= n! \int \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)'}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \,\mathrm{d}x \\
&= n! \int \mathrm{d}x - n! \int \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)'}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \,\mathrm{d}x \\
&= n! x - n! \ln\left|1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right| + C
\end{aligned}$$

例题 5.9 求不定积分: $\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{1-x^2}) \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1-x^2}| + C\end{aligned}$$

5.1.4 添与拆的技巧

注 请多留心多观察, 例如: 加加减减的艺术

$$\begin{aligned}\frac{x^6}{1+x^2} &= \frac{x^6+x^4-x^4}{1+x^2} = x^4 + \frac{-x^4-x^2+x^2}{1+x^2} \\ &= x^4-x^2+\frac{x^2}{1+x^2} = x^4-x^2+\frac{x^2+1-1}{1+x^2} \\ &= x^4-x^2+1-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

这个太容易, 也可以多项式的除法!

例题 5.10 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} &= \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2+x^4)+x^2+(1-x^4)}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan x^3 - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3} \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan x^3 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right| + C\end{aligned}$$

注 我来提个问题：分母是怎么拆的?

(1) 强拆, 待定系数

$$\left.\begin{aligned}1+x^6 &= (1+x^2)(1+ax^2+x^4) \\ &= x^6+(a+1)x^4+(a+1)x^2+1\end{aligned}\right. \Rightarrow a=-1$$

类似拆分 $1+x^8$,

$$\begin{aligned}1+x^8 &= (1+ax^2+x^4)(1+bx^2+x^4) \\ &= x^8+(a+b)x^6+(ab+2)x^4+(a+b)x^2+1\end{aligned}$$

解得: $a=-\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$ 或者 $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$

(2) 立方和公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

(3) 强拆, 复分解[1]

[1] https://www.zhihu.com/question/430982343/answer/1583839368

5.2 换元积分法

第一类换元法也叫做凑微分, 一般来说, 能凑就不换元!

5.2.1 凑微分

5.2.1.1 奇技淫巧

接下来请欣赏笔者认为的几道奇技淫巧的凑微分, 这些技巧, 我们就当长长见识, 也许对自己来说可以总结出新东西!

- 笔者更推荐常规思路、容易想到的思路来解题
- 如果见到考研书这么写, 千万不要学! 书上再简短的步骤如果考试想不到, 白搭!

例题 5.11 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-a)-\left(\sqrt{x-a}\right)^2}}$$
$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

例题 5.12 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(9+(\sqrt{x-2})^2\right)\sqrt{x-2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}(\sqrt{x-2})}{9+\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3} + c$$

注 这种私以为属于“奇技淫巧”! 我不否认技巧的重要性, 但我不会去追逐! 这种凑的方式就当长见识.

例题 5.13 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

例题 5.14 求不定积分: $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解 首先有

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \underbrace{\int\left(\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x}_{I} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}_{J}$$

其中

$$J = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=-\int\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=-\int\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2-2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=\frac{(5x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$$

于是

$$\int\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=I+J=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$$

例题 5.15 求不定积分 $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{(\frac{1}{x}+x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C$$

例题 5.16 计算积分 $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})}$

解

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}}{(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})}=\int\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+\sqrt{x^2+1})}$$
$$=\ln\left|\ln(1+\sqrt{x^2+1})\right|+C$$

5.2.1.2 应知应会的思路

例题 5.17 求不定积分: $\int\frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$\int\frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{188}}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{189}\frac{\sin^{189}x}{(\sin x+\cos x)^{189}}+C$$

注 这种题目的思路是在分部积分里也是非常常见的, 在标准答案通常会很简洁, 初学者能看懂但一般注意不到. 实际上, 我个人认为"注意到"是用求导试探然后拼凑出来的. 例如此题, 很容易 (假设你见过此类题目) 联想到求相关的导数, 最后根据结果来修正. 我通常直接用 Wolfram Alpha 直接试.

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'=?\quad\left(\frac{cos x}{\sin x+\cos x}\right)'=?\quad\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)'=?$$

例题 5.18 求不定积分: $\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x\tan x)}{(1-x\tan x)^2}\\ &= \frac{1}{1-x\tan x}+C = \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x}+C\end{aligned}$$

注 我们应联想到 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, 接着

$$(\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - x\cos x$$

对比原不定积分, 拼凑分子, 选最可能接近的来尝试

$$\left(\frac{\cos x}{\cos x - x\sin x}\right)' = ?$$

更多类似题目可参考: https://tieba.baidu.com/p/4889396727?pn=1

例题 5.19 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(x\cos x-\sin x)}{x\cos x-\sin x}\\ &= \ln\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right| + C\end{aligned}$$

外表看起来吓人, 实际只是常规思路! 拆了之后就显然了

5.2.1.3 特殊凑配 $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$

例题 5.20 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + C\end{aligned}$$

例题 5.21 求不定积分: $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\sqrt{\tan x}=t} 2\int \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t - \int \frac{1-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+2}\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right) - \int \frac{1}{(t+\frac{1}{t})^2-2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x-1}{2\sqrt{\tan x}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right| + c\end{aligned}$$

例题 5.22 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x^8+2x^4+1)-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^4+1)^2-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^4\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\
&= \frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + C
\end{aligned}$$

例题 5.23 求不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

解

$$I = \int \frac{x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$J = \int \frac{-x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

例题 5.24 求不定积分: $\displaystyle\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 法 *I.* 一方面,

$$\begin{aligned}
\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \ln\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
&\xlongequal{x-\frac{1}{x}=u} \frac{1}{2}\int \ln(u^2+4)\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{2}u\ln(u^2+4) + 2\arctan\frac{u}{2} - u + C \\
&\xlongequal{\text{带值}} \left(x-\frac{1}{x}\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2\arctan\frac{x^2-1}{2x} - \left(x-\frac{1}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

所以

$$\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) + \arctan\frac{x^2-1}{2x} - x + C$$

法 *II.* 直接分部积分

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x+2\arctan x+C.\end{aligned}$$

例题 5.25 求不定积分: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}$.

解 一方面,

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &\xlongequal{x+\frac{1}{x}=u}\int\frac{1}{\sqrt{u^2-12}}\mathrm{d}u\\ &= \ln|u+\sqrt{u^2-12}|+C\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sqrt{(x-x^{-1})^2-8}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)\\ &\xlongequal{x-\frac{1}{x}=v}\int\frac{1}{\sqrt{v^2-8}}\mathrm{d}v\\ &= \ln|v+\sqrt{v^2-10}|+C\end{aligned}$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}=\frac{1}{2}\left(\ln|u+\sqrt{u^2-12}|+\ln|v+\sqrt{v^2-8}|\right)+C$$

其中, $u=x+\dfrac{1}{x}, v=x-\dfrac{1}{x}$

5.2.1.4 阴间凑配

练习 5.1 求不定积分: $I=\displaystyle\int\frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)[c+f(x)e^{g(x)}]}\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\left(f(x)e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)[c+f(x)e^{g(x)}]}\mathrm{d}x &= \int\frac{e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]}{f(x)e^{g(x)}[c+f(x)e^{g(x)}]}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(f(x)e^{g(x)}\right)}{f(x)e^{g(x)}[c+f(x)e^{g(x)}]}\\ &= \frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{f(x)e^{g(x)}}-\frac{1}{c+f(x)e^{g(x)}}\right)\mathrm{d}\left(f(x)e^{g(x)}\right)\\ &= \frac{1}{c}\ln\left|\frac{f(x)e^{g(x)}}{c+f(x)e^{g(x)}}\right|+C\end{aligned}$$

例题 5.26 计算积分: $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\mathrm{d}x$

解 分析: e^x 只在分母出现, 是不可能“凑”. 有初等表达那只可能是分子分母同时有 e^{ax} 被约掉了! 尝试把分母的 e^x 提出来.

$$\int\frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}$$

$$= -2\ln\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}\right) + C$$

更多类似题目：https://www.zhihu.com/question/397590932/answer/1248588688

例题 5.27 求不定积分：

$$\int \frac{\frac{\ln x}{x} + \ln^2 x}{e^{-2x} + \ln^2 x} \mathrm{d}x$$

解 分析：e^{-2x} 只在分母出现，是不可能"凑"．有初等表达那只可能是分子分母同时有 e^{ax} 被约掉了！注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln^2 x) = \frac{2\ln x}{x}$$

利用微分方程或者观察，容易知道 $a = 2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{2x}\ln^2 x) = 2e^{2x}\left(\frac{\ln x}{x} + \ln^2 x\right)$$

代入可得，

$$\int \frac{\frac{\ln x}{x} + \ln^2 x}{e^{-2x} + \ln^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{(e^{2x}\ln^2 x)'}{2e^{2x}(e^{-2x} + \ln^2 x)} \mathrm{d}x = \int \frac{(e^{2x}\ln^2 x)'}{2 + 2e^{2x}\ln^2 x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1 + e^{2x}\ln^2 x| + C$$

例题 5.28 (JWCMC,2019) Compute $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

解 *(by 白朗)*[50] 假设我们已经猜到这个不定积分是有初等原函数的！注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x + x) = \cos x + 1.$$

尝试求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x + \sin x}{x\sin x + 1} = \frac{\cos x(\cos x + 1 - x^2)}{(x\sin x + 1)^2}$$

令 $y := \dfrac{x + \sin x}{x\sin x + 1}$，则

$$I := \int \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int \frac{x\sin x + 1}{\cos x\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{观察}}{=\!=} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-\sin^2 x)}{(x\sin x+1)^2}}} \mathrm{d}y.$$

希望 $(1-x^2)(1-\sin^2 x) = A(x+\sin x)^2 + B(x\sin x+1)^2$.

$$(1-x^2)(1-\sin^2 x) = 1 - \sin^2 x - x^2 + x^2\sin^2 x$$

$$(x+\sin x)^2 = x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x$$

$$(x\sin x + 1)^2 = 1 + 2x\sin x + x^2\sin^2 x$$

观察可知

$$(1-x^2)(1-\sin^2 x) = (x\sin x+1)^2 - (x+\sin x)^2.$$

故

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-\sin^2 x)}{(x\sin x+1)^2}}} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(x\sin x+1)^2-(x+\sin x)^2}{(x\sin x+1)^2}}} \mathrm{d}y$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + C.$$

因此，

$$I_1 := \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 1 - x^2}{(1 + x\sin x)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 2\arcsin\left(\frac{4+\pi\sqrt{2}}{\pi+4\sqrt{2}}\right).$$

5.2.2 第二类换元法

例题 5.29 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal[x=\frac{u^3+1}{u^3-1}]{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}u = -\frac{3}{2}u + C \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C
\end{aligned}$$

注 一般而言, 哪个看起来比较复杂, 就可以考虑把哪个设为 t.

例题 5.30 求不定积分: $\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x$.

解 最小公倍数: $[2,7,14]=14$, 于是令 $t=x^{1/14} \Rightarrow \mathrm{d}x = 14t^{13}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x &\xlongequal{t=x^{1/14}} \int \frac{t^2+t^7}{t^{16}+t}\cdot 14t^{13}\mathrm{d}t = 14\int \frac{t^{14}(1+t^5)}{t^{15}+1}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{立方和}} 14\int \frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+1}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=t^5} \frac{14}{5}\int \frac{u^2}{u^2-u+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{14}{5}\int \frac{u^2-u+1+\frac{1}{2}(2u-1)-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{14}{5}\int \mathrm{d}t + \frac{7}{5}\int \frac{\mathrm{d}(u^2-u+1)}{u^2-u+1} - \frac{7}{5}\int \frac{1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u \\
&= \frac{14}{5}u + \frac{7}{5}\ln|u^2-u+1| + \frac{7}{5}\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{14}{5}u + \frac{7}{5}\ln|u^2-u+1| + \frac{14\sqrt{3}}{15}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{14}{5}x^{5/14} + \frac{7}{5}\ln|x^{5/7}-x^{5/14}+1| + \frac{14\sqrt{3}}{15}\arctan\left(\frac{2x^{5/14}-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

5.2.2.1 给出隐函数方程求不定积分

例题 5.31 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数, 求积分 $\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$

解 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$, 则

$$y=\frac{1}{t(1-t)},\ \mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

故

$$\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x = \int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = 3t-2\ln t + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + C$$

例题 5.32 设 $y=y(x)$ 是由方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所确定的隐函数, 求积分

$$\int \frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\mathrm{d}x$$

解 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\sqrt{2a}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$, 则

$$y=\sqrt{2a}\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\sqrt{2a}\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

注意到 $x^2+y^2+a^2=a^2\frac{3-t^2}{1+t^2}$, 有

$$\int\frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+C$$

例题 5.33 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分 $\int\frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x$

解 令 $\begin{cases}x-y=u\\ \frac{x}{y}=v\end{cases}$ 即 $u^2=v$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{uv}{v-1}=\frac{u^3}{u^2-1}\\ y=\frac{u}{v-1}=\frac{u}{u^2-1}\end{cases}$, $\mathrm{d}x=\frac{u^4-3u^2}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$

所以

$$\int\frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x=\int\frac{u}{u^2-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$$

5.2.2.2 倒代换

注 通常, 当提到倒代换想到的基本为 $\frac{1}{x}=t$, 但我们做题的思维并不能局限于此, 如下面的例题就是一个很好的例子.

- 事实上, 在用倒代换的时侯应分别考虑 $x>0, x<0$ 以及 $x=0$ 的情况

例题 5.34 求不定积分: $\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2-(x+1)+1}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}}\\&=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\\&=\ln(1+x)-\ln(2\sqrt{x^2+x+1}-x+1)+C\end{aligned}$$

例题 5.35 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4(2x+1)-(2x+1)^2}}\\&\xlongequal{t=\frac{1}{2x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{4t-1}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\sqrt{4t-1}+C\\&=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3-2x}{2x+1}}+C\end{aligned}$$

例题 5.36 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}&\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{\sqrt[4]{a1+t^4}}{t}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t^4}}\\&\xlongequal{u^4=1+t^4}-\int\frac{\frac{1}{4}\cdot4u^3(u^4-1)^{-\frac{3}{4}}}{u\sqrt[4]{u^4+1}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \frac{u^2}{u^4-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)-(1-u^2)}{u^4-1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \\
&= -\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right| + C
\end{aligned}
$$

5.2.2.3 三角换元

例题 5.37 (周明强, P322) 计算不定积分 $\int \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\,\mathrm{d}x$ (其中根号 $\sqrt{\ }$ 有 n 重)。

解 [8] 令 $x = 2\cos t$, 则

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}} &= \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos t}}} \\
&= \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+2\cos(\tfrac{t}{2})}} = \cdots = 2\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
I &= -4\int \sin t\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{积化和差}} -2\int \left[\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}t\right) - \sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\cos\left(\frac{2^n+1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{2^{n+1}}{2^n-1}\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C
\end{aligned}
$$

注 这样的换元, 你还可以在极限、级数里看到！如果没见过此类换元, 应该会很难想出来.

5.2.2.4 万能代换

定理 5.5 (万能替换)

令 $u = \tan\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$, 则 $x = 2\arctan u$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

- $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}$
- $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$
- $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1-u^2}$

注 万能替换可以将三角函数的积分转化为有理式的积分, 即转化为相对熟悉可操作的积分. 这是万能替换的优点, 但缺点是计算量一般都不小, 所以我个人一般习惯于绕开这个方法.

例题 5.38 求不定积分:

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln|1+t| + C \\
&= \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C \\
&= \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

5.2.2.5 欧拉代换

定理 5.6 (Euler 替换)

对于 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 的不定积分.

- ***Euler* 第一替换:** 若 $a>0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.
- ***Euler* 第二替换:** 若 $c>0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, 我们有

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}$$

- ***Euler* 第三替换:** 在 ax^2+bx+c 有两个实根的情形;

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

可作替换 $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$. 此时有 $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$, 以及

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha\beta - \alpha t^2}{a-t^2}$$

注 由于绝大多数用 Euler 替换计算量都很大, 所以我个人一般喜欢绕开这种方法

例题 5.39 求不定积分 $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$

解 令 $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1} = e^x + t$, 则 $t = \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} - e^x$, $x = \ln\frac{t^2+1}{4-2t}$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx &= \int (e^x+t)\,dx = \int e^x\,dx + \int t\,dx \\
&= e^x + \int t\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{2-t}\right)dt \\
&= e^x + \int\left(2 - \frac{2}{t^2+1} - 1 + \frac{2}{2-t}\right)dt \\
&= e^x + t - 2\arctan t - 2\ln(2-t) + C
\end{aligned}
$$

例题 5.40 求不定积分: $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

解 ([8],P347) 作替换 $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, 则 (让 t 的一次项消失, 再定 α, β) 得

$$
\begin{aligned}
x^2+2 &= \frac{(\alpha t+\beta)^2 + 2(t+1)^2}{(t+1)^2} = \frac{(\alpha^2+2)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2}, \\
2x^2-2x+5 &= \frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2},
\end{aligned}
$$

其中, 利用方程组 $\begin{cases}2\alpha\beta+4=0, \\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=2, \\ \beta=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=-1, \\ \beta=2,\end{cases}$ 确定 α, β 值. 例如取 $\alpha=-1$, $\beta=2$, 有

$$x = \frac{2-t}{1+t}, \quad t = \frac{2-x}{1+x}, \quad dx = \frac{-3\,dt}{(1+t)^2},$$

$$x^2+1 = \frac{3t^2+6}{(t+1)^2}, \quad 2x^2-2x+5 = \frac{9t^2+9}{(t+1)^2}.$$

从而可知 $I=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\,\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$. 在 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 的区域, 我们有

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}}_{u^2=t^2+1}-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}}_{v=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}\\
&= -\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}=-\frac{1}{3}\arctan u-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C\\
&= -\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x}+C.
\end{aligned}
$$

在 $x<-1$ 的区域, 可类似地操作

推论 5.1

一般地, 对于积分

$$\int\frac{(Mx+N)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}},\ p^2-4q<0.$$

若 $p\neq\frac{b}{a}$, 可采用替换 $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, 其中, α,β 的选取规则为: 使二次三项式 x^2+px+q 与 ax^2+bx+c 在替换后消失 t 的一次项, 而得到形式 $\int\frac{P(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}}$, 这里的 $P(t)$ 是 $2m-1$ 次多项式, $\lambda>0$. 然后, 再分解有理真分式 $\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$, 使之形成两类不定积分

$$\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}},\quad \int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}.$$

对此, 可用替换 $u^2=st^2+r$, $v=(\sqrt{st^2+r})'=\frac{st}{\sqrt{st^2+r}}$ 进行积分.

5.2.2.6 双元法

知乎大佬虚调子的原创方法, 更为详细的见她QQ 群的群文件《不定积分攻略》, 以及她知乎的回答及文章

5.3 分部积分法

注 分部积分: 反对幂三指. 含 x^n 多次循环可以考虑: 表格法（计算傅里叶系数可能用到）

- 可以先观察考虑被积函数内的某一项或者整体求导出来是什么？积分出来又是什么？
- 哪一项求导/积分更容易？
- 思考怎么才更容易化为更容易求解的？一般不至于越求越多吧？不至于越求越陌生吧？

例题 5.41 求不定积分: $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\ln x=t$, 则 $x=e^t\Rightarrow \mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x &\overset{t=\ln x}{=\!=\!=} \int e^{3t}t^4e^t\,\mathrm{d}t=\int t^4e^{4t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}e^{4t}\left(t^4-t^3+\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{8}t+\frac{3}{32}\right)+C\\
&= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^4x-\ln^3x+\frac{3}{4}\ln^2x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32}\right)+C
\end{aligned}
$$

表格法如下:

$$
\begin{array}{cccccc}
t^4 & 4t^3 & 12t^2 & 24t & 24 & 0 \\
 & + & - & + & - & + \\
e^{4t} & \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{1}{4^2}e^{4t} & \frac{1}{4^3}e^{4t} & \frac{1}{4^4}e^{4t} & \frac{1}{4^5}e^{4t}
\end{array}
$$

注 表格法特别适用于如下类型的积分:

$$
\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} e^{kx} \\ \sin ax \\ \cos bx \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x.
$$

练习 5.2 求不定积分: $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{\overbrace{3/4+(x+1/2)^2}^{x^2+x+1}-(x+1/2)^2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \\
&= \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C
\end{aligned}
$$

练习 5.3 求不定积分: $\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x &\xlongequal{t=\arctan x} \int \frac{t^2\sec^2 t}{(\tan t-t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2}{(\sin t-t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t-t\cos t}\right) \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t-t\cos t)}-\int\frac{1}{\sin t-t\cos t}\times\frac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t-t\cos t)}+\cot t+C \\
&= \frac{x\arctan x}{x-\arctan x}+C
\end{aligned}
$$

练习 5.4 求不定积分: $\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}}-\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}}+C
\end{aligned}
$$

例题 5.42 求不定积分 $\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\text{原式} = \int \frac{(1-x^4)+2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int x \frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{-(-4x^3)}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C
\end{aligned}
$$

例题 5.43 求不定积分 $\int \frac{x^x(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{e^{x\ln x}(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \ln x\cdot\ln\sin x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\,\mathrm{d}\ln\sin x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x - \int \ln\sin x\,\mathrm{d}e^{x(\ln x-1)}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x + C
\end{aligned}
$$

练习 5.5 求不定积分: $\int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

解 注意到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x\sin+\cos x}) = x\cos x e^{x\sin+\cos x}
$$

$$
\int \frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x\cos x} + C
$$

故

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x\sin+\cos x}x^2\cos x\,\mathrm{d}x + \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}\left(e^{x\sin+\cos x}\right) + \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x\cos x}\right) \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{x\cos x}e^{x\sin+\cos x} + \int \frac{1}{x\cos x}x\cos x e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \frac{e^{x\sin+\cos x}}{x\cos x} + C
\end{aligned}
$$

5.4 有理分式

注 有理式的拆分技巧: 多项式的除法、直接拆然后比较系数、留数法

1. 多项式的除法;
   - 科大那本《积分的方法与技巧》还有另一种思路的多项式的除法
2. 直接拆然后比较系数: 常用且实用
   - 之前已经提到的加加减减

- 直接拆分然后待定系数

3. 留数法: 需要一丢丢复变的知识

注 有理式函数的积分技巧

- 拆开分别算嘛
- 奥斯特罗格拉茨基方法
- Risch 算法

例题 5.44 求 $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ 的最简分式.

解 (by 布布)[51]

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&\xlongequal{\text{有理化}}\frac{\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1\right](\sqrt{x^2+x+1}-x)}{x+1}\\
&\xlongequal{\text{化简}}\frac{2x^4+x^3+2x^2+1-x+x^4}{x+1}+\frac{(1-x^3)\sqrt{x^2+x+1}-x(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\\
&\xlongequal{\text{有理化}}\frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1}-\frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\\
&=(2x^3-x^2+3x-3)+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}
\end{aligned}$$

例题 5.45 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$

解

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}&=\frac{A+B\cos x}{\sin x}+\frac{C\sin x}{2+\cos x}\\
&=\frac{(A+2B)\cos x+(2A+B\cos^2x+C\sin^2x)}{(2+\cos x)\sin x}
\end{aligned}$$

比较系数, 得

$$\begin{aligned}
A+2B=0,\\
2A+B\cos^2x+C\sin^2x=1
\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}A=2/3,\\ B=C=-1/3\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}&=\int\left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cos x}{\sin x}+\frac{-\frac{1}{3}\sin x}{2+\cos x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2}{3}\ln(\cot x+\csc x)-\frac{1}{3}\ln\sin x+\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)+C
\end{aligned}$$

✍ **练习 5.6** 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3x+\cos^3x}$

解

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3x+\cos^3x}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}\\
&=2\int\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(2-\sin x\cos x)}\,\mathrm{d}x\\
&=2\int\frac{\sin x+\cos x}{(1+2\sin x\cos x)\left[1+(\cos x-\sin x)^2\right]}\,\mathrm{d}x\\
&=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\left[2-(\sin x-\cos x)^2\right]\left[1+(\sin x-\cos x)^2\right]}\,\mathrm{d}x\\
&=2\int\frac{\mathrm{d}v}{(2-v^2)(1+v^2)}=2\int\frac{\frac{1}{3}(2-v)^2+\frac{1}{3}(1+v^2)}{(2-v^2)(1+v^2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2} \\
&= \frac{2}{3}\arctan v - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \frac{2}{3}\arctan(\sin x - \cos x) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sin x - \cos x - \sqrt{2}}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}
$$

例题 5.46 (MR,U476) 求不定积分 $\int \frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$
x^5 + x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)
$$

以及

$$
\frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2-1}
$$

因此,

$$
\int \frac{x(x+1)(4x-5)}{x^5+x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \ln|x^3+x^2-1| + C
$$

5.4.1 多项式的除法

例题 5.47 求不定积分: $\int \frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解 使用多项式的除法

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & x^3 - 4x \\
\cline{2-2}
x^2+1\big) & x^5 - 3x^3 + 6x + 9 \\
 & -x^5 \quad -x^3 \quad\quad\quad\quad \\
\cline{2-2}
 & -4x^3 + 6x \quad \\
 & 4x^3 + 4x \quad \\
\cline{2-2}
 & 10x + 9
\end{array}
$$

得到

$$
\frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2} = x^3 - 4x + \frac{10x+9}{x^2+1}
$$

把它代入积分式, 并进行分项积分, 得到

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5-3x^3+6x+9}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(x^3 - 4x + \frac{10x+9}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5\ln(1+x^2) + 9\arctan x + C
\end{aligned}
$$

注 事实上, 多项式的除法不止这一种方式, 而另一种除的方式见金玉明老师的《积分的方法与技巧》[52] P56-P57

例题 5.48 求不定积分: $\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x-1=y$, 则有 $x=1+y$, 及 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$, 则

$$
\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{(1+y)^2}{y^3(2+y)} = \frac{1+2y+y^2}{y^3(2+y)}
$$

使用多项式的除法[52]

$$
\begin{array}{rl}
 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{3y}{4}+\dfrac{y^2}{8} \\ \cline{2-2}
2+y \big) & 1+2y+\ \ y^2 \\
 & 1+\dfrac{y}{2} \\ \cline{2-2}
 & \quad \dfrac{3y}{2}+\ y^2 \\
 & \quad \dfrac{3y}{2}+\dfrac{3y^2}{4} \\ \cline{2-2}
 & \qquad \dfrac{y^2}{4} \\
 & \qquad \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{y^3}{8} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -\dfrac{y^3}{8}
\end{array}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)} &= \frac{1}{y^3}\left[\frac{1}{2}+\frac{3y}{4}+\frac{y^2}{8}-\frac{y^3}{8(2+y)}\right] \\
&= \frac{1}{2y^3}+\frac{3}{4y^2}+\frac{1}{8y}-\frac{1}{8(2+y)} \\
&= \frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}
\end{aligned}
$$

把它代入积分式, 并进行分项积分, 得到

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left[\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}\right]\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C
\end{aligned}
$$

5.4.2 留数法

例题 5.49 求 $f(x)=\dfrac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ 的最简分式

解[13] 设

$$
f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \tag{5.1}
$$

关键是求 A,B,C.

法 1(比较系数)

$$
\begin{aligned}
x^2+x+5 &= A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1) \\
&= (A+B+C)x^2+(-3A-B)x^2+(2A-2B-C)
\end{aligned}
$$

比较系数, 得

$$
\begin{array}{c|r}
x^2 & A+B+C=1\,, \\
x & -3A-B=1\,, \\
x^0 & 2A-2B-C=5
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{cases}
A=\frac{5}{6}, \\
B=-\frac{7}{2}, \\
C=\frac{11}{3}
\end{cases}
$$

(法 2) 我们有

$$
x^2+x+5 = A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1) \tag{5.2}
$$

令 $x=-1$, 带入 (5.2) 得 $A=\dfrac{5}{6}$; 令 $x=1$, 带入 (5.2) 得 $B=-\dfrac{7}{2}$;
令 $x=2$, 带入 (5.2) 得 $C=\dfrac{11}{3}$.

(法 3) 式 (5.1) 两边同乘以 $(x+1)$ 得

$$\frac{x^2+x+5}{(x-1)(x-2)}=A+\frac{B}{x-1}(x+1)+\frac{C}{x-2}(x+1)$$

上式令 $x=-1$ 得到 $A=\frac{5}{6}$. 同法求 B,C

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x^2+x+5}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1}=\frac{5}{6}\\B&=\left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2)}\right|_{x=1}=-\frac{7}{2}\\C&=\left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)\cancel{(x-2)}}\right|_{x=2}=\frac{11}{3}\end{aligned}$$

例题 5.50 求 $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{(x-1)(x^2+1)}$ 的最简分式

解[13] 设

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

不难得到

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=\left.\frac{x^2+5x}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}\right|_{x=1}=3\\Bi+C&=\lim_{x\to i}(x^2+1)f(x)=\left.\frac{x^2+5x}{(x-1)\cancel{(x^2+1)}}\right|_{x=i}=-2i+3\end{aligned}$$

例题 5.51 求 $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ 的最简分式

解[13] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

设 x 为 x^2+x+1 的一个根.

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\left.\frac{2x^2+1}{\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}\right|_{x=-1}=3\\Bx+C&=\frac{2x^2+1}{(x+1)\cancel{(x^2+x+1)}}\overset{x^2=-x-1}{=\!=\!=}\frac{-2x-1}{x+1}\\&=\frac{-(2x+1)x}{(x+1)x}\underset{x^2+x=-1}{\overset{x^2=-x-1}{=\!=\!=}}-(x+2)\end{aligned}$$

例题 5.52 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

解[13] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

设 x 为 x^2-x+1 的一个根.

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=\left.\frac{1}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}\right|_{x=-1}=\frac{1}{3}\\Bx+C&=\frac{1}{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}=\frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2}{x^2-x-2}\underset{x^2-x=-1}{=\!=\!=}\frac{1}{3}(2-x)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\frac{2-x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

定义 5.2 (留数)

设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点，我们把 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗展开式

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

中负一次幂项的系数 C_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数. 记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$, 即

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = C_{-1}$$

♣

定理 5.7 (函数在极点的留数)

法则 I 如果 z_0 为 $f(z)$ 的简单奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

法则 II 设 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 处解析, 如果 $P(z_0) \neq 0$, z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 为 $f(z)$ 的一阶奇点且

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

法则 III 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

♡

例题 5.53 求 $f(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)^3(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} \tag{5.3}$$

$$A = \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) = \left.\frac{x+4}{(x+2)^3}\right|_{x=-1} = 3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B = \mathrm{Res}[f(x), -2] = \lim_{x\to -1}\frac{1}{2!}\lim_{x\to -2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(x-2)^3 f(x)\right] = \left.\frac{3}{(x+1)^3}\right|_{x=-2} = -3$$

式 (5.3) 两边同乘以 $(x+2)^3$ 得

$$\frac{x+4}{x+1} = \frac{A(x+2)^3}{x+1} + B(x+2)^2 + C(x+2) + D \tag{5.4}$$

令 $x=-2$, 得

$$D = \left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2} = -2$$

式 (5.4) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right) + 2B(x+2) + C$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2} = 0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1} = (x+2)^3 g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right) = 3(x+2)^2 g(x) + (x+2)^3 g'(x)$$

$$C = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^3 f(x)\right)\right|_{x=-2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2} = -\left.\frac{3}{(x+1)^2}\right|_{x=-2} = -3$$

例题 5.54 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4} \tag{5.5}$$

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4}\right|_{x=-1}=3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B=\operatorname{Res}[f(x),-2]=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3!}\lim_{x\to -2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(x-2)^4f(x)]=-\left.\frac{3}{(x+1)^4}\right|_{x=-2}=-3$$

式 (5.5) 两边同乘以 $(x+2)^4$ 得

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{A(x+2)^4}{x+1}+B(x+2)^3+C(x+2)^2+D(x+2)+E \tag{5.6}$$

令 $x=-2$, 得

$$E=\left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (5.6) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)+3B(x+2)^2+2C(x+2)+D$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}=(x+2)^3g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)=3(x+2)^2g(x)+(x+2)^3g'(x)$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 同法可知 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$. 于是

$$D=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x+2)^4f(x))\right|_{x=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=-\left.\frac{3}{(x+1)^2}\right|_{x=-2}=3$$

$$C=\left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}((x+2)^4f(x))\right|_{x=-2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=\left.\frac{3}{(x+1)^3}\right|_{x=-2}=3$$

例题 5.55 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4}$$

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4}\right|_{x=-1}=3$$

在圆环 $0<|x+2|<+\infty$ 内将 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 展开为洛朗级数

$$f(x)=C_{-4}(x+2)^{-4}+C_{-3}(x+2)^{-3}+C_{-2}(x+2)^{-2}+C_{-1}(x+2)^{-1}+C_0$$

两边同乘 $(x+2)^4$, 得

$$(x+2)^4f(x)=C_{-4}+C_{-3}(x+2)+C_{-2}(x+2)^2+C_{-1}(x+2)^3+C_0(x+2)^4 \tag{5.7}$$

令 $x=-2$ 得

$$E=C_{-4}=\lim_{x\to -2}(x+2)^4f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (5.7) 两边求 1 阶导数, 得

$$D=C_{-3}=\left.\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x+2)^4f(x))\right|_{x=-2}=\left.\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\right|_{x=-2}=-3$$

式 (5.7) 两边求 2 阶导数, 得

$$C=C_{-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=-3$$

式 (5.7) 两边求 3 阶导数, 得

$$B=C_{-1}=\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left((x+2)^4f(x)\right)\Big|_{x=-2}=\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=-3$$

5.4.3 奥斯特罗格拉茨基方法

定理 5.8 (奥斯特罗格拉茨基方法)

有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x$$

其中 $Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots(x^n+\cdots)$, $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 的系数可用待定系数法从 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 求出

例题 5.56 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

解

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x+1)^3\\ Q_1(x)&=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1\\ Q_2(x)&=(x-1)(x+1)x^2-1\end{aligned}$$

设 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\dfrac{Dx+E}{x^2-1}$, 则

$$x=(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(A^2+Bx+C)(3x-1)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r}x^4 & D=0,\\ x^3 & -A+D+E=0,\\ x^2 & A-2B-D+E=0,\\ x^1 & -2A-3C+B-D-E=1,\\ x^0 & -B+C-E=0.\end{array}\implies\begin{cases}A=-\frac{1}{8},\\ B=-\frac{1}{8},\\ C=-\frac{1}{4},\\ D=0,\\ E=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\ &=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C\end{aligned}$$

例题 5.57 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解 设 $\dfrac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\left(\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$, 则

$$x^2+2=A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r} x^3 & C=0\,, \\ x^2 & -A+C+D=1\,, \\ x^1 & -2B+C=0\,, \\ x^0 & A-B+D=2 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x&=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\&=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

5.5 非初等表达

绝大多数的不定积分是没有初等表达式!

- 若不是有兴趣的读者 (积佬), 可以暂时性放弃.
- 没有初等表达式的不定积分期末不考! 考研不考! 竞赛不考!
- 如果你有兴趣, 找虚调子这种不定积分的积佬!

判断某个不定积分是不是有初等表达?

- 通常我们借助软件, 手机上可以使用 Wolfram Alpha, 电脑上可以使用 Mathematica, Matlab... 来判别!
- 而不是借助某些定理, 如刘维尔定理, 切比雪夫定理。

注 绝大多数的不定积分是否非初等表达可以用 Wolfram Alpha 来判别!

- 有一些阴间题有初等原函数 mathematica 却不能算是因為它沒有完全植入 symbolic integration 的一些算法.
- 若用其他有內置該算法的 CAS, 例如 Axiom, 就可以輕鬆得到原函數. 可以 Google: Axiom sandbox

定理 5.9 (刘维尔第三定理)

设 $f(x)$, $g(x)$ 为代数函数, 且 $g(x)$ 不为常数. 如果 $\displaystyle\int f(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则

$$f(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x=F(x)e^{g(x)}+C.$$

其中 $F(x)$ 是有理函数, C 为常数

定理 5.10 (刘维尔第四定理)

设 $f_k(x), g_k(x)\ (k=1,2,\cdots,n)$ 为代数函数, 且对于不同的 k, j, 函数 $f_k(x)-g_j(x)$ 不为常数. 如果 $\displaystyle\int\sum_{k=1}^{n}f_k(x)e^{g_k(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则对每个 $k=1,2,\cdots,n$, $\displaystyle\int f_k(x)e^{g_k(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数.

例题 5.58 证明: $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不能表为初等函数

解 反证法: 设 $u(x)=\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 为初等函数, 则由刘维尔第三定理知:

$$u(x)=R(x)e^{g(x)}+C,$$

(其中 $R(x)$ 为 x 的有理函数, C 为常数, $f(x)\equiv 1, g(r)=-x^2$) 上式两边求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}&=R'(x)e^{-x^2}-2xe^{-x^2}R(x)\\&=e^{-x^2}\left[R'(x)-2xR(x)\right]=e^{-x^2},\end{aligned}$$

所以

$$R'(x)-2xR(x)=1.$$

上式右端的 1 在有限平面上无极点, 所以 $R(x)$ 在有限平面无极点, 故 $R(x)$ 不是有理分式函数. 另一方面, $R(x)$ 也不是多项式函数. 否则, 若 $R(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则上式也是 $n+1$ 次多项式, 矛盾. 故 $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不是初等函数.

定理 5.11 (切比雪夫[2]定理)

不定积分 $\int x^p(a+bx^q)^r\,\mathrm{d}x$(其中 p,q,r 为有理数) 为初等函数的充分必要条件是 r, $\frac{p+1}{q}$, $r+\frac{p+1}{q}$ 中至少有一个为整数

例题 5.59 求不定积分 $\displaystyle\int \ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int\ln\sin x\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{分部积分}}x\ln\sin x-\int x\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{欧拉公式}}x\ln\sin x-\int x\frac{\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}}{\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln\sin x-\int \mathrm{i}x\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln\sin x-\int\mathrm{i}x\,\mathrm{d}x-\int\frac{2\mathrm{i}xe^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln\sin x-\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\int\frac{x}{1-e^{2\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln\sin x-\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\int x\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\int xe^{2\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{分部积分}}x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}nx}}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}nx}}{n^2}+C\\&=x\ln\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{i}x^2-x\ln(1-e^{2\mathrm{i}nx})+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Li}_2(e^{2\mathrm{i}nx})+C\end{aligned}$$

其中, $\mathrm{Li}_2(x)$ 为二重对数函数.

第六章 定积分

正确评估自己的能力, 手写题先上 Wolfram alpha

6.1 定积分的概念与性质

6.1.1 利用定义计算定积分

例题 6.1 Dirichlet 函数: $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$. 证明: $\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在

解 设

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=I$$

若取 ξ_i 为有理点: $D(\xi)=1$

$$\begin{aligned}\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i\\&=b-a\end{aligned}$$

若取 ξ_i 为无理点: $D(\xi)=0$

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

这样的数 I 不存在, *Dirichlet* 函数在任何区间上不可积。

例题 6.2 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上可积.

将 $[0,1]$ n 等分, 其分点为 $x_i=\frac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

例题 6.3 利用定义计算定积分 $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

将 $[a,b]$ n 等分, 其分点为 $x_0=a, x_1=aq, x_2=aq^2,\cdots,x_n=aq^n=b, q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,

小区间 $[aq^{i-1},aq^i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 长度为 $\Delta x_i=aq^{i-1}(q-1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,

取 $\xi_i=aq^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=aq^{n-1}(q-1)\sim\frac{b}{n}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, 故

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{aq^{i-1}(q-1)}{aq^{i}} = \lim_{n\to\infty} n(1-q^{-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

6.1.2 利用定积分的定义求极限

笔记 本人初学时也迷茫过这类题目, 我就看着答案想是怎么变过去的, 然后搜这个类型的题目做去测试自己是不是真的会了. 依稀记得当时这类题目百度上还很难搜, 不过后来做多了这类题, 慢慢的就会了. 长期的积累我总结了出一个小文档[53].

例题 6.4 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

解

$$
I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2
$$

注 这道题是最容易理解的! 上下限怎么变出来的呢?

- 被积函数: x 替换 $\frac{i}{n}$, 得到被积函数 $\frac{1}{1+x}$
- 下限: $\sum\limits_{i=1}$, 把 1 代入 $\frac{i}{n}$, 得到下限 $\frac{1}{n}\to 0$
- 上限: $\sum\limits^{n}$, 把 n 代入 $\frac{i}{n}$, 得到上限 1

很显然, 像这样夹逼夹了个范围出来的可考虑定积分

$$
\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+n}<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}=1
$$

例题 6.5 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}}\quad(\alpha,\beta\neq-1)$

解

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}},\ (\alpha,\beta\neq-1)\\
&=2^{\alpha-\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]\right\}^{\alpha+1}}\\
&=2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2 x^\alpha\,\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\,\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}
\end{aligned}
$$

例题 6.6 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\ (b>1)$.

解 考虑 $\sin x$ 在 $[1,b]$ 上按以下划分

$$
1=b^{\frac{0}{n}}<b^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{2}{n}}<\cdots<b^{\frac{n}{n}}=b
$$

所做的积分和，其中 $\Delta_i = b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}}$ 为小区间 $\left[b^{\frac{i}{n}}-, b^{\frac{i+1}{n}}\right]$ 的长度，最大区间长度

$$\lambda = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{\Delta_i\} \leqslant b(b^{\frac{1}{n}} - 1) \to 0,$$

又 $\xi_i = b^{\frac{2i+1}{2n}}$ 为小区间两端点的比例中项，因此

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \overbrace{b^{\frac{2i+1}{2n}}}^{\xi_i} \overbrace{\left(b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}}\right)}^{\Delta x_i} \\
&= \int_1^b \sin x \, \mathrm{d}x = \cos 1 - \cos b
\end{aligned}$$

例题 6.7 计算 $\lim\limits_{x\to 1^-} \prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}$

解 取对数

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n} &= \exp\left(\lim_{x\to 1^-} x^n \ln \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)\right)\right) = e^L
\end{aligned}$$

我们记 $t_n(x) = \ln(1+x^n) \Rightarrow x^n = e^{t_n(x)} - 1$，于是

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{t_n(x)} - 1\right)\left(t_{n+1}(x) - t_n(x)\right) \\
&= \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) \, \mathrm{d}x = \ln 2 - 1
\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{x\to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n} = e^{\ln 2 - 1} = \frac{2}{e}$$

✍ **练习 6.1** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \prod\limits_{i=1}^{2n} \sqrt[n]{n^2+i^2}$

解 取对数，我们有

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} \sqrt[n]{n^2+i^2}\right) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\ln(n^2+i^2)}{n} - \ln n^4 \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\ln n^2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) - \ln n^4 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} \sqrt[n]{n^2+i^2} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) \frac{1}{n}\right) \\
&= \exp\left(\int_0^2 \ln(1+x^2) \, \mathrm{d}x\right) = 25 e^{2\arctan 2 - 4}
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.2** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}$

解 注意到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{(i+1)^2}{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}}$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}+\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1^2}{n}}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+0+0=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\dfrac{\pi}{4}$

例题 6.8 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

解

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}$$

由幂级数展开式，有 $2^{\frac{1}{n}}>1+\dfrac{\ln 2}{n}$，由此可得

$$\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=2^{\frac{k-1}{n}}\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}\geqslant 2^{\frac{k-1}{n}}\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{nk}}>2^{\frac{k-1}{n}},\ k>1$$

所以

$$2^{\frac{k-1}{n}}<\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}<2^{\frac{k}{n}},\ \forall k>1$$

因此，由连续函数的介值定理，存在 $\xi_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$，使得 $\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=2^{\xi_k}$，因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\xi_k},\quad \xi_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

由定积分的定义，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\xi_k}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

✍ **练习 6.3** 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}-\frac{k}{n+k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n+3}-\cdots+\frac{n}{n+n}-\frac{n}{n+n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k}\right)-\frac{n}{n+n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}-\frac{1}{2}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\\&=\ln 2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例题 6.9 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{n\theta}{n\sqrt{n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

证明 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\ln\left(\cos\frac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{n\theta}{n\sqrt{n}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}-1\right)\right)\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln\lim_{n\to\infty}a_n&=\ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2\theta^2}{2n^3}-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\&=-\ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\theta^2}{2n^3}+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\&=-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x+0=-\frac{\theta^2}{6}\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{\theta^2}{6}}$

例题 6.10 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^3}\right)$ 的通解

解 *(by ytdwdw)* 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, 所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, *s.t.* 当 $x\in(0,\delta)$ 时, 成立 $\left|\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right|<\varepsilon$, 即 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$. 因此, 当 $n>\frac{1}{\delta}$ 时, 由于

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)-\frac{k^2}{n^3}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)-\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)=\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

从而原极限为 $e^{\frac{1}{3}}$.

注 用上极限只是为了叙述简便. 本题中 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$ 不宜换成 $\ln(1+x)=x+o(x)$

✍ **练习 6.4** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}$

解 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{(1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}\right)&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\ln i-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln n-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{n^2+n}{2n^2}\ln n-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{\ln n}{2n}\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{\ln n}{2n}\right)\right)\\&=\exp\left(\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x\right)=e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

例题 6.11 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]$

解 *(by 欧阳)* 由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\\&=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

或者可以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\right)^2\right]\\&\xlongequal{\text{将平方展开}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\\&=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

例题 6.12 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}$

解[23]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}&\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{i+j}{i^2+j^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}\right)\\&=2\left(\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1^2}+\frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+2^2}+\cdots+\frac{(n+1)+n}{(n+1)^2+n^2}\right)+\frac{1}{n+1}\\&=\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}+\frac{1+\frac{2}{n+1}}{1+\left(\frac{2}{n+1}\right)^2}+\cdots+\frac{1+\frac{n}{n+1}}{1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}\right)+\frac{1}{n+1}\\&=2\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\ln 2\end{aligned}$$

例题 6.13 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[2+\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]}{2^n+1}$.

证明 法 1 (定积分).

$$I=\exp\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[2+\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]-\ln(2^n+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \exp \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \exp \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = \exp \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \exp\frac{\pi^2}{48}
\end{aligned}
$$

法 2.

$$
\begin{aligned}
I &= \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left[2+\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right] - \ln(2^n+1) = \exp \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \\
&= \exp \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}k^{2i}}{i n^{2i}} = \exp\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}k^{2i-1}}{i n^{2i}} \\
&= \exp\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k^2} = \exp\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \exp\frac{\pi^2}{48}
\end{aligned}
$$

例题 6.14 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi} = \frac{2n}{\pi}\left(\ln 2n+\gamma-\ln\pi\right)+O(1).$

证明 我们有

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi} = \frac{2n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{(n-k)}{n}\pi}\right)\frac{1}{n}
$$

由定积分定义, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{(n-k)}{n}\pi}\right)\frac{1}{n} \\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right)\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

由此式, 并利用

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)
$$

就可以得到

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi} = \frac{2n}{\pi}\left(\ln 2n+\gamma-\ln\pi\right)+O(1)
$$

例题 6.15 计算极限 $\displaystyle\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

证明 因为 $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$, 所以部分和

$$
\begin{aligned}
S_{m,n} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{-1}^{0}x^{i+1-1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^{i+2-1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\left(x^i+x^{i+1}+\cdots+x^{i+n-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^i(1-x^n)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^i-x^{i+n}}{1-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{-1}^{0} \frac{(x^1 - x^{1+n}) + (x^2 - x^{2+n}) + \cdots + (x^m - x^{m+n})}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} \frac{x^1 + x^2 + \cdots + x^m}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+m}}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} \frac{x - x^{m+1}}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1} - x^{n+m+1}}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

下面证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = 0$, 事实上, 因为 $x \in [-1,0]$, 所以 $(1-x)^2 \geqslant 10$,

$$
\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{0} x^t\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{t+2}}{t+1} \to 0
$$

当 $t \to +\infty$ 时, 于是

$$
\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = \lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} S_{m,n} = -\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}
$$

例题 6.16 ([6],P17) 计算极限 $\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k}$

解 法 I(by 西西). 先证明如下引理

$$
\lim_{t\to\infty}\left|\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^p}\,\mathrm{d}x\right| = 0\left(p \in \mathbb{N}^+\right)
$$

事实上

$$
\left|\int_{-1}^{0}\frac{x^t}{(1-x)^p}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-1}^{0}|x|^t\,\mathrm{d}x \to 0(t\to\infty)
$$

故

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k} &= -\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{0} x^{i+j+k-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0}\sum_{i=1}^{n}x^{j-1}\sum_{j=1}^{m}x^{j}\sum_{k=1}^{l}x^{k}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1-x)^3}\left(1-x^l\right)(1-x^m)(1-x^n)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x + I
\end{aligned}
$$

其中 I 与引理中的积分类似, 从而

$$
\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k} = -\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8} - \ln 2
$$

法 II(by 西西).

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty}(-1)^{i+j+k}e^{-(i+j+k)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i e^{-ix}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j e^{-jx}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-e^{-x})^i\right)\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(-e^{-x})^j\right)\left(\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l}(-e^{-x})^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)^3\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1}\frac{t^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{8} - \ln 2
\end{aligned}
$$

例题 6.17 ([6],P7) 计算: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}}\right)^n=\exp\dfrac{\sin 1}{1-\cos 1}$

解 法 I. (by 西西). 由积化和差公式得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\sin\frac{2k}{2n}&=\frac{\sum_{k=1}^n\sin\frac{2k}{2n}\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}\\&=\frac{\sum_{k=1}^n\left(-\frac12\right)\left(\cos\frac{2k+1}{2n}-\cos\frac{2k-1}{2n}\right)}{\sin\frac{1}{2n}}\\&=\frac{\left(-\frac12\right)\left[\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\cos\frac{1}{2n}\right]}{\sin\frac{1}{2n}}\end{aligned}$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^n\sin\frac{2k-1}{2n}=\frac{\left(-\frac12\right)(\cos 1-1)}{\sin\frac{1}{2n}}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^n\sin\frac{2k}{2n}}{\sum_{k=1}^n\sin\frac{2k-1}{2n}}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\cos\frac{1}{2n}}{\cos 1-1}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac12+\frac{1}{2n}\right)}{\sin\frac12}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{2n}+\sin\frac{1}{2n}\cot\frac12-1\right)\right]^n\\&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\cos\frac{1}{2n}+\sin\frac{1}{2n}\cot\frac12-1\right)\right]\\&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}\cot\frac12}{\frac1n}-\frac{1-\cos\frac{1}{2n}}{\frac1n}\right)\right]\\&=e^{\frac{\cot\frac12}{2}}\end{aligned}$$

法 II(欧拉公式).

例题 6.18 求极限: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}$

解 (by 向禹)[54] 我们先证明

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\frac{2n^2+1}{3}$$

法 I 利用三角恒等式

$$\begin{aligned}\sin 2nx&=\sum_{k=1}^n\binom{2n}{k}(-1)^{k-1}\cos^{2n+1-2k}x\sin^{2k}x\\&=\sin^{2n}x\cot x\left(2n\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots\right)\end{aligned}$$

若令 $\sin 2nx=0$, 则 $2nx=k\pi$, $x=\dfrac{k\pi}{2n}$. 右边即可得

$$\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0.$$

方程 $\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0$ 的所有根为

$$t=\cot^2\frac{k\pi}{2n},\ k=1,\cdots,n-1$$

那么由韦达定理可得 $\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{\binom{2n}{3}}{2n}=\frac{(2n-1)(n-1)}{3}$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\csc^2\frac{k\pi}{2n}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{(2n-1)(n-1)}{3}+n=\frac{2n^2+1}{3}.$$

法 *II* 利用有理分式展开 $\csc^2 x=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+m\pi)^2}$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\frac{k\pi}{2n}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{n}+m\pi\right)^2}=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+nm)^2}\\&=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{\substack{m=-\infty\\ n\nmid m}}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{2n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

在这个求和式子中, 对固定的 m,k 从 1 到 $n-1$ 求和, 则 $k+nm$ 刚好不包含被 n 整除的数. 由此可得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4n^2-1}{3}+1\right)=\frac{2n^2+1}{3}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{2n^2+1}{3}=\frac{2}{3}$$

例题 6.19 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{|\cos(1)|+|\cos(2)|+\cdots+|\cos(n)|}{n}=\frac{2}{\pi}$

解 法 *I*. 令 $f(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$. 当 $x\in[n\pi,(n+1)\pi)$ 时,

$$2n=\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2(n+1).$$

由此得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{f(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|\cos k|$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos k|=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

法 *II*. 取 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}|\cos(k+x)|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|\cos(k+x)|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|\cos(k+x)|\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} |\cos(s+m+x)| = f(x+m).$$

又

$$f(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\cos(k+x+2\pi)| = f(x).$$

所以

$$f(x) = f(x+m) = f(x+2\pi). \tag{6.1}$$

对于 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\cos(k+x)|$, 其中 $\frac{1}{n}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $|\cos(k+x)|$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致有界, 由 *Dirichlet* 判别法可知: 函数 $f(x)$ 一致收敛. 同时(6.1)式说明周期可为任意整数, 又可为 2π，那么必为常数函数, $f(x)\equiv C$. 所以

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\cos k| = \int_0^1 f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |\cos(k+x)|dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 |\cos(k+x)|dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} |\cos t|dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_1^{n+1} |\cos t|dt = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

法 *III.* 构建 $|\cos k|\ (k\in\mathbb{N}^+)$ 在 $|\cos x|$ 上的随机分布, 则 $|\cos k|$ 的均值为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\cos k| = E(|\cos k|) = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

法 *IV(by ytdwdw)*. 引理: 设 $f(x)$ 以 1 为周期, 在 $[0,1]$ 可积, 若 z 为无理数, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(kz) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

引理的证明:

(i) 对 $f(x) = C, \cos 2mx, \sin 2mx$ 成立.

(ii) 利用 *Weierstrass* 第二逼近定理可推广到 $f(x)$ 为连续函数的情形.

(iii) 当 f 限制在 $[0,1]$ 上为 $\chi_{[a,b]}(x)\ (0<a<b<1)$ 时. 任取 $\varepsilon\in(0,\min(a,1-b,\frac{b-a}{2}))$,

定义 $F_\varepsilon(x)$ 如下: 在 $[0,a-\varepsilon]\cup[b+\varepsilon,1]$ 上为零, 在 $[a,b]$ 上为 1, 在 $[a-\varepsilon,a]$ 和 $[b,b+\varepsilon]$ 上用直线段连接, 使之连续.

定义 $G_\varepsilon(x)$ 如下: 在 $[0,a]\cup[b,1]$ 上为零, 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上为 1, 在 $[a,a+\varepsilon]$ 和 $[b-\varepsilon,b]$ 上用直线段连接, 使之连续.

则

$$\int_0^1 G_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(kz) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(kz) \leqslant \int_0^1 F_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得对这样的 $f(x)$ 成立

进而对所有按段常值函数成立.

(iv) 最后证明对可积函数成立.

我们取 $f(x) = |\cos\pi x|, z = \frac{1}{\pi}$, 即得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\cos k| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(kz) = \int_0^1 |\cos\pi x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

引理 6.1 (无理数之均匀分布)

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数, 若 z 为无理数, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\{kz\})=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $\{kz\}$ 表示 kz 的小数部分.

注 进一步阅读:《Uniform distribution of sequences》, Kuipers L, Niederreiter H

例题 6.20 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数, 且 $f(x)\geqslant 0$. 证明

$$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\leqslant f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

解 一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)&=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}f(n)=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(n)\,\mathrm{d}x\\&<f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(n)\,\mathrm{d}x>\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\leqslant f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.21 (CMC,2017) 求 $\sum\limits_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

解 一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}&=1+\sum_{n=2}^{100}n^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=2}^{100}\int_{n-1}^{n}n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\&<1+\sum_{n=2}^{100}\int_{n-1}^{n}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=1+\int_1^{100}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=19\end{aligned}$$

或者

$$\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}<\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{100.5}-\sqrt{2}\approx 18.636$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{n=1}^{100}\int_n^{n+1}n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\&>\sum_{n=1}^{100}\int_n^{n+1}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_1^{101}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=2\left(\sqrt{101}-1\right)\approx 18.1\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 *18*.

练习 6.5 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

解 法 1. 一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n^2+1}\frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{2}$$

法 2. 设

$$S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

因

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}<\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{dx}{1+x^2}$$

则

$$\int_{\frac{n^2+1}{n}}^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<S_n<\int_{0}^{n}\frac{dx}{1+x^2}$$

当 $n\to\infty$ 时，该不等式左右两端的极限都趋于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

由夹逼准则可知原极限为 $\frac{\pi}{2}$

例题 6.22 求极限 $\lim\limits_{t\to1^-}(1-t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}&=\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^n(-1)^kt^{nk}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}(1-t)}{1-t^{k+1}}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}}{1+t+t^2+\cdots+t^k}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}}{1+k}\\&=\lim_{t\to1^-}\ln(1+t)=\ln 2\end{aligned}$$

例题 6.23 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0^+}h\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(nh)$

同时收敛, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

解 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

和

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h)\\ &= h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) - hf(0).\end{aligned}$$

于是,

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) - hf(0) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

显然, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to 0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 同时收敛, 且

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)\right| \leqslant hf(0)$$

上式中, 令 $h\to 0^+$ 就得到所要证明的等式

例题 6.24 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\sin\frac{1}{n+k}$.

解 (by 楚坛) 当 $n\to\infty$ 时, 对 $\forall k=1,\cdots,n$, $\frac{1}{n+k}\to 0$. 利用不等式 $x-\sin x\leqslant \frac{1}{6}x^3$(当 $x\geqslant 0$ 时) 知

$$\left|\sin\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k}\right| \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+k}\right)^3 \leqslant \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}. \tag{6.2}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\sin\frac{1}{n+k}\\ =&\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\left(\sin\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k}\right)\\ \triangleq& A_n + B_n.\end{aligned}$$

进而由(6.2)知

$$\begin{aligned}|B_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}(1+\frac{\pi}{2})\left(\sin\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{6}(1+\frac{\pi}{2})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{6}(1+\frac{\pi}{2})\frac{1}{n^2}\to 0.\quad (\text{当}\, n\to\infty)\end{aligned}$$

故原极限等于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 (1+\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\end{aligned}$$

$$= (1+\frac{\pi}{8})\ln 2.$$

练习 6.6 ([6],P13) 求极限: $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} + \dfrac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n\right]$

解 *(by 西西)* 由于

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n \geqslant \frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n+1} - \ln n$$

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}} - \ln n \leqslant \frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n} - \ln n$$

且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n} - \ln n\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n+n\ln n}{n} - \ln n\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\
=&\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n+1} - \ln n\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n+n\ln n}{n+1} - \ln n\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]-\frac{\ln n}{1+n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+n}\\
=&1\times\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x + 0 = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

所以由夹逼准则知所求极限是 $\dfrac{2}{\pi}$

例题 6.25 (北大, 2018) 在 $[1,+\infty)$ 上, $f(x)>0$, $f''(x)\leqslant 0$, $f(+\infty)=+\infty$, 证明以下计算存在并求之

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}$$

解 *Since $f(x)>0$, $f''(x)\leqslant 0$, and $f(+\infty)=+\infty$, it is not hard to see $f'(x)>0$, then*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{f^s(2n)}-\frac{1}{f^s(2n+1)}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} g_s(\xi_n),$$

where $g_s(x) = \left(\dfrac{1}{f^s(x)}\right)' = -\dfrac{sf'(x)}{f^{s+1}(x)}$ *and* $\xi\in(2n,2n+1)$. *Since*

$$g_s'(x) = s\cdot\frac{(s+1)f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f^{s+2}(x)} > 0,$$

we can get

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty} g_s(\xi_n) \leqslant -\sum_{n=1}^{\infty} g_s(2n) &\leqslant -g_s(0) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-2}^{2n} g_s(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -g_s(0) - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g_s(x)\,\mathrm{d}x = -g_s(0) + \frac{1}{2f^s(0)} \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

se $s\to 0^+$, *Similarly, we have*

$$-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(\xi_n)\geqslant-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(2n+1)\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n+1}^{2n+3}g_s(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}g_s(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2f^s(0)}\to\frac{1}{2}$$

as $s\to 0^+$.

例题 6.26 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{n-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

解 *(by 冬眠的小老鼠)*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}&\xlongequal{n^2\to n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{\frac{k-1}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{\frac{k-1}{n}}}\\&=\int_0^1\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例题 6.27 求极限: $\int_0^n[x]\,\mathrm{d}x$

解

$$\int_0^n[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

例题 6.28 求极限: $\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$.

解

- 当 $n\leqslant\frac{2}{x}<n+1$ 时, 即 $\frac{1}{2(n+1)}<x\leqslant\frac{1}{2n}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right]=n$;
- 当 $n\leqslant\frac{1}{x}<n+1$ 时, 即 $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$ 时, $\left[\frac{1}{x}\right]=n$;

注意到

$$\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n+1}\right]\bigcup\left(\frac{2}{2n+1},\frac{2}{2n}\right]$$

- 当 $\frac{2}{2n+2}<x\leqslant\frac{2}{2n+1}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right]=2n+1$, $\left[\frac{1}{x}\right]=2n$
- 当 $\frac{2}{2n+1}<x\leqslant\frac{2}{2n}$ 时, $\left[\frac{2}{x}\right]=2n$, $\left[\frac{1}{x}\right]=2n$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}}0\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}\right)\\&=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$= 2\left(-\ln 2 + 1 - \frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 - 1$$

笔记 此类问题的大致思路: 分段去绝对值或者无穷区间, 转化级数去求某小段, 最后加总

- 按“周期”化分区间! 分块
- 计算“每一小段”的值

例题 6.29 设多项式

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,,\ a_m \geqslant 0$$

设 $P(1), P(2), \cdots, P(n)$ 的算术均值和几何均值记作 A_n, G_n 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{G_n}$

解 为了方便, 我们记作

$$S_{n,k} = 1 + 2^k + \cdots + n^k$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n,k}}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$$

那么有

$$A_n = \frac{P(1)+P(2)+\cdots+P(n)}{n} = a_m\frac{S_{n,k}}{n} + a_{m-1}\frac{S_{n-1,k}}{n} + \cdots + a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^m} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{m+1}$$

其次注意 $\dfrac{P_n}{n^m} = a_m$, 故

$$\ln G = \frac{\ln P(1) + \ln P(2) + \cdots + \ln P(n)}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\ln\frac{G_n}{(n!)^{\frac{m}{n}}} = \ln a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^m\cdot\frac{1}{m+1} = \frac{e^m}{m+1}$$

例题 6.30 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n=1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n} - \frac{2}{\pi}n\right) = \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{2\ln\pi - \ln 4}{\pi}$$

解 *(by tian_275461)* 记

$$I = \frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n} - \frac{2}{\pi}n\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) - 2\ln n$$

只要证

$$\lim_{n\to\infty} I = 2\gamma - 2\ln\pi + \ln 4$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}(2\gamma - I) = 2\ln\pi - \ln 4$$

记 $S = 2\gamma - I$, 我们有

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n + c_n \quad 其中 c_n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$S = 2\sum_{k=1}^{n-1} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 2c_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)+2c_n \\
&= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{\pi-\frac{k\pi}{n}}\right)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)+2c_n
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\lim_{n\to\infty} S=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x
$$

故只要证

$$
\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=2\ln\pi-\ln 4
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

第二部分用替换 $y=\pi-x$

$$
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x
$$

注意到

$$
\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)
\end{aligned}
$$

对 n 分奇偶性讨论

(1) $n=2m-1\ (m=1,2,\cdots)$ 时

$$
(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left(\frac{(4m-1)(4m-3)}{(4m-2)^2}\right)
$$

(2) $n=2m\ (m=1,2,\cdots)$ 时

$$
(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left(\frac{(4m)^2}{(4m+1)(4m-1)}\right)
$$

而

$$
\sum_{m=1}^{k}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left[\frac{1}{4k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\right]\to\ln\frac{\pi}{4}\quad(\text{用 Wallis 公式})
$$

马上得到

$$
\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=2\ln\pi-\ln 4
$$

6.1.3 分段估计 (拟合法)

6.1.3.1 极限定义 $\varepsilon-\delta$ 的写法

例题 6.31 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

解 无瑕点, 观察被积函数从下限到上限的变化:

- 被积函数在 $x=0$ 这个点附近会不趋向于 0, 虽是未定式, 但是有界的!

- 其它点都是趋向于 0

$$\lim_{x\to 0^+}(1-x^2)^n = \text{未定式} \leqslant 1, \quad \lim_{x\to 1^-}(1-x^2)^n = 0$$

分段估计

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^\delta (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}_{0\times\text{有界}=0} + \underbrace{\int_\delta^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}_{\text{常数}\times 0=0}$$

用极限语言来描述

- $\forall\varepsilon>0(\varepsilon>1)$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_0^\delta (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x < \int_0^\delta \mathrm{d}x = \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta^2)^n=0$, 由极限的定义 $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, 有 $(1-\delta^2)^n<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 因而

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x &< \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n\,\mathrm{d}x\\ &= (1-\delta^2)^n(1-\delta) < (1-\delta)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^\delta (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x + \int_\delta^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

注 δ 的取法问题

- $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ 其实是马后炮, 实际求中可以先用 ε 代, 再根据结果修正 (不修正也没事)

例题 6.32 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$

证明 $\forall\,\varepsilon>0\,(\varepsilon<\pi)$, 因

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=0$, 所以 $\exists\,N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时

$$0<\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由极限的定义即得原式成立

例题 6.33 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1$.

解 无瑕点, 观察被积函数从下限到上限的变化:

- 被积函数在 $x=1$ 这个点附近会不趋向于 1, 虽是未定式, 但是有界的!
- 其它点都是趋向于 1

因此, 从 $x=1$ 处分段

$$\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{1-\delta} e^{x^n}\,\mathrm{d}x}_{1\times 1=1} + \underbrace{\int_{1-\delta}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x}_{0\times\text{有界}=0}$$

$\forall \varepsilon: 0<\varepsilon<1$, 有 $0<1-\varepsilon<1$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0$.

$$1-\varepsilon=\int_0^{1-\varepsilon} e^0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant e^{(1-\varepsilon)^n}(1-\varepsilon)$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{(1-\varepsilon)^n}=e^0=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1-\varepsilon.$$

对于上述 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N$, 有 $\left|\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,\mathrm{d}x-\varepsilon 1\right|<2\varepsilon$. 而

$$\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=\left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant e\big(1-(1-\varepsilon)\big)=e\varepsilon.$$

$\forall n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x-1\right| &\leqslant \left|\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,\mathrm{d}x-1\right|+\left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant 2\varepsilon+e\varepsilon=(2+e)\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1$.

例题 6.34 (北大, 2018) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$

解 任取 $\varepsilon\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}0<\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\varepsilon\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x+\int_\varepsilon^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\\ &<\varepsilon+\int_\varepsilon^1\frac{\sin^n\varepsilon}{\varepsilon^n}\,\mathrm{d}x=\varepsilon+\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n(1-\varepsilon)\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n=0$, 故存在 $N>0$, 使得对任意 $n>N$, 恒有 $\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n<\varepsilon$, 故

$$0<\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x<\varepsilon+\varepsilon(1-\varepsilon)<2\varepsilon,$$

故对任意 $n\in\mathbb{N}^+$

$$n\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\geqslant n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x>n\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin^n(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n}=\sqrt{n}\left(\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty} n\frac{-\frac{1}{6n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=-\frac{1}{6}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x=+\infty$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$$

例题 6.35 (武汉大学, 2018 年) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\pi\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{\int_0^\pi\sin^n x\,\mathrm{d}x}$

解 由 $\cos x$ 的连续性知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $x\in[\pi/2-\delta,\pi/2]$ 时, $\cos x<\varepsilon/2$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_0^\pi\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{\int_0^\pi\sin^n x\,\mathrm{d}x}\right| &= \left|\frac{2\int_0^{\pi/2}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{2\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x}\right|\\ &\leqslant \frac{\left|\int_0^{\pi/2-\delta}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x\right|}{\left|\int_{\pi/2-\delta/2}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|}+\frac{\left|\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x\right|}{\left|\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\left|\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos^6 x\right|}{\left|\delta \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\right|}+\frac{\varepsilon}{2}$$

例题 6.36 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos^n x\,\mathrm{d}x=0.$

解 设 $f(x)=e^x\cos^n x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则

$$f'(x)=e^x\cos^{n-1}x(\cos x-n\sin x)=0.$$

当 $n\geqslant 0$ 时, 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的解为 $\arctan\frac{1}{n}$, 即 $x_n=\arctan\frac{1}{n}$ 是 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的极大值点. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n}=0$ 知, $\exists N_1\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N_1$, 有 $0<x_n<\delta$. $\forall x\in[0,\delta]$, 有

$$f(x)=e^x\cos^n x\leqslant e^{x^n}\cos^n x_n=e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n=1$, 所以 $\exists N_2\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N_2$, 有

$$e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n<2.$$

取 $N_0=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N_0$, 有

$$0<\int_0^{\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\delta}e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^{\delta}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为当 $n>N_1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x<e^{\delta}\cos^{\delta}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<e^{\delta}\cos^{\delta}\frac{\pi}{2}.$$

要使 $e^{\delta}\cos^{\delta}\frac{\pi}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$, 只要 $n>\ln\left(\frac{\varepsilon}{\pi}e^{-\frac{\varepsilon}{4}}\right)\Big/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4}$. 取 $N_3=\left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{\pi}e^{-\frac{\varepsilon}{4}}\right)\Big/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4}\right]$, $N=\max\{N_3,N_0\}\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N$, 有

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos^n x\,\mathrm{d}x=0.$

例题 6.37 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$.

证明 因为 $(n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=1$, 所以只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x-(n+1)\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x\right)=0$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=0$, 所以只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x=0$

$\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$, 所以 $\exists\,\delta>0$ (不妨设 $\delta<1$), 当 $0<1-x<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 且 $\exists M>0$, 使得 $\forall x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 所以

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\&=n\int_0^{1-\delta}x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x+n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\&<2Mn\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\\&<2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

因为
$$\lim_{n\to\infty} 2M(1-\delta)^{n+1} = 0$$
所以 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $2M(1-\delta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以当 $n > N$ 时, 有
$$\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
因而有
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$$

例题 6.38 设 $f(x) \in D[0,1]$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right]$.

解 *(by 叶心致)*
$$\begin{aligned} I &\triangleq n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right] \\ &= n^2\int_0^1 x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x - \frac{n}{n+1}f(1) \triangleq I_1 - I_2 \end{aligned}$$
由于 $f(x) \in \mathrm{D}[0,1] \Rightarrow f(x) \in \mathrm{C}[0,1] \Rightarrow \forall x \in [0,1], \exists M, |f(x)| \leqslant M$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $1-\delta < x < 1$ 时
$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f'(1)\right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} f(x)-f(1) < (x-1)\left[f'(1)-\varepsilon\right] \\ f(x)-f(1) > (x-1)\left[f'(1)+\varepsilon\right] \end{cases}$$
于是
$$I_1 = n^2\left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^1\right) x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x \triangleq I_3 + I_4$$
显然
$$|I_3| \leqslant 2Mn^2\int_0^{1-\delta} x^n\,\mathrm{d}x = 2Mn^2\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1} \to 0(n\to\infty)$$
对 I_4 右边进行放缩
$$\begin{aligned} I_4 &= n^2\int_{1-\delta}^1 x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(f'(1)-\varepsilon\right)n^2\int_{1-\delta}^1 x^n(x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(f'(1)-\varepsilon\right)n^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{(1-\delta)^{n-2}}{n+2} + \frac{(1-\delta)^{n-1}}{n+1}\right) \\ &\to -f'(1)\ (n\to\infty) \end{aligned}$$
同理, 对 I_4 左边进行放缩
$$I_4 \geqslant -f'(1) - \varepsilon \to -f'(1)(n\to\infty)$$
综上所述
$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right] = -f(1) - f'(1)$$

例题 6.39 设 $f(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(0)$

解 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 有
$$\left|\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right| = \left|\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} -\frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\frac{\sin u}{u}\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\,\mathrm{d}u\right|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \frac{1}{x}\left[\left|-\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right|+\frac{2}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u\right]\\&=x\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}=x\left|\sin\frac{1}{x}\right|+x\leqslant 2x<2\sigma=\varepsilon\end{aligned}$$

同理, 当 $-\delta<x<0$ 时, 也有 $\left|\dfrac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right|<\varepsilon$, 因此

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0$$

例题 6.40 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, 证明:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

解 *(by 向禹)* 首先, 我们证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

当 n 为偶数时; 我们只需考虑 $x\to0^+$ 即可.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

对 $\forall x>0$, $\exists k\in\mathbb{N}^+$, *s.t.* $(k-1)\pi\leqslant x<k\pi$, 则 $x\to+\infty$ 时有 $k\to+\infty$, 于是

$$x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t+x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

其中

$$\left|x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|x\int_x^{k\pi}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{k\pi-x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{x}\right|\to0,\ x\to+\infty$$

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t&=\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(t+i\pi)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

不难得到当 $k\to+\infty$ 时,

$$\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i+1)^2}\sim\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\sim\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\sim\frac{1}{k}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t\sim\frac{k\pi}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

当 n 为奇数时; 正项级数 $\displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$ 会变成交错级数 $\displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$, 此时

$$\left|\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\right|\leqslant\frac{1}{\left(k+\frac{t}{\pi}\right)^2}<\frac{1}{k^2}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0$$

同理可证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

例题 6.41 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t=0.$

证明 法 1. 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $0<a<\frac{\varepsilon}{4}$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t&=\int_0^{1-a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1-a}^{1+a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

由 $|\sin x|\leqslant 1$ 知 $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, 对 I_1, 有

$$|I_1|\leqslant\int_0^{1-a}|\sin t^n|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{1-a}t^n\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{(1-a)^{n+1}}{n+1}$$

显然可以找到一个 $N_1>0$ 使得 $n>N_1$ 时有 $|I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$, 而对 I_3

$$\begin{aligned}I_3=\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t&=\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(-\cos t^n)}{nt^{n-1}}\\&=\left.\frac{-\cos t^n}{nt^{n-1}}\right|_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\cos(1+a)^n-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n(1+a)^{n-1}}+\frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

显然存在 N_2, 使得当 $n>N_2$, 时有 $|I_3|<\frac{\varepsilon}{4}$, 这样, 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 就有 $|I|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t=0$$

法 2

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n dt=\frac{1}{n}\cdot\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}y^{\frac{1}{n}-1}\sin y dy\qquad(y=t^n)$$

而

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)=\int_0^{\infty}u^{-\frac{1}{n}}e^{-u}du=\int_0^{\infty}y^{1-\frac{1}{n}}\cdot x^{-\frac{1}{n}}e^{-xy}dx$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}\left(\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{n}}e^{-xy}dx\right)\cdot\sin y dy\\&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{n}}\cdot\left(\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}e^{-xy}\sin y dy\right)dx\\&=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx-\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\\&=I_1-I_2\end{aligned}$$

而我们知道 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi a}$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_1=0$$

$$I_2=\frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)=S_1+S_2$$

其中

$$
\begin{aligned}
|S_1| &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|\int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^1 \frac{[(\frac{\pi}{2})^n+1]x^{-\frac{1}{n}}}{e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} z^{-\frac{1}{n}}e^{-z}dz \\
&\leqslant \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}\int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{n}}e^{-z}dz \\
&= \frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-n}\right]\to 0 \\
|S_2| &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|\int_1^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}}dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\int_1^{+\infty}\frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2}dx \leqslant \frac{\pi}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\to 0
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n dt=0$$

例题 6.42 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\cos^n\left(\frac{1}{x}\right)dx=0$

证明 法 1. 作变量替换 $u=\frac{1}{x}$, 则有

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du &= \int_1^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(k+\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{3}{2})\pi}\left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right|du \\
&\leqslant \cos^n 1\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u^2}du+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|du \\
&= \cos^n 1\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u^2}du+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|du
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$, 知 $\cos^n 1\to 0$, $\int_0^{\pi}|\cos^n u|du\to 0$. 这是由于

$$\int_0^{\pi}|\cos^n u|du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u du=2I_n$$

由于单调有界收敛原理知 $n\to\infty$ 极限必然存在. 所以考虑偶序列递推公式和 Wallis 公式

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2n}},\ n\to\infty$$

法 2. 做变换 $x=\frac{1}{u}$, 得到

$$\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n u\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

从而

$$\left|\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2} &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\ &< \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

得到

$$\left|\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\ \forall n=1,2,\dots.$$

易证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

例题 6.43 (北大,2014) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界. 求极限

$$\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 由连续性, 存在 $\delta>0$, 使得对一切 $|x|\leqslant\delta$, 有 $|f(x)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{\pi}$. 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x+ +\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 4M\arctan\frac{t}{\delta}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{t}\\ &< \frac{4Mt}{\delta}+\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0.$$

根据 $\varepsilon>0$ 的任意性,

$$\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

法 2. 注意到, 对任意 $t>0$, 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in(-\sqrt{t},\sqrt{t})$, 使得

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= |f(\xi)-f(0)|\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &=\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x+2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\\ &=4M\arctan\sqrt{t}+2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\\ &<4M\sqrt{t}+\pi|f(\xi)-f(0)|.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{t\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x=0.$$

例题 6.44 求极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

证明 注意到 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$. 于是，对于任意 ε, 存在 $\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时 $\cos x>1-\varepsilon$

$$I=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt\leqslant\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}dt$$

令 $y=x(1-\cos t),\Rightarrow t=\arccos\left(1-\dfrac{y}{x}\right),\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x\sqrt{1-(1-\frac{y}{x})^2}}dy$, 则

$$\sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{x(\cos t-1)}dt=\sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}\frac{1}{x\sqrt{1-(1-\frac{y}{x})^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac12}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac12}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}-1\right)dy+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac12}dy$$

$$=A+B$$

显然有

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac12}\cdot\frac{\frac{y}{2x}}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\right)}dy\\ &\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}x}\int_0^{x}e^{-y}y^{\frac12}dy\to0\\ B&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac12}dy\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}\qquad(x\to+\infty)\end{aligned}$$

另外

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt\geqslant\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{-\frac12xt^2}(1-\varepsilon)dt\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon)$$

而不难证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt=0$$

这里只要用

$$\cos t-1=-2\sin^2\frac{t}{2}\leqslant -2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2$$

并注意到替换后的反常积分收敛就好, 最后, 由 ε 的任意性, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例题 6.45 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x\right)$

解 设 $\delta=n^{-\frac{2}{5}}$, 则

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x+2\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n)}\\&=\frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-1)!!}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x\right)&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{\ln\cos x-n\ln(1+x^2)}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

因为

$$\ln\cos x-n\ln(1+x^2)=-\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2+n(x^4),\ x\in[-\delta,+\delta]$$

所以

$$\ln\cos x-n\ln(1+x^2)=-\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2+o\left(n^{-\frac{8}{5}}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{\ln\cos x-n\ln(1+x^2)}\mathrm{d}x\right)\\=&\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta}e^{-(n+\frac{1}{2})x^2}\mathrm{d}x\right)\quad y=\sqrt{n+\frac{1}{2}}x\\=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\int_{-\delta\sqrt{n+\frac{1}{2}}}^{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

6.1.3.2 上下极限的写法

例题 6.46 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

证明 令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 若 $M=0$, 则等式平凡成立. 故不妨设 $M>0$. 设 $x_0\in[a,b]$ 满足 $M=|f(x_0)|$. 则

对任何 $\varepsilon \in (0, M)$, 存在区间 $[c, d]$, 使得 $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ 且 $|f(x)| \geqslant M - \varepsilon, \forall x \in [c, d]$. 从而

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (d-c)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon).$$

因此

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M.$$

另一方面, 显然有

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M.$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M.$$

从而

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}},\ \varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

6.1.3.3 不用极限定义的写法

例题 6.47 设 $f(x) \in C[0,1]$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2} f(x)\,\mathrm{d}x$

解 *(by 蓝兔兔)* 注意到

$$\int_0^1 ne^{-x^2n^2} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=nx} \int_0^n e^{-t^2} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t^2} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)\int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + 0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)
\end{aligned}$$

例题 6.48 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=nx} \int_0^n \frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{t^2+1} e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{1}{t^2+1} e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}} \int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\arctan\sqrt{n} - \arctan 0\right) + 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

例题 6.49 计算极限: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解 法 *I.*

$$
\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x
$$

其中

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} e^{-n^{\frac{1}{3}}} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[\xi\in\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)]{\text{积分第一中值定理}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\cos^2\xi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\left(\int_0^a e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{n}\left[\int_0^{a\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]^2
$$

利用二重积分 *(*同济 *7p150),*

$$
\frac{1}{4} \iint_{\rho<a\sqrt{n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_0^{a\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{4} \iint_{\rho<a\sqrt{2n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$
\iint_{\rho<a\sqrt{n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \pi(1-e^{-a^2 n})
$$

$$
\iint_{\rho<a\sqrt{2n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \pi(1-e^{-2a^2 n})
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}
$$

法 *II.*

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{n}x} \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\cos^2\frac{t}{\sqrt{n}}}\,\mathrm{d}t = I
$$

$$
\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant I \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^2}\,\mathrm{d}t
$$

而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{2-\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}+0=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

例题 6.50 计算 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n\frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\int_0^n\frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x=nt}\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t\\&=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t}_{I_1}+\underbrace{\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t}_{I_2}\end{aligned}$$

由

$$0<\frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}<\frac{1}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$\frac{1}{2+(\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}}<\frac{1}{2+(nt)^{-nt}}<\frac{1}{2+n^{-n}}\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant t\leqslant 1\right)$$

可得

$$0<I_1<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2+(\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t<I_2<\frac{1}{2+n^{-n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n\frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$$

例题 6.51 若函数 $f(x)$ 连续, 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x$$

解 *(by 蓝兔兔)* 注意到

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

注意到:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{-n^{\frac{1}{3}}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=0$$

所以

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

同理

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{1}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f(1-\xi_n)}^{\xi_n\in\left(0,\frac{1}{n^{1/3}}\right)}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=f(1)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\mathrm{d}x=f(1)$$

例题 6.52 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 存在, 并求极限

解 因为

$$\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+o(1)$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x}\mathrm{d}x+o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x&=n^2\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x\\&=n^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x+n^2\int_{\frac{n\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x\\&=\frac{n^2}{2}\int_0^{+\infty}\sin^4 t\left(\int_0^{+\infty}x^2e^{-tx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t+o(1)\\&=12n^2\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+4)(x^2+16)}\mathrm{d}x+o(1)\\&=n^2\ln 2+o(1)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x}\mathrm{d}x&=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln n+o(1)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln 2+\frac{1}{4}\ln n}{n^2}=\ln 2$$

6.1.4 定积分的性质

例题 6.53 (江苏, 2020) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi)$$

证明 由 $f'(x)\neq 0$, 不妨设 $f'(x)>0$ 且令

$$F(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(b)(x-a)-f(a)(b-x)$$

易得

$$F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(b)(a-a)-f(a)(b-a)=\int_a^b\big(f(x)-f(a)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$F(b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(b)(b-a)-f(a)(b-b)=\int_a^b\big(f(x)-f(b)\big)\,\mathrm{d}x$$

又当 $x\in(a,b)$ 时, 有 $f(a)<f(x)<f(b)$, 故由积分保号性, 必有 $F(a)F(b)<0$. 故由零点定理知结论成立.

练习 6.7 (积分连续性) 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积, $A<a<b<B$. 试证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0\,.$$

证明 若 $f(x)$ 是 $[A,B]$ 上的连续函数, 由一致连续性, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在充分小的 $\delta>0$, 当 $|h|<\delta$ 且 x, $x+h\in[A,B]$ 时, 有 $|f(x+h)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 因此有

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

即有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

对于一般情况, 存在连续函数序列 $\varphi_n(x)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^B|f(x)-\varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

从而当 $|h|<\min\{B-b,a-A\}$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x+h)-\varphi_n(x+h)|\,\mathrm{d}x=0$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 有

$$\int_a^b|f(x)-\varphi_N(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},\quad\int_a^b|f(x+h)-\varphi_N(x+h)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$$

对于 $\varphi_N(x)$, 进一步存在 $\delta>0$, 当 $|h|<\delta$ 时, 有

$$\int_a^b|\varphi_N(x+h)-\varphi_N(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$$

所以当 $|h|<\min\{B-b,a-A,\delta\}$ 时, 有

$$0\leqslant\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi_N(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\varphi_N(x+h)-\varphi_N(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_a^b |f(x+h)-\varphi_N(x+h)|\,\mathrm{d}x$$
$$< \varepsilon$$

由极限定义可知命题成立.

练习 6.8 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积,

$$f_0(x)>0,\quad f_n(x)=\sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t},\quad (n=1,2,\ldots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

证明 设 $0<\delta<1$. 因为 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $f_0(x)>0$,

所以 $f_1(x)=\sqrt{\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t}$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，故存在正数 m,M, 使得

$$f_1(x)\leqslant M \qquad (x\in[0,1])$$
$$f_1(x)\geqslant m \qquad (x\in[\delta,1])$$

对任一自然数 n, 用数学归纳法可以证明如下不等式

$$m^{\frac{1}{2^n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} \leqslant f_{n+1}(x)\leqslant M^{\frac{1}{2^n}}a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \tag{6.3}$$

其中

$$a_n=\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $n=1$ 时, 有

$$f_2(x)=\sqrt{\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant M^{\frac12}x^{1-\frac12}=M^{\frac12}a_1x^{1-\frac12}$$

设 $n-1$ 时结论成立, 则对 n 有

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant M^{\frac{1}{2^n}}a_{n-1}^{\frac12}\sqrt{\int_0^x t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}\,\mathrm{d}t}$$
$$=M^{\frac{1}{2^n}}a_{n-1}^{\frac12}\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(2^n-1)^{\frac12}}=M^{\frac{1}{2^n}}a_nx^{1-\frac{1}{2^n}}$$

故 (6.3) 式右边的不等式对一切自然数 n 都成立, 同理可证左边的不等式亦真.

因为

$$\ln a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac12\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

所以根据特普利茨定理（容易验证此时条件全部满足）有

$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\ln\frac12$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}M^{\frac{1}{2^n}}a_nx^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{x}{2}\qquad \lim_{n\to+\infty}m^{\frac{1}{2^n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{x-\delta}{2}$$

由 δ 的任意性即知对任一切 $x\in(0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}$$

又因 $f_{n+1}(0)=0\quad(n=1,2,\cdots)$ 所以对一切 $x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}$$

6.1.4.1 Riemann 引理及其推广

定理 6.1 (Riemann 引理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$$

证明 [55] 先设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故必有界, 即存在常数 M, 使得 $|f(x)|\leqslant M$, 记 $\forall x\in[a,b]$. 则当 $n=\lfloor\lambda\rfloor$ 时, 则当 $\lambda\to+\infty$ 时, $n\to\infty$. 现在将 $[a,b]$ 等分, 分点为

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\ i=0,1,\cdots,n.$$

记 ω_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0,$$

其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 注意到

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{\lambda}|\sin x_i-\sin x_{i-1}|\leqslant\frac{2}{\lambda},\qquad|\cos\lambda x|\leqslant1.$$

有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i+\frac{2n}{\lambda}M=\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i+\frac{2\lfloor\lambda\rfloor}{\lambda}M\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}M\quad(\lambda\to+\infty).\end{aligned}$$

再设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义绝对可积. 不妨设 b 为 $f(x)$ 唯一的瑕点, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, 使得

$$\int_{b-\eta}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b-\eta]$ 上 Riemann 可积, 由刚才证明的结果知, $\exists\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 便有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b-\eta}^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\int_{b-\eta}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$$

同理, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$$

笔记 如何分析定理?《我的数学分析积分》指出:"在考察了教材中 *Riemann* 引理的证明后, 发现证明中没有用到 $\sin x$ 的可导性质 (甚至连续性), 这时候可猜想对于一般的的可导性质 (甚至连续性), 这时候可猜想对于一般的 *Riemann* 可积周期函数 $g(x+T)=g(x)$, 是否有类似的结论呢?"

例题 6.54 (Dirichlet 积分) 计算: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解 法 *III*. 注意到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{6.4}$$

并且令:

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\sin\frac{x}{2}}, & 0<x\leqslant\pi\ .\end{cases}$$

则 $\phi(x)$ 连续且满足黎曼引理, 取 $\lambda=n+\frac{1}{2}$, 我们有:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0.$$

再结合 (6.4), 我们有:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ .$$

置换元 $u=\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, 且注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 最终我们有:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.$$

定理 6.2 (推广的 Riemann 引理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $g(x)$ 以 T 为周期, 且在 $[a,b]$ 上可积. 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 [13] I 首先, 设 $f(x)$ 连续可导, $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$. 记

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

则易见, $G(x)$ 是以 T 为周期的函数, 从而它在 $\mathbb{R}$ 上有界. 容易得到 (先假设 $g(x)$ 连续, 然后再后面的 II 中也同时对 $g(x)$ 用连续函数逼近)

$$\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\big(f(b)G(\lambda b)-f(a)G(\lambda a)\big)-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)G(\lambda x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x),f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0.$$

II 设 $f(x),g(x)$ 可积, $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$. 取 $[a,b]$ 上连续可导的函数列 $f_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

由于

$$\big|(f(x)-f_n(x)g(\lambda x)\big|\leqslant M|f(x)-f_n(x)|,\ \forall x\in[a,b],$$

其中 $M \triangleq \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 有

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_a^b f_n(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b M|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b M|f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x.$$

上式两边令 $n \to +\infty$, 得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

III 一般地, 在定理的假设下, 由 II 的结果, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\left(g(\lambda x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 0.$$

此即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注: 定理的结果可简单地推广到 $f(x)$ 为可积且绝对可积的反常积分情形

例题 6.55 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, 其中 $x \in [0,\pi]$

解 *(1) 当 $x=0$ 时, 级数为 0*

(2) 当 $x \in (0,\pi]$ 时, 设 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$, 则

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right)' = \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$
$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

因此:

$$f_n(x) = \int_\pi^x \left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{\pi - x}{2} - \int_x^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

由黎曼引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_x^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 0$, *故* $x \in (0,\pi]$ *时,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = \dfrac{\pi - x}{2}$

6.1.4.2 积分中值定理

例题 6.56 设 $y = \frac{x^2}{1-x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, 则函数 y 在该区间的平均值 $\bar{y} =$ ________

解 *$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为函数 y 在区间 $[a,b]$ 上的平均值*

$$\bar{y} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1-2\sqrt{3}+\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

例题 6.57 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得下列式子成立:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a), \quad (a<\xi<b)$$

证明 构造函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$. 由 Lagrange 中值定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

注意到 $F(b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $F(a)=0$, 即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\quad \in\in(a,b)$$

定理 6.3 (积分第一中值定理)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设在 $[a,b]$ 上 $g(x)\geqslant 0$. 因为 $f(x)\in C[a,b]$, 由最值定理知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M, 最小值 m, 即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M\Longrightarrow mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$$

$$\int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$, 则 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M$. 由介值定理知, $\xi\in[a,b]$, 使得即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}=f(\xi)\quad 即\quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 由 (6.5) 式知 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则对 $\forall\xi\in[a,b]$, 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.58 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x\sin\dfrac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t&\xlongequal{u=x+t}\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\sin\frac{\pi}{u}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{u}}\lim_{x\to\infty}\pi\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{积分中值定理}\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\xi_x}{\xi_x}\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\pi\ln 2\end{aligned}$$

例题 6.59 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 对 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=nx}\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int_0^\pi\sin u\,\mathrm{d}u=\frac{2}{n}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 应用积分中值定理得

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}}f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{\pi}{n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{\pi}{n} \xlongequal{\text{积分定义}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x$$

例题 6.60 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

解 首先令 $\cos x = t$, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \cos^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1} t}\right) t^n \,\mathrm{d}t$$

令 $f(t) = \dfrac{\cos^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left(1 + \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1} t}\right) t^n$ 易知 $f(t) \downarrow\ t \in [0,1]$ 且 $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \ln 2$
运用积分第二中值定理 $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t$

$$\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = f(0) \int_0^{\xi} t^n \,\mathrm{d}t + \lim_{x\to 1} f(x) \int_{\xi}^1 t^n \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f(0)}{n+1}\xi^{n+1} + \frac{\ln 2}{n+1}[1 - \xi^{n+1}]$$

故

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \cos^n x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n \ln 2}{n+1} + \frac{n\xi^{n+1}}{n+1}(f(0) - \ln 2)\right]$$

$$= \ln 2$$

例题 6.61 (CMC,2019) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数, 且 $|f(x)| \leqslant 1$, $f'(x) > 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$. 证明: 对于 $0 < \alpha < \beta$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 0$.

证明 令 $y = x - \dfrac{1}{nx}$, 则 $y' = 1 + \dfrac{1}{nx^2} > 0$. 故函数 $y(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调增加. 记 $y(x)$ 的反函数为 $x(y)$, 则 $x(y)$ 定义在 $\left[\alpha - \dfrac{1}{n\alpha}, \beta - \dfrac{1}{n\beta}\right]$ 上, 且

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{nx^2}} > 0.$$

于是

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny)x'(y) \,\mathrm{d}y.$$

根据积分中值定理, 存在 $\xi_n \in \left[\alpha - \dfrac{1}{n\alpha}, \beta - \dfrac{1}{n\beta}\right]$, 使得

$$\int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny)x'(y) \,\mathrm{d}y = x'(\xi_n) \int_{\alpha - \frac{1}{n\alpha}}^{\beta - \frac{1}{n\beta}} f'(ny) \,\mathrm{d}y = \frac{x'(\xi_n)}{n}\left[f\left(n\beta - \frac{1}{\beta}\right) - f\left(n\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

因此

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{|x'(\xi_n)|}{n}\left[\left|f\left(n\beta - \frac{1}{\beta}\right)\right| - \left|f\left(n\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right|\right]$$

注意到

$$0 < x'(\xi_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n\xi_n^2}} < 1,$$

则

$$\left|\int_\alpha^\beta f'\Big(nx-\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{n},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\Big(nx-\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = 0$$

6.1.4.3 函数的光滑逼近

定理 6.4

设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b \big|g(x)-f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

定理 6.5 (Weierstrass 第一逼近定理)

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的多项式 $Q(x)$, 使得

$$\big|Q(x)-f(x)\big| < \varepsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

换言之, 有界闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近.

例题 6.62 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则 $f(x)=0$. (提示: 用多项式逼近 f.)

证明 (by 予一人)[56]. 置 $F(x):=xf(x)$. 依题设 $(\forall n\geqslant 0)$ $\int_a^b x^n F(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则对任意多项式 $P(x)$ 都有 $\int_a^b P(x)F(x)\,\mathrm{d}x=0$. 再依 Stone-Weierstrass 定理, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能求得多项式 $P(x)$ 使得 $|F(x)-P(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 再由 $F(x)$ 的连续性, 知其有界, 不妨设其一界为 M. 于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b F(x)[F(x)-P(x)]+F(x)P(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^b F(x)[F(x)-P(x)]\,\mathrm{d}x+\int_a^b F(x)P(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^b F(x)[F(x)-P(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b |F(x)||F(x)-P(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b M\varepsilon\,\mathrm{d}x = (b-a)M\varepsilon,
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 知 $\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x=0$, 于是 $xf(x)=F(x)\equiv 0$, 于是 $f(x)\equiv 0$.

6.1.4.4 Laplace 渐近积分定理

定理 6.6 (Laplace 渐近积分定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且满足下面的条件：

1. $\forall n > N,\ f(x)e^{n\cdot g(x)} \in \mathbb{R}[a,b]$;
2. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个最大值点 $x = \xi \in (a,b)$，且在任何不包含 ξ 的闭区间 $[\alpha,\beta]$ 中，有 $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} g(x) < g(\xi)$;
3. 在 ξ 的某领域内，$g''(x) < 0$ 且连续；
4. $f(\xi) \neq 0$，$f(x)$ 在 $x = \xi$ 连续.

则当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_a^b f(x)e^{n\cdot g(x)}\,\mathrm{d}x \sim f(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{ng''(\xi)}}e^{ng(\xi)}$$

证明 徐利治的渐近分析方法及应用的 43-45 页

例题 6.63 Wallis 公式：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}},\ n \to +\infty$

证明 由于

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$$

由 Laplace 渐近积分定理，我们取 $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin^2 x, g(x) = \dfrac{1}{\pi}, \xi = \dfrac{\pi}{2}$. 得到

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2\pi}{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}},\ n \to \infty$$

例题 6.64 Stirling 公式：$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n,\ n \to +\infty$

证明 我们知道对于 Γ 函数有

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\int_0^{+\infty} (xe^{-x})^n\,\mathrm{d}x$$

由 Laplace 渐近积分定理，我们取 $a = 0, b = +\infty, f(x) = 1, g(x) = \ln x - x, \xi = 1$, 易得

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\ n \to +\infty$$

6.1.5 积分不等式

6.1.5.1 一些重要的积分不等式

定理 6.7 (Cauchy-Schwarz 不等式)

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 法 I. 对任意实数 λ，有 $\displaystyle\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式，它非负的条件是其系数判别式非正，即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

从而本题得证

法 II(by 向禹). 利用二重积分, 从不等式

$$\int_a^b\int_a^b (f(x)g(y)-g(x)f(y))^2\,dx\,dy \geqslant 0$$

出发, 展开得到

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(y)\,dx\,dy+\int_a^b\int_a^b g^2(x)f^2(y)\,dx\,dy\\ \geqslant&2\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(y)\,dy+\int_a^b f^2(y)\,dy\int_a^b g^2(x)\,dx\\ \geqslant&2\int_a^b f(x)g(x)\,dx\int_a^b f(y)g(y)\,dy\end{aligned}$$

注意到定积分与积分变元无关, 因此

$$2\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\geqslant 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$$

定理 6.8 (赫尔德 (Hölder) 不等式)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 p 次方可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 q 次方可积, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right|\leqslant\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}\cdot\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q},$$

其中 $p>1,\ \dfrac1p+\dfrac1q=1$.

证明 设 $A=\dfrac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}}$, $B=\dfrac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}}$, 利用 Young 不等式, 得

$$\frac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}}\cdot\frac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}}\leqslant\frac1p\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}+\frac1q\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q\,dx},$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x)||g(x)|\leqslant&\frac1p\frac{|f(x)|^p}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1-\frac1p}}\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}\\&+\frac1q\frac{|g(x)|^q}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1-\frac1q}}\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}\\=&\frac1p|f(x)|^p\frac{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1q}}+\frac1q|g(x)|^q\frac{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1p}}\end{aligned}$$

对上式两边在 $[a,b]$ 上关于 x 积分, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\leqslant&\frac1p\int_a^b |f(x)|^p\,dx\frac{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1q}}\\&+\frac1q\int_a^b |g(x)|^q\,dx\frac{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1p}}\\=&\left(\frac1p+\frac1q\right)\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac1p}\cdot\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac1q}\end{aligned}$$

又由 $\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$, 命题得证

定理 6.9 (Young 不等式)

设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导且严格单调增加, $f(0)=0, a, b>0$, 则有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{6.6}$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 而等号当且仅当 $b=f(a)$ 时成立.

证明 [36] 将 (6.6) 右边的两个积分之和记为 I. 利用 $g(f(x))\equiv x$, 对其中第二个积分作变量代换 $y=f(x)$, 即 $x=g(y)$, 然后分部积分得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{g(b)} x\,\mathrm{d}f(x) \\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + xf(x)\Big|_0^{g(b)} - \int_0^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= bg(b) - \int_0^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中利用了 $f(g(b))=b$. 如果 $a=g(b)$, 也就是 $b=f(a)$, 则已经得到 (6.6) 中成立等号的情况.

在 $a<g(b)$ 时, 对于 (6.7) 中的积分利用 $f(x)$ 在区间 $[a,g(b)]$ 上严格单调增加, $f(x)\leqslant f(g(b))=b$, 就得到 $I>bg(b)-[g(b)-a]b=ab$. 在 $a>g(b)$ 时, 类似地可得到

$$I = bg(b) + \int_{g(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x > bg(b) + [a-g(b)]b = ab$$

定理 6.10 (切比雪夫 (Chebyshev) 不等式)

设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对 $x, y\in[a,b]$, 则

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0$$

即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\cdot f(y)g(y) \geqslant g(y)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + f(y)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得:

$$\begin{aligned} &(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b f(y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ \geqslant &\int_a^b g(y)\,\mathrm{d}y \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

将上式中 y 改为 x 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 6.11 (闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式)

设 $p>1$, 函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且 $\forall x\in[a,b]$, $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 而 $\forall y\in[c,d]$, $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则

$$\left(\int_c^d\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

简言之, (6.8) 式表示积分的范数小于等于范数的积分

证明 [13] 在定理的假设之下, 下面涉及的积分都是有意义的. 记

$$F(y)=\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^{p-1}.$$

q 为 p 的对偶数, 则

$$\begin{aligned}\int_c^d\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}y&=\int_c^d F(y)\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b F(y)|f(x,y)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d F(y)|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_a^b\left(\int_c^d|F(y)|^q\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_c^d|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\\&=\left(\int_c^d\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此立即可得 (6.8) 式.

6.1.5.2 积分的估值问题

例题 6.65 证明: $\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x>0$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x+\overbrace{\int_\pi^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x}^{t=2\pi-x}\\&=\int_0^{\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_\pi^{0}e^{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{\pi}e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}e^{\cos x}\,\mathrm{d}(\sin x)\\&=2\sin xe^{\cos x}\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x\\&>0\end{aligned}$$

例题 6.66 证明不等式

$$\frac{1}{200}<\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{100}$$

证明 一方面

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x>\int_0^{1}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{101}\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{200}$$

另一方面

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{100}\int_0^{100}e^{-x}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{100}$$

证毕

例题 6.67 设 $a>0$, 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^a}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)+(\sin t-\cos t)(1+x^a)}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\left(1-\frac{\pi}{2x}\right)^a-1\right)x^a}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x \\
&> 0
\end{aligned}$$

例题 6.68 证明: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}} > 1$

解 *(by 向禹)*

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}} &= \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}}_{t=-x} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\right)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}}\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

例题 6.69 试证:

$$\left|\int_a^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}, \quad a>1$$

证明 法 1: 由于

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} d\cos x^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\cos x^2\Big|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \cos x^2 d\frac{1}{x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos a^2}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right],
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\cos a^2}{a}\right| + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&\leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

法 2: 对任何 $A>a$, 根据积分第二中值定理, 存在 $\xi\in[a,A]$, 使得

$$\int_a^A \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_a^A \frac{1}{2x}\cdot 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_a^{\xi} 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\cos a^2-\cos\xi^2}{2a}.$$

从而

$$\left|\int_a^A \sin x^2\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}, \forall A>a.$$

因此

$$\left|\int_a^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a}.$$

例题 6.70 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4+2a\pi}\quad(a>0)$

证明 我们考虑

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sin 2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^a x+ax\tan^{a-1}x\sec^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=x\tan^a x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4+2a\pi}$$

✍ **练习 6.9** 证明:

$$I(n)=\int_0^{\pi/2}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\mathrm{d}t<\frac{\pi^2n^2}{4},\ n\geqslant 2.$$

证明 $n=1$ 时直接验证不等式成立. $n\geqslant 2$ 时, 首先注意到如下不等式:

$$\begin{aligned}|\sin nt|\leqslant n\sin t,&\quad\forall t\in[0,\pi/2],\\\sin t\geqslant\frac{2t}{\pi},&\quad\forall t\in[0,\pi/2].\end{aligned}$$

故对任意 $\delta\in(0,\pi/2)$,

$$I_1(n)=\int_0^{\delta}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<n^4\int_0^{\delta}t\,dt=\frac{n^4\delta^2}{2},$$

$$I_2(n)=\int_{\delta}^{\pi/2}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<\frac{\pi^4}{16}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{dt}{t^3}=\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

因此

$$I(n)=I_1(n)+I_2(n)<\frac{n^4\delta^2}{2}+\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

易知上式右边在 $\delta=\frac{\pi}{2n}$ 处到达最小值 $\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}$, 从而

$$I(n)<\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{\pi^2}{8},n\geqslant 2.$$

更为精细的估计[57]

$$n^2\ln 2<I(n)=\int_0^{\pi/2}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\mathrm{d}t<\frac{17}{24}n^3$$

✍ **练习 6.10** 当 n 为正整数时，证明:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|\mathrm{d}t<\frac{2+\ln n}{2}$$

证明

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n
\end{aligned}
$$

欲证题中不等式，只需说明

$$2-\pi+2\ln 2+2\ln n<\frac{\pi^2}{2}\ln n$$

当 $n>1$ 时有：

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n-\frac{2+\ln n}{2}\\
=&\frac{1}{\pi^2}\left[\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)\ln n+2+\ln 4-\pi\right]\\
<&\frac{1}{\pi^2}\left[-2\ln n+2+\ln 4-\pi\right]<0
\end{aligned}
$$

即

$$1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n<\frac{2+\ln n}{2}$$

如果 $n=1$，在前面式子中有

$$I\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}\right)=1+\frac{3-\pi}{\pi^2}<1$$

例题 6.71 试证:

$$\frac{16}{9}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x<\frac{418}{225}$$

证明 右边 (by tian27546)：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x&\leqslant\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2\,\mathrm{d}x}\\
&=\sqrt{\pi\ln 2\times\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\approx 1.849<\frac{418}{225}\approx 1.8577
\end{aligned}
$$

现在来证明左边更强的式子 (by Hansschwarzkopf)

注意到 $f(u)=e^u$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格凸函数和

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{e},$$

得到

$$\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x>\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi^2}{2e}\approx 1.81541228>\frac{16}{9}.$$

例题 6.72 (中科院, 2018) 证明积分不等式:

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

证明 (by Hansschwarzkopf) 注意到

$$x^2-x+25=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{99}{4}>\frac{99}{4},a.e.x\in[0,1],$$

从而

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

另一方面, 分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}&=\frac{(x-1)e^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{5}+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}$, $g(x)=(x-1)e^x$, 则

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+\frac{97}{4}}{\sqrt{(x^2-x+25)^5}}>0,\forall x\in[0,1],\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,g'(x)=xe^x,$$

因此 f,g 在 $[0,1]$ 上严格递增. 根据 Chebyshev 积分不等式,

$$\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

故

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}>\frac{1}{5}.$$

最后得到

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

例题 6.73 (MSE, 909637) 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{-x}\,\mathrm{d}x<2.$

证明 (by Olivier Oloa)[58]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^6 x^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_6^\infty x^{-x}\,\mathrm{d}x\\&<\int_0^6 x^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_6^\infty 6^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^6 x^{-x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{466565\log 6}\\&=\int_0^6 x^{-x}\,\mathrm{d}x+0.000011962\ldots\\&=1.99544\ldots+0.000011962\ldots\\&<2.\end{aligned}$$

例题 6.74 (知乎, 478027453) 设 $\forall a,b\in\mathbb{R}$, 证明: $\displaystyle\int_a^b\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x<3.$

证明 (by ptr)[59]. 当 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$ 时

$$\left|\int_a^b\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|<\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=1$$

当 $1 \leqslant a \leqslant b$ 时,

$$\left|\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\int_{a+\frac{1}{a}}^{b+\frac{1}{b}} \sin(x) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| < 3$$

当 $a \leqslant 1 \leqslant b$ 时, 把前述放缩中的估计加强为

$$\left|\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| < \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$$

再拼接即可。例如考虑积分在 [0,1] 内的各同号区间上积分绝对值从右至左递减，故

$$\int_{x_2}^{x_1} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x < \int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x < \int_{x_1}^{1} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

其中 $x_1 + \dfrac{1}{x_1} = \pi, x_2 + \dfrac{1}{x_2} = 2\pi, 0 < x_2 < x_1 < 1.$

当 $a \geqslant b$ 时

$$\left|\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^a \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| < 3$$

综上 $\displaystyle\int_a^b \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x < 3$

例题 6.75 设 $x \leqslant 1$ 且是实数，求证

$$I(x) = \int_0^x \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \mathrm{d}t \geqslant e^{x-1}$$

其中 $\lfloor t\rfloor$ 表示取整函数

证明 设 $m < x < m+1$, 则有

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \mathrm{d}t + \cdots + \int_{m-1}^{m} \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \mathrm{d}t + \int_m^x \frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!}(x-m)$$

显然有

$$I'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(x-m)$$

想减得

$$I'(x) - I(x) = \frac{x^{m-1}}{m!}(x-m)(m+1-x)$$

显然 $m < x < m+1$, 有 $I'(x) - I(x) > 0$, 故令

$$G(x) = \ln(I(x)) \Longrightarrow G'(x) > 1$$

故由中值定理我们有

$$G(x) = G(m) + (x-m)G'(\xi) > G(m) + x - m$$

由于

$$I(m) \geqslant e^{m-1} \Longrightarrow G(m) \geqslant m-1$$

所以

$$G(x) > x-1 \Longrightarrow I(x) > e^{x-1}$$

其中我们用到了

$$I(m) \geqslant e^{m-1}$$

即证明

$$\sum_{x=0}^{m-1}\frac{m^x}{x!}\geqslant e^{m-1}$$

显然利用

$$\sum_{x=0}^{m-1}\frac{m^x}{x!}=e^m-\frac{e^m}{(m-1)!}\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t$$

则我们需要证明

$$\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t\leqslant(m-1)!\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

假设 $m=k$ 成立，利用分部积分有

$$k^k e^{-k}+\int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t\leqslant k!\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

注意到

$$\int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t\leqslant\max_{k\leqslant t\leqslant k+1}e^{-t}t^k=e^{-k}k^k$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t&=\int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t+\int_0^{k} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t\\&\leqslant k^k e^{-k}+\int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t\leqslant k!\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

6.1.5.3 积分不等式的证明问题

积分不等式的证明思路

- 定积分定义
- 拼凑法：一元二次方程根的判别式
- 导数：构造辅助函数
- 微分中值定理：例6.97, 练习 6.14
- 柯西不等式：例6.88
- 分区间拆分：例6.117, 例6.118
- 缩放积分区间：例6.116, 例6.87
- 重积分换序：例6.86, 例6.89
- 凹凸性：例6.106, 例6.113
- 待定系数法：例??, 例6.99, 例6.13 例6.93, 例6.102
- 分区间构造函数：例6.105, 例6.109
- 几何直观：例6.114
- 变分法

“拼凑法”的常见思路[60] 大致有如下几种

- ‘‘拼凑" 转化为判别式 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$
- ‘‘拼凑" $(f(x)-m)(M-f(x))>0$
- ‘‘拼凑" $\int_0^1(a+b+\cdots)^{2n}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$, $\int_0^1(a-b-\cdots)^{2n}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ 这种式子
- ‘‘拼凑" Cauchy-Schwarz 不等式

例题 6.76 (MSE,786563) 求最小的 k 使得

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant k\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

对所有满足 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$ 的可积函数都成立.

证明 注意到

$$(2-f(x))(f(x)-1)\geqslant 0$$

而

$$\int_0^1 (2-f(x))(f(x)-1)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2 - \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

只需保证

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2 \leqslant k\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

即

$$-k\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2 \leqslant 0$$

此时

$$\Delta = 9 - 8k \leqslant 0 \Rightarrow k \geqslant \frac{9}{8}$$

例题 6.77 设 $f \in [0,1]$, 若有 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x$. 求 $f(x)$

证明 法 I(by 欧阳) 首先有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{d}t^2 = \int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故 (凑完全平方公式)

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 \left(f(x^2)-x\right)^2\mathrm{d}x \Longrightarrow f(x^2) = x \Longleftrightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

法 II(by 啦啊啦)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x^2=t} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

故

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\right)^2 \leqslant 0$$

当且仅当 $f(x) = \sqrt{x}$ 取 “=”

例题 6.78 (U436) 设 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 且

$$\int_0^1 xf(x)(x^2 + f^2(x))\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{5}$$

求证:

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{16}{45}$$

证明 注意到

$$f(x)(x^2 + f^2(x)) = x^3 f(x) + xf^3(x)$$

以及

$$\left(x^2 + \frac{1}{3}f^2(x)\right)^2 = \frac{1}{9}f^4(x) + \frac{2}{3}x^2 f^2(x) + x^4$$

立即联想到

$$\int_0^1 (a-b)^4\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

从而,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}f(x)-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^4\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left(\left(\frac{1}{9}f^4(x)+\frac{2}{3}x^2f^2(x)+x^4\right)-\frac{4}{9}\left(x^3f(x)+xf^3(x)\right)-\frac{8}{9}x^4\right)\mathrm{d}x\geqslant 0
\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{8}{9}\int_0^1x^4\,\mathrm{d}x+\frac{4}{9}\int_0^1xf(x)(x^2+f^2(x))\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{16}{45}.$$

例题 6.79 (CMC,2021) 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(1)=f(0)=0$, 且满足

$$\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-8\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

证明 由题意可得

$$\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}-\int_0^1xf'(x)\,\mathrm{d}x,\quad\int_0^1f'(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

于是就有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-8\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\\
=&\int_0^1[f'^2(x)+8xf'(x)+bf'(x)]\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0,\quad b\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

由此形式立马想到拼凑, 如: $\int_0^1(a+b+\cdots)^{2n}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ 这种式子.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1(f'(x)+ax+b)^2\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left(f'^2(x)+2axf'(x)+2bf'(x)+a^2x^2+2abx+b^2\right)\mathrm{d}x\geqslant 0
\end{aligned}$$

比较系数可得 $a=4$, 由于 $b\in\mathbb{R}$, 于是令

$$\int_0^1(16x^2+8bx+b^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\Rightarrow b=-2$$

综上可知 $\int_0^1(f'(x)+4x-2)^2\,\mathrm{d}x=0$ 恒成立, 因此,

$$f'(x)=2-4x\Rightarrow f(x)=2x-2x^2+C.$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$. 因此, $f(x)=2x-2x^2$.

例题 6.80 (MSE,2086301)[61] 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 求证:

$$\int_0^1\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{15}{4}\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1x^4f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 法 I. 令

$$A=\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x,\quad B=\int_0^1x^4f(x)\,\mathrm{d}x,\quad C=\int_0^1f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

$\forall a,b\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\int_0^1(a+bx^4-f(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

即

$$a^2+\frac{2ab}{5}+\frac{1}{9}b^2-2aA-2bB+C\geqslant 0.$$

变形得

$$C\geqslant 2aA+2bB-a^2-\frac{2ab}{5}-\frac{1}{9}b^2=f(a,b).\tag{6.9}$$

显然 $\max\limits_{a,b\in R} f(a,b) =$ 极大值$f(a,b)$, 极值条件

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2A - 2a - \frac{2b}{5} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 2B - \frac{2}{5}a - \frac{2}{9}b = 0$$

于是解得

$$a = \frac{25A - 45B}{16}, \quad b = \frac{-45A + 225B}{16}.$$

由于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 恒有 (6.9) 成立, 为使系数最优

$$C \geqslant \max_{a,b\in\mathbb{R}} f(a,b) = \frac{25}{16}A^2 - \frac{45}{8}AB + \frac{225}{16}B^2 = \left(\frac{5}{4}A - \frac{15}{4}B\right)^2 + \frac{15}{4}AB \geqslant \frac{15}{4}AB.$$

不等式取等条件为:

$$A = 3B \Rightarrow a = \frac{15}{8}B, b = \frac{45}{8}B \quad 以及 \quad f(x) = a + bx^4$$

当且仅当 $f(x) = c(1+3x^4), c \in \mathbb{R}$ 时等号成立.

法 II. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 (a+bx^4)^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (a+bx^4) f(x) \mathrm{d}x\right)^2$$

即

$$\sqrt{\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x} \geqslant \left(\frac{45}{45a^2 + 18ab + 5b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + b\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x\right)$$

再利用均值

$$a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + b\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\sqrt{ab\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x}$$

平方即有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x &\geqslant \frac{180ab}{45a^2 + 18ab + 5b^2} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{180}{45\frac{a}{b} + 5\frac{b}{a} + 18} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{15}{4} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

不等式取等条件为:

$$45\frac{a}{b} = 5\frac{b}{a}, \quad a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = b\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x, \quad f(x) = c(a+bx^4)$$

当且仅当: $f(x) = c(1+3x^4), c \in \mathbb{R}$ 时等号成立.

例题 6.81 设 $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x = 0$, 求证:

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)[\lambda + f^2(x)]\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 [\lambda + f^2(x)]^2 \mathrm{d}x$$

记 $I_n = \int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$, 显然有 $I_2 \geqslant I_1^2$, 代入

$$\lambda^2 I_1^2 + 2\lambda I_1 I_3 + I_3^2 \leqslant I_2 \cdot (\lambda^2 + 2\lambda I_2 + I_4) \geqslant 0$$

变形, 并代入 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x = 0$, 得到

$$(I_2 - I_1^2)\lambda^2 + 2I_2^2\lambda + I_2 I_4 \geqslant 0$$

上式对 $\forall\lambda \in R$ 恒成立, 故判别式 $\Delta \leqslant 0$, 即

$$\Delta = 4I_2^4 - 4(I_2 - I_1^2)I_2 I_4 \leqslant 0 \Rightarrow I_4 \geqslant \frac{I_2^3}{I_2 - I_1^2}$$

于是本题只需证明

$$\frac{I_2^3}{I_2 - I_1^2} \geqslant \frac{27}{4} I_1^4$$

由均值不等式

$$(I_2 - I_1^2)I_1^4 = \frac{1}{2}(2I_2 - 2I_1^2) \cdot I_1^2 \cdot I_1^2 \leqslant \frac{4}{27} I_2^3$$

从而,

$$\int_0^1 f^4(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^4.$$

本题的推广[1] 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $n\in\mathbb{N}$, 求证:

$$\frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n)^{2n}}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{4n} \leqslant \int_0^1 (f(x))^{(4n)}\,\mathrm{d}x.$$

注 由于只有连续的条件, 大概率为拼凑, 于是联想可能相关的 $(a-b)^4$, 判别式 $\Delta > 0$, Cauchy 不等式.

练习 6.11 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^5(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^6}{\int_0^1 f^6(x)\,\mathrm{d}x}$ 的最大值.

例题 6.82 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续可导, $f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{2})=1$, 求证:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)\cdot\sin x + f'(x)|dx \geqslant 1$$

证明 设 $F(x) = e^{-\cos x}f(x)$, 则

$$F'(x) = e^{-\cos x}\left(f(x)\sin x + f'(x)\right) \Rightarrow F'(x)e^{\cos x} = f(x)\cdot\sin x + f'(x)$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)\cdot\sin x + f'(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{\cos x}F'(x)|dx$$

注意到 $e^{\cos x} \geqslant 1, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{\cos x}F'(x)|dx \geqslant \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x)dx\right| = 1$$

例题 6.83 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且满足 $\displaystyle\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, 求证:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}M \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}M$$

证明 即证

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{M}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{M}$, $x = a+(b-a)x$, 从而有 $\max\limits_{x\in[a,b]} g(x) = 1$, 以及

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_0^1 (b-a)g\left[a+(b-a)t\right]\mathrm{d}t = \int_0^1 g\left[a+(b-a)t\right]\mathrm{d}t$$

[1]http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/AMM/AMM11861.pdf

再令 $G(t)=g\left[a+(b-a)t\right]$, 且 $\int_0^1 G^3(t)\,\mathrm{d}t=0$ 于是, 欲证的不等式变为:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

又 $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left[G(t)-G^3(t)\right]\mathrm{d}t$, 于是令 $G(t)=y\in[-1,1]$

对于函数 $H(y)=y-y^3$ 有 $H'(y)=1-3y^2$, 令 $H'(y)=0\Longrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而

在 $[-1,1]$ 上, $-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant y-y^3\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 于是

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\int_0^1\left[G(t)-G^3(t)\right]\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

从而

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

即成立

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

综上，原不等式得证。

例题 6.84 (Opial 不等式) 设 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上绝对连续, 则

$$\int_0^a|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}a\int_0^a[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

若 $f(0)=0$, 当且仅当 $f(x)=cx$ 时取等号.

证明 当 $f(0)=0$ 时, 有 $|f(x)|=|\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x|$.

$$\begin{aligned}\int_0^a|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^a|f'(x)|\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\iint_{0\leqslant t\leqslant x\leqslant a}|f'(x)||f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^a|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\quad(\text{Cauchy-Schwarz 不等式})\end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $f'(x)\equiv c$(常数) 时取等号.

例题 6.85 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

并且当且仅当 $f(x)\equiv cx$ 时等号成立, 其中 c 是常数.

证明 (by 向禹)

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^x|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从柯西不等式的取等条件来看, 等号成立当且仅当 $f'(x)\equiv c$ 恒成立, 又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)\equiv cx$.

例题 6.86 (Poincare 不等式) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数, 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

解 *(by 向禹)*

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left(\int_a^x \mathrm{d}t \int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_a^b \left((x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

例题 6.87 设函数 $f(x)>0$, 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

证明: $\forall\, a,b,a<b$, 有 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}$.

解 由于 $\forall a,b(a<b)$, 有

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant b-a$$

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t = \int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}t + \int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}t = 2-e^{a-x}-e^{x-b}$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\mathrm{d}x \leqslant b-a \tag{6.10}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \quad 和 \quad \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

把以上两个式子入 (6.10), 即得结论。

例题 6.88 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 因为

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$f^2(x) = \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.89 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f(1)=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 因为

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

又

$$f(x)=f(x)-f(1)=-\int_x^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.90 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明: 当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11$$

并给出取等号的条件。

证明 由条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

利用离散柯西不等式, 即 $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^n a_i^2\sum\limits_{i=1}^n b_i^2$, 等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立. 有

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} &= 1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)} \\ &\leqslant \sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)}=11 \end{aligned}$$

且等号成立的充分必要条件是:

$$x=\frac{1}{2}(x+27)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\,,\quad \text{即 } x=9$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11$$

特别当 $x=9$ 时, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

根据周期性, 以及 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 有

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=11\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=11$$

所以取等号的充分必要条件是 $x=9$

例题 6.91 设连续函数 $f,g:[0,1]\to[0,+\infty)$, 且 $f,\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 单调递增, 求证:

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

并说明右边系数 2 是最佳的.

证明 由 Chebyshev 不等式有

$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{x}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t}$$

另外由 Cauchy-Schwarz 有

$$\left(\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t\right)\geqslant\left(\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{x^4}{4}$$

即

$$\frac{1}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{4}{x^4}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

所以有

$$\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^x\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_t^1\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{4t^2f(t)}{g(t)}\left(\int_t^1\frac{\mathrm{d}x}{x^3}\right)\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant 2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

另外一方面: 我们令 $f(t)=1,g(t)=t+\varepsilon,\varepsilon>0$ 则

$$\int_0^1\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\frac{1}{2}x^2+\varepsilon x}\,\mathrm{d}x=2\ln(1+2\varepsilon)-2\ln 2-2\ln\varepsilon$$

$$\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\varepsilon}=\ln(1+\varepsilon)-\ln\varepsilon$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\ln(1+2\varepsilon)-2\ln 2-2\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)-\ln\varepsilon}=2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\ln\varepsilon}+\frac{\ln 2}{\ln\varepsilon}+1}{-\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln\varepsilon}+1}=2$$

例题 6.92 $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的连续可导函数, $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

解 法 I (by ytdwdw). 利用 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} &= \left[\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right)^2\right]^{\frac12} = \left[\int_0^1\left(\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac12}\\ &\leqslant \int_0^1\left(\int_0^1 |f'(xt)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\frac{\int_0^t |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}{t^2}\right)^{\frac12}\mathrm{d}t\\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

法 II (by 西西). 注意到

$$f^2(x) = \int_0^x f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}LHS &= 2\int_0^1\frac{1}{x^2}\int_0^x f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{换序}} 2\int_0^1 f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\int_t^1\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f'(t)f(t)\frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &< 2\int_0^1 f'(t)f(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 2\sqrt{\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1\frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

平方显然!

注 本题的套路: 建立 f 与 f' 的不等式关系:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

若题中涉及 f^2 将上式 f 换 f^2 即可, 也就是说 f 是可以表示任意复杂的东西, 从而转换重积分交换次序进行柯闵等即可

例题 6.93 (西西) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可微, 且 $f(0)=0, m<n\in\mathbb{N}^+$. 证明:

$$\int_0^1\frac{|f^n(x)|}{x^m}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{n^m}{(m-1)^m}\int_0^1 |f'(t)|^m|f(t)|^{n-m}\,\mathrm{d}t$$

证明 (by 西西) 注意到 (不妨设 $f>0$)

$$|f(x)|^n = n\int_0^x f'(t)f^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{f^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x &= n\int_0^1\left(\frac{1}{x^m}\int_0^x f'(t)f^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{换序}} n\int_0^1\left(f'(t)f^{n-1}(t)\int_t^1 x^{-m}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ &= n\int_0^1 f'(t)f^{n-1}(t)\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1-t^{m-1}}{t^{m-1}}\,\mathrm{d}t\\ &< \frac{n}{m-1}\int_0^1 f'(t)f^{n-1}(t)\cdot\frac{1}{t^{m-1}}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{Holder}}{\leqslant} \frac{n}{m-1}\left(\int_0^1\frac{f^n(t)}{t^m}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_0^1 f'^m(t)f^{n-m}(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac1m}\end{aligned}$$

从而可得

$$\int_0^1 \frac{|f^n(x)|}{x^m}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{n^m}{(m-1)^m}\int_0^1 |f'(t)|^m |f(t)|^{n-m}\,\mathrm{d}t$$

例题 6.94 (MSE,592693) 若存在 $a \in \mathbb{N}^+$, 使得连续函数 $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, 满足 $f(f(x)) = x^a, \forall x \in [0,+\infty)$, 求证:

$$\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a+3}$$

证明 因为 $f(f(x)) = x^a$, 则 $f(x)$ 严格单调递增, 否则, 由连续性知, 若存在 $u \neq v$, 使得 $f(u) = f(v)$, 那么

$$u^a = f(f(u)) = f(f(v)) = v^a \Rightarrow u = v \Rightarrow \text{矛盾.}$$

故 $f(x)$ 的反函数存在.

$$f(f(x)) = x^a \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x^a)$$

设 $f(0) = b$, 则 $f(f(0)) = 0^a = 0 \Rightarrow f(b) = 0$, 将 b 代入原方程

$$f(f(b)) = b^a \Rightarrow f(0) = b^a \Rightarrow b^a = b \Rightarrow b = 0\text{或}b = 1$$

若 $f(0) = 1$, 代入原方程得 $f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$. 这与 $f(x)$ 单调递增矛盾. 故 $f(0) = 0$. 由 Young 不等式

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1$$

注意到

$$\int_0^1 ax^{a-1}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^{a-1}f^{-1}(x^a)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x^a=t} \int_0^1 f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 ax^{a-1}f^{-1}(x)\mathrm{d}x \geqslant 1$$

Cauchy-Schwarz 不等式

$$1 = \left(\int_0^1 f(x)(ax^{a-1}+1)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 (ax^{a-1}+1)^2\,\mathrm{d}x$$

化简得

$$\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a+3}$$

利用微分中值定理来证明积分不等式的常见思路大致有如下几种

1. Taylor 公式. 技巧:"二分法"
   - 在中点处展开分别带值
   - 在极值点处展开, 则有 $f'(x_0) = 0$
   - 在任意点处展开
2. Lagrange 中值定理
3. 插值法, 如: 例题4.93

例题 6.95 [2] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant 4\max|f(x)|$$

证明 若 $f(x) \equiv 0$, 结论显然成立. 否则, $\exists x_0 \in (0,1)$, s.t $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)| = |f(x_0)| > 0$, 由拉格朗日中值定理, 有

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0,x_0)$$

[2] http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=22541

$$\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(x_0,1)$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x &\geqslant \int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\ &=|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0(1-x_0)}\\ &\geqslant 4|f(x_0)|=4\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\end{aligned}$$

例题 6.96 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: 对于任意的 $x\in[0,1]$, 有

$$\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

证明 令 $u=\dfrac{t}{x}$, 并记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$, 则有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\xlongequal{u=\frac{t}{x}} x\left|\int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u\right|\\ &=x\left|\int_0^1[f(ux)-f(u)]\,\mathrm{d}u\right|\\ &\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}} x\left|\int_0^1 uf'(\xi)(x-1)\,\mathrm{d}u\right|\\ &\leqslant Mx(1-x)\int_0^1 u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}x(1-x)\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\end{aligned}$$

例题 6.97 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0, |f'(x)|\leqslant M$, 证明:

$$\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2.$$

证明

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

用 Taylor 公式二阶展开,

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)\mathrm{d}x| &=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(a)+f'(\xi)(x-a)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|x-a|\mathrm{d}x=M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x=M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)\end{aligned}$$

同理可得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)$$

上面两个式子相加得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M$$

例题 6.98 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 证明:

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据已知条件, 我们考虑在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处分段.

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

注意到 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0\Rightarrow F_1(x)=\left|\int_x^{\frac{a+b}{2}}f'(t)\,\mathrm{d}t\right|=|f(x)|,\ x\in[a,\frac{a+b}{2}]$. 显然

$$F_1(x)\leqslant\int_x^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\Rightarrow F_1'(x)\leqslant-|f'(x)|$$

于是就有,

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}F_1(x)|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant-\int_a^{\frac{a+b}{2}}F_1(x)F_1'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}F_1^2(x)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}=\frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2,\end{aligned}$$

类似地, 有 $F_2(x)=\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|=|f(x)|,\ x\in[\frac{a+b}{2},b]$. 于是

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}F_2^2(x)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\\&\overset{\text{Cauchy}}{\leqslant}\frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

✍ **练习 6.12** [36] 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)|\leqslant M$. 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 对 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

(1) 证明: $|F(x)|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2$.

(2) 在增加条件 $f(a)=f(b)=0$ 时证明: $|F(x)|\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2$.

证明 (1) (二分法). 设 $|F(x_0)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)|$, 则 $F'(x_0)=f(x_0)=0$

- 若 $a\leqslant x_0\leqslant\frac{a+b}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}|F(x_0)|&=\left|\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{x_0}(f(x)-f(x_0))\,\mathrm{d}x\right|\\&\xlongequal{\text{Lagrange}}\left|\int_a^{x_0}f'(\xi)(x-x_0)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant M\int_a^{x_0}(x_0-x)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(x_0-a)^2\leqslant\frac{M}{2}(\tfrac{a+b}{2}-a)^2=\frac{M}{8}(b-a)^2.\end{aligned}$$

- 若 $\frac{a+b}{2}\leqslant x_0\leqslant b$, 则类似的可得

$$|F(x_0)|\leqslant\frac{M}{2}(b-x_0)^2\leqslant\frac{M}{2}(b-\tfrac{a+b}{2})^2=\frac{M}{8}(b-a)^2.$$

(2) 法 I(二分法). 设 $|F(x_0)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)|$, 则 $F'(x_0)=f(x_0)=0$.

- 若 $a\leqslant x_0\leqslant\frac{a+b}{2}$. 继续从中点处分段

$$\begin{aligned}|F(x_0)|&=\left|\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\frac{a+x_0}{2}}\big(f(x)-f(a)\big)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+x_0}{2}}^{x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}x\right|\\&\xlongequal{\text{Lagrange}}\left|\underbrace{\int_a^{\frac{a+x_0}{2}}f'(\xi_1)(x-a)\,\mathrm{d}x}_{\xi_1\in\left(a,\frac{a+x_0}{2}\right)}+\underbrace{\int_{\frac{a+x_0}{2}}^{x_0}f'(\xi_2)(x-x_0)\,\mathrm{d}x}_{\xi_2\in\left(\frac{a+x_0}{2},x_0\right)}\right|\\&\leqslant M\int_a^{\frac{a+x_0}{2}}|x-a|\,\mathrm{d}x+M\int_{\frac{a+x_0}{2}}^{x_0}|x-x_0|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{4}(x_0-a)^2 \leqslant \frac{M}{4}(\tfrac{a+b}{2}-a)^2 = \frac{M}{16}(b-a)^2$$

- 若 $\frac{a+b}{2} \leqslant x_0 \leqslant b$, 则类似的可得

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{M}{4}(b-\tfrac{a+b}{2})^2 = \frac{M}{16}(b-a)^2$$

从而得证.

法 II. 设 $|F(x_0)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |F(x)|$, 则 $F'(x_0) = f(x_0) = 0$. 且

- 若 $a \leqslant x_0 \leqslant \frac{a+b}{2}$. 利用分部积分

$$\begin{aligned} |F(x_0)| &= \left|\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}(x-m)\right| \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \left|(x-m)f(x)\Big|_a^{x_0} - \int_a^{x_0}(x-m)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{x_0}(x-m)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant M\left|\int_a^{x_0}(x-m)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_a^{x_0}|x-m|\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.11}$$

又令 $G(x_0) = M\int_a^{x_0}|x-m|\,\mathrm{d}x$, 由于 (6.11) 对 $m\in\mathbb{R}$ 恒成立, 即

$$|F(x_0)| \leqslant \min G(x_0)$$

分类讨论 m 可知, 当 $m\in(a,x_0)$ 时, $G(x_0)$ 取得最小值, 即

$$\begin{aligned} G(x_0) &= M\int_a^{x_0}|x-m|\,\mathrm{d}x = M\int_a^m(m-x)\,\mathrm{d}x + M\int_m^{x_0}(x-m)\,\mathrm{d}x \\ &= M\left(m-\frac{1}{2}(a+x_0)\right)^2 + \frac{M}{4}(x_0-a)^2 \geqslant \frac{M}{4}(x_0-a)^2 \end{aligned}$$

于是就有,

$$|F(x_0)| \leqslant \min G(x_0) = \frac{M}{4}(x_0-a)^2 \leqslant \frac{M}{4}(\tfrac{a+b}{2}-a)^2 = \frac{M}{16}(b-a)^2$$

- 若 $\frac{a+b}{2} \leqslant x_0 \leqslant b$, 类似的可证

$$|F(x_0)| \leqslant \min G(x_0) = \frac{M}{4}(b-x_0)^2 \leqslant \frac{M}{4}(b-\tfrac{a+b}{2})^2 = \frac{M}{16}(b-a)^2$$

从而得证.

注 一开始我用的 $x+m$, 后来在我去绝对值时发现没有 $x-m$ 更方便讨论, 同时也不失一般性.

练习 6.13 (Favard 不等式) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负凹函数, 则

$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$$

证明 (by 西西)[3] 不妨设 $f(0)=f(1)=0$, $f\in C^2[0,1]$, 则 $f''(x)<0$. 由积分余项的 Tayor 公式,

$$f(x) = f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

代入 $f(1)=0$ 解得,

$$f'(0) = -\int_0^1 (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

从而设 $f(x) = -\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 Green 函数

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1 \\ x(1-t), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

由 Minkowski 不等式

$$\left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)(-f''(t))\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

[3]西西的大学数学竞赛搞笑秘密献给浪哥

$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 K^p(x,t)(-f''(t))^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t$$
$$= (1+p)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 t(1-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$$

对于一般情况, 用光滑凹函数逼近 f 即可.

- 令 $p\to+\infty$ 可得不等式 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \leqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

练习 6.14 (MSE, 3783034) 设 $f\in C^3[0,1]$ 且满足 $f(0)=f'(0)=f(1)=0$ 以及 $|f'''(x)|\leqslant 1$. 证明:

$$\left|30240\int_0^1 x(1-x)f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 1.$$

证明 (by MSE)[62]. 注意到 $f(0)=f'(0)=0$, 则由积分余项的 Tayor 公式,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.12}$$

代入 $f(1)=0$

$$0 = f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t$$

上式同乘 x^2

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-t)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x x^2(1-t)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^1 x^2(1-t)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.13}$$

结合 (6.12) 和 (6.13) 可得

$$f(x) = -\int_0^1 K(x,t) f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

其中

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x^2(1-t)^2-(x-t)^2}{2} & t\leqslant x\\ \dfrac{x^2(1-t)^2}{2} & x\leqslant t\end{cases}$$

显然有 $K(x,t)\geqslant 0\,(0\leqslant x,t\leqslant 1)$. 注意到

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x(1-x)f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)(f(x))^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)K(x,t)K(x,s)f^{(3)}(t)f^{(3)}(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\int_0^1 H(t,s)f^{(3)}(t)f^{(3)}(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{6.14}$$

其中

$$H(t,s)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)K(x,t)K(x,s)\,\mathrm{d}x$$

显然 $H(s,t)=H(t,s)\ (0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1)$, 我们得到

$$H(t,s)=\frac{1}{240}(s-1)^2t\left(s^4(t-2)+s^3(t+2)+s^2(1-4t)+st+(t-1)t^4\right)$$

这是由条件 $|f'''(x)|\leqslant 1$ 得到的, 再计算就可得证

$$|I|\leqslant\int_0^1\int_0^1 H(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=\frac{1}{30240}.$$

```
Integrate[(s-1)^2t(s^4(t-2)+s^3(t+2)+s^2(1-4t)+s t+(t-1)t^4)/240,{s,0,1},{t,0,1}]
```

例题 6.99 (2015CMC) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$.
求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

证明 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $f(0)=f(1)=0$, 故

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(0)=0$$

因此, 根据牛顿莱布尼茨公式, 得

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(C-\tfrac{1}{2}x^2\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

再根据 Cauchy 积分不等式, 得

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(C-\tfrac{1}{2}x^2\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_0^1\left(C-\tfrac{1}{2}x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}\Rightarrow C=\frac{1}{6}$$

由此可得

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f'(x)=A(1-3x^2)$ 积分并由 $f(0)=f(1)=0$. 即得

$$f(x)=Ax(1-x)(1+x)=A(x-x^3).$$

例题 6.100 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0\,,\quad\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$$

求证: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $|f(\xi)|\geqslant 4$.

证明 反证法. 若结论不真, 则 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<4$. 由题设知 $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}1=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1(x-\alpha)f(x)\,\mathrm{d}x=\left|\int_0^1(x-\alpha)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|(x-\alpha)f(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$< 4\int_0^1 |x-\alpha|\,\mathrm{d}x = F(\alpha) \tag{6.15}$$

于是, 我们只需证明 $\min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} F(\alpha) \leqslant 1$. 此时(6.15)式不成立.

法 I. (i) 当 $\alpha \in [0,1]$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x-\alpha|\,\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha (\alpha-x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 (x-\alpha)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}\end{aligned}$$

于是 $1 < \min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} F(\alpha) = F(\frac{1}{2}) = 1$ 显然矛盾！ 从而结论成立

(ii) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,

$$\int_0^1 |x-\alpha|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\alpha-x)\,\mathrm{d}x = a-\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$$

(iii) 当 $\alpha \leqslant 0$ 时,

$$\int_0^1 |x-\alpha|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-a \geqslant \frac{1}{2}$$

此时均不矛盾。

注：事实上 (i) 就已经证明了结论。

法 II. 利用定积分的几何意义, 我们可知：$\min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} F(\alpha) = F(\frac{1}{2}) = 1$

例题 6.101 (CMC,2021) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}, \quad \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 3$.

证明 法 I. 由题意

$$f'(\xi) = 3 \Rightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - k \Rightarrow F(x) = f(x) - kx$$

于是, 我们待定系数 $a, b \neq 0$

$$\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b - \frac{k}{6}(2a+3b) = \int_0^1 (ax+b)\big(f(x)-kx\big)\,\mathrm{d}x$$

利用分部积分法

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (ax+b)\big(f(x)-kx\big)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^1 \big(f(x)-kx\big)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\\ =&\underbrace{\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\big(f(x)-kx\big)\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\big(f'(x)-k\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

我们令

$$\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\big(f(x)-kx\big)\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a+b=0 \Rightarrow a=-2b\neq 0$$

又令

$$\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b - \frac{k}{6}(2a+3b) = 0 \xrightarrow{a=-2b} \frac{1}{6}b(k-3) = 0$$

由此可知, 当 $k=3$ 且 $a=-2b\neq 0$ 时, 恒有

$$\int_0^1 (x^2-x)(f'(x)-3)\,\mathrm{d}x = 0$$

根据积分中值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\xi(1-\xi)[3-f'(\xi)] = 0$, 即 $f'(\xi) = 3$.

法 II. 由题意

$$f'(\xi) = 3 \Rightarrow F_k'(\xi) = f'(\xi) - k \Rightarrow F_k(x) = f(x) - kx$$

由题意 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$, 我们有

$$\int_0^1 F_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (f(x)-kx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-k\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}-\frac{k}{2},$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} xF_k(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xF_k'(x)\,\mathrm{d}x=F_k(1)-\int_0^1 xF_k'(x)\,\mathrm{d}x$$

可得

$$\int_0^1 xF_k'(x)\,\mathrm{d}x=F_k(1)+\left(\frac{k}{2}-\frac{5}{2}\right) \tag{6.16}$$

由题意 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$, 我们有

$$\int_0^1 xF_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(f(x)-kx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 kx^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{k}{3}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{2}x^2F_k(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2F'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F_k(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 xF_k'(x)\,\mathrm{d}x$$

可得

$$\int_0^1 x^2F_k'(x)\,\mathrm{d}x=F_k(1)+\left(\frac{2k}{3}-3\right) \tag{6.17}$$

我们令

$$\frac{2k}{3}-3=\frac{k}{2}-\frac{5}{2}\Rightarrow k=3 \tag{6.18}$$

结合 (6.16),(6.17),(6.18) 可得

$$\int_0^1 x(1-x)F_3'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)\big(f(x)-3x\big)\,\mathrm{d}x=0$$

由于 $x(1-x)>0$, 那么必存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F_3'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=3$.

例题 6.102 设 $f(x)\in C$ 是实值函数, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

证明:

$$\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant n^2$$

证明 设多项式 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 满足

$$\int_0^1 x^{k-1}P(x)\,\mathrm{d}x=1\quad k=1,\cdots n$$

则可得

$$\int_0^1 x^{k-1}P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{k}+\frac{a_1}{k+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n-1}=1$$

于是有

$$\frac{a_0}{k}+\frac{a_1}{k+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n-1}-1\xlongequal{\text{通分}}\frac{H(k)}{k(k+1)\cdots(k+n-1)}=0$$

显然有 $H(1)=H(2)=\cdots H(n)=0$, 则可得

$$H(k)=C(k-1)\cdots(k-n)=\sum_{l=0}^{n-1}a_l\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{(k+l)}-k(k+1)\cdots(k+n-1)$$

比较 k^n 次项的系数可得 $C=-1$, 于是得到

$$H(k)=-(k-1)\cdots(k-n)=\sum_{l=0}^{n-1}a_l\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{(k+l)}-k(k+1)\cdots(k+n-1)$$

比较每一项的系数得到
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_k = n^2$$
又因为
$$\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^1 x^{k-1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = n^2,$$
由 Cauchy-Schwarz 不等式
$$\begin{aligned}\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \left(\int_0^1 P(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^1 x^{k-1} P(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = n^4\end{aligned}$$
因此,
$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{n^4}{\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x} = n^2.$$
注 代数的方法可参考：微信公众号《数学专业考研札记》好题集锦 005

例题 6.103 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 二阶连续可微, 并且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$
证明 法 I(待定多项式). 对任意 m, n(待定) 都有
$$\begin{aligned}\int_a^b (a_0 x + b_0) f'''(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x+m) &\xlongequal{\text{分部积分}} -\int_a^b f'(x)(x+m)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\big((x+m)^2+n\big) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} f'(x)\big((x+m)^2+n\big)\Big|_a^b}_{=0} + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\big((x+m)^2+n\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
即 $\begin{cases}(b+m)^2+n=0\\(a+m)^2+n=0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{2}(a+b)\\n=-\frac{1}{4}(b-a)^2\end{cases}$. 于是
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\big((x+m)^2+n\big)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}} \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$
法 II(K 值法).

例题 6.104 (AMM11981) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数, 且
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$
证明:
$$\int_0^1 |f'(x)|^3\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

证明 [4] 由 Hölder 不等式

$$\left|\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_0^1 |f'(x)|^3\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\int_0^1 |g(x)|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{3}} \tag{6.19}$$

由分部积分

$$\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g(x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x \to \text{具体值}$$

设 $g(x)$ 为多项式, 结合已知条件 $g'(x)$ 只能为 1 次多项式, 即 $g(x)$ 为 2 次多项式. 令 $g(x)=ax^2+bx+c$. 以及令 $g(x)f(x)\Big|_0^1=0$, 即得

$$g(0)=g(1)=0 \Rightarrow g(x)=ax(x-1) \Rightarrow g'(x)=a(2x-1)$$

于是,

$$\left|\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\int_0^1 g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |a|$$

以及,

$$\int_0^1 |g(x)|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = |a|\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = |a|B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)}|a| = \frac{3\pi}{128}|a|$$

代入(6.19) 并变形

$$\int_0^1 |f'(x)|^3\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\left|\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|^3}{\left(\int_0^1 |g(x)|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2} = \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

练习 6.15 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=1$, $f'(b)=0$, 求证:

$$\int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$$

证明 由 Cauchy-schwarz 不等式

$$\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \xrightarrow{\text{题意}} \text{与 } f \text{ 无关的常数}$$

由分部积分

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x &= g(x)f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} -g(a) + \underbrace{\int_a^b g''(x)f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0}\end{aligned}$$

设 $g(x)$ 是多项式, 只需令 $g''(x)=0$, 故 $g(x)$ 为一次多项式. 设 $g(x)=c_1x+c_0$,

$$\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{g^2(a)}{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{4}{b-a}$$

即

$$3c_1(b-a)(c_1a+c_0)^2 = 4\left[(c_1b+c_0)^3-(c_1a+c_0)^3\right]$$

化简得

$$((a+2b)c_1+3c_0)^2 = 0 \Rightarrow (a+2b)c_1 = -3c_0$$

于是取 $c_1=3$, $c_0=-a-2b$ 即可

例题 6.105 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 若成立 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[0,1]$.

[4]http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/AMM/AMM11981.pdf

证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 24\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 法 I(by MSE[5]). 由分部积分,

$$-2\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}(1-2x) = -F(1) - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

结合已知条件 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}x$, 故

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 [1+(1-x)^2]f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

令 $g(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x\in[0,\frac{1}{2}), \\ 1+(1-x)^2, & x\in[\frac{1}{2},1) \end{cases}$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+\lambda g(x))f(x)\,\mathrm{d}x$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 (1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= 1+\frac{13}{6}\lambda+\frac{283}{240}\lambda^2 = \frac{4}{849}+\frac{283}{240}\left(\lambda+\frac{260}{283}\right)^2\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{849}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

其中 $\frac{849}{4}$ 最佳, 当且仅当 $f(x) = 1-\frac{260}{283}g(x)$ 时取等成立.

法 II. 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

只需要存在 $K\neq 0$,

$$\int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = K\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

由分部积分,

$$\begin{aligned}-2\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}(C-2x) = (C-2x)F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-C)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (C-2)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-C)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-C)f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合已知条件 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\int_0^1 (C-2)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2+C-1)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (C-2x+x^2)f(x)\,\mathrm{d}x$$

于是, 令

$$g(x) = \begin{cases} x^2+C-1, & x\in[0,\frac{1}{2}) \\ C-2x+x^2, & x\in[\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

[5] https://math.stackexchange.com/questions/386656/how-prove-this-integral-inequality-int-01f2xdx-ge-24-left-int-01

由 *Cauchy-Schwarz* 不等式

$$\left(\int_0^1 (C-2)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = (C-2)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\leqslant \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

经计算可得,

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{240c^2-440c+203}{240}$$

从而, 我们有

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{240c^2-440c+203}{240(C-2)^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

记 $h(C) = \dfrac{240C^2-440C+203}{240(C-2)^2} \Rightarrow \lim\limits_{C\to 2} h(C) = +\infty$

$$h'(C) = \frac{237-260C}{120(C-2)^3} \Leftrightarrow h'(C) = 0 \Rightarrow C = \frac{237}{260} \Rightarrow h(\tfrac{237}{260}) = \frac{4}{849}$$

	$(-\infty, \frac{237}{260})$	$\frac{237}{260}$	$(\frac{237}{260}, 2)$	$(2, +\infty)$	$+\infty$
$h'(C)$	<0	0	>0	<0	<0
$h(C)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$	$\downarrow$	1

从而可得,

$$\min_{C\neq 2} h(C) = h(\tfrac{237}{260}) = \frac{4}{849}$$

因此,

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{849}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

其中 $\frac{849}{4}$ 最佳, 当且仅当 $C = \dfrac{237}{260}$ 且 $f(x) = g(x)$ 时取等成立.

例题 6.106 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续可微函数, 若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 求证:

$$\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 由不等式的形式可猜测用 Cauchy-schwarz 不等式

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

由分部积分

$$\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{g(x)f(x)\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \underbrace{g'(x)}_{\text{常数}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.20}$$

由题意 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 于是分段

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g_1(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_1'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g_2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g_2(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

为使满足(6.20), 我们令

$$\begin{cases} g_1(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + g_2(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 0 \\ g_1'(x) = a, \quad g_2'(x) = c \end{cases} \tag{6.21}$$

不妨设 $g_1(x), g_2(x)$ 为多项式, 令

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = ax + b, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_2(x) = cx + d, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

代入(6.21), 可得

$$-bf(0) + \left(\frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c - d\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + (c+d)f(1) = 0$$

不妨设

$$\begin{cases} -b = 0 \\ \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c - d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \\ d = -c \end{cases}$$

因此,

$$g(x) = \begin{cases} -cx, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ cx - c, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \left(-c\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{c^2}{12}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

本题的推广:[6] 若 $f(x):[a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续可导函数，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则有:

$$\int_a^{2b-a} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2(b-a)^3}\left(\int_a^{2b-a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例题 6.107 若 $f(x):[0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续可导函数，且 $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$, 则有:

$$\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{12n^2}{4n^2 - 10n + 7}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 由 Cauchy-schwarz 不等式

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

由分部积分

$$\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{g(x)f(x)\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \underbrace{g'(x)}_{\text{常数}}\, f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.22}$$

[6] http://pxchg1200.is-programmer.com/categories/8320/posts?page=16

由题意 $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$, 于是分段

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} g_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g_1(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2n}} - \int_0^{\frac{1}{2n}} g_1'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} g_2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g_2(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} - \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} g_2'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} g_3(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = g_3(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} g_3'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

为使满足(6.22), 我们令

$$\begin{cases} g_1(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2n}} + g_2(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} + g_3(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = 0 \\ g_1'(x) = g_3'(x) = a_1, \quad g_2'(x) = b_1 \end{cases} \tag{6.23}$$

不妨设 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ 为多项式, 令

$$g(x) = \begin{cases} a_1x + a_0, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ b_1x + b_0, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ a_1x + c_0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

显然,

$$\begin{cases} g_1(\frac{1}{2n}) = g_2(\frac{1}{2n}) \\ g_2(\frac{1}{n}) = g_3(\frac{1}{n}) \\ g_1(0) = 0 \\ g_3(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{2n} + a_0 = \frac{b_1}{2n} + b_0 \\ \frac{b_1}{n} + b_0 = \frac{a_1}{n} + c_0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = -c_0 \end{cases}$$

解得

$$a_0 = 0, \quad b_0 = a_1, \quad b_1 = a_1(1-2n), \quad c_0 = -a_1, \quad c_1 = a_1$$

于是

$$g(x) = \begin{cases} a_1x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ a_1(1-2n)x + a_1, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ a_1x - a_1, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

再由 Cauchy 不等式得

$$\left(-a_1\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2n}} (a_1x)^2\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} [a_1(1-2n)x + a_1]^2\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 (a_1x - a_1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4n^2 - 10n + 7}{12n^2}a_1^2\end{aligned}$$

则

$$\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{12n^2}{4n^2 - 10n + 7}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例题 6.108 (MSE,1179154) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是二阶连续可微函数, 且 $f(0)+2f(\frac{1}{2})+f(1)=0$, 求证:

$$\int_0^1 (f''(x))^2dx \geqslant 1920\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

证明 由分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)f''(x)\mathrm{d}x &= g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_1'(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - g_1'(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} g_1''(x)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6.24}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 g_2(x)f''(x)\mathrm{d}x &= g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2'(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - g_2'(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2''(x)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6.25}$$

设 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为多项式.

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x\in[0,\frac{1}{2})\\ g_2(x), & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

为凑 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们令 $g_1''(x)=g_2''(x)=C$, 即 $g_1(x),g_2(x)$ 为二次多项式.

$$\begin{cases} g_1(x)=cx^2+a_1x+a_0, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ g_2(x)=cx^2+b_1x+b_0, & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

再令 $g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=0$, 故

$$\begin{cases} g(1)=g(0)=0\\ g_1(\frac{1}{2})=g_2(\frac{1}{2})\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a_0=0\\ c+b_1+b_0=0\\ \frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}b_1+b_0\end{cases}\tag{6.26}$$

接着令

$$g_2'(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1+g_1'(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=g'(1)f(1)+(g_1'(\frac{1}{2})-g_2'(\frac{1}{2}))f(\frac{1}{2})-g'(0)f(0)=0$$

且注意到 $f(0)+2f(\frac{1}{2})+f(1)=0$, 故

$$g_1'(\frac{1}{2})-g_2'(\frac{1}{2})=-2g'(0)=2g'(1)$$

于是

$$a_1-b_1=-2a_1=4c+2b_1\tag{6.27}$$

综合 (6.26),(6.27), 我们得到

$$a_0=0,\quad a_1=-\frac{1}{2}c,\quad b_1=-\frac{3}{2}c,\quad b_0=\frac{1}{2}c$$

由 (6.24) + (6.25) 可得,

$$\int_0^1 g(x)f''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g''(x)f(x)\mathrm{d}x=2c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\left(2c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (g(x))^2\mathrm{d}x \int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x$$

经计算可得,

$$\int_0^1 (g(x))^2\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (g(x))^2\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (g(x))^2\mathrm{d}x = \frac{c^2}{480}$$

整理可得,

$$\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x \geqslant 1920\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

例题 6.109 (AMM11946)[7] Let f be a twice differentiable function $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ with f'' continuous on $[0,1]$ and $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Proof:

$$4860\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 11\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

解 由分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} g_1(x)f''(x)\mathrm{d}x &= g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} g_1'(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} - g_1'(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \int_0^{\frac{1}{2}} g_1''(x)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_2(x)f''(x)\mathrm{d}x &= g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_2'(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - g_2'(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_2''(x)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2}{3}}^{1} g_3(x)f''(x)\mathrm{d}x &= g_3(x)f'(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - \int_{\frac{2}{3}}^{1} g_3'(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= g_3(x)f'(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - g_3'(x)f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} + \int_{\frac{2}{3}}^{1} g_3''(x)f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.30}$$

设 $g(x)$ 为分段可微函数, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 与 $g_3(x)$ 为多项式.

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ g_2(x), & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ g_3(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

由题意 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 我们令 $g_1''(x) = g_3''(x) = c$, $g_2''(x) = k$, 即 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ 为二次多项式.

$$\begin{cases} g_1(x) = cx^2 + a_1x + a_0, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ g_2(x) = kx^2 + b_1x + b_0, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ g_3(x) = cx^2 + c_1x + c_0, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

令

$$g_1(x)f'(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} + g_3(x)f'(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} + g_2(x)f'(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = 0$$

[7] https://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/AMM/AMM11946.pdf

即

$$\begin{cases} g(0)=g(1)=0 \\ g_1(\frac{1}{3})-g_2(\frac{1}{3})=0 \\ g_2(\frac{2}{3})-g_3(\frac{2}{3})=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=c+c_1+c_0=0 \\ \frac{1}{9}c+\frac{1}{3}a_1+a_0=\frac{1}{9}k+\frac{1}{3}b_1+b_0 \\ \frac{4}{9}k+\frac{2}{3}b_1+b_0=\frac{4}{9}c+\frac{2}{3}c_1+c_0 \end{cases} \tag{6.31}$$

接着令

$$g_1'(x)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{3}}+g_3'(x)f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^1+g_2'(x)f(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=0$$

即

$$\begin{cases} g'(0)=g'(1)=0 \\ g_1'(\frac{1}{3})-g_2'(\frac{1}{3})=0 \\ g_2'(\frac{2}{3})-g_3'(\frac{2}{3})=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2c+c_1 \\ \frac{2}{3}c+a_1=\frac{2}{3}k+b_1 \\ \frac{4}{3}k+b_1=\frac{4}{3}c+c_1 \end{cases} \tag{6.32}$$

综合 (6.31),(6.32), 我们得到

$$a_0=0,a_1=0,k=-2c,b_1=2c,b_0=-\frac{1}{3}c,c_0=c,c_1=-2c$$

因此,

$$\begin{cases} g_1(x)=cx^2, & x\in[0,\frac{1}{3}) \\ g_2(x)=-2cx^2+2cx-\frac{1}{3}c, & x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\ g_3(x)=cx^2-2cx+c, & x\in[\frac{2}{3},1] \end{cases}$$

由 (6.28) + (6.29) + (6.30) 可得,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)f''(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{3}} g_1(x)f''(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_2(x)f''(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^1 g_3(x)f''(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} g_1''(x)f(x)\mathrm{d}x+\underbrace{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_2''(x)f(x)\mathrm{d}x}_{=0}+\int_{\frac{2}{3}}^1 g_3''(x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= 2c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\left(2c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_0^1 g(x)f''(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 (g(x))^2\mathrm{d}x\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

经计算可得,

$$\int_0^1 (g(x))^2\mathrm{d}x=\frac{c^2}{1215}+\frac{c^2}{135}+\frac{c^2}{1215}=\frac{11c^2}{1215}$$

整理可得,

$$4860\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 11\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

例题 6.110 ([63],4.159) 设 $f\in C^n[0,1]$, 且满足 $f^{(j)}(0)=f^{(j)}(1)=0,\forall j=0,1,\cdots,n-1$, 以及

$$\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall k=1,2,\cdots,m$$

证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(2n+1)\left(\frac{n!m!}{(2n+m+1)!}\right)^2\int_0^1 \left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

证明 反复分部积分
$$\int_0^1 x^j f^{(n)}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^1 f(x)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n x^j\,\mathrm{d}x.$$
可以得到
$$\int_0^1 x^j f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=0\quad(j=0,1,\cdots,n-1,n+1,\cdots,n+m;f\in F).$$
由 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得
$$\begin{aligned}\Big(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2&=\Big(\int_0^1\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2=\Big(\int_0^1 p(x)f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2\\&\leqslant\int_0^1 p^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\big[f^{(n)}(x)\big]^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6.33}$$
其中 $p(x)\in\Pi_{n+m}$ 为多项式, 且满足 $p^{(n)}(0)=1$. 现在, $\bar{p}\in\Pi_{2n+m}$ 为下式给出的多项式.
$$\bar{p}(x)=\frac{(-1)^n(2n+1)}{\binom{m+n}{n}(2n+m+1)!}\frac{1}{x}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^m x^{n+m+1}(1-x)^{n+m}.$$
接着, 经过简单计算, 结果表明: $\bar{p}^{(n)}\in\Pi_{n+m}$ 和 $\bar{p}^{(2n)}(0)=1$, $\bar{p}\in F$, 以及
$$(-1)^n\int_0^1\bar{p}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\big[\bar{p}^{(n)}(x)\big]^2\,\mathrm{d}x=(2n+1)\Big(\frac{n!m!}{(2n+m+1)!}\Big)^2.$$
将其代入 (6.33) 式, 得证. 取等条件为 $f=c\bar{p}$.

例题 6.111 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\geqslant 0$, 并满足
$$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\tag{6.34}$$
证明: $f(x)\leqslant 1+x,\ 0\leqslant x\leqslant 1$.

解 *法 I(by 楚坛).* 令 $g(x)=1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $g(0)=1$. 由 f 的连续知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $g'(x)=2f(x)$. 由 (6.34) 知
$$f(x)\leqslant g(x),\ \forall x\in[0,1],\tag{6.35}$$
由此得微分不等式
$$g'(x)\leqslant 2\sqrt{g(x)},\ \forall x\in[0,1].\tag{6.36}$$
尝试解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{g}$, 可得到通解 $\sqrt{g}-x=C$, 由此我们构造辅助函数 $h(x)=\sqrt{g(x)}-x$, 结合 (6.36) 得
$$h'(x)=\frac{1}{2}\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}-1\leqslant 0\ \forall\in[0,1].$$
上式表明 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减, 从而
$$h(x)\leqslant h(0),\ \forall x\in[0,1].\tag{6.37}$$
结合 (6.35)、(6.37) 两式, 即知
$$f(x)\leqslant\sqrt{g(x)}=h(x)+x\leqslant x+1,\ \forall x\in[0,1].$$
法 II 迭代法 (by ytdwdw). 记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. 则由题干不等式得到
$$f^2(x)\leqslant 1+2Mx\leqslant(1+Mx)^2,\quad\forall x\in[0,1].$$
反复迭代依次得到
$$f^2(x)\leqslant 1+2x+Mx^2\leqslant\Big(1+x+\frac{M}{2!}x^2\Big)^2,\quad\forall x\in[0,1],$$
$$f^2(x)\leqslant 1+2x+x^2+\frac{2}{3!}Mx^3\leqslant\Big(1+x+\frac{M}{3!}x^3\Big)^2,\quad\forall x\in[0,1],$$

$$f^2(x) \leqslant 1+2x+x^2+\frac{2}{4!}Mx^4 \leqslant \left(1+x+\frac{M}{4!}x^4\right)^2, \quad \forall x \in [0,1],$$

一般地可得

$$f^2(x) \leqslant \left(1+x+\frac{M}{n!}x^n\right)^2, \quad \forall x \in [0,1],\, n \geqslant 2$$

上式中令 $n \to +\infty$ 即得结论.

例题 6.112 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 非负的连续的凹函数，且 $f(0)=1$, 求证:

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{12} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 由于 $f(x)$ 为凸函数, 故成立

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \geqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x}, \quad t \in (0,x)$$

因此, $f(t) \geqslant \frac{t}{x}\big(f(x)-1\big)+1$, 利用分部积分

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1\int_0^x x\left(\frac{t}{x}\big(f(x)-1\big)+1\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x^2\big(f(x)+1\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

要证明原不等式, 只需

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \Leftrightarrow \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

显然成立。

注 推广 (西西): 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续的凹函数, 对任意给定的正数 p 我们有:

$$\frac{p+2}{p}\int_0^1 x^p f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例题 6.113 (匈牙利,1973) 若 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续上凹函数, 且满足 $f(0)=1$, 证明:

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 法 1: (by 西西) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 利用上凹函数的性质可得

$$\begin{aligned}
F(x) &= x\int_0^x f(ux+(1-u)\cdot 0)\,\mathrm{d}u \\
&\geqslant x\int_0^1 \big[uf(x)+(1-u)\big]\,\mathrm{d}u = \frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

令 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x, U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则原命题等价于证明 $2U^2-3I \geqslant 0$, 又

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x) = F(1)-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant U - \int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

即 $3I \leqslant 2U - \frac{1}{2}$, 故

$$2U^2 - 3I \geqslant 2U^2 - \left(2U - \frac{1}{2}\right) = 2\left(U - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

原命题得证

法 2: (by 西西) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由 $f(x)$ 的上凹性质得

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{f(x) - 1}{x}t + 1\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(xf(x) + x\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x &= F(1) - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \big(xf(x) + x\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

法 3: (by 西西) 设

$$I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x, \quad U = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow 2U^2 - 3I \geqslant 0$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 因为

$$f(ax) = f(ax + (1-a)\cdot 0) \geqslant af(x) + 1 - a$$

对 $\forall a \in (0,1)$ 积分

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2} \quad \text{即 } 2F(x) \geqslant xf(x) + x$$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leqslant F(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 (xf(x) + x)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{2}I \leqslant F(1) - \frac{1}{4}$$

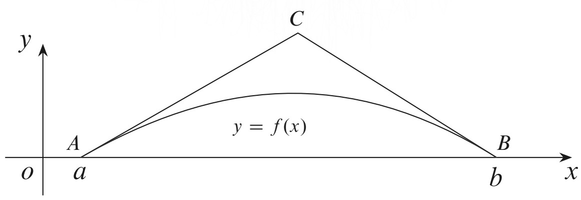
因为 $U = F(1)$，所以

$$2U^2 - 3I = \frac{16U^2 - 24I}{8} \geqslant \frac{(6I+1)^2 - 24I}{8} = \frac{(6I-1)^2}{8} \geqslant 0$$

例题 6.114 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可微凹函数, $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = \alpha > 0$, $f'(b) = \beta < 0$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \frac{(b-a)^2}{\beta - \alpha}.$$

证明 (by ytdwdw)[26] 本题的关键是要有几何直观, 把握结论的几何意义.



由凹函数的性质,

$$f(x) \leqslant \min\big(\alpha(x-a), \beta(x-b)\big), \quad \forall x \in [a, b].$$

记 $A=(a,0)$, $B=(b,0)$, C 为 $y=\alpha(x—a)$ 和 $y=\beta(x-b)$ 的交点. 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \min\big(\alpha(x-a), \beta(x-b)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

例题 6.115 (MSE,592693) 若存在 $a \in \mathbb{N}^+$, 使得连续函数 $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, 满足 $f(f(x)) = x^a$, $\forall x \in [0,+\infty)$, 求证:

$$\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a+3}$$

证明 因为 $f(f(x)) = x^a$, 则 $f(x)$ 严格单调递增, 否则, 由连续性知, 若存在 $u \neq v$, 使得 $f(u)=f(v)$, 那么

$$u^a = f(f(u)) = f(f(v)) = v^a \Rightarrow u = v \Rightarrow \text{矛盾}.$$

故 $f(x)$ 的反函数存在.

$$f(f(x)) = x^a \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x^a)$$

设 $f(0)=b$, 则 $f(f(0)) = 0^a = 0 \Rightarrow f(b) = 0$, 将 b 代入原方程

$$f(f(b)) = b^a \Rightarrow f(0) = b^a \Rightarrow b^a = b \Rightarrow b = 0\text{或}b = 1$$

若 $f(0)=1$, 代入原方程得 $f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$. 这与 $f(x)$ 单调递增矛盾. 故 $f(0)=0$. 由 Young 不等式

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1$$

注意到

$$\int_0^1 ax^{a-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^{a-1} f^{-1}(x^a)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x^a=t} \int_0^1 f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 ax^{a-1} f^{-1}(x)\mathrm{d}x \geqslant 1$$

Cauchy-Schwarz 不等式

$$1 = \left(\int_0^1 f(x)(ax^{a-1}+1)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 (ax^{a-1}+1)^2\,\mathrm{d}x$$

化简得

$$\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a+3}$$

定理 6.12 (Euler-Lagrange 方程)

定义泛函:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

$J[y(x)]$ 取得极值的条件, 也即 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

例题 6.116 (CMC, 2018) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_1)|$, $\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_{x_0}^{x_1}f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f'(x_1)-f'(x_0)|\geqslant M-m$$

另一方面, 有 $\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1\mathrm{d}x=M$. 故, 只需证明

$$m\leqslant 2\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{6.39}$$

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m=0$. 此时 (6.39) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x)>0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情况讨论.

(i). $f(0)\geqslant 0$. 此时 $f(x)\geqslant 0\,(x\in[0,1])$. 由 $f'(x)=|f'(x)|\geqslant m$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x+f(0)\\&\geqslant\int_0^1(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x=\int_0^1f'(\xi)x\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^1mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m\end{aligned}$$

故, (6.39) 成立.

(ii). $f(0)<0$. 此时有 $f(1)\leqslant 0$, 根据 f 的单调性, 有 $f(x)\leqslant 0\,(x\in[0,1])$.

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x&=-\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(f(1)-f(x))\,\mathrm{d}x-f(1)\\&\geqslant\int_0^1|f(1)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left|f'(\xi)\right|(1-x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^1m(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m\end{aligned}$$

此时 (6.39) 也成立.

注：由 $f(0)f(1)\geqslant 0$, 可不妨设 $f(x)\geqslant 0, x\in[0,1]$. 可只考虑 (i).

例题 6.117 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求证:

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明 对任意 $0<\xi<\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}<\eta<1$, 则存在 $\lambda\in(\xi,\eta)$, 使得

$$|f'(\lambda)|=|\frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}|\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|$$

因此对任意的 $x\in(0,1)$ 成立

$$|f'(x)|=|f'(\lambda)+\int_\lambda^x f''(t)dt|\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|+\int_0^1|f''(t)|dt$$

分别对 ξ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上和对 η 在 $(\frac{2}{3},1)$ 上积分以上不等式，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}|f'(x)|&\leqslant\int_0^{\frac{1}{3}}|f(\xi)|d\xi+\int_{\frac{2}{3}}^1|f(\eta)|d\eta+\frac{1}{9}\int_0^1|f''(t)|dt\\&\leqslant\int_0^1|f(t)|dt+\frac{1}{9}\int_0^1|f''(t)|dt\end{aligned}$$

于是

$$|f'(x)|\leqslant 9\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f''(t)|dt,\qquad x\in[0,1]$$

对上式两边在 $[0,1]$ 积分, 得到

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

例题 6.118 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant A\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

A 的最小值

证明 (by Veer) 设 $\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(a)|$, 由积分中值定理得

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = |f'(\xi)|\,, \quad \xi\in(0,1)$$

$$f'(\xi) = f'(a) + \int_a^\xi f''(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow |f'(\xi)| \leqslant |f'(a)| + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \tag{6.40}$$

1° 若存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$. 则 $|f(x)| = |f(x)-f(x_0)|$

2° 若不存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不变号, 且取 $\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(x_0)|$

$$f(x) \geqslant |f(x)| - |f(x_0)| = |f(x)-f(x_0)|$$

所以

$$f(x) \geqslant |f(x)-f(x_0)| = |f'(\xi_x)||x-x_0| \geqslant |f'(a)||x-x_0|$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &\geqslant |f'(\xi)|\int_0^1 |x-x_0|\,\mathrm{d}x \\
&= |f'(\xi)|\left(\int_0^{x_0}(x_0-x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 (x-x_0|)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= |f'(\xi)|\left(\frac{1}{2} - x_0(1-x_0)\right)
\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{2} - x_0(1-x_0) \geqslant \frac{1}{2} - \left(\frac{x_0+1-x_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

所以

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}|f'(a)| \Longrightarrow |f'(a)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

综合 (6.40) 式得

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

4 是最小值, 因为当 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ 时

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

例题 6.119 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可积函数. 且 $|f(x)|\leqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 令 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + 5\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 10\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 (by 向禹) 由于

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_y^1 f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_y^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

故有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x = F^2(1) - \int_0^1 f(y)F(y)\,\mathrm{d}y$$

利用 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 得

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)\,,\quad \int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2(1) \geqslant 0.$$

利用 $A^2+B^2 \geqslant 0$ 则有

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

另外由 Cauchy 不等式

$$4\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 2F(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = 4F^2(1) = 8\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

相加即得原式.

注意到有更一般的式子

$$A\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + B\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2(A+B)\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 $A=B=0$ 或 $f(x)=F(x)=0$.

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) &= \int_0^1 \mathrm{d}(xF(x)) \\ &= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$F^2(1) = \int_0^1 \mathrm{d}F^2(x) = 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F^2(1) = 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F^2(1) = 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

相加即可

例题 6.120 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续的一阶导数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f^2(x) + (f'(x))^2\right) dx = 1$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$，有 $|f(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 (by 西西) 由条件可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx \leqslant 1\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f''(x))^2 dx \leqslant 1$$

故知道这两个无穷积分收敛，由 Cauchy-Schwarz 不等式，知道

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f'(x)|dx \leqslant 1$$

上面的无穷积分也是收敛的，接着，我们证明

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = \lim_{x\to-\infty} f^2(x) = 0$$

为此，先看正无穷的情况。由于积分收敛，对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$,

当 $x, y > M$，（不妨设 $x < y$）有

$$\int_x^y |f(x)f'(x)|dx < \varepsilon$$

因此，对任意的 $x, y > M, (x < y)$, 有

$$|f^2(x) - f^2(y)| = 2\left|\int_x^y f'(t)f(t)dt\right| < 2\int_x^y |f'(t)f(t)|dt < 2\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = A$, 再次看到无穷积分收敛，故只能有 $A = 0$，因此有

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = 0$$

同理可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f^2(x)$$

对 $\forall x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2}(f^2(x) - f(a)) + \frac{1}{2}(f^2(x) - f(-a)) \\
&= \lim_{a\to+\infty} \left(\int_a^x f(y)f'(y)dy + \int_{-a}^x f(y)f'(y)dy\right) \\
&= \int_{+\infty}^x f(y)f'(y)dy + \int_{-\infty}^x f(y)f'(y)dy \\
&\leqslant \int_{-\infty}^x |f(y)f'(y)|dy \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f^2(x) + (f'(x))^2\right) dx\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

马上得到

$$|f(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例题 6.121 设 $f(x)$ 为凸函数, 单调递减趋于 0, 且 $f(1) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$,
证明:

$$-\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x < -\frac{1}{18}$$

证明 (by 西西)[8]

$$\because \quad \forall k, \int_k^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \quad \int_1^{+\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = -(\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \frac{1}{8}f(1))$$

其中

$$a_k = \int_k^{k+\frac{1}{2}} -(x - [x] - \frac{1}{2})(f(x) - f(k))\mathrm{d}x + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})(f(k+1) - f(x))\mathrm{d}x < 0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，我们作分段线性函数

$$L(x) = 2(f(k+1) - f(k+\frac{1}{2}))(x - k - \frac{1}{2}) + f(k+\frac{1}{2})$$

[8] http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=20575

由于 $f(x)$ 是凸的，有 $L(x)-f(x)\geqslant 0, x\in(k,k+1)$，故

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}-(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-f(x))\mathrm{d}x]\\ &> \sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(L(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-L(x))\mathrm{d}x]\\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+1))\\ &> \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+\frac{2}{3}))\\ &= \frac{1}{12}f(\frac{3}{2})=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

综合即得

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{18}$$

例题 6.122 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上处处大于 0, 且对于 $L>0$ 满足 Lipschiz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$, 又已知对于 $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$ 有

$$\int_c^d\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\alpha\,,\quad \int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\beta$$

证明下列积分不等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

解 *法 I(by 西西). 由积分第一中值定理知* $\exists x_0\in[c,d]$. *s.t*

$$\frac{d-c}{f(x_0)}=\int_c^d\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\alpha$$

则 $f(x)\leqslant f(x_0)+L|x-x_0|$, *从而*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^{x_0}f(x_0)+L|x-x_0|\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b f(x_0)+L|x-x_0|\,\mathrm{d}x\\ &=f(x_0)(b-a)+\frac{L}{2}(x_0-a)^2+\frac{L}{2}(b-x_0)^2\\ \beta&\geqslant\int_a^{x_0}\frac{1}{f(x_0)+L|x-x_0|}\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b\frac{1}{f(x_0)+L|x-x_0|}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{L}\ln\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)\right]\end{aligned}$$

即

$$\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)\leqslant e^{L\beta}$$

记

$$m=1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\,,\quad n=1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}$$

则 $mn\leqslant e^{L\beta}(m,n\geqslant 1)$. *由 Cauchy 不等式*

$$1=\frac{1}{(d-c)^2}\left(\int_c^d\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{\alpha}{(d-c)^2}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

再由 $m^2n^2 \geqslant m^2+n^2-1(m,n\geqslant 1)$ 即知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{(d-c)^2}{\alpha}\left(\frac{b-a}{d-c}+\frac{\alpha L[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2]}{2(d-c)^2}\right)\\ &= \frac{(d-c)^2}{\alpha}\cdot\frac{m^2+n^2-2}{2\alpha L}\leqslant\frac{(d-c)^2}{\alpha}\cdot\frac{m^2n^2-1}{2\alpha L}\\ &\leqslant \frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

法 II(by 西西). 记 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=m$, 则

$$m\leqslant f(x)\leqslant m+L|x-x_0|$$

从而

$$\begin{aligned}&2L\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2L\frac{d-c}{m}\int_a^{x_0}(m+L|x-x_0|)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b(m+L|x-x_0|)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\frac{2(b-a)L}{m}+\frac{L^2(x_0-a)^2+L^2(b-x_0)^2}{m^2}\right]\\ &=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{m}\right)^2+\left(1+\frac{L(b-x_0)}{m}\right)^2-2\right]\end{aligned}$$

再由 $s^2t^2\geqslant s^2+t^2-1(s,t\geqslant 1)$ 即知

$$\begin{aligned}&2L\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)^2\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)^2-1\right]\\ &=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[e^{2\ln\left(1+\frac{L(x_0-a)}{m}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{m}\right)}-1\right]\\ &=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\exp\left(2L\int_a^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{m+L(x_0-x)}+2L\int_{x_0}^b\frac{\mathrm{d}x}{m+L(x-x_0)}\right)-1\right]\\ &=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\exp\left(2L\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)-1\right]\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.2 微积分基本定理

6.2.1 微积分基本定理

笔记 微积分基本定理[5]

- 入门版：$F(x)$ 连续可导、$f(x)$ 是其导数
- 标准版[9]：$F(x)$ 可导、$f(x)$ 可积、$F'(x)=f(x)$
- 推广的版本：
  1. $F(x)$ 可导、$f(x)$ 可积、$F'(x)=f(x)$ 可以在有限多个点处不成立
  2. $F(x)$ 可导、$f(x)$ 可积、$F'(x)=f(x)$ 可以在可数多个点处不成立
  3. $F(x)$ *Lipschitz* 连续、$f(x)$ 可积、$F'(x)=f(x)$ 几乎处处不成立
  4. $F(x)$ 绝对连续、$f(x)$ 是其几乎处处导数。(*Lebeegue* 积分版)

[9] 存在的问题：一个函数的导数也不一定可积、可积的函数不一定是导数

定理 6.13 (微积分基本定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

例题 6.123 可微函数的导函数不一定可积, 如函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可微, 其导函数为

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

这是无界函数, 因此不是 Riemann 可积的.

注 本例 $F'(x)$ 是无界函数, 那么问题来了 "如果导函数有界, 是否 Riemann 可积?" 答案是不一定. 反例由 Vollterra 构建, 具体细节参考 ([64],P115) 或者 ([65],P298)

例题 6.124 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续, $A<a<b<B$. 试证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&\xlongequal{L'Hospital} \lim_{h\to 0}\left[f(b+h)-f(a+h)\right] \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

例题 6.125 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(0)$.

解 显然 $f(0)=0$, 所以

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t=x+h} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{洛必达} \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right)=0
\end{aligned}$$

6.2.2 Newton-Leibniz 公式

定理 6.14 (Newton-Leibniz 公式)

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

证明 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$
应用拉格朗日中值定理, 必存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big)\\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

注：此公式为牛顿-莱布尼茨公式的入门版.

注 [36] Cauchy 曾经用下面的例子说明用 Newton-Leibniz 公式时必须验证条件. 请指出以下计算中的错误并作更正:

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan(\sec x)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi} = -\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

解 错误在于：$\arctan(\sec x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点无定义! 因此, $\arctan(\sec x)$ 不是 $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ 在 $[0,\frac{3}{4}\pi]$ 上的原函数.

法 *I.* 求出 $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ 在 $[0,\frac{3}{4}\pi]$ 上的原函数.

- 先使得原函数 $F(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点连续.

$$F(\tfrac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}F(x)$$

于是得到,

$$F(x) = \begin{cases}\arctan(\sec x) - \frac{\pi}{2} + C, & x<\frac{\pi}{2}\\ C & x=\frac{\pi}{2}\\ \arctan(\sec x) + \frac{\pi}{2} + C, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

- 再利用导数定义说明 $F(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点处也可导.

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\arctan(\sec x)+\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$$
$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0-}\frac{\arctan(\sec x)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$$

由于 $F'_+(0) = F'_-(0)$, 故 $F(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点处也可导, 于是由 *Newton-Leibniz* 公式

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3\pi}{4} - \arctan\sqrt{2}$$

法 *II.* 由推论*6.1*知只需分区间即可. 首先, 补充定义使得 $F(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 和 $[\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi]$ 分别连续. 于是

$$F_1(x) = \begin{cases}\arctan(\sec x) + C, & x\in[0,\frac{\pi}{2})\\ \dfrac{\pi}{2} + C, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

以及

$$F_2(x) = \begin{cases}\arctan(\sec x) + C, & x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi]\\ -\dfrac{\pi}{2} + C, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

因此, 由 *Newton-Leibniz* 公式

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= F_1(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + F_2(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3\pi}{4} - \arctan\sqrt{2}$$

事实上, 在求原函数的途中并不一定会出现 $\sec x$.

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3\pi}{4} - \arctan\sqrt{2}.$$

例题 6.126 设 $f \in \mathbb{R}[A,B], a,b \in (A,B)$ 是 f 的两个连续点, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

解[36]

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&\xlongequal{t=x+h} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

错误证法

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{①} \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{②} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{③} f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

错误原因分析

① 没有根据就将求极限与求积分运算交换顺序;

② 对差商求极限时忘记了题中 f 只在两点连续, 并无可导条件;

③ 即使 f 在 $[a,b]$ 上可导, 但导函数也不一定可积, 因此不能用 *Newton-Leibniz* 公式.

定理 6.15 (Newton-Leibniz 公式)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且存在原函数 $F(x)$, 即 $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

证明 对于 $[a,b]$ 的任一分割 T, 由在 $[a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$ 知, $F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足拉格朗日中值定理, 即存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,n$, 使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i-x_{i-1})$$

又由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以令 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$, 上式两边取极限得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注：此公式为牛顿-莱布尼茨公式的标准版.

推论 6.1 (Newton-Leibniz 公式的推广版)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

解 ([7], *P27*) 不妨设 $x_1', x_2', \cdots, x_k'$ 是 $[a,b]$ 上使 $F'(x_i') \neq f(x_i')$ 或 $F'(x)$ 不存在的全部点, 由已知条件知, 对于 $[a,b]$ 的任一分割 T, 将 $x_1', x_2', \cdots, x_k'$ 也作为分割点, 组成分割 T', 则 $F(x)$ 在分割 T' 的每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上连续, 在 (x_{i-1}, x_i) 内可导, 由拉格朗日中值定理知

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \xlongequal{Lagrange} \sum_{i=1}^{n} F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

又由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以令 $\|T'\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i\} \to 0$, 上式两边取极限得

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|T'\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

推论 6.2 (Newton-Leibniz 公式的推广版 2)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b] - A$ (A 为 $[a,b]$ 的可列子集) 上有 $F'(x) = f(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

注 推论6.2也可以表述为: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

推论 6.3 (Newton-Leibniz 公式的推广版 3)

若函数 $F(x)$ 在区间 $I = [a,b]$ 上 *Lipschitz* 连续, 且 $F'(x) = f(x)$ 在 I 上 *Riemann* 可积, 则 *Newton-Leibniz* 公式成立:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

注 证明过程可参考数学分析（1）：第 11 次习题课

推论 6.4 (Newton-Leibniz 公式的推广版 4)

设 $F(x) \in C[a,b]$ 是连续函数, 且 $f(x) \in L[a,b]$ 是 *Lebesgue* 可积的, 若至多除去一个可数集之外, 有 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

注 具体证明过程参考 ([66], P138)[10]

例题 6.127 (丘赛, 2016) 假设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F'(x)$ 是 Lebesgue 可积的. 证明: $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续且

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.3 定积分的计算

例题 6.128 (太公杯) 证明: $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi \mathrm{i} x^k \alpha}\right)^2 \left(\sum_{x=1}^{N} e^{-2\pi \mathrm{i} x^k \alpha}\right) \mathrm{d}\alpha = 0.$

[10] 这本资料写得真的极好！非常推荐, 作者还写了数学小说贼好看！

笔记 定积分的计算

1. 简化技巧：几何意义、奇偶性、对称性、周期性、平移变换、组合积分、三角函数的正交性、华里士公式、黎曼引理
2. 正面硬上：定积分的定义、换元法、分部积分、留数法、伽马函数与贝塔函数

6.3.1 基本公式

例题 6.129 计算: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin nx - \sin(n-1)x][\sin nx + \sin(n-1)x]}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + 1$$

例题 6.130 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx\,\mathrm{d}x$ (n 为自然数)

解

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\big[\sin(n-1)x + \sin(n+1)x\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\left(\sin nx\cos x + \cos nx \sin x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_n) - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,\mathrm{d}(\cos^n x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1} \quad (\text{分部积分}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}I_{n-2}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{1}{2^{n-1}}I_1 \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{1}{2^n}\left(I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

定理 6.16 (华里士公式)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\ I_0 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数},\ I_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

例题 6.131 证明: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

证明 [12] 由 $\sin x$ 的单调性可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,\mathrm{d}x.$$

即

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

由此得到

$$A_n = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n} = B_n.$$

因为

$$\begin{aligned}0 < B_n - A_n &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

故由夹逼定理立即有

$$\lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0.$$

再由 $0 < \frac{\pi}{2} - A_n < B_n - A_n \to 0\ (n\to\infty)$ 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-A_n\right) = 0$. 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-A_n\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

6.3.2 性质法

6.3.2.1 周期性

画个图理解会好一点!

命题 6.1 (周期性)

设 $f(x)$ 是周期为 T 的可积周期函数. 则对任意的 $a\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-a} \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

更一般地, 有

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-a} n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.132 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$

解

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_x^{x+2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{u=t-\pi}\int_{-\pi}^{2\pi}\frac{\sin u}{\sin^2 u+1}\,\mathrm{d}u = 0\end{aligned}$$

例题 6.133 求极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^m|\sin x|\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}$.

解 对 $\forall x>0$, 总存在 n 使 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 那么则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}&\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi}t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n\pi)^{m+1}}\\&=\frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^m\pi^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由周期性易得

$$\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}&\leqslant\frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{m+1}\end{aligned}$$

左侧同理亦可得出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}\geqslant\frac{2\pi}{m+1}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}=\frac{2\pi}{m+1}$$

6.3.2.2 对称性

也不知道是谁起的名, 如果记, 应该记换元的方式! 而不是公式!

命题 6.2 (区间代换)

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{a+b-x=t}\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

以及

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x+\frac{b+a}{2}=t}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\mathrm{d}x$$

注 只需注意到如下事实:

1. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(2a-x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称
2. 定积分的几何意义是面积的代数和

例题 6.134 求定积分: $\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6-x^2)}\,\mathrm{d}x$

解 注意到 $\ln 6=\ln 2+\ln 3$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6-x^2)}\,\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\xlongequal{u=\ln 6-t}\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{\sin(\ln 6-u)}{\sin u+\sin(\ln 6-u)}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{\sin t+\sin(\ln 6-t)}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$$

命题 6.3

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 则

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

例题 6.135 (知乎,412246292) **错误**的解答

$$\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

解[11] 因为 $\cos x$ 并不能表示为 $f(\sin x)$, 事实上

$$\cos x=\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2 x}, & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -\sqrt{1-\sin^2 x}, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$

可知 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上不是单由 $\sin x$ 决定的, 而是取决于 x.

更为一般的结论: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 关于 $\dfrac{a+b}{2}$ 对称, 则有

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

正确的解答：注意到 $\sin x\cos x$ 是关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 以及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 都是对称的.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{3\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

例题 6.136 求定积分: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{1+\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{1+\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\sqrt{x}}{1+\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}\\&\xlongequal{\sqrt{x}\to x}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

[11] https://www.zhihu.com/question/412246292/answer/1387671348

例题 6.137 计算定积分：$\displaystyle\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

解 法 I(直接换元).

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[x=2\sin^2 t]{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}=t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{(2\sin^2 t-1)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{\cos^2 2t+1}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{2t=u} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{\cos^2 u+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} u\,\mathrm{d}(\arctan\cos u) \\
&= -\frac{1}{2}u\arctan\cos u\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\arctan\cos u\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\cos u=x} \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\text{奇偶性}} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

法 II(利用恒等式). 注意到

$$
2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2}, \quad x\in[0,2]
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\arcsin(1-x)}{(1-x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u=x-1} \int_{-1}^{1}\frac{\frac{\pi}{4}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u}_{\text{奇偶性}} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

注 两种方法我更偏向于换元，因为，这才是遇到此类题目的最直接/常用方法！而利用恒等式 (百度可查) 的方法一般前面会有第一问提示让证明恒等式!

例题 6.138 求定积分：$\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$
2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}, \quad x\in[0,1]
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{2x-1=u} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin u}{u^2+3}\,\mathrm{d}u + \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{u^2+3}}\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} \frac{\pi}{4}\ln 3
\end{aligned}
$$

例题 6.139 计算积分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{\arctan x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

解 注意到[12]

$$
\arctan\left(\frac{a-y}{1+ay}\right) = \arctan a - \arctan y, \quad ay > -1.
$$

考虑分式线性变换，令

$$
x = 2-y = \frac{a-y}{1+ay} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{a^2+1}{(1+ay)^2}\,\mathrm{d}y
$$

[12]反三角函数公式有很多，而此处的公式是根据后面计算出来的 a 选出来的

将 $x=0,2$ 分别代入 $x=2-y$, 得到 $y=2,0$ 接着代入

$$\begin{aligned}x^2+2x+2&=\left(\frac{a-y}{1+ay}\right)^2+\frac{2a-2y}{1+ay}+2\\&=\frac{a^2-2ay+y^2+2a+(2a^2-2)y-2ay^2+2+4ay+2a^2y^2}{(1+ay)^2}\\&=\frac{(2a^2-2a+1)y^2+(2a^2+2a-2)y+(a^2+2a+2)}{(1+ay)^2}\end{aligned}$$

此时, 若存在 a 使得对应成比例, 那这题就可以结束了.

$$\frac{2a^2-2a+1}{1}=\frac{2a^2+2a-2}{2}=\frac{a^2+2a+2}{2}$$

经过计算可知, 当 $a=2$ 时成立, 故有

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{\arctan x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=\frac{2-y}{1+2y}}\int_0^2\frac{\arctan 2-\arctan y}{y^2+2y+2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\arctan 2\int_0^2\frac{1}{y^2+2y+2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\arctan 2}{2}\left(\arctan 3-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

例题 6.140 (积分竞赛, Q55) 计算: $\displaystyle\int_1^3\frac{\arctan x}{x^2-6x+4}\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\arctan\left(\frac{a-y}{1+ay}\right)=\pi+\arctan a-\arctan y,\quad a<0,ay<-1.$$

考虑分式线性变换，令

$$x=4-y=\frac{a-y}{1+ay}\Rightarrow\mathrm{d}x=-\frac{a^2+1}{(1+ay)^2}\mathrm{d}y$$

则有 $\displaystyle\frac{\arctan x}{f(x)}\Rightarrow\frac{\arctan a-\arctan x}{f\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)}$

$$\begin{aligned}x^2-6x+4&=\left(\frac{a-y}{1+ay}\right)^2-6\left(\frac{a-y}{1+ay}\right)+4\\&=\frac{(1+6a+4a^2)y^2+(-6a^2+6a+6)y+(a^2-6a+4)}{(1+ay)^2}.\end{aligned}$$

测试是否存在 a 满足

$$\frac{1+6a+4a^2}{1}=\frac{-6a^2+6a+6}{-6}=\frac{a^2-6a+4}{4}$$

计算可知, 当 $a=-2$ 时成立. 于是

$$\begin{aligned}\int_1^3\frac{\arctan x}{x^2-6x+4}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=\frac{-2-y}{1-2y}}\int_1^3\frac{\pi+\arctan(-2)-\arctan y}{y^2-6y+4}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}(\pi+\arctan(-2))\int_1^3\frac{1}{y^2-6y+4}\mathrm{d}y\\&=\frac{\arctan 2-\pi}{2\sqrt{5}}\ln(2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$\int_0^k\frac{\arctan x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{\arctan k}{2}\int_0^k\frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$$

例题 6.141 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$

解 做代换 $x=ku$, 其中 k 为待定常数

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x\xlongequal[k>0]{x=ku}k\int_0^{+\infty}\frac{\ln(ku)}{k^2u^2+3ku+2}\mathrm{d}u$$

$$= k\ln k\int_0^{+\infty}\frac{1}{k^2u^2+3ku+2}\,\mathrm{d}u + k\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{k^2u^2+3ku+2}\,\mathrm{d}u$$

右边的积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{k^2u^2+3ku+2}\,\mathrm{d}u \xlongequal{u=\frac{1}{t}} \int_0^{+\infty}\frac{-\ln t}{2t^2+3kt+k^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

为使其值为 0, 只需要令

$$k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{k>0} k = \sqrt{2}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\sqrt{2}u} \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\sqrt{2}u)}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}u + \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{u=\frac{1}{t}} \frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln^2 2}{2}
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\,\mathrm{d}u &\xlongequal{u=\frac{1}{t}} \int_0^{+\infty}\frac{-\ln t}{2+3\sqrt{2}t+2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

6.3.3 换元法

推论 6.5 (换元法[13])

设 φ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的单调可微函数, 且 φ' 可积. 如果 f 在区间 $\varphi([\alpha,\beta])$ 上可积, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 则 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例题 6.142 (Euler 积分) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-t} \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u) \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

例题 6.143 计算积分: $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}
$$

更多的方法可参考[67-68]：http://tieba.baidu.com/p/4331366750

例题 6.144 求定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin x|\cos x|}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\sin x} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t - \int_1^0 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(2t+1)-1}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\big(t(1+t)\big)}{\sqrt{t(1+t)}} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2\sqrt{t(1+t)}\right]_0^1 - \left[\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{t(1+t)}\right)\right]_0^1 \\
&= 2\sqrt{2} - \ln(3+2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

例题 6.145 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 试证明:

$$
I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} f(2)
$$

解 令 $\frac{2}{1+t} = 1+x$, 得

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\frac{2}{1+t}=1+x} \int_1^0 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} \times \left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由题 $f(xy) = f(x) + f(y)$

$$
I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} f(2)
$$

例题 6.146 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sqrt{\sin 2t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{1+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2-1}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sqrt{u^2-1}}
\end{aligned}
$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1$$

例题 6.147 (MSE,463881) 求定积分: $\displaystyle\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$.

解

$$I=\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}}=3\int_{-\pi}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}&=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\\&=\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$I=\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

例题 6.148 令 $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

解 令

$$f(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

障眼法, 复杂式子求导猜下关系不会想不到吧?

$$f'(x)=2e^{2x}+\cos x-\sin x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

那么有

$$f(x)-f'(x)=-e^{2x}+2\sin x+\frac{x^n}{n!}$$

因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}(f(x)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\Big[x\Big]_0^1 - \Big[\ln(f(x))\Big]_0^1 \right) \\
&= 1 - \ln(e^2 + \sin 1 + \cos 1 + e)
\end{aligned}
$$

例题 6.149 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

解 注意到

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

以及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \dfrac{1}{1+\cos x}$, 故

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} \ln^2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\frac{\sin x}{1+\cos x}=t} 4\int_0^1 \ln^2 t\,\mathrm{d}t = 8
\end{aligned}
$$

练习 6.16 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$$

解

$$原式 = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$$

其中

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x\cdot\ln(\tan x)}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\sin t\cdot\ln(\tan t)}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4}$$

练习 6.17 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi}\,\mathrm{d}x$

解 (西西)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=2x-\pi} \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(t+\pi)\sin t\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{x=\sin\frac{t}{2}} \int_{-1}^{1} x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\Big[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\Big[\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1 = \frac{8}{\pi^2}
\end{aligned}
$$

例题 6.150 求定积分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

解 *(by 西西)* 设 $x = \tan t$, 则

$$
I \xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ln\left(\frac{1}{\cos t(\sin t+\cos t)}\right)\mathrm{d}t
$$

设 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x)$, 则有

$$
f(\pi/4 - x) = f(x)
$$

令 $t = \pi/4 - u$, 那么有

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ln\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\frac{1}{f(\pi/4-u)}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{1}{f(u)}\mathrm{d}u - I
$$

只要计算

$$
f = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos^2 t + \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\cos(x-\pi/4)\right)\mathrm{d}x
$$

利用卡特兰数一个熟悉积分

$$
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{G}{2} - \frac{\pi}{4}\ln 2
$$

带入得

$$
I = \frac{3\pi^2\ln 2}{64} - \frac{G}{8}
$$

例题 6.151 求定积分: $I = \displaystyle\int_0^1 \exp\left(4\sqrt{\frac{t-t^2}{8t+1}}\right)\cdot\frac{1-8t+16t^2}{t+7t^2-8t^3}\mathrm{d}t.$

解 *(by 西西)*

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal{t=x^2} 2\int_0^1 \exp\left(\frac{4x}{\sqrt{(1-x^2)(8x^2+1)}}\right)\cdot\frac{|1-4x^2|}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 e^{4xy}\frac{|1-4x^2|}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{4xy}\frac{4x^2-1}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{3(1-4y^2)}{(1+8y^2)\sqrt{(1-y^2)(1+8y^2)}}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{3(1-4x^2)}{(1+8x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{4(1-4x^2)(1+2x^2)}{(1+8x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}(4xy)'_x\,\mathrm{d}x = 2\left[\exp 4x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2(e-1)$$

✍ **练习 6.18** 计算积分:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{[(2x+1)^2(x^2-x+1)-(2x-1)^2(x^2+x+1)]\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{6x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\\
=&\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2-x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\
=&\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.19** 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{x}{[(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}+(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}]\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$a(x)=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}},\Rightarrow a'(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{a(x)}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{[(x-\frac{1}{2})a(x)+(x+\frac{1}{2})a(-x)]a(x)a(-x)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{a^2(x)(a^2-x)[a'(x)-a'(-x)]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{a^2(x)a^2(-x)\{[a'(x)]^2-[a'(-x)]^2\}}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2a^2(-x)^2-(x-\frac{1}{2})^2a^2(x)} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{2x}\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [a'(x)+a'(-x)] = \frac{a(1)-a(-1)}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{3}
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.20** 计算积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}$$

解 先计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}$$

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-(-x)^{n+1}}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{x^4+ax^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2+a}d(x-\frac{1}{x})\\
&=\frac{1}{\sqrt{2+a}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+a}}\bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}$$

例题 6.152 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]$

解 *(by 向禹)* 首先有

$$\begin{aligned}
I(n)&=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\overset{t=x^n}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{裂项}}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{t^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln t}}{=\!=\!=\!=\!=}1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1\frac{\ln^k x}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此不难得到

$$I(n)=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
I^n(n)&=e^{n\ln I(n)}=e^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

因此最后得到

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2$$

6.3.4 分部积分

命题 6.4

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \in \infty,\ f \in C^{(2)}([0,1])$$

证明 由分部积分法，我们有 $(0<\xi<1$, 参阅积分中值定理)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{f(1)}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x^{n+2} \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n(n+1)} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n(n+1)} - \frac{f'(1)}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{f''(\xi)}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{n+3} \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)} + \frac{2f'(1)}{n(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + \frac{f(1)f'(1)}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
=&\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

笔记

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x \sim \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)^2}$$

6.3.5 留数法

例题 6.153 计算积分: $\displaystyle\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$

证明 注意到方程 $x^{2n}-1=0$ 的根为

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k=1,2,\cdots,2n.$$

其中 $x_n=-1, x_{2n}=1, x_{2n-k}=\bar{x_k}$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} &= 1+x^2+\cdots+x^{2n-2} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\bar{x_k}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2+1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

令 $\dfrac{x^2+1}{-2x}=2$, 并取 $x=\sqrt{3}-2$. 得到

$$\begin{aligned}
x^{2n}-1 &= (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(-4x-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= (x^2-1)(-2x)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{(\sqrt{3}-2)^{2n}-1}{((\sqrt{3}-2)^2-1)(4-2\sqrt{3})^{n-1}}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\ln\frac{(\sqrt{3}-2)^{2n}-1}{(\sqrt{3}-2)^2-1}-\ln(4-2\sqrt{3})^{n-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\big(-(n-1)\ln(4-2\sqrt{3})\big)=-\pi\ln(4-2\sqrt{3})\\&=\pi\ln\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}\end{aligned}$$

练习 6.21 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

解 *(by MSE)* 可以证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2}\ln 2\iff\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$$

由欧拉公式, 我们有 $2\cos\theta=e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}=e^{\mathrm{i}\theta}(1-e^{-2\mathrm{i}\theta})$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Im}\ln(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Im}\ln(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Im}\ln(1-e^{-2\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\\&\overset{Tayor}{=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta+\operatorname{Im}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2n\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi^2}{8}-\operatorname{Im}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{i}(1-e^{-\pi\mathrm{i}n})}{2n^2}\\&=\frac{\pi^2}{8}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}(1+(-1)^n)}{2n^2}\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\iff\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例题 6.154 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x.\ (a>0)$

证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$. 它的极点为 $a_k=a\cdot e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}}(k=0,1,2,3)$. 上半平面内只有 $z=a_0,z=a_1$

$$\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=a_k}=\frac{1}{4a_k^3}=-\frac{a_k}{4a^4}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{a_0}{4a^4}-\frac{a_1}{4a^4}\right)\\&=-\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^3}(e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}+e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}})=-\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^3}(e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}-e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})\\&=\frac{\pi}{2a^3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}\end{aligned}$$

例题 6.155 求定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

证明 首先有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=x+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2t-1)}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$$
$$=\cos 1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x-\sin 1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$$

容易验证，函数 $f(z)=\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}$ 满足若尔当引理的条件，其中，$g(z)=\frac{1}{z^2+\frac{3}{4}}$ 函数 $f(z)$ 在上半平面内只有一个简单极点 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ($z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 在下半平面).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right]$$
$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}=2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}}$$

比较实部虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=0$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi\sin 1}{\sqrt{3}}$$

例题 6.156 计算: $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 利用欧拉公式有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

令 $f(z)=\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}$, 在上半平面内, i 为 2 阶极点,

$$\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^2\cdot\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}\right)'=\lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)'$$
$$=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}(z+3\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^3}=\frac{\mathrm{i}}{2e}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{\pi}{e}$$

于是原积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{e}$$

例题 6.157 计算积分: $\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x^x(1-x)^{1-x}}\,\mathrm{d}x$

解 *(by pisco125)*

$$I=\int_0^1\frac{\exp[\mathrm{i}\pi x-x\ln x+x\ln(1+x)]}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{u=\ln(1-x)-\ln x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi+u}{1+e^u}\right)}{1+e^u}\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty+\mathrm{i}\pi}^{+\infty+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{+\infty-\mathrm{i}\pi}^{-\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{-x}{1-e^{-x}}\right)}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty-\mathrm{i}\pi}^{+\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$

考虑由 $R-\mathrm{i}\pi, R+\mathrm{i}\pi, -R+\mathrm{i}\pi, -R-\mathrm{i}\pi$ 组成的长方形围道

$$\left(\int_{-R+\mathrm{i}\pi}^{R+\mathrm{i}\pi}+\int_{R+\mathrm{i}\pi}^{R-\mathrm{i}\pi}+\int_{R-\mathrm{i}\pi}^{-R-\mathrm{i}\pi}+\int_{-R-\mathrm{i}\pi}^{-R+\mathrm{i}\pi}\right)\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x},0\right]=\frac{2\pi}{e}\mathrm{i}$$

而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R-\mathrm{i}\pi}^{-R+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{R+\mathrm{i}\pi}^{R-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}\pi}^{+\infty+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty-\mathrm{i}\pi}^{+\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{e}\mathrm{i}$$

故 $I-(-I)=\dfrac{2\pi}{e}\mathrm{i}\Longrightarrow I=\dfrac{\pi}{e}\mathrm{i}$, 因此

$$\mathrm{Im}\,I=\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x^x(1-x)^{1-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e}$$

6.4 定积分的应用

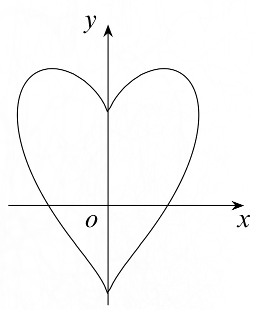
注意定积分的几何意义

6.4.1 求平面图形的面积

例题 6.158 计算由方程 $x^2+\left(y-\sqrt[3]{x^2}\right)^2=1$ 所围成的图形的面积

解 化为参数方程

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y-\sqrt[3]{x^2}=\sin t\end{cases}$$



于是

$$y=\sin t+(\cos t)^{\frac{3}{2}},$$

计算 t 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的定积分即为面积的一半

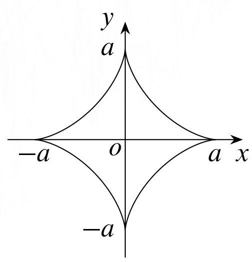
$$S_1=\int_{D_1}y\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t+(\cos t)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}\cos t=\frac{\pi}{2}$$

所以整个图形的面积为 π

例题 6.159 计算星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$ 所围成的图形的面积

解 利用星形线的参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$$

面积元素

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta,$$

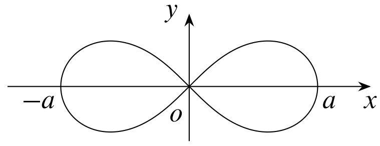
因而所求面积为

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&\overset{Wallis}{=\!=}12a^2\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2\end{aligned}$$

例题 6.160 计算伯努利双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围成的图形的面积

解 利用伯努利双纽线的极坐标方程

$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta,\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right].$$



面积元素

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

因而所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2$$

定理 6.17 (旋转曲面)

曲线 l 绕直线 $ax+by+c=0$ 旋转而成的旋转曲面面积为

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_L |ax+by+c|\,\mathrm{d}s$$

例题 6.161 曲线 $L_1: y = \frac{1}{3}x^3+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积 ________

解 在曲线 L_1 上取点 $P(x,y)$, 该点到旋转轴 L_2 的距离为

$$d = \left|\frac{-4x+3(\frac{1}{3}x^3+2x)+0}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{1}{5}(x^3+2x)$$

弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积微元

$$\mathrm{d}A = 2\pi d\,\mathrm{d}s = \frac{2}{5}\pi\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积为

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \mathrm{d}A = \frac{2}{5}\pi\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x^2+2=t}\frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{15}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3 = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi
\end{aligned}$$

定理 6.18 (极坐标类型)

设平面图形由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成, 求其面积 S。

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

例题 6.162 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围成的图形的面积

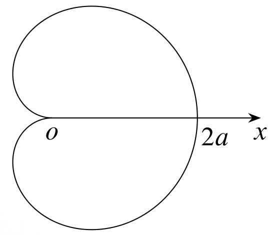
解 面积元素

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta,$$

因而所求面积为

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= a^2\int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{\theta\mapsto\frac{1}{2}\theta} 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &\xlongequal{\text{Wallis}} 8a^2\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

$\rho = a(1+\cos\theta)$



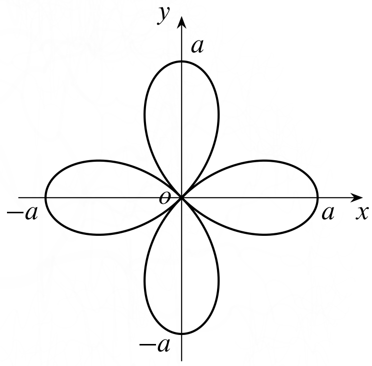
例题 6.163 计算四叶玫瑰线 $\rho = a\cos 2\theta\ (a>0)$ 所围成的图形的面积

解 面积元素

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

因而所求面积为

$$\begin{aligned} A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}A = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi a^2 \end{aligned}$$



$\rho = a\cos 2\theta$

例题 6.164 计算 Descartes 叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 所围成的图形的面积

解 利用笛卡尔叶形线的极坐标方程

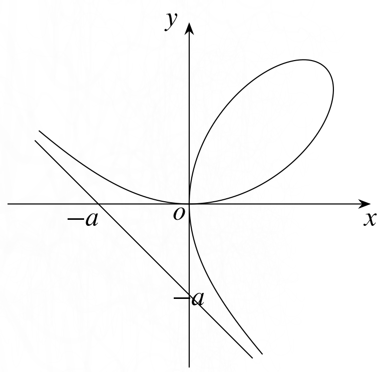
$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}, \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

面积元素

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\cdot\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

因而所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\tan\theta \\ &= \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$



$x^3+y^3-3axy=0$

$x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

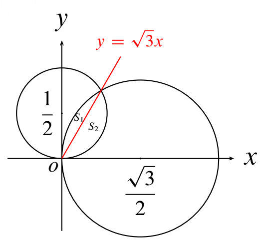
例题 6.165 计算 $x^2+y^2 \leqslant \sqrt{3}x$ 与 $x^2+y^2 \leqslant y$ 相交部分的面积

解 联立 $\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{3}x \\ x^2+y^2=y \end{cases}$ 解得 $y=\sqrt{3}x.$

分别计算 S_1 与 S_2 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{16}(3\sqrt{3}-2\pi)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{48}(3\sqrt{3}+8\pi)$$



故所求面积为

$$S = S_1+S_2 = \frac{1}{24}(6\sqrt{3}+\pi)$$

例题 6.166 求三叶玫瑰线 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$ 所围图形 D 的面积

解[13] 首先要搞清楚区域 D 是由怎样的不等式确定的. 这关键是确定不等号的方向, 一般地, 可以通过验证无穷远处对应的是大于号还是小于号来确定:

$$D:(x^2+y^2)^2\leqslant a(x^3-3xy^2)$$

上式左端是 4 次方, 右端是 3 次方, 可以看到无穷远处确实在上述不等式确定的区域外. 令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

则新区域为

$$\begin{cases}r^4\leqslant ar^3(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)\\ r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r\leqslant a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\\ r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

注意到

$$\cos\theta(4\cos^2\theta-3)=\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})$$

上式非负, 当且仅当

$$\cos\theta\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$$

因而新的区域是

$$\begin{cases}\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right]\\ 0\leqslant r\leqslant a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\end{cases}$$

其中, 我们又将 θ 在某一部分的值变化了 2π, 于是

$$\begin{aligned}S&=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\cup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)}r\,\mathrm{d}r\\&=\int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\cup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于

$$\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2=\frac{1}{2}(\cos 6\theta+1),$$

可得

$$S=\frac{a^2}{2}\times 3\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{4}$$

注 应该自然地看到 $\cos 6\theta$ 在长为 $\frac{\pi}{3}$ 的区间上积分为零, 而不是具体计算出来才看到这一点

例题 6.167 计算积分: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+\sqrt{3})^2}$.

解 *(by 予一人)*[69] 首先, 通过适当变形, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+\sqrt{3})^2}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\right]^2}\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}\right)^2}\overset{\text{周期性}}{=\!=}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}\right)^2}.\end{aligned}$$

现考虑极坐标方程[14]

$$\rho(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}},$$

[14]椭圆的极坐标方程 http://www.gaosan.com/gaokao/263689.html

事实上, 它表示的是直角坐标系下的椭圆

$$\frac{(x+\sqrt{2})^2}{3}+y^2=1,$$

这椭圆长半轴 $a=\sqrt{3}$, 短半轴 $b=1$, 于是其面积

$$A=\pi ab=\sqrt{3}\pi.$$

但这面积 A 同样可以用极坐标形式下的定积分表出, 即

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}\right)^2},$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta+\sqrt{3})^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}\pi.$$

例题 6.168 计算积分: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$.

解 (by 予一人)[70]. 记 $I:=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$. 考察极坐标下曲线方程 $\rho=\dfrac{1}{1+\sin t}$, 在 t 从 0 变化到 $\pi/2$ 的过程中，其极径 ρ 扫过的面积恰是

$$A:=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}I$$

极坐标下此面积不易计算，不妨化为直角坐标系再求。通过坐标变换，该曲线恰是直角坐标系下的抛物线 $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$. 于是

$$A=\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

故而 $I=2A=2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

6.4.2 求旋转体的体积

定理 6.19 (切片法)

设立体 Ω 介于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间, $\forall x\in(a,b)$, 过点 x 且与 x 轴垂直的平面截立体 Ω 的截面面积为连续函数 $A(x)$, 则立体的体积为

$$V_\Omega=\int_a^b\mathrm{d}V_\Omega=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.169 底面由圆 $x^2+y^2=4$ 围成，且垂直与 x 轴的所有截面都是正方形的立体体积为 ________

解 $x>0$ 时, 对于任一 x 的取值

正方形边长 $=2\sqrt{4-x^2}$, 正方形面积 $=\left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2$

所求体积

$$V=2\int_0^2\left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=42\frac{2}{3}$$

例题 6.170 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时， $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解 因抛物线过原点, 故 $c=1$ 由题设有

$$\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}\Longrightarrow b=\frac{2}{3}(1-a)$$

旋转体的体积 V

$$V = \pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right]$$
$$= \pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0,$$

得 $a=-\frac{5}{4}$, 代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geqslant 0$, 又因

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}^2a}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right]=\frac{4}{135}\pi>0$$

及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}, b=\frac{2}{3}, c=1$ 时，体积最小

定理 6.20 (柱壳法)

将由 x 轴, 直线 $x=a, x=b$ $(a<b)$, 及连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 6.171 求 $y=\sin x$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴所得的旋转体的体积

解

$$V_x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi^2$$

$$V_y = \pi\int_0^1 \left((\pi-\arcsin y)^2-\arcsin^2 y\right)\mathrm{d}y = 2\pi^2$$

定理 6.21 (任意直线的旋转体体积)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数其绕直线 l： $y=kx+b$, $(k\neq 0)$ 旋转所成的立体的体积为

$$V_l = \frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b \left[f(x)-kx-b\right]^2\left|1+kf'(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明 [15] 记曲线 $f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 为 P, 它到直线 $y=kx+b$ 上的距离为 $\overline{PQ}=h, Q\in l$, 则

$$h=\frac{|kx+b-f(x)|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

此外, 记点 P 处曲线小段弧微分为 $\mathrm{d}s$, 相应地在 $y=kx+b$ 上点 Q 处记为 $\mathrm{d}\xi$, Ox 轴上点 $(x,0)$ 处的小段弧微分记为 $\mathrm{d}x$. 又记 l 与 Ox 轴的夹角为 α, 点 P 处曲线 $f(x)$ 的切线与 Ox 轴之交角为 β, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi &= \mathrm{d}s\cdot\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cdot\cos\alpha(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x\\ &= \frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+f'(x)^2}}\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

[15]周明强《数学分析习题演练》

从而我们有 (ξ_1, ξ_2 是相应于 Ox 轴上 a, b 的 l 上的位置)

$$V_l = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \pi h^2 \, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b \left[f(x) - kx - b\right]^2 \left|1 + kf'(x)\right| \mathrm{d}x$$

定理 6.22 (坐标系旋转)

坐标系 xOy 与坐标系 $x'Oy'$ 的原点重合, 两坐标轴夹角为 θ.

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

例题 6.172 求曲线 $C: y = x^2$ 与直线 $L: y = x$ 所围成图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

解 在曲线上取点 $P(x, y)$, 该点到旋转轴的距离为 $d = \dfrac{|x^2 - x|}{\sqrt{2}}$

过该点垂直于旋转轴的截面面积为 πd^2, 沿旋转轴个截面的一个厚度 $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}l$ 在 x 轴上的投影为 $\mathrm{d}x$, 则 $\mathrm{d}l = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$, 于是体积微元为

$$\mathrm{d}V = \pi d^2 \, \mathrm{d}l = \frac{\sqrt{2}\pi(x^2 - x)^2}{2} \mathrm{d}x$$

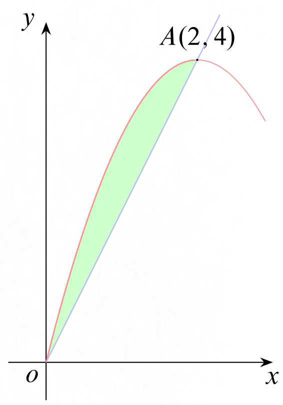
于是

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}V = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\pi(x^2-x)^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{30\sqrt{2}}$$

例题 6.173 求由 $y = 2x$ 与 $y = 4x - x^4$ 所围区域绕 $y = 2x$ 旋转所得旋转体体积.

解 曲线与直线的交点坐标为 $A(2, 4)$, 曲线上任一点 $P(x, 4x - x^2)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}|x^2 - 2x|$$



以 $y = 2x$ 为数轴 u (如图), 则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi\rho^2 \, \mathrm{d}u \quad \mathrm{d}u = \sqrt{5}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \frac{1}{5}(x^2 - 2x)^2 \cdot \sqrt{5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

故所求旋转体体积为

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{5}(x^2 - 2x)^2 \sqrt{5}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$

或者

$$V = \iint_D 2\pi \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} \mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2x} (2x - y)\,\mathrm{d}y = \frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$

定理 6.23 (任意直线的旋转体体积)

区域 D 绕直线 $ax + by + c = 0$(D 在直线的一侧) 旋转所成的立体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_D |ax + by + c| \, \mathrm{d}\sigma$$

例题 6.174 求由 $y = 0, y = \ln x$ 和 $x = e$ 所围成区域 D 绕直线 $y = -x$ 旋转的旋转体体积 V.

解

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \iint_D (y + x)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} (x + y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi\left(\frac{e^2}{4} + \frac{e}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

定理 6.24 (绕极轴旋转的旋转体体积)

在极坐标下，由 $0 \leqslant \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

6.4.3 求平面曲线的弧长

例题 6.175 求抛物线 $y = \frac{x^2}{2}$ 对应于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 一段的弧长.

证明 弧长元素

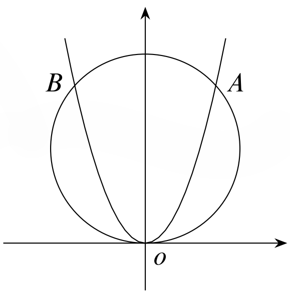
$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

于是所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

例题 6.176 (Putnam, 2001) A6: 单位圆内是否存在弧长超过 4 的抛物线弧段?

解 存在！如果存在这样的抛物线，必然是对称轴两侧都有抛物线弧段包含在单位圆内. 此时，我们不妨先考虑抛物顶点在单位圆上的简单情形 (如图):



设抛物线方程为 $y = ax^2$ (a 为常数)，单位圆方程: $x^2+(y-1)^2 = 1$，联立方程可求得 A 点坐标

$$A\left(\frac{\sqrt{2a-1}}{2a}, 2-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow a > \frac{1}{2}$$

依题意，抛物线弧长为 $2L > 4$，故只需证明：存在正数 $a > \frac{1}{2}$，使得 $L > 2$.

直接计算，得

$$\begin{aligned} L &= \int_0^A \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2a-1}}{2a}} \sqrt{1-4a^2x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\sqrt{2a-1}} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t > 2 \\ \Leftrightarrow L &= \frac{1}{a}\left(\int_0^{\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+4t^2}-2t)\,\mathrm{d}t + (2a-1)\right) > 2 \end{aligned}$$

因此，只需证明:

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+4t^2}-2t)\,\mathrm{d}t > 1$$

注意到

$$\sqrt{1+4t^2}-2t = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t} > \frac{1}{(1+2t)+2t} = \frac{1}{4t+1},$$

以及广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4t+1}\mathrm{d}t$ 发散. 所以当正数 a 充分大时，满足下面不等式

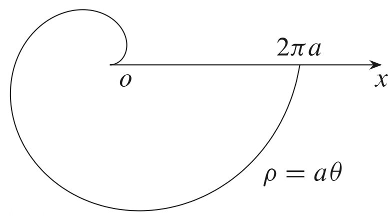
$$\int_0^{\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+4t^2}-2t)\,\mathrm{d}t > 1$$

所以单位圆内存在弧长超过 4 的抛物线弧段。

例题 6.177 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ 相应与 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 的一段的弧长

证明 弧长元素

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$



于是所求弧长为

$$s = \int_0^{\pi} \mathrm{d}s = a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

命题 6.5

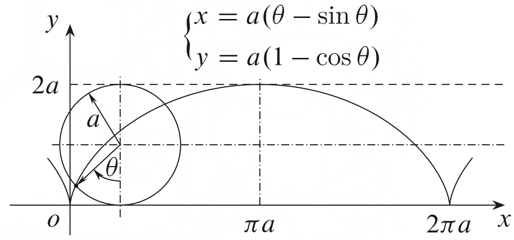
设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$，其中 $a \leqslant t \leqslant b$，则弧长元素

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例题 6.178 求摆线的一拱 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的弧长，其中 $a > 0$.

证明 弧长元素

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t, \end{aligned}$$



从而，所求弧长

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8a.$$

例题 6.179 设有曲线 $C_n:\ x^{2n} + y^{2n} = 1$ (n 正整数)，L_n 为 C_n 的长. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 8$.

证明 设曲线 C_n 与 x 轴的交点为 A，C_n 与直线 $y = x$ 的交点为 P_n，则点 P_n 的坐标为

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right).$$

曲线 C_n 在点 A 到点 P_n 间的曲线段的弧长记为 l_n. 由对称性，只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1$.

在开区间 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, 1\right)$ 内，求方程 $x^{2n} + y^{2n} = 1$ 所确定的隐函数的导数，得

$$y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}} < 0.$$

由弧长计算公式

$$\begin{aligned} l_n &= \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x < \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} (1+|y'|)\,\mathrm{d}x = \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} (1-y')\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x - y(x)\Big]_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = 1. \end{aligned}$$

另一方面，又有

$$\begin{aligned} l_n &= \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x > \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} |y'|\,\mathrm{d}x = \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} (-y')\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-y(x)\Big]_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}}^{1} = -\left(0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \to 1,\ n\to\infty \end{aligned}$$

于是由极限夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} (8l_n) = 8$.

引理 6.2 (古鲁金定理 II)

平面曲线绕此平面上不与其相交的轴旋转一周，生成的旋转体侧面积等于此曲线的质心绕同一轴旋转所产生的圆周长乘以该曲线的弧长。即：

$$S = 2\pi\rho l$$

其中，ρ 为曲线重心到轴的距离；l 为曲线段长

引理 6.3 (古鲁金定理 II)

一平面图形绕与其不相交的轴 (可以是它的边界) 旋转所得立体的体积等于该平面图形面积与其重心绕轴旋转的周长的乘积。即：

$$V = 2\pi\rho S$$

6.4.4 在物理学上的应用

定理 6.25 (细棒的质量)

非均匀细杆 (线密度为 $\rho(x)$) 从 a 到 b 的的质量

$$M = \int_a^b \mathrm{d}m = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

6.4.5 在经济学中的应用

例题 6.180 已知某商品边际收益为 $R'(q) = -0.08q + 25$(万元/t)，边际成本为 $= 5$(万元/t)，求产量从 250t 增加到 300t 时的销售收益 $R(q)$、总成本 $C(q)$、利润 $L(q)$ 的改变量 (增量).

解 边际利润

$$\begin{aligned}
L'(q) &= R'(q) - C'(q) = -0.08q + 20,\\
R(300) - R(250) &= \int_{250}^{300} (-0.08q + 25)\mathrm{d}q = 150(\text{万元}),\\
C(300) - C(250) &= \int_{250}^{300} 5\mathrm{d}q = 250(\text{万元}),\\
L(300) - L(250) &= \int_{250}^{300} (-0.08q + 20)\mathrm{d}q = -100(\text{万元}).
\end{aligned}$$

6.5 反常积分的敛散性

定义 6.1 (柯西主值)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上内闭可积，定义

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

为广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 *Cauchy* 主值，如果右边极限存在的话.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中只有一个瑕点 c, $a < c < b$，则定义

$$P.V. \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

为广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 *Cauchy* 主值，如果右边极限存在的话.

注 容易看出, 若广义积分收敛, 则其主值与广义积分的值相同; 但是当广义积分发散时, 它的主值仍可能存在. 因此主值是广义积分概念的一个推广.

6.5.1 无穷限的反常积分的审敛法

笔记 (易混淆) 讨论 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的关系:

- 问: 若 $f(x)>0$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 能否说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$? 答案是不能!

若我们已知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 还需要加什么条件才能说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

(1) 若 $f(x)$ 单调, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(2) 若 $f(x)$ 连续可微且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

例题 6.181 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 ($p\in\mathbb{R}$).

解 (1) 当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 当 $p=1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\ln x\Big|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\ln A=+\infty$$

综上可得,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}\quad (a>0)$$

定理 6.26 (比较审敛原理)

设 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ $(a\leqslant x<\infty)$. 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

推论 6.6 (Cauchy 判别法)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, K 为正常数.

(1) 若 $f(x)\leqslant \frac{K}{x^p}$ 且 $p>1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $f(x)\geqslant \frac{K}{x^p}$ 且 $p\leqslant 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 6.27 (比较判别法的极限形式)

设非负函数 f 和 g 在任何 $[a,u]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$.

(1) 当 $0<\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 敛散性相同;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 当 $\lambda = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

推论 6.7 (Cauchy 判别法的极限形式)

设 $f(x) \geqslant 0$ 在 $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \ell$, 则.

(1) 若 $0 \leqslant \ell < +\infty$, 且 $p < 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0 < \ell \leqslant +\infty$, 且 $p \geqslant 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

练习 6.22 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,\mathrm{d}x\ (p > 0)$ 的敛散性.

证明 由于

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1} + \frac{\sin x}{x}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ \frac{1}{2}, & p = 1, \\ 0, & p < 1. \end{cases}$$

故 $x = 0$ 不是瑕点, 因此只需讨论积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 利用 Taylor 公式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} &= \frac{\sin x}{x^p\left(1 + \frac{\sin x}{x^p}\right)} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\sin x}{x^p} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right). \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

由 Dirichlet 判别法, 可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 以及 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^{2p}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 故

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p + \sin x}\text{收敛} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}\text{收敛} \Longleftrightarrow p > \frac{1}{2}.$$

类似分析,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sin x}{x^p + \sin x}\right| &= \frac{|\sin x|}{x^p} - \frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \\ &= \frac{2}{\pi x^p} + \frac{|\sin x| - 2/\pi}{x^p} - \frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right). \end{aligned}$$

易得

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p + \sin x}\right| \mathrm{d}x\text{收敛} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\pi x^p}\text{收敛} \Longleftrightarrow p > 1.$$

即

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p + \sin x}\text{绝对收敛} \Longleftrightarrow p > 1.$$

例题 6.182 判断反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 $p \geqslant 0$.

解 由于 $\frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} > 0$, 只需考察无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 设当 $(n-1)\pi \leqslant x \leqslant n\pi$ 时,

$$\frac{(n-1)\pi}{\cos^2 x + (n\pi)^p \sin^2 x} \leqslant \frac{x}{\cos^2 x + x^p \sin^2 x} \leqslant \frac{n\pi}{\cos^2 x + (n\pi - \pi)^p \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{(n-1)\pi}{\cos^2 x+(n\pi)^p \sin^2 x} \mathrm{d}x &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(n-1)\pi}{\sqrt{(n\pi)^p-1}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}^+} \\
&= \frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}
\end{aligned}$$

同理

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{n\pi}{\cos^2 x+((n-1)\pi)^p \sin^2 x} \mathrm{d}x = \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}} \leqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x}{\cos^2 x+x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

当 $n \to +\infty$,

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}} \sim \frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}} \sim \frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x+x^p \sin^2 x} \mathrm{d}x \sim \frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}}$$

当 $\dfrac{p}{2}-1 \leqslant 1$ 时, 即 $p \leqslant 4$ 原积分发散; 当 $\dfrac{p}{2}-1 > 1$ 时, 即 $p > 4$ 原积分收敛.

定理 6.28 (无穷积分的 Cauchy 收敛准则)

无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta > \max\{a, 0\}$, 当 $u_1, u_2 > \Delta$ 时, 便有

$$\left|\int_a^{u_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

例题 6.183 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2 \pi(x+\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明 对充分大的正整数 n, 当 $x \in [2n+\frac{1}{6}, 2n+\frac{1}{3}]$ 时, 必有

$$2\pi n+\frac{\pi}{6} < \pi\left(2n+\frac{1}{6}+\frac{1}{2n+\frac{1}{6}}\right) \leqslant \pi(x+\tfrac{1}{x}) \leqslant \pi\left(2n+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+\frac{1}{3}}\right) < 2\pi n+\frac{\pi}{2}.$$

从而

$$\frac{1}{4} < \sin^2 \pi\left(x+\frac{1}{x}\right) < 1, \quad \forall x \in [2n+\tfrac{1}{6}, 2n+\tfrac{1}{3}].$$

所以, 对充分大的正整数 n,

$$\int_{2n+\frac{1}{6}}^{2n+\frac{1}{3}} \sin^2 \pi(x+\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x > \frac{1}{24}$$

从而根据 Cauchy 收敛准则, 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2 \pi(x+\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 6.184 讨论反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

解 由积分区间的可加性

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

判断积分 I_2 的敛散性,

- 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 当 $x\in[n\pi+\frac{\pi}{6},n\pi+\frac{\pi}{3}]$ 时, 有

$$n\pi+\frac{\pi}{6}<\left(n\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{6}}\right)<x+\frac{1}{x}<\left(n\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{3}}\right)<n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

从而

$$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{\pi}{3}}\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^p}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{(n\pi+\frac{\pi}{2})^p}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi+\frac{\pi}{2})^p}$ 发散, 故积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

$$I_2=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x^p}+\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right)\mathrm{d}x,$$

注意到 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 均收敛, 并且 $\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $\cos\dfrac{1}{x}$ 都是单调有界的, 由 *Abel* 判别法知, 积分 I_2 收敛, 故积分 I_2 条件收敛.

- 当 $p>1$ 时, 注意到

$$\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^p}<\frac{1}{x^p}$$

由 p 积分的结论可知 I_2 绝对收敛.

判断积分 I_1 的敛散性,

$$I_1=\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^{2-p}}\,\mathrm{d}x$$

- 由上面的结论, 当 $2-p>1$, 即 $0<p<1$ 时, I_1 绝对收敛, 当 $1\leqslant p<2$ 时, I_1 条件收敛.
- 当 $p\geqslant 2$ 时, $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}x^{p-2}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

由 *Cauchy* 收敛准则可知 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

综上, 当 $0<p<2$ 时, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛, 当 $p\geqslant 2$ 时, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 6.185 设 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x)f(x)=0$.

证明 (by 予一人)[33]. 不失一般性, 可设 $a\geqslant 1$. 首先, 可以证明 $f(x)\geqslant 0$. 若其不然, 则存在 $c\geqslant a$ 使得 $f(c)<0$, 于是

$$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}xf(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\int_c^{+\infty}cf(c)\frac{\mathrm{d}x}{x}=cf(c)\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}\to-\infty,$$

这将使得 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 于是矛盾. 既然 $f(x)\geqslant 0$, 于是任给 $x,\sqrt{x}\geqslant a$, 将有

$$\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\geqslant xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}xf(x)\ln x\geqslant 0,$$

同时, 依无穷积分的 Cauchy 收敛准则, 任给 $\varepsilon>0$, 只要 $x,\sqrt{x}$ 充分大, 就有 $\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}$, 进而 $0\leqslant xf(x)\ln x<\varepsilon$, 这就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0$.

定理 6.29 (无穷积分的 A-D 判别法)

1. (Abel 判别法) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. (Dirichlet 判别法) 若 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

练习 6.23 证明: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

解 两个瑕点, 分区间

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(i) 先证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

- 令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,0<x\leqslant 1\\ 1 & ,x=0\end{cases}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\quad\Rightarrow\quad\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\text{ 收敛}$$

- 显然 $f(x)=\sin x$ 在 $[1,+\infty)$ 连续, 且对 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有

$$F(u)=\int_1^u\sin x\,\mathrm{d}x=\cos 1-\cos u\quad\Rightarrow\quad|F(u)|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$$

而 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减并趋向于 0, 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(ii) 再证无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

- 已知 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有 $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$, 从而

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

同理可证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由于 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法可知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散

综上所述, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

例题 6.186 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

解 (梅加强,P275) 利用等式 $\sin(2n-1)x-\sin(2n-3)x=2\sin x\cos 2(n-1)x$ 易得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad\forall n\geqslant 1.$$

再利用等式 $\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x=\sin(2n-1)x\sin x$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}n,\quad\forall n\geqslant 1$$

在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上, 利用不等式 $x-\frac{x^3}{3!}\leqslant\sin x\leqslant x$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-1}\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)^{-1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

作变量代换 $x=\dfrac{t}{n}$, 并令 $n\to+\infty$ 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

再令 $\delta\to 0^+$ 即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

定理 6.30 (Froullani 积分公式)

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$a>0,b>0$, 有

1. 若 $f(0),f(+\infty)$ 存在，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$;
2. 若 $f(0)$ 存在，且 $\forall A>0$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$
3. 若 $f(+\infty)$ 存在，且 $\forall A>0$, $\displaystyle\int_0^{A}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

证明 (1) $\forall[\alpha,\beta]\cap(0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\overbrace{\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x}^{ax=t}-\overbrace{\int_\alpha^\beta\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x}^{bx=t}\\&=\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}+\int_{b\alpha}^{a\beta}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}-\int_{a\beta}^{b\alpha}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由第一积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t}+f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a},\end{aligned}$$

其中,ξ 在 $a\alpha$ 与 $b\alpha$ 之间,η 在 $a\beta$ 与 $b\beta$ 之间. 上式令 $\alpha\to0^+,\beta\to+\infty$ 可得结论.

(2) 由无穷积分收敛的柯西准则知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 R 充分大时, $\left|\displaystyle\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$,

即 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

(3) 由暇积分收敛的充要条件知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 r 充分小时, 即 $\left|\displaystyle\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{r\to 0+}\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$$

定理 6.31 (罗巴切夫斯基公式)

若连续偶函数 $f(x)$ 以 π 为周期, 则

$$\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

在主值积分意义下

$$P.V.\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 [16]

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{v=0}^{\infty}\int_{\frac{v\pi}{2}}^{(v+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $v=2n$ 或 $v=2n-1$, 相应地变量 x 变为 $x=n\pi+t$ 或 $x=n\pi-t$ 这样, 就有

$$\int_{2n\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi+t)\frac{\sin t}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2n\cdot\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi-t)\frac{\sin t}{n\pi-t}\,\mathrm{d}t$$

由于 $f(\pi+t)=f(\pi-t)=f(t)$, 可知

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^nf(t)\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

公式右端方括弧中表达式就是 $\frac{1}{\sin t}$ 的无穷级数展开式, 因此

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{v=0}^{\infty}\int_{\frac{v\pi}{2}}^{(v+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

令 $v=2n$ 或 $v=2n-1$, 相应地变量 x 变为 $x=n\pi+t$ 或 $x=n\pi-t$ 这样, 就有

$$\int_{2n\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi+t)\frac{\sin^2 t}{(n\pi+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2n\cdot\frac{\pi}{2}}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi-t)\frac{\sin^2 t}{(n\pi-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

由于 $f(\pi+t)=f(\pi-t)=f(t)$, 可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^nf(t)\left(\frac{1}{(t+n\pi)^2}+\frac{1}{(t-n\pi)^2}\right)\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

[16]金玉明《积分的方法与技巧》P166

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin^2 t\left\{\frac{1}{t^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(t+n\pi)^2}+\frac{1}{(t-n\pi)^2}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

公式右端方括弧中表达式就是 $\frac{1}{\sin^2 t}$ 的无穷级数展开式, 因此

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.5.2 无界函数的反常积分的审敛法

例题 6.187 讨论 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性 $(p\in\mathbb{R})$.

解 (1) 当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0+}\left.\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right|_\delta^1=\lim_{\delta\to 0+}\frac{1-\delta^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}+\infty, & p>1,\\ \frac{1}{1-p}, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 当 $p=1$ 时,

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0+}\ln x\Big|_\delta^1=-\lim_{\delta\to 0+}\ln\delta=+\infty$$

综上可得,

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & 0<p<1\\ +\infty, & p\geqslant 1\end{cases}$$

类似可得

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & 0<p<1\\ +\infty, & p\geqslant 1\end{cases}$$

推论 6.8 (Cauchy 判别法)

设非负函数 $f(x)$ 定义于 $(a,b]$, a 为瑕点, 且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积, 则有

(1) $f(x)\leqslant\frac{K}{(x-a)^p}$, 且 $0<p<1$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $f(x)\geqslant\frac{K}{(x-a)^p}$, 且 $p\geqslant 1$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 6.32 (比较判别法的极限形式)

若非负函数 f 和 g 在任何 $[u,b]\ (a<u<b)$ 上可积, 且 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$, 则

(1) 当 $0<\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 敛散性相同;

(2) 当 $\lambda=0$ 时, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 当 $\lambda=+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

推论 6.9 (Cauchy 判别法的极限形式)

设非负函数 $f(x)$ 定义于 $(a,b]$, a 为瑕点, 且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积, 若 $\lim_{x\to a+}(x-a)^p f(x)=\lambda$, 则

(1) 若 $0 \leqslant \ell < +\infty$, 且 $p < 1$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0 < \ell \leqslant +\infty$, 且 $p \geqslant 1$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 6.188 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 其中 $\alpha > 0$.

解 (1) 当 $\alpha < 1$ 时, 取正数 ε 充分小, 使得 $\alpha + \varepsilon < 1$, 由于

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} x^\varepsilon \ln x = 0$$

当 $x \to 0^+$ 时, $\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大, 于是 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 由于 $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \frac{\ln x}{x^\alpha} = \infty$,

当 $x \to 0^+$ 时, $\frac{1}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 低阶的无穷大量, 于是 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 6.189 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 m,n 是正整数

证明 (by 蓝兔兔) 这里 $x = 0, x = 1$ 为被积函数的暇点. 于是分开考虑

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac12} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$$

(i) 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{\sqrt[m]{x^2}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}},\ x \to 0$$

由于 m,n 是正整数, 所以 $\frac1n - \frac2m < 1$, 由极限判别法可知 $\int_0^{\frac12} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(ii) 因为

$$\int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{1-x=e^t} \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{\sqrt[m]{t^2}e^t}{\sqrt[n]{1-e^t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}}\,\mathrm{d}t$$

注意到

$$\frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}} \sim t^{\frac2m}e^{-t},\ x \to +\infty$$

而 $\int_{\ln 2}^{+\infty} t^{\frac2m}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 收敛 $\Longrightarrow \int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$收敛

综上可得: 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

定理 6.33 (暇积分的 Cauchy 收敛准则)

暇积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (瑕点为 a) 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$ 时, 便有

$$\left|\int_{u_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{u_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

定理 6.34 (有界瑕积分的 A–D 判别法)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个奇点 b

1. (Abel 判别法) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛
2. (Dirichlet 判别法) 若 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$; $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,b-a)$ 上有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

6.6 伽马函数与贝塔函数

6.6.1 Γ 函数

定义 6.2 (Γ 函数)

Γ 函数的定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z>0)$$

一般地, 对于任何正整数 n 有 $\Gamma(n+1)=n!$;
特殊值: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

注 Subfactorial

$$!n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},\quad n\geqslant 0$$

命题 6.6

如果定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:
(1) $f(x)>0$, 且 $f(1)=1$,
(2) $f(x+1)=xf(x)$,
(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的下凹函数
则 $f(x)\equiv\Gamma(x)$, $x\in(0,+\infty)$

证明 [55] 由条件 (1) 与条件 (2) 知, $f(n)=(n-1)f(n-2)=\cdots=(n-1)!f(1)=(n-1)!$. 设 $x\in(0,1)$, 由条件 (3), $\ln f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 故

$$\frac{\ln(n)-\ln(n-1)}{n-(n-1)}\leqslant\frac{\ln(n+x)-\ln(n)}{(n+x)-n}\leqslant\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)-n}, n=2,3,\cdots.$$

于是

$$\ln(n-1)!-\ln(n-2)!\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln(n-1)!}{x}\leqslant\ln n!-\ln(n-1)!,$$

即

$$x\ln(n-1)\leqslant\ln f(n+x)-\ln(n-1)!\leqslant x\ln n,$$

$$x\ln(n-1)+\ln(n-1)!\leqslant\ln f(n+x)\leqslant x\ln n+\ln(n-1)!,$$

$$\ln(n-1)^x(n-1)!\leqslant\ln f(n+x)\leqslant\ln n^x(n-1)!,$$

$$(n-1)^x(n-1)!\leqslant f(n+x)\xlongequal{\text{由条件 (2)}}(n-1+x)\cdots(1+x)xf(x)\leqslant n^x(n-1)!,$$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

将左边不等式中的 $n-1$ 换成 n 不等式仍然成立. 则有

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{x+n}{n}$$

$$\frac{n}{x+n} f(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x+n} f(x) = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ 及夹逼准则得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = f(x)$$

这就证明了 $f(x)$ $(x \in (0,1))$ 被左边的极限所唯一确定. 再由条件 (2) 推得 $f(x)$ $(x \in (0,+\infty))$ 由条件 (1)、(2)、(3) 所唯一确定, 即 $f(x) \equiv \Gamma(x), x \in (0,+\infty)$.

定理 6.35 (Γ 函数的常用公式)

几个常用公式

(1) 递推公式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), (x>0)$

(2) 余元公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, x 为非整数.

实用结论:

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-xt} \mathrm{d}t$$

其它公式

(1) $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$

(2) $\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x}$ *(x 为非整数)*

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = -\frac{\pi}{\cos \pi x}$

(4) *Legendre 加倍公式:*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right), s>0$$

例题 6.190 Legendre 加倍公式:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right), s>0$$

其中 Γ 是 Gamma 函数.

证明 记 $I(s) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}$. 令 $x = \tan^{2s} t$, 则

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}} = 2s\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t \cos t)^{2s-1} \mathrm{d}t \\ &= s2^{1-2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1} u \mathrm{d}u = 2^{-2s} s B(\frac{1}{2}, s) \\ &= 2^{-2s} s \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} = 2^{-2s}\sqrt{\pi} s \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}. \end{aligned}$$

另一方面

$$I(s) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}},$$

从而

$$I(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}} = s\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^{2s-1} \mathrm{d}t = \frac{s\mathrm{B}(s,s)}{2} = \frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

因此

$$2^{-2s}\sqrt{\pi}s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}=\frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

从而

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),s>0.$$

定理 6.36 (斯特林 (stirling) 公式)

1. $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n\to+\infty$
2. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0<\theta_n<1$
3. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$

例题 6.191 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$

证明 令 $a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)e}=\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}e}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e}>1$$

即 $a_n>a_{n+1}$, 即 $\{a_n\}$ 单调递减. 由积分放缩法有

$$\ln n!>\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n\Longrightarrow n!>n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

故 $a_n>1$. 由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 极限存在. 设

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

利用 Wallis 公式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!}\right]^2}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left[\frac{(An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n})^2}{A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}\right]^2}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left(2^{-2n-\frac{1}{2}}A\sqrt{n}\right)^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}A^2 2^{-4n-1}n}{2n+1}=\frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

所以 $A=\sqrt{2\pi}$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$$

例题 6.192 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^n\frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}$

证明 利用斯特林 (Stiring) 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\ \text{其中}0<\theta_n<1$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{i=1}^n\frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\exp\left[n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]}{\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n!\exp\left[n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{Stiring}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}}} \lim_{n\to\infty} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}}$$
$$= \sqrt{2\pi} e^{-(1+\gamma)}$$

其中 γ 为欧拉常数

例题 6.193 (Euler-Poisson 积分) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t]{x^2=t} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例题 6.194 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_0^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2}{4a}} \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}
\end{aligned}$$

练习 6.24 求定积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{\beta i x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2+\beta i x}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\left[\left(x^2-\frac{\beta i}{\alpha}x+\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right)-\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Re} e^{-\frac{\beta i^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right) \\
&= \operatorname{Re} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}
\end{aligned}$$

笔记

$$\frac{1}{\binom{m+n}{m}} = m\int_0^1 (1-x)^n x^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{(1+x)^y} = \frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-xt-t}\,\mathrm{d}t$$

例题 6.195 f $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ then

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)} = \prod_{k\geqslant 0}\frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)} \tag{6.41}$$

证明 according to Euler's definition for the gamma function

$$\Gamma(z)=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^z m!}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+m)},\quad \operatorname{Re} z>0$$

therefore we have

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)}&=\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)}=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\frac{m^{\beta_j}m!}{\beta_j(\beta_j+1)\cdot\cdots\cdot(\beta_j+m)}}{\frac{m^{\alpha_j}m!}{\alpha_j(\alpha_j+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_j+m)}}\\
&=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}m^{\beta_j-\alpha_j}\prod_{k=0}^{m}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}\\
&=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}\\
&=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)}
\end{aligned}$$

例题 6.196 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}(1-e^{-2x})}{x(1-e^{-10x})}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-(10n+1)x}(1-e^{-2x})}{x}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{-(10n+1)x}-e^{-(10n+7)x}\right)-\left(e^{-(10n+3)x}-e^{-(10n+9)x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{(10n+7)(10n+3)}{(10n+1)(10n+9)}=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{(\frac{7}{10}+n)(\frac{3}{10}+n)}{(\frac{1}{10}+n)(\frac{9}{10}+n)}\\
\xlongequal{(6.41)}&\ln\frac{\Gamma(\frac{1}{10})\Gamma(\frac{9}{10})}{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{7}{10})}=\ln\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}=\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}
\end{aligned}$$

定义 6.3 (digamma 函数)

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

♣

例题 6.197 求极限 $\lim\limits_{n\to 0}\sqrt[n]{n!}$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0}\sqrt[n]{n!}&=\lim_{n\to 0}\exp\left\{\frac{\ln(n!)}{n}\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to 0}\frac{\ln\Gamma(n+1)}{n}\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\Gamma(x+1)}{x}\right\}\\
&\xlongequal{洛必达}\exp\left\{\lim_{x\to 0+}\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right\}=e^{\psi(1)}=e^{-\gamma}
\end{aligned}$$

例题 6.198 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\dfrac{1}{x}+\gamma\right)$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}+\gamma\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)-1+\gamma x}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi(x+1)+\gamma}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi^2(x+1)+\psi'(x+1)\Gamma(x+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right)
\end{aligned}
$$

例题 6.199 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\big(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\big)=\gamma$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\big(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\big) &= \lim_{x\to 0}\Gamma\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)\\
&= \cdots = \gamma
\end{aligned}
$$

定义 6.4 (digamma 函数)

$$
\psi(x)=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{x+k}\right)\Rightarrow \psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x}
$$

♣

证明 根据 Weierstrass 定义的 $\Gamma(x)$ 函数

$$
\Gamma(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln x-\gamma x+\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right)\\
&= -\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k\geqslant 1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)\\
&= -\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{x+k}\right)
\end{aligned}
$$

例题 6.200 证明 $\Gamma'(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$

证明

$$
\begin{aligned}
\Gamma'(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\\
&= -1-\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\\
&= -1+\int_0^{+\infty}\ln\frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}e^{-x}\\
&= -1+e^{-x}\ln\frac{1-e^{-x}}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= -1+\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}-e^{-(n+1)x}}{x}-e^{-(n+1)x}\right)\mathrm{d}x\\
&= -1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-nx}-e^{-(n+1)x}}{x}-e^{-(n+1)x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \\
&= -\gamma
\end{aligned}
$$

例题 6.201 证明 $\Gamma''(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\log^2 x dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$

解

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \Longrightarrow \psi'(x) \xlongequal{\text{对 } \psi(x) \text{ 求导}} \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - (\psi(x))^2$$

故可得

$$\Gamma''(x) = \big(\psi'(x) + (\psi(x))^2\big)\Gamma(x)$$

由 *digamma* 的级数定义

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right) \Longrightarrow \psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

其中 $\Gamma(1) = 1, \psi(1) = -\gamma, \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$, 于是

$$\Gamma''(1) = \big(\psi'(1) + (\psi(1))^2\big)\Gamma(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

例题 6.202 证明: $\lim_{s\to 1+}\left(\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1}\right) = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

解 注意到

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$$

因此

$$
\begin{aligned}
\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1} &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}x - \Gamma(s-1)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\left(\frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由 *digamma* 函数的定义

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

令 $s \to 1^+$, 得到

$$\lim_{s\to 1^+}\left[\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1}\right] = \frac{-\psi(a)}{\Gamma(1)} = -\psi(a)$$

特别的, 令 $a = 1$ 得

$$\lim_{s\to 1^+}\left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right] = \gamma$$

6.6.2 Beta 函数

定义 6.5 (Beta 函数)

B 函数 (*Beta function*) 的定义为

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} x > 0,\ \operatorname{Re} y > 0)$$

上式的右边称为第一类欧拉 (*Euler*) 积分

其它形式

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\quad(\mathrm{Re}\,x>0,\ \mathrm{Re}\,y>0)$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\,x>0,\ \mathrm{Re}\,y>0)$$

♣

例题 6.203 证明: $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t$ 其中 $x>0,y>0$

解 利用换元法, 令 $t=\dfrac{u}{1+u}$, 则 $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,y)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{t=\frac{u}{1+u}}\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由此, 继续应用换元法, 有:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,y)&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t}_{t=\frac{1}{u}}\\&=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t+\int_1^0\frac{u^{1-x}}{(1+u)^{x+y}u^{-x-y}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\&=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u\\&=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定理 6.37 (Γ 函数与 B 函数的关联公式)

$\forall p>0,q>0$, 有 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$。

♡

证明

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

做变量替换, 令 $x=uv,y=u(1-v)$ 则其雅可比行列式 J 为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}v&u\\1-v&-u\end{vmatrix}=-u$$

$D \to D'$ 即:

$$\begin{cases} x = 0 & \to & u = 0, v = 0 \\ y = 0 & \to & u = 0, v = 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{p-1}\big[u(1-v)\big]^{q-1} e^{-u} u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \, \mathrm{d}u \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} \, \mathrm{d}v \\
&= \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)
\end{aligned}$$

例题 6.204 证明: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

解

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^{m+k} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k (-1)^k x^{m+k} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^m (1-x)^n \mathrm{d}x = \mathrm{B}(m+1, n+1) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

例题 6.205 计算: $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^n) \, \mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sin(x^n) \, \mathrm{d}x &\xlongequal{x^n \mapsto x} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{n}-1} \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{n}} e^{-xu} \, \mathrm{d}u\right) \sin(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\infty} e^{-xu} \sin(x) \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \frac{u^{-\frac{1}{n}}}{1+u^2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{1}{n}}(\theta) d\theta \quad (u = \tan\theta) \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{n}}(\theta) \cos^{\frac{1}{n}}(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1+n}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

例题 6.206 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x \ (n > 1)$

解

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x \xlongequal{x = \sqrt[n]{\tan^2\theta}} \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-\frac{2}{n}} \theta \sin^{\frac{2}{n}-1} \theta \mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\xlongequal{\text{余元公式}} \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}
$$

例题 6.207 计算积分: $\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x$

解 由 *Beta* 函数定义

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x &\xlongequal{x^5=t} \int_0^1 \frac{1+t^{2015}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{x^{1-1}+t^{2016-1}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{B}(1,2016) = \frac{0!2015!}{2016!} = \frac{1}{2016}
\end{aligned}
$$

例题 6.208 计算积分: $\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\mathrm{d}x,\ (a,b,p>0)$

解 作变量替换, 令 $y=(1+p)\dfrac{x}{x+p}$, 则

$$
\mathrm{d}y = \frac{p(p+1)}{(x+p)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{(x+p)^2}{p(p+1)}\mathrm{d}y
$$

且注意到

$$
1-y = 1-(1+p)\frac{x}{x+p} = \frac{p(1-x)}{x+p}
$$

故有

$$
1-x = \frac{x+p}{p}(1-y)
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\mathrm{d}x &\xlongequal{y=(1+p)\frac{x}{x+p}} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(\frac{x+p}{p}(1-y))^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\frac{(x+p)^2}{p(p+1)}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{(1+p)p^b}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-y)^{b-1}}{(x+p)^{a-1}}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{(1+p)^a p^b}\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{(1+p)^a p^b}\mathrm{B}(a,b)
\end{aligned}
$$

例题 6.209 计算积分: $\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\mathrm{d}x,\ (m,n>0)$

解 令 $t=\dfrac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\right) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}t$

$$
1-t = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \Rightarrow (1-x)^2 = 2(1-t)(1+x^2)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{u=\frac{1}{2}\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)}} 2^{m+n-2}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t\\
&= 2^{m+n-2}\mathrm{B}(m,n)
\end{aligned}
$$

例题 6.210 计算积分: $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+\cos x}}$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+\cos x}}&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+2\cos^2\frac{x}{2}}}\\&\xlongequal{u=\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\&\xlongequal{t=u^2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}-1}t^{\frac{1}{4}-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4})\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}\\&\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\tfrac{1}{4})\approx 1.85407\end{aligned}$$

例题 6.211 计算积分: $\int_0^{\pi}\frac{\sin^n x}{(1+k\cos x)^n}\mathrm{d}x,\ (0<|k|<1)$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sin^n x}{(1+k\cos x)^n}\mathrm{d}x&\xlongequal{t=\tan(\frac{x}{2})}\frac{2^n}{(1+k)^n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+\alpha^2t^2)^n}\mathrm{d}t,\alpha=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\\&\xlongequal{\alpha t=\sqrt{s}}\frac{2^n}{(1+k)^n}\cdot\frac{1}{2\alpha^n}\int_0^{+\infty}\frac{s^{\frac{1}{2}n-1}}{(1+s)^n}\mathrm{d}s\\&=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

例题 6.212 计算积分: $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$.

解 我们有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x\xlongequal{x^4=t}\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

对积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$ 做变量替换, 令 $t=\frac{1}{x}$, 可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$

由此知

$$J=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t=2I$$

所以

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=\frac{J}{2}=\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{8\sqrt{\pi}}$$

例题 6.213 计算积分: $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x\ (0<p<1)$

解 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)=\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}$$

故可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\mathrm{d}x}{1+x}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(\Gamma(p)\Gamma(1-p))\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\right)\\&=-\frac{\pi^2\cos(p\pi)}{\sin^2(p\pi)}\end{aligned}$$

例题 6.214 求定积分: $I=\int_0^1\frac{1}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}\mathrm{d}x(a>1)$

解 考虑分式线性变换，令

$$x=1-y=\frac{\beta-\alpha y}{d-cy}\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{\beta c-\alpha d}{(d-cy)^2}\mathrm{d}y$$

将 $x=0,1$ 分别代入 $x=1-y$, 即得 $y=1,0$. 接着代入到变换的复杂式子

$$0=\frac{\beta-\alpha}{d-c}\Rightarrow\alpha=\beta,\quad 1=\frac{\beta}{d}\Rightarrow\beta=d.$$

于是有 $\alpha=\beta=d\Rightarrow x=\frac{-dy+d}{-cy+d}$, 接着代入原积分

$$\frac{1}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}=\frac{(d-cy)^2}{((ac-d)y+(d-ad))\sqrt[5]{d^2(d-c)^3(1-y)^2y^3}}$$

显然当 $ac=d$ 即可用 *Beta* 函数, 故令 $x=\frac{-dy+d}{-\frac{d}{a}y+d}=a\frac{1-y}{a-y}$. 从而

$$\begin{aligned}I&\xlongequal{x=a\frac{1-y}{a-y}}-a^{-\frac{2}{5}}(a-1)^{-\frac{3}{5}}\int_0^1(1-y)^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{5}}\mathrm{d}y\\&=\frac{-a^{-\frac{2}{5}}(a-1)^{-\frac{3}{5}}\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}\end{aligned}$$

例题 6.215 计算积分: $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^6}}$.

解 令 $t=\sqrt{x}$,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^6}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^4}}$$

再令

$$x=\frac{1-y}{2+y}\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{-3}{(2+y)^2}\mathrm{d}y$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^6}}&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{1-y}{2+y}+\left(\frac{1-y}{2+y}\right)^4}}\cdot\frac{3}{(2+y)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{((2+y)^3+(1-y)^3)(1-y)}}\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(9+9y+9y^2)(1-y)}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^3}}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

例题 6.216 计算积分: $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{\pi}}$.

解 (by Unduloid)[71] 令

$$y=\frac{\sqrt{x^6+1}\left(32x^{13}-80x^7-4x\right)}{\sqrt{4096x^{30}+15872x^{24}+8704x^{18}+2944x^{12}-544x^6+1}}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^6}}$$

所以

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^6}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{12\sqrt{\pi}}$$

由例6.215知

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{12\sqrt{\pi}}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^6}}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{12\sqrt{\pi}}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{24\sqrt{\pi}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

笔记 [71] (1) 特殊超椭圆积分的代数倍加公式 (Algebraic Duplication Formula): 设 $\lambda\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$$2\int_0^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+t^6}}\mathrm{d}t\xlongequal{\mu=2\lambda\sqrt{\frac{1+\lambda^6}{1-8\lambda^6}}}\int_0^{\mu}\frac{1}{\sqrt{1+t^6}}\mathrm{d}t.$$

(2) 一个特殊椭圆积分的倍加公式 (Duplication Formula): 设 $\lambda\in(-1,1)$,

$$2\int_0^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t\xlongequal{\mu=\dfrac{2\lambda\sqrt{1+\lambda^4}}{1-\lambda^4}}\int_0^{\mu}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$

(3) 一个特殊椭圆积分的加法公式 (Addition Formula):

$$\int_0^{u}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-a^2t^2)(1-b^2t^2)}}+\int_0^{v}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-a^2t^2)(1-b^2t^2)}}=\int_0^{w}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-a^2t^2)(1-b^2t^2)}}$$

其中,

$$w=\frac{u\sqrt{(1-a^2v^2)(1-b^2v^2)}+v\sqrt{(1-a^2u^2)(1-b^2u^2)}}{1-a^2b^2u^2v^2}$$

推论 6.10 (二项式系数与 Beta 函数)

$$\frac{1}{C_k^n}=(n+1)B(k+1,n-k+1)\Longleftrightarrow C_k^n=\frac{1}{(n+1)B(k+1,n-k+1)}$$

解 (by fin3574) 易得

$$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{\frac{k!(n-k)!}{n!}}=\frac{1}{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}}$$

由 Beta 函数的定义有

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $\begin{cases} k+1=a \\ n-k+1=b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k=a-1 \\ n=a+b-2 \end{cases}$，于是

$$\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{\left[(k+1)-1\right]!\left[(n-k+1)-1\right]!}{\left[(k+1)+(n-k+1)-1\right]!}\frac{(n+1)!}{n!}=(n+1)B(k+1,n-k+1)$$

于是有

$$C_k^n=\frac{1}{(n+1)B(k+1,n-k+1)}$$

例题 6.217 求: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}$

解 注意到

$$\frac{1}{\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}}=m\int_0^1(1-x)^n x^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

那么有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}=m\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n x^{m-1}\,\mathrm{d}x=m\int_0^1 x^{m-2}\,\mathrm{d}x=\frac{m}{m-1}$$

练习 6.25 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$.

证明 注意到

$$\frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n)}{n\Gamma(x+n+1)}=\frac{B(x+1,n)}{n}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(x+1,n)}{n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^x\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\right)(1-t)^x\,\mathrm{d}t \\
&=\int_0^1\left[-\frac{\ln(1-t)}{t}\right](1-t)^x\,\mathrm{d}t\xlongequal{z=1-t}\int_0^1\left[-\frac{\ln z}{1-z}\right]z^x dz \\
&=\int_0^1(-1)\sum_{k=1}^{\infty}z^{x+k-1}\ln z dz=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\int_0^1 z^{x+k-1}\ln z dz \\
&\xlongequal{z=e^{-u}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}ue^{-u(x+k)}\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{y=u(x+k)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}ye^{-y}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}
\end{aligned}$$

第七章 微分方程

笔记 关于绝对值：绝对值必须加，否则，可能将函数的定义域丢失一半。先加绝对值，再化简去掉绝对值(如果可能的话)。

7.1 微分方程的基本概念

例题 7.1 设 f 是二次可微函数, 对于任何实数 x, y 都满足函数方程

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$$

试求 f 的表达式

解 首先在等式

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$$

令 $x = y = 0$ 得到 $f(0) = 0$.

又对其两边关于 x, y 先后求两次偏导数得

$$\begin{aligned} 2f(x)f'(x) &= f'(x+y)f(x-y) + f(x+y)f'(x-y) \\ 0 &= f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) \end{aligned}$$

作变量代换 $x + y = u, x - y = v$ 则对于任何实数 u, v 都有

$$f''(u)f(v) = f(u)f''(v)$$

如果 $f(v) \equiv 0$, 则该函数方程的解为 $f(x) \equiv 0$.

若 $f(v) \not\equiv 0$, 存在一点 v_0 使得 $f(v_0) \neq 0$, 则可令 $c = \dfrac{f''(v_0)}{f(v_0)}$, 即化为 $f''(u) = cf(u)$. 根据初始条件 $f(0) = 0$ 即可求得解为

$$f(u) = \begin{cases} A\sinh\sqrt{c}x, & c > 0 \\ Au, & c = 0, \text{ 其中}A\text{是任意常数} \\ A\sin\sqrt{-c}x, c < 0 \end{cases}$$

例题 7.2 [72] 求解积分方程

$$f(t) = at - \int_0^t \sin(x-t)f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \neq 0)$$

证明 由于 $f(x) * \sin t = \displaystyle\int_0^t f(x)\sin(x-t)\,\mathrm{d}x$, 所以原方程为

$$f(x) = at + f(x) * \sin t\,.$$

记 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, 因为 $\mathscr{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$, $\mathscr{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$, 所以对方程两边取拉氏变换得

$$F(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}F(s)\,,$$

即

$$F(s) = a\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right).$$

取拉氏逆变换得原方程的解为

$$f(t) = a\left(t + \frac{t^3}{6}\right).$$

例题 7.3 已知 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且

$$\int_0^x f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = e^{2x}-1\,,\quad x\geqslant 0$$

求 $f(x)$.

解 (*by ytdwdw*) 记 $F(s)$ 为 $f(s)$ 的 *Laplace* 变换, 则

$$F^2(x) = \frac{1}{s-2}-\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s-2)}\,,\quad s>2\,.$$

因为 f 非负, 从而 F 非负, 所以

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s(s-2)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(s-1)^2-1}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{s-1}\frac{1}{\sqrt{1-(s-1)^{-2}}} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^n\frac{1}{4^n(s-1)^{2n+1}}\,,\quad s>2\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{2}e^x\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^n\frac{x^{2n}}{4^n(2n)!}\\ &= \sqrt{2}e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2} = \sqrt{2}e^xI_0(x)\,,\quad x\geqslant 0\end{aligned}$$

其中 $I_0(x)$ 为零阶第一类修正 *Bessel* 函数

例题 7.4 (第七届数学类决赛) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$

解 令 $g(x) = f(x)-x$, 则有

$$xg(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

对于 $x>0$, 根据积分平均值定理, 存在 $x_1\in(0,x)$, 使得

$$\int_{\frac{x}{2}}^x g(t)\,\mathrm{d} = g(x_1)\frac{x}{2}.$$

因而 $g(x) = g(x_1)$. 设 $x_0 = \inf\{t\in(0,x)\,|\,f(x) = f(t)\}$. 则有 $g(x_0) = g(x)$.

若 $x_0>0$, 则重复上面过程, 可知存在 $y_0\in(0,x_0)$ 使得 $g(y_0) = g(x_0) = g(x)$. 这与 x_0 的取法矛盾. 因此, 必有 $x_0 = 0$. 这说明 $g(x) = g(0)$. 同理, 对 $x<0$, 也可以证明 $g(x) = g(0)$.

总之, $g(x)$ 是常数. 于是 $g(x) = x + C$, C 是常数

记 n 阶微分方程 $F\left(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$ 的包含 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解为

$$y = \varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

如果有雅可比行列式不恒等于 0, 则该解为通解.

$$W = \begin{vmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}C_1} & \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}C_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}C_n}\\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x'}{\mathrm{d}C_1} & \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x'}{\mathrm{d}C_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x'}{\mathrm{d}C_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x^{(n-1)}}{\mathrm{d}C_1} & \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x^{(n-1)}}{\mathrm{d}C_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}\varphi_x^{(n-1)}}{\mathrm{d}C_n}\end{vmatrix}\not\equiv 0$$

7.2 一阶微分方程的求解

7.2.1 可分离变量的微分方程

例题 7.5 (CMC,2017) 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$$

则 $f(x,y)=$ ________

解 利用偏导数的定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(0,\ y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right)^n$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(0,\ y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}}$$

所给等式化为

$$\mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\cot y}\text{，即 }\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$$

对 y 积分得

$$\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C\text{，即 }f(0,y)=C\sin y$$

又已知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$, 解得

$$f(x,y)=\varphi\mathrm{e}^{-x}\ (\varphi(y)\text{ 为待定函数})$$

由 $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, 得 $\varphi(y)=\sin y$, 故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$

7.2.2 齐次方程

例题 7.6 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{x^2+y}$ 的通解

解 *(by 曾熊)* 注意到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2x\,\mathrm{d}x}=\frac{y}{x^2+y}$$

令 $u=\dfrac{y}{x^2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xu+x^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2+y}\Rightarrow 2xu+x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2xu}{u+1}$$

整理可得

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=-\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分

$$\ln|y|=\frac{x^2}{y}+C$$

例题 7.7 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+1}{2xy}\cos^2(xy^2)-\dfrac{y}{2x}$ 的通解

解 法 *I* 两边同乘 $2xy$ 得

$$2xyy'=(2x+1)\cos^2(xy^2)-y^2$$

移项

$$2xyy' + y^2 = (2x+1)\cos^2(xy^2)$$

注意到 $(xy^2)' = 2xyy' + y^2$, 故

$$(xy^2)'\sec^2(xy^2) = 2x+1$$

即

$$\left[\tan(x^2y)\right]' = 2x+1$$

上式两边对 x 积分可得

$$\tan(x^2y) = x^2 + x + C$$

法 *II* 令 $xy^2 = u$, 则 $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

笔记

$$\text{分离变量} = \begin{cases} \text{能分} \longrightarrow \text{分} \\ \text{不能分} \longrightarrow \text{代} \end{cases}$$

例题 7.8 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x + \tan(x+y) = 0$ 的通解

解

$$x + y = u \Longrightarrow 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入原方程

$$x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1\right) + x + \tan u = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u} = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{\tan u} = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

积分可得

$$\ln|\sin u| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow |x\sin u| = e^{C_1} \Rightarrow x\sin u = \pm e^{C_1}$$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 并将 $x + y = u$ 代入得原方程解为

$$x\sin(x+y) = C \Longleftrightarrow y = \arcsin\frac{C}{x} - x$$

定理 7.1 (可化为齐次的方程)

可化为齐次的方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\ (c^2 + c_1^2 \neq 0)$

1. 当 $\dfrac{a_1}{a} \neq \dfrac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x = X + h,\ y = Y + k$ (h, k 为待定常数)
2. 当 $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda$ 时

注：上述方法适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\ (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

7.2.3 一阶线性微分方程

7.2.3.1 常数变易法

定理 7.2 (常数变易法)

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.1}$$

其通解为:

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right) \tag{7.2}$$

证明 法 I. 齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x$$

两端积分, 则齐次通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\quad (C=\pm e^{C_1}),$$

令 $C=C(x)$, 设非齐次的通解形式为

$$y=C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{7.3}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{7.4}$$

把 (7.3) 和 (7.4) 代入方程 (7.1) 得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)$$

整理可得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)\Rightarrow C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

两端积分, 得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C \tag{7.5}$$

将 (7.5) 式代入 (7.3), 便得非齐次方程 (7.1) 的通解

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

法 II(积分因子法). 两边同乘 $u(x)$, 原方程变为

$$u(x)y'+u(x)P(x)y=u(x)Q(x)$$

使得

$$[u(x)y]'=u(x)y'+u'(x)y=u(x)y'+u(x)P(x)y$$

于是

$$u'(x)=u(x)P(x)\Longrightarrow u(x)=e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

于是, 我们得到如下积分因子法

方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 两端同乘以积分因子 $u(x)=e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 得

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y'+P(x)ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\Longrightarrow \left(ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

上式两端同时积分可得

$$ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

即

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

注 通过将相应齐次方程解中的任意常数变成一个未知函数来求解, 因而人们把这种方法称为常数变易法

例题 7.9 求微分方程 $(x-e^y)y' = 1$ 的通解

解

$$(x-e^y)y' = 1 \Longrightarrow \frac{1}{x-e^y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x - e^y$$

故

$$x = e^{\int \mathrm{d}y}\left[-\int e^y \cdot e^{-\int \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right] = e^y(c-y)$$

例题 7.10 求微分方程的通解

$$y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x + (1-3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

解 由题易得

$$y^2(3y-x) + (3xy^2-1)y' = 0$$

两边同除以 y^2

$$3y - x + 3xy' - \frac{y'}{y^2} = 0$$

移项

$$3(xy'+y) = x + \frac{y'}{y^2}$$

两边同时积分

$$3xy + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y}$$

例题 7.11 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2-a^2}$ 的通解

解 方程可化为

$$2xy\,\mathrm{d}x - (x^2-y^2-a^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y + (y^2+a^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

两边同除以 y^2

$$\frac{2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{y^2} + \left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \mathrm{d}\left(y - \frac{a^2}{y}\right) = 0$$

两边同时积分, 可得

$$\frac{x^2}{y} + y - \frac{a^2}{y} = C \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2-a^2}{y} = C$$

例题 7.12 求微分方程

$$x\ln x\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos y(1 - x\cos y) = 0$$

解 *(by 西西)*

$$x\ln x\tan y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cos y-1$$

即

$$x\ln x\tan y\cdot\sec x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-\sec y$$

即

$$x\ln x\frac{\mathrm{d}(\sec y)}{\mathrm{d}x}+\sec y=x$$

设 $\sec y=u$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{u}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}$$

代入公式得

$$u=\sec y=\frac{x+C}{\ln x}$$

例题 7.13 求微分方程的全部解

$$y'=\frac{1}{1-y^3+2xy^2-x^2y}.$$

解 首先有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1-y^3+2xy^2-x^2y=-y\,(x-y)^2+1.$$

令 $z\,(y)=x\,(y)-y$, 我们得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+1=-yz^2+1,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-yz^2,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^2}=-y\,\mathrm{d}y\Rightarrow\frac{-1}{z}=-\frac{1}{2}y^2+C\Rightarrow\frac{-1}{x-y}=-\frac{1}{2}y^2+C,$$

即

$$x=y+\frac{2}{y^2-2C}.$$

显然 $y=x$ 也满足题意.

注 在某些场合, 互换自变量和因变量的位置可以起到立竿见影的作用.

例题 7.14 (18 数学 1) 已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

1. 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.
2. 当 $f(x)$ 周期为 T 的函数时, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期解.

解 *(by 向禹) 1.* 方程两边乘以 e^x 得

$$(e^xy)'=e^x(y'+y)=xe^x,$$

因此 $e^xy=(x-1)e^x+C$, 因此通解为

$$y=Ce^{-x}+x-1$$

2. 等式两边乘以 e^x 可得 $(e^xy)'=e^xf(x)$, 通解可表示为

$$y(x)=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)$$

现在 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$\begin{aligned}y(x+T)&=e^{-x-T}\left(\int_0^{x+T} f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)\\&=e^{-x-T}\left(\int_0^{T} f(t)e^t\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u+T)e^{u+T}\,\mathrm{d}u + C\right)\\
&= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u)e^{u+T}\,\mathrm{d}u + C\right)\\
&= e^{-x}\left(\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + C\right)e^{-T} + \int_0^x f(u)e^u\,\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}
$$

要使得这个解是周期函数，则 $y(x+T)=y(x)$，即满足 $\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + C\right)e^{-T} = C$

由此解得 $C = \dfrac{\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t}{e^T-1}$，因此 $y = e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}u + \dfrac{\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t}{e^T-1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

7.2.3.2 伯努利 (Bernoulli) 方程

定义 7.1 (伯努利 (Bernoulli) 方程)

伯努利 (Bernoulli) 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

两边同除以 y^n，并令 $z = y^{1-n}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

♣

例题 7.15 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = a(\ln x)y^2$ 的通解

解 两端同除以 y^2，得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y^{-1} = a\ln x$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y^{-1} = a\ln x$$

令 $z = y^{-1}$，则上述方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}z = -a\ln x$$

由常数变易法可得

$$z = x\left[C - \frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

以 y^{-1} 代 z，得所求方程的通解

$$yx\left[C - \frac{a}{2}(\ln x)^2\right] = 1.$$

例题 7.16 设 $P(x) \equiv 0$，以下方程称为黎卡提 (Riccati) 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \tag{7.6}$$

解 当 $R(x) \equiv 0$ 时，黎卡提 (Riccati) 方程就变成了伯努利方程；观察发现，若我们能找到 (7.6) 的一个特解，则不难用一个简单变换把消去. 具体地，设 $y = y^*(x)$ 是方程 (7.6) 的一个特解. 令 $Y(x) = y(x) - y^*(x)$，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(y-y^*)}{\mathrm{d}x} &= \overbrace{\left(P(Y+y^*)^2 + Q(Y+y^*) + R\right)}^{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} - \overbrace{\left(P(y^*)^2 + Qy^* + R\right)}^{\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}}\\
&= PY^2 + (2Py^* + Q)Y
\end{aligned}
$$

这是一个关于 Y 的伯努利方程

例题 7.17 求解 Riccati 方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 2xy - 3x^2 + 1$.

解 直接观察到方程的一个特解 $y = x$. 令 $Y = y - x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = Y^2 + 4xY.$$

这是一个伯努利方程, 可以解得

$$Y = \frac{e^{2x^2}}{C + \int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

从而原方程的通解为

$$y = x + \frac{e^{2x^2}}{C + \int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

7.2.4 一阶隐式方程

例题 7.18 求解如下方程：

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 - y^2 = 0$$

解 配方法

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\right)^2 = y^2$$

从方程直接解出 y' 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y - x$$

从而得到

$$y = Ce^x + x + 1 \quad \text{或} \quad y = Ce^{-x} + x + 1$$

如果我们可以得到 $F(x, y, z) = 0$ 的参数方程

$$x = P(u, v), \quad y = Q(u, v), \quad z = R(u, v)$$

则 $\mathrm{d}y = R(x, y)\,\mathrm{d}x$, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial Q}{\partial v}\,\mathrm{d}v = R(u, v)\left(\frac{\partial P}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial P}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)$$

从而得到关于 u, v 的一阶显示方程

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - R(u, v)\frac{\partial P}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial Q}{\partial v} - R(u, v)\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = 0$$

例题 7.19 求解方程：$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1$.

解 把方程写成参数形式

$$x = u, \quad y = \cos v, \quad y' = \sin u$$

我们有

$$\sin v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

从而 $\sin v = 0$ 或 $v = C - u$, 即 $y = \pm 1$ 或 $y = \cos(C - x)$.

7.2.5 恰当方程与积分因子

定义 7.2 (恰当方程)

假设 $M(x,y), N(x,y)$ 在某矩形内是 x,y 的连续函数, 且具有连续的一阶偏导数, 有

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.7}$$

如果方程 (7.7) 的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}u(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

称 (7.7) 为恰当方程.

容易验证 (7.7) 的通解为

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = C$$

这里 C 为任意常数

定理 7.3 ()

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 是 (7.7) 为恰当方程的充分必要条件

例题 7.20 求微分方程: $(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解

解 法 *I*. 这里 $M(x,y) = 3x^2+6xy^2, N(x,y) = 6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

因此方程是恰当方程

现在求 $u(x,y)$ 使它同时满足如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+6xy^2 \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y+4y^3 \tag{7.9}$$

由 (7.8) 对 x 积分, 得到

$$u(x,y) = x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \tag{7.10}$$

为了确定 $\varphi(y)$, 将 (7.10) 对 y 求导数, 并使它满足 (7.9), 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = 6x^2y+4y^3$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4 + C$$

将 $\varphi(y)$ 代入 (7.10) 得到

$$u(x,y) = x^3+3x^2y^2+y^4+C$$

因此, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4 = C$$

这里 C 为任意常数.

法 *II*. 这里 $M(x,y) = 3x^2+6xy^2, N(x,y) = 6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

因此方程是全微分方程

取 $x_0=0, y_0=0$, 有

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= \underbrace{\int_0^x (3x^2)\,\mathrm{d}x}_{(0,0)\to(x,0)} + \underbrace{\int_0^y (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y}_{(x,0)\to(x,y)} \\ &= x^3+3x^2y^2+y^4 \end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

例题 7.21 求微分方程 $(6y+x^2y^2)\,\mathrm{d}x+(8x+x^3y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解

解

$$f(x)(6y+x^2y^2)\,\mathrm{d}x+f(x)(8x+x^3y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=0$$

故有

$$f(x)(8x+x^3y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Rightarrow u(x,y)=f(x)\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)$$

$u(x,y)$ 对 x 求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= f'(x)\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)+f(x)\left(2y^4+\frac{3}{5}x^2y^5\right) \\ &= f(x)(6y+x^2y^2) \end{aligned}$$

可得 $f(x)$ 的微分方程

$$f'(x)\left(2x+\frac{1}{5}x^3y\right)=f(x)\left(4+\frac{2}{5}x^2y\right)\Longrightarrow f(x)=C_1x^2$$

于是

$$u(x,y)=C_1x^2\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)=C_2$$

因此, 通解为

$$2x^3y^4+\frac{1}{5}x^5y^5+C=0$$

例题 7.22 设 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, 求 $u(x,y,z)$

解[73]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy} \\ &= \frac{(x+y)\,\mathrm{d}(x+y)+z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)+(x+y)\,\mathrm{d}z}{(x+y)^2+z^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\big((x+y)^2+z^2\big)}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2\left(1+\frac{z^2}{(x+y)^2}\right)} \\ &= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right)+\frac{\frac{(x+y)\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right)+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{x+y}\right)}{1+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}\right) \end{aligned}$$

所以

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln\left((x+y)^2+z^2\right)+\arctan\frac{z}{x+y}$$

7.3 高阶微分方程的求解

7.3.1 可降阶的高阶微分方程

1. 形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程.
2. 形如 $F(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n)})$ 的方程 $(k\geqslant 1)$. 令 $y^{(k)}=p(x)$.
3. 形如 $F(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$ 的方程. 令 $y'=p(y)$

✍ **练习 7.1** 求微分方程: $y''-(y')^2+y'=0$ 的通解

解 变形得:

$$y''-(y')^2+y'=0\Longleftrightarrow\frac{y''-(y')^2}{y^2}=-\frac{y'}{y^2}$$

对上式积分得:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{y}+C_1\Longrightarrow y'-C_1y=1$$

左右同乘 e^{-C_1x}

$$\Longleftrightarrow e^{-C_1x}y'-C_1e^{-C_1x}y=e^{-C_1x}$$

对上式积分得:

$$e^{-C_1x}y=-\frac{1}{C_1}e^{-C_1x}+C_2$$

通解为:

$$y=C_2e^{C_1x}-\frac{1}{C}$$

例题 7.23 求微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ 的通解

解 因为 $y\neq 0$, 故题设方程可化为

$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=\ln y,\text{即}\left(\frac{y'}{y}\right)'=\ln y$$

注意到 $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, 上述方程化为

$$(\ln y)''=\ln y.$$

令 $\ln y=z$, 则原方程化为 $z''-z=0$. 利用特征根易得通解为

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

从而所求通解为

$$\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

例题 7.24 求微分方程 $y''-\dfrac{2}{(1-x)^2}y=0$ 的通解.

解 变形即得

$$(1-x)^2y''-2y=0$$

我就这么试了下

$$(1-x)^2y''-2(1-x)y'+2(1-x)y'-2y=0$$

没想过会这么巧

$$\left((1-x)^2y'\right)'+2\left((1-x)y\right)'=0$$

同时积分

$$(1-x)^2y' = -2(1-x)y + C_1$$

常数变易法

$$y = C_1(x-1)^2 + \frac{C_2}{x-1}$$

例题 7.25 求微分方程 $y'' = y(1+2\tan^2 x)$ 的通解.

证明 法 I(by 素履之往)[74] 令 $\sin x = t$, 则 $x = \arcsin t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-t^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2} = -t,\quad \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{t^2}{1-t^2}$$

应用复合函数的求导, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

故原方程可化为

$$-t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = y\left(1+\frac{2t^2}{1-t^2}\right)$$

化简

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{t}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}y$$

并注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1-t^2}\right) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}y + \frac{t}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1-t^2}y\right)$$

两边同时对 t 积分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{1-t^2}y + C_1$$

可化简为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\sqrt{1-t^2}\right) = C_1\sqrt{1-t^2}$$

解得

$$y\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right)C_1 + C_2$$

最终得到

$$y = C_1\left(\frac{x}{\cos x} + \sin x\right) + C_2\sec x$$

法 II(Unduloid)[74]. 将原微分方程改写为

$$y''(x) - \left[\sec^2(x) + \tan^2(x)\right]y(x) = 0$$

因为改写后的微分方程里含有 $\sec(x)$ 和 $\tan(x)$, 用代入方程试探可以发现 $y_1(x) = \sec(x)$ 为微分方程的一个特解. 将微分方程的系数分别记为 $p(x)$ 与 $q(x)$

$$y''(x) - \left[1+2\tan^2(x)\right]y(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad y''(x) + p(x)\cdot y'(x) + q(x)\cdot y = 0$$

于是利用 ODE 中的 Liouville 公式，有

$$y_2(x) = y_1(x)\int^{t=x}\frac{1}{{y_1}^2(t)}\exp\left[-\int^{\tau=t}p(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sec(x)\int^{t=x}\frac{1}{\sec^2(t)}\exp(0)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\cos(x)}\int^{t=x}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{x+\cos(x)\sin(x)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\cos(x)}+\sin(x)\right]
\end{aligned}
$$

于是，原微分方程的通解为:

$$y(x)=C_1\sec(x)+C_2\left[\frac{x}{\cos(x)}+\sin(x)\right]$$

例题 7.26 求微分方程 $y''=y(1+2\cot^2 x)$ 的通解.

证明 令 $\cos x=t$, 则 $x=\arccos t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1-t^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=-t,\quad \cot^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{t^2}{1-t^2}$$

应用复合函数的求导, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

故原方程可化为

$$(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(1+\frac{2t^2}{1-t^2}\right)$$

化简

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{t}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}y$$

并注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}y+\frac{t}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1-t^2}y\right)$$

两边同时对 t 积分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{1-t^2}y+C_1$$

可化简为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\sqrt{1-t^2}\right)=-C_1\sqrt{1-t^2}$$

解得

$$y\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(-t\sqrt{1-t^2}+\arccos t\right)C_1+C_2$$

最终得到

$$y=C_1\left(\frac{x}{\sin x}-\cos x\right)+C_2\csc x$$

7.3.2 常系数齐次线性微分方程

如果 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解, 那么, 此方程的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数

表 7.1: n 阶常系数齐次线性微分方程的解

特征方程的根	方程通项中的对应项
单实根 λ	给出 1 项: $e^{\lambda x}$
k 重实根 λ	给出 k 项: $y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})$
一对单虚根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$	给出 2 项: $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
一对 k 重虚根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$	给出 $2k$ 项: $y = e^{\alpha x}\big[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2x + \cdots + D_kx^{k-1})\sin\beta x\big]$

例题 7.27 求方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解。

解 特征方程: $\lambda^5 - \lambda^4 = 0$. 特征根:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_5 = 1$$

原方程通解:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x$$

例题 7.28 求方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解。

解 特征方程: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. 即 $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

特征根:

$$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm\mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y = (C_1 + C_3x)\cos x + (C_2 + C_4x)\sin x$$

例题 7.29 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解。

解 特征方程:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0.$$

特征根:

$$\lambda_{1,2} = 0\,, \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm 2\mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y = C_1 + C_2x + e^x(C_3\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

7.3.3 常系数非齐次线性微分方程

例题 7.30 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均为非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的特解, 其中 $p(x), q(x), f(x)$ 为已知函数, 且

$$\frac{y_2(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_1(x)} \neq \text{常数}$$

证明: $y = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$ 为给定方程的通解 (C_1, C_2 为任意常数)

证明 由于 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均为非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解, 故 $y_2(x) - y_1(x)$, $y_3(x) - y_1(x)$ 为原方程对应的齐次方程的特解, 且由

$$\frac{y_2(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_1(x)} \neq \text{常数}$$

知 $y_2(x) - y_1(x)$ 与 $y_3(x) - y_1(x)$ 线性无关. 又 $y_1(x)$ 是原方程的一个特解, 故由线性方程解的结构定理知

$$y = C_1\left[y_2(x) - y_1(x)\right] + C_2\left[y_3(x) - y_1(x)\right] + y_1(x)$$

是原方程的通解, 即

$$y = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$$

为给定方程的通解 (C_1, C_2 为任意常数)

例题 7.31 求微分方程 $y'' - 5y'' + 6y = 6$ 的通解。

解 特征方程

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

对应的齐次方程的通解

$$Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

其中 $y = 1$ 是原方程的一个特解。原方程的通解为：

$$y = 1 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

笔记 本题的特解；$6y = 6 \Rightarrow y = 1$

定理 7.4 (解的叠加原理)

设 y_1^* 和 y_2^* 分别是非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x)$$

和

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^* + y_2^*$ 是非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解

例题 7.32 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^x - e - x$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

解 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：

e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.

因此可以用下述两种解法

法 *I.* 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= (xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x = 2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x \\ &= e^x-2xe^x \end{aligned}$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.
法 *II.* 故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$\begin{cases} y'=e^x+xe^x-2c_1e^{2x}-c_2e^{-x} \\ y''=2e^x+xe^x+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x} \end{cases},$$

消去 c_1,c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

定理 7.5 (复数解的叠加原理)

设线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)+ig(x)$$

(其中 $a_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为实函数) 有复数解 $y=u^*+iv^*$, 则这个解的实部 u^* 和虚部 v^* 分别是线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

和

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

的解

7.3.3.1 待定系数法

定理 7.6 ($f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型)

非齐次方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$$

设特解为：

$$y^*=x^kP_m(x)e^{\lambda x}$$

$$\text{其中}\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ P_m(x)\text{为}x\text{的}m\text{次一般多项式}, \\ k=\begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征单根} \\ 2 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征重根} \end{cases} \end{cases}$$

例题 7.33 求方程 $y''+y'+y=e^x\sin x$ 的通解.

解 特征方程: $r^2+r+1=0$ 解得: $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

利用欧拉公式

$$y''+y'+y=e^x\sin x=\operatorname{Im}e^{(1+i)x} \tag{7.11}$$

由于 $\lambda = 1+i$ 不是特征根, 故可设特价解为 $y^* = Ae^{(1+i)x}$. 而

$$y^{*\prime} = A(1+i)e^{(1+i)x}$$
$$y^{*\prime\prime} = A(1+i)^2 e^{(1+i)x}$$

带入式(7.11), 可解得

$$A = \frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$$

故特解为

$$y^* = \operatorname{Im} Ae^{(1+i)x} = \frac{2}{13}\sin x - \frac{3}{13}\cos x$$

所求通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{2}{13}\sin x - \frac{3}{13}\cos x$$

定理 7.7 ($f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$ 型)

非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$$

设特解为:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[P_m(x)\cos\omega x + Q_m`(x)\sin\omega x]$$

$$\text{其中}\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ m = \max\{l,n\}, P_m(x)\text{和}Q_m\text{分别为}x\text{的两个不同的}m\text{次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda+\omega i \text{ 不是特征根}, \\ 1, & \text{当 } \lambda+\omega i \text{ 是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

例题 7.34 求通解: $y'' + y = x\cos 2x$.

解 特征方程

$$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r = \pm i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$l = 1, n = 0, m = \max\{1,0\} = 1, \lambda = 0, \omega = 2, \lambda + \omega i = 2i$$

$\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$$

带入原方程, 得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数, 得

$$a = -\frac{1}{3}, b = c = 0, d = \frac{4}{9}$$

故特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

故所求通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

例题 7.35 求通解: $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$.

解 特征方程

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Longrightarrow r = -1 \pm 2i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$l = 0, n = 0, m = \max\{0, 0\} = 0, \lambda = 0, \omega = 2, \lambda + \omega i = 2i$$

$\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$$

将 y^* 带入原方程，得

$$(-4a + 4b + 5a) \cos 2x + (-4b - 4a + 5b) \sin 2x = \sin 2x$$

比较系数，得

$$b = \frac{1}{17}, a = -\frac{4}{17}$$

特解为

$$y^* = -\frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x$$

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x$$

例题 7.36 求通解: $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x} \cos 3x$.

解 特征方程

$$r^2 + 2r + 10 = 0$$

特征根

$$r_1 = -1 - 3i, r_2 = -1 + 3i$$

对应齐次方程的通解

$$Y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

$$l = 1, n = 0, m = \max\{1, 0\} = 1, \lambda = -1, \omega = 3, \lambda + \omega i = -1 + 3i$$

$\lambda + \omega i = -1 + 3i$ 是特征根，故设特解为

$$y^* = xe^{-x}((ax + b) \cos 3x + (cx + d) \sin 3x)$$

带入原方程，得

$$\big(12cx + (2a + 6d)\big) \cos 3x + \big(-6b + 2c\big) \sin 3x = x \cos 3x$$

比较系数，得

$$\begin{cases} 12c = 1 \\ 2a + 6d = 0 \\ -6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -3d \\ b = \dfrac{1}{36} \\ c = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

特解为

$$y^* = xe^{-x}\left(\frac{1}{36} \cos 3x + \frac{1}{12} x \sin 3x\right)$$

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + xe^{-x}\left(\frac{1}{36} \cos 3x + \frac{1}{12} x \sin 3x\right)$$

7.3.3.2 降阶法

例题 7.37 求通解: $y''+y'-2y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

解 降阶法. 令 $u(x)=y'+ay, u'(x)+bu(x)=y''+y'-2y$. 则

$$u'(x)+bu(x)=y''+(a+b)y'+aby,$$

比较系数, 可得

$$\begin{cases} a+b=1, \\ ab=-2 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

取 $a=-1, b=2$, 原方程等价于

$$u'(x)+2u(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

由常数变易法可求得通解为

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{xe^x}{3}+\frac{e^{-x}}{3}-\frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1)-\frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1)-\frac{1}{6}$$

7.3.3.3 常数变易法

定理 7.8 (Wronskian[1])

微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$, 设

$$\bar{Y}=C_1A(x)+C_2B(x),$$

那么对于方程的两个独立解: $A(x), B(x)$

$$\text{Wronskian } W(x)=\begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ A'(x) & B'(x) \end{vmatrix}=A(x)B'(x)-A'(x)B(x)$$

设

$$v_1(x)=-\int\frac{f(x)B(x)}{W(x)}\mathrm{d}x \qquad v_2(x)=\int\frac{f(x)A(x)}{W(x)}\mathrm{d}x$$

方程的特解由下面式子给出:

$$y^*=v_1A(x)+v_2B(x)$$

方程的通解为

$$y=\bar{Y}+y^*=C_1A(x)+C_2B(x)+v_1A(x)+v_2B(x)$$

例题 7.38 求通解 $y''+y=\sec x$.

解 特征方程 $r^2+1=0$, 特征根 $r=\pm i$. 对应齐次方程的通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ (\cos x)' & (\sin x)' \end{vmatrix}=\cos^2x+\sin^2x=1$$

其中

$$v_1(x)=-\int\frac{\sec x\sin x}{1}\mathrm{d}x=\ln|\cos x|$$

$$v_2(x)=\int\frac{\sec x\cos x}{1}\mathrm{d}x=x$$

故特解为

$$y^*=\cos x\ln(\cos x)+x\sin x$$

那么所求通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln(\cos x) + x\sin x$$

例题 7.39 求通解: $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

解 特征方程 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根 $r = -2$ 或 $r = 1$

对应齐次方程的通解

$$Y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

朗斯基行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ (e^{-2x})' & (e^x)' \end{vmatrix} = 3e^{-2x}e^x$$

其中

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\int \frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^x}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}e^x(e^x-2) - \frac{1}{3}\ln(e^x+1) + C \\ v_1(x) &= \int \frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^{-2x}}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\ln(e^x+1) + C \end{aligned}$$

故特解为

$$\begin{aligned} y^* &= v_1A(x) + v_2B(x) \\ &= \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

那么所求通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= Y + y^* \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

7.3.3.4 微分算子法

定义 7.3 (算子多项式)

对于函数 $y = y(x)$: 规定下列记号及意义:

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad Dy = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$$

$$D^2 = DD = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \qquad D^2y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x} = y''$$

$$D^k = D^{k-1}D = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \qquad D^ky = \frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}^kx} = y^{(k)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$D^0 = 1$ $\qquad$ $D^0y = 1,\ y = y$ 这里 “1” 仅仅是个记号

记 $F(D) = D^n +$ $a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ 称为形式上的算子多项式.

$$F(D)y = D^ny + a_1D^{n-1}y + a_2D^{n-2}y + \cdots + a_{n-1}Dy + a_ny$$

♣

定义 7.4 (逆算子)

算子 $\dfrac{1}{F(D)}$ 为 $F(D)$ 的逆算子. 逆算子 $\dfrac{1}{D}$ 为积分

♣

二阶常系数线性非齐次方程:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

将方程写成算子形式:

$$y(D^2 + pD + q) = f(x)$$

特解可表示为:

$$y^* = \frac{1}{F(D)} f(x) = \frac{1}{D^2 + pD + q} f(x)$$

定理 7.9 ($f(x) = P_n(x)$)

将 $\dfrac{1}{F(D)}$ 展开为形式上的泰勒级数 (或洛朗级数)

$$\frac{1}{F(D)} = a_1 + a_2 D + a_3 D^2 + \cdots + a_n D^n$$

取展开式到第 n 项为止, 则特解

$$\frac{1}{F(D)} P_n(x) = (a_0 + a_1 D + \cdots + a_n D^n) P_n(x)$$

例题 7.40 $y'' + y' = x^2 + 1$, 求特解 y^*

解 自由项 $f(x) = x^2 + 1$ 为二次多项式, 因此, $\dfrac{1}{F(D)}$ 展开到 2 阶即可

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{D^2 + D}(x^2 + 1) = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{1 + D}(x^2 + 1)\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[(1 - D + D^2)(x^2 + 1)\right] = \frac{1}{D}\left[(x^2 + 1) - (2x) + (2)\right] \\ &= \frac{1}{D}[x^2 - 2x + 3] = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \end{aligned}$$

定理 7.10 ($f(x) = xP(x)$)

$$\frac{1}{F(D)}(xP(x)) = \left(x - \frac{F'(D)}{F(D)}\right)\frac{1}{F(D)} P(x)$$

定理 7.11 ($f(x) = e^{kx}$ 型)

1° 若 $F(k) \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{F(D)} e^{kx} = \dfrac{e^{kx}}{F(k)}$

2° 若 $F(k) = 0$, 且 k 为 $F(k) = 0$ 的 n 重根 $(n = 1, 2)$,

$$\frac{1}{F(D)} e^{kx} = x^n \frac{1}{F^{(n)}(D)} e^{kx} = x^n \frac{e^{kx}}{F^{(n)}(k)}$$

其中 $F^{(n)}(D) = \dfrac{\mathrm{d}^n F(D)}{\mathrm{d} D^n}$.

例题 7.41 $y'' + 3y' + 2y = 5e^{3x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k = 3 \Rightarrow F(k) = k^2 + 3k + 2 = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2 \neq 0$, 故设特解为

$$y^* = \frac{5e^{3x}}{D^2 + 3D + 2} = \frac{5e^{3x}}{3^2 + 3 \cdot 3 + 2} = \frac{1}{4} e^{3x}$$

例题 7.42 $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k=-3 \Rightarrow F(k)=k^2+2k-3=(k-1)(k+3)=0$, 故 $k=-3$ 为 $F(k)=0$ 的 *1* 重根, 故设特解为

$$y^*=x\cdot\frac{e^{-3x}}{2D+2}=x\cdot\frac{e^{-3x}}{2\cdot(-3)+2}=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$$

例题 7.43 $y''+2y'+y=e^{-x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k=-1 \Rightarrow F(k)=k^2+2k+1=(k+1)^2=0$, 故 $k=-1$ 为 $F(k)=0$ 的 *2* 重根, 故设特解为

$$y^*=x^2\cdot\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

定理 7.12 ($f(x)$ 为三角函数型)

自由项 $f(x)$ 为三角函数 $\sin(ax)$ 或 $\cos(ax)$ 的形式:

1° 若 $F(-a^2)\neq 0$, 则

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax)=\frac{\sin(ax)}{F(-a^2)}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax)=\frac{\cos(ax)}{F(-a^2)}$$

2° 若 $F(-a^2)=0$, 且 $(-a^2)$ 为 $F(-a^2)=0$ 的 n 重根 $(n=1,2)$

$$\frac{1}{F(D)}\sin(ax)=x^n\frac{1}{F'(D)}\sin(ax)$$

$$\frac{1}{F(D)}\cos(ax)=x^n\frac{1}{F'(D)}\cos(ax)$$

也可利用欧拉公式:

$$\frac{1}{F(D)}\sin(ax)=\operatorname{Im}\left[\frac{e^{iax}}{F(ia)}\right],\quad \frac{1}{F(D)}\cos(ax)=\operatorname{Re}\left[\frac{e^{iax}}{F(ia)}\right]$$

例题 7.44 $y''+3y=\sin 2x$, 求特解 y^*

解 因为 $a=2 \Rightarrow F(-a^2)=-a^2+3\neq 0$, 故设特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+3}\sin 2x=\frac{1}{-a^2+3}\sin 2x=\frac{1}{-2^2+3}\sin 2x=-\sin 2x$$

例题 7.45 $y''+4y=\cos 2x$, 求特解 y^*

解 因为 $a=2 \Rightarrow F(-a^2)=(-a^2)+4=0$, 故 $-a^2$ 为 $F(-a^2)=0$ 的 *1* 重根, 故设特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+4}\cos 2x=\frac{x}{2D}\cos 2x=\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{D}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{x\sin 2x}{4}$$

例题 7.46 $y''+3y'-2y=\sin 2x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^2+3D-2}\sin 2x\\
&=\frac{1}{-(2)^2+3D-2}\sin 2x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{D-2}\sin 2x\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{D+2}{D^2-4}\sin 2x=\frac{1}{3}\left[\frac{D\sin 2x}{D^2-4}+\frac{2\sin 2x}{D^2-4}\right]\\
&=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cos 2x}{D^2-4}+\frac{2\sin 2x}{D^2-4}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cos 2x}{-2^2-4}+\frac{2\sin 2x}{-2^2-4}\right]\\
&=-\frac{1}{12}(\sin 2x+\cos 2x)
\end{aligned}$$

定理 7.13 ($f(x)=e^{kx}v(x)$)

自由项 $f(x)=e^{kx}v(x)$ (k 可以是复数), $v(x)$ 是实函数.

$$\frac{1}{F(D)}\left(e^{kx}v(x)\right)=e^{kx}\cdot\frac{1}{F(D+k)}v(x)$$

例题 7.47 $y''+3y'-2y=e^x\sin 2x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2+3D-2}e^x\sin 2x\\
&= e^x\frac{1}{(D+1)^2+3(D+1)-2}\sin 2x = e^x\frac{1}{D^2+5D+2}\sin 2x\\
&= e^x\frac{1}{-2^2+5D+2}\sin 2x = e^x\frac{1}{5D-2}\sin 2x\\
&= e^x\frac{5D+2}{25D-4}\sin 2x = e^x\frac{5D+2}{25\cdot -2^2-4}\sin 2x\\
&= -\frac{1}{104}e^x(10\cos 2x+2\sin 2x)\\
&= -\frac{1}{52}e^x(5\cos 2x+\sin 2x)
\end{aligned}$$

例题 7.48 $y''-2y'+y=xe^x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2-2D+1}(xe^x)=e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}x\\
&= e^x\frac{1}{D^2}x=e^x\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^3e^x}{6}
\end{aligned}$$

7.3.4 二阶变系数线性微分方程

笔记 二阶变系数线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{7.12}$$

设 $y=uv=u(x)v(x)$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}
\end{aligned}$$

代入到原方程

$$u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p(x)u\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+q(x)u\right]v=f(x) \tag{7.13}$$

令 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的系数为 0, 得

$$2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p(x)u=0 \quad\Rightarrow\quad u=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

代入方程 (7.13)

$$u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+q(x)u\right]v=f(x)$$

例题 7.49 求微分方程 $y''-4xy+(4x^2-1)y=0$ 的通解.

解 设 $y=uv$, 令

$$u(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)=\exp\left(\int 2x\,\mathrm{d}x\right)=e^{x^2}$$

代入方程

$$e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+\left[2e^{x^2}(2x^2+1)-8x^2e^{x^2}+(4x^2-1)e^{x^2}\right]v=0$$

化简得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+v(x)=0$$

容易求得

$$v=C_1\cos x+C_2\sin x$$

又因为 $y=uv, u=e^{x^2}$, 故所求通解为

$$y=e^{x^2}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

注 是不是所有的变系数微分方程都能这么化？想太多！不存在的！我又用软件试了几个一般的, 根本不行！

7.3.5 欧拉方程

定义 7.5 (欧拉方程)

形如

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x) \tag{7.14}$$

的方程 (其中 $p_1,p_2,\cdots p_n$ 为常数) , 叫做欧拉方程 ♣

作变换令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, 将自变量 x 换成 t , 我们有

$$x=\ln t\Longrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}&=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么上述计算结果可以写成

$$\begin{aligned}
xy'&=Dy\\
x^2y''&=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y=(D^2-D)y=D(D-1)y\\
x^3y'''&=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y
\end{aligned}$$

一般地, 有

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

将它带入欧拉方程 (7.14) 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个解后, 把 t 换成 $\ln x$, 即得原方程的解.

7.3.6 刘维尔公式

定理 7.14 (刘维尔公式)

若 $y_1(x)$ 是二阶线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个解，则该方程与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解为

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

例题 7.50 求方程 $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解。

解 因为

$$1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0$$

对应齐次方程一特解为 $y_1=e^x$，由刘维尔公式

$$y_2=e^x\int \frac{1}{e^{2x}}e^{-\int \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1x+C_2e^x$

例题 7.51 已知方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的一个特解为 $y=x$, 于是方程的通解为

解 化简可得

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=x\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

于是求出通解为

$$y=C_1x+\underbrace{C_2\left(-\frac{1}{2x}\right)}_{C_2\times(-\frac{1}{2})\text{仍是常数}}=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

例题 7.52 方程 $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=0$ 的通解为

解 易知其中一个特解为 $y_1(x)=e^x$, 化简可得

$$y''-\frac{x^2-2}{x^2-2x}y'+\frac{2x-2}{x^2-2x}=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=e^x\int \frac{1}{e^{2x}}e^{-\int \frac{2-x^2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x^2\end{aligned}$$

于是求出通解为

$$y=C_1e^x+C_2x^2$$

7.4 微分方程组

例题 7.53 求解方程组: $\begin{cases}t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+ty\\-t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x+ty\end{cases}$

解 *(by Unduloid)*[76] 原方程组可变形为

$$\begin{cases} y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{3x}{t} \\ y = -\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \dfrac{2x}{t} \end{cases} \tag{7.15}$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{3x}{t} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{2x}{t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{x}{t} = 0$$

代入(7.15)得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{3x}{t}\right) - \frac{x}{t} = 0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{t-3}{t} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{t-3}{t^2} \cdot x = 0 \tag{7.16}$$

很明显有一个特解 $x_1(t) = t$, 于是利用 *ODE* 中的 *Liouville* 公式, 有

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) \int \frac{1}{{x_1}^2(t)} \exp\left[-\int^{\tau=t} p(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t \\ &= t \int \frac{1}{t^2} \exp\left[-\int^{\tau=t} \frac{\tau-3}{\tau} \mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t \\ &= t \int \frac{1}{t^2} \cdot t^3 \exp(-t)\,\mathrm{d}t = t \int t \exp(-t)\,\mathrm{d}t = -t(t+1)\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

因此 (7.16) 的通解为

$$x(t) = C_1 t - C_2 t(t+1)\mathrm{e}^{-t}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{3x}{t} \\ &= C_1 + 2C_2(t^2 - t - 1)\mathrm{e}^{-t} - \frac{3\left[C_1 t - C_2 t(t+1)\mathrm{e}^{-t}\right]}{t} \\ &= -2C_1 + C_2(t^2 + 2t + 2)\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

因此, 方程组的通解为

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t - C_2 t(t+1)\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = -2C_1 + C_2(t^2 + 2t + 2)\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

第八章 差分方程

8.1 差分方程概述

定义 8.1 (差分的定义)

设函数 $y = f(t)$, 记 $y_t = f(t)$.

1. 函数 $y(t)$ 在 t 处的一阶差分记为
$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t \quad 或 \quad \Delta y_t = y(t+1) - y(t)$$
2. 函数 $y(t)$ 在 t 处的二阶差分记为
$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$
3. 函数 $y(t)$ 在 t 处的n 阶差分记为
$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i y_{t+n-i}$$

其中, Δ 表示差分算子.

定理 8.1 (差分的四则运算)

当 a, b, C 为常数, u_t 和 v_t 为 t 的函数时, 有以下结论成立

(1) $\Delta(C) = 0$;

(2) $\Delta(Cy_t) = C\Delta y_t$;

(3) $\Delta(au_t + bv_t) = a\Delta u_t + b\Delta v_t$;

(4) $\Delta(u_t v_t) = u_t \Delta v_{t+1} + v_{t+1}\Delta u_t$;

(5) $\Delta\left(\dfrac{u_t}{v_t}\right) = \dfrac{v_t \Delta u_t - u_t \Delta v_t}{v_t v_{t+1}}$;

定义 8.2 (差分方程)

一般地, 含未知函数有和未知函数差分的方程称为差分方程

差分方程的一般形式为
$$F(t, y_t, y_{t+1}, \cdots, y_{t+n}) = 0 \quad 或 \quad G(t, y_t, \Delta y_t, \cdots, \Delta^n y_t) = 0$$

其中 F, G 为表达式, t 是自变量

8.2 一阶常系数线性差分方程

8.2.1 特征根法

定理 8.2 ($f(x) = \lambda^t P_n(t)$ 型)

一阶常系数线性差分方程的一般形式为
$$y_{t+1} - py_t = f(t), p \neq 0$$

1. 对于齐次方程 $y_{t+1} - py_t = 0$, 其特征方程为 $\lambda - p = 0 \Rightarrow \lambda = p$, 则通解为
$$Y_t = Cp^t, t = 0, 1, 2, \cdots \tag{8.1}$$
2. 对于非齐次方程 $y_{t+1} - py_t = \lambda^t P_n(t)$, 其中 $P_n(t)$ 为 t 的 n 次多项式.

则设特解为

$$y_t^* = \lambda^t Q_n(t) t^k$$

$$\text{其中}\begin{cases} ①\ \lambda^t\ \text{照抄}; \\ ②\ Q_n(t)\ \text{为}\ t\ \text{的}\ n\ \text{次多项式}; \\ ③\ k = \begin{cases} 0,\ \lambda \neq p \\ 1,\ \lambda = p \end{cases} \end{cases}$$

例题 8.1 求 $y_{t+1} - y_t = 3 + 2t$ 的通解

解 由式 (8.1) 得到齐次方程的通解为

$$y_t = C,$$

因为 $p = 1$ 故设所求方程的特解为 $\bar{y}_t = t(b_0 + b_1 t)$ 代入方程得

$$(t+1)\big(b_0 + b_1(t+1)\big) - t(b_0 + b_1 t) = 3 + 2t$$

所以

$$\begin{cases} 2b_1 = 2 \\ b_0 + b_1 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_0 = 2 \end{cases}$$

故所求通解为

$$y_t = C + 2t + t^2$$

例题 8.2 求 $y_{t+1} - 3y_t = 7 \cdot 2^t$ 的通解

解 由式 (8.1) 得到齐次方程的通解为

$$\bar{y}_t = C \cdot 3^t, \quad \text{其中}\ C\ \text{为常数}.$$

因为 $3 = p \neq \lambda = 2$ 故设所求方程的特解为 $y_t^* = b \cdot 2^t$ 代入方程得

$$b \cdot 2^{t+1} - 3b \cdot 2^t = 7 \cdot 2^t \Rightarrow b = -7$$

故所求方程特解为

$$y_t^* = -7 \cdot 2^t$$

通解为

$$y_t = C \cdot 3^t - 7 \cdot 2^t$$

定理 8.3 ($f(x) = b$ 型)

非齐次方程 $y_{t+1} - py_t = b$. 通解为

$$y_t = \begin{cases} Cp^t + \dfrac{b}{1-p}, & p = 1, \\ C + bt, & p = 1. \end{cases} \tag{8.2}$$

例题 8.3 求 $y_{t+1} - 5y_t = 3$ 的通解和满足 $y\big|_{t=0} = \dfrac{7}{3}$ 的特解

解 该差分方程中 $p = 5$，$b = 3$，由式 (8.2) 得到方程通解

$$y_t = C \cdot 5^t + \frac{3}{1-5} = C \cdot 5^t - \frac{3}{4}$$

将 $y_0=\frac{7}{3}$ 带入上式得到 $C=\frac{37}{12}$，故所求特解为

$$y_t^*=\frac{37}{12}\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

定理 8.4 ($f(x)=\lambda^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$ 型)

非齐次方程

$$y_{t+1}-py_t=\lambda^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$$

令 $\delta=\lambda(\cos\theta t+i\sin\theta t)$. 则设特解为

$$y_t^*=\lambda^t t^k(A\cos\theta+B\sin\theta)$$

其中 $\begin{cases}\text{① } \lambda^t \text{ 照抄;}\\ \text{② } k=\begin{cases}0,\ \delta \text{ 不是特征根}\\ 1,\ \delta \text{ 是特征根}\end{cases}\end{cases}$

8.2.2 迭代法

例题 8.4 用迭代法求方程 $y_{t+1}-py_t=b$ 的通解

解 设给定初始值为 y_0，依次将 $t=0,1,2,\cdots$, 代入方程得:

$$\begin{aligned}
&y_1=py_0+b\\
&y_2=py_1+b=p(py_0+b)+b=p^2y_0+b(1+p)\\
&y_3=py_2+b=p^3y_0+b(1+p+p^2)\\
&\ \cdots\cdots
\end{aligned}$$

假设 $y_t=p^ty_0+b(1+p+p^2+\cdots+p^{t-1})$, 则

$$\begin{aligned}
y_{t+1}&=py_t+b\\
&=p(p^ty_0+b(1+p+p^2+\cdots+p^{t-1}))+b\\
&=p^{t+1}y_0+b(1+p+p^2+\cdots+p^t)
\end{aligned}$$

由数学归纳法可得

$$y_t=p^ty_0+b(1+p+p^2+\cdots+p^{t-1})$$

从而 $y_{t+1}-py_t=b$ 的解为

$$\begin{aligned}
y_t&=p^ty_0+b(1+p+p^2+\cdots+p^{t-1})\\
&=\begin{cases}p^ty_0+b\dfrac{1-p^t}{1-p}, & \text{当 } p\neq 1\\ y_0+bt, & \text{当 } p=1\end{cases}\\
&=\begin{cases}\left(y_0-\dfrac{b}{1-p}\right)p^t+\dfrac{b}{1-p}, & \text{当 } p\neq 1\\ y_0+bt, & \text{当 } p=1\end{cases}
\end{aligned}$$

例题 8.5 用迭代法求方程 $y_{t+1}-py_t=b^n$ 的通解.

解 由于 $y_{t+1}=py_t+b^n$ 依次将 $t=0,1,2,\cdots$, 代入方程得:

$$\begin{aligned}
&y_1=py_0+1\\
&y_2=py_1+b=p(py_0+1)+b=p^2y_0+b+p\\
&y_3=py_2+b^2=p^3y_0+p^2+pb+b^2
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

假设 $y_t = p^t y_0 + \sum\limits_{k=0}^{t-1} p^{t-1-k} b^k$, 则

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= p^{t+1} y_0 + p \left(\sum_{k=0}^{t-1} p^{t-1-k} b^k \right) + b^t \\ &= p^{t+1} y_0 + \sum_{k=0}^{t-1} p^{t-k} b^k + b^t \\ &= p^{t+1} y_0 + \sum_{k=0}^{t} p^{t-k} b^k. \end{aligned}$$

由数学归纳法可得

$$y_t = p^t y_0 + \sum_{k=0}^{t-1} p^{t-1-k} b^k.$$

由此可得方程的通解为

$$y_t = C p^t + \sum_{k=0}^{t-1} p^{t-1-k} b^k.$$

8.3 二阶常系数线性差分方程

二阶常系数齐次线性差分方程的一般形式为:

$$y_{t+2} + p y_{t+1} + q y_t = 0 \tag{8.3}$$

其特征方程:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right) \tag{8.4}$$

二阶常系数齐次线性差分方程的通解:

① λ_1, λ_2 为相异的实特征根，$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2-4q}\right), \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2-4q}\right)$

齐次通解为：$y_t = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$，其中 C_1，C_2 为任意常数

② λ 为特征方程的重根，$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$，

齐次通解为：$y_t = (C_1 + C_2 t)\left(-\frac{p}{2}\right)^t$，其中 C_1，C_2 为任意常数

③ 特征方程有共轭复根，$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，$\alpha = -\frac{p}{2}$，$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$

齐次通解为：$y_t = r^t\left(C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)\right)$，其中：$C_1$，$C_2$ 为任意常数。

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \cos\theta = \frac{\alpha}{r}, \sin\theta = \frac{\beta}{r}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

证明 法 I(待定系数法). 两边加 $-\lambda y_{t+1}$, 其中 λ 为待定常数, 则有

$$y_{t+2} - \lambda y_{t+1} = -(p + \lambda) y_{t+1} - q y_t$$

当 $\lambda = q$ 时即为原式, 不妨假设 $\lambda \neq p$, 提公因式 $p - \lambda$,

$$y_{t+2} - \lambda y_{t+1} = -(\lambda + p)\left(y_{t+1} + \frac{q}{p + \lambda} y_t\right)$$

构造等比数列, 我们令

$$\lambda = -\frac{q}{p + \lambda} \Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- 当判别式 $\Delta = p^2 - 4q > 0$ 时,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

- 当判别式 $\Delta = p^2 - 4q = 0$ 时,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$$

- 当判别式 $\Delta = p^2 - 4q < 0$ 时,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \mathrm{i}\sqrt{4q - p^2}\right)$$

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 注意到 $\lambda_1 + \lambda_2 = -p$, 于是得到

$$y_{t+2} - \lambda_1 y_{t+1} = \lambda_2\left(y_{t+1} - \lambda_1 y_t\right)$$

此时, $\{y_{t+1} - \lambda_1 y_t\}$ 为等比数列, 故

$$y_{t+1} - \lambda_1 y_t = \lambda_2^{t-1}\left(y_2 - \lambda_1 y_1\right)$$

同理可得

$$y_{t+1} - \lambda_2 y_t = \lambda_1^{t-1}\left(y_2 - \lambda_2 y_1\right)$$

两式相减

$$y_t = \frac{y_2 - \lambda_1 y_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2}\lambda_2^t + \frac{y_2 - \lambda_2 y_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1}\lambda_1^t$$

当 $\Delta < 0$ 时, 若令

$$\lambda_{1,2} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

利用棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

例题 8.6 求 $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 4y_t = 0$ 的通解.

解 特征方程

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$$

故通解为

$$y_t = C_1(-1)^t + C_2(-4)^t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例题 8.7 求 $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

故通解为

$$y_t = \left(C_1 + tC_2\right)3^t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例题 8.8 求 $y_{t+2} + 4y_t = 0$ 的通解.

解 特征方程

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$$

实部

$$\alpha = -\frac{p}{2} = 0$$

虚部

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} = 2$$

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2, \sin\beta=\frac{\beta}{r}=1$$

故所求通解为

$$y_t=2^t\left(C_1\sin\frac{\pi}{2}t+C_2\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例题 8.9 数列 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 如果满足条件

$$F_1=F_2=1\ ; \quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ ,\ n\geqslant 1$$

则称此数列为斐波那契 (Fibonacci) 数列.

解 特征方程

$$x^2=x+1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

故通解为

$$F_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

将 $F_1=F_2=1$ 代入得

$$\begin{cases} C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, C_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 从而

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

8.3.1 待定系数法

定理 8.5 ($f(x)=\lambda^t P_n(t)$ 型)

非齐次方程

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=\lambda^t P_n(t)$$

其中 $P_n(t)$ 为 t 的 n 次多项式. 则设特解为

$$y_t^*=\lambda^t t^k Q_n(t)$$

$$\text{其中}\begin{cases} ① \lambda^t \text{ 照抄;} \\ ② Q_n(t) \text{ 为 } t \text{ 的 } n \text{ 次多项式;} \\ ③ k=\begin{cases} 0, & \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1, & \lambda \text{ 是特征单根} \\ 2, & \lambda \text{ 是 2 重特征根} \end{cases} \end{cases}$$

例题 8.10 求 $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=3^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=3$$

$f(t)=3^t P_0(t)$, 由于 $\lambda=3=\lambda_1=\lambda_2$, 因此 $\lambda=3$ 为二重根, 故设特解为 $\bar{y}_t=bt^2 3^t$

将其代入原差分方程得

$$b(t+2)^2 3^{t+2}-6b(t+1)^2 3^{t+1}+9b^2 3^t=3^t$$

解得 $b=\frac{1}{18}$, 特解为 $\bar{y}_t=\frac{1}{18}t^2 3^t$ 所求通解为

$$y_t=(C_1+C_2 t)3^t+\frac{1}{18}t^2 3^t$$

例题 8.11 求 $y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=5^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$$

$f(t)=5^t P_0(t)$, 由于 $\lambda=5\neq 2=\lambda_1=\lambda_2$, 因此 $\lambda=5$ 不是特征根, 故设特解为 $\bar{y}_t=b3^t$

将其代入差分方程得

$$b3^{t+2}-4b3^{t+1}+4b3^t=5^t$$

解得 $b=\frac{1}{9}$, 非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t=\frac{1}{9}5^t$

所求通解为

$$y_t=(C_1+C_2 t)2^t+\frac{1}{9}5^t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例题 8.12 求 $y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t=2^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2$$

$f(t)=2^t P_0(t)$, 由于 $\lambda=2=\lambda_2\neq\lambda_1$, 因此 $\lambda=2$ 是单特征根, 故设特解为 $\bar{y}_t=bt2^t$

将其代入差分方程得

$$b(t+2)2^{t+2}-3(t+1)b3^{t+1}+2bt3^t=2^t$$

解得 $b=\frac{1}{2}$, 非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t=\frac{1}{2}2^t=2^{t-1}$

所求通解为

$$y_t=C_1+\left(C_2+\frac{1}{2}\right)2^t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

定理 8.6 ($f(x)=\lambda^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$ 型)

非齐次方程

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=\lambda^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$$

令 $\delta=\lambda(\cos\theta+i\sin\theta)$. 则设特解为

$$y_t^*=\lambda^t t^k(A\cos\theta t+B\sin\theta t)$$

$$\text{其中}\begin{cases}\text{① } \lambda^t \text{ 照抄;}\\ \text{② } k=\begin{cases}0, & \delta \text{ 不是特征根}\\ 1, & \delta \text{ 是特征单根}\\ 2, & \delta \text{ 是 2 重特征根}\end{cases}\end{cases}$$

8.3.2 降阶法

例题 8.13 (2018, 数 III) 差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的通解是 $\underline{\quad C2^x-5\quad}$

解 根据二阶差分的定义可得

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x&=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)\\&=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x\end{aligned}$$

由 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 得

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$$

令 $u_x = y_{x+1} - ay_x, u_{x+1} + bu_x = y_{x+2} - 2y_{x+1}$, 则

$$y_{x+2} - (a-b)y_{x+1} - aby_x = y_{x+2} - 2y_{x+1}$$

比较系数, 可得

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$$

取 $a = 2, b = 0$, 原方程等价于 $u_{x+1} = 5$, 即 $u_t = 5$. 从而

$$y_{x+1} - 2y_x = 5 \Longrightarrow y_t = C2^t - 5$$

8.3.3 算子法

定理 8.7

对于函数 $f(n)$: 规定下列记号及意义:

1. 差分算子 Δ: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$
2. 移位算子 E: $E = \Delta + 1$

对二阶非齐次常系数差分方程

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = f(n) \quad \Rightarrow \quad a_n^* = \frac{1}{E^2 + pE + q} f(n)$$

下面用 $F(E) = E^2 + pE + q$ 表示算子, 根据 $f(n)$ 的不同, 有如下的公式

1. 常数式: $\dfrac{1}{F(E)} C = \dfrac{C}{F(1)}$, 其中 C 为任意常数, 且 $F(1) \neq 0$.
2. 指数式: a 为指数函数的底
   - 若 $F(a) \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{F(E)} a^n = \dfrac{1}{F(a)} a^n$
   - 若 $F(a) = 0$, 则 $\dfrac{1}{F(E)} a^n = n \dfrac{1}{F'(a)} a^{n-1}$
3. 移位式: $\dfrac{1}{F(E)} a^n g(n) = a^n \dfrac{1}{F(aE)} g(n)$.
4. 幂函数: $\dfrac{1}{F(E)} n^k = (C_0 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \cdots + c_k\Delta^k) n^k$, $\Delta = E - 1$, 对于 n 的多项式也适用.

8.4 非线性差分方程

定理 8.8 (不动点法)

设 $a_{n+1} = \dfrac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$, 其中 A, B, C, C 为常数。其特征根为: $x = \dfrac{Ax + B}{Cx + D}$.

1. $x_1 \neq x_2$ 时, $\dfrac{a_n - x_1}{a_n - x_2} = C \cdot \dfrac{a_{n-1} - x_1}{a_{n-1} - x_2}$
2. $x_1 = x_2$ 时, $\dfrac{1}{a_n - x_1} = \dfrac{1}{a_{n-1} - x_1} + C$

例题 8.14 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2} (n \in \mathbb{N}_+)$, 求 a_n.

解 法 *I.* 特征根为

$$x = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

故

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+C(\text{等差数列})$$

将 $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}$ 代入, 得 $C=\frac{1}{2}$(公差). 从而

$$\frac{1}{a_n}=\frac{n+1}{2}\Rightarrow a_n=\frac{2}{n+1}(n\in\mathbb{N}_+)$$

法 *II.* 两边取倒数得

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$$

故有

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{a_{n-2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\cdots=\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{2}$$

故 $a_n=\dfrac{2}{n+1}$

例题 8.15 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\alpha, a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 *(by 予一人)*[77]. 特征方程

$$x=1-\frac{1}{4x}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}$$

于是考虑将递归式变形为

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{4a_n}\right)-\frac{1}{2}=\frac{2a_n-1}{2+(4a_n-2)},$$

取倒数, 得

$$\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^{-1}+2,$$

这表明 $\left\{\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right\}$ 是等差序列, 于是

$$\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^{-1}+2(n-1),$$

进而

$$a_n=\frac{2\alpha n-n+1}{2[(2\alpha-1)n-2\alpha+2]}.$$

例题 8.16 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot(a_n-\dfrac{1}{a_n})$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 *(by Dylaaan)*[78]. 注意到

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\xrightarrow{\text{变形}}\cot 2\theta=\frac{1}{2}\cdot(\cot\theta-\frac{1}{\cot\theta}).$$

令 $a_n=\cot\theta_n$, 整理得到 $\theta_{n+1}=2\theta_n$, 因此 $\{\theta_n\}$ 是等比数列, 又根据 $a_1=2$, 得到 $\theta_1=\arctan\dfrac{1}{2}$, 故

$$\theta_n=\arctan\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\Rightarrow a_n=\cot\left(\arctan\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\right)$$

例题 8.17 (知乎,474707626) 设数列 $\{y_n\}$ 满足 $y_2=y_3=1$ 以及

$$(n+1)(n-2)y_{n+1}=n(n^2-n-1)y_n-(n-1)^3y_{n-1}$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

证明 (by 三千弱水)[79] 令 $n=2$ 得 $y_2=y_1$, 当 $n\geqslant 3$ 时

$$(n-2)(y_{n+1}-y_n)=(n-1)^2(y_n-y_{n-1}),$$

变形

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{n-1}=(n-1)\frac{y_n-y_{n-1}}{n-2}.$$

接着令 $z_n=\dfrac{y_n-y_{n-1}}{n-2}$, 则

$$z_{n+1}=(n-1)z_n=\cdots=(n-1)!z_3=(n-1)!\frac{3y_3-2y_2}{1}=(n-1)!$$

故

$$y_{n+1}-y_n=(n-1)(n-1)!\Rightarrow y_{n+1}=ny_n=(n-1)!+c$$

代入初始值 $y_2=1$, 解得 $c=1$. 所以

$$y_n=\frac{(n-1)!+1}{n}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(y_n-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)!}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}=1$$

例题 8.18 (AMM,10403) 设数列 $\{y_n\}$ 满足 $y_0=1$, $y_1=3$, 且

$$y_{n+1}=(2n+3)y_n-2ny_{n-1}+8n,\ n\geqslant 1$$

求数列 $\{y_n\}$ 的渐进公式.

解 令 $x_n=y_n+2n+1$. 则 $x_0=2$, $x_1=6$, 且

$$x_{n+1}-2(n+1)x_n=x_n-2nx_{n-1}=\cdots=x_1-2x_0=2,\ n\geqslant 1$$

再令 $z_n=x_n/(2^n n!)$. 则 $z_0=2$, 且

$$z_k-z_{k-1}=\frac{2}{2^k k!},\ k\geqslant 1$$

叠加可得

$$z_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(1/2)^k}{k!}=2\sqrt{e}-2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1/2)^k}{k!}$$

因此,

$$y_n=2^{n+1}n!\sqrt{e}-2n-1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}-\cdots.$$

例题 8.19 (知乎,436369659) 设 $x_0=1$, 当 $n\geqslant 0$, $x_{n+1}=3x_n+\lfloor\sqrt{5}x_n\rfloor$, 其中 $\lfloor a\rfloor$ 表示不大于 a 的最大整数, 求 $\{x_n\}$ 的通项表达式.

证明 (by 予一人)[80]. 利用取整函数如下性质:

1. $x-1\leqslant\lfloor x\rfloor<x\leqslant\lceil x\rceil<x+1$;
2. $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n,(n\in\mathbb{Z})$;
3. $\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil$.

注意到 $(\forall n)x_n\in\mathbb{Z}$, 于是

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=3x_n+\lfloor\sqrt{5}x_n\rfloor=6x_n-3x_n+\lfloor\sqrt{5}x_n\rfloor\\&=6x_n+\lfloor-(3-\sqrt{5})x_n\rfloor\\&=6x_n-\lceil(3-\sqrt{5})x_n\rceil\\&=6x_n-\lceil(3-\sqrt{5})\lfloor(3+\sqrt{5})x_{n-1}\rfloor\rceil,\end{aligned}$$

此时, 由于

$$(3-\sqrt{5})\lfloor(3+\sqrt{5})x_{n-1}\rfloor<(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})x_{n-1}=4x_{n-1},$$

以及

$$(3-\sqrt{5})\lfloor(3+\sqrt{5})x_{n-1}\rfloor\geqslant(3-\sqrt{5})((3+\sqrt{5})x_{n-1}-1)>4x_{n-1}-1,$$

于是

$$\lceil (3-\sqrt{5})\lfloor (3+\sqrt{5})x_{n-1}\rfloor \rceil = 4x_{n-1},$$

所以

$$x_{n+1} = 6x_n - 4x_{n-1}.$$

于是得特征方程

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3-\sqrt{5},\ x_2 = 3+\sqrt{5}$$

所以通解为

$$x_n = C_1(3-\sqrt{5})^n + C_2(3+\sqrt{5})^n,$$

将 $x_0 = 1, x_1 = 5$ 代入, 解得

$$C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

最终得到

$$x_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(3-\sqrt{5})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(3+\sqrt{5})^n.$$

例题 8.20 (知乎,407198647) 求解差分方程 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{6a_n} + \sqrt{5(a_n+1)}$, 给定初始条件为 $a_0 = 0$.

解 *(by 匿名者)*[30] 方程两边取平方得到

$$a_{n+1} = 11a_n + 5 + 2\sqrt{30(a_n^2 + a_n)},$$

移项

$$a_{n+1} - 11a_n - 5 = 2\sqrt{30(a_n^2 + a_n)},$$

两边再取平方进一步得到

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 - 22a_na_{n+1} - 10a_n - 10a_{n+1} + 25 = 0,$$

配方于是有

$$(a_{n+1} - 11a_n)^2 = 120a_n^2 + 10a_n + 10a_{n+1} - 25, \tag{8.5}$$

$$(11a_{n+1} - a_n)^2 = 120a_{n+1}^2 + 10a_n + 10a_{n+1} - 25,$$

$$\Rightarrow (11a_n - a_{n-1})^2 = 120a_n^2 + 10a_n + 10a_{n-1} - 25, \tag{8.6}$$

(8.5)(8.6)相减得到

$$(a_{n+1} - 11a_n)^2 - (11a_n - a_{n-1})^2 = 10a_{n+1} - 10a_{n-1},$$

进一步有

$$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - 22a_n + a_{n-1}) = 10(a_{n+1} - a_{n-1}),$$

我们得到

$$a_{n+1} - 22a_n + a_{n-1} = 10,$$

作一阶差分得到

$$a_{n+2} - 23a_{n+1} + 23a_n - a_{n-1} = 0.$$

其特征方程为

$$x^3 - 23x^2 + 23x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x^2 - 22x + 1) = 0,$$

解得特征根分别为

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 11 - 2\sqrt{30}, \quad x_3 = 11 + 2\sqrt{30}.$$

于是差分方程的通解为

$$a_n = C_1 + C_2(11 - 2\sqrt{30})^n + C_3(11 + 2\sqrt{30})^n.$$

8.5 差分方程应用举例

例题 8.21 广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r．
则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m\,, \quad y_0 = 50000$$

该差分方程的解为

$$y_x = \frac{y_0 - \frac{m}{r}}{(1+r)^x} + \frac{m}{r}$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\left[y_0(1+r)^x - y_x\right]}{(1+r)^x - 1}$$

当 $x = 240$ 时，$y_x = 0$，代入得到 $m = 2835.97$．

例题 8.22 (筹措教育经费模型) 某家庭现在起每月从工资中拿出一部分资金存入银行，用于投资子女的教育. 并计划 20 年后开始从投资帐户中每月支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部资金. 要实现这个投资目标，每月要向银行存入多少钱？20 年内共要筹措多少资金？（假设投资的月利率为 0.5%）

解 设第 n 个月投资帐户资金为 S_n 元，每月存入资金为 a 元. 于是，
20 年后关于 S_n 的差分方程模型为

$$S_{n+1} = 1.005S_n - 1000 \tag{8.7}$$

并且 $S_{120} = 0$，$S_0 = x$, 解方程 (8.7)，易得其通解为

$$S_n = 1.005^n C - \frac{1000}{1 - 1.005} = 1.005^n C + 200000$$

以及

$$S_{120} = 1.005^{120} C + 200000 = 0$$

$$S_0 = C + 200000 = x$$

从而有

$$x = 200000 - \frac{200000}{1.005^120} = 90073.45$$

从现在到 20 年内，S_n 满足的差分方程为

$$S_{n+1} = 1.005S_n + a \tag{8.8}$$

且 $S_0 = 0$, $S_{240} = 90073.45$. 解方程 (8.8)，易得通解为

$$S_n = 1.005^n C + \frac{a}{1 - 1.005} = 1.005^n C - 200a$$

以及

$$S_{240} = 1.005^{240} C - 200a = 90073.45\,, \quad S_0 = C - 200a = 0$$

从而有

$$a = 194.95$$

20 年内要筹措资金 90073.45 元，平均每月要存入银行 194.95 元.

第九章 向量代数与空间解析几何

9.1 向量及其线性运算

定义 9.1 (方向余弦)

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，
设向量 $\boldsymbol{a} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，则

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

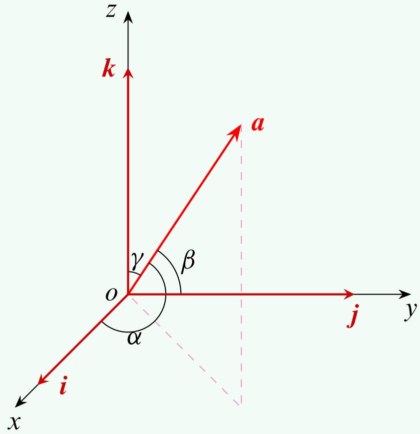
$$\cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 被称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$



9.2 数量积向量积混合积

定理 9.1 (向量的运算)

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$

1. 数量积

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，则 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ 其中 θ 为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角

③ $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影量**.

2. 向量积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

3. 混合积

$$\overbrace{\underbrace{[\boldsymbol{acb}] = [\boldsymbol{bca}] = [\boldsymbol{abc}]}_{\text{轮换性}}}^{\text{对换变号: }[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{bac}]} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

例题 9.1 设 $\boldsymbol{a} = (3, 4, 5)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 3)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 *(1)* 数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3\times1 + 4\times(-2) + 5\times3 = 10$$

(2) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^3}}=\frac{10}{\sqrt{14}}$$

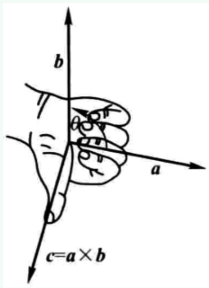
(3) 向量积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&4&5\\1&-2&3\end{vmatrix}=(22,-4,-10).$$

定义 9.2 (向量积)

设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出: $\boldsymbol{c}$ 的模

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$



其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角; $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面 (即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$, 又垂直于 $\boldsymbol{b}$), $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定 (如图), 向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

几何意义: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

命题 9.1 (三角形的面积)

不共线的三点 A, B, C 所构成的三角形的面积为:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

例题 9.2 已知三角形 $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $A(1,2,-1)$、$B(2,3,0)$ 和 $C(3,3,2)$, 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积.

解 根据向量积的定义, 可知三角形 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由题设 $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,3)$, 因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=(2,-1,-1)$$

三角形 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

命题 9.2 (四面体的体积)

不共面四点 A, B, C, D 所构成的四面体的体积为: $V=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$

定理 9.2 (向量间的关系)

- 垂直:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

- 平行：

$$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \theta=0\text{或}\pi \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{matrix}\right\|=0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

- 共面：

$$\text{三向量共面} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$$

9.3 平面及其方程

定义 9.3 (平面方程)

设平面法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$

① 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

② 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D=0$

③ 三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}=0$ (平面过不共线的三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$)

④ 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ (平面过 $((a,0,0),(0,b,0),(0,0,c))$ 三点).

⑤ 平面束方程：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (不包含 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$)

例题 9.3 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ________

解 平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $(2,2,-1)$, 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 在 (x_0,y_0) 处的法向量为

$$\big(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1\big)=(x,2y,-1)$$

故 $\big(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1\big)$ 与 $(2,2,-1)$ 平行

$$2=z_x(x_0,y_0)=x_0,\quad 2=z_y(x_0,y_0)=2y_0$$

又 $z(x_0,y_0)=z(2,1)=1$, 故曲面 $2x+2y-z=0$ 在 $(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ 处的切平面方程是

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=0$$

即曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是

$$2x+2y-z-5=0$$

定理 9.3 (点法式方程)

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 Π 上一点, $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是平面 Π 的一个法线向量. 设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点, 则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. 平面 Π 方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

例题 9.4 求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程

解 因为向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直, 而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$, 所以可取他们的向

量积为 $\boldsymbol{n}$, 即

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14i+9j-k,$$

由点法式方程, 可得所求平面方程为

$$14x+9y-z-15=0$$

定理 9.4 (点到平面的距离)

① 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

② 设直线过点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$, 则点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

例题 9.5 求点 $P(2,2,1)$ 到直线 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 的距离.

解 法 *I*. $P_1(-1,2,0)\in L$, L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,-1,2)$, 则利用点到直线的距离公式, 即得

$$d(P,L)=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{PP_1}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{6}}|(-1,5,3)|=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

法 *II*. 过点 P 垂直于直线 L 的平面为

$$\Pi:(x-2)-(y-2)+2(z-1)=0$$

将 L 参数化: $L:x=t-1, y=-t+2, z=2t$, 代入平面 Π 的方程, 得到

$$(t-3)-(-t)+2(2t-1)=0,$$

解得 $t=\frac{5}{6}$, 将它代入 L 的参数方程, 得到点 $Q(-\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{10}{6})$, 这是直线 L 与平面 Π 的交点, 也就是点 P 在直线 L 上的垂足点, 所以

$$d(P,L)=d(P,Q)=\sqrt{\left(-\frac{13}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

法 *III*. 将 L 参数化: $L:x=t-1, y=-t+2, z=2t$, 设 P 在直线 L 上的垂足点为 $Q(t-1,-t+2,2t)$, 则 $\overrightarrow{PQ}\perp L$, 从而 $\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$, 即

$$(t-3)-(-t)+2(2t-1)=0,$$

解得 $t=\frac{5}{6}$, 得到点 $Q(-\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{10}{6})$, 所以

$$d(P,L)=d(P,Q)=\sqrt{\left(-\frac{13}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

9.3.1 平面间的关系

定理 9.5 (平面间的关系)

① 垂直：$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

② 平行：

$$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

③ 平面 Π_1, Π_2 间的夹角：

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

其中, $\theta = \min\left\{(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2}), \pi - (\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})\right\} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

定理 9.6 (平面与 xOy 面的夹角)

平面 Π： $Ax + By + Cz + D = 0$ 与坐标面 $z = 0$ 的夹角余弦为

$$\cos\theta = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

例题 9.6 设两个平面均通过点 $A(-5, 10, 12)$, 其中一个平面通过 x 轴, 另一个通过 y 轴, 试求两个平面的夹角.

解 平面通过通过 x 轴 $\Rightarrow A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$

$$\begin{cases} By + Cz = 0 \\ B(y-10) + C(z-12) = 0 \end{cases} \Longrightarrow 6y - 5z = 0$$

平面通过通过 y 轴 $\Rightarrow B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$

$$\begin{cases} Ax + Cz = 0 \\ A(x+5) + C(z-12) = 0 \end{cases} \Longrightarrow 12x + 5z = 0$$

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|12 \times 0 + 0 \times 6 + 5 \times (-5)|}{\sqrt{12^2 + 0^2 + 5^2}\sqrt{0^2 + 6^2 + (-5)^2}} = \frac{25}{13\sqrt{61}}$$

两个平面的夹角 $\theta = \arccos\dfrac{25}{13\sqrt{61}}$.

9.4 空间直线及其方程

9.4.1 空间直线的方程

定义 9.4 (空间直线的方程)

设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau} = (m, n, p)$

① 参数方程：过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与向量 $\boldsymbol{\tau} = \{m, n, p\}$ 平行的直线

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

② 点向式 (标准式、对称式)：

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

③ 交面式 (一般式)：两张不平行的平面相交成一条直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

④ 两点式：过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

例题 9.7 (2014CMC) 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$, 曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

解 由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$
$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

上述两切面的交线就是 Γ 在 P_0 点的切线, 该切线在 xOy 面上的投影就是 S 过 (x_0,y_0) 的切线. 消去 $z-z_0$, 我们得到

$$(F_xG_z-G_xF_z)_{P_0}(x-x_0)+(F_yG_z-G_yF_z)_{P_0}(y-y_0)=0,$$

这里 $x-x_0$ 的系数是 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$, 故上式是一条直线的方程, 就是所要求的切线.

9.4.2 两直线之间的关系

定理 9.7 (两直线之间的关系)

设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(m,n,p)$

① **垂直：**

$$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

② **平行：**

$$L_1//L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1//\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

③ **夹角** (通常指锐角或直角)：

$$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

其中 $\theta=\min\left\{\widehat{(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)},\pi-\widehat{(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)}\right\}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

9.4.3 直线与平面之间的关系

定理 9.8 (直线与平面之间的关系)

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(m,n,p)$, 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$

① **垂直**:

$$L\perp\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}//\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

② **平行**:

$$L//\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

③ **夹角**:

$$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{\tau}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中 $\theta=\min\left\{\widehat{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n})},\pi-\widehat{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n})}\right\}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

例题 9.8 (1990 数学 1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是__________

解 平面的法向量就是直线的方向向量，为

$$\vec{n}=\{-1,3,1\}$$

平面的点法式方程:

$$-1(x-1)+3(y-2)+1(z-(-1))=0\Longrightarrow x-3y-z+4=0$$

例题 9.9 (1991 数学 1) 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\quad L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

且过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是__________

解 平面经过点 $(1,2,3)$，且与向量 $\{1,0,-1\}$ 和 $\{2,1,1\}$ 都垂直。

平面的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n}&=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}\\&=\left\{\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\right\}=\{1,-3,1\}\end{aligned}$$

平面的点法式方程:

$$1(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0\Longrightarrow x-3y+z+2=0$$

9.5 曲面及其方程

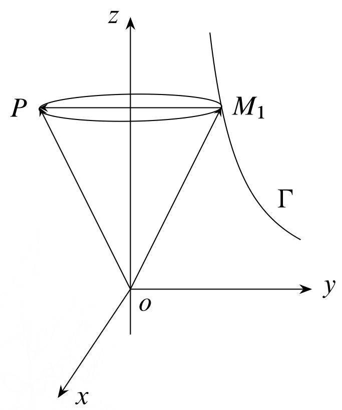
9.5.1 旋转曲面

(1) 曲线 C $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周得旋转曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.
(2) 曲线 C $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周得旋转曲面 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.
(3) 曲线 C $f(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转一周得旋转曲面 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

例题 9.10 求直线 $\Gamma:\begin{cases}y=x\\z=0\end{cases}$ 绕 $L:x-1=y-1=z-1$ 旋转一周所得旋转面的方程

解 $M_0(1,1,1)\in L$, L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,1,1)$,

在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,x_1,0)$ 则过 M_1 的纬圆上任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件



$$\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{\tau}\ 和\ \overrightarrow{M_0P}=\overrightarrow{M_0M_1}$$

即

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-x_1)+z=0\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x_1-1)^2+(x_1-1)^2+(0-1)^2\end{cases}$$

消去 x_1, 并整理

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0$$

注: 参考 2019 张宇高等数学 18 讲 P308

例题 9.11 过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为______

解 在 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1\\x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 中消去 z, 得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2(4-x^2-y^2)=1,\quad 即\ \ 9x^2+10y^2=36$$

直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 的一个方向向量为

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{1,0,0\}\times\{0,3,1\}=\{0,-1,3\}$$

并且所求平面方程与直线垂直, 故所求平面方程的一条法线向量为

$$\vec{n}=\{0,-1,3\}$$

交线上其中一点为 $(2,0,0)$, 因此所求平面方程为

$$-y+3z=0$$

例题 9.12 (CMC,2017) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

解 交线为抛物线或椭圆

1) 如果平面 P 平行于 $z-$ 轴, 则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于 $yz-$ 平面, C 的形状不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x=c$, 交线 C 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将 C 投影到 $yz-$ 平面上, 得到抛物线 $z-\dfrac{c^2}{2}=\dfrac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 $z-$ 轴, 故交线为抛物线.

2) 如果平面 P 不平行于 $z-$ 轴, 我们设 P 的方程为 $z=ax+by+c$. 代入旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$, 得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=R^2$$

将 $C=\Gamma\cap P$ 垂直投影到 $xy-$ 平面, 得到圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. 令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1 和 F_2, 与圆柱 Q 相交于圆 D_1 和圆 D_2. 对 $C=\Gamma\cap P$ 上任意一点 A, 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1, 交圆 D_2 于 B_2. 则线段 B_1B_2 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到

$$|AF_1|+|AF_2|=|AB_1|+|AB_2|=|B_1B_2|$$

为常数, 故直线 C 为椭圆.

9.5.2 柱面

例题 9.13 ([29], P191) 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

解 在 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 中消去 x, 得

$$3y^2-z^2=16$$

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

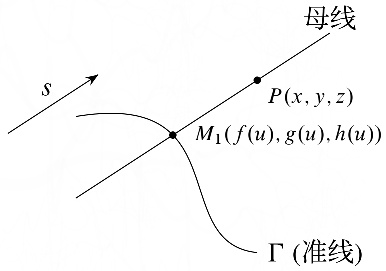
在 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 中消去 y, 得

$$3x^2+2z^2=166$$

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

例题 9.14 (徐小湛, P190) 以曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=f(u),\\ y=g(u),\ (a\leqslant u\leqslant b)\\ z=h(u)\end{cases}$ 为准线, 母线方向为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 的柱面的参数方程为

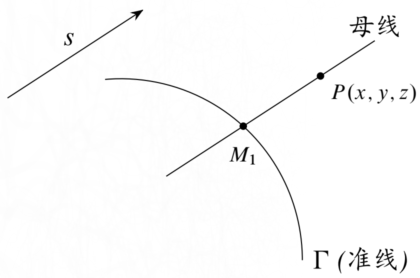
$$\begin{cases}x=f(u)+mv,\\ y=g(u)+nv,\\ z=h(u)+pv\end{cases}\quad\begin{pmatrix}a\leqslant u\leqslant b,\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix}.$$



例题 9.15 (徐小湛, P191) 求以曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 为准线, 母线方向为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 的柱面方程.

解 在准线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则过 M_1 的母线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+mt,\\ y=y_1+nt,\\ z=z_1+pt.\end{cases}$$



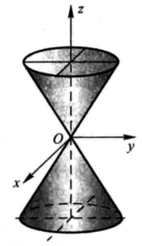
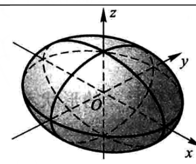
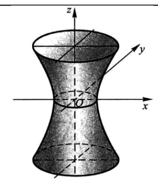
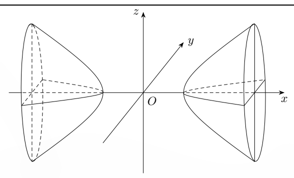
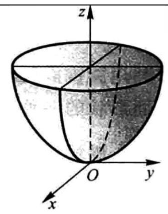
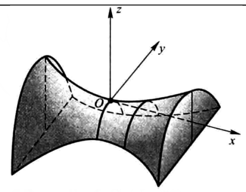
将 $x_1=x-mt$, $y_1=y-nt$, $z_1=z-pt$ 代入准线方程, 得

$$\begin{cases}F(x-mt,y-nt,z-pt)=0,\\ G(x-mt,y-nt,z-pt)=0,\end{cases}$$

再消去参数 t 便得到柱面的一般方程.

9.5.3 二次曲面

表 9.1: 一些常见的二次曲面

曲面名称	曲面方程	曲面图形
椭球锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭球抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	

9.6 空间曲线及其方程

9.6.1 空间曲面的参数方程

例题 9.16 空间曲线 Γ

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

绕 z 轴旋转, 所得旋转曲面的方程为

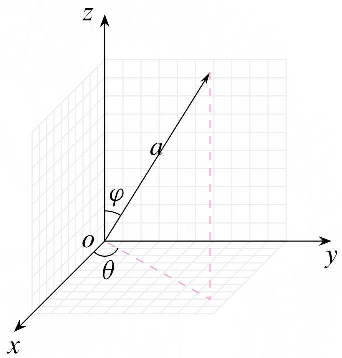
$$\begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}\cos\theta, \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}\sin\theta, \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{pmatrix}.$$

例题 9.17 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, \\ z = a\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{matrix}$$

解 我们可以把球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 可看成 zOx 面上的半圆周

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi, \\ y = 0, \\ z = a\cos\varphi, \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$



绕 z 轴旋转所得, 故球面方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, \\ z = a\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{matrix}$$

9.6.2 空间曲线在坐标面上的投影曲线

定理 9.9 (xoy 面上的投影曲线)

空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 在 xOy 面 $(z = O)$ 上的投影曲线的求法如下[81]:

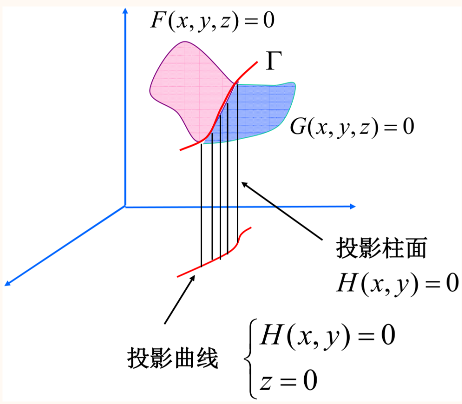
(1) 消去方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 中的变量 z, 得到通过曲线 Γ 且母线平行于 z 轴的柱面

$$H(x,y) = 0$$

称之为 Γ 关于 xOy 面的**投影柱面**.

(2) 投影柱面 $H(x,y) = 0$ 与 xOy 面的交线就是 Γ 在 xOy 面上的**投影曲线**:

$$\begin{cases} H(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



第十章 多元函数微分法及其应用

10.1 多元函数的极限与连续

定义 10.1 (聚点)

如果对于任意给定的 $\delta > 0$, 点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P_0, \delta)$ 内总有 E 中的点, 那么称 P 是 E 的聚点.

10.1.1 多元函数极限的定义

定义 10.2 (二元函数极限的定义)

设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad f(x, y) \to A \left((x, y) \to (x_0, y_0)\right)$$

也记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P) \to A \left(P \to P_0\right)$$

注：此定义为《高等数学》同济 7 版的定义

定义 10.3 (多元函数极限的定义)

设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, n 元函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个去心领域中有定义, A 为某一常数, 若

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{当 } 0 < |x - \boldsymbol{a}| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

则称 n 元函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时以 A 为极限 (又称它是 n 重极限), 记为

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(x) = A \quad \text{或简记为} \quad f(P) \to A \left(x \to \boldsymbol{a}\right)$$

注：此定义为谢惠民的《数学分析习题讲义》中的定义

笔记 下面是各类极限之间的互相关系:[13]

$$\begin{tikzcd} & \text{重极限存在} \arrow[dl, Leftrightarrow, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{累次极限存在} \arrow[rr, Leftrightarrow, "/" marking] & & \text{方向极限存在} \end{tikzcd}$$

例题 10.1 求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} = 0.$

证明 函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ 的定义域为 $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, 点 $O(0, 0)$ 为 D 的聚点. 因为

$$|f(x, y) - 0| = \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0\right| \leqslant x^2 + y^2$$

可见, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则当

$$0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

即 $P(x,y) \in D \cap \mathring{U}(O,\delta)$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

成立, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

例题 10.2 用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

解 因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = |y|\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant 2|y|\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

注 (小细节) 是否可以这样?

$$\cdots = |y|\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant 2|y|\cdot\frac{|xy|}{\frac{1}{2}|xy|} = 2|y|$$

不能! 定义域变了! 因为 $(x,y)\neq(0,0)$ 的过程中只要求 $(x,y)\neq(0,0)$

$$x^2+y^2\neq0 \Rightarrow (x,y)\neq(0,0) \Rightarrow \text{挖去 } (0,0) \text{ 这个点}$$

而并不要求

$$xy\neq0 \Rightarrow x\neq0 \text{ 或 } y\neq0 \ \Rightarrow \text{挖去 } (0,0) \text{ 附近的整个 } x,y \text{ 轴的点}$$

10.1.2 求多元函数的极限

多元函数求极限的思路: 先判断是否为“未定式”, 再根据题目形式猜测方法

- 极限的定义: 难
- 直接带值: 不是“未定式”
- 有界函数 $\times$ 无穷小量 $=0$
- 夹逼准则: 适当的放缩, $0\leqslant|\text{式子}|\to0$.
- 极坐标: 通过极坐标转化为 $0\times$ 有界 $=0$. 如果分母为 $x^\alpha+y^\alpha$, 就可以考虑极坐标.
- 有理化
- 整体换元: 利用整理换元将其转化为一元函数求极限, 接下来利用如: “洛必达”, “等价”, “泰勒” , 等方法
- 等价无穷小/泰勒

例题 10.3 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 法 *I*(聚点).

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$$

或者利用等价无穷小.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{1}{2}xy}{xy} = \frac{1}{2}$$

法 *II*(去心邻域). 由于函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 在原点的领域内的坐标轴上处处无定义, 因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}\text{不存在}$$

注 在未规定是哪种极限的定义之前两种方法都是对的！考试一般会绕开“有争议”的答案！

例题 10.4 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解

$$\begin{aligned}0<\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}<\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}\\&<\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}+\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^{y^2}}\\&\xlongequal{\text{洛必达}}0\end{aligned}$$

例题 10.5 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)$.

解 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\ln(x^2+y^2)=2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

接着我们令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$ 则 $t\to 0^+$ 那么

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}&=\lim_{t\to 0^+}t\ln t\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}=0\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)=0$$

例题 10.6 (2016, 中科院) 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 法 *I*. 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right|}\leqslant\frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|-1}\leqslant\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

法 *II*. 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{2|x+y|}{x^2+y^2}\leqslant 2\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\leqslant 2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

法 III. 注意到

$$x^2+y^2-xy\geqslant 2xy-xy=xy$$

由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leqslant\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

注 多元函数求极限的例题我整理了一堆, 见我的知乎文章: https://zhuanlan.zhihu.com/p/98921951

练习 10.1 设实数 x,y,z 满足

$$e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$$

求极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)$$

解 法 1. 注意

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=-1$$

且由泰勒或者伯努利函数得

$$\frac{1}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k-1}$$

其中 B_k 表示第 k 个伯努利数. 即有

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{y}{12}+\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}$$

即

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)=\frac{1}{2}$$

法 2. 显然 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x+y+z}{12}=0$, 故仅需求 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$
由 $e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$ 得

$$(e^x-1)+(e^y-1)+(e^z-1)=e^{x+y+z}-1\tag{10.1}$$

由此令 $r=e^x-1,\ s=e^y-1,\ t=e^z-1$, 则

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\Longleftrightarrow(r,s,t)\to(0,0,0)\tag{10.2}$$

且由 (10.1) 式可得

$$r+s+t=(1+r)(1+s)(1+t)-1\Longrightarrow\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=-1$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)\\=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{\ln(1+r)}+\frac{1}{\ln(1+s)}+\frac{1}{\ln(1+t)}\right)\\=&\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r-\frac{r^2}{2}+o(r^2)}+\frac{1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}+\frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\right)\end{aligned}$$

$$=\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{2}+o(r)\right)+\frac{1}{s}\left(1+\frac{s}{2}+o(s)\right)+\frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right)$$

$$=\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{3}{2}+\frac{o(r)}{r}+\frac{o(s)}{s}+\frac{o(t)}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\quad(\text{利用}(10.2)\text{式})$$

因此原极限为 $\frac{1}{2}$

10.1.3 证明多元函数的极限不存在

问题 10.1 取路径 $y=kx$ 时极限存在能推出原极限存在吗?

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)\text{存在}\overset{?}{\Rightarrow}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)\text{存在}$$

答：不能推出原极限存在！路径是取不完的!

例题 10.7 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y=kx$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-kx}{x+kx}=\frac{1-k}{1+k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化, 故极限不存在 (不满足极限的唯一性)

例题 10.8 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^2}=1$$

当 (x,y) 沿着 $y=0$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^20^2}{x^20^2+(x-0)^2}=0$$

因此极限不存在

例题 10.9 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y=kx^3-x^2$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3-x^2}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(kx^3-x^2)^3}{x^2+kx^3-x^2}$$

$$=\frac{1}{k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化，故极限不存在

例题 10.10 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y=x^\alpha-x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^\alpha - x}} \frac{x^2y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x^2 - x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \\ 0, & \alpha > 3 \end{cases}$$

故极限不存在

例题 10.11 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y = x^2 - x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

当 (x,y) 沿着 $y = x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x} = 0$$

故极限不存在

例题 10.12 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x+y}$.

解 当 (x,y) 沿着 $y = x^3 - x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x}}\frac{x^2y}{x+y}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^3-x)}{x+x^3-x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x^2-1) = -1$$

当 (x,y) 沿着 $y = x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x} = 0$$

故极限不存在

✍ **练习 10.2** 对于正实数 a,b,c,d 考虑函数 $f(x,y) = \dfrac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}$ 证明:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\text{存在} \iff \frac{a}{c}+\frac{b}{d} > 1$$

解 *I.* 当 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d} < 1$ 时, 考虑 (x,y) 沿着曲线 $y = x^{\frac{c}{d}}$ 方向趋于原点, 有

$$\lim_{\substack{y=x^{\frac{c}{d}}\\ (x,y)\to(0,0)}} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^{a+\frac{bc}{d}}}{2x^c} = \lim_{x\to 0+} x^{c(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1)} = +\infty$$

故极限不存在.

II. 当 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d} = 1$ 时, 则对任意 $k > 0$, 考虑 (x,y) 沿着路径 $y = kx^{\frac{c}{d}}$ 方向趋于原点, 有

$$\lim_{\substack{y=kx^{\frac{c}{d}}\\ (x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d} = \lim_{x\to 0+}\frac{k^bx^{a+\frac{bc}{d}}}{(k^d+1)x^c} = \frac{k^b}{k^d+1}$$

其值与 k 的选取有关, 故极限不存在.

III. 当 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}>1$ 时, 注意对数函数 $x\mapsto \ln x$ 的凸性, 从而有

$$\begin{aligned}\ln(|x|^a|y|^b) &= \frac{a}{c}\ln|x|^c+\frac{b}{d}\ln|y|^d\\ &\leqslant \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\ln\left(\frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}|x|^c+\frac{\frac{b}{d}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}|y|^d\right)\\ &\leqslant \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\ln\left(|x|^c+|y|^d\right)\end{aligned}$$

$$\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}\leqslant\frac{(|x|^c+|y|^d)^{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}}{|x|^c+|y|^d}=(|x|^c+|y|^d)^{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1}\to 0\quad (x,y)\to(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在原点处极限为 0

练习 10.3 求证: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\frac{1}{3})}\frac{\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}$ 不存在.

解 (*by* 白朗) 注意到

$$\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{12}(3y-1)^2+O\big((3y-1)^4\big)$$

取 $x=3y$, 则

$$\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}-\arctan x=\frac{1-x}{2}+o(1-x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{1}{3})}\frac{\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{2}+o(1-x)}{1-x^4}=\frac{1}{8}$$

取 $3y-1=\sqrt[3]{1-x}$, 则

$$\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}-\arctan x=\frac{\pi^3}{12}(1-x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1-x}{2}+o(1-x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{1}{3})}\frac{\frac{\tan 3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi^3}{12}(1-x)^{-1/3}+\frac{1}{2}+o(1)}{(1+x)(1+x^2)}\to\infty$$

综上, 极限不存在

练习 10.4 求极限: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)$

解 取 $y=2x$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{\substack{x\to0\\ y=2x}}\left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+8x^3}}+\frac{x^5}{2x-x}\right)\\ &=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{9}}+x^4\right)=0.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}},$$

我们取 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}}=1$, 即 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, 这时有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{\substack{x\to0\\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}}}\left(1+\frac{x^5}{\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}-x}\right)\\ &=\lim_{\substack{x\to0\\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}}}\left(1+\frac{x^4}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}-1}\right)=1\end{aligned}$$

故所求极限不存在

10.2 偏导数、方向导数与梯度

定义 10.4 (偏导数的几何意义)

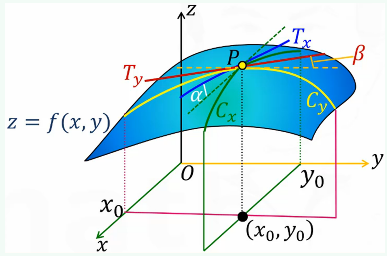
$f_x'(x_0,y_0)$ 表示的是 $C_x:\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$ 在点 P 处的切线 T_x 对 x 的斜率

$$f_x'(x_0,y_0)=\tan\alpha$$

$$\overrightarrow{T_x}=\left(1,0,f_x'(x_0,y_0)\right)$$

同理有 $f_y'(x_0,y_0)=\tan\beta$, $\overrightarrow{T_y}=\left(0,1,f_y'(x_0,y_0)\right)$

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{T_x}\times\overrightarrow{T_y}=(-f_x',-f_y',1)$$



例题 10.13 曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\y=4\end{cases}$, 在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 设在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是 α, 则由

$$\tan\alpha=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,4,5)}=\frac{x}{2}\bigg|_{(2,4,5)}=1\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

笔记 二阶混合偏导数不相等的可微函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

解 我们要构造 $(0,0)$ 点附近的函数使得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}\end{aligned}$$

类似地有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}$$

这样, 要使上述两个极限不相等, 一个简单而自然例子便是

$$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)-f(0,0)+\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

特别, 可取

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

例题 10.14 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ 在 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 点处的值为 ______

解 由 *Euler* 公式，我们有

$$u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}=\mathrm{Re}\,e^{-x}e^{\mathrm{i}\frac{x}{y}}=\mathrm{Re}\,e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}=\mathrm{Re}\,v$$

v 对 x 求导一次得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)$$

上式再次对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}}{y^2}+\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\\&=e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{-\mathrm{i}}{y^2}+\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\right)\\&=e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\left(1-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

带值得

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\frac{\pi^2(2\pi+\mathrm{i})}{e^2}$$

分离实部

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\operatorname{Re}\frac{\pi^2(2\pi+\mathrm{i})}{e^2}=\frac{\pi^2}{e^2}\cdot 1=\pi^2 e^{-2}$$

例题 10.15 具有连续偏导数, 点点可偏导, 但是偏导数不一定是连续函数. 如:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+y^2\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0\\ x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, y=0\\ y^2\sin\frac{1}{y}, & x=0, y\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

定义 10.5 (方向导数)

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $f:D\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{l}$ 是一个方向, $\boldsymbol{x_0}\in D$. 如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{x_0})}{t}$$

存在且有限, 那么称这个极限是函数 f 在点 $\boldsymbol{x_0}$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x_0})$ ♣

例题 10.16 (南开大学, 2009) 设 $f(x)$ 在 $P_0\in\mathbb{R}^2$ 的领域 $U(P_0)$ 内存在三阶偏导数, 并且所有三阶偏导数的绝对值不超过常数 $M>0$. 再设 $U(P_0)$ 内两点 P_1, P_2 关于 P_0 对称, 并且 P_1 与 P_0 的距离为 $l>0$. 记 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{P_0P_1}$. 证明:

$$\left|\frac{f(P_1)-f(P_2)}{2l}-\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}Ml^2.$$

证明 (by 博士数学论坛)[1]

$$g(t)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$$

由条件所有三阶偏导数的绝对值不超过常数 $M>0$

$$g'''(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\cos\beta\right)^3 f\leqslant 2^{\frac{3}{2}}M$$

利用 Taylor 公式

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(l)-g(-l)}{2l}-g'(0)\right|&=\left|\frac{\left(g(0)+g'(0)l+\frac{g''(0)l^2}{2}+\frac{g'''(\xi_1)l^3}{6}\right)-\left(g(0)-g'(0)l+\frac{g''(0)l^2}{2}-\frac{g'''(\xi_2)l^3}{6}\right)}{2l}-g'(0)\right|\\&\leqslant\frac{|g'''(\xi_1)+g'''(\xi_2)|}{12}l^2\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}Ml^2\end{aligned}$$

[1] http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=25700

命题 10.1

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微, 则 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P(0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

定义 10.6 (梯度)

设函数 f 定义于某个区域 $D \in \mathbb{R}^3$ 内, 又设 f 具有关于各个变元的偏导数, 称向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是 f 在点 (x,y,z) 的梯度, 记为 $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ 或 $\nabla f(x,y,z)$.

定理 10.1 (梯度与方向导数的关系)

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot\boldsymbol{l} = |\nabla f(x,y,z)|\cos\theta,$$

其中, θ 为向量 $\nabla f(x,y,z)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角

例题 10.17 (裴礼文,P754) 设 $u = f(x,y,z)$ 为二次可微函数, l_1, l_2, l_3 为三个互相垂直的方向, 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

解 由题意, $P = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 于是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}, \frac{\partial u}{\partial l_2}, \frac{\partial u}{\partial l_3}\right) = \left(\operatorname{grad} u l_1^T, \operatorname{grad} u l_2^T, \operatorname{grad} u l_3^T\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}, \frac{\partial u}{\partial l_2}, \frac{\partial u}{\partial l_3}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial l_1} \\ \frac{\partial u}{\partial l_2} \\ \frac{\partial u}{\partial l_3} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} u P^T P \operatorname{grad} u^T \\ &= \operatorname{grad} u \operatorname{grad} u^T = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\end{aligned}$$

10.3 切线和切面

定理 10.2 (空间曲线的切线与法平面)

设空间曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$

① 空间曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为;

$$\frac{x-x_0}{\tau_x} = \frac{y-y_0}{\tau_y} = \frac{z-z_0}{\tau_z}.$$

② 空间曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面[a]方程为:

$$\tau_x(x-x_0) + \tau_y(y-y_0) + \tau_z(z-z_0) = 0.$$

[a]法平面: 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与切线垂直的平面

定理 10.3 (空间曲线 (参数方程) 的切线与法平面)

设空间曲线 Γ 的方程

$$\Gamma:\ x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

其中, 方程中的三个函数均可导, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Γ 上的点, 且当 $t=t_0$ 时, $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ 都不为 0, 则

① 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量[a]为:

$$\boldsymbol{\tau}=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$$

② 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为;

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

③ 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面[b]方程为:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

[a]切向量: 切线的方向向量称为曲线的切向量.

[b]法平面: 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与切线垂直的平面

例题 10.18 柱面螺线: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t=\dfrac{\pi}{2}$. 求螺线的切线和法平面.

解 切点: $\left(0,a,\dfrac{b\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}x'(t)&=(a\cos t)'=-a\sin t=-a\\y'(t)&=(a\sin t)'=a\cos t=0\\z'(t)&=(bt)'=b\end{aligned}$$

切向量: $\boldsymbol{\tau}=\{-a,0,b\}$. 切线: $\dfrac{x}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\frac{b\pi}{2}}{b}$

法平面:

$$-a\cdot(x-0)+0\cdot(y-a)+b\cdot\left(z-\frac{b\pi}{2}\right)=0\Longrightarrow ax-bz+\frac{b^2\pi}{2}=0$$

定理 10.4 (空间曲线 (交面式) 的切线与法平面)

设空间曲线 Γ 由交面式方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

给出, 则在以下表达式有意义的条件下, 有

① 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为:

$$\boldsymbol{\tau}=\left(\begin{vmatrix}F'_y & F'_x\\G'_y & G'_x\end{vmatrix}_{M_0},\begin{vmatrix}F'_x & F'_x\\G'_x & G'_x\end{vmatrix}_{M_0},\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\G'_x & G'_y\end{vmatrix}_{M_0}\right)$$

② 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为;

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_x\\G'_y & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F'_x & F'_x\\G'_x & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\G'_x & G'_y\end{vmatrix}_{M_0}}.$$

③ 曲线 Γ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面[a]方程为:

$$\begin{vmatrix}F'_y & F'_x\\G'_y & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F'_x & F'_x\\G'_x & G'_x\end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\G'_x & G'_y\end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0$$

[a]法平面: 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与切线垂直的平面

定理 10.5 (空间曲面的切线与法平面)

设空间曲面 Σ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Σ 上的点, 则

① 曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \left(F_x'(x_0, y_0, z_0), F_y'(x_0, y_0, z_0), F_z'(x_0, y_0, z_0)\right)$$

② 曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

③ 曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

例题 10.19 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z) \Longrightarrow \boldsymbol{n}\Big|_{(1,2,3)} = (2, 4, 6)$$

所以在点 $(1, 2, 3)$ 处此球面的切平面方程

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0 \Longrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$$

法线方程为

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} \Longrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

例题 10.20 记曲面 $z = x^2 + y^2 - 2x - y$ 在区域 $D: x \geqslant 0, y \geqslant 0, 2x + y \leqslant 4$ 上的最低点 P 处切平面为 π, 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, -2)$ 处切线为 l, 则点 P 到 l 在 π 上的投影 l' 的距离 $d =$ ________

解 解 $\begin{cases} z_x' = 2x - 2 = 0 \\ z_y' = 2y - 1 \end{cases}$, 得唯一驻点 $(1, \frac{1}{2}) \in D$, 且

$$A = z_{xx}'' = 2,\ B = z_{xy}'' = 0,\ C = z_{yy}'' = 2$$

可知 $A > 0, B^2 - AC < 0$, 所以驻点为极小值点, 即点 $P(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ 为曲面的最低点, 并且该平面处的切平面为 $\pi: z = -\frac{5}{4}$. 切线为 l 的方向向量为两曲面在 $(1, 1, -2)$ 的法向量的向量积, 即

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(1, -1, 0).$$

所以切线方能成为 $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z + 2}{0}$, 平面束方程为

$$(x + y - 2) + \lambda(z + 2) = 0$$

于是平面 π 内的投影 l' 方程为 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$. 于是点 $P(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ 到 l' 的距离

$$d = \frac{|1 + \frac{1}{2} - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

10.4 全微分

定义 10.7 (全微分)

(同济 7, P72) 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义, 如果函数在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A 和 B 不依赖于 Δx 和 Δy 而仅与点 (x,y) 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称此函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分, 记作 $\mathrm{d}z$, 即

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

习惯上, 记 $\Delta x = \mathrm{d}x$, $\Delta y = \mathrm{d}y$, 于是全微分 $\mathrm{d}z$ 又可以写为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

注: 另有线性映射版本的全微分定义, 可参考梅加强的《数学分析》, *P419*

注 连续、偏导数、偏导数连续、可微的关系[13]

$$\begin{tikzcd}
 & \text{偏导数连续} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \text{可微} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{连续} \arrow[rr, Leftrightarrow, "/" description] & & \text{偏导数存在}
\end{tikzcd}$$

连续 $\not\Leftrightarrow$ 偏导数存在

- 连续: $P_0(x_0,y_0)$ 为聚点, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
- 偏导数存在: 邻域内有定义, 且 $f_x'(x_0,y_0)$ 与 $f_y'(x_0,y_0)$ 存在

$$\text{偏导数存在} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0) = f(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} f(x_0, y_0+\Delta y)$$

  - 偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 连续: 偏导数存在只能推出两条特殊路径成立, 但连续要求任意方式趋近.
  - 连续 $\not\Rightarrow$ 偏导数存在: 聚点处有极限, 去心邻域处极限可以不存在

例题 10.21 一个函数即使在某一点处连续, 可偏导, 且沿所有方向的方向导数都存在, 也不一定在该点可微. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 00. \end{cases}$$

判断 f 在 (x_0,y_0) 处可微的方法:

(1) 若

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f - f_x'(x_0,y_0)\Delta x - f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

则 f 在 (x_0,y_0) 处可微, 否则不可微.

(2) 证明 f 在 (x_0,y_0) 的邻域里有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ (当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时), 否则不可微.

例题 10.22 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个领域内连续. 试证明: 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$

证明 (必要性) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都存在. 由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x},$$

且

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0)\,,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0),$$

故此 $\varphi(0,0)=0$.

(充分性) 若 $\varphi(0,0)=0$, 易知 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$. 因

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

而

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 2,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 由定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

例题 10.23 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上可微, 且 $f(0,0)=0$, 求极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}$$

解 将分子交换积分次序, 则有

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t,$$

并由等价无穷小 $e^x-1\sim x(x\to 0)$ 和洛必达法则, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}&=\lim_{x\to 0+}\frac{-\int_0^{x}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t}{x^4}\\&\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\,\mathrm{d}t}{4x^3}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0+}\frac{x^2f(\xi,x)\,\mathrm{d}t}{x^3}\\&=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0+}\frac{f(\xi,x)}{x}\\&=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0+}\frac{f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)}{x}\end{aligned}$$

其中 $0<\xi<x^2$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\xi}{x}=0$, 又 $f(0,0)=0$, 从而

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}=-\frac{1}{4}f_y'(0,0)$$

练习 10.5 设 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x,2x)=x$, $f_1'(x,2x)=x^2$, 求 $f_2'(x,2x)$

解 对 $f(x,2x)=x$ 两边对 x 求导

$$f_1'(x,2x)+2f_2'(x,2x)=1$$

由 $f_1'(x,2x)=x^2$ 可得

$$f_2'(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$$

例题 10.24 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且满足 $f(x,x^3)=x^6+2x^4$, $f_1'(x,x^3)=2x^3-3x^2$, 求 $f_2'(x,x^3)$.

解 法 *I.* 两边对 x 求导,

$$f_1' + 3x^2 f_2' = 6x^5 + 8x^3$$

由已知 $f_1'(x, x^3) = 2x3 - 3x^2$, 有

$$2x^3 - 3x^2 + 3x^2 f_2' = 6x^5 + 8x^3$$

整理得

$$f_2'(x, y) = 2x^3 + 2x + 1$$

法 *II.* 因为

$$\mathrm{d} f(x, y) = f_x'(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y'(x, y)\,\mathrm{d}y$$

所以

$$\mathrm{d} f(x, x^3) = f_1'(x, x^3)\,\mathrm{d}x + f_2'(x, x^3)\,\mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}(x^6 + 2x^4) = (2x^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}x + f_2'(x, x^3)\,\mathrm{d}x^3$$

从而

$$(6x^5 + 6x^3 + 3x^2)\,\mathrm{d}x = 3x^2 f_2'\,\mathrm{d}x$$

即

$$f_2'(x, x^3) = 3x^3 + 2x + 1$$

法 *III.* 因为

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d} f(x, x^3) &= f(x, x^3) + C\\ &= \int f_1'\,\mathrm{d}x + \int f_3'\,\mathrm{d}x^3\\ &= \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \int f_3'\,\mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int f_3'\,\mathrm{d}x^3 = \int f_3' 3x^2\,\mathrm{d}x &= x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + C\\ &= x^6 + \frac{3}{2}x^4 + x^3 + C\end{aligned}$$

于是

$$3x^2 f_2' = 6x^5 + 6x^3 + 3x^2 \Longrightarrow f_2'(x, x^3) = 3x^3 + 2x + 1$$

练习 10.6 设 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, 并且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 已知 $u(x, 2x) = x, u_x(x, 2x) = x^2$ 试求: $u_{xx}(x, 2x), u_{xy}(x, 2x), u_{yy}(x, 2x)$

解 对 $u(x, 2x) = x$ 两边对 x 求导

$$u_x'(x, 2x) + 2u_y'(x, 2x) = 1$$

由 $u_x(x, 2x) = x^2$ 可得

$$u_y'(x, 2x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

上式两边对 x 求导

$$u_{xy}'(x, 2x) + 2u_{yy}''(x, 2x) = -x \tag{10.3}$$

对 $u_x'(x, 2x) = x^2$ 两边对 x 求导

$$u_{xx}''(x, 2x) + 2u_{xy}''(x, 2x) = 2x \tag{10.4}$$

利用 $u_{xx}=u_{yy}$, $u_{xy}=u_{yx}$, 联立式 (10.3) 和 (10.4) 求解可得

$$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x \qquad u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

练习 10.7 设 $z=f(x,y)$ 有连续二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad f(x,2x)=5x^2 \qquad f_x'(x,2x)=2x$$

求 $f(2,1)=$ ________

解 对 $f(x,2x)=5x^2$ 两边对 x 求导

$$f_x'(x,2x)+2f_y'(x,2x)=10x$$

由 $f_x'(x,2x)=2x$ 可得

$$f_y'(x,2x)=4x \tag{10.5}$$

上式两边对 x 求导

$$f_{xy}'(x,2x)+2f_{yy}''(x,2x)=4 \tag{10.6}$$

对 $f_x'(x,2x)=2x$ 两边对 x 求导

$$f_{xx}''(x,2x)+2f_{xy}''(x,2x)=2 \tag{10.7}$$

且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 联立 (10.6) 与 (10.7) 解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\ f_{xy}''(x,2x)=0$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=2y+h(x) \Longrightarrow f(x,y)=y^2+h(x)y+g(x)$$

再结合条件 $f(x,2x)=5x^2$ 以及式 (10.5) 可得

$$h(x)=0 \qquad g(x)=x^2$$

因此 $f(x,y)=x^2+y^2$, 故 $f(2,1)=5$

命题 10.2

函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微当且仅当下面的等式成立

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i$$

当 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ 时,

$$\beta_i(\boldsymbol{h})\to 0, \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

10.5 隐函数存在定理与隐函数求导

定理 10.6 (一元的隐函数存在定理)

设开集 $D\subset\mathbb{R}^2$, 函数 $F: D\in\mathbb{R}$ 满足条件

(a) $F\in C^1(D)$;

(b) $F(x_0,y_0)=0$, 其中 $(x_0,y_0)\in D$;

(c) $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

那么存在一个包含 (x_0,y_0) 的开矩阵, $I\times J\subset D$, 使得:

(1) 对每一个 $x\in I$, 方程 $F(x,y)=0$ 在 J 中有唯一解 $f(x)$;

(2) $y_0 = f(x_0)$;

(3) $f \in C^1(I)$, 且 $f'(x) = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$.

证明 对此定理的分析:

- 开集: 定义在开集则不需要讨论边界点, 比较方便
- 唯一解 $f(x)$: 这样可以避开 $F_y' = 0$ 的点. 如果 $F_y' = 0$, 则 $f'(x) \to \infty$, 即垂直, 此时将不会唯一确定 $f(x)$.

([82],385) 不妨设 $F_y'(x_0, y_0) > 0$. 由条件 (a), 存在一个包含 (x_0, y_0) 的开矩阵 $I' \times \bar{J}$, 满足 $I' \times \bar{J} \subset D$, 且在 $I' \times \bar{J}$ 上 $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$, 于是对任意给定的 $x \in I'$, $F(x, y)$ 在闭区间 $\bar{J}$ 上是严格递增的连续函数. 设 $J = (c, d)$, 由条件 (b), 可知必有

$$F(x_0, c) < 0, \quad F(x_0, d) > 0$$

由条件 (a) 能推出 $F \in C(D)$, 因此存在含 x_0 的开区间 $I \in I'$, 使得当 $x \in I$ 时,

$$F(x_0, c) < 0, \quad F(x_0, d) > 0$$

由连续函数的零值定理和严格单调性知, 对每一个 $x \in I$, 存在唯一的一个数, 记作 $f(x) \in (c, d) = J$, 使得 $F(x, f(x)) = 0$. 这就证明了 (1), 显然 f 满足 (2).

为了证明 (3) 和 (4), 我们先来证明 f 在开区间 I 上连续. 特别地, 要证明 f 在 x_0 处连续. 这是十分明显的. 因为从上述做法中可以看出, 不管包含 y_0 的区间 J 取得多么小, 区间 I 一定可以取得适当小, 使得当 $x \in I$ 时对应的 $f(x) \in J$, 由此可得 $|f(x) - f(x_0)| < |J|$, 其中 $|J|$ 表示区间 J 的长度.

现在任取 $x_1 \in I$, 设 $y_1 = f(x_1)$, 则 $(x_1, y_1) \in I \times J$. 因为 $F(x_1, y_1) = 0$, $\dfrac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} > 0$, 所以 F 在点 (x_1, y_1) 处满足它在 (x_0, y_0) 处的同样条件. 因此, 由前述证明可知, 存在着包含 (x_1, y_1) 的开矩形 $I_1 \times J_1 \subset I \times J$, 当 $x \in I_1$ 时方程 $F(x, y) = 0$ 在 J_1 上有唯一解 $g(x)$, g 在 x_1 处是连续的. 然而由唯一性可知, 当 $x \in I_1$ 时 $f(x) = g(x)$, 这说明 f 在点 x_1 处是连续的. 由 $x_1 \in I$ 的任意性, 可知 f 在 I 上是连续的.

再证 f 满足 (3) 和 (4). 设 $x \in I$, 取 h 很小, 使得 $x + h \in I$. 令 $y = f(x)$, $k = f(x+h) - f(x)$. 由 F 的可微性, 并利用命题10.2, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h, y+k) - F(x, y) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}k + \alpha h + \beta k \end{aligned}$$

其中 α 与 β 满足: 当 $h \to 0, k \to 0$ 时, $\alpha \to 0, \beta \to 0$.

但是, 当 $h \to 0$ 时, 由已证明过的 $f \in C(I)$, 知 $k \to 0$, 从而当 $h \to 0$ 时直接推出 $\alpha \to 0$ 与 $\beta \to 0$, 所以

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}$$

即 $f'(x) = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$

注 b 站 up 主轩兔的讲解: 隐函数定理的动画证明与理解

例题 10.25 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 都是由 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

解 由隐函数存在定理

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$$

定理 10.7 ((隐映射定理))

设开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $F: D \to \mathbb{R}^m$, 满足下列条件:

(a) $F \in C^1(D)$;

(b) 有一点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$, 使得 $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$;

(c) 行列式 $\det J_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$.

那么存在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的一个邻域 $G \times H$, 使得

(1) 对每一个 $\boldsymbol{x} \in G$, 方程 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 在 H 中有唯一解, 记为 $f(\boldsymbol{x})$;

(2) $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$;

(3) $f \in C^1(G)$, 且当 $\boldsymbol{x} \in G$ 时,

$$Jf(\boldsymbol{x}) = -\left(J_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right)^{-1} J_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$.

笔记 [5] 隐函数定理的各种推论对于理解流形的概念非常重要，而流形的概念是条件极值、曲面积分等后续内容的基础。常见证明方法：消元法、极值法、不动点法

1. 消元法
   - 优点：传统方法、思路清晰、易于理解
   - 缺点：证明过程繁琐，无法推广到无穷维空间
2. 极值法
   - 优点：证明过程简洁
   - 缺点：技巧性较强，只适用于欧氏空间
3. 不动点法
   - 优点：现代方法、证明过程简洁、可推广到 *Bannach* 空间
   - 缺点：需要度量空间、压缩映照原理等准备知识

10.6 多元函数的极值及其求法

定义 10.8 (二元函数的极值)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y):

- 若满足不等式 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数在 (x_0, y_0) 有极大值;
- 若满足不等式 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数在 (x_0, y_0) 有极小值;

10.6.1 无条件极值

定理 10.8 (必要条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

例题 10.26 设 $f(x, y)$ 在单位圆域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上具有一阶连续的偏导数, 且满足 $|f(x, y)| \leqslant 1$. 证明: 在单位圆域内有一点 (x_0, y_0) 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 \leqslant 16$$

证明 设 $g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$. 则在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上显然有 $g(x, y) \geqslant 1$.
而 $g(0, 0) \leqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1, 或者在单位圆内存在一点 (x_0, y_0), 使 g 在该点取到极小值. 总之, 必

在单位圆内存在一点 (x_0, y_0) 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -4x_0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -4y_0$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) \leqslant 16$$

注 进一步可证明: $\leqslant 4$[36]

定理 10.9 (充分条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0) = 0$，$f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A\,,\; f_{xy}(x_0, y_0) = B\,,\; f_{yy}(x_0, y_0) = C$$

则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC - B^2 > 0$ 时具有极值，当 $A < 0$ 时有极大值，当 $A > 0$ 时有极小值；
(2) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值；
(3) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值，还需另作讨论.

定义 10.9 (黑塞矩阵)

设 n 元函数 $f(x)$ 在点 P_0 处对于自变量的各分量的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 连续, 则称矩阵

$$\mathbf{H}f(P_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为 $f(x)$ 在点 P_0 处的二阶导数或黑塞矩阵 (*Hessian Matrix*), 也可记作 $\nabla^2 f(P_0)$. 易知矩阵 $\mathbf{H}f(P_0)$ 为对称矩阵.

定理 10.10 (可微分取极值的充分条件)

设 n 元函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处具有二阶连续偏导数, 且 $\nabla f(x_0) = 0$, 记 $\mathbf{H}f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的黑塞矩阵

1. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 正定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点
2. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 负定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点
3. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 不定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的鞍点
4. 其它情况需要另行判定

实对称矩阵的正定性相关定义及判定

1. 实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定的充要条件是它各阶主子式都大于 0. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0\,,\; (r = 1, 2, \cdots, n).$$

2. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 负定的充要条件是它奇数阶主子式都小于 0, 偶数阶主子式大于 0. 即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

3. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定: 所有特征根大于 0.
4. 实对称矩阵 A 是半正定矩阵的充要条件是它的所有主子式都大于等于 0
5. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是半负定矩阵的充要条件是它的所有奇数阶主子式都小于等于 0, 并且它的所有偶数阶主子式大于等于 0.
6. 如果实对称矩阵 A 既不是半正定的, 也不是半负定的, 就称 A 为不定矩阵

例题 10.27 (第九届非数类预赛) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数. 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

解 *方法 1* 由于 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立,

故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$, 即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. 记 $H_f=(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立,

故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

方法 2 易得 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$, 令 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$, 由已知 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\sin\alpha=0$$

由 α 的任意性得 $\begin{cases} f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=0\end{cases}$, 从而 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha)\\&=(f_{xx}\cos\alpha+f_{xy}\sin\alpha)\cos\alpha+(f_{yx}\cos\alpha+f_{yy}\sin\alpha)\sin\alpha\\&=f_{xx}\cos^2\alpha+2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}\sin^2\alpha\\&=\sin\alpha\cos\alpha\left[f_{xx}\cot^2\alpha+2f_{xy}+f_{yy}\tan^2\alpha\right]\end{aligned}$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[f_{xx}(0,0)\cot^2\alpha+2f_{xy}(0,0)+f_{yy}(0,0)\tan^2\alpha\right]>0$$

令 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$f_{xy}(0,0)>-\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)\right]$$

从而

$$\begin{aligned}&\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\>&\frac{1}{4}\left[f_{xy}(0,0)\right]^2+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\frac{1}{4}\left[f_{yy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\=&\frac{1}{4}\left\{\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-2f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\left[f_{yy}(0,0)\right]^2\right\}\\=&\frac{1}{4}\left[f_{xx}(0,0)-f_{yy}(0,0)\right]^2\geqslant 0\end{aligned}$$

这就说明 $B^2 - AC > 0$, $f(0,0)$ 为极值. 下面证明 $f(0,0)$ 为极小值,

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{g_\alpha'(t)-g_\alpha'(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g_\alpha'(t)}{t} > 0$$

由保序性知: $t>0$ 时, $g_\alpha'(t) > 0 \Longrightarrow g_\alpha(t)\uparrow$; $t<0$ 时, $g_\alpha'(t)<0 \Longrightarrow g_\alpha'(t)\downarrow$

所以 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

例题 10.28 (北大,2018) 设 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导, $\varphi(0)=0$, f 在 $x=0$ 附近二阶连续可微. $\nabla f(x,\varphi(x))=0$, f 在 $(0,0)$ 的 Hessian 矩阵半正定且非零矩阵. 求证 f 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

解 *(by 逆逆)* 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近二阶连续可微知

$$f_x(x,y) - f_x(0,0) = f_{xx}(0,0)x + f_{xy}(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$
$$f_y(x,y) - f_y(0,0) = f_{yx}(0,0)x + f_{yy}(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

由 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导以及 $\nabla f(x,\varphi(x))=0$ 知

$$0 = f_{xx}(0,0)x + f_{xy}(0,0)\varphi'(0)x + o(|x|) \Longrightarrow 0 = f_{xx}(0,0) + f_{xy}(0,0)\varphi'(0)$$
$$0 = f_{yx}(0,0)x + f_{yy}(0,0)\varphi'(0)x + o(|x|) \Longrightarrow 0 = f_{yx}(0,0) + f_{yy}(0,0)\varphi'(0)$$

由 f 在 $(0,0)$ 的 *Hessian* 矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{yy}(0,0)\varphi'^2(0) & -f_{yy}(0,0)\varphi'(0) \\ -f_{yy}(0,0)\varphi'(0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}$$

半正定且非零知

$$f_{yy}(0,0) > 0.$$

于是存在 $\delta>0$, 使得任意满足 $|x|<\delta$ 及 $|y|<\delta$ 的 (x,y), 有

$$f_{yy}(x,y) > 0.$$

由 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导知连续, 可取 $0<\delta_1<\delta$, 使得 $|x|<\delta_1$ 时有

$$|\varphi(x)| < \delta.$$

首先证明 $\varphi(x)$ 在 $|x|<\delta_1$ 时是连续的. 否则, 存在数列 $x_n \to x_0$ 满足条件

$$\varphi(x_n) \to y_0 \neq \varphi(x_0),$$

于是有

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lim_{n\to\infty} \nabla f(x_n,\varphi(x_n)) = 0.$$

另一方面

$$f_y(x_0,y_0) = f_y(x_0,\varphi(x_0)) + f_{yy}(x_0,\xi)(y_0-\varphi(x_0)) = f_{yy}(x_0,\xi)(y_0-\varphi(x_0)) \neq 0,$$

其中 ξ 在 y_0 与 $\varphi(x_0)$ 之间, 矛盾. 所以 $\varphi(x)$ 连续. 下面我们固定 $\varepsilon>0$, 考虑函数

$$f_\varepsilon(x,y) = f(x,y) + \varepsilon x^2.$$

设 $0<x_1<\delta_1$, 由于

$$\nabla f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_1)) = \nabla f(x_1,y_1) + (2\varepsilon x_1, 0) = (2\varepsilon x_1, 0),$$

即

$$f_{\varepsilon,x}(x_1,\varepsilon(x_1)) = 2\varepsilon x_1 > 0,$$

存在领域 $U(x_1,\varphi(x_1)) = (x_1-\delta_{x_1}, x_1+\delta_{x_1}) \times (\varphi(x_1)-\delta_{x_1}, \varphi(x_1)+\delta_{x_1})$, 使得任意 $(x,y)\in U(x_1,\varphi(x_1))$, 均有

$$f_{\varepsilon,x}(x,y) > 0.$$

取 δ_{x_1}', 使得 $|x-x_1|<\delta_{x_1}'$ 时有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_1)| < \delta_{x_1}.$$

于是对于 $x_1 < x_2 < x_1 + \delta'_{x_1}$ 根据

$$f_{\varepsilon,y}(x_1, \varphi(x_1)) = 0$$

以及

$$f_{\varepsilon,yy}(x, y) = f_{yy}(x, y) > 0$$

可得

$$f_\varepsilon(x_1, \varphi(x_2)) \geqslant f_\varepsilon(x_1, \varphi(x_1)).$$

再根据 $f_{\varepsilon,x}(x, y) > 0$, 可得

$$f_\varepsilon(x_2, \varphi(x_2)) \geqslant f_\varepsilon(x_1, \varphi(x_2)).$$

因此, $0 < x_1 < \delta_1$ 时, 存在 $\delta'_{x_1} > 0$, 对于 $x_1 < x_2 < x_1 + \delta'_{x_1}$, 成立

$$f_\varepsilon(x_2, \varphi(x_2)) \geqslant f_\varepsilon(x_1, \varphi(x_1)).$$

由此不难得到 $x > 0$ 时, $f_\varepsilon(x, \varphi(x))$ 是增函数, 于是

$$f_\varepsilon(x, \varphi(x)) > f_\varepsilon(0, \varphi(0)) = f(0, 0).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 可得

$$f(x, \varphi(x)) \geqslant f(0, 0).$$

类似可得上述不等式对于 $x < 0$ 也成立. 根据 $f_y(x, \varphi(x)) = 0$ 以及 $f_{yy}(x, y) > 0$ 可得

$$f(x, y) \geqslant f(x, \varphi(x)) \geqslant f(0, 0).$$

故 f 在 $(0, 0)$ 处取得极小值.

10.6.2 条件极值　拉格朗日乘数法

例题 10.29 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

证明 设 $a_1 a_2 \cdots a_n = a$, 作辅助函数 $F = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \lambda(a_1 a_2 \cdots a_n)$.

$$\begin{cases} F'_{a_1} = 1 + \lambda a_2 a_3 \cdots a_n = 0, \\ F'_{a_2} = 1 + \lambda a_1 a_3 \cdots a_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots \\ F'_{a_n} = 1 + \lambda a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = 0, \\ F'_\lambda = a_1 a_2 \cdots a_n - a = 0, \end{cases}$$

解得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n]{a}$. 由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 无最大值, 其最小值为

$$\min\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\} = n\sqrt[n]{a},$$

即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a} = n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, 得证.

例题 10.30 设 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 求方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 = 6 \end{cases}$ 的解

解 考察 $f(x) = 7x^3 + 14y^3 + 21z^3$ 在约束 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

由

$$\begin{cases} L_x = 21x^2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 42y^2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 63z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2\lambda}{21} = \dfrac{2\lambda}{21}(-1) \\ y = -\dfrac{2\lambda}{42} = \dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ z = -\dfrac{2\lambda}{63} = \dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{2\lambda}{21}\right)^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = 1 \Longrightarrow \lambda = -9$$

$$\Longrightarrow x = \frac{6}{7},\ y = \frac{3}{7},\ z = \frac{2}{7}$$

故 $f_{\min} = \dfrac{1}{49}(6^3 + 2\times 3^3 + 3\times 2^3) = 6$. 因此方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 = 6 \end{cases}$ 的解为

$$x = \frac{6}{7},\ y = \frac{3}{7},\ z = \frac{2}{7}$$

例题 10.31 求 $u = \dfrac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值.

解[2] 对于固定的常数 $r > 0$, 我们把原问题化为下面的形式

$$\begin{cases} u = \dfrac{xy + 2yz}{r} \\ x^2 + y^2 + z^2 = r \end{cases} \tag{10.8}$$

作函数 $F(x, y, z) = u + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r)$, 对各变量求偏导数得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{r} + 2\lambda x,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x + 2z}{r} + 2\lambda y,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2y}{r} + 2\lambda z$$

令 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, 得 $\begin{cases} x = x \\ y^2 = 5x^2 \\ z = 2x \end{cases}$ 代入 (10.8) 式得 $x = \pm\sqrt{\dfrac{r}{10}}$.

取 $x = \sqrt{\dfrac{r}{10}}$, $y = \sqrt{\dfrac{r}{2}}$, $z = 2\sqrt{\dfrac{r}{10}}$, 代入 (10.8) 式得 $u = \dfrac{\frac{r}{\sqrt{20}} + 4\frac{r}{\sqrt{20}}}{r} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 即为所求.

例题 10.32 平面曲线 $L: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 x 轴旋转所得曲面 S, 求曲面 S 的内接长方体体积的最大体积

证明 长方体长 $2x$, 宽 $2y$, 高 $2z$, 曲面 S 方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

内接长方体体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 & (10.9) \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 & (10.10) \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{b^2} = 0 & (10.11) \end{cases}$$

[2]《高等数学中的若干问题解析》P203

$(10.9)\cdot x+(10.10)\cdot y+(10.11)\cdot z$, 并由约束条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 得

$$3xyz+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)=0\Longrightarrow 3xyz+2\lambda=0\Longleftrightarrow xyz=-\frac{2\lambda}{3}$$

$$\begin{cases} xL_x=xyz+\dfrac{2\lambda x^2}{a^2}=0\\ yL_y=xyz+\dfrac{2\lambda y^2}{b^2}=0\\ zL_z=xyz+\dfrac{2\lambda z^2}{b^2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

于是, 我们得到可能极值点为 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 由实际问题的特性及点的唯一性, 当 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ 时, 内接长方体的体积最大, 且最大体积为

$$V=8xyz=\frac{8}{3\sqrt{3}}ab^2$$

例题 10.33 (数学 III,2018) 将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 *(by 向禹)* 设分成的三段依次为 x,y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\dfrac{x}{2\pi},\dfrac{y}{4},\dfrac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{36}z^2$$

法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x'=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ f_y'=\dfrac{y}{8}+\lambda=0\\ f_z'=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0\\ x+y+z=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$

并且 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点,

此时最小面积为 $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

法二 由柯西不等式

$$\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4,$$

因此当 $\dfrac{x}{2\pi}=\dfrac{y}{16}=\dfrac{\sqrt{z}}{13\sqrt{3}}$ 时, $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

例题 10.34 设中心在原点的椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$, 求该椭圆的长半轴和短半轴.

解 法 *I(条件极值)*[83]. 相当于求原点 $(0,0)$ 到椭圆上的点的距离 d 的最大值和最小值, 设 $P(x,y)$ 为椭圆上任意一点, 则

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow d^2=x^2+y^2$$

关键在于想到用条件极值, *Lagrange* 函数为

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$$

对各变量求偏导数得

$$\begin{cases} L'_x = 2x + (2x - 4y)\lambda = 0 & (10.12a) \\ L'_y = 2y + (-4x + 10y)\lambda = 0 & (10.12b) \\ L'_\lambda = x^2 - 4xy + 5y^2 - 1 = 0 & (10.12c) \end{cases}$$

(1) 当 $\lambda = 0$ 时, 则必有 $x = y = 0$, 但这是不可能的！这会与 (10.12c) 矛盾.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\lambda = \frac{2x}{2x - 4y} = \frac{2y}{-4x + 10y} \Rightarrow 1 - 2\frac{y}{x} = -2\frac{x}{y} + 5$$

不妨令 $y/x = t$, 得 $1 - 2t = -2/t + 5$, 解得

$$t_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad t_2 = -1 - \sqrt{2}$$

代入方程 $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$

$$x^2 - 4tx^2 + 5t^2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{1 - 4t + 5t^2}$$

当 $t = t_1 = -1 + \sqrt{2}$ 时

$$x^2 = \frac{1}{1 - 4t + 5t^2} = \frac{1}{20 - 14\sqrt{2}}, \quad y^2 = t^2x^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$d_1^2 = x^2 + y^2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{20 - 14\sqrt{2}} \Rightarrow d_1 = \sqrt{2} + 1$$

当 $t = t_2 = -1 - \sqrt{2}$ 时

$$x^2 = \frac{1}{1 - 4t + 5t^2} = \frac{1}{20 + 14\sqrt{2}}, \quad y^2 = t^2x^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{20 + 14\sqrt{2}}$$

$$d_2^2 = x^2 + y^2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{20 + 14\sqrt{2}} \Rightarrow d_2 = \sqrt{2} - 1$$

故短半轴为 $\sqrt{2} - 1$, 长半轴为 $1 + \sqrt{2}$.

法 *II.* 通过为正交变换[3]将原方程化为标准型

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 1 \xRightarrow{\text{化为标准型}} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 \longleftrightarrow \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

上述变换相当于把椭圆旋转, 面积不变

$$x^2 - 4xy + 5y^2 \xRightarrow{\text{写成二次型矩阵}} (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其特征多项式

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

C 的特征值为

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

标准型

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 \longleftrightarrow \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

因此, 短半轴为 $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{2} - 1$, 长半轴为 $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 1 + \sqrt{2}$.

[3]为使曲线在旋转过程中保持形状不变, 要求使用正交变换

例题 10.35 求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0 \tag{10.13}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解[36] 以 (10.13) 为约束条件, 取目标函数 $f(x,y,z)=z$, 则 *Lagrange* 函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4).$$

令

$$L_x=4\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{10.14}$$

$$L_y=2\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{10.15}$$

$$L_z=1+2\lambda z-4\lambda=0. \tag{10.16}$$

显然 $\lambda\neq 0$, 于是由 (10.14) 和 (10.15) 得驻点为 $(0,1)$. 代入 (10.13) 得 $z_1=1, z_2=3$. 再由 (10.16) 得 $\lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=-\frac{1}{2}$. 由于

$$L_{xx}=4\lambda,\ L_{yy}=L_{zz}=2\lambda,\ L_{xy}=2\lambda,\ L_{xz}=L_{yz}=0,$$

于是 L 在 $(0,1,1)$ 与 $(0,1,3)$ 的 *Hesse* 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

前者正定, 后者负定, 所以 $z=1$ 为极小值, $z=3$ 为极大值.

例题 10.36 (北大,2009) 设 $x,y,z\geqslant 0, x+y+z=\pi$, 试求 $2\cos x+3\cos y+4\cos z$ 的最大值和最小值.

证明 (by SCIbird)[66] 先消去 z, 则原问题等价于求 $f(x,y)$ 的在区域 $D=\{(x,y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant \pi\}$ 最值.

$$2\cos x+3\cos y+4\cos z=2\cos x+3\cos y-4\cos(x+y):=f(x,y)$$

因为 $f(x,y)$ 在有界闭集 D 上连续, 故能在区域 D 上取得最值.

- 边界上的最值. 容易求得 $f(x,y)$ 在边界 ∂D 上最大值为 5, 最小值为 1.
- 内部的最值. 内部的最值必然为极值, 令

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4\sin(x+y)-2\sin x=0\\ f_y(x,y)=4\sin(x+y)-3\sin y=0\end{cases}$$

观察到, 一方面, 偏导数方程给出了三角函数的“比例关系”. 另一方面, 若驻点值存在, 则 x,y 都是正数且满足 $x+y+z=\pi$. 若把 x,y,z 视作三边之长分别为 a,b,c 的三角形的内角, 则由“正弦定理”, 得

$$\frac{c}{\sin(x+y)}=\frac{b}{\sin y}=\frac{a}{\sin x}$$

结合偏导数方程, 得到关系式 $a=2c, 3b=4c$. 令 $a=6t, b=4t, c=3t$, 不难验证可以构成一个三角形, 且满足此关系的三个内角是惟一确定的, 这就证明了驻点的存在性. 又由余弦定理可得

$$\cos x=-\frac{11}{24},\quad \cos y=\frac{29}{36},\quad \cos z=\frac{43}{48}$$

于是驻点对应函数值为

$$-2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{29}{36}+4\times\frac{43}{48}=\frac{61}{12}$$

综上, $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 $\frac{61}{12}$, 最小值为 1.

10.7 多元函数的泰勒公式

例题 10.37 (CMC, 2018) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

证明 法 I. 作辅助函数

$$\varphi(t)=f\left(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\right)$$

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $c\in(0,1)$, 使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$$

$$\begin{aligned}|\varphi(1)-\varphi(0)|&=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|\\&=\left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right|\\&\leqslant\left[\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2\right]^{\frac12}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{\frac12}\\&\leqslant M|AB|\end{aligned}$$

法 II. 由于函数可微, 则偏导数存在, 因此函数 $f(x,y)$ 关于 x,y 一阶可导, 因此分别依据 Lagrange 中值定理, 有

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|&=|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)+f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|\\&=|f_y'(x_1,\xi)(y_2-y_1)+f_x'(\eta,y_2)(x_2-x_1)|\end{aligned}$$

以上意思同上.

定理 10.11 (二元函数的 Taylor 公式)

设函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 $D=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2\}$ 内有关于 x,y 的各个 $m+1$ 阶连续的偏导数. 对 D 内任意一点 (x,y), 记 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(x_0,y_0)&+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\\&+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots\\&+\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0,y_0)+R_m(x,y),\end{aligned}$$

其中,

$$R_m(x,y)=\frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

$0<\theta<1$, 称为 Lagrange 余项.

练习 10.8 (CMC,2015) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant1$ 上有连续的二阶偏导数, $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$. 若 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

证明 在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

其中 $\theta\in(0,1)$, 记 $(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+w^2y\right)$$

已知条件 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M\Longleftrightarrow u^2+2v^2+w^2\leqslant M$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}$$

由于

$$\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\right|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}$$

以及

$$\left|\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|=\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}=x^2+y^2$$

我们有

$$\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|\leqslant\sqrt{M}(x^2+y^2)$$

即

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)$$

根据保序性，从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

例题 10.38 (北大, 2018) 设 f 在 $(0,0)$ 某个邻域内二阶连续可微, 求极限

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 *(by Hansschwarzkopf)* 根据题意, 有

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(0,0)+o\left(x^2+y^2\right)(x^2+y^2\to 0).$$

从而

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f_{xx}(0,0)x^2+f_{yy}(0,0)y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+o(R^4)$$
$$=\frac{\pi R^4}{8}f_{xx}(0,0)+\frac{\pi R^4}{8}f_{yy}(0,0)+o(R^4)(R\to 0^+).$$

因此

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}f_{xx}(0,0)+\frac{\pi}{8}f_{yy}(0,0).$$

注记: 原条件是 $f\in C^3$, 实际上 $f\in C^2$ 足矣.

第十一章 重积分

11.1 二重积分

11.1.1 利用重积分的定义求极限

例题 11.1 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}+\ln 2$$

例题 11.2 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\frac{j}{n}}x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例题 11.3 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\int_1^{\frac{1}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{2}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_1^{\frac{n-1}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right]$

解

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_1^{\frac{i}{n}}e^{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y e^{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=-\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e)\end{aligned}$$

例题 11.4 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right)$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(n+i+j)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{i}{n}+\frac{j}{n})^2}\\&=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

例题 11.5 计算 $\iint_D\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[0,2]$.

解 首先将区域 D 分为 4 个小区域, $D_k: k-1\leqslant x+y<k$, $k=1,2,3,4$, 于是有

$$S_{D_1}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\Longrightarrow\iint_{D_1}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_1}=\frac{1}{2}\times0=0$$

$$S_{D_2}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}\Longrightarrow\iint_{D_2}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_2}=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

$$S_{D_3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}\Longrightarrow \iint_{D_3}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_3}=\frac{3}{2}\times 2=3$$

$$S_{D_4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\Longrightarrow \iint_{D_4}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_4}=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$

故

$$\iint_{D}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=6$$

例题 11.6 计算 $\iint_D \lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant n, x>0, y>0\}$.

解 将区域 $D: x>0,\ y>0,\ x^2+y^2\leqslant n$ 分为 n 个小区域,

$$D_k: k-1\leqslant x^2+y^2<k, x>0, y>0\ ,\ k=1,2,\cdots,n$$

这 n 个小区域的面积均为 $\frac{\pi}{4}$, 且 $\lfloor x^2+y^2\rfloor$ 在这些区域的取值为 $0,1,\cdots,n-1$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\iint_D \lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\iint_{D_k}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\\&=\frac{\pi}{8}n(n-1)\end{aligned}$$

11.1.2 二重积分换序

笔记 二重积分与累次积分的关系

(1) 二重积分不存在, 累次积分只有一个存在

- (谢惠民[36], P244) 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ 2y, & \text{当 } x \text{ 是有理数}.\end{cases}$$

  则 $f(x,y)$ 在 D 上不可积, $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 不存在;

(2) 二重积分不存在, 两个累次积分存在且相等.

- (汪林[64], P289) 设 x 为一有理数, 则可把它表作 q_x/p_x, 其中 p_x 与 q_x 是互质的整数且 $q_x>0$. 现在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{ 为有理点且 } q_x=p_y,\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

(3) 二重积分存在, 累次积分不存在

- (梅加强[84], P473) 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x,y\text{ 都是或都不是无理数},\\ \frac{1}{p}, & x\text{ 是有理数}, x=\frac{r}{p}, y\text{ 是无理数},\\ \frac{1}{q}, & x\text{ 是无理数}, y\text{ 是有理数}, y=\frac{s}{p}.\end{cases}$$

  则 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 但它的累次积分不存在

- (汪林[64], P290) 设 x 为一有理数, 将它表作正分母的既约分数后, 分母表示为 q_x. 现在 $D=[0,1]\times[0,1]$

上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}, & x \text{ 和 } y \text{ 都是无理数},\\ 2y, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

(4) 二重积分存在, 它的累次积分存在但不相等

- (汪林[65], P544) 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}y^{-2}, & 0<x<y<1,\\ -x^{-2}, & 0<y<x<1,\\ 0, & [0,1]\times[0,1] \text{ 中的其它的点}.\end{cases}$$

(5) 二重积分存在, 累次积分只有一个存在

- (汪林[65], P551) 设 x 为一有理数, 将它表作正分母的既约分数后, 分母表示为 q_x. 现在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q_x}, & (x,y) \text{ 为有理点},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

定理 11.1 (傅比尼 (Fubini) 定理[52])

设 f 是两个变量 x 和 y 的函数, 如果 f 在整个矩形区 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上是可积的, 即对 $\forall x\in[a,b]$, 积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在; 对 $\forall y\in[c,d]$, 积分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 也存在, 那么就有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

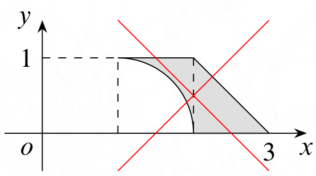
这里 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 这就是说积分次序是可以交换的

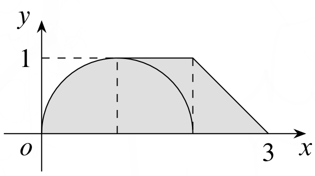
例题 11.7 交换累次积分的顺序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

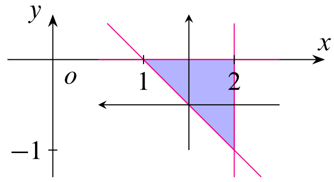
积分区域为本题的易错点





例题 11.8 交换二重积分的积分次序 $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

解



$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= -\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{1-x}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

笔记 注意积分上下限次序

例题 11.9 交换二重积分的积分次序 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=& \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}x \int_{\sin x}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=& \int_0^{1} \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注 本题的“陷阱”：$y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 内的反函数不是同一个

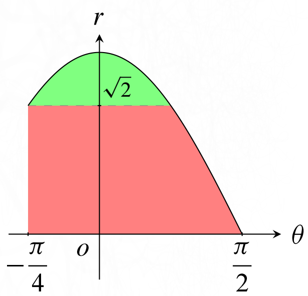
- 由于 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 内不是单射, 所以每段反函数是不一样的
- 本题中反函数的具体求解参考例题1.15

例题 11.10 在极坐标下交换积分次序

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

解 法 I(类直角坐标法). 积分区域 D

$$D:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\\ -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$



由于 $r=\arccos\theta$ 的定义域为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 故

$$\theta=\begin{cases}-\arccos\frac{r}{2}, & -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\\ \arccos\frac{r}{2}, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

绿色的区域 D_1

$$D_1:\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 2\\ -\arccos\dfrac{r}{2}\leqslant\theta\leqslant\arccos\dfrac{r}{2}\end{cases}$$

红色的区域 D_2

$$D_2:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\ -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\arccos\dfrac{r}{2}\end{cases}$$

根据积分区域的划分可得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos x} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r \\
&= \iint_{\text{红色的区域}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \iint_{\text{原谅色的区域}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

其它的解法参考 http://kaoyan.xdf.cn/201611/10564802.html

练习 11.1 在极坐标下交换积分次序

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_1^{\sqrt{2}} \rho\mathrm{d}\rho \int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

练习 11.2 对积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 作极坐标变换, 并表示为不同次序的累次积分, 其中 $D = \{(x,y)|0 \leqslant 1, 0 \leqslant x + y \leqslant 1\}$

解 经过极坐标变换后, D 可分解为二个 θ 型区域:

$$G_1 = \left\{(r,\theta)\middle| -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0, 0 \leqslant r \leqslant \sec x\right\}$$

$$G_2 = \left\{(r,\theta)\middle| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}\right\}$$

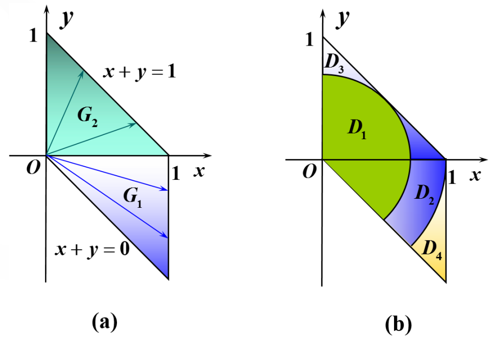
又可分解为四个 r 型区域 (见图 (b)):

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\middle| 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(r,\theta)\middle| \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant 1, -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}\right\}$$

$$D_3 = \left\{(r,\theta)\middle| \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant 1, \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}r} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_4 = \left\{(r,\theta)\middle| 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant -\arccos\frac{1}{r}\right\}$$



于是

$$I = I_1 + I_2 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

其中

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sec\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_2 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_3 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_4 = \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

11.1.3 重积分不等式

例题 11.11 (知乎, 480883708)[85] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-x^2}{2},$$

证明: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{3}$.

证明 注意到

$$\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-x^2}{2} \geqslant 0, \quad x \in [0,1]$$

立即想到重积分换序/分部积分, 我们待定一个新函数 $g(x) \geqslant 0$

$$\underbrace{\int_0^1 \overbrace{g(x)}^{\geqslant 0}\overbrace{\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)}^{\text{条件的放缩}}\mathrm{d}x}_{\text{放缩后能算}} \xlongequal{\text{换序}} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \overbrace{\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x}^{\text{记为 } h(t)}$$

$$= \int_0^1 h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

结合所证, 我们考虑 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 h(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

变形得到

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\left(\int_0^1 h(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t} \geqslant ?$$

注意到 ($g(x) \geqslant 0$ 确保符号)

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 g(x)\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^1 g(x)\cdot\frac{1-x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1-x^2}{2}h(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \frac{\left(\int_0^1 h(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\left(\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x}\\ &\geqslant \frac{\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

取等条件为 $f(x) = C_1h(x) = C_2x$ 且 $\displaystyle\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-x^2}{2}$. 即

$$\int_x^1 Cx\,\mathrm{d}x = \frac{1-x^2}{2} \Rightarrow C = 1$$

也即当且仅当 $f(x) = x = C_1h(x)$ 时取等!

练习 11.3 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域

$$D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

上具有连续的四阶偏导数, $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零, 且 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right| \leqslant 3$, 试证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{48}$$

解 *(待定系数法)*. 对任意 C_1, C_2 都有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}(x+C_1)\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} (x+C_1)f(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x+C_1)\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}\big((x+C_1)^2+C_2\big)\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \underbrace{-\frac{1}{2}\big((x+C_1)^2+C_2\big)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^1 \big((x+C_1)^2+C_2\big)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即 $\begin{cases}(1+C_1)^2+C_2=0\\(0+C_1)^2+C_2=0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}C_1=-\frac{1}{2}\\C_2=-\frac{1}{4}\end{cases}$. 从而

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

故有

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 (x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意到当 $y=0$ 或 $y=1$ 时, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv 0$. 从而同理(11.1)可得

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| &= \left|\frac{1}{4}\iint_D\int_0^1 (x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant \frac{1}{4}\iint_D \left|(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\leqslant \frac{3}{4}\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x\int_0^1 (y-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

11.2 多重积分及其基本性质

例题 11.12 (匈牙利, 1967) 设 $f:[0,1]\to R$ 连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

.

解 法 *I*. 设 $|f|$ 最大值为 M. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-1/2|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f(\tfrac{1}{2})\right|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\tfrac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\ \leqslant&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\tfrac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\ +&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\tfrac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2M\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\delta} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots dx_n+\varepsilon\\
&\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\delta}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon\\
&\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon\\
&=\frac{M}{6n\delta^2}+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\leqslant\varepsilon.
$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即可.

法 *II.* 由科尔莫格罗夫强大数定律得

$$
\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s.}E(X_i)=\frac{1}{2}(n\to+\infty).
$$

又因为 $f(x)$ 连续有界, 由控制收敛定理可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}E\left(f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)&=E\left(\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)\\
&=E\left(f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

例题 11.13 计算: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

解 令 $[0,1]^n=V_n$. 由于 $\displaystyle\lim_{\substack{y\to\frac{1}{3}\\x\to\frac{1}{2}}}\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 δ 使得 $\forall x,y:\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta,\left|y-\frac{1}{3}\right|<\delta$. 有 $\left|\frac{y}{x}-\frac{2}{3}\right|<\frac{\delta}{2}$,

令 $A_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\delta\right\}$, $B_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta\right\}$

则

$$
\begin{aligned}
&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
\geqslant&\underset{A_n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
\geqslant&\underset{A_n}{\int\cdots\int}\delta^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\delta^2m(A_n)\ (m(A_n)\text{为 }A_n\text{ 体积})
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
=&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n-\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\frac{1}{4}\\
=&\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{3}+2C_n^2\times\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12n}
\end{aligned}
$$

故 $m(A_n) < \frac{1}{12n\delta^2}$, 同理

$$\int_{[0,1]^n}\cdots\int \left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \geqslant \delta^2 m(B_n)\ (m(B_n)\text{为 } B_n \text{ 体积})$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{5}+2C_n^2\times\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\geqslant \delta^2 m(B_n)$$

$$\frac{4}{45n}\geqslant \delta^2 m(B_n)$$

即 $m(B_n) < \frac{4}{45n\delta^2}$, 从而

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[0,1]^n}\cdots\int \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{2}{3}\right| \\
\leqslant &\int_{[0,1]^n}\cdots\int\left|\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
\xlongequal{F(x)=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}} &\int_{[0,1]^n|(A_nUB_n)}\cdots\int |F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\int_{A_nUB_n}\cdots\int |F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
\leqslant &\frac{\varepsilon}{2}+\int_{A_n}\cdots\int\left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\int_{B_n}\cdots\int\left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
= &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}(m(A_n)+B(B_n)) \\
\leqslant &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12n\delta^2}+\frac{4}{45n\delta^2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2}+\frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2}+\frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}=0$. 故存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 且 $n>N$ 有

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2}+\frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\cdots\int\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{2}{3}$$

定理 11.2 (二重积分的中值定理)

设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) , 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

例题 11.14 设区域 $D{:}x^2+y^2\leqslant r^2$, 求 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2 \\
=&\lim_{\substack{r\to 0\\(\xi,\eta)\to(0,0)}} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1
\end{aligned}$$

11.3 重积分的计算

11.3.1 二重积分的计算

例题 11.15 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 设 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且有

$$f(x,y)=\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$

解 由

$$f(x,y)=\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得

$$\frac{xf(x,y)}{x+y}=\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}-\frac{1}{\pi}\frac{x}{x+y}\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到 $\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为常数，故令 $C=\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则

$$C=\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{C}{\pi}\iint\limits_D\frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\xlongequal{\text{轮换对称性}}\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\sin(\pi\rho)\mathrm{d}\rho=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\xlongequal{\text{轮换对称性}}\iint\limits_D\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{15\pi}{8}\end{aligned}$$

由此可知 $C=-\frac{23}{6}$, 故 $f(x,y)=\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})+\frac{23}{6\pi}$

注 本题作为抛砖引玉, 笔者找不到更简单的题目了. 这种其实和定积分的思路是一样的, 二重积分同样是个常数! 同样的思路来建立等式, 接着就变成计算问题了

练习 11.4 设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,\mathrm{d}t+\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 D 是以 $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形, 且 $f(1)=0$, 求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

解 *法 1* 令 $\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$, 则

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,\mathrm{d}t+A$$

以 xy 替换 x

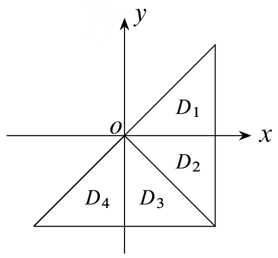
$$f(xy)=x^2y^2+xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t+A$$

$$\begin{aligned}A&=\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D\left[xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{9}+\iint_D\left[xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2A\\&\xlongequal{u=xy-t}\frac{2}{9}+\iint_D\left[xy\int_0^{x^2y^2} f(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2A=\frac{2}{9}+2A\end{aligned}$$

即 $A=\frac{2}{9}+2A\Longrightarrow A=-\frac{2}{9}$.

法 2(by 湖工 hfg) 令 $\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$, 由 $f(-x)=x^2-x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t+A$, 则对任意 x 有

$$f(x)+f(-x)=2x^2+2A$$



根据函数 $f(xy)$ 的性质, 显然有

$$\iint_{D_2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\iint_{D_4} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_3} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_{D_1}\big(f(xy)+f(-xy)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\big(f(xy)+f(-xy)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_1}\big(2(xy)^2+2A\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\big(2(xy)^2+2A\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{9}+2A\end{aligned}$$

即 $A=\frac{2}{9}+2A\Longrightarrow A=-\frac{2}{9}$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t-\frac{9}{2}\\&\xlongequal{u=x^2-t}x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

结合已知条件 $f(1)=0$ 代入, 所以有

$$0=1+\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u-\frac{2}{9}\Longrightarrow\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u=-\frac{7}{9}$$

11.3.1.1 利用直角坐标计算二重积分

例题 11.16 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 积分区域参考同济 7 高数 p372 页

$$\begin{aligned}\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(x+y)y\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\big(t-\sin t+1-\cos t\big)(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xlongequal{u=t-\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\Big(u+\pi+\sin u+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} 2\int_0^{\pi}\Big(\pi+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\theta=u-\frac{\pi}{2}} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\pi+1-\sin\theta\Big)(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&\xlongequal{\text{Wallis}} 4\pi\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\Big)+4\Big(\frac{\pi}{2}+3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\Big)=\pi(3\pi+5)
\end{aligned}$$

例题 11.17 设 $u(x)\in C[0,1]$ 且 $u(x)=1+\lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y$. 试证: $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$

解 等式两边对 x 从 0 到 1 积分，得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x+\lambda\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y \\
&= 1+\lambda\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} 1+\lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(y-x)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{y-x=t} 1+\lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(t)\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{轮换对称性}} 1+\lambda\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

设 $\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x=a$, 故

$$a=1+\frac{\lambda}{2}a^2\Longrightarrow\Delta=1-4\cdot\frac{\lambda}{2}\geqslant 0\Longrightarrow\lambda\leqslant\frac{1}{2}$$

例题 11.18 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{260n\pi}\dfrac{t|\sin t|}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}t$, 其中 $D: x^2-260x+y^2\leqslant n^2-260n$

证明 (by 蓝兔兔)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{260n\pi}\frac{t|\sin t|}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{260n\pi}t|\sin t|\,\mathrm{d}t}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(260n)^2\pi}{130\pi(n-130)^2}=520
\end{aligned}$$

练习 11.5 计算二重积分 $\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 令

$$D=[0,1]\times[0,1],D_1=D\cap\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\},D_2=D\cap\{(x,y):x^2+y^2\geqslant 1\},$$

则

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1-z\\ x,y\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1(1-z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

练习 11.6 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\{e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}=+\infty.$

解

$$\begin{aligned}
F(t) &= 2\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^x\frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1-e^{y-x}}{x-y}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^x e^x\,\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \\
&\geqslant 2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= 2\int_0^t e^x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2e^t\ln(1+t)-2\int_0^t\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+x} \\
&\geqslant 2e^t\ln(1+t)-2\int_0^t e^x\,\mathrm{d}x \\
&= 2e^t\ln(1+t)-2(e^t-1), \forall t>0.
\end{aligned}$$

故

$$e^{-t}F(t)\geqslant 2\ln(1+t)-2(1-e^{-t})\to+\infty(t\to+\infty).$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}F(t)=+\infty.$$

例题 11.19 (Ahmed 积分) 证明积分:

$$\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{5}{96}\pi^2.$$

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{16} &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}+\frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}-\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{6}-2\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{5}{96}\pi^2
$$

例题 11.20 (AMM12011) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2n\right)$

证明 (by 向禹) 显然

$$
\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
$$

因此, 我们只需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x-n\right)$ 即可.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-x}\frac{x^n-y^n}{1-e^{-(x-y)}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-x}(x^n-y^n)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k(x-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= n\cdot n! + \int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-(k+1)x}(x^n-y^n)\sum_{k=0}^{\infty}e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

这里

$$
\int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-x}(x^n-y^n)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n\cdot n!
$$

而

$$
\int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-(k+1)x}x^n e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)x}x^n\frac{e^{kx}-1}{k}\,\mathrm{d}x = n!\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k(k+1)^{n+1}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-(k+1)x}y^n e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} e^{-(k+1)x}y^n e^{ky}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{k+1}\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{+1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x-n &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}n!\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k(k+1)^{n+1}}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^{n+1}} \to 1 \quad (n\to+\infty)
\end{aligned}
$$

因此原极限为 2

11.3.1.2 利用极坐标计算二重积分

当 θ 的范围不特殊的时候, 真不要硬转极坐标, 有时候直角好算很多, 出题人坑你呢!

例题 11.21 极坐标换元法的一个**错误**证明：令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\mathrm{d}(r\cos\theta)=-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\cos\theta\,\mathrm{d}r \\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}(r\sin\theta)=r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta+\sin\theta\,\mathrm{d}r \end{cases}$$

因此, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=r\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$

解 *(by ytdwdw)*[26] 教材中为了简洁, 所用记号不是很恰当, 这样就造成很多人不理解. 这是因为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 等微元在某些时候是理解成无方向的, 有的时候又需要理解成有方向的.

具体地, 如果用 $\overrightarrow{\mathrm{d}x},\overrightarrow{\mathrm{d}y}$ 表示有方向的长度元, $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 表示无方向的长度元, 等等, 则

$$\mathrm{d}S=|\overrightarrow{\mathrm{d}S}|=|\overrightarrow{\mathrm{d}x}\times\overrightarrow{\mathrm{d}y}|=r|\overrightarrow{\mathrm{d}r}\times\overrightarrow{\mathrm{d}y}|=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}A.$$

体积元可以利用混合积, 为解决更一般性的问题, 人们引入楔积 *(wedge product)*.

(by 予一人[1]*)* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 这样的记号并不代表通常意义上的乘法, 因此不能按照通常的多项式乘法来处理. 事实上, 它们是代数几何中所谓的楔形积 *(wedge product)*, 相当于外积. 严格来讲, 这记号应该写作 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$. 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y&=\mathrm{d}(r\cos\theta)\wedge\mathrm{d}(r\sin\theta)\\ &=(-r\sin\theta\mathrm{d}\theta+\cos\theta\mathrm{d}r)\wedge(r\cos\theta\mathrm{d}\theta+\sin\theta\mathrm{d}r)\\ &=-r\sin^2\theta(\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r)+r\cos^2\theta(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta)\\ &=r\sin^2\theta(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta)+r\cos^2\theta(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta)\\ &=r(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta)\\ &=r(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta) \end{aligned}$$

例题 11.22 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

解 法 *I.* 用极坐标变换, 正方形区域变成

$$\Omega:0\leqslant r\leqslant\min\{\sec\theta,\csc\theta\},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据对称性, 得到

$$\begin{aligned} \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}}r|r^2-1|dr\\ &=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}r|r^2-1|dr\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}|r^2-1|d(r^2-1)\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}|r^2-1|(r^2-1)\Big|_0^{\sec\theta}d\theta\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^4\theta+1)d\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

法 *II.*

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}}r|r^2-1|\mathrm{d}r$$

[1] https://www.zhihu.com/question/368888687

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}} r(r^2-1)\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{8} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sec\theta} r(r^2-1)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例题 11.23 计算 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $x^2+y^2=x+y$ 所围成的区域

解[13] 原区域为 $x^2+y^2 \leqslant x+y$. 极坐标变换为

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}
$$

附带的限制是

$$
\begin{cases} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}
$$

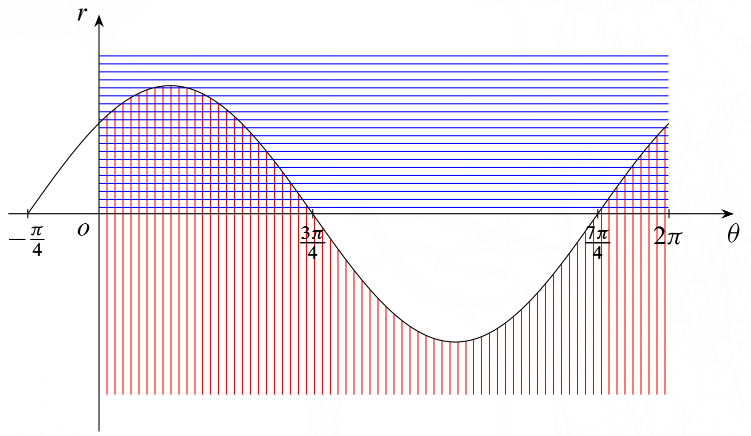
这样变换后的区域为

$$
\begin{cases} r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}
$$

需要注意原积分并不等于

$$
\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r(\sin\theta+\cos\theta) r\,\mathrm{d}r
$$

通常, 应该化个草图, 来看出新变量真正的取值范围 从图中可以看出新的积分区域为红色阴影区域和蓝色阴影区



域相交部分, 即

$$
\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[2\pi - \dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases}
$$

由于 θ 在 $\left[2\pi-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ 这一段可以看作与 θ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 的那一段是一样的, 所以新区域又可以写成

$$
\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}
$$

如果你未卜先知, 可以一开始就将变量代换中 θ 的范围定为 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ 或 $[-\pi, \pi]$. 于是

$$
\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2}r^2 \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}r
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{3}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\frac{4}{3}\sin^4\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta \xlongequal{\textit{Wallis}\text{ 公式}} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

也可以这样做

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}r^2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} 2r^2\sqrt{2-r^2}\,\mathrm{d}r \xlongequal{r=\sqrt{2}\sin\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

例题 11.24 (徐森林, P424) 平面上由 $2 \leqslant \dfrac{x}{x^2+y^2} \leqslant 4$ 与 $2 \leqslant \dfrac{y}{x^2+y^2} \leqslant 4$ 所确定的区域记为 Ω. 证明:

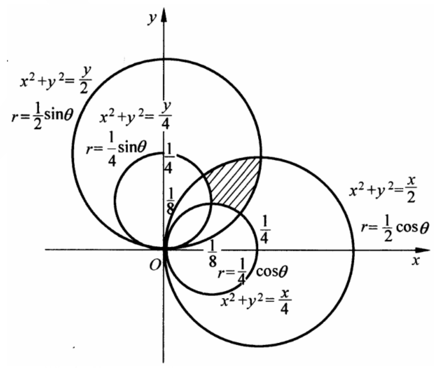
$$
\iint_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \ln^2 2
$$

解 积分区域关于 $y=x$ 对称, 被积函数也关于 $y=x$ 对称.
只须考虑从 x 轴到 $y=x$ 所夹的一部分.
曲线 $x^2+y^2=\dfrac{x}{2}, x^2+y^2=\dfrac{x}{4}, x^2+y^2=\dfrac{y}{2}, x^2+y^2=\dfrac{y}{4}$ 的极坐标方程分别是

$$
r=\frac{1}{2}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{4}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad r=\frac{1}{4}\sin\theta
$$

而 $r=\dfrac{1}{4}\cos\theta$ 与 $r=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ 的交点为 $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \arctan\frac{1}{2}\right)$, 所以

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\cos\theta\sin\theta} \\
&= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\ln\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{\frac{1}{4}\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\tan\theta}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\ln^2(2\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln^2 2
\end{aligned}
$$



11.3.1.3 微元法

例题 11.25 (2019 川大竞赛) 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则 $\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 令 $u=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y$, 固定 u 为常数, 注意坐标原点到直线

$$
u=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y
$$

的距离恰好为 $|u|$, 平行于该直线划分 D, 可选择面积元

$$
\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\ (|u|\leqslant 1)
$$

因此

$$
\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\sqrt{25-(5u)^2}\cdot 2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u
$$

$$= 10\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{40}{3}$$

11.3.1.4 二重积分的换元法

定理 11.3 (二重积分的换元公式)

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 若变换

$$T:\ x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D, 且满足

(1) $x(u,v)$, $y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数

(2) 在 D' 上雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

(3) 变换 $T:\ D' \rightrightarrows D$ 是一对一的

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

注 比较定积分的换元法与重积分的换元法

- 定积分的积分区间, 从起点到终点, 自带有方向! 没有加绝对值
- 重积分的积分区域, 面积, 莫得方向! 加绝对值

例题 11.26 (CMC,2009) 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的三角形区域

解 令 $u = x+y$, $v = \dfrac{y}{x}$, 其雅可比行列式为

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

区域 D 变为 D', 即

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \dfrac{u}{1+v} = 0 \Longrightarrow u = 0 \\ y = 0 \Longrightarrow \dfrac{uv}{1+v} = 0 \Longrightarrow uv = 0 \\ x+y = 1 \Longrightarrow \dfrac{u}{1+v} + \dfrac{uv}{1+v} = 1 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

那么有

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} \frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{|u|}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^1 \frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

其中

$$J = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v \qquad K = \int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$$

$$= \left[-\frac{\ln(1+v)}{1+v}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v)^2}\mathrm{d}v$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{1+v}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$= \mathrm{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} = \frac{16}{15}$$

故

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15}$$

注 嗯, 代入 D 中的边界函数, D' 的边界函数就出来了, 接着画图计算, 就这么简单!

例题 11.27 设 D 为平面曲线 $xy=1, xy=3, y^2=x, y^2=3x$ 所围成的有界闭区域, 作变换 $(u,v)=\left(xy, \frac{y^2}{x}\right)$. 证明:

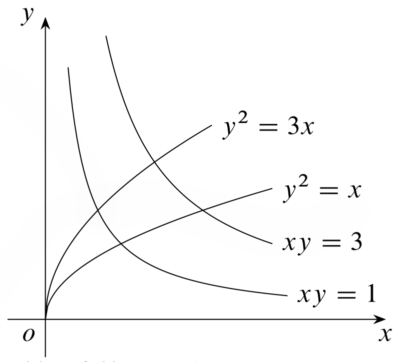
$$\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\ln 2$$

解 *(徐森林, P25)*[18] 由变换 $(u,v)=\left(xy, \frac{y^2}{x}\right)$ 知

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} = 3v \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{3v},$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D \frac{3}{\frac{y^2}{x}(1+xy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant 3\\ 1\leqslant v\leqslant 3}} \frac{3}{v(1+u)}\cdot\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_1^3 \frac{\mathrm{d}v}{v^2}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2
\end{aligned}$$



例题 11.28 设 D 是由在第一象限里的圆周 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 所围成的图形. 证明:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

解 作变换 $(x,y)=(e^{r\cos\theta}, e^{r\sin\theta})$, 其 *Jacobi* 行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta e^{r\cos\theta} & -r\sin\theta e^{r\cos\theta} \\ \sin\theta e^{r\sin\theta} & r\cos\theta e^{r\sin\theta} \end{vmatrix} = re^{r\sin\theta}e^{r\cos\theta}.$$

区域 D 变为 D', 即

$$\begin{cases} x+y=1 \Rightarrow e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1, \\ x^2+y^2=1 \Rightarrow e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1. \end{cases}$$

现在我们来分析由上述两条曲线所围成的 (r,θ) 平面上的区域是什么形状?

- 从第一个式子可以看出 θ 的变化范围必须使 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都取负值, 否则式子左端将大于 1. 故 θ 只能在 $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 中取值.
- 假设由第一个式子确定的函数为 $r=r(\theta)$, 则由第二个式子确定的函数便为 $r=\frac{1}{2}r(\theta)$.
- 经过仔细分析, D' 就是夹在 $r=r(\theta)$ 和 $r=\frac{1}{2}r(\theta)$ 两条曲线之间的区域.

因此,

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)} = \iint_{D'} \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r} = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}r(\theta)}^{r(\theta)} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例题 11.29 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 法 I. 注意到恒等式

$$\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$$

利用单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)，立即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}\right)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy$$

通过换元 $(u,v)=((x+y)/2,(y-x)/2)$, 也就是 $(x,y)=(u-v,u+v)$ 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv$$

S 是由点 $(0,0),(1/2,-1/2),(1,0),(1/2,1/2)$ 构成的正方形，利用正方形的对称性，那么

$$\begin{aligned}2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv&=4\int_0^{1/2}\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu+4\int_{1/2}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu\\&=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\\&\quad+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\end{aligned}$$

利用恒等式 $\arctan(u/\sqrt{1-u^2})=\arcsin u$, $\arctan((1-u)/\sqrt{1-u^2})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin u$, 就能够得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=4\int_0^{1/2}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arcsin u}{2}\right)du\\&=[2\arcsin u^2]_0^{1/2}+[\pi\arcsin u-\arcsin u^2]_{1/2}^1\\&=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

法 II. 计算:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2}$$

做代换

$$(u,v)=\left(\arctan x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},\arctan x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$$

从而有 $(x,y)=\left(\frac{\sin u}{\cos v},\frac{\sin v}{\cos u}\right)$, 雅可比行列式即为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}&=\begin{vmatrix}\cos u/\cos v & \sin u\sin v/\cos v^2\\ \sin u\sin v/\cos u^2 & \cos v/\cos u\end{vmatrix}\\&=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}=1-x^2y^2\end{aligned}$$

从而

$$\frac{3}{4}\zeta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\iint_A dudv$$

其中 $A=\{(u,v)|u>0,v>0,u+v<\frac{\pi}{2}\}$, 从而 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ 成立!

练习 11.7 证明:

$$\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u$$

其中 $S: x^2+y^2\leqslant 1, a^2+b^2\neq 0.$

解

$$ax+by=u\sqrt{a^2+b^2}$$

作正交变换:

$$u=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax,by),\quad v=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ay,bx)$$

则 $x^2+y^2=u^2+v^2$, 因此 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变成 $u^2+v^2\leqslant 1$ 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}=1$$

所以

$$\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u+c\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

而

$$\left\{u^2+v^2\leqslant 0\right\}=\left\{(u,v)\middle|-1\leqslant u\leqslant 1,-\sqrt{1-u^2}\leqslant v\leqslant\sqrt{1-u^2}\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}v\\&=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

练习 11.8 (谢惠民, 250)[36] 给定积分 $I=\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 作正则变换 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, 区域 D 变为 Ω, 如果变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

证明:

$$I=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

证明 由题设有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

两式相加得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\\&=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\end{aligned}$$

雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

因此有

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

✍ **练习 11.9** (知乎,447320633) 计算二重积分: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{(1-x\sin^2y)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-8(1-\ln 2)$.

解 *法 I 曲面积分 (by 向禹)*[86]. 首先作换元 $x=\sin^2\varphi,\ y=\theta$.

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{(1-x\sin^2y)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\ln(1-\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-(\sin\varphi\sin\theta)^2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\ln(\cos\varphi)}{\sqrt{1-(\sin\varphi\sin\theta)^2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=4\iint_\Sigma\frac{z\ln z}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的部分. 我们利用投影法来计算这个曲面积分, 设这个曲面在 xOy 面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}I&=4\iint_D\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}\ln\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_D\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\ln(1-y^2-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\frac{\sqrt{1-y^2}\ln(1-y^2)+2\ln(\ln 2-1)\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\ln(1-y^2)\,\mathrm{d}y+4(\ln 2-1)\\&=8(\ln 2-1).\end{aligned}$$

注: 利用同样方法, 我们还可以求出

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x\sin^2y)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=2\iint_\Sigma\frac{z\ln(1-z^2)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}z\\&=2\iint_D\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\frac{2y\arccos y-2\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\\&=2\pi-8.\end{aligned}$$

法 II 异轴球坐标变换 (by Unduloid)[87].

11.3.2 三重积分的计算

11.3.2.1 利用直角坐标系计算三重积分

定理 11.4 (化为三次积分)

将三重积分化为三次积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

例题 11.30 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成。

解

$$\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z=\frac{1}{48}$$

定理 11.5 (投影法 (先一后二))

设 Ω 是 XY 型区域: $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\right\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

例题 11.31 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 所围成。

解 Ω 在 xOy 面上的投影区域为三角形区域

下边界曲面: $z=0$, 上边界曲面: $z=xy$

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z=\frac{1}{364}$$

例题 11.32 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3$$

解[73] 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_z^1 f(y)\,\mathrm{d}y\int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_z^1 f(y)F(z)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f(z)F(z)\big[F(1)-F(z)\big]\,\mathrm{d}z\\&=\left[F(1)\frac{1}{2}F^2(z)-\frac{1}{3}F^3(z)\right]_0^1\\&=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3\end{aligned}$$

定理 11.6 (截面法 (先二后一))

设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|c\leqslant z\leqslant d,\ (x,y)\in D_z\right\}$

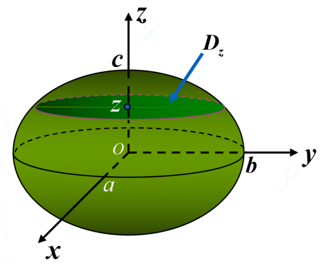
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

先计算一个二重积分 (算面积)、再计算一个定积分

例题 11.33 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

解 空间闭区域 Ω 可表示为

$$\Omega:\begin{cases}-c\leqslant z\leqslant c\\ D_z:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\end{cases}$$



于是

$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

笔记 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积: $A=\pi ab$

例题 11.34 (2015 考研) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_\Omega(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ______

解 由轮换对称性得

$$\iiint_\Omega(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面, 其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$. 所以

$$\iiint_\Omega(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

例题 11.35 求由方程 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=z$ 所确定的曲面 Σ 所围空间立体 Ω 的体积, 其中 a,b,c 为常数.

解 任取平面 $z=z(0\leqslant z\leqslant 1)$ 截立体 Ω 得截面

$$D_z:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\sqrt{z-\frac{z^4}{c^4}},$$

于是

$$V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}\sigma=\pi ab\int_0^c\sqrt{z-\frac{z^4}{c^4}}\,\mathrm{d}z$$
$$\xlongequal{t=z^{\frac{3}{2}}}\frac{2\pi}{3}ab\int_0^c\sqrt{1-\frac{t^4}{c^4}}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}ab\cdot\frac{\pi}{4}c^2=\frac{\pi^2}{6}abc^2$$

例题 11.36 (2018CMC) 计算三重积分 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

解

$$\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^4\mathrm{d}z\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{256}{3}\pi$$

例题 11.37 (CMC,2019) 计算三重积分 $\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$.

解 采用“先二后一法”，并利用对称性，得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},\text{其中 }D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x.$$

用极坐标计算二重积分，得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{r\,\mathrm{d}r}{(1+r^2+z^2)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

交换积分次序，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

作变量代换：$z=\tan t$，并利用对称性，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\theta\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

所以 $I=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi^2}{16}=\dfrac{\pi^2}{32}$.

11.3.2.2 利用柱面坐标计算三重积分

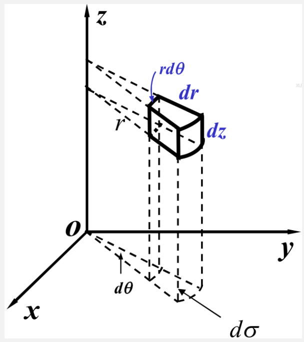
柱面坐标变换

$$T:\begin{cases}x=\rho\cos\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ y=\rho\sin\theta & 0\leqslant\rho<+\infty\\ z=z & -\infty<z<+\infty\end{cases}$$

空间直角坐标系下的三重积分与柱坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

柱面坐标＝极坐标＋竖坐标



例题 11.38 计算三重积分 $\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$，$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2$

解

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V&=\iint\limits_\Omega\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_\rho^2\rho^3\,\mathrm{d}z=\frac{16}{5}\pi\end{aligned}$$

例题 11.39 (1991 数 1) 求 $\iiiint_\Omega(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}x=0\\y^2=2z\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 围成的立体.

解 旋转曲面方程：$x^2+y^2=2z$，Ω 在坐标面上的投影区域：$x^2+y^2\leqslant 8$

$$\iiiint_\Omega(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^4(\rho^2+z)\rho\,\mathrm{d}z=\frac{256}{3}\pi$$

例题 11.40 计算 $\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成的有界区域

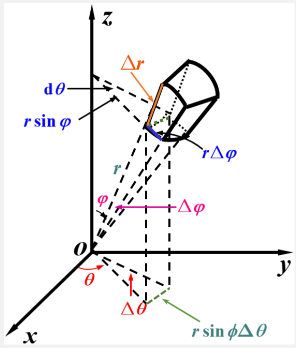
解

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z r\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

11.3.2.3 利用球面坐标计算三重积分

球面坐标变换

$$T:\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta & 0\leqslant\rho<+\infty \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z = \rho\cos\varphi & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \end{cases}$$



球面坐标下的体积元素

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

空间直角坐标系下的三重积分与球坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

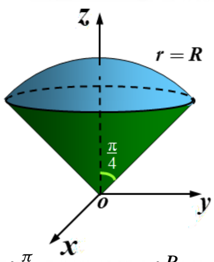
定理 11.7 (常见曲面的球面坐标方程)

	直角坐标方程	球面坐标方程
球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$r=R$
球面	$x^2+y^2+z^2=2az$	$r=2a\cos\varphi$
正圆锥面	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$
圆锥面	$z=\cos\beta\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\beta$

例题 11.41 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant R \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4} \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$



因此

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{5}R^5(2-\sqrt{2})$$

例题 11.42 计算 $\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

解 $\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 1$

$$\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

例题 11.43 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=2$, 求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$.

解 在球坐标系, 积分区域可以用不等式描述上述形式描述为:

$$D=\{(\theta,\varphi,r)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant t\}$$

所以三重积分为

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r\\&=4\pi\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

由于 $f(u)$ 具有连续导数, 故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=4\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r}{t^4}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}4\lim_{t\to0}\frac{t^2f(t)}{4t^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}f'(t)=2\end{aligned}$$

例题 11.44 (CMC, 2016) 某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$, 密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量

$$M=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解 由于

$$\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$$

是一个椭球, 它的体积为 $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

作变换 $\begin{cases}u=x-\frac{1}{2}\\v=y-\frac{1}{2}\\w=\sqrt{2}(z-\frac{1}{2})\end{cases}\Longrightarrow J=\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\sqrt{2}\Longrightarrow \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

将区域 Ω 变为单位球 $\Sigma: u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 则

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_\Sigma\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

因为一次项积分都为 0, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_\Sigma\left[u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w+A$$

其中 $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. 记

$$I=\iiint_\Sigma[u^2+v^2+w^2]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}$$

由于 u^2, v^2, w^2 在 Ω 上的积分都是 $\dfrac{I}{3}$, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

例题 11.45 (CMC, 2018) 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4$, $x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

解 (1). 计算大球 (V_1) 的积分: 采用球坐标换元, 令

$$(V_1):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z-1=r\cos\varphi\\0\leqslant r\leqslant 3,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\varphi\int_0^3 r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

(2). 计算小球 (V_2) 的积分: 采用球坐标换元, 令

$$(V_2):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z-2=r\cos\varphi\\0\leqslant r\leqslant 2,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

(3). 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 (V_3): 采用柱坐标, 令

$$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0\\0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V&=\iint_{r\leqslant 2\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0}r^2\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3(\sqrt{9-r^2}-1)\,\mathrm{d}r=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

所以最终的积分为

$$\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\iiint_{(V_1)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V-\iiint_{(V_2)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V-\iiint_{(V_3)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\frac{256}{3}\pi$$

例题 11.46 求由方程 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=z$ 所确定的曲面 Σ 所围空间立体 Ω 的体积, 其中 a,b,c 为常数.

解 作广义球坐标代换

$$\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\y=br\sin\varphi\sin\theta\\z=cr\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow\Omega:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant r\leqslant\left(\dfrac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}}abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\frac{2\pi}{3}abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2}{6}abc^2\end{aligned}$$

11.3.3 n 重积分的计算

例题 11.47 (积分竞赛, Q27) 计算: $\displaystyle\iiiint\limits_{\substack{x+y<1,0<x,y<1\\\xi+\eta<1,0<\xi,\eta<1}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(x+y-\xi-\eta)^2}}$.

解 (by 神琦冰河) 换元 $\begin{cases} p = x-\xi \\ \lambda = x+\xi \\ q = y = \eta \\ \mu = y+\eta \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(p+\lambda) \\ \xi = \frac{1}{2}(\lambda - p) \\ y = \frac{1}{2}(q+\mu) \\ \eta = \frac{1}{2}(\mu - q) \end{cases}$, 其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x,\xi,y,\eta)}{\partial(p,\lambda,q,\mu)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

故有

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{3}{4} \iiiint\limits_{\substack{p+q<2,0<p,q<2 \\ \lambda+\mu<2,0<\lambda,\mu<2}} \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\mu}{\sqrt{p^2+q^2+(p+q)^2}} \\ &= \frac{3}{2} \iint\limits_{p+q<2,0<p,q<2} \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}{\sqrt{p^2+q^2+(p+q)^2}}. \end{aligned}$$

又令 $\begin{cases} p+q = u \\ \frac{p}{q} = v \end{cases}$, 则 $\begin{cases} p = \dfrac{u}{1+v} \\ q = \dfrac{uv}{1+v} \end{cases}$, 其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2},$$

因此,

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{(1+v)\sqrt{1+v^2+(1+v)^2}}\,\mathrm{d}v \\ &= 3\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)\sqrt{1+v^2+(1+v)^2}} = \frac{3\ln 3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

例题 11.48 假设 $f \in C[t,t+1]$, 其中 $t>0$. 对于 $p\in\mathbb{R}$, 定义函数

$$\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0, \\ (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}, & p = 0. \end{cases}$$

另外定义

$$A_p = \begin{cases} \left(\dfrac{(t+1)^{p+1}-t^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0,-1 \\ \dfrac{(t+1)^{t+1}}{t^t e}, & p = 0. \\ \dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{t})}, & p = -1. \end{cases}$$

那么我们有极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[t,t+1]^n} f(\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n))\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f(A_p).$$

解 (by 逆逆) 若 $p\neq 0$, 令 $g(x) = f(x^{\frac{1}{p}})$, 那么只需考虑积分

$$\int_{[t,t+1]^n} g\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

由于我们可以用三角多项式一致逼近函数, 所以只需考虑 $e^{i2\pi kx}$ 的情形, 即

$$\int_{[t,t+1]^n}\exp\left(i2\pi k\cdot\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)dx_1\cdots dx_n=\left(\int_{[t,t+1]}e^{i2\pi k\frac{x^p}{n}}\,dx\right)^n.$$

根据 $e^{i2\pi k\frac{x^p}{n}}=1+i2\pi k\dfrac{x^p}{n}+O(1/n^2)$ 可得

$$\int_{[t,t+1]}e^{i2\pi k\frac{x^p}{n}}\,dx=1+i2\pi k\frac{A_p^p}{n}+O(1/n^2),$$

于是

$$\int_{[t,t+1]^n}\exp\left(i2\pi k\cdot\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)dx_1\cdots dx_n\to\exp(i2\pi kA_p^p),$$

故有

$$\int_{[t,t+1]^n}g\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)dx_1\cdots dx_n\to g(A_p^p),$$

因此

$$\int_{[t,t+1]^n}f(\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n))\,dx_1\cdots dx_n=f(A_p).$$

若 $p=0$, 我们可以用三角多项式一致逼近函数, 所以只需考虑 x^k 的情形即

$$\int_{[t,t+1]^n}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{k}{n}}\,dx_1\cdots dx_n=\left(\int_{[t,t+1]}x^{\frac{k}{n}}\,dx\right)^n.$$

根据 $x^{\frac{k}{n}}=1+\dfrac{k}{n}\ln x+O(1/n^2)$ 可得

$$\int_{[t,t+1]}x^{\frac{k}{n}}\,dx=1+\frac{k}{n}\ln A_0+O(1/n^2),$$

于是

$$\int_{[t,t+1]^n}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{k}{n}}\,dx_1\cdots dx_n\to\exp(k\ln A_0)=A_0^k.$$

类似可得结论成立.

推论: 根据幂平均不等式, $\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n)$ 关于 p 是递增的, 取 $f(x)=x$ 可得 A_p 关于 p 是递增. 特别地, 取 $p=-1,0,1$ 可得到不等式

$$\frac{t+1}{t+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\leqslant e\leqslant(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

例题 11.49 设 $\phi\in C^3(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x_0)=0$, $D\phi(x_0)=0$, $A=H_\phi(x_0)$ 为 ϕ 在 x_0 处的 Hesse 矩阵, A 正定. 设 $\delta>0$ 充分小, 求极限

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,dx.$$

解 *(by Hansschwarzkopf)* 根据题意, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon)(A(x-x_0),x-x_0)\leqslant\phi(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(A(x-x_0),x-x_0),\ \forall|x-x_0|\leqslant\delta.$$

故

$$\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,dx\leqslant\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}\exp\left(-\frac{t}{2}(1-\varepsilon)(A(x-x_0),x-x_0)\right)dx.$$

作正交和平移变换后, $|x-x_0|\leqslant\delta$ 变成 $|y|\leqslant\delta$, $(A(x-x_0),x-x_0)$ 变成 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(y^i)^2$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的所有特征值. 从而

$$\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}\exp\left(-\frac{t}{2}(1-\varepsilon)(A(x-x_0),x-x_0)\right)dx=\int_{|y|\leqslant\delta}\exp\left(-\frac{t}{2}(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n\lambda_i(y^i)^2\right)dy,$$

作尺度变换 $z=\sqrt{\dfrac{t(1-\varepsilon)}{2}}y$, 得到

$$\int_{|y|\leqslant\delta}\exp\left(-\frac{t}{2}(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(y^i)^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{2}{t(1-\varepsilon)}\right)^{n/2}\int_{|z|\leqslant\sqrt{\frac{t(1-\varepsilon)}{2}}\delta}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2\right)\mathrm{d}z,$$

故

$$\begin{aligned}
t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,\mathrm{d}x &\leqslant\left(\frac{2}{1-\varepsilon}\right)^{n/2}\int_{|z|\leqslant\sqrt{\frac{t(1-\varepsilon)}{2}}\delta}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2\right)\mathrm{d}z\\
&\to\left(\frac{2}{1-\varepsilon}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2\right)\mathrm{d}z\\
&=\left(\frac{2\pi}{1-\varepsilon}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\quad(t\to+\infty),
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,\mathrm{d}x &\geqslant\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{n/2}\int_{|z|\leqslant\sqrt{\frac{t(1+\varepsilon)}{2}}\delta}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2\right)\mathrm{d}z\\
&\to\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2\right)\mathrm{d}z\\
&=\left(\frac{2\pi}{1+\varepsilon}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\quad(t\to+\infty),
\end{aligned}$$

从而

$$\varlimsup_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{2\pi}{1-\varepsilon}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}},\quad\forall\varepsilon\in(0,1),$$

$$\varliminf_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{2\pi}{1+\varepsilon}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}},\quad\forall\varepsilon\in(0,1).$$

最后, 令 $\varepsilon\to0^+$, 得到

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}}\int_{|x-x_0|\leqslant\delta}e^{-t\phi(x)}\,\mathrm{d}x=(2\pi)^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

重积分换元法的证明

笔记 [5] 重积分换元法是整个数学分析中最难的一个定理，但很多常见的数学分析教材对这个定理的处理都是不严格的。常见证明方法:

1. 最简微分同胚法
   - 优点：传统方法
   - 缺点：需要微分同胚和单位分解的知识
2. *Schwartz 法 (1954):*
   - 优点：现代方法、易于 *Lebesgue* 积分对接
   - 缺点：需要无穷范数和相应的有限增量定理
3. *Lax 法:*
   - 优点：后现代方法、证明过程简洁
   - 缺点：对区域边界要求较高、需要先讲曲面积分

本节是 n 元重积分变量代换定理的证明出自张筑生的《数学分析新讲》,[88] 第二册. 相关的注解出自 SCIbird 的《我的数学分析积木》[66]

定理 11.8 (重积分的变量代换)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集. 如果

1. $\det \mathrm{D}\varphi(t) \neq 0,\ \forall t \in \operatorname{int} E$,
2. φ 在 $\operatorname{int} E$ 中是单一的.

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集, 并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f\left(\varphi(t)\right)|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{11.2}$$

本节就来证明这一基本定理. 为了叙述方便, 我们把证明过程分成小段, 先陈述并证明若干引理, 最后完成定理的证明.

若当可测集的变换

对于 $x = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y = (y^1, \cdots, y^m) \in \mathbb{R}^m$, 我们约定

$$\rho(x, y) = |x - y| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x^i - y^i|.$$

在涉及若当可测性的讨论中, 采用这种距离往往比用欧氏距离更为方便. —— 因为按照这种距离定义的邻域是便于计算体积的开正方块:

$$\begin{aligned} U_\rho(a, \eta) &= \{x \in \mathbb{R}^m | \rho(x, a) < \eta\} \\ &= (a^1 - \eta, a^1 + \eta) \times \cdots \times (a^m - \eta, a^m + \eta). \end{aligned}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^m, \phi \neq S \subset \mathbb{R}^m$, 我们又定义

$$\rho(x, S) = \inf_{z \in S} \rho(x, z).$$

对任意 $x, y \in \mathbb{R}^m, z \in S$ 我们有

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

由此可得

$$\rho(x, S) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, S).$$

由此又可得到

$$|\rho(x, S) - \rho(y, S)| \leqslant \rho(x, y).$$

由此, $\rho(x, S)$ 作为 $x \in \mathbb{R}^m$ 的函数是连续的. 如果 F 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭集, $x \notin F$, 那么存在 $\delta > 0$, 使得

$$U_\rho(x, \delta) \cap F = \phi,$$

因而

$$\rho(x, F) \geqslant \delta > 0.$$

对于任何一个集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ 和 $\eta > 0$, 我们约定记

$$S_\eta = \{x \in \mathbb{R}^m | \rho(x, S) \leqslant \eta\}.$$

显然 S_η 是包含 S 的一个闭集. 另外, 如果 S 是一个有界集, 那么 S_η 是包含 S 的一个有界闭集.

引理 11.1

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射. 则对任何紧致集 $K\subset\Omega$, 存在实数 $\lambda=\lambda(K)>0$, 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\lambda|x-y|,\quad\forall x,y\in K.$$

证明 我们记 $F=\mathbb{R}^m\backslash\Omega$. 变元 x 的连续函数 $\rho(x,F)$ 在紧致集 K 的某一点 a 达到它在 K 上的最小值

$$\zeta=\inf_{x\in K}\rho(x,F).$$

因为 F 是闭集, $a\notin F$, 所以

$$\zeta=\rho(x,F)>0.$$

记 $\eta=\dfrac{1}{2}\zeta>0$. 显然 $K_\eta=\{y\in\mathbb{R}^m|\rho(y,F)\leqslant\eta\}$ 是一个紧致集, 并且有 $K\subset K\eta\subset\Omega$. 我们记

$$L=\sup_{\xi\in K_\eta}|\mathrm{D}\varphi(\xi)|,\quad M=\sup_{\xi\in K}|\varphi(\xi)|,\quad\lambda=\max\left\{L,\frac{2M}{\eta}\right\}.$$

如果 $x,y\in K$ 使得 $|x-y|<\eta$, 那么联结 x 与 y 的闭线段包含在 K_η 之中: $[x,y]\subset K_\eta$, 因而有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)|&\leqslant\left(\sup_{\xi\in[x,y]}|\mathrm{D}\varphi(\xi)|\right)\cdot|x-y|\\&\leqslant L|x-y|\leqslant\lambda|x-y|.\end{aligned}$$

如果 $x,y\in K$ 使得 $|x-y|\geqslant\eta$, 那么也有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant 2M\leqslant\lambda\eta\leqslant\lambda|x-y|.$$

引理 11.2

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射. 如果 Λ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个零集, 它的闭包 $\mathrm{Cl}\,\Lambda\subset\Omega$, 那么 $\varphi(\Lambda)$ 也是一个零集.

证明 因为 $F=\mathbb{R}^m\backslash\Omega$ 是一个闭集, $\rho(x,F)$ 是变元 x 的连续函数, $\mathrm{Cl}\,\Lambda$ 是一个紧致集, 所以存在 $a\in\mathrm{Cl}\,\Lambda$, 使得

$$\rho(a,F)=\inf_{x\in\mathrm{Cl}\,\Lambda}\rho(x,F)=\zeta>0.$$

记 $\eta=\dfrac{1}{3}\zeta$, 并记 $K=\Lambda_\eta$. 显然 K 是一个紧致集, 根据引理 11.1, 存在常数 $\lambda>0$, 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\lambda|x-y|,\quad\forall x,y\in K.\tag{11.3}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 我们取 $\varepsilon'=\min\{\frac{\varepsilon}{\lambda^m},\eta^m\}$. 因为 Λ 是零集, 所以存在开正方块 $G_1,\cdots,G_r$, 使得

$$\Lambda\subset\bigcup_{i=1}^r G_i,\quad\sum_{i=1}^r\mathrm{Vol}(G_i)<\varepsilon'.$$

不妨设所有这些 G_i 都与 Λ 相交 (否则可以去掉一些多余的 G_i). 因为 $\ell(G_i)<\eta$, 所以 $G_i\subset K=\Lambda_\eta$. 由(11.3)式可知, 每个 $\varphi(G_i)$ 都包含在某个开正方块 H_i 之中, 这开正方块满足条件

$$\mathrm{Vol}(H_i)\leqslant\lambda^m\,\mathrm{Vol}(G_i)$$

于是, 开正方块 $H_1,\cdots,H_r$ 满足条件

$$\varphi(\Lambda)\subset\bigcup_{i=1}^r\varphi(G_i)\subset\bigcup_{i=1}^r H_i,$$

$$\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Vol}(H_i)\leqslant\lambda^m\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Vol}(G_i)<\varepsilon.$$

这证明了 $\varphi(\Lambda)$ 是一个零集.

设 $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 是连续可微映射, $E\subset\Omega$ 是若当可测集. 如果想要考察集合 $\varphi(E)$ 的若当可测性, 就需要了解 $\mathrm{B\,d}\varphi(E)$ 是否零集. 请不要误以为

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E)=\varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

以下的反例说明了这等式一般并不成立.

例题 11.50 考察 $\mathbb{R}^2$ 中的点集

$$E=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$$

和连续可微映射

$$\begin{aligned}\varphi:\quad \mathbb{R}^2&\quad\to\quad\mathbb{R}^2\\(x,y)&\to(x^2-y^2,2xy)\end{aligned}$$

(这是复映射 $w=z^2$ 所对应的实映射). 显然 φ 在 E 的内部是单一的, 并且

$$\begin{aligned}\det\mathrm{D}\varphi(x,y)&=\begin{pmatrix}2x&-2y\\2y&2x\end{pmatrix}\\&=4(x^2+y^2)>0,\quad\forall(x,y)\in\mathrm{int}\,E.\end{aligned}$$

但即使在这样的条件下，仍不能保证

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E)=\varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

实际上, E 的一部分边界点经 φ 映射之后变成了 $\varphi(E)$ 的内点, 所以对本例的情形有

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E)\neq\varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

引理 11.3

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集,

$$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

是一个映射, $E\subset\Omega$ 是一个有界闭集.

(1) 如果 φ 是连续映射, 那么 $\varphi(E)$ 也是一个有界闭集;

(2) 如果 φ 是连续可微映射, 并且满足这样的条件

$$\det\mathrm{D}\varphi(x)\neq 0,\quad\forall x\in\mathrm{int}\,E,,$$

那么

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E)\subset\varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

证明 (1) 我们指出 $\varphi(E)$ 是一个列紧集, 因而也就是有界闭集. 设 $\{v_n\}$ 是 $\varphi(E)$ 中的任意一个点列. 因为 $v_n\in\varphi(E)$, 所以存在 $u_n\in E$, 使得 $\varphi(u_n)=v_n$, $n=1,2,\cdots$. 因为 E 是有界闭集, 也就是列紧集, 所以从 $\{u_n\}$ 中可以抽出一个子序列 $\{u_{n_k}\}$, 这子序列收敛于 E 中的某点 x:

$$\lim_{n\to\infty}u_{n_k}=x\in E$$

于是有

$$v_{n_k}=\varphi(u_{n_k})\to\varphi(x)\in\varphi(E)$$

我们证明了 $\varphi(E)$ 是列紧集——有界闭集.

(2) 因为 $\varphi(E)$ 是有界闭集, 所以

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E)\subset\varphi(E).$$

对于任何 $y \in \mathrm{B\,d}\varphi(E) \subset \varphi(E)$, 存在 $x \in E$, 使得 $\varphi(x) = y$. 我们指: $x \notin \operatorname{int} E$, ——否则由逆映射定理就会得出 $y = \varphi(x) \in \operatorname{int}\varphi(E)$, 与所设矛盾. 于是, 只能有

$$x \in \mathrm{B\,d}E, \quad y \in \varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

这样, 我们证明了

$$\mathrm{B\,d}\varphi(E) \subset \varphi(\mathrm{B\,d}E).$$

推论 11.1

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集. 如果

$$\det \mathrm{D}\varphi(x) \neq 0, \quad \forall x \in \operatorname{int} E,$$

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集.

简单图形逼近

如果 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S 可以表示为有限个两两无公共内点的闭方块的并集, 那么我们就说 S 是一个简单图形、任何简单图形当然都是闭若当可测集.

引理 11.4

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射. $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集. 如果

$$\det \mathrm{D}\varphi(t) \neq 0, \quad \forall t \in \operatorname{int} E,$$

那么对任何 $\varepsilon > 0$, 存在简单图形 $S = S_\varepsilon \subset \operatorname{int} E$, 使得

$$v(E \backslash S) < e, \quad v\big(\varphi(E)\backslash\varphi(S)\big) < e.$$

证明 记 $F = \mathbb{R}^m \backslash \Omega$. 变元 t 的连续函数 $\rho(t, F)$ 在紧致集 E 的某点 t 达到最小值

$$\zeta = \inf_{t \in E} \rho(t, F).$$

因为 F 是闭集, $\tau \notin F$, 所以

$$\zeta = \rho(\tau, F) > 0.$$

我们记 $\eta = \dfrac{1}{3}\zeta$, 根据引理11.1, 对于紧致集 $K = E_\eta \subset \Omega$, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leqslant \lambda|s - t|, \quad \forall s, t \in K \tag{11.4}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们取 $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{\lambda^m}, \eta^m\}$. 因为 $\mathrm{B\,d}E$ 是零集, 所以存在开正方块 $G_1, \cdots, G_r$, 使得

$$\mathrm{B\,d}E \subset \bigcup_{k=1}^{r} G_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vol}(G_k) < \varepsilon' < \varepsilon.$$

可以认为所有这些 G_k 都与 E 相交. 因为 $\ell(G_k) < \eta$, 所以 $G_k \subset E_\eta = K$. 由(11.4)式可知, 每一 $\varphi(G_k)$ 都包含在一个开正方块 H_k 之中, 这开正方块满足条件

$$\mathrm{Vol}(H_k) \leqslant \lambda^m \mathrm{Vol}(G_k).$$

于是, 开正方块 $H_1, \cdots, H_r$, 满足条件

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vol}(H_k) \leqslant \lambda^m \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vol}(G_k) < \lambda^m \varepsilon' < \varepsilon.$$

任取一个闭方块 $Q \supset E$. 作 Q 的分割 P, 使得各 $G_k(k=1,\cdots,r)$ 的边界在 Q 中的部分都被 P 的分界所覆盖, 设 Q 被分成了闭子方块 $\{Q_j\}$. 我们记

$$S = S_\varepsilon = \bigcup_{Q_j \subset \mathrm{int}\, E} Q_j.$$

显然 S 是简单图形, 并且

$$E \backslash S \subset \bigcup_{Q_j \cup \mathrm{B\,d} E \neq \phi} Q_j \subset \bigcup_{k=1}^{r} \bar{G}_k,$$

$$\varphi(E) \backslash \varphi(S) \subset \varphi(E \backslash S) \subset \varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{r} \bar{G}_k\Big) \subset \bigcup_{k=1}^{r} \bar{H}_k.$$

因而有

$$v(E \backslash S) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vol}(\bar{G}_k) < \varepsilon,$$

$$v\big(\varphi(E) \backslash \varphi(S)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Vol}(\bar{H}_k) < \varepsilon.$$

注 引理 11.4 的证明比较琐碎, 主要是一系列体积的分割, 但结论本身还是很直观的, 就是"的证明比较琐碎, 主要是一系列体积的分割, 但结论本身还是很直观的, 就是"**体积下和**"逼近思想. 这里已经有了 Riemann 和的简单函数逼近思想了, 这在下面引理和的简单函数逼近思想了, 这在下面引理 11.5 中体现得比较明显. 引理 11.5 说明, 要证明重积分的变量代换公式, 只需要考虑积分区域最简单的情形。

引理 11.5

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集, 而

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, 满足这样的条件:

1. $\det \mathrm{D}\varphi(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathrm{int}\, E,$
2. *φ 在 $\mathrm{int}\, E$ 内是单一的.*

如果函数 f 在集合 $\varphi(E)$ 上是连续的, 并且对任意闭方块 $\Pi \subset \mathrm{int}\, E$ 都有

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Pi} f\big(\varphi(t)\big) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

那么就有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E} f\big(\varphi(t)\big) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明 根据引理 11.4, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在简单图形 $S_\varepsilon \subset \mathrm{int}\, E$, 使得

$$v(E \backslash S_\varepsilon) < \varepsilon, \quad v\big(\varphi(E) \backslash \varphi(S)\big) < \varepsilon.$$

对于简单图形 S_ε, 应该有

$$\int_{\varphi(S_\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{S_\varepsilon} f\big(\varphi(t)\big) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{11.5}$$

而我们又有

$$\left| \int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\varphi(S_\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\varphi(E) \backslash \varphi(S_\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant B v\big(\varphi(E) \backslash \varphi(S)\big) < B\varepsilon,$$

其中, $B=\sup\limits_{x\in\varphi(E)}|f(x)|$. 同理, 得到不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{S_\varepsilon} f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t-\int_{S_\varepsilon} f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right|\\=&\left|\int_{E\setminus S_\varepsilon} f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C\,v(E\setminus S_\varepsilon)<C\varepsilon.\end{aligned}$$

其中, $C=\sup\limits_{t\in E}|f(\varphi(t))\det \mathrm{D}\varphi(t)|$. 在(11.5)式中让 $\varepsilon\to 0$ 取极限, 就得到

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

简单变化情形

做完上述“Riemann 和”的铺垫工作后, 下面才进入核心想法: “**采用把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合采用把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合**”, 然后再化为**累次积分**. 为此, 先定义简单变换概念。

设 $\varphi^h(t^1,\cdots,t^m)$ 是一个连续可微函数, 我们把如下形状的变换叫做**简单变换**:

$$\begin{cases}x^i=t^i\ (i\neq h),\\ x^h=\varphi^h(t^1,\cdots,t^m).\end{cases}$$

换句话说, 简单变换是这样一种连续可微映射

$$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

它 (至多) 只改变 $t=(t^1,\cdots,t^m)\in\Omega$ 的一个坐标.

我们先对简单变换情形证明重积分的变元替换公式.

引理 11.6

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $E\subset\Omega$ 是一个闭若当可测集, 而

$$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

是一个**简单变换**, 满足这样的条件:

1. $\det \mathrm{D}\varphi(t)\neq 0$, $\forall t\in \operatorname{int}E$,
2. φ 在 $\operatorname{int}E$ 内是单一的.

如果函数 f 在集合 $\varphi(E)$ 上是连续的, 那么

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明 必要时给变量重新编号, 可设简单变换 $x=\varphi(t)$ 具有这样的形式

$$\begin{cases}x^i=t^i\ (i=1,\cdots,m-1)\\ x^m=\psi(t^1,\cdots,t^m).\end{cases}$$

根据引理 11.5, 只须对任意闭方块 $\Pi\subset\operatorname{int}E$ 证明公式

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\Pi f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

不妨设在 Π 上有

$$\det \mathrm{D}\varphi(t)=\frac{\partial\psi}{\partial t^m}(t)>0$$

(另一种情形可类似地讨论). 把 Π 写成:

$$\Pi=\Pi'\times\Pi''\subset\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R},$$

这里

$$\Pi' = [\alpha^1, \beta^1] \times \cdots \times [\alpha^{m-1}, \beta^{m-1}],$$
$$\Pi'' = [\alpha, \beta].$$

我们有

$$\varphi(\Pi) = \left\{ (x', x^m) \middle| \begin{array}{c} x' \in \Pi' \\ \psi(x', \alpha) \leqslant x^m \leqslant \psi(x', \beta) \end{array} \right\},$$

因而

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Pi'} \mathrm{d}x' \int_{\psi(x',\alpha)}^{\psi(x',\beta)} f(x', x^m)\,\mathrm{d}x^m \\
&= \int_{\Pi'} \mathrm{d}x' \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x', \psi(x', t^m)\right) \frac{\partial \psi(x', t^m)}{\partial t^m}\,\mathrm{d}t^m \\
&= \int_{\Pi'} \mathrm{d}t' \int_{\alpha}^{\beta} f\left(t', \psi(t', t^m)\right) \frac{\partial \psi(t', t^m)}{\partial t^m}\,\mathrm{d}t^m \\
&= \int_{\Pi} f\left(\varphi(t)\right) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

于是我们对简单变换证明了重积分变量代换公式成立.

一般情形

对于一般的连续可微变换, 我们把它分解成一些列简单变换的复合. 需要注意的是, 这种分解通常只在局部情形成立，整体分解一般不存在. 这里采用的思想就是“**把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合**”.

引理 11.7

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, $\tau \in \Omega$. 如果 $\det \mathrm{D}\varphi(\tau) \neq 0$, 那么存在 $\delta > 0$, 使得重积分的变元替换公式对于包含在 $U_\rho(\tau, \delta)$ 之中的任何闭若当可测集成立. 这就是说, 对任何闭若当可测集 $E \subset U_\rho(\tau, \delta)$ 和任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 f 都有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f\left(\varphi(t)\right) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明 因为

$$\det \mathrm{D}\varphi(\tau) = \frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)}{\partial(t^1, \cdots, t^m)}(\tau) \neq 0,$$

所以这行列式的前 $m-1$ 行至少含有一个不等于 0 的 $m-1$ 阶子式. 我们可以给变元 $t^1, \cdots, t^m$ 重新编号, 使得 $\det \mathrm{D}\varphi(\tau)$ 的 $m-1$ 阶主子式

$$\frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^{m-1})}{\partial(t^1, \cdots, t^{m-1})}(\tau) \neq 0,$$

仿此, 用归纳法就能证明: 适当地给变元 $t^1, \cdots, t^m$ 编号, 可以使得 $\det \mathrm{D}\varphi(\tau)$ 的各阶顺序主子式都不等于 0. 在下面的讨论中, 假定变元 $t^1, \cdots, t^m$ 已经按照这样的要求排列妥当.

我们定义 m 个变换

$$\theta_k : \begin{cases} x^i = \varphi^i(t^1, \cdots, t^m), & i \leqslant k, \\ x^j = t^j, & j > k, \end{cases} \qquad k = 1, \cdots, m.$$

容易看出: $\det \mathrm{D}\theta_k(\tau)$ 与 $\det \mathrm{D}\varphi(\tau)$ 的第 k 个顺序主子式相等, 因而

$$\det \mathrm{D}\theta_k(\tau) \neq 0, \quad k = 1, \cdots, m.$$

我们可以取 $\delta > 0$ 充分小, 使得这 m 个变换 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ 在开集 $U_\rho(\tau, \delta)$ 之上都是微分同胚 (这里用到了逆映射定理). 再令

$$\psi_1 = \theta_1,$$
$$\psi_k = \theta_k \circ \theta_{k-1}^{-1}, \quad k = 2, \cdots, m.$$

又容易看出: $\psi_1 = \theta_1$ 是定义于 $U_\rho(\tau, \delta)$ 之上的简单变换, $\psi_k = \theta_k \circ \theta_{k-1}^{-1}$ 是定义于 $\theta_{k-1}(U_\rho(\tau, \delta))$ 之上的简单变换, 并且在 $U_\rho(\tau, \delta)$ 之上有

$$\varphi = \psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \cdots \circ \psi_1,$$

请参看图 11.1. 我们已将 ψ 局部地分解为简单变换的复合. 在此基础上, 逐次运用引理 11.6 就能得到所要证明的

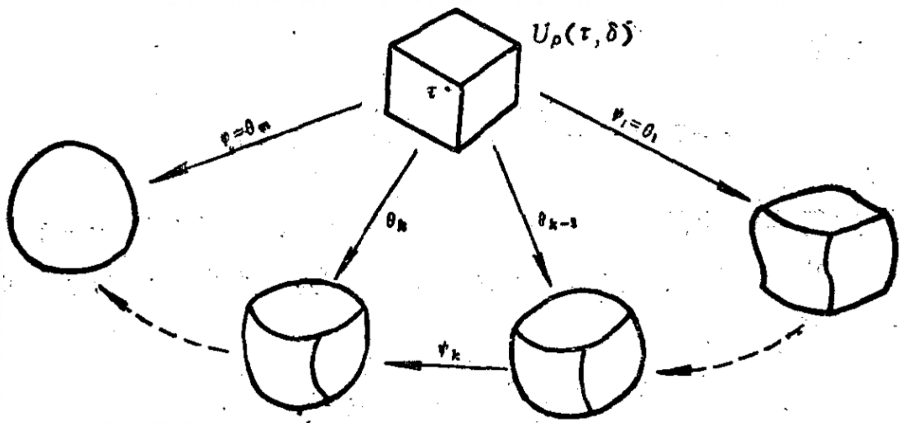


图 11.1: 简单变换分解 $\varphi = \psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \cdots \circ \psi_1$

结果:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \cdots \circ \psi_1(E)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \cdots \circ \psi_1(E)} f\left(\psi(u)\right) |\det \mathrm{D}\psi(u)|\,\mathrm{d}u \\
&= \int_E f\left(\varphi(t)\right) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

这样我们就证明了引理 11.7.

我们最后来完成重积分变元替换定理的证明.

定理 11.9 (重积分的变量代换)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集. 如果

1. $\det \mathrm{D}\varphi(t) \neq 0, \ \forall t \in \operatorname{int} E$,
2. φ *在* $\operatorname{int} E$ *中是单一的.*

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集, 并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f\left(\varphi(t)\right) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明 根据引理 11.5, 只须对任意的闭方块 $\Pi \subset \operatorname{int} E$ 证明以下的变元替换公式

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Pi f\left(\varphi(t)\right) |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

为此目的, 我们来考察

$$\Delta(\Pi)=\left|\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\Pi} f(\varphi(t))|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

对于任意一个 $\tau \in E$, 存在一个相应的 $\delta=\delta(\tau)>0$, 使得 $U_rho(\tau,\delta)$ 满足引理 11.7 的要求. 开集族

$$\left\{U_\rho\left(\tau,\frac{\delta(\tau)}{2}\right)\middle|\tau\in E\right)\right\}$$

覆盖了有界闭集 E. 于是存在这开集族中的有限个开集

$$U_\rho\left(\tau_1,\frac{\delta_1}{2}\right),\cdots,U_\rho\left(\tau_q,\frac{\delta_q}{2}\right)$$

$(\delta_1=\delta(\tau_1),\cdots,\delta(\tau_q))$, 使得

$$E\subset\bigcup_{h=1}^{q}U_\rho\left(\tau_h,\frac{\delta_q}{2}\right).$$

我们记

$$\eta=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\cdots,\frac{\delta_q}{2}\right\}.$$

设闭方块 $\Pi\subset\operatorname{int}E$. 我们可以把 Π 分割成两两无公共内点的闭子方块 $\Pi_1,\cdots,\Pi_r$, 使得各闭子方块的棱长都小于 η;

$$\ell(\Pi_k)<\eta,\quad k=1,\cdots,r.$$

每一个 $\Pi_k(k=1,\cdots,r)$ 必定与某个 $U_\rho\left(\tau_h,\frac{\delta_h}{2}\right)$ 相交. 因为 $\ell(\Pi_k)<\eta\leqslant\frac{\delta_h}{2}$, 所以 Π_k 完全包含在 $U_\rho(\tau_h,\delta_h)$ 之中. 于是我们得到

$$\Delta(\Pi_k)=0,\quad k=1,\cdots,r.$$

闭方块 Π 是两两无公共内点的闭子方块 $\Pi_1,\cdots,\Pi_r$ 的并集. 根据 $\Delta(\Pi)$ 的定义并利用积分的可加性, 容易证明

$$0\leqslant\Delta(\Pi)\leqslant\Delta(\Pi_1)+\cdots+\Delta(\Pi_r).$$

由此得出结论 $\Delta(\Pi)=0$. 我们最后完成了定理的证明.

11.4 重积分的应用

11.4.1 曲面的面积

定理 11.10 (空间曲面的面积)

空间曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的面积公式:

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例题 11.51 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2\leqslant x$ 内那一部分的面积.

解 所求面积的曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy}: $x^2+y^2\leqslant x$, 所以

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

例题 11.52 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b\leqslant a)$ 内那部分的面积

解

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

z 在 xOy 平面的投影区域 $D_{xy}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$

$$\begin{aligned}
S &= 2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}S = 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{\text{对称性}} 8a\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 8a\int_0^a \left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 8a^2\arcsin\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

定理 11.11 (空间曲面为隐式方程时的面积)

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z},\quad (x,y)\in D_{x,y}$$

光滑曲面的面积:

$$S=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

定理 11.12 (参数曲面的面积)

设曲面 Σ 是光滑曲面, 其参数方程是

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

D 是 u,v 平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数, 则它的面积为

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$\begin{aligned}
E &= x_u^2+y_u^2+z_u^2 \\
F &= x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v \\
G &= x_v^2+y_v^2+z_v^2
\end{aligned}$$

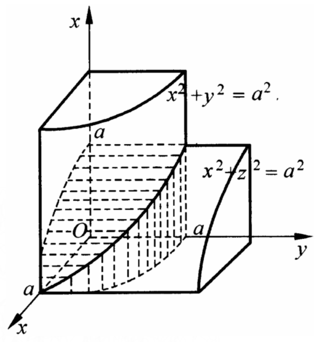
它称为曲面的 Gauss 系数.

11.4.2 求体积

例题 11.53 计算由两个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 所围成的空间立体的体积 V

解 由对称性得到

$$
\begin{aligned}
V &= 8 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 8\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3
\end{aligned}
$$



11.4.3 质心

定理 11.13 (质心)

对于平面薄片, 面密度 $\rho(x,y)$ 连续, D 是薄片所占的平面区域, 则计算重心 $\overline{x},\overline{y}$ 的公式为

$$
\overline{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}, \quad \overline{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}
$$

注 特殊地：当 $\rho(x,y)$ 为常数时, 设重心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$, 则

$$
\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma = \overline{x}\iint_D \mathrm{d}\sigma, \quad \iint_D y\,\mathrm{d}\sigma = \overline{y}\iint_D \mathrm{d}\sigma.
$$

例题 11.54 计算 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2 \leqslant x+y+1$

解 区域 D

$$
D = \left\{\{x,y\}\middle|\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \tfrac{3}{2}\right\}
$$

形心坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 利用形心公式

$$
\begin{aligned}
\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma &= \overline{x}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi \\
\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma &= \overline{y}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

因此

$$
\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi
$$

例题 11.55 (数 I, 2019) 设 Ω 是锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

解 *(by 向禹)* 设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 面对称的, 由对称性可知 $\bar{x}=0$. 对固定的 z, 记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\}$, 利用切片法可得

$$
\iiint_\Omega \mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3},
$$

$$
\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},
$$

$$
\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$\xlongequal{y-z=u} \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+u^2 \leqslant (1-z)^2} (u+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$
$$= \pi \int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}$$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y} = \bar{z} = \dfrac{\pi/12}{\pi/3} = \dfrac{1}{4}$, 形心坐标为 $\left(0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

例题 11.56 (谢惠民[36], P307) 求立体 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1, x, y, z \geqslant 0$ 的质心的 x 的坐标.

解 令 $\begin{cases} x = ar\cos^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, \\ y = br\sin^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, \\ z = cr\sin^{2n}\psi \end{cases}$ 则

$$|J| = 4n^2abcr^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\sin^{2n-1}\psi\cos^{4n-1}\psi.$$

于是

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \mathrm{d}V &= 4n^2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\sin^{2n-1}\psi\cos^{4n-1}\psi\,\mathrm{d}r \\
&= 4n^2abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,n)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(2n,n) \\
&= \frac{1}{3}n^2abc\cdot\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)}\cdot\frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\Gamma(3n)} = \frac{1}{3}n^2abc\frac{\Gamma^3(n)}{\Gamma(3n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V &= 4n^2a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^3\sin^{2n-1}\varphi\cos^{4n-1}\varphi\sin^{2n-1}\psi\cos^{6n-1}\psi\,\mathrm{d}r \\
&= n^2a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\varphi\cos^{4n-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\psi\cos^{6n-1}\psi\,\mathrm{d}\psi \\
&= n^2a^2bc\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,2n)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(3n,n) \\
&= \frac{1}{4}n^2a^2bc\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)}\cdot\frac{\Gamma(3n)\Gamma(n)}{\Gamma(4n)} = \frac{1}{4}n^2a^2bc\frac{\Gamma^2(n)\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(3n)\Gamma(4n)}
\end{aligned}$$

故质心的 x 坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mathrm{d}V} = \frac{3a\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{4\Gamma(n)\Gamma(4n)}$$

定理 11.14 (不均匀平面图形的质心) 设质量均匀的曲边梯形 $aBCb$ 是由 $y = f(x), x = a, x = b$ 所围成, 设其密度为 $\rho(x)$, 则质心坐标 (x_0, y_0) 是

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}$$

证明 $\forall x \in [a,b]$, 面积微元

$$\mathrm{d}A(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$$

于是, 有质量微元

$$\mathrm{d}M(x) = \rho(x)\,\mathrm{d}A(x) = \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

这样, $\mathrm{d}M(x)$ 对 x 轴和 y 轴的静力矩 M_x, M_y 分别为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M_x(x) &= \frac{1}{2}f(x)\,\mathrm{d}M(x) = \frac{1}{2}\rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}M_y(x) &= x\,\mathrm{d}M(x) = x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因而, 质心坐标 (x_0, y_0) 是

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}$$

例题 11.57 曲线 $y = x^2$, x 轴与 $x = 1$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周产生的旋转体的形心 x 坐标等于 ______

解 由形心公式,

$$\bar{x} = \frac{\pi\int_0^1 x\cdot(x^2)^2\,\mathrm{d}x}{\pi\int_0^1 (x^2)^2\,\mathrm{d}x} = \frac{5}{6}$$

11.5 含参变量的积分

11.5.1 含参变量的积分的一致收敛

定义 11.1 (无穷积分的一致收敛)

如果 $\forall\,\varepsilon > 0$, 总 $\exists A_0 = A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in I$ 无关!) $> a$, 当 $A > A_0$ 时, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

则称含参变量的无穷积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

♣

定义 11.2 (瑕积分的一致收敛)

设 a 为瑕点, $\forall y \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in I$ 无关!) > 0, 当 $\delta \in (0, \delta_0)$, 有

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{a+\delta}^b f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [\alpha,\beta]$$

瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

♣

定理 11.15 (参变量无穷积分的 Cauchy 收敛准则)

无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in [\alpha,\beta]$ 无关!) $> a$, 当 $A', A'' > A_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

♡

定理 11.16 (参变量无穷积分的 Weierstrass 判别法)

设 $f(x,y)$ 对 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 F, 使得 $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 y, 都有

$$|f(x,y)| \leqslant F(x), \quad (x,y) \in [a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$$

则无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

♡

例题 11.58 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

解[13] 注意到 $x=0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x=0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分. 我们有

$$\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant e^{-x},\quad \forall (x,\alpha)\in(0,+\infty)\times[1,+\infty).$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 因此由 *Weierstrass* 定理,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

定理 11.17 (参变量无穷积分的 Abel 判别法)

如果函数 $f(x,y),g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 对 x 单调, 且关于 $y\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\forall M>0$(常数), 使得
$$|g(x,y)|\leqslant M\ ,\quad (x,y)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta];$$
2. 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 11.59 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

解[13] 注意到 $x=0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x=0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分.

由于积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 该积分不含参数 α, 自然关于 α 是一致收敛的. 另外对于固定的 $\alpha\in[0,+\infty)$, $e^{-\alpha x}$ 关于 x 都是单调有界的. 因此由 *Abel* 判别法,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

定理 11.18 (参变量无穷积分的 Dirichlet 判别法)

如果函数 $f(x,y),g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 为 x 的单调函数, 且当 $x\to+\infty$ 时关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致趋于 0, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists A_0=A_0(\varepsilon)>a$, 当 $x>A_0$ 时, $|g(x,y)|<\varepsilon$;
2. $\forall A\geqslant a$, $\displaystyle\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\exists M>0$(M 为常数), 使得
$$\left|\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\ ,\quad \forall y\in[\alpha,\beta],$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 11.60 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

解[13] 注意到 $x=0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x=0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分.

注意 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 在整个 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上是有界的, 因此, 我们只需考虑 $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

注意到 $\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x$ 关于 $A \geqslant 1$ 一致有界, 而函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调, 且当 $x \to +\infty$ 时, 它关于 $\alpha \in [0, +\infty)$ 一致收敛到 0, 所以由 *Dirichelt* 判别法,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha \in [1, +\infty)$ 一致收敛.

定理 11.19 (Dini)

设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续、非负. 若

$$\varphi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

在 $y \in [\alpha, \beta]$ 上连续, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

11.5.2 含参变量积分的性质

推论 11.2

若 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 此处 $(x, y) \in \mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$, 则

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

证明 根据傅比尼 (Fubini) 定理, 有

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}A &= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \left[h(y)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \quad (\text{把}h(y)\text{当作常数}) \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \quad \left(\text{把}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\text{当作常数}\right)
\end{aligned}$$

定理 11.20 (连续性定理, 极限与积分号可交换)

设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则函数 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$ 上连续, 即

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad y_0 \in [c, d].$$

也就是说, 极限运算与积分运算可以交换.

定理 11.21 (积分次序可交换)

设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

即积分次序可交换

推论 11.3

设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty]$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,C]$ 上一致收敛 $(c<C<+\infty)$, $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[a,A]$ 上一致收敛 $(a<A<+\infty)$. 进一步假设 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ 和 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x$ 中有一个存在, 那么

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

定理 11.22 (积分号下可求导)

设 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 都在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对于每个 $y\in[c,d]$ 收敛. 进一步假设 $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可导, 并且在 $[c,d]$ 上成立

$$I'(y)=\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

也就是说, 求导运算与积分运算可交换.

定理 11.23 (莱布尼茨公式)

如果函数 $f(x,y)$ 及偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $\mathbb{R}=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上可微, 且

$$c\leqslant\alpha(x)\leqslant d,\ c\leqslant\beta(x)\leqslant d\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

那么, $\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+f\big[x,\beta(x)\big]\beta'(x)-f\big[x,\alpha(x)\big]\alpha'(x)\end{aligned}$$

例题 11.61 设 $\Phi(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin(xy)}{y}\,\mathrm{d}y$, 求 $\Phi'(x)$

解 应用莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\int_x^{x^2}\cos(xy)\,\mathrm{d}y+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}\cdot 1\\&=\left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_x^{x^2}+\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}.\end{aligned}$$

例题 11.62 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\mathrm{d}t\int_t^{\frac{x}{2}}e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{4}{x^2}\left[\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{x}{2}}e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u-\int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{d}t\int_{\frac{x}{2}}^{t}e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{\text{换序}} \lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\left[\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}u\int_0^u e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{x}{2}}^x\mathrm{d}u\int_u^x e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t\right]\\
&\xlongequal{\text{洛必达}} 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x}{2}}e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t\right]\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t-\frac{x}{2}=v} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\\
&\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\right)=1
\end{aligned}
$$

11.5.3 含参变量积分的计算

我会去验证这些合法性吗?

例题 11.63 求定积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 令 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 则 $F(0)=0$

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha)&=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+\alpha^2x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x=\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha^2\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\alpha^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\alpha^2)\tan^2\theta+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

于是

$$
F(1)=F(1)-F(0)=\int_0^1F'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\,\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})
$$

因此

$$
\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=F(1)=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})
$$

例题 11.64 求定积分

$$
\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta
$$

解 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$
\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right)
$$

令 $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$, 则

$$
\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{1}{i\lambda}\int_0^{2\pi}i\lambda e^{i\theta}e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{i\lambda}\left[e^{\lambda e^{i\theta}}\right]_0^{2\pi}=0
$$

故

$$
F(\lambda)-F(0)=\int_0^\lambda\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=F(1)=2\pi
$$

练习 11.10 计算积分

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
$$

解 (西西) 注意到

$$
\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}(1-a,a)=\pi\csc(a\pi)
$$

上式两边对 a 求导得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\pi^2\csc(a\pi)\cot(a\pi)$$

令 $a=\dfrac{1}{4}$. 再换 $x\to x^2$ 即有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}$$

例题 11.65 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x&=\frac{\partial}{\partial T}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^T\,\mathrm{d}x\Big|_{T=0}\\
&=\frac{\partial}{\partial T}B\left(\frac{T+1}{2},\frac{1}{2}\right)\Big|_{T=0}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\Big|_{T=0}\\
&=\lim_{T\to0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{T+1}{2}\right)-\psi_0\left(\frac{T}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\Big|_{T=0}\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)-\psi_0(1)}{2\Gamma(1)}\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}((-\gamma-2\ln2)-(-\gamma))\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(-2\ln2)=-\frac{\pi}{2}\ln2
\end{aligned}$$

例题 11.66 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

解 记 $I(n)=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

$$I(n)=2\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{-\frac{1}{2}}$$

上式两边对 n 求导得:

$$I'(n)=\int_0^1\frac{x^n\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\sim-\frac{\sqrt{\pi}}{4}n^{-\frac{3}{2}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

例题 11.67 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\gamma\pi}{2}$.

解 令 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{-\alpha}\sin x\,\mathrm{d}x,\alpha\in(0,2)$, 且注意到

$$\frac{1}{x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}\mathrm{d}t,\quad x>0$$

则

$$\begin{aligned}
F(\alpha)&=\int_0^{+\infty}x^{-\alpha}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)} \csc\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \alpha \in (0,2)
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha) &= -\int_0^{\infty} x^{-a} \sin x \ln x \mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} \frac{\sin x \ln x}{x^a} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)} \csc\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left[\psi(\alpha) + \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x} \mathrm{d}x = -\frac{\gamma\pi}{2}
$$

例题 11.68 求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} \mathrm{d}x$

解 *(by 冬眠的小老鼠)*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+x^2) \,\mathrm{d}\ln(1+x) \\
&= \ln^2 2 - 2\int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \ln^2 2 - 2J
\end{aligned}
$$

令 $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{x\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$, 则

$$
J'(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+\alpha x)(1+x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\alpha\ln 4 - \pi}{4(1+\alpha^2)} + \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}
$$

又 $J(0) = 0$, 于是

$$
\begin{aligned}
J &= J(1) - J(0) = \int_0^1 J'(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\alpha\ln 4 - \pi}{4(1+\alpha^2)} + \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\right) \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\alpha\ln 4 - \pi}{4(1+\alpha^2)} + \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right) \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{96}(\pi^2 + 12\ln^2 2)
\end{aligned}
$$

因此

$$
I = \ln^2 2 - \frac{1}{48}(\pi^2 + 12\ln^2 2) = \frac{3}{4}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{48}
$$

例题 11.69 计算积分: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} \mathrm{d}x$

解 令

$$
f(t) = \int_0^1 \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x} \mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)(1+tx^2)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{t+1}\int_0^1 \frac{x-1}{1+tx^2} \mathrm{d}x + \frac{1}{t+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
&= \frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+tx^2) - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan(\sqrt{t}x) + \ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\sqrt{t} + \ln 2\right] \\
\Longrightarrow f(t) &= \frac{1}{2}\left[-\mathrm{Li}_2(-t) - \frac{1}{2}\ln^2(t+1)\right] - \arctan^2\sqrt{t} + \ln 2\ln(t+1)
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= f(1)\\ &= \frac{1}{2}\left[-\mathrm{Li}_2(-1)-\frac{1}{2}\ln^2 2\right]-\frac{\pi^2}{16}+\ln^2 2\\ &= \frac{3}{4}\ln^2 2-\frac{\pi^2}{48}\end{aligned}$$

练习 11.11 计算积分

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

解 令 $I(\alpha)=\int_0^\pi \ln(\alpha+\cos x)\mathrm{d}x, \alpha>1$, 易知 $I(\alpha,x)$ 可导

$$\begin{aligned}I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\sin x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha d(\cot x)}{(\alpha\cot x)^2+\alpha^2-1}\\ &= -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arctan\frac{\alpha\cot x}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\end{aligned}$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C \Rightarrow I(1)=\pi\ln(1+0)+C=C$$

因为

$$I(1)=\int_0^\pi \ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=-\pi\ln 2$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$$

令 $\alpha=2$, 可得

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

练习 11.12 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\left(x+x^2+x^{2^2}+x^{2^3}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

解 考虑含参变量 a 的积分所确定的函数

$$I(a)=\int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

易得 $I(0)=0$ 以及

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a}=\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1} \tag{11.6}$$

式 (11.6) 在 $[0,1]$ 对 a 积分得

$$I(a)-I(0)=\int_0^1 \frac{1}{a+1}\mathrm{d}x \Longrightarrow I(a)=\ln(a+1)$$

因此有

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}x^k\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{(x^k-1)-(x^{k+1}-1)}{\ln x}\mathrm{d}x=\ln\frac{k+1}{k+2}$$

故

$$I=\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}x^{2^k}\,\mathrm{d}x=\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^k+2}=\ln\left(\frac{1}{2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^{k-1}+1}\right)=-\ln 3$$

练习 11.13 求定积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

解 *(by ytdwdw)*[2] 设 $\alpha\geqslant 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
F(\alpha)&\equiv\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{(1+t^2x^4)(x^2+1)}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\alpha}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\left(\frac{1+t^2x^2}{(1+t^2x^4)(t^2+1)}-\frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{tx=\sqrt{t}u}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{1+tx^2}{(1+x^4)(t^2+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^{\alpha}\frac{1+t}{(t^2+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{2}(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1)+\arctan(\sqrt{2\alpha}-1)-\arctan\alpha)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{3}-1)\arctan x^2}{2\left(x^2+2-\sqrt{3}\right)}\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{3}+1)\arctan x^2}{2\left(x^2+2+\sqrt{3}\right)}\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{\sqrt{2}}{2}(F(2-\sqrt{3})-F(2+\sqrt{3}))\\
=&-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1)+\arctan(\sqrt{2\alpha}-1)-\arctan\alpha\right)\Big|_{\alpha=2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\\
=&-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(-\arctan(\sqrt{3}-2)+\arctan(2-\sqrt{3}))=-\frac{\sqrt{2}\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

练习 11.14 计算

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y\sin(x+y)}{xy(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 考虑参数积分

$$I(t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y\sin t(x+y)}{xy(x+y)}dxdy,\quad 0<t<1$$

则

$$\begin{aligned}
I'(t)&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y\cos t(x+y)}{xy}dxdy\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y[\cos(tx)\cos(ty)-\sin(tx)\sin(ty)]}{xy}dxdy
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y\cos(tx)\cos(ty)}{xy}dxdy&=\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cos(tx)}{x}dx\int_0^{\infty}\frac{\sin y\cos(ty)}{y}dx\\
&=\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cos(tx)}{x}dx\right)^2\\
&=\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(1+t)x+\sin(1-t)x}{x}dx\right)^2\\
&=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi^2}{4}\quad(\text{Dirichlet } \textit{Integral})
\end{aligned}$$

[2]《数学分析高等数学例题选解 V6》

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin x \sin y \sin(tx)\sin(ty)}{xy}dxdy = \int_0^\infty \frac{\sin x \sin(tx)}{x}dx \int_0^\infty \frac{\sin y \sin(ty)}{y}dy$$
$$= \left(\int_0^\infty \frac{\sin x \sin(tx)}{x}dx\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-t)x - \cos(1+t)x}{x}dx\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \quad (\text{Frullani } \mathit{Integral})$$

于是

$$\begin{aligned} I &= I(0) + \int_0^1 I'(t)\,dt = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \left[\ln^2(1-t) + \ln^2(1+t) - 2\ln(1-t)\ln(1+t)\right]dt\right), \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1 \ln^2(1-t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\,dt = t\ln^2 t\,|_0^1 - \int_0^1 2\ln t\,dt = 2.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt &= t\ln^2(1+t)\,|_0^1 - \int_0^1 \frac{2t\ln(1+t)}{1+t}dt \\ &= \ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1+t)dt + 2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}dt \\ &= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \ln(1-t)\ln(1+t)\,dt = \int_0^1 \ln(1+t)\,d\left[(t-1)\ln(1-t) - t\right]$$
$$= \left[(t-1)\ln(1-t) - t\right]\ln(1+t)\,|_0^1 - \int_0^1 \frac{(t-1)\ln(1-t) - t}{1+t}dt$$
$$= -\ln 2 + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}dt - \int_0^1 \ln(1-t)\,dt$$
$$= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}dt = 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{\ln t}{2-t}dt$$
$$= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2u)}{1-u}du = 2 - 2\ln 2 + 2\ln^2 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u}du$$
$$= 2 - 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-u)}{u}du = 2 - 2\ln 2 + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{1-u}du$$
$$= 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}\left(2\ln^2 2 + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{1-u}du + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u}du\right)$$
$$= 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}du = 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u^n \ln u\,du$$
$$= 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - 2\ln 2 + \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

将以上各式代入原积分可得

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin x \sin y \sin(x+y)}{xy(x+y)}dxdy = \frac{\pi^2}{6}.$$

例题 11.70 (Dirichlet 积分) 计算: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解 法 *I.* 注意到

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t \quad (x > 0)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sin x\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty}\left[-\frac{y\sin x+\cos x}{e^{xy}(y^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

法 *II*. 可以证明

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

令

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

又令

$$D_n = \frac{\pi}{2} - I_n = \int_0^{\pi/2} f(x)\sin(2n+1)x\ \mathrm{d}x$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

我们置 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 有连续的导数.

$$D_n = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} f'(x)\cos(2n+1)x\ \mathrm{d}x = O(1/n).$$

因此 $I_n \to \pi/2$, 从而得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

法 *IV*. 我们知道积分是收敛的, 我们把积分化成级数:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi/2}^{(n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

1. 当 n 为奇数, 即 $n=2k$, 置换元 $x=k\pi+t$:
$$\int_{2k\pi/2}^{(2k+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{k\pi+t}\,\mathrm{d}t$$
2. 当 n 为奇数, 即 $n=2k-1$, 置换元 $x=k\pi-t$:
$$\int_{(2k-1)\pi/2}^{2k\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^{k-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{k\pi-t}\,\mathrm{d}t$$

因此, 我们得到

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{t+k\pi}+\frac{1}{t-k\pi}\right)\right]\mathrm{d}t$$

再由 $\dfrac{1}{\sin x}$ 的部分分式的展开式, 因此:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

✍ **练习 11.15** 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x.$

解 利用分布积分, 我们有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\sin^n x\,d\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\sin^n x}{(n-1)x^{n-1}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}d(\sin^n x)\\
&= -\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)'}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}(\sin^n x)'\,\mathrm{d}(\frac{1}{x^{n-2}})\\
&= -\frac{(\sin^n x)'}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-2}}\,\mathrm{d}(\sin^n x)'\\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)''}{x^{n-2}}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}(\sin^n x)''\,\mathrm{d}(\frac{1}{x^{n-3}})\\
&= -\frac{(\sin^n x)''}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-3}}\,\mathrm{d}(\sin^n x)''\\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)'''}{x^{n-3}}\,\mathrm{d}x\\
&= \qquad\qquad \vdots\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为

$$
(\sin^n x)^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^m \sin(2k-n)x & m+n\text{为奇数} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^m \cos(2k-n)x & m+n\text{为偶数} \end{cases}
$$

当 $m = n-1$ 时,$m+n = (n-1)+n = 2n-1$ 为奇数, 有

$$
(\sin^n x)^{(n-1)} = \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1}\sin(2k-n)x
$$

又因为有

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{(2k-n)x}d[(2k-n)x] = sgn(2k-n)\frac{\pi}{2}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1} sgn(2k-n)\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{\pi}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}
\end{aligned}
$$

练习 11.16 [3] 设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$， 并且 $\alpha > \sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, 则

$$
\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\alpha_1 x}{x}\cdot\frac{\sin\alpha_2 x}{x}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin\alpha_n x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,
$$

[3] https://www.zhihu.com/question/433697923/answer/1615484092

亦即当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$ 并且 $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k < 1$ 时，有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{\alpha_1 x} \cdot \frac{\sin \alpha_2 x}{\alpha_2 x} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

注 (波尔文积分) 常见的例子为:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

这种规律一直到 13 都是成立的。

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \cdots \frac{\sin\left(\frac{x}{13}\right)}{\frac{x}{13}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

但是到了下一个数, 这个规律就突然失效了:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \cdots \frac{\sin\left(\frac{x}{15}\right)}{\frac{x}{15}}\,\mathrm{d}x &= \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{6879714958723010531}{935615849440640907310521750000}\pi \\ &\simeq \frac{\pi}{2} - 2.31 \times 10^{-11}\end{aligned}$$

波尔文积分常用于作为看似存在的数学规律最终失效的例子

例题 11.71 (Fresnel 积分) 求反常积分的值: $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

解 *法 I(by fin3574).*

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x &\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u]{u=x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}(1-\cos u) \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}} - \lim_{u\to0^+} \frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}e^{-uv}\mathrm{d}v\right)(1-\cos u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty} e^{-uv}(1-\cos u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty} e^{-uv}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty} e^{-uv}\cos u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}\left[-\frac{1}{ve^{uv}}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sqrt{v}\left[\frac{\sin u - v\cos u}{e^{uv}(v^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{v\sqrt{v}}{1+v^2}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{v}}{v(v^2+1)}\mathrm{d}v \\
&\xlongequal{t=v^2} \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}$$

$$\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

法 II.

$$\mathcal{I}=\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{I}(\tau)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau x^2}\sin x^2\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^2(\tau)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\tau(x^2+y^2)}\sin x^2\sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\tau(x^2+y^2)}\cdot\frac{-1}{2}\Big[\cos(x^2+y^2)-\cos(x^2-y^2)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\tau r^2}\Big[\cos(r^2)-\cos(r^2\cos 2\theta)\Big]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta[r^2\to r]\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-\tau r}\Big[\cos r-\cos(r\cos 2\theta)\Big]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\tau}{\tau^2+1}-\frac{\tau}{\tau^2+\cos^2 2\theta}\right]\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau}{\tau^2+1}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2\sin^2\theta+(1+\tau^2)\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2\tan^2\theta+(1+\tau^2)}\mathrm{d}\tan\theta\\
&=-\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\cdot\frac{1}{\tau\sqrt{1+\tau^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau^2}}\tan\theta\right)\right]_{0\to\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}\to\pi}\\
&=-\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8\sqrt{1+\tau^2}}\left[\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right]\\
&=-\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\pi}{8\sqrt{1+\tau^2}}
\end{aligned}$$

例题 11.72 (Fresnel 积分) 求反常积分的值: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\quad(x>0)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x&\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u]{u=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}(\sin u)\\
&=\lim_{u\to+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}-\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}e^{-uv}\mathrm{d}v\right)\sin u\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty}e^{-uv}\sin u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{v} \left[-\frac{\cos u + v \sin u}{e^{uv}(v^2+1)} \right]_0^{+\infty} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{v}}{1+v^2} \mathrm{d}v \\
&\xlongequal{t=v^2} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} \\
&\xlongequal{\text{余元公式}} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

例题 11.73 (Laplace 积分) 计算: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2} \mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \cos bx \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2)y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-a^2 y} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \cos bx \, \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 y} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-(yx^2 - ibx)} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 y} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{b^2}{4y}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-a^2 y - \frac{b^2}{4y}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Re} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{a^2} e^{-2\sqrt{a^2 \cdot \frac{b^2}{4}}} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-ab}
\end{aligned}
$$

笔记

$$
\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}
$$

第十二章 曲线积分与曲面积分

12.1 对弧长的曲线积分

定义 12.1 (对弧长的曲线积分)

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数, L 叫做积分弧段, $\mathrm{d}s$ 叫做弧微分.
函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

定理 12.1 (物理背景)

线密度为 $f(x,y)$ (或 $f(x,y,z)$) 的非均匀分布在平面 (或空间) 曲线段 L 上的物体的质量, 特别当 $f(x,y)$(或 $f(x,y,z)$) 时, 第一型曲线积分的数值就是 L 的长度

12.1.1 对弧长的曲线积分的计算法

定理 12.2 (L 为参数方程)

设 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 其中 $\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta)$$

推论 12.1

光滑曲线弧 L 由显函数给出：$L: x=x$, $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

光滑曲线弧 L 由极坐标给出：$L: r=r(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

例题 12.1 计算 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}s$, $\quad L: x^2+y^2=1, x>0, y>0$

解 法 1(参数方程) L 的参数方程：$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[(\cos\theta)']^2+[(\sin\theta)']^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cdot(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

法 2(极坐标) L 的极坐标方程：$L: r=1$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1^2+[(1)']^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}$$

法 3(直角坐标) L 的直角坐标方程：$L: y=\sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\left[\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

法 4(直角坐标) L 的直角坐标方程：$L: x=\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left[\left(1-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{1-y^2}y^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

定理 12.3 (对称性)

奇偶对称性

- 假设 Γ 关于 yOz 面对称, 则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s, & f(x,y,z)=f(-x,y,z)\\ 0, & f(x,y,z)=-f(-x,y,z)\end{cases}$$

  其中 Γ_1 是 Γ 在 yOz 面前面的部分
- 关于其他坐标面对称的情况以及平面的情况都与此类似.

轮换对称性

- 若把 x 与 y 对调, Γ 不变, 则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma f(y,x,z)\,\mathrm{d}s$.

例题 12.2 设曲线 $L:|x|=1,|y|=1$, $f(x)$ 为正值函数, 求 $\oint_L\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s$

解 因为积分区域关于 $y=x$ 对称, 故

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s&\xlongequal{\text{轮换对称性}}\oint_L\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\oint_L(a+b)\mathrm{d}s=4(a+b)\end{aligned}$$

例题 12.3 计算曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{cases}$

解 曲线 Γ 为半径为 R 的圆周, 其方程关于变量 x,y,x 具有轮换对称性

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2\,\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\oint_\Gamma\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R=\frac{2}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

例题 12.4 求两直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体的表面积

解 只需求 $x^2+y^2=R^2$ 在第一卦限的面积, 再乘以 16, 柱面下方曲线

$$L: r=R\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

柱面上方曲线方程 $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}$, 弧微分 $\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta$

$$z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-(R\cos\theta)^2}=R\sin\theta$$

$$A=16\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=16R^2$$

例题 12.5 计算 $I=\oint_L\dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}$, 其中 L 为曲线 $x^2-4xy+5y^2=1$.

解 *(by xwmath)*[1] 由 $L: x^2-4xy+5y^2=1$, 改写方程为 $(x-2y)^2+y^2=1$. 令 $x-2y=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 则 $x=\cos t+2\sin t, y=\sin t$, 弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

被积函数定义在积分曲线上, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}&=\frac{1}{\sqrt{5-x^2-y^2+x^2-4xy+5y^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{6-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}}\end{aligned}$$

将以上计算的结果代入, 可得

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}}\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi\end{aligned}$$

例题 12.6 (单层对数位势) 设 $L:\xi^2+\eta^2=a^2\ (a>0)$, $r=\sqrt{(\xi-r)^2+(\eta-y)^2}$, 计算

$$I=I(x,y)=\int_L\ln\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s.$$

解 *([84],P305)* 作新坐标系 $\xi' O\eta'$, 使得原点仍与坐标系 $\xi O\eta$ 的原点相同, 而点 (x,y) 位于 $O\xi'$ 轴上, 此时我们有 $(r'=\sqrt{(\xi'-\rho)^2+(\eta')^2}, \rho=\sqrt{x^2+y^2})$

$$I(x,y)=\int_{L'}\ln\left(\frac{1}{r'}\right)\mathrm{d}s\quad(L':(\xi')^2+(\eta')^2=a^2).$$

采用圆的参数方程式表示:

$$\xi'=a\cos\varphi,\quad \eta'=a\sin\varphi\,(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);\quad \mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}\varphi.$$

于是

$$\begin{aligned}I(x,y)&=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\ln(a^2-2a\rho\cos\varphi+\rho^2)\,\mathrm{d}\varphi\\&=-2\pi a\ln a-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{2\rho}{a}\cos\varphi+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

令 $\dfrac{\rho}{a}=\alpha$, 以及 $J(\alpha)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-2\alpha\rho\cos\varphi+\alpha^2)\,\mathrm{d}\varphi$, 则 (其中 $z=\alpha e^{i\varphi}$, $\bar z=ae^{-i\varphi}$)

$$J'(\alpha)=2\int_0^{2\pi}\frac{\alpha-\cos\varphi}{1-2\alpha\rho\cos\varphi+\alpha^2}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{2z\bar z-(z+\bar z)}{(1-z)(1+\bar z)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

- 若 $\alpha<1$, 则得

$$\begin{aligned}J'(\alpha)&=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z}{1-z}+\frac{\bar z}{1-\bar z}\right)\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(z+z^2+\cdots+z^n+\cdots+\bar z+\bar z^2+\cdots+\bar z^n+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\alpha\cos\varphi+\alpha^2\cos(2\varphi)+\cdots+\alpha^n\cos(n\varphi)+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi=0\end{aligned}$$

[1]考研竞赛数学：每日一题 218：对弧长的曲线积分换元法及其应用

(积分号下之级数一致收敛, 可作逐项积分). 故 $J(\alpha)=C$, $C=J(0)=0$, 且得

$$I(x,y)=-2\pi a\ln a=2\pi a\ln\left(\frac{1}{a}\right)\quad(\rho<a).$$

- 若 $\rho>\alpha$, 则 $\alpha>1$, 我们有

$$\begin{aligned}J'(\alpha)&=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{1-1/\bar{z}}\right)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots+\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{\bar{z}^2}+\cdots+\frac{1}{\bar{z}^n}+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\cos\varphi}{\alpha}+\frac{\cos(2\varphi)}{\alpha^2}+\cdots+\frac{\cos(n\varphi)}{\alpha^n}+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{\alpha}.\end{aligned}$$

由此知 $J(\alpha)=4\pi\ln\alpha+C$, $C=J(1)=0$, 从而 $J(\alpha)=4\pi\ln\alpha$, 且知

$$I(x,y)=-2\pi a\ln a-2\pi a\ln\frac{\rho}{a}=2\pi a\ln\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

定理 12.4 (对弧长的平面曲线积分换元法)

设平面曲线 L 的方程 $\varphi(x,y)=0$, 变换

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的曲线 L_{uv} 一一映射到 xOy 面上的曲线 L_{xy}, 其中 $\varphi(x,y),x(u,v),y(u,v)$ 在各自分布的曲线上具有一阶连续偏导数且

$$\left(\varphi_x'^2+\varphi_y'^2\right)_L\neq0,\quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_L\neq0$$

$f(x,y)$ 在 L_{xy} 上连续, 则

$$\int_{L_{xy}}f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L_{uv}}f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y'\\-\varphi_x'\end{pmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}$$

其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,

$$\mathrm{d}s_{uv}=\sqrt{(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2},\quad J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

例题 12.7 计算 $I=\oint_L\dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}$, 其中 L 为曲线 $x^2-4xy+5y^2=1$.

解 (by xwmath)[2] 由 $L:x^2-4xy+5y^2=1$, 改写方程为 $(x-2y)^2+y^2=1$. 令

$$u=x-2y,v=y,\text{即}\,x=u+2v,y=x$$

所以 $L_{uv}:u^2+v^2=1$, 被积函数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}=\frac{1}{5-4uv-4v^2}$$

$$L:\varphi(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1=0$$

所以 $\varphi_x'(x,y)=2x-4y,\varphi_y'(x,y)=-4x+10y$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}&=\sqrt{(2x-4y)^2+(-4x+10y)^2}\\&=2\sqrt{5u^2-4uv+v^2}\end{aligned}$$

[2]考研竞赛数学：每日一题 218：对弧长的曲线积分换元法及其应用

并且

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y'\\ -\varphi_x'\end{pmatrix}\right\|&=\left\|\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4x+10y\\ -(2x-4y)\end{pmatrix}\right\|\\ &=\left|(2y,-2x+4y)\right|=\left|(2v,-2u)\right|=2\sqrt{u^2+v^2}=2\end{aligned}$$

将上面计算的结果代入换元法计算公式, 并且积分变量定义在 $L_{uv}:u^2+v^2=1$ 上, 所以

$$5u^2-4uv+v^2=5(u^2+v^2)-4uv-4v^2=5-4uv-4v^2$$

于是换元后的被积表达式为

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}&=\oint_{L_{uv}}f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y'\\ -\varphi_x'\end{pmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}\\ &=\oint_{L_{uv}}\frac{1}{5-4uv-4v^2}\frac{2\sqrt{5u^2-4uv+v^2}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}s_{uv}\\ &=\oint_{L_{uv}}\mathrm{d}s_{uv}\xlongequal{\text{几何意义}}2\pi\end{aligned}$$

12.2 对坐标的曲线积分

定义 12.2 (第二类曲线积分)

函数 $P(x,y)$ 在有向线弧 L 对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

函数 $Q(x,y)$ 在有向线弧 L对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

记

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

♣

定理 12.5 (物理背景)

质点受力 $\boldsymbol{F}(x,y)=\boldsymbol{F}(P(x,y),Q(x,y))$ 作用沿平面或空间有向曲线 L, 从起点 A 移动到终点 B 变力 F 所作的功.

♡

12.2.1 对坐标的曲线积分的计算法

定理 12.6 (L 为参数方程)

设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t:\alpha\to\beta$$

当参数 t 单调地由 α 变 β 时, 点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, 若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 且

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t \tag{12.1}$$

例题 12.8 计算 $\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$, 从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段。

解 法 I(参数方程) L 的的参数方程:

$$L:\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad t:0\to\pi$$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\big((-\sin t)\cdot(1+\cos t)'+(1+\cos t)\cdot(\sin t)'\big)\,\mathrm{d}t=\pi$$

法 II(直角坐标). L 的直角坐标方程: $L:y=\sqrt{2x-x^2}\quad(x:2\to 0)$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_2^0\left(-\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)\mathrm{d}x=\pi$$

例题 12.9 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_C\frac{e^y}{x^2+y^2}\big((x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\big),$$

其中 $C:x^2+y^2=1$, 取逆时针方向

解

$$原式=\int_0^{2\pi}e^{\cos t}\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}e^{e^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi\lim_{z\to 0}e^z=2\pi$$

定理 12.7 (奇偶对称性)

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & Q(x,y)=-Q(-x,y)\\ 2\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y, & Q(x,y)=Q(-x,y)\end{cases}$$

若 Γ 关于 xOy 面对称, 则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & P(x,y,z)=-P(x,y,-z)\\ 2\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y, & P(x,y,z)=P(x,y,-z)\end{cases}$$

其中 Γ_1 为 Γ 在 xOy 面上方的部分.

例题 12.10 设 $f(r,t)=\oint\limits_{x^2+xy+y^2=r^2}\frac{x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^t}$, 求 $\lim\limits_{r\to\infty}f(r,t)$

解 令 $x=u+v,y=u-v\Rightarrow x^2+xy+y^2=3u^2+v^2$. 令 $u=\frac{r}{\sqrt3}\cos\theta,v=r\sin\theta$ 得圆的参数方程

$$\begin{cases}x=\frac{r}{\sqrt3}\big(\cos\theta-\sqrt3\sin\theta\big),\\ y=\frac{r}{\sqrt3}\big(\cos\theta+\sqrt3\sin\theta\big),\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

于是有

$$\begin{aligned}f(r,t)&=\int_0^{2\pi}\frac{2\frac{\sqrt3}{3}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\left[\frac{2r^2}{3}(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)\right]^t}=\sqrt3\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)^t}\\&=4\sqrt3\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{(1+3\tan^2\theta)^t}=4\sqrt3\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+3x^2)^t}\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{r\to+\infty} f(r,t)=\begin{cases}0, & t>1\\ 2\pi, & t=1,\\ +\infty, & t<1.\end{cases}$$

定理 12.8 (对坐标的平面曲线积分换元法)

设 L 为平面有向光滑曲线, 起点为 A, 终点为 B. 变换

$$x=x(u,v), y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的有向曲线 L_{uv} 和点 $A_{uv}\to B_{uv}$ 一一映射到 xOy 面上的曲线 L 和点 $A\to B$. 其中, $x(u,v)$, $y(u,v)$, P, Q 在各自定义曲线上具有一阶连续偏导数, 且 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{L_{uv}}\neq 0$, 则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{L_{uv}}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v.$$

定理 12.9 (对坐标的空间曲线积分换元法)

设 Γ 为空间有向光滑曲线, 起点为 A, 终点为 B. 变换

$$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$$

将 $O-uvw$ 空间上的有向曲线 $\Gamma_{uvw}: A_{uvw}\to B_{uvw}$ 一一映射到 $O-xyz$ 面上的曲线 $\Gamma: A\to B$. 其中, $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$, P, Q, R 在各自定义曲线上具有一阶连续偏导数, 且 $\left.\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Gamma_{uvw}}\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\ =&\int_{\Gamma_{uvw}}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}+R\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}v+\left(P\frac{\partial x}{\partial w}+Q\frac{\partial y}{\partial w}+R\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

12.2.2 两类曲线积分之间的联系

定理 12.10 (两类曲线积分的联系)

(1) 两类平面曲线积分之间的关系:

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y&=\int_L\left[P(x,y)\cos(t,x)+Q(x,y)\cos(t,y)\right]\mathrm{d}s\\ &=\int_L\left[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x,y)$ 与 $\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角.

(2) 两类空间曲线积分之间的关系:

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x,y,z)$、$\beta(x,y,z)$、$\gamma(x,y,z)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的切向量的方向角.

证明 设 L 为从 A 到 B 的有向光滑曲线, 它以弧长 s 为参数, 于是

$$L:\begin{cases}x=x(s),\\ y=y(s),\end{cases}\quad 0\leqslant s\leqslant l,$$

其中 l 为曲线 L 的全长, 且点 A 与 B 的坐标分别为 $(x(0),y(0))$ 与 $(x(l),y(l))$. 曲线 L 上每一点的切线方向指向弧长增加的一方. 现以 (t,x), (t,y) 分别表示切线方向 t 与 x 轴与 y 轴正向的夹角, 则在曲线上的每一点的切线方

向余弦是

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos(t, x), \quad \cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos(t, y).$$

若 $P(x, y), Q(x, y)$ 为曲线 L 上的连续函数, 则由 (12.1) 式得

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^l \left[P(x(s), y(s))\cos(t, x) + Q(x(s), y(s))\cos(t, y)\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_L \left[P(x, y)\cos(t, x) + Q(x, y)\cos(t, y)\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_L \left[P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

12.3 格林公式及其应用

定理 12.11 (格林公式)

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的取正向 (逆时针) 的边界曲线

注[89] 记取诱导定向的 ∂D 上的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}$, 单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$, 那么显然

$$\cos(\boldsymbol{n}, y) = -\cos(\boldsymbol{\tau}, x), \quad \cos(\boldsymbol{n}, x) = \sin(\boldsymbol{\tau}, x)$$

因此得到 Green 公式的另一种常用表示形式

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} F\,\mathrm{d}y - G\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D}\left[F\sin(\boldsymbol{\tau}, x) - G\cos(\boldsymbol{\tau}, x)\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial D}\left[F\cos(\boldsymbol{n}, x) + G\cos(\boldsymbol{n}, y)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这个形式便于记忆和推广.

例题 12.11 计算 $\int_L x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y$, L 是由曲线 $y^3 = x^2$, $y = x$ 所围成的区域的边界正向曲线

解 *(方法 1)* $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : y = x\ (x : 0 \to 1)$, $L_2 : y = x^{\frac{2}{3}}\ (x : 1 \to 0)$

$$\begin{aligned}\int_L x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y &= \int_{L_1} x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y + \int_{L_2} x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (x^2\cdot x + x^3\cdot 1)\,\mathrm{d}x + \int_1^0 \left[x^2\cdot x^{\frac{2}{3}} + (x^{\frac{2}{3}})^3\cdot(\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{44}\end{aligned}$$

(方法 2) 用格林公式

$$\begin{aligned}\int_L x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{x^{\frac{2}{3}}} (-x^2)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{44}\end{aligned}$$

例题 12.12 计算 $\int_L (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1 + y)]\,\mathrm{d}y$.

解 *(加边法)*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - \ln(1 + y)) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + e^x) = x$$

添加一条边：$L' : y = 0, (x : 0 \to \pi)$, 由格林公式

$$\oint_{L+L'} (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1+y)]\,\mathrm{d}y = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1+y)]\,\mathrm{d}y &= \pi - \int_{L'} (xy + e^x)\,\mathrm{d}x + [x^2 - \ln(1+y)]\,\mathrm{d}y \\ &= \pi - \int_0^{\pi} e^x\,\mathrm{d}x \quad (\because\ y = 0, \mathrm{d}y = 0) \\ &= \pi + 1 - e^{\pi}\end{aligned}$$

例题 12.13 计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心，R $(R > 1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解 (挖洞法) 在 L 所围的区域内有奇点：(0, 0)，作一个椭圆 (顺时针方向)：

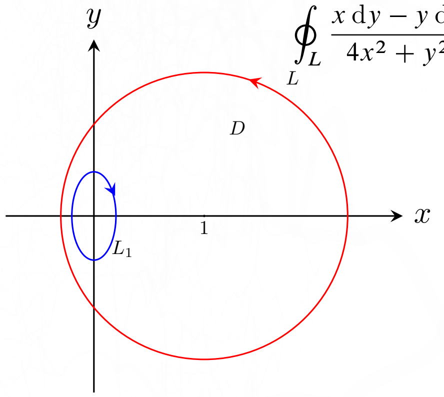
$L_1 : 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, ε 足够小，使椭圆包含于圆内. L_1 围成的区域为 D_1。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2 + y^2}\right) = 0$$

在 D 上用格林公式得

$$\oint_{L \cup L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

故



$$\begin{aligned}\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} &= \oint_{L \cup L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} - \oint_{L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} \\ &= 0 - \oint_{L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = -\oint_{L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{-L_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{格林公式}} \iint_{D_1} \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot (\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon) = \pi\end{aligned}$$

例题 12.14 设函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在闭区域 $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数, 又

$$\begin{aligned}f(x, y) &= v(x, y)\boldsymbol{i} + u(x, y)\boldsymbol{j}, \\ g(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

且在 D 的边界上有 $u(x, y) \equiv= 1, v(x, y) \equiv y$, 求 $\iint_D \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma$

证明 [73] 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} - \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y},\end{aligned}$$

所有

$$\begin{aligned}\iint_D \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_D \left(\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma \\ &\xlongequal{\text{格林公式}} \oint_L uv\,\mathrm{d}x + uv\,\mathrm{d}y = \oint_L y\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\pi$$

其中, $L: x^2+y^2=1$ 正向.

例题 12.15 设函数 $f(x)$ 在闭区域 $D:\ x^2+y^2 \leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$$

证明: $\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2e}$

解 法 I. 在极坐标下有

$$\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \left(r\cos\theta f'_x + r\sin\theta f'_y\right) r\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\left(r\cos\theta f'_x + r\sin\theta f'_y\right)\mathrm{d}\theta$$

因为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则对应有 $\mathrm{d}x=-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y=r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, 将上式内层积分看作沿闭曲线 L_r : $x^2+y^2=r^2$ 逆时针方向的曲线积分 $\int_{L_r} -f'_y\,\mathrm{d}x + f'_x\,\mathrm{d}y$, 由格林公式,

$$\int_{L_r} -f'_y\,\mathrm{d}x + f'_x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_p: x^2+y^2\leqslant r^2}(f''_{xx}+f''_{yy})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\delta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi(1-e^{-r^2}).$$

于是,

$$\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi(1-e^{-r^2})r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2e}$$

法 II.

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\iint_D \left(f'_x\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} + f'_y\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\oint_{L_D}(x^2+y^2)f'_x\,\mathrm{d}y-(x^2+y^2)f'_y\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\oint_{L_D} f'_x\,\mathrm{d}y - f'_y\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\iint_D (1-x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2e}
\end{aligned}$$

定理 12.12 (面积公式)

L 围成的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

例题 12.16 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$

证明 证法一: 由于区域 D 为一正方形, 可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1)

$$右边 = \int_0^\pi \pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\,,$$

$$右边 = \int_0^\pi \pi e^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\,,$$

所以

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x} \geqslant 2+\sin^2 x = \dfrac{5-\cos 2x}{2}$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$$

证法二： (1) 根据 Green 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

因为关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta = \iint_D \left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta\,,$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由 $e^t+e^{-t} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \geqslant 2+t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x = \iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta = \iint_D \left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$$

定理 12.13 (格林第二公式)

设 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 依次表示 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数: 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面.

证明 由格林第一公式知:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置, 得

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

定理 12.14 (二重积分的分部积分公式)

$$\iint_D f\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} fg\,\mathrm{d}y-\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\iint_D f\frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D} fg\,\mathrm{d}x-\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例题 12.17 (Poincaré 不等式) 设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围城的区域, $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上具有连续偏导数, 且有 $f(x,y)=0\,((x,y)\in L)$, 则

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant \max_D\{x^2+y^2\}\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 ([8],P358) 注意到 $f(x,y)=0\,((x,y)\in L)$, 则取 $g(x,y)=x=y$, 由分部积分公式可知

$$\begin{aligned}\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=-2\iint_D yf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-2\iint_D xf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=-\iint_D\left[xf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+yf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\iint_D\sqrt{x^2+y^2}|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\max_{(x,y)\in D}\{\sqrt{x^2+y^2}\}\cdot\iint_D|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\max_{(x,y)\in D}\{\sqrt{x^2+y^2}\}\cdot\left[\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^{\frac12}\\&\quad\left[\iint_D\left\{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^{\frac12}\end{aligned}$$

在上式两端消去 $\displaystyle\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 即可得证.

12.3.1 平面上曲线积分与路径无关的条件

定理 12.15 (Green 定理, 曲线积分与路径无关的条件)

设区域 D 是一个单连通域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数. 则以下的五个命题等价:

(1) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立;

(2) 对于 D 内的任意一条光滑 (或分段光滑) 闭曲线 L,

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

(3) 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关, 只与 L 的起点 A 和终点 B 有关;

(4) $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 为某个可微函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}u=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(5) 矢量函数 $\boldsymbol{V}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为某单值数量函数 $u(x,y)$ 的梯度, 即

$$\mathrm{grad}\,u=\boldsymbol{V}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

我们把条件减弱: D 不在是单连通域, 而是平面有界闭区域, 也没有了一阶偏导数连续的条件

定理 12.16

设 D 是平面有界闭区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上连续. 则以下的四个命题等价:

(1) 对于 D 内的任意一条光滑 (或分段光滑) 闭曲线 L,

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

(2) 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关, 只与 L 的起点 A 和终点 B 有关;

(3) $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 为某个可微函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}u=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(4) 矢量函数 $\boldsymbol{V}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为某单值数量函数 $u(x,y)$ 的梯度, 即

$$\operatorname{grad}u=\boldsymbol{V}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

我们把条件减弱: D 是平面有界区域, 不封闭了

定理 12.17

设 D 是平面有界区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上连续且具有一阶连续偏导数. 则以下的两个命题等价:

(1) 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关, 只与 L 的起点 A 和终点 B 有关;

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立;

例题 12.18 (CMC,2018) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线积分

$$\int_L y\big(2-f(x^2-y^2)\big)\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解 设 $\begin{cases}P(x,y)=y\big(2-f(x^2-y^2)\big)\\ Q(x,y)=x+xf(x^2-y^2)\end{cases}$, 于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2-f(x^2-y^2)+2y^2f'(x^2-y^2)\\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f(x^2+y^2)+2x^2f'(x^2-y^2)\end{cases}$$

由题设可知, 积分与路径无关, 于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Longrightarrow (x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$$

记 $t=x^2-y^2$, 则微分方程

$$tf'(t)+f(t)=1\Leftrightarrow \big(tf(t)\big)'=1\Longrightarrow tf(t)=t+C$$

又 $f(1)=0$, 可得 $C=-1$, $f(t)=1-\dfrac{1}{t}$, 从而

$$f(x^2-y^2)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$$

例题 12.19 (同济 7 下, P214) 求解方程

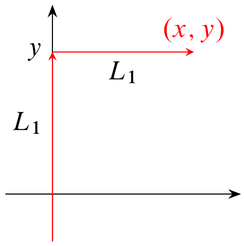
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解 设 $P(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3$, $Q(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$ 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

因此, 所给方程是全微分方程.

为方便计算, 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 选取积分路径如图



(1) 先从 $(0,0)$ 到 $(0, y)$, 记为 L_1, 即

- $L_1 : x = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}y$, 即: 含 $\mathrm{d}x$ 的项为 0
- 将 $x = 0$ 代入, 即含 x 的项为 0

(2) 再从 $(0, y)$ 到 (x, y), 记为 L_2, 即

- L_2: $y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0\,\mathrm{d}x$, 即: 含 $\mathrm{d}y$ 的项为 0
- 将 $y = y$ 代入

因此,

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_0^y (y^2)\,\mathrm{d}y}_{(0,0)\to(0,y)} + \underbrace{\int_0^x (5x^4 + 3xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x}_{(0,y)\to(x,y)} \\
&= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3
\end{aligned}
$$

于是, 方程的通解为

$$
x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C
$$

12.4 对面积的曲面积分

12.4.1 对面积的曲面积分的计算法

定义 12.3 (第一类曲面积分)

$$
\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i
$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面, $\mathrm{d}S$ 叫做面积元素.

函数 $f(x, y, z)$ 在积分曲面 Σ 上对面积的曲面积分记为 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$

♣

定理 12.18 (对面积的曲面积分的计算公式)

(1) 设有曲面 $\Sigma : z = z(x, y)\ (x, y) \in D$, 有界闭区域 D 是曲面在 xOy 面上的投影区域, 则

$$
\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f\big[x, y, z(x, y)\big]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

其中 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 是面积元素

(2) 设有曲面 $\Sigma : y = y(x, z)\ (z, x) \in D_{zx}$, 有界闭区域 D_{xy} 是曲面在 zOx 面上的投影区域, 则

$$
\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f\big[x, y(z, x), z\big]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z
$$

其中 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ 是面积元素

♡

例题 12.20 计算 $\oiint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的四面体的边界曲面

解 要投四个面. $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, $\Sigma_1 : x = 0$, $\Sigma_2 : y = 0$, $\Sigma_3 : z = 0$, $\Sigma_4 : z = 1 - x - y$

- $\Sigma_1 : x = 0$

$$\oiint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

- $\Sigma_2 : y = 0$

$$\oiint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

- $\Sigma_3 : z = 0$

$$\oiint_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

- $\Sigma_4 : z = 1 - x - y$

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S &= \iint_D \big(xy \cdot (1-x-y)\big)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\cdot(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{120}\end{aligned}$$

所以

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

例题 12.21 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解 将 Σ 投影到 zOy 平面上, 投影区域为 $D:[-R,R]\times[0,H]$, 此时

- $\Sigma_1 : x = \sqrt{R^2-y^2}$, $D_{yz} : [-R,R]\times[0,H]$
- $\Sigma_2 : x = -\sqrt{R^2-y^2}$, $D_{yz} : [-R,R]\times[0,H]$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

于是,

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} &\xlongequal{\text{代入}} \iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2} = 2\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2} \\ &= 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\int_0^H \frac{1}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\arctan\frac{H}{R}\end{aligned}$$

注 由于 $x^2+y^2=R^2$, 即对任意 x, y 成立, 故能代入; 如果 $x^2+y^2\leqslant R^2$, 即只有在边界点成立, 故不能代入

定理 12.19 (关于对面积的曲面积分的对称性)

奇偶对称性

- 若 Σ 关于 xOy 面 $(z=0)$ 对称, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & f(x,y,z) \text{ 关于} z \text{为奇函数} \\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & f(x,y,z) \text{ 关于} z \text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 Σ_1 为 Σ 在 xOy 面上方的部分.

轮换对称性

- 若把 x 与 y 对调后, Σ 不变, 则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(y,x,z)\,\mathrm{d}S$.

命题 12.1 (泊松 (Poisson) 公式)

设函数 $f(x)$ 连续, a,b,c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 求证:

$$I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u.$$

证明 法 1(微元法). 1). 由 Σ 的面积为 4π 可见: 当 a,b,c 都为零时, 等式成立.

2). 当他们不全为零时, 可知: 原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是 $\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 其中 u 固定. 则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离, 从而 $-1\leqslant u\leqslant 1$.

两平面 P_u 和 $P_{u+\mathrm{d}u}$ 截单位球 Σ 的截下的部分上, 被积函数取值为 $f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)$.

这部分摊开可以看作一个细长条, 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$, 宽是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 它的面积是 $2\pi\,\mathrm{d}u$, 故我们得证.

法 2[13]. 如果 $a=b=c=0$, 则结论成立. 以下设 a,b,c 不全为零, 则可以坐标旋转 (及翻转) 变换, 使新的坐标系 $Ouvw$ 满足

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

例如, 当 $a\neq 0$ 时, 可以令

$$\begin{cases} u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\\ v=\dfrac{-bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ w=\dfrac{cax+cby-(a^2+b^2)z}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \end{cases}$$

由于上述变换是正交变换, 不改变面积元, 从而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S&=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}S\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

例题 12.22 设函数 $f(z)$ 在圆锥面 $\Sigma=\{(x,y,z)|z=a\sqrt{x^2+y^2},0\leqslant z\leqslant h\}$ 上连续 ($a>0$ 为常数), 证明:

$$\iint_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}S=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)\,\mathrm{d}z$$

解 取 $z=t$ 为被积函数的等值面, 则 $0\leqslant t\leqslant h$. 考虑圆锥面 Σ 夹在平面 $z=t$ 与 $z=t+\mathrm{d}t$ $(\mathrm{d}t>0)$ 之间部分的面积.

曲面 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 可视为 xOz 平面上的直线 $z=ax$ $(z\geqslant 0)$ 绕 z 轴旋转一周而生成. 由旋转侧面积公式知所考虑的面积为

$$2\pi\int_t^{t+\mathrm{d}t}\frac{z}{a}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\left[2t\,\mathrm{d}t+(\mathrm{d}t)^2\right],$$

故面积元素 $\mathrm{d}S(t)=\dfrac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\iint_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}S=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)\,\mathrm{d}z$$

定理 12.20 (参数曲面的第一型曲面积分的计算公式)

设曲面 Σ 是光滑曲面, 其参数方程是

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad (u,v) \in D,$$

D 是 u,v 平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

直接计算就得知

$$EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2$$

且

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

注 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{array}$$

则

$$\begin{aligned} E &= r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi = r^2 \\ F &= -r^2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta + r^2\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta = 0 \\ G &= r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta = r^2\sin^2\varphi \end{aligned}$$

从而算出

$$\mathrm{d}S = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

例题 12.23 设区域 $D = \left\{(x,y)\middle|0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \sin y e^{\sin x \sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

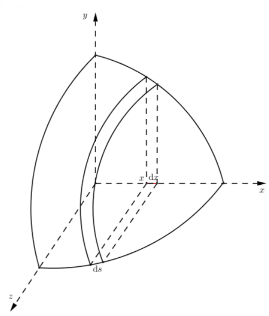
解 法 I. (by 向禹) 首先反向利用一型曲面积分公式,

令 $u = \sin x\sin y, v = \sin x\cos y, w = \cos x$, 曲面

$$\Sigma = \left\{(u,v,w)\middle|u,v,w \geqslant 0, u^2 + v^2 + w^2 = 1\right\}$$

为单位球面在第一卦限的部分, 则

$$\iint_D \sin y e^{\sin x\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Sigma e^u\,\mathrm{d}S$$



用微元法求此曲面积分. 考虑到平面 $u = 0$ 处距离为 u 的宽度为 $\mathrm{d}u$ 的球面窄条面积, 相当于是底面边长为 $v = \sqrt{1-u^2}$, 宽度为 $\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 因此

$$\iint_\Sigma e^u\,\mathrm{d}S = \int_0^1 e^u \frac{\pi}{2}\sqrt{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

注: $\frac{\pi}{2}\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{1-u^2}$ 为弧长.

法 *II*. 引理: 若 $f(x) \in C[0,1]$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

证明: 令 S 为 $x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$. 由对称性显然可得

$$\iint_S f(y)\,\mathrm{d}S = \iint_S f(z)\,\mathrm{d}S.$$

而

$$\begin{aligned}\iint_S f(y)\,\mathrm{d}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,\\ \iint_S f(z)\,\mathrm{d}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

利用引理可得

$$\iint_D \sin y e^{\sin x\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

例题 12.24 (谢惠民, P370) 计算二重积分:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}})\pi.$$

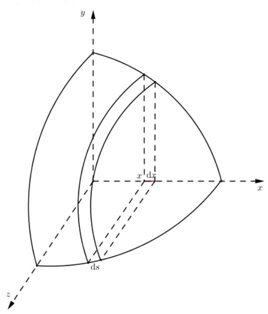
解 利用三角函数的公式, 有

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sqrt{2}\sin y\cos(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{一个周期的面积}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sqrt{2}\sin y\cos x}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

反向利用一型曲面积分公式, 记 Σ 为单位球面, 令 $u=\sin x\cos y, v=\sin x\sin y, w=\cos x$, 从而所求积分可转化为第一型曲面积分

$$I = \oint_{|r|=1} e^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S$$

用微元法求此曲面积分. 考虑到平面 $u=0$ 处距离为 u 的宽度为 $\mathrm{d}x$ 的球面窄条面积, 相当于是底面边长为 $v=\sqrt{1-u^2}$, 宽度为 $\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 球面窄条面积的面积元素



$$\mathrm{d}S = 2\pi\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

从而

$$\begin{aligned}\oint_{|r|=1} e^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S &= \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}u}\cdot 2\pi\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}).\end{aligned}$$

12.4.2 对面积的曲面积分的应用

例题 12.25 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量, 此壳的面密度为 $\mu=z$.

解 ([24],P191) $\Sigma: z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$. $z_x=x$, $z_y=y$. 故 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 因此

$$
\begin{aligned}
M&=\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\\
&\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)
\end{aligned}
$$

例题 12.26 设有一分布着质量的曲面 Σ, 在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$, 用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 ([24],P186) 设想将 Σ 分成 n 小块, 取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$ (其面积也记作 $\mathrm{d}S$). (x,y,z) 为 $\mathrm{d}S$ 上一点, 则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$
\mathrm{d}I_x=(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}S
$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$
I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}S
$$

例题 12.27 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解 ([24],P192)

$$
\begin{aligned}
I&=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\,\mathrm{d}S\\
&=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mu_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mu_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{极坐标}}\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{a^2-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\\
&\xlongequal{\rho=a\sin t}2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{华里士公式}}\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0
\end{aligned}
$$

12.5 对坐标的曲面积分

12.5.1 定向曲面

我们指出, 任何正则曲面片都是**可定向的**. 设

$$\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \quad ((u, v) \in \Delta)$$

是一块正则曲面片. 因为 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{0}$ 在 Δ 上处处成立, 所以在曲面 Σ 上的各点处有确定的法向量. 向量 $\pm\dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$ 都是单位法向量. 我们可以指定其中的任何一个作为 Σ 的正方向.

- 例如, 指定带正号的那一个为 Σ 的正方向.

我们约定把曲面 Σ 的正法线指向的一侧叫做 Σ 的**正**侧, 相反的那一侧叫做**负**侧.

- 双侧曲面: 凡是能明确地区分正、负两侧的曲面, 叫做双侧曲面. 正则曲面一定是**双侧曲面**, 我们说它是可定向的.
- 单侧曲面: 莫比乌斯带、罗马曲面

曲面法向量的指向决定了曲面的侧, 决定了侧的曲面称为有向曲面.

设定向曲面 Σ 由参数方程给出:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的区域. 进一步假设 x, y, z 对 u 和 v 有连续偏导数, 且相应的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

总是满秩的. 这时曲面 Σ 是光滑的. 前面已经知道, 曲面的法向量可以表示为

$$\pm \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \pm \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right),$$

这里 “ $\pm$ ” 表示曲面上每个点 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 都有方向相反的两个法向量. 于是在这点的单位法向量及方向余弦为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\pm\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

这里

$$EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2.$$

例题 12.28 光滑曲面 Σ 的方程为

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

其中 D 为平面区域. 那么

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1).$$

如果取正号, 则 $\cos\gamma > 0$, 这时法向量与 z 轴成锐角, 意味着取定了曲面的上侧, 而取负号则意味着取定了曲面的下侧.

定义 12.4 (第二类曲面积分)

设 Σ 为定向的光滑曲面, 曲面上的每一点指定了单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 如果 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是定义在 Σ 上的向量值函数, 称

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\&=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

为 $\boldsymbol{f}$ 在 Σ 上的第二类曲面积分 (如果右面的第一类曲面积分存在).

12.5.2 对坐标的曲面积分的计算法

定理 12.21 (对坐标的曲面积分的计算公式)

(1) 如果 Σ 由 $z=z(x,y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 取上侧为 "$+$" 下侧为 "$-$"。

(2) 如果 Σ 由 $x=x(y,z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Σ 取前侧为 "$+$" 后侧为 "$-$"。

(3) 如果 Σ 由 $y=y(z,x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}}Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Σ 取右侧为 "$+$" 左侧为 "$-$"。

例题 12.29 计算 $\iint_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的部分.

解 把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两部分

$$\text{下侧 }\Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}\qquad \text{上侧 }\Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_{\Sigma_2}xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_1}xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}}\rho\cos\theta\rho\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

例题 12.30 计算曲面积分

$$I=\iint_{S}\frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 z}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

其中, S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

证明 [73] 利用球面的对称性, 得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{S}\frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 z}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}\\&\xlongequal{\text{对称性}}\iint_{S}\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \iint_S \frac{1}{z\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_S \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

而

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = &\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &- \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I &= \iint_S \frac{1}{z\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标}} 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\\ &= -4\pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-\rho^2}}{\cos^2\sqrt{1-\rho^2}} = -4\pi\tan\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1 = 4\pi\tan 1.\end{aligned}$$

定理 12.22 (关于对坐标的曲面积分的对称性)

奇偶对称性:

- 若 Σ 关于 yOz 面对称, 则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \begin{cases}0, & P(x,y,z) = -P(-x,y,z)\\ 2\displaystyle\iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, & P(x,y,z) = P(-x,y,z)\end{cases}$$

轮换对称性: 一般没有轮换对称性.

- 一般情况下, 观察 $\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, 我们发现各个项的积分元素均不同, 所以第二型曲面积分一般没有轮换对称性.
- 特殊情况下, 比如单独计算 $\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 时, 是可以讨论关于 y,z 的轮换对称性的.

命题 12.2 (三重积分的分部积分公式)

三重积分的分部积分公式 ([36], P372)

$$\iiint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iiint_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 Σ 是 Ω 的边界, 分片光滑, 取外测, u,v 在 $\bar{\Omega}$ 上连续可微

定理 12.23

如果光滑曲面 S 由参量方程给出:

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

若在 D 上各点它们的函数行列式 $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 不同时为零, 则分别有

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_D P\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_D Q\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D} R\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

三式前的正负号分别对应 S 的两个侧, 特别当 uv 平面的正方向对应于曲面 S 所选定的正向一侧时, 式前取正号, 否则取负号.

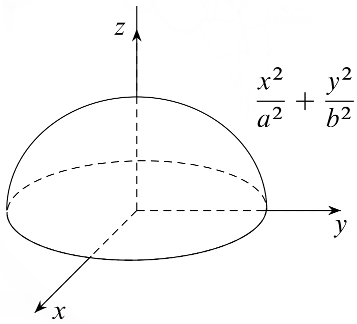
例题 12.31 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为上半椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, z \geqslant 0\,(a, b, c > 0)$ 方向取上侧.

解 利用广义球面坐标, 就可得曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = b\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{array}$$



计算得到

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ab\sin\varphi\cos\varphi$$

因此

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =& \iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi}} \left(a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^3ac\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^3ab\sin\varphi\cos^4\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ =& abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^2\sin\varphi\cos^4\varphi\right)\mathrm{d}\theta \\ =& \frac{2}{5}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

我们说明一下为什么这里积分号前取 “+”. 因为曲面的定向为上侧, 所以在 Σ 上方向余弦 $\cos\gamma > 0$(除去 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时的边界), 而由方向余弦的计算公式知

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \pm\frac{ab\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{EG - F^2}},$$

要等式成立必须取 “+” 号, 因此积分号前取 “+” 号.

12.6 高斯公式

定理 12.24 (高斯公式, 奥高公式)

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 若函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

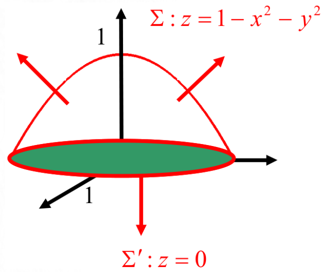
此外, 根据两类曲面积分之间的关系, 高斯公式也可表示为
$$\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$
这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 与 $\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

例题 12.32 设对于任意光滑有向闭曲面 S, 都有
$$\oiint_{S} xf(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z[b+f(x+y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$
其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $f(1)=a$ (a,b 都是常数), 求 $f(2010)$.

解 由高斯公式可得
$$\begin{aligned}&\oiint_{S} xf(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z[b+f(x+y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}\big(f(y)+f(x)-(b+f(x+y))\big)\,\mathrm{d}V=0\end{aligned}$$
要使此三重积分恒为 0, 则必然有
$$f(y)+f(x)-\big(b+f(x+y)\big)\equiv 0\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)-b$$
令 $x=0,\ y=1$ 得到
$$f(0)+f(1)-\big(b+f(1)\big)=0\quad\Rightarrow\quad f(0)=b,$$
于是得到
$$\begin{aligned}f(n)&=f(n-1)+f(1)-b\\&=f(n-2)+2f(1)-2b\\&=\cdots=f(0)+nf(1)-nb=na-(n-1)b\end{aligned}$$
因此, $f(2010)=2010a-2009b$

例题 12.33 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma: z=1-x^2-y^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧

解 (补面) 添加一圆盘: $\Sigma': z=0\ (D: x^2+y^2\leqslant 1)$ 下侧.
曲面 Σ 与 Σ' 所围的区域 $\Omega: 0\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2, x^2+y^2\leqslant 1$
$$P=y,Q=x,R=z\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$$



由高斯公式,
$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma'} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}1\,\mathrm{d}V=\iint_{D}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
容易知道
$$\oiint_{\Sigma'} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$
故
$$\oiint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

例题 12.34 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围成部分的下侧, 记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域, 则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad (12.2)\\ =&6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(z+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

注意: (12.2) 中 x^2+y^2+z 不能用 1 代替。

例题 12.35 (数学 I, 2009) 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解 *(挖奇点)* 经过计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

由于被积函数及其偏导数在 $(0,0,0)$ 处不连续, 故不能直接使用高斯公式. 挖掉这个点, 作一个包含在椭球面内的球面: $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=r^2$ (取内侧), 利用高斯公式.

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}V=0$$

记 Σ_1 包围的有界闭区域为 Ω_1, 则

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}&=\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{r^3}\\ &=-\frac{1}{r^3}\oiint_{\substack{-\Sigma_1\\ \text{外侧}}}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{高斯公式}}-\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_1}(1+1+1)\,\mathrm{d}V\\ &=-\frac{1}{r^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=-4\pi\end{aligned}$$

故

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0-(-4\pi)=4\pi$$

例题 12.36 (数学 I, 2018) 求 $\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 其中 Σ 取曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的正面.

解 *(by 向禹)* 取 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}(y^2+z^2)\sqrt{1-3y^2-3z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^2\sqrt{1-3r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}$$

而 $\iint_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{14\pi}{45}$$

例题 12.37 (CMC, 2014) 设函数 $f(x)$ 连续可导, $P=Q=R=f\big((x^2+y^2)z\big)$, 有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_t} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

求极限 $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

解 由高斯公式

$$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iiint_V(2xz+2yz+x^2+y^2)f'\big((x^2+y^2)z\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由对称性 $\iiint_V(2xz+2yz)f'\big((x^2+y^2)z\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$. 从而

$$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V(x^2+y^2)f'\big((x^2+y^2)z\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z\\\lim_{t\to0+}\frac{I_t}{t^4}&=\lim_{t\to0+}\frac{2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z}{t^4}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{2\pi\int_0^1 f'(t^2z)t^3\,\mathrm{d}z}{4t^3}=\lim_{t\to0+}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f'(t^2z)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}f'(0)\end{aligned}$$

例题 12.38 (CMC,2021) 设 Ω 是由光滑的简单封闭曲面 Σ 围成的有界闭区域, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续二阶偏导数, 且 $f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$. 记 ∇f 为 $f(x,y,z)$ 的梯度, 并令 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. 证明: 对任意常数 $C>0$, 恒有

$$C\iiint_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_\Omega(\Delta f)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\geqslant2\iiint_\Omega|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

证明 首先利用 Gauss 公式, 可得

$$\iint_\Sigma f\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+f\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+f\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(f\Delta f+|\nabla f|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 取外侧. 因为 $f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$, 所以上式左端等于零. 利用 Cauchy 不等式, 得

$$\iiint_\Omega|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iiint_\Omega(f\Delta f)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\leqslant\left(\iiint_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^{\frac12}\left(\iiint_\Omega(\Delta f)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^{\frac12}.$$

故对任意常数 $C>0$, 恒有 (利用均值不等式)

$$\begin{aligned}C\iiint_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_\Omega(\Delta f)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&\geqslant2\left(\iiint_\Omega f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^{\frac12}\left(\iiint_\Omega(\Delta f)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^{\frac12}\\&\geqslant2\iiint_\Omega|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

例题 12.39 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\big\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant1\big\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

解 记球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的单位法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

考虑曲面积分等式

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{12.3}$$

对两边都利用高斯公式，得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\oiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{12.4}$$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=2\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&\quad+\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{12.5}$$

将 (12.4)、(12.5) 代入 (12.3) 并整理得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(1-(x^2+y^2+z^2)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

例题 12.40 (武大, 2013) 计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 为椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$.

解 法 *I(by 陶哲轩小弟)*. 令 $x=a\sin\varphi\cos\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi$, 其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, 经计算得到

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}EG-F^2&=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2\\&=(abc)^2\sin^2\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

而这时被积函数化为

$$(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

因此

$$I=abc\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

注意到这么一个事实, 当 $M+Nx^2$ 不取 0 且 $M\neq 0$ 时, 我们有

$$\int(M+Nx^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{M}\cdot\frac{x}{\sqrt{M+Nx^2}}+C.$$

故

$$\begin{aligned}
I&=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\
&=-abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\cos\varphi\\
&=-abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+(c^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)\cos^2\varphi\right]^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\cos\varphi\\
&=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1}\left[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+(c^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)x^2\right]^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\\
&=abc\int_0^{2\pi}\frac{2}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)c}\,\mathrm{d}\theta=4ab\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+b^2x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2x^2+b^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}x\right)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right)\Big|_0^{+\infty}\\
&=\frac{\pi}{ab}.
\end{aligned}$$

进而得到

$$I=4ab\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

法 II(by Hansschwarzkopf). 注意到 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位外法向量是

$$n=\frac{\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

且 $1=x\cdot\dfrac{x}{a^2}+y\cdot\dfrac{y}{b^2}+z\cdot\dfrac{z}{c^2}$. 从而原积分可写成第二型曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

作小球面 $S_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$. 运用 Gauss 公式可知

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=4\pi.$$

即

$$\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = 4\pi.$$

12.7 斯托克斯公式

斯托克斯公式是建立沿空间双侧曲面 S 的积分与沿 S 的边界曲线 L 的积分之间的联系

定理 12.25 (斯托克斯公式[3])

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则[a], 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

L 是曲面 Γ 的正向边界曲线

[a]右手法则: 若右手大拇指指向右侧的方向则图指向的方向就是边界 L 的正向.

笔记 L 的方向与 Σ 的正向法向量 $\boldsymbol{n}$ 符合右手法则

L 是曲面 Σ 的正向边界曲线

定理 12.26 (Stokes 公式的实质)

它表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

定理 12.27 (斯托克斯公式的行列式形式)

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

或者

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

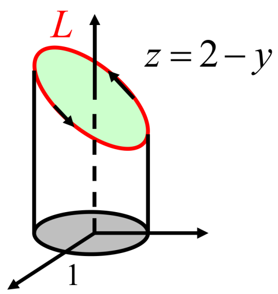
其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为 Σ 的单位法向量

例题 12.41 计算曲线积分

$$\int_L -y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 是 $x^2+y^2=1$, $y+z=2$, 从 z 轴正向看去是逆时针方向。

解 利用斯托克斯公式, 取 L 所围的平面为 Σ（上侧）$\Sigma: y+z=2$, 求 Σ 的单位法向量: $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}$



$$\int_L -y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_\Sigma (1+2y)\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (1+2y)\sqrt{1+0^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

例题 12.42 计算曲面积分

$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|$$

其中曲线 L 是空间区域 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线.

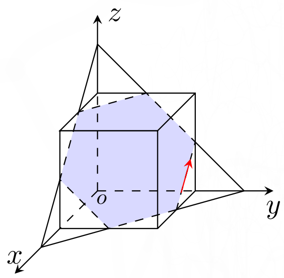
解 如图所示, 取平面为 Σ 的上侧被 L 所围成的部分. 则 Σ 的单位法向量 $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$, 即 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 利用 *Stokes* 公式得

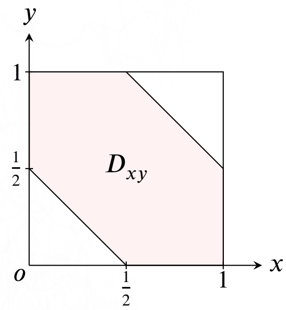
$$\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_\Sigma \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{matrix} \right\| \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma (x+y+z)\,\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma \frac{3}{2}\,\mathrm{d}S$$

$$= -6 \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{9}{2}$$





因此,

$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right| = \frac{9}{2}$$

例题 12.43 (CMC, 2017) 设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\quad x+z=1\,,\quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I = \displaystyle\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$

解 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $\overrightarrow{BA} = (1,0,0)-(0,0,1) = (1,0,-1)$

$$\Gamma_1 : B \to A : \begin{cases} x = 0+t = t \\ y = 0+0t = 0 \\ z = 1+(-1)t = 1-t \end{cases} \qquad t: 0 \to 1$$

$$\int_{\Gamma_1} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t\,\mathrm{d}(1-t) = -\frac{1}{2}$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ, 方向按右手法则. 由 *Stokes* 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma_1}\right) y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\ (y\geqslant 0)$$

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

这样就有 $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

例题 12.44 对于 $0<r_2<r_1$, 计算曲线积分

$$I:=\oint_L(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$$

其中曲线 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2r_1x$ 与 $x^2+y^2=2r_2x$ $(z>0)$ 的交线, 并且从点 $(1,0,0)$ 看 L 是顺时针方向.

证明 (by 曲豆豆) 记 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2r_1x$ 与 $x^2+y^2=2r_2x$ $(z>0)$ 围住的部分, 其定向为球面外侧. 对于 Σ 上的一点 (x,y,z), Σ 在该点处的外法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{r_1}(x-r_1,y,z)$. 记 $\mathbb{R}^3$ 的切向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$. 于是由 Stokes 公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_L\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\overset{\text{Stokes}}{=\!=\!=}\iint_{\Sigma}(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\\&=\frac{2}{r_1}\iint_{\Sigma}\big((y-z)(x-r_1)+(z-x)y+(x-y)z\big)\,\mathrm{d}S\\&=-2\iint_{\Sigma}(y-z)\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

注意曲面 Σ 关于 xOz 平面对称, 从而易知 $\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S$, 所以 $I=2\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$. 记 Σ' 为曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影, 则 Σ 无非是圆盘 $(x-r_2)^2+y^2<r_2^2,z=0$. 再注意

$$\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}r_1\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=r_1\iint_{\Sigma'}\mathrm{d}S=\pi r_1r_2^2.$$

因此 $I=2\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=2\pi r_1r_2^2$.

微分形式的外微分

注 利用外微分可以将 Green 公式、Ostrogradsky-Gauss 公式、Stokes 公式以及 Newton-Leibniz 公式表述为区域上的积分和边界上积分的一个统一的关系式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

例题 12.45 (定义有向面积) 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个线性无关向量, Π 为 $\mathbb{R}$ 上由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形. 我们规定: 如果从向量 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向, 其平行四边形的面积为正,

否则为负. 由解析几何知识知, 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 就是上述意义下 Π 的有向面积.

定义 12.5 (向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积)

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积, 记为 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

♣

定义 12.6 (外微分形式 ω)

设 $\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_j$ 为微分, 定义它们的外积 $\wedge$, 满足:

(1) (反称性) $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, 蕴含着 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$;

(2) 对运算 $+, \wedge$ 具有分配律、结合律.

♣

例题 12.46 设 $\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的 1- 形式, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}P) \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{d}Q) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

例题 12.47 设 $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的 1- 形式, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}P) \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{d}Q) \wedge \mathrm{d}y + (\mathrm{d}R) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

例题 12.48 设

$$T:\ x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

为区域 $D(\subset \mathbb{R}^2)$ 上具有连续偏导数的映射. 则

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= (x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v) \wedge (y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v) \\
&= x_u y_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + x_v y_u\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u = (x_u y_v - x_v y_u)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\
&= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

例题 12.49 写出微分形式 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式:

(1) 柱面坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \rho < +\infty. \end{array}$$

(2) 球面坐标代换

$$T:\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \end{array}$$

解 *(1)* 两边微分：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y=\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}z \end{cases}$$

可以先求得 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= r\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta-r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r \\ &= r\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta+r\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta=r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

于是有：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z$$

(2) 两边微分：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y=\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta+r\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z=\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

可以先求得 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y= & \, r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta+r\sin^2\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi \\ & +r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r+r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \\ & -r\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r-r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta \\ = & \, r\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi+r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= (r\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi+r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi)\wedge(\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) \\ &= -r^2sin^3\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta+r^2\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r \\ &= r^2sin^3\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+r^2\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \\ &= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

12.8 散度与旋度

定义 12.7 (散度与旋度)

设向量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$，则

- 散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$
- 旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}=\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)k$

♣

第十三章 常数项级数

定义 13.1 (无穷级数)

设 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为一实数列，称形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为无穷级数。

笔记 牛角尖：类似 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-8}$ 发散.

13.1 常数项级数的概念和性质

13.1.1 几个简单的级数求和

例题 13.1 计算 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$.

解 注意到

$$\frac{ab}{(a-b)(3a-2b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{2b}{3a-2b}$$

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\frac{2^k\cdot 3^k}{(3^k-2^k)(3\cdot 3^k-2\cdot 2^k)}=\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)=2$$

例题 13.2 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}$

解 注意到

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right)$$

所以

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(m-1)(m-1)!}$$

例题 13.3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 的和

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}-\frac{2}{(n+1)(n+\frac{1}{2})}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} - 8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$
$$= \frac{2\pi^2}{3} - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = -8\ln 2 + \frac{2\pi^2}{3}$$

例题 13.4 证明：对任何自然数 p, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

解

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k+p-1}-\frac{1}{k+p}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+p}\right)$$

故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

例题 13.5 计算: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}$

解 因为

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} = \frac{[2(n-1)]!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}$$
$$= \frac{1}{2n}\frac{2(n-1)}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} = \left(1-\frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\right)\frac{[2(n-1)]!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}$$
$$= \frac{1}{2^{2(n-1)}}C_{2(n-1)}^{n-1} - \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\right) = 1$$

例题 13.6 求 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的和

证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}\right) = -\ln 2$$

例题 13.7 (IMC, 2011) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$ 的和.

解 *(by 向禹)* 注意到当 $x+y+z=0$ 时, $x^3+y^3+z^3=3xyz$. 这里

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) = \ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{2n}{2n+1}+\ln\frac{2n+1}{2n+2} = 0$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\ln^3 2$$

注：向老师《*1994-2020* 历届国际大学生数学竞赛试题集》

例题 13.8 设 $a>0, b>a+1$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}+\cdots=\frac{a}{b-a-1}$$

解 记 $a_n=\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$, $A_n=a_n(a+n+1)$, 则

$$A_{n-1}-A_n=a_n(b-a-1)\ \ (n=0,1,2,\cdots);\quad A_{-1}=a$$

令 $a_{-1}=1$. 从 $n=0$ 到 $n=N$ 的各项相加, 我们有 (记 $S_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$)

$$a-a_N=A_{-1}-A_N=(b-a-1)\sum_{n=0}^{N}a_n=(b-a-1)S_{N+1},$$

故得

$$a\left(1-\frac{(a+1)\cdots(a+N)}{b(b+1)\cdots(b+N)}\right)=(b-a-1)S_{N+1}.$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}S_{N+1}=\frac{a}{b-a-1}.$$

进一步可参考: 周明强《数学分析习题演练》第二册 *P168*

13.1.1.1 反三角函数级数的求和

例题 13.9 计算: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$

解 法 *I.* 由公式 $\arctan a-\arctan b=\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{n-1}{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

法 *II.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)\big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\arctan(2n+1)-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

笔记 反正切函数的几个特殊公式

- $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan(n)$.
- $\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}$.
- $\arctan\dfrac{2}{n^2}=\arctan\dfrac{1}{n-1}-\arctan\dfrac{1}{n+1}$.
- $\arctan\dfrac{2n}{n^4+n^2+2}=\arctan(n^2+n+1)-\arctan(n^2-n+1)$.

注意：不是所有的反正切函数都有这样的公式！

例题 13.10 (MSE,1487596) 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}=\ln 3-\dfrac{\pi}{4}$.

解 *(by MSE)*[90]. 由 $\arctan(x)=\arg(1+ix)$, 可得

$$1+\frac{10in}{(3n^2+2)(9n^2-1)}=\frac{\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{i}{3n-1}\right)\left(1+\frac{i}{3n+1}\right)\left(1+\frac{i}{3n}\right)}{1+\frac{2}{3n^2}}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}&\arctan\left(\frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}\right)\\&=\arctan\left(\frac{1}{3n-1}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3n}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3n+1}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[\arctan\left(\frac{1}{3n-1}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3n}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3n+1}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=-\arctan(1)+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m+1}^{3m+1}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\\&=-\arctan(1)+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m+1}^{3m+1}\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\&=\log(3)-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

例题 13.11 计算: $\sum\limits_{i=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\arccos\dfrac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}$.

解 *(by 神琦冰河)* 考虑构造

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

注意到：

$$\frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}=\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{(n-1)^2}}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n-1}$$

于是：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\arccos\frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}\\&=\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\arccos\frac{1}{n+1}-\arccos\frac{1}{n-1}\right)\\&=-\arccos\frac{1}{2}\end{aligned}$$

进一步可参考：*https://mp.weixin.qq.com/s/bfnI3-lx2LFUNgh978wAVQ*

例题 13.12 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=2, a_2=8, a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\geqslant 2)$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}(a_n^2)=\frac{\pi}{12}$$

证明 由特征根法可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right],$$

利用递推式可得

$$\begin{aligned}
&a_n(4a_{n-1})=a_{n-1}(4a_n)\\
\Rightarrow\ &a_n(a_n+a_{n-2})=a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1})\\
\Rightarrow\ &a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=a_{n-1}^2-a_na_{n-2}
\end{aligned}$$

根据上述递推关系可得, 对 $\forall n\geqslant 2$,

$$a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=a_{n-1}^2-a_na_{n-2}=\cdots=a_2^2-a_3a_1=4$$

根据反余切公式 $\operatorname{arccot} a-\operatorname{arccot} b=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1+ab}{b-a}\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot} a_n^2&=\operatorname{arccot}\frac{a_n(4a_n)}{4}=\operatorname{arccot}\frac{a_n(a_{n+1}+a_{n-1})}{a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}}\\
&=\operatorname{arccot}\frac{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}}\\
&=\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_n}{a_{n-1}}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}(a_n^2)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arccot}(a_n^2)\\
&=\operatorname{arccot} a_1^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left[\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_n}{a_{n-1}}\right]\\
&=\operatorname{arccot} a_1^2+\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_2}{a_1}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\operatorname{arccot}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

13.1.2 利用级数定义判断敛散性

例题 13.13 (同济 7, P258) 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性:

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$$

证明 由于

$$u_n=\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}$$

从而

$$\begin{aligned}
S_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\Bigg[&\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)\\
&+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)$$

因为当 $n \to \infty$ 时, $\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在, 所以 S_n 的极限不存在, 即级数发散

例题 13.14 (抄错) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{2/3}}$ 的敛散性

证明 (by 向禹)[91]

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{k}}{k^{2/3}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\sqrt{2k}}{(2k)^{2/3}} - \frac{\sin\sqrt{2k-1}}{(2k-1)^{2/3}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k} - (2k)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k-1}}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\left(\sin\sqrt{2k} - \sin\sqrt{2k-1}\right) - \sin\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}} - (2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}} \\ &\triangleq \sum_{k=0}^{n}a_k. \end{aligned}$$

注意到

$$|\sin\sqrt{2k} - \sin\sqrt{2k-1}| < |\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}| = \frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{2k-1}},$$

$$\left|\sin\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}} - (2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right| < (2k)^{\frac{2}{3}} - (2k-1)^{\frac{2}{3}} < 1$$

于是

$$|a_k| < \frac{1}{2\sqrt{2k}(2k-1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}}$$

这说明 S_{2n} 收敛于 S. 而

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\sin\sqrt{2n+1}}{(2n+1)^{\frac{2}{3}}} \to S + 0 = S.$$

因此 S_n 收敛于 S. 原级数收敛

注 本题大概率是手残“抄错了”, 猜测原题分母应该是 $n^{3/2}$, 很显然 $A-D$ 判别法就秒了. 这道题目就是传说中的“手写野题”, 运气好这道题还能做出来, 有的“野题”的难度直接超越现有数学理论的!

例题 13.15 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个正项级数, 如果存在正数 α 和 β, 使得 $a_n - a_{n-1} \leqslant \beta a_n^{2-\alpha}$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n < +\infty$, 而且

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n = O(a_N^{\alpha}) \quad (N \to \infty).$$

证明 法 I(by ytdwdw)[26]. 易得 a_n 单调下降且极限为 0

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant \frac{1}{\beta}(a_n - a_{n+1})a_n^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta}\int_{a_{n+1}}^{a_n}a_n^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{\beta}\int_{a_{n+1}}^{a_n}x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha\beta}(a_n^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha}). \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n \leqslant \frac{1}{\alpha\beta}a_N^{\alpha}, \quad N \geqslant 1.$$

法 II([18],P205) 由题设知

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n(1 - \beta a_n^{1-\alpha}),$$

从而 $0 \leqslant 1 - \beta a_n^{1-\alpha} \leqslant 1$, $\{a_n\}$ 单调减有下界 0, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = a \geqslant 0$, 在式 $a_{n+1} \leqslant a_n(1 - \beta a_n^{1-\alpha})$ 中, 令

$n \to +\infty$ 有

$$a \leqslant a(1-\beta a^{1-\alpha})$$

则 $a=0$(否则有 $1-\beta a^{1-\alpha} \geqslant 1$, 矛盾). 再由 $1-\beta a^{1-\alpha} \geqslant 1$ 知, $\alpha \leqslant 1$.

(i) 当 $\alpha = 1$ 时, 根据 $a_n - a_{n+1} \geqslant \beta a_n^{2-\alpha} = \beta a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ 得,

$$\beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqslant \frac{a_N}{\beta} = O(a_N^{\alpha}) \quad (N \to \infty).$$

(ii) 当 $0<\alpha<1$ 时, 由 $a_n \to 0$ 知可取 N_0 充分大, s.t. 当 $n > N_0$ 时, $\beta a_n^{1-\alpha} < 1$, 于是

$$a_{n+1}^{\alpha} \leqslant a_n^{\alpha}(1-\beta a_n^{1-\alpha})^{\alpha} < a_n^{\alpha}(1-\alpha\beta a_n^{1-\alpha}) = a_n^{\alpha} - \alpha\beta a_n.$$

移项得 $\alpha\beta a_n \leqslant a_n^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha}$, 因此

$$\alpha\beta \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N_0}^{\infty}(a_n^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha}) = a_{N_0}^{\alpha}.$$

由此知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = O(a_N^{\alpha}) \quad (N \to \infty).$$

13.1.3 级数不等式

例题 13.16 (Hardy-Landau 不等式) 设 $p>1$, 且 a_n $(n \in \mathbb{N})$ 是递增的正数列, 则

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p$$

证明 记

$$A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

由 Young 不等式

$$A_n^{p-1}A_{n-1} \leqslant \frac{p-1}{p}A_n^p + \frac{1}{p}A_{n-1}^p$$

可知

$$\begin{aligned}
A_n^p - \frac{p}{p-1}A_n^{p-1}a_n &= A_n^p - \frac{p}{p-1}\left[nA_n - (n-1)A_{n-1}\right]A_n^{-1}A_n^p \\
&= A_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}A_n^{p-1}A_{n-1} \\
&\leqslant A_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1}\left[(p-1)A_n^p + A_{n-1}^p\right] \\
&\frac{1}{p-1}\left[(n-1)A_{n-1}^p - nA_n^p\right].
\end{aligned}$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{N} A_n^p < \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} A_n^{p-1}a_n$$

由此结论以及 Holder 不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{N} A_n^p < \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} A_{n-1}^p \cdot a_n \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N} A_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

即得所证

例题 13.17 (Carleman 不等式). 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

其中, e 为最佳常数, 上述不等式等号成立当且仅当所有数为 0.

解 *(by 西西)* 由不等式 $\left((n+1)/e\right)^n < n!$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt[n]{(a_1)(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n\sqrt[n]{n!}} \leqslant e\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}\\ &= e\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{n(n+1)} = e\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{ka_k}{n(n+1)}\\ &= e\sum_{k=1}^{N} ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right) \leqslant e\sum_{k=1}^{N} a_k\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

对每个 N 构造数列

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & 1\leqslant n\leqslant N\\ 0, & n > N\end{cases}$$

由 *Stolz* 定理得

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{N}{\sqrt[N]{N!}} = e$$

这表明不等式右边的系数 e 不能再改进.

例题 13.18 (CMC, 2018) 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数数列, 且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta, k=1,2,\cdots, \delta$ 为一常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛..

解 法 *I.* 令 $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i$, $a_kb_k = S_k - S_{k-1}$, $S_0 = 0$, $a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1,2,\cdots$. *(4 分)*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}\\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N} \geqslant \sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛, 由算术—几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\leqslant\frac{a_1b_1+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$, 故结论成立.

法 II(by 向禹). 注意到 $b_{k+1}>k\delta$, 于是

$$\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}<\frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}{b_{k+1}}<\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}{\delta}$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 由 Carleman 不等式知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$ 收敛, 证毕.

例题 13.19 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

证明 由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\cdot\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant\frac{k^2(k+1)^2}{4}\Longrightarrow\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}\leqslant\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}$$

那么有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)<2\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right]<2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\cdot\frac{1}{i^2}$$

其中用到

$$\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\leqslant\frac{1}{i^2}$$

推广 (by 西西)[1]: $\forall a_i>0\,(i=1,2,\cdots,n), n\geqslant 3$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leqslant\left(2-\frac{7\ln 2}{8\ln n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

例题 13.20 (College Mathematics Journal T1119) 设 $0<x<1$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}<\ln\frac{1}{1-x}.$$

解 (by 西西) 当 $x\in(0,1/2)$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-x^{n+1}}{1-x^2}\\&=\frac{x}{1-x^2}<\ln\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

当 $x\in[1/2,1)$ 时,

① $n=2k$, 有

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\frac{x^{2k}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2k}}\\&\leqslant\frac{x^{2k}}{(2k+1)x^k}=\frac{x^k}{2k+1}\end{aligned}$$

[1] https://math.stackexchange.com/questions/853354/stronger-version-of-amm-problem-11145-april-2005

② $n=2k-1, k\neq 1$, 有

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\frac{x^{2k-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2k-1}}\\&=\frac{x^k}{\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k-2}}+\cdots+x^{k-1}+x^k}\\&\leqslant\frac{x^k}{\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k-2}}+\cdots+x^{k-1}+\frac{3}{2}x^k}\leqslant\frac{x^k}{2k-3+\sqrt{6}},\quad k\neq 1\end{aligned}$$

$n=1$, 注意到 $\dfrac{x}{1+x}\leqslant\dfrac{x}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}x$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&\leqslant\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x+\sum_{k=2}^{\infty}x^k\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-3}\right)\\&<x+\sum_{k=2}^{\infty}x^k\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-\frac{k}{k+1}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=\ln\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例题 13.21 (AMM, 4321) 设 n_k 是单调增的正整数, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_k}{n_1n_2\cdots n_{k-1}}=+\infty$. 证明: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n_k}$ 是一个无理数.

证明 反证法. 假设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n_k}$ 为有理数, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n_k}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p、q 为不为 0 的整数, p 与 q 互质. 由条件知, 当 k 充分大时必存有

$$\frac{n_k}{n_1n_2\cdots n_{k-1}q}>3$$

且 $n_{i+1}>3n_i\ (i\geqslant k)$, 故

$$pn_1n_2\cdots n_{k-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_1n_2\cdots n_{k-1}q}{n_i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{n_1n_2\cdots n_{k-1}q}{n_i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{n_1n_2\cdots n_{k-1}q}{n_i}$$

这里的 $n_1n_2\cdots n_{k-1}q$ 与右边的有限和为整数, 但

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{n_1n_2\cdots n_{k-1}q}{n_i}<\sum_{i=k}^{\infty}\frac{n_k}{3n_i}&=\frac{n_k}{3n_k}+\frac{n_k}{3n_{k+1}}+\cdots+\\&<\frac{n_k}{3n_k}+\frac{n_k}{3^2n_k}+\cdots+\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^i}+\cdots=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

整数 = 整数 + 小数, 这是不可能的! 假设不成立, 从而得证.

13.2 正项级数及其审敛法

正项级数: 当 n 充分大时, 通项 $a_n\to 0$.

正项级数敛散性判别的一般思路:

1. 级数收敛的定义
2. 正项级数判别法:
   - 明显小于某收敛级数的通项 $\Rightarrow$ 比较判别法
   - a_n 带阶乘 $\Rightarrow$ 比值判别法
   - a_n 等价于 $\frac{C}{n^p}$ $\Rightarrow$ 比较审敛法的极限形式
   - a_n 对 n 积分看起来比较好算 $\Rightarrow$ 积分判别法
3. 转化为正项级数: 放缩、加绝对值 (绝对收敛)、泰勒等
   - 分子有界, 如 $|\sin x| \leqslant |x|, |\sin x| \leqslant 1$

定理 13.1 (基本判别法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \{S_n\} \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \{S_n\} \text{ 有上界.}$$

例题 13.22 (17 江西省赛) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}$ 也收敛

证明 (by 西西) 定义

$$I = \{n : (a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}} \leqslant e^2 a_n\};, \quad J = \{n : (a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}} > e^2 a_n\}$$

若 $n \in J$, 则有

$$(a_n)^{\ln n} > (en)^2 (a_n)^{1+\ln n} \Longrightarrow a_n < (en)^{-2}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}} \leqslant \sum_{n \in Ix} e^2 a_n + \sum_{n \in J} (en)^{-2} \leqslant e^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + e^{-2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty$$

笔记 一般的, 设 $a_n > 0, \varphi(n) > 0, \varphi(n) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n)^{1-\varphi(n)}$ 也是收敛的.

例题 13.23 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 都有 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - n a_n$ 是有界的。证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

证明 (by 欧阳) 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ (n \geqslant 1)$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ (记 $S_0 = 0$)

$\exists M > 0, |(1-n)S_n - S_{n-1}| \leqslant M$, 所以

$$|(n-2)!S_{n-1} - (n-1)!S_n| \leqslant M(n-2)!$$

$$-M\sum_{k=2}^{n}(k-2)! \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left[(k-2)!S_{k-1} - (k-1)!S_k\right] \leqslant M\sum_{k=2}^{n}(k-2)!$$

即

$$-M\sum_{k=0}^{n-2} k! \leqslant S_1 - (n-1)!S_n \leqslant M\sum_{k=0}^{n-2} k!$$

所以

$$\frac{S_1}{(n-1)!} - M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} k!}{(n-1)!} \leqslant S_n \leqslant \frac{S_1}{(n-1)!} + M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} k!}{(n-1)!}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} k!}{(n-1)!} < \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-1)!} = 1$$

所以 $S_n \leqslant S_1 + M$. S_n 单调递增有上界，故极限存在。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

例题 13.24 设数列 $\{a_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛。证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

解 由题意可设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = B$。$A$，$B$ 均为有限数。

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛知

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left[na_n - n(a_n - a_{n+1})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} na_n - \lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = A - 0 = A\end{aligned}$$

考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和

$$\begin{aligned}S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) + na_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) + \lim_{n\to\infty} na_{n+1} = B + A$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

例题 13.25 设 $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

(1) 当 $p > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 当 $p \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

证明 (1) 由题设 S_n 单调上升, 则当 $p > 1$ 时

$$\frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{(1-p)(S_n - S_{n-1})} = \frac{1}{(\xi_n)^p} > \frac{1}{S_n^p}, \quad \exists \xi_n \in (S_{n-1}, S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \leqslant \frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{1-p}$$

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n^p} \leqslant \sum_{n=2}^{m} \frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{1-p} = \frac{(S_m)^{1-p} - (S_1)^{1-p}}{1-p}$$

从而, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 用反证法. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)=0$.

$$\frac{\ln S_n-\ln S_{n-1}}{S_n-S_{n-1}}=\frac{1}{\xi_n}\sim\frac{1}{S_n},\quad \exists\xi_n\in(S_{n-1},S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}\sim\ln S_n-\ln S_{n-1}$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln S_n-\ln S_{n-1})$ 收敛, 但是由于该级数的部分和序列无界, 矛盾.

因此, 当 $p\leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

例题 13.26 设 $a_n>0\,(n=1,2,\cdots)$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

设 $a_1>1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 的敛散性

解 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_k\ln S_k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_k\ln S_k}\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{S_k}^{S_{k+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=+\infty\end{aligned}$$

因为我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k\ln^2 S_k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k\ln^2 S_k}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{S_{k-1}}^{S_k}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}<+\infty\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 收敛.

例题 13.27 设 $a_n>0\,(n\in\mathbb{N}^+)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 且记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ 收敛.

解 取 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $\beta\triangleq\frac{1}{m}<\alpha$. 从而易知只需指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}}$ 收敛. 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\beta}}-\frac{1}{S_n^{\beta}}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{S_1^{\beta}}-\frac{1}{S_N^{\beta}}\right)=\frac{1}{S_1^{\beta}}.$$

所以只需指出

$$\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\beta}}-\frac{1}{S_n^{\beta}}\right),\quad 1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\leqslant\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{S_{n-1}^{\beta}}{S_n^{\beta}}\right).\tag{13.1}$$

为此, 令 $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\beta}=x$, 则 $\frac{S_{n-1}}{S_n}=x^m$, 从而式 (13.1) 化为

$$1-x^m\leqslant m(1-x)\quad(1<x\leqslant 1).$$

注意到 $1-x^m=(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})$, 式 (13.1) 成立.

例题 13.28 如果两个通项单调递减的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散, 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 是否可能收敛?

解 *(by 向禹)* 答案是肯定的，下面给出一个例子（by 逆逆）

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2^{2^k}}, b_n = \dfrac{1}{2^{2^k+1}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1, k = 2m \\ a_n = \dfrac{1}{2^{2^k+1}}, b_n = \dfrac{1}{2^{2^k}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1, k = 2m - 1 \end{cases}$$

那么 $n \geqslant 2$ 时上式都有意义，且显然

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}} - 2^{2^{2m-1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right) = \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}} - 2^{2^{2m-2}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right) = \infty$$

因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ 都发散，但 $\min\{a_n, b_n\} = \dfrac{1}{2^{2^k+1}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1$，因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k+1}}\left(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k+1}} 2^{2^k} = \frac{1}{2^k} < \infty$$

比较判别法

定理 13.2 (比较审敛法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例题 13.29 判断下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{\ln n}}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

证明 (1) 因为

$$\frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln 3}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

而 $\ln 3 > 1$, 故该级数收敛

(3) 因为

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln(\ln\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln\ln n)}} < \frac{1}{n^2}\ (n > e^{e^{e^2}})$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛

例题 13.30 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项发散级数. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ 的敛散性.

证明 [18] 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故数列 $\{a_n\}$ 可能有界也可能无界.

(1) 当 $\{a_n\}$ 有界时, 即 $\exists M > 0, \forall n, 0 \leqslant a_n \leqslant M$. 此时

$$\frac{a_n}{1 + a_n} \geqslant \frac{1}{1 + M} a_n$$

由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

(2) 当 $\{a_n\}$ 无界时, 必有子列 $a_{n_k} \to +\infty \ (k \to +\infty)$, 此时

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n_k}}+1} \to 1 \neq 0 \ (k \to +\infty)$$

于是由级数收敛的必要条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

例题 13.31 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}} \right)$ 也是收敛的

证明 因为

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1 = (n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = (n^2+5n+5)^2$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{n^2+5n+5}}{a_n^{n^2+5n+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{5-\frac{1}{n}}$$

注意到

$$a_n^{\frac{5n-1}{n}} = \left(\left(a_n^{5n-2} a_n^{\frac{1}{2}} \cdot a_n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5n}} \right)^5 \leqslant \left(\frac{(5n-2)a_n + 2\sqrt{a_n}}{5n} \right)^5$$

且

$$\frac{5n-2}{5n} a_n \leqslant a_n, \ \frac{2\sqrt{a_n}}{5n} \leqslant \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{1}{n^2} \right)$$

由比较判别法以及

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{5-\frac{1}{n}}$ 收敛, 故原级数收敛

例题 13.32 设 $a_n > 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

证明 (by ytdwdw)方法 1 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to +\infty$.

于是a_n 可由从小到大进行重排, 设 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant \cdots$. 而

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{(n+2)A_n} \leqslant \frac{2}{A_n}$$
$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}} \leqslant \frac{2n}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n}} \leqslant \frac{2n}{(n+1)A_n} \leqslant \frac{2}{A_n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{A_n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$$

方法 2 事实上可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$ 收敛. 而

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}.$$

记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n}kb_k}{n!}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kb_k}{n\sqrt[n]{n!}}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{kb_k}{n\sqrt[n]{n!}}$$

而由 Stirling 公式,

$$\sqrt{n!}=\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))\right]^{\frac{1}{n}}\sim\frac{n}{e},\quad n\to+\infty$$

所以有常数 $C>0$ 使得

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{k}{n\sqrt[n]{n!}}\leqslant C\sum_{n=k}^{\infty}\frac{k}{n^2}\leqslant 2C$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\leqslant 2C\sum_{k=1}^{\infty}b_k<+\infty$$

笔记 因为利用 $\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\leqslant\dfrac{b_1+\cdots+b_n}{n}$ 来证明行不通, 所以尝试用

$$\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}=\frac{\sqrt[n]{b_1\cdot 2b_2\cdots nb_n}}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{b_1+2b_2\cdots+nb_n}{n\sqrt[n]{n!}}$$

推论 13.1

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $k>0$, 使得当 n 充分大时, 有 $a_n\leqslant kb_n$, 则

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

例题 13.33 设 $a_n>0,b_n>0$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0.$$

证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

解 *(by 楚坛)* 由题设知, 存在 $\lambda>0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>\lambda$. 由极限保号性知, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使对 $n\geqslant N$, 都有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\lambda\Leftrightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\lambda a_{n+1}\Longrightarrow\frac{a_n}{b_n}>\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\tag{13.2}$$

上式表明 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geqslant N}$ 为单调递减数列, 注意到它以 0 为下界, 故收敛, 即正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收敛. (13.2)式表明, 对 $\forall n\geqslant N$,

$$a_{n+1}<\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

由比较判别法即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; 换言之极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

定理 13.3 (比较审敛法的极限形式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\ (0\leqslant l<+\infty)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
2. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l>0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

练习 13.1 (CMC, 2017) 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$

1. 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=C$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性

解 (1) 利用不等式: 当 $x>0$ 时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0$$

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right]\\&\geqslant1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right]=\frac{1}{n}>0\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

(2) 注意到

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln k)\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)\end{aligned}$$

显然, 以 a_n 为部分和的级数为 $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)\right)$, 则

该级数收敛于 C, 且 $a_n-C>0$, 用 r_n 记作该级数的余项, 则

$$a_n-C=-r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式, 当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$$

记 $b_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$, 下面证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。因为

$$
\begin{aligned}
c_n \triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)\\
< nb_n < n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-2)}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

而当 $n\to\infty$ 时, $c_n=\frac{n-2}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=\frac{1}{2}$.

根据比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

因此, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 发散。

13.2.1 极限判别法

定理 13.4 (极限判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=l>0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\infty$), 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(2) 如果 $p>1$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n=l\ (0\leqslant l<+\infty)$ 时, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

13.2.2 比值判别法

定理 13.5 (比值判别法, 达朗贝尔 (d'Alembert)[2]判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, 那么

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时, 敛散性不确定.

13.2.3 根值判别法

定理 13.6 (根值判别法, 柯西判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, 那么

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时, 敛散性不确定.

Cauchy 积分审敛法

定理 13.7 (Cauchy 积分审敛法[3])

设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty]$ 上的非负单调减的连续函数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散

例题 13.34 (美国,2012) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant \mathrm{e}, \\ xf(\log x), & x>\mathrm{e}, \end{cases}$$

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/f(n)$ 的敛散性.

解 令 $\mathrm{e}_1=\mathrm{e}, \mathrm{e}_k=\mathrm{e}^{\mathrm{e}_{k-1}}(k\geqslant 2)$. 由数学归纳法得

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant \mathrm{e}_1 \\ x\log x, & \mathrm{e}_1<x\leqslant \mathrm{e}_2 \\ x\log x\log(\log x), & \mathrm{e}_2<x\leqslant \mathrm{e}_3 \\ \cdots & \\ x\log x\log(\log x)\cdots\log^{(k)} x, & \mathrm{e}_k<x\leqslant \mathrm{e}_{k+1} \end{cases}$$

其中 $\log^{(k)}(x)$ 表示 $\log x$ 的 k 重复合. 记 $N_1=[\mathrm{e}_1]=2, N_2=[\mathrm{e}_2],\cdots,N_k=[\mathrm{e}_k]$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N_k}\frac{1}{f(n)}&\geqslant\int_1^{\mathrm{e}_k}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\\ &=\int_1^{\mathrm{e}_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\mathrm{e}_1}^{\mathrm{e}_2}\frac{\mathrm{d}x}{x\log x}+\cdots+\int_{\mathrm{e}_{k-1}}^{\mathrm{e}_k}\frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log(\log x)\cdots\log^{(k-1)}x}\\ &=\log x\Big|_1^{\mathrm{e}_1}+\log(\log x)\Big|_{\mathrm{e}_1}^{\mathrm{e}_2}+\cdots+\log^{(k)}x\Big|_{\mathrm{e}_{k-1}}^{\mathrm{e}_k}\\ &=(1-0)+(1-0)+\cdots+(1-0)=k\end{aligned}$$

因此级数发散.

其它判别法

命题 13.1 (Kummer 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 当 n 充分大时

(1) $b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\delta>0\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(2) $b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\leqslant 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 发散 $\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

证明 (1) 充分性. 不妨设 $b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\delta>0$ 对于 $n\geqslant 1$ 成立. 将它改写为

$$0<\delta a_{n+1}\leqslant b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}$$

可见正数数列 $\{b_n a_n\}$ 单调减少, 因此有估计

$$\sum_{n=1}^{n} a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n-1} b_k a_k - b_{k+1}a_{k+1} \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta}\cdot b_1 a_1$$

从而知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

必要性. 在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时记其余项为 $R_n, n \geqslant 1$. 令 $b_n = \frac{R_n}{a_n}$, 则就有

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

因此取 $\delta = 1$ 即可.

(2) 充分性. 由 $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0$ 可知

$$a_n b_n \leqslant a_{n+1} b_{n+1}$$

即 $\{a_n b_n\}$ 关于 n 单调递增, 从而 $a_n \geqslant \frac{a_1 b_1}{b_n}$, 因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

必要性. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 取 $b_n = \frac{S_n}{a_n}$, 其中 S_n 为级数的第 n 个部分和. 则

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0.$$

从 $\frac{1}{b_n} = \frac{a_n}{S_n}$, 和 Sapagof 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散.

13.3 任意项级数的收敛与发散的判别

非正项级数: 当 n 充分大时, 通项的正负号不定.

非正项级数敛散性判别的一般思路:

1. 莱布尼茨判别法: 交错级数
2. $A - D$ 判别法[a]: $a_n b_n$
3. 利用 Taylor 估阶
4. 级数收敛的定义
5. 柯西审敛原理
6. 无理测度, 如: 例1.36,

[a]阿贝尔判别法或者狄利克雷判别法

13.3.1 柯西审敛原理

定理 13.8 (柯西审敛原理)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为: 对于任意给定的正数 ε, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的正整数 p 都有

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

成立

例题 13.35 证明: 级数 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 发散于 $+\infty$

证明 考察

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{n} \end{aligned}$$

显然 $S_{3n}\to+\infty\ (n\to+\infty)$. 对 $\forall m\in\mathbb{N}^{+}, \exists n\in\mathbb{N}$, 使得 $m=3n+i\ \ (i=0,1,2,\cdots)$. 由级数的通项趋于 0, 故当 m, 适当大时, 有

$$S_m > S_{3n}-1$$

从而 $S_m\to+\infty\ (m\to\infty)$

例题 13.36 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$ 的敛散性

证明 当 n 是 3 的倍数时, 如果取 $p=3n$, 则必有

$$\begin{aligned} |S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right| \\ &> \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2} > \frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$, 不论 N 为任何正整数, 当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数, 且当 $p=3n$ 时, 就有

$$|S_{n+p}-S_n|>\varepsilon_0$$

根据柯西审敛原理知, 级数发散

例题 13.37 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛, 设 n_0 是某一自然数, 若当 $n>n_0$ 时, 有

$$x_n<x_{n+1}\ ,\quad x_n<\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n+1})\ ,\quad y_{n+1}\leqslant y_n .$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{x_{n+1}-x_n}=0$$

解 *(by 向禹) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛, 且 $y_{n+1}\leqslant y_n$. 由 Cauchy 收敛准则知对任意 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时,*

$$ny_{2n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}y_k<\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}ny_n=0$. 由题意有当 $n>n_0$ 时, 正项数列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 单调递增, 不妨设从第一项开始递增. 于是 $x_{n+1}-x_n>x_n-x_{n-1}>\cdots>x_2-x_1$, 那么

$$(n-1)(x_{n+1}-x_n)>\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=x_n-x_1 .$$

于是 $x_{n+1}-x_n>\frac{x_n-x_1}{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{x_{n+1}-x_n}=0$

例题 13.38 若 $a_n>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 发散, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. 证明: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

证明 (1) 利用柯西收敛准则

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0, \forall N\in\mathbb{N}^{+}$(固定), 取 $n'=N+1>N$. 于是有 $\{S_n\}\uparrow$ 趋向于 $+\infty$, 所以对固定的 N, 存在 $p'>N$

适当大, 可使 $\frac{S_{n+1}}{S_{N+1+p'}} < \frac{1}{2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n'+1}}{S_{n'+1}} + \frac{a_{n'+2}}{S_{n'+2}} + \cdots + \frac{a_{n'+p'}}{S_{n'+p'}} &\geqslant \frac{S_{n'+p'} - S_{n'}}{S_{n'+p'}} = 1 - \frac{S_{n'}}{S_{n'+p'}} \\ &= 1 - \frac{S_{N+1}}{S_{N+1+p'}} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散

(2) 因为 $S_n \leqslant S_{n+1}$, 所以

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right)$ 收敛于 $\frac{1}{a_1}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

例题 13.39 已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k+1)$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散

证明 根据柯西 (Cauchy) 收敛准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a_{2^n}}$ 收敛. 但是,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1) = \ln\big((n+1)!\big)$$

且当 n 足够大时, 有不等式

$$\ln\big((n+1)!\big) \leqslant \ln(n^n) = n \ln n$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a_{2^n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln\big((2^n+1)!\big)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln\left(2^n\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(2^n\right)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

故原级数发散.

例题 13.40 (Pringshcim) 设 a_n 是递减正数列, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. 当 $n > n_0$ 时, 有

$$0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

对于 $\forall p \in N$ 成立. 因为 $\{a_n\}$ 单调减, 故

$$p a_{n+p} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{4}$$

特别取 $p = n$ 就得

$$n a_{2n} < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$2n a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

$$(2n+1) a_{2n+1} < (2n+1) a_{2n} = 2n a_{2n} + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即当 $n > n_0$ 时, 成立

$$n a_n < \varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}na_n=0,\quad 即\quad a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

练习 13.2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 的敛散性

证明 对任意正整数 k,

$$\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}=\sum_{e^{4k}<n<e^{4k+\frac{1}{2}}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}>\frac{e^{4k+\frac{1}{2}}-e^{4k}-1}{\sqrt{2}e^{4k+\frac{1}{2}}}$$

从而

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}\geqslant\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{2e}}$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 发散

证明 取

$$m=\left[e^{4N}+1\right],n=\left[e^{4N+1}\right]$$

那么当 $x\in[m,n]$ 时, 函数 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}$ 递减, 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k}&\geqslant\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_m^n\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)\Big|_m^n\end{aligned}\tag{13.3}$$

注意到

$$\log n>\log\left(e^{4N+1}-1\right),\log m<\log\left(e^{4N}+1\right)$$

带入 (13.3) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k}&\geqslant\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N+1}-1\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N}+1\right)\right)\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\log\left(1-\frac{1}{e^{4N+1}}\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{1}{e^{4N}}\right)\right)\right]\\&\to\frac{2}{\pi},(N\to\infty)\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛原理可得原级数发散.

13.3.2 莱布尼茨判别法

例题 13.41 应用莱布尼茨判别法证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证明 (徐森林 543) 将级数按照相同符号归组, 不改变先后顺序得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=&-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\cdots-\frac{1}{15}\\&+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\right)
\end{aligned}
$$

级数变为交错级数, 其中 $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}>0$ 中有 $2n+1$ 项, 且

$$0<a_n<\frac{2n+1}{n^2}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}\to 0$$

$$
\begin{aligned}
a_n-a_{n+1}&=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\\
&\quad-\frac{1}{(n+1)^2+2n}-\left[\frac{1}{(n+1)^2+2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)}\right]\\
&=(2n+1)\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}\right]\\
&\quad-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}\\
&>\frac{(2n+1)^2}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}-\frac{2}{n^2+4n+1}=\frac{2n^2+1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}>0
\end{aligned}
$$

数列 $\{a_n\}$ 单调减趋向于 0. 由 Leibniz 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛

证明 (谢惠明 p25) 将级数中相邻的同号项合并，从而组成一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$
\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2+1}\\
&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]\\
&=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量，且至少当 n 充分大时单调减少

$$a_n-a_{n+1}=\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

表明原级数加括号后得到的级数收敛。由于括号中的项符号相同，所以可推知原级数收敛

注[18] 设 $\alpha>0, m$ 为正整数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^\alpha}$ 当 $\alpha+\frac{1}{m}>1$ 时收敛；当 $\alpha+\frac{1}{m}\leqslant 1$ 时发散。

例题 13.42 判断级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[n]}}$ 的敛散性, 其中 $[x]$ 表示 x 的取整.

解

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[n]}}&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{n}-(-1)^{[\sqrt{n}]}\right)}{n-1}\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1}
\end{aligned}
$$

由 *Leibniz* 判别法知, 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 收敛. 当 $k\leqslant\sqrt{n}\leqslant k+1$, 即 $k^2\leqslant n\leqslant(k+1)^2$ 时,

$[\sqrt{n}]=k$, 则

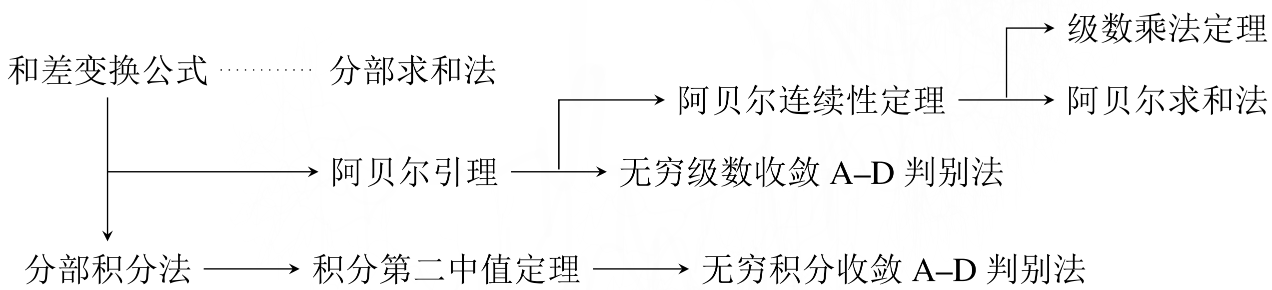
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1}&=-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{(-1)^{n+k}}{n-1}=-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{(-1)^n}{n-1}\\
&=-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}(-1)^{k^2}\left[\left(\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-1}\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+2}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-2}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-1}\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+2}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-2}\right)\right]\\
&\leqslant-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k^2-1}-\frac{k}{k^2+2k-2}\right)\\
&\leqslant-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+2}\right)=-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
a_n&=\left(\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-1}\right)-\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+2}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k-2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{k^2-1}-\frac{1}{k^2}\right)+\left(\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{k^2+2}\right)+\\
&\quad\cdots+\left(\frac{1}{k^2+2k-3}-\frac{1}{k^2+2k-2}\right)+\frac{1}{k^2+2k-1}\\
&\geqslant\frac{1}{k^2+2k-1}>0
\end{aligned}
$$

故 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1}$ 收敛, 从而级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[n]}}$ 亦收敛.

13.3.3 A-D 判别法



定理 13.9 (和差变换公式)

设 $m<n$. 则

$$
\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})
$$

证明 直接计算即可。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k &= \sum_{k=m}^{n}A_kb_k-\sum_{k=m}^{n}A_{k-1}b_k\\
&= \sum_{k=m}^{n}A_kb_k-\sum_{m-1}^{n-1}A_kb_{k+1}\\
&= (A_nb_n-A_{m-1}b_m)+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})
\end{aligned}
$$

例题 13.43 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,$\{d_n\}$ 单调地趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_na_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}d_nA_n=0$.

证明 不妨设 $d_n>0$, $d_n\downarrow 0$. 对任意正整数 n,p,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p}d_ka_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p}d_k(A_k-A_{k-1})\\
&= d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+2}^{n+p}d_kA_{k-1}\\
&= d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_{k+1}A_k\\
&= d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_k\\
&\geqslant d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_{n+1}\\
&= d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+(d_{n+1}-d_{n+p})A_{n+1}\\
&\geqslant d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+p}A_{n+1}.
\end{aligned}
$$

对任何固定的 n, 有 $\lim\limits_{p\to\infty}d_{n+p}A_{n+1}=0$. 在上式中令 $p\to\infty$, 得到

$$
\limsup_{m\to\infty}d_mA_m\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}d_ka_k.
$$

令 $n\to\infty$, 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_na_n$ 收敛, 得到 $\limsup\limits_{m\to\infty}d_mA_m\leqslant 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}d_nA_n=0$.

例题 13.44 (中科院,2016) 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足以下条件:

(a) $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(b) 存在正数 M, 对任意的正整数 n, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant M$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

解 记 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 由 *Abel* 变换有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i\right| &\xlongequal{Abel\text{ 变换}} \left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n-a_{m+1}B_m\right|\\
&\leqslant M\sum_{i=m+1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)\\
&= M\left|\sum_{i=m+1}^{n-1}a_i-a_{i+1}\right|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= M|a_{m+1}-a_n| + M(|a_n|+|a_{m+1}|)\\
&\leqslant 2M(|a_n|+|a_{m+1}|) \leqslant 4M|a_{m+1}| \to 0|
\end{aligned}
$$

由 *Cauchy* 收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例题 13.45 若序列 $\{na_n\}$ 单调, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

解 *(by 西西) 法 I.* 若序列 $\{na_n\}$ 单调递增, 则

$$
na_n \geqslant a_1 \Rightarrow a_n \geqslant \frac{a_1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.
$$

这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾, 故 $\{na_n\}$ 单调递减.

由 *Cauchy* 收敛准则知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, *s.t.* 当 $n > M > N$ 时 $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$

取 $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$, 当 n 充分大时, 则有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &> \sum_{k=m}^{n-1} ka_k \cdot \frac{1}{k} \geqslant na_n \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}\\
&\geqslant na_n \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = na_n \int_m^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x > na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

法 II. 引理 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, b_n 递减于, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_n = 0$

显然

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_n\right|\\
&\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} (a_k b_k)\frac{b_n}{b_k}\right|
\end{aligned}
$$

再利用 *Abel* 变换即可. 引理证毕.

依题意易知 na_n 递减趋于 0, 从而由引理可得

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot na_n = 0
$$

再由

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n\,, \quad \varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)
$$

即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

定理 13.10 (Abel 变换, 分部求和法)

记 $S_k = a_1 + \cdots + a_k, (k = 1, 2, \cdots)$, 则有

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n
$$

证明 设 $S_0 = 0$, 则 $a_k = S_k - S_{k-1}, k = 1, 2, \cdots$. 于是,

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_k b_{k+1}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_{k+1} + S_n b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n.$$

例题 13.46 设 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to s(n \to \infty)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s b_1 + (s_n - s) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s)(b_{k+1} - b_k)$$

证明 由分布求和知

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_{k+1} - b_k)$$

而

$$s(b_n - b_1) = s \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$$

两式相减即得结论。

例题 13.47 (CMC,2019) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) u_n = 0.$$

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛, 所以对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1}^{\infty} a_k u_k < \frac{\varepsilon}{2} \tag{13.4}$$

因为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列, 所以

$$0 < \frac{1}{u_{N_1}} \leqslant \frac{1}{u_{N_1+1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{u_n} \tag{13.5}$$

注意到当 $m < n$ 时, 有

$$\sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k,$$

令 $A_0 = 0, A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

下面证明: 对任意自然数 n, 如果 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0, \quad m \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant M$$

则有

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = b_1 M$$

事实上, $m \leqslant A_k \leqslant M$, $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, 即得到

$$m b_1 = m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) M = M b_1$$

利用 (13.5), 令 $b_1 = \dfrac{1}{u_n}, b_2 = \dfrac{1}{u_{n-1}}, \cdots$, 可以得到 $-\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1} < \sum\limits_{k=N_1}^{n} a_k < \dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}$, 即

$$\left|\sum_{k=N_1}^{n} a_k u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 知, 存在自然数 N_2, 使得 $n > N_2$

$$\left|(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-1})u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left|(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n = 0$.

例题 13.48 证明: 对任意 n, x 成立不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right| < 2\sqrt{\pi}$

解[4] 显然本题只需要考虑 $x \in (0, \pi)$ 即可, 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

由和差化积公式得

$$|S_n| = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cos(k+\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x\right)\right|}{2\sin\frac{x}{2}} =\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} < \frac{\pi}{x}$$

再由 *Abel* 变换得

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| &= \left|\frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{S_n}{n}\right| + \frac{\pi}{x}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left|\frac{S_n}{n}\right| + \frac{\pi}{x}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{x}
\end{aligned}$$

对 $\forall a > 0$ 有

1. 当 $nx \leqslant a$ 时, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right| \leqslant nx \leqslant a$.
2. 当 $nx > a$ 时, 则 $\exists m \in \mathbb{N}^+$, *s.t.* $mx \leqslant a$, $(m+1)x > a$, 从而

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\sin kx}{k}\right| \\
&\leqslant a + \frac{\pi}{(m+1)x} < a + \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

令 $a = \sqrt{\pi}$ 即知原不等式成立.

例题 13.49 (AMM,12004) 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个严格单增实数列满足对所有 $n \geqslant 1$ 都成立, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{n+1} - a_n}$ 发散.

证明 [92] (by 向禹) 若 $\{a_n\}$ 有界, 结论显然成立; 若 $\{a_n\}$ 无界, 则 $\{a_n\}$ 严格单增趋向于 $+\infty$. 对任意 $A > 0$, 由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right)\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{a_{n+1} - a_n}{n^2\ln^2 n}\right) \geqslant \left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{n\ln n}\right)^2 \sim \left(\int_{\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\right)^2 \sim \ln^2 2$$

[4] https://www.academia.edu/9253299/Titu_Andreescu_Zuming_Feng_103_Trigonometry_Pro_Book_See_org

另一方面, 记 $M=\lfloor e^{A/2}\rfloor, N=\lceil e^{A}\rceil$, 利用 Abel 分部求和公式

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_M)\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}-\frac{1}{(n+1)^2\ln^2(n+1)}\right)\\
&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}\frac{(a_{n+1}-a_M)[(n+1)^2\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}\\
&\leqslant\frac{a_{N+1}}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{n\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}a_{n+1}\\
&\leqslant\frac{(N+1)^2\ln(N+1)}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\\
&=\frac{2}{\ln N}+C\int_M^N\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{2}{\ln\lceil e^A\rceil}+C\ln\frac{\lceil e^A\rceil}{\lfloor e^{A/2}\rfloor}<C\ln 2+1
\end{aligned}$$

其中 $C>0$, 因此,

$$\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\geqslant\frac{\ln^2 2}{C\ln 2+1}$$

对任意充分大的 A 都成立, 因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散. 证毕

定理 13.11 (阿贝尔引理)

若对一切 $n=1,2,3,\cdots$ 而言 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0$, $m\leqslant a_1+a_2+\cdot+a_n\leqslant M$ 则有

$$b_1 m\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1M$$

证明 设 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,(k=1,2,\cdots,n)$. 由于 $b_k\geqslant 0, b_k-b_{k+1}\geqslant 0$ 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})\leqslant b_nM+M\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=b_1M$$

左边不等式证明类似

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})\geqslant b_nm+m\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=b_1m$$

定理 13.12 (Dirichlet 判别法)

设

1. $\{b_n\}$ 单调趋于 0
2. $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $|S_k|\leqslant M, k=1,2,\cdots$, 即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

例题 13.50 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 的敛散性

证明 因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列, 而且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ 是部分和有界的.

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \geqslant \frac{\cos^2 n}{n}=\frac{\cos(2n)}{2n}+\frac{1}{2n}$$

易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ 发散. 综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛

例题 13.51 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$ 的敛散性

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\sin n\sin n^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\cos(k(k-1))-\cos(k(k+1))\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(n(n+1))\right]$$

故部分和 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin n\sin n^2\right| \leqslant 2$, 且 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$ 收敛

例题 13.52 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\sqrt{n})}{n}$ 的敛散性

解 注意到, 当 $\sin^2(\sqrt{n}) \geqslant \frac{1}{4}$ 时, 即当 $|\sin\sqrt{n}| \geqslant \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\frac{\pi}{6}+k\pi \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{5\pi}{6}+k\pi \iff \left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)^2 \leqslant n \leqslant \left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)^2$$

对固定的 k

$$\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)^2-\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)^2=\frac{2\pi^2}{3}+\frac{4\pi^2}{3}k>6+13k$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\sqrt{n})}{n}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6+13k}{4}\frac{1}{\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)^2}$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\sqrt{n})}{n}$ 发散.

定理 13.13 (Abel 判别法)

设

1. $\{b_n\}$ 单调有界
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

13.4 条件收敛与绝对收敛

例题 13.53 证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛.

证明 法 I. 由泰勒公式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+o(x)$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&\xlongequal{\text{Taylor}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}+\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

它是三个收敛级数的和, 从而该级数收敛. 又因

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\text{发散}$$

综上, 原级数条件收敛

法 II. 因为

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|\text{发散}$$

另一方面

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

前 $2n$ 项和 S_{2n}

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1+(-1)^{2n+1}}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\end{aligned}$$

且

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}<S_{2n}\quad S_{2n}\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调下降而且有下界, 从而 $\{S_{2n}\}$ 有极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在, 并记为 S.

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)=S$$

从而 $\{S_n\}$ 极限存在, 且为 S, 因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 收敛.

综上, 原级数条件收敛

例题 13.54 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $f(0)=1$, $f''(0)=2$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛

证明 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数,

$$(f(-x))'=-f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(0)=0$$

将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开成二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=1+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1),$$

代入 $x=1/n$, 得

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}$$

由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f''\left(\dfrac{\theta}{n}\right)=f''(0)=2$, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 不妨取 $\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)-2\right|<\varepsilon=1\Longrightarrow\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|<3$$

从而

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}<\frac{3}{2n^2},$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故由比较判别法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 亦绝对收敛

例题 13.55 设 $a_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. 其中 p 为正的常数. 证明: 当 $p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

证明 由于 $\sin(\pi x)=(-1)^n\sin\pi(x-n)$ 在 $(n,n+1)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变. 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数. 注意到

$$|a_n|=\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\frac{\sin\pi(x+n)}{(x+n)^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\,\mathrm{d}x$$

于是

$$|a_{n+1}|=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n+1)^p+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\,\mathrm{d}x=|a_n|$$

由于

$$|a_n|=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^p}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$$

由莱布尼茨判别法, 当 $p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

$$\begin{aligned}
|a_n|&=\left|\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\\
&\geqslant\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{1}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\frac{1}{(n+1)^p}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3(n+1)^p}\geqslant\frac{1}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 条件收敛.

例题 13.56 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性

证明 由于 $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变. 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数. 注意到

$$|a_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\xlongequal{t=x-n\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t$$

$$|a_{n+1}|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t=|a_n|$$

且 $|a_n|=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t<\frac{1}{n\pi}\to 0\ (n\to\infty)$, 由莱布尼茨判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又因为

$$|a_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$> \int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x > \int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi} \frac{\frac{1}{2}}{x}\,\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi} \frac{1}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3(n+1)}$$

因此, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散. 综上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

定理 13.14 (条件收敛级数的特性, Riemann)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当交换各项的次序可使其收敛到任一事先指定的实数; 也可以使其发散 (发散到 $+\infty$, 或发散到 $-\infty$, 或部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 无极限).

例题 13.57 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 的和

证明 易得

$$\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2} = -\frac{8}{2n+1} + \frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1} - \frac{8}{2n+1}\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -8\ln 2$$

或者注意到

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)$$

以及 $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1} - \frac{8}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 4\psi\left(\frac{1}{2}\right) - 4\psi(1) = -8\ln 2$$

由傅里叶级数易得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2} = -8\ln 2 + \frac{2\pi^2}{3}$$

笔记 *(by 向禹) 本题的易错点 — 条件收敛级数的重排*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1} - \frac{8}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (4x^n - 8x^{2n})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(4x^n - 8x^{2n})\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\left(\frac{4}{1-x} - \frac{8}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = -4\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -4\ln 2 \times ??$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (x^{2n+1} - x^{2n})\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1} - x^{2n})\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{1-x^2} = -\ln 2 \times ??$$

上面的解答为什么是错误的呢??? 这个问题涉及到条件收敛级数的重排问题, 这么直接交换求和与积分次序的时候，实际上改变了无穷项的求和次序，条件收敛的级数重排后结果会发生变化的.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$ 如果写成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (x^{2n+1}-x^{2n})\,\mathrm{d}x$ 再交换次序, 就把本来在 $2n+2$ 位置的数调到了 $n+1$ 的位置上, 这样和就变了

13.5 数项级数的进一步讨论

定义 13.2 (级数的一致收敛)

一列收敛级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$ 关于 i 一致收敛是指, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\right| < \varepsilon, \quad \forall i \geqslant 1.$$

♣

定理 13.15

设一列级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$ 关于 i 一致收敛, 如果 $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = a_j\ (j \geqslant 1)$, 则极限 $\lim\limits_{i\to\infty} A_i$ 存在, 级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \text{或改写为} \quad \lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty} a_{ij}.$$

注: 这个结果给出了求极限与求和这两个运算可交换次序的一个充分条件.

♡

推论 13.2 (级数和的控制收敛定理)

设 $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = a_j\ (j \geqslant 1)$, $|a_{ij}| \leqslant b_j\ (i \geqslant 1)$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty} a_{ij} = \lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

♡

推论 13.3

设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leqslant A_j\ (j \geqslant 1)$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ 收敛, 则对任意 $i \geqslant 1$, 级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

注：此结论给出了两个无穷求和运算可交换次序的一个充分条件.

♡

例题 13.58 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{j!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{i}{j!}}$

解 (by 西西)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{j!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{i}{j!}}\xlongequal{\text{换序}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum\limits_{i=0}^{j-1}1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum\limits_{i=0}^{j-1}i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{j(j-1)}{2j!}}=\frac{e}{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{1}{(j-2)!}}=2$$

例题 13.59 求级数: $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!}$

解 (by 西西) 利用公式 $C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m}=C_n^m$, 可得

$$\sum_{j=k}^{i-1}C_j^k=C_k^k+C_{k+1}^k+\cdots+C_{j-1}^k$$

$$=C_{k+1}^{k+1}+C_{k+1}^k+\cdots+C_{j-1}^k=\cdots=C_j^{k+1}$$

因此,

$$\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!}=\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{i=k}^{j-1}C_i^k=\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!}C_j^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j-k-1}=\frac{e}{(k+1)!}$$

例题 13.60 定义数吧常数 $w=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2^n-1)}$, 计算 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2^k})$.

解 事实上,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{nk}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nk}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2^n-1)}=-w,$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2^k})=e^{-w}.$$

下面证明级数可以交换次序. 由于

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{kn}}\right|=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n2^{kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2^n}\right)^k\leqslant\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{n\,(2^n-1)},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(2^n-1)}$ 收敛. 由 *Fubini* 定理可知级数可交换顺序.

第十四章 函数项级数与幂级数

问题 14.1 为什么要引入一致收敛这个概念?

解 一致收敛的好处在于“过渡”，这里的过渡指的是单独的函数的分析性质 (连续, 可导, 积分) 向和函数的分析性质的过渡.

1. 可以解释：和号与极限号可交换？和号与积分号可交换？求导与和号可交换？
2. 和函数的连续, 可导, 积分的性质都要有一个前提的条件：一致收敛
3. 有限个 (连续, 可导, 可积分) 函数的和也是 (连续, 可导, 可积分) 的

14.0.1 函数列的一致连续性

例题 14.1 (华师大, 2017) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 对任意的 $x>0$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$. 证明: $\{f(x+n)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

解 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 严格单调递增正整数列 $\{n_k\}$ 和数列 $\{x_k\}$ 使得 $|f(x_k+n_k)|\geqslant\varepsilon_0$. $\{x_k\}$ 有收敛的子列, 不妨仍然记为 $\{x_k\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=y$, 则

$$|f(x_k+n_k)|\leqslant|f(x_k+n_k)-f(y+n_k)|+|f(y+n_k)|,$$

$|(x_k+n_k)-(y+n_k)|=|x_k-y|\to 0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 故

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_k+n_k)-f(y+n_k)|=0,$$

对任意的 $x>0$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$, 故

$$\lim_{k\to\infty} f(y+n_k)=0,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_k+n_k)|=0$, 这与 $|f(x_k+n_k)|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾!

定理 14.1 (最值判别法)

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上点一致收敛于 $f(x)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=u(x), x\in I$. 令 $M_n=\sup\limits_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}(n=1,2,\cdots)$, 则 $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=0$

例题 14.2 试判断下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2},\ (-\infty,+\infty)$$

解 首先, 看点收敛, 易知有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+nx^2}=0, x\in(-\infty,+\infty).$$

其次, 计算 M_n. 由等式

$$M_n=\sup_{(-\infty,+\infty)}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup_{(-\infty,+\infty)}\left\{\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|\right\}$$

注意到函数 $\left|\dfrac{x}{1+nx^2}\right|$ 在 $x\to+\infty$ 或 $-\infty$ 时趋向于 0, 可知其上确界就是函数在正半轴上的最大值. 用导数求极值法,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

易得, 在 $x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 处达到最大值, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$. 这说明 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 0.

定理 14.2 (狄尼 (Dini) 定理)

1. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调,
2. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$,
3. 每个 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续,

则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

14.1 函数项级数的一致收敛

定义 14.1 (函数项级数的一致收敛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数项级数, $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为其部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 就称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上**一致收敛**于 $S(x)$. 并记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

- 用 $\varepsilon - N$ 语言表达为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{n} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

定理 14.3 (函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则)

以下结论等价:

(1) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $m > n > N$ 时, 有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in I$;

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, \exists p \in \mathbb{N}.$$

例题 14.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 中的收敛性质.

解 法 1. 取 $x_n = \frac{\pi}{4n}$, 则

$$\begin{aligned}|S_{2k}(x_n) - S_k(x_n)| &= \left|\frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{4n}]}{n+1} + \cdots + \frac{\sin[(2n)\frac{\pi}{4n}]}{2n}\right| \\ &\geqslant n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的.

法 2. 取 $x_n = \frac{1}{2n}$, 则,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{x=\frac{1}{2n}} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin(\frac{k}{2n})}{k} \geqslant \sin\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \to \sin\frac{1}{2} \ln 2 \quad (n \to \infty)$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 不一致收敛.

定理 14.4 (M 判别法, Weierstrass 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 在区间 I 上满足

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \ (x \in I, n = 1, 2, \cdots)$$

且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛

例题 14.4 证明级数

$$\frac{\sin x}{n^2} + \frac{\sin 2^2 x}{n^2} + \cdots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \cdots$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

解 因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由 *Weierstrass* 判别法, 所给级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

例题 14.5 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 内一致收敛.

解 由于当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \cdots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2 x^2}{2}$$

故 $\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| < \frac{2}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法, 原级数在 $[0, +\infty)$ 内一致收敛.

例题 14.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}$ 在 $(-10, 10)$ 内一致收敛.

解 由于 $\forall x \in (-10, 10)$,

$$\left|\frac{e^{-nx}}{n!}\right| < \frac{(e^{10})^n}{n!}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛, 故由 *Weierstrass* 判别法, 原级数在 $(-10, 10)$ 内一致收敛.

定理 14.5 (Dirichlet 判别法)

如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 满足:

(1) $\{b_n(x)\}$ 对于每个固定的 $x \in I \in \mathbb{R}$ 关于 n 都是单调的, 且在 I 上一致收敛于 0;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M, \quad \forall x \in I,\ n = 1, 2, \cdots$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

例题 14.7 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

解 令 $u_n(x) = \dfrac{n}{n^2+x^2}$. 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = \frac{n}{n^2+x^2} - \frac{n+1}{(n+1)^2+x^2} = \frac{n^2+n-x^2}{(n^2+x^2)[(n+1)^2+x^2]}.$$

当 n 足够大时, $u_n(x) - u_{n+1}(x) > 0$, $\{u_n(x)\}$ 单调减且

$$u_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2} < \frac{1}{n} \to 0$$

它一致地趋于 0. 而 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$ 一致有界, 由 Dirichlet 判别法得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(x)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

定理 14.6 (Abel 判别法)

如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足:

(1) $\{b_n(x)\}$ 对于每个固定的 $x \in I \in \mathbb{R}$ 都是单调的, 并且在 I 上一致有界, 即

$$\left|b_n(x)\right| \leqslant B, \quad \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N};$$

(2) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 14.8 研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛性.

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$$

令 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当然在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

记 $b_n = \dfrac{nx^2}{(1+x^2)^n}$, 则对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n(1+x^2)}{n+1} = \frac{1+x^2}{1+\frac{1}{n}}.$$

当 $n > \dfrac{1}{x^2}$ 时, $\{b_n(x)\}$ 单调减, 且 $|b_n(x)| = \left|\dfrac{nx^2}{1+nx^2+\cdots}\right| \leqslant 1$, 故一致有界.

由 Abel 判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中一致收敛

例题 14.9 设 $b > 0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 均为常数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0, b]$ 上一致收敛.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛蕴含着它在 $\forall x \in [0, b]$ 上一致收敛.

$$b_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left(\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\Big|_0^x + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} + b_{n+1}(x) > b_{n+1}(x),$$

$\{b_n(x)\}$ 单调减, 且对 $\forall x \in [0,b], t^n e^{-t} > 0$, 故

$$b_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$$

即 $\{b_n(x)\}$ 在 $[0,b]$ 上一致有界.

根据 *Abel* 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

定理 14.7 (狄尼 (Dini) 定理)

1. $\forall x \in [a,b]$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$, 且 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,
3. $\forall x \in [a,b]$, $\{u_n(x)\}$ 同号,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

例题 14.10 设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$, 计算 $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$

解 在含 1 的区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数项级数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 根据 *Weierstrass* 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, $S(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

14.2 求和与求导、积分的可交换性

定理 14.8 (极限与积分可交换)

(梅加强, P318) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 f 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(*Lebesgue* 控制收敛) 设有限可测集 E 上的可测函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$$

其中 $M > 0$ 为常数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 几乎处处成立, 那么 $f(x)$ 也是 *Lebesgue* 可积的, 且可以在积分号下求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 14.9 (和号与极限号可交换)

设 $u_n(x)$ 在集合 $I \subset \mathbb{R}$ 上有定义, 若 $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = c_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 又函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} u_n(x),$$

其中 a 可为 $a^+, a^-, +\infty, -\infty, \infty$

证明 先证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 根据函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛准则, $\exists n \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{6},\ \forall p \in \mathbb{N};$$

令 $p \to +\infty$ 得到 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$. 由 $x \to a$ 得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

再由数项级数的 Cauchy 收敛原理, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

对上述的 $\varepsilon > 0$ 及 $N \in \mathbb{N}, n > N$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| = \lim_{p\to+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

设 $a \in \mathbb{R}$, 因为 $\lim\limits_{x\to a} u_k(x) = c_n$, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{N+1} u_k(x) - \sum_{k=1}^{N+1} c_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} u_n(x)\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=1}^{N+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} c_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N+1} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| \\
&= \left|\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n(x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{N+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} c_n\right| + \left|\sum_{n=N+2}^{\infty} c_n\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{n\to 1}\lim\limits_{x\to 1} u_n(x)$.

例题 14.11 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{\pi^2}{12}$

解 对 $\forall x \in (0,1) = E$, 有

$$u_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})}$$
$$\leqslant \frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^n)} \leqslant \frac{x^n}{n \cdot nx^n} = \frac{1}{n^2}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 *Weierstrass* 定理得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$ 在 $E=(0,1)$ 上一致收敛. 又

$$\lim_{x\to 1} u_n(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \lim_{x\to 1}\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})} = \frac{1}{2n^2} = c_n,$$

因此,

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

例题 14.12 (AMM) 求 $\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\int_0^x \frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}dy$.

解 令 $f(x,y) = \frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}$. 对 $x>0$, 我们有

$$\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\cos(1-t)x-\cos x}{y}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1\frac{1}{t}\int_{1-t}^1 \sin ux\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

因而对 $R>0$,

$$\int_0^R\frac{1}{x}\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^R\int_0^1\frac{1}{t}\int_{1-t}^1 \sin ux\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

而 $|\sin ux| \leqslant 1$, 该三重积分是绝对收敛的. 由 *Fubini* 定理可知积分能交换次序

$$\begin{aligned}\int_0^R\frac{1}{x}\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_{1-t}^1\frac{1}{t}\int_0^R \sin ux\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{1-\cos Ru}{u}\int_{1-u}^1\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\ &= -\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}\cos Ru\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

我们知 $|\ln(1-u)/u| \in L^1([0,1])$, 由 *Riemann-Lebesgue* 引理可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}\cos Ru\,du = 0.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$ 一致收敛, 故可逐项积分. 因此我们有

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{1}{x}\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

例题 14.13

证明: (1) 函数列 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x;

(2) 函数列 $\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\frac{1}{1+e^x}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1+\ln\frac{2}{1+e}$

解

(1) 法 *1*. $\forall x\in[0,1]$, $g_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 非负连续, 且 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^x$ 收敛, 根据 *Dini* 定理, $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x

法 2. 令 $u_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-e^x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}-e^x<0,$$

故 $\{u_n(x)\}$ 关于 $x\in[0,1]$ 单调减, 因而

$$0\geqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x=u_n(x)\geqslant u_n(1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\to 0$$

故在 $[0,1]$ 上, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\rightrightarrows e^x$

(2) 对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}=\frac{1}{1+e^x}.$$

而即在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $1, e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n>1$, 所以

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\frac{1}{1+e^x}\right|&=\frac{\left|1+e^x-e^{\frac{x}{n}}-(1+\frac{x}{n})^n\right|}{(1+e^x)\left(e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n\right)}\\&<\left|e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|+\left|e^{\frac{x}{n}}-1\right|\leqslant e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n+e^{\frac{1}{n}}-1\\&\rightrightarrows 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\dfrac{1}{1+e^x}$.

(3) 由于 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 (2) 的结论知可在积分号下求极限, 故有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}&=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x=\Big[1-\ln(1+e^x)\Big]_0^1\\&=1+\ln\frac{2}{1+e}\end{aligned}$$

例题 14.14 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3nx^2}{1+n^3x^3}$

解 (by ytdwdw) 对于 $n\geqslant 1, y>0, t\in[n-1,n]$ 成立

$$\left|\frac{ny}{n^3+y^3}-\frac{ty}{t^3+y^3}\right|=\left|\int_t^n\frac{y(y^3-2s^3)}{(s^3+y^3)^2}\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{2y}{t^3+y^3}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny}{nt^3+y^3}-\int_0^{+\infty}\frac{ty}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^n\left|\frac{ny}{nt^3+y^3}-\frac{ty}{t^3+y^3}\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{2y}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^2}{1+n^3x^3}&=\lim_{y\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3ny}{n^3+n^3y^3}\\&\geqslant\lim_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{3ty}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 s^{-\frac{1}{3}}(1-s)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}s=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\end{aligned}$$

定理 14.10 (积分号与和号可交换)

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积 (连续), 则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积 (连续), 且

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

♡

定理 14.11 (求导与和号可交换)

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足:

1. $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, $n \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 (于 $g(x)$);
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛

则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛、连续可导, 且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

♡

14.3 幂级数的收敛半径与性质

命题 14.1 (Abel 第二定理)

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 必于其收敛域中内闭一致收敛.

♠

注 和函数中无定义的点需要讨论, 单独表示

例题 14.15 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' \\ &= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例题 14.16 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ 的和函数

证明 法 I.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(x^n)'$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right)' \\
&= x\left(x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'\right)' \\
&= x\left(\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}\right) \qquad x\in(-1,1)
\end{aligned}
$$

法 II.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'' + x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' \\
&= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' \\
&= x^2\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'
\end{aligned}
$$

例题 14.17 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n$ 的和函数

证明 易得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}
$$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}$ 注意到 $S(0)=0$

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \qquad x\in[-1,1)
$$

例题 14.18 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

解 注意到

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x} = \begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & |x|>1, \\ \dfrac{x}{x-1}, & |x|<1.\end{cases}
\end{aligned}
$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x-1)^2}, & |x|>1,\\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2}, & |x|<1.\end{cases}$$

例题 14.19 (谢惠民, P62) 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数

证明 用 Wallis 公式容易确定收敛域为 $[-1,1)$。设和函数为 $S(x)$, 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导，得到

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x)\end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x)$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$[\sqrt{1-x}S(x)]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)\right]\equiv 0$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数，再利用 $S(0)=1$，就得到

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad -1<x<1 \tag{14.1}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续，而上式右边的表达式也是如此，因此 (14.1) 对 $x=-1$ 也成立

例题 14.20 级数 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 ________.

解 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

故

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3=\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=x^3(1-x)^{-3}$$

我们知道

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, x\in(-1,1)$$

故 $(1-x)^{-3}$ 中 x^{17} 的系数为

$$(-1)^{17}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-17+1)}{17!}=171$$

于是我们就得到 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 171

例题 14.21 已知 u_n 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数), 且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解 先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right)$$

由条件 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$, 得 $c=0$, 故 $u_n(x)=\dfrac{x^n e^x}{n}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

故

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

当 $x=-1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$

于是，当 $-1\leqslant x<1$ 时，有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$

例题 14.22 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x>0$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

解 首先,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\\=&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)}-\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]\\=&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right].\end{aligned}$$

当 n 足够大时,

$$1+\frac{x}{a_{n+1}}\sim e^{x/a_{n+1}}.$$

因此 $\left(1+\dfrac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{x}{a_{n+1}}\right)$ 与 $\exp\left\{x\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\right\}$ 具有相同的收敛性, 均发散, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{(1+\frac{x}{a_2})\cdots(1+\frac{x}{a_{n+1}})}=0.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1a_2}{x(a_2+x)}=\frac{a_1}{x}.$$

例题 14.23 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos^3(3^nx)$ 的和函数.

解 *(by 欧阳珈樱* [93]*)* 易知该级数的定义域为 $x\in\mathbb{R}$, 利用 *Demoivre* 公式易得

$$\cos^3x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\Rightarrow\cos^3(3^nx)=\frac{3}{4}\cos(3^nx)+\frac{1}{4}\cos(3^{n+1}x)$$

从而,

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}\cos(3^nx)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos(3^{n+1}x)\right)\\&=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}\cos(3^nx)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos(3^{n+1}x)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{3\cos x}{4}$$

定理 14.12 (Tauber)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = A \in \mathbb{R}$. 如果 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 那么 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot 1^n = A$.

证明 由假设 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 令 $\delta_n = \sup_{k\geqslant n}\{|ka_n|\}$, 则 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n - A &= \sum_{n=0}^{N} a_n - S(x) + S(x) - A \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + S(x) - A \\ &= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\end{aligned}$$

当 $x \in [0,1)$,

$$|I_1(x)| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$I_2(x) \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |na_n|\frac{1}{n}x^n \leqslant \frac{\delta_n}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leqslant \frac{\delta_n}{N(1-x)}$$

$|I_3(x)| = |S(x) - A|$. $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得 $\sqrt{\delta_N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3(1+\delta_1)}$. 取 $x_N = 1 - \frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$

$$I_1(x_N) \leqslant (1-x_N)N\delta_1 = \delta_1\sqrt{\delta_N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$$I_2(x_N) \leqslant (1-x_N)N\delta_1 = \frac{\delta_N}{N(1-x_N)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{\sqrt{\delta_N}}{N}\right) = 1$$

从而存在 N_0, 当 $N > N_0$, $|I_3(x_N)| = |S(x_N) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| = \left|I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$

14.4 函数展开成幂级数

例题 14.24 将 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数

证明

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\;,\quad x\in(-1,1)$$

例题 14.25 (数学 III,2018) 已知 $\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 求 $\{a_n\}$

解 *(by 向禹)* 首先 $\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{1+x}\right)'=\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}$. 而

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}\;,\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

求导得

$$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

比较系数可得

$$a_n=\begin{cases}2k+2, & n=2k+1\\ \dfrac{(-4)^k}{(2k)!}-(2k+1), & n=2k\end{cases}\qquad(k\in\mathbb{N})$$

14.4.1 级数的乘法

定理 14.13 (柯西乘积)

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径各为 R_a , R_b 则对 $|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$ 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n$$

♡

例题 14.26 证明: $f(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 的幂级数展开式为

$$f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

证明 已知 $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 在 $[-1,1)$ 上收敛, 在 $(-1,1)$ 的任何区域内闭区间上绝对收敛, 因此应用级数乘法.

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}&=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)\\&\xlongequal{\text{柯西乘积}}x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}1^k\times\frac{1}{n+1-k}x^n\\&=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\end{aligned}$$

例题 14.27 求 $\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开式

证明 注意到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad(|x|<1)$$

是绝对收敛的级数. 由于两个绝对收敛的级数可以任意相乘, 记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, 则有

$$\ln^2(1+x) = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

其中

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right\} = \frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\ln^2(1+x) &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right\}x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}x^{n+1}, \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

例题 14.28 求 $f(x) = (\arctan x)^2$ 的幂级数展开式.

证明 易得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1$$

由于两个绝对收敛的级数可以任意相乘, 记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, 则有

$$(\arctan x)^2 = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}\right)^2 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{2n}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k+1)+(2k+1)}{(2k+1)(2n-2k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2n-2k+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
(\arctan x)^2 &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+2}, \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

例题 14.29 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \ln^2 2$$

解 注意到 $H_n = H_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \int_0^1 (1+x+\cdots+x^n)dx = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}dx \\
&\xlongequal{t=1-x} \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{n+1}}{t}dt \\
&= [1-(1-t)^{n+1}]\ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-t)^n \ln t\,dt \\
&= -(n+1)\int_0^1 (1-t)^n \ln t\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_0^1 (t-1)^n \ln t\,dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{t-1}{2-t}\ln t\,dt = -2\int_0^1 \ln t\,dt + 2\int_0^1 \frac{1}{2-t}\ln t\,dt \\
&\xlongequal{x=1-t} 2+2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \\
&\xlongequal{x=\frac{1-z}{1+z}} 2+2\int_0^1 \frac{1}{1+z}\cdot\ln\left(\frac{2z}{1+z}\right)dz \\
&= 2+\ln^2 2 - 2\int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z}dz \\
&= 2+\ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

于是

$$I = 2+\ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \ln^2 2$$

例题 14.30 (Ramanujan) 解方程组

$$\begin{cases}
x_1 + x_2 = 8, \\
x_1y_1 + x_2y_2 = -11, \\
x_1y_1^2 + x_2y_2^2 = 17, \\
x_1y_2^3 + x_2y_2^3 = -29.
\end{cases}$$

解 设

$$f(t) = \frac{x_1}{1-ty_1} + \frac{x_2}{1-ty_2}$$

其中 t 为参数, 那么

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(x_1y_1^n + x_2y_2^n)t^n = 8 - 11t + 17t^2 - 29t^3 + \cdots$$

另一方面, $f(t)$ 可以表示为 $\dfrac{A_0 + A_1t}{1+B_1t+B_2t^2}$ 的形式. 由

$$\frac{A_0 + A_1t}{1+B_1t+B_2t^2} = 8 - 11t + 17t^2 - 29t^3 + \cdots$$

可知, $A_0 = 8, A_1 = 8B_1 - 11, -11B_1 + 8B_2 = -17, 17B_1 - 11B_2 = 29$, 解得

$$A_0 = 8,\ A_1 = 13,\ B_1 = 3,\ B_2 = 2,$$

因而

$$f(t)=\frac{8+13t}{1+3t+2t^2}=\frac{5}{1+t}+\frac{3}{1+2t},$$

故原方程的解为

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)=(5,3,-1,-2)\quad 或 \quad (x_1,x_2,y_1,y_2)=(3,5,-2,-1).$$

14.4.2 欧拉数与伯努利数

定义 14.2 (欧拉数 E_n)

定义: 由级数 $\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1}=\sum\limits_{n\geqslant 0}E_n\dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 E_n 称为欧拉数. ♣

表 14.1: 常用的几个欧拉数

n	0	1	2	4	6	8	10	$\cdots$
E_n	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	$\cdots$

例题 14.31 计算 $\sec x$ 的 Maclaurin 展开式

解 由于 $\sec x$ 是偶函数，可以假定有

$$\sec x=c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots+c_{2n}x^{2n}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0)$$

现在令

$$c_{2n}=(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!},\ n\in\mathbb{N}_+,$$

写出

$$\sec x=E_0-\frac{E_2}{2!}x^2+\frac{E_4}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0) \tag{14.2}$$

并将公式 (14.2) 和 $\cos x$ 的 *Maclaurin* 展开式一起代入恒等式 $\cos x\sec x=1$ 中，就可以得到确定数列 $\{E_{2n}\}$ 的递推公式

$$E_0=1,\ E_2+E_0=1,\ E_4+\frac{4!}{2!2!}E_2+E_0=0,$$

$$\vdots$$

$$E_{2n}+\binom{2n}{2}E_{2n-2}+\binom{2n}{4}E_{2n-4}+\cdots+E_0=0$$

从而可以得出

$$E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

例如，这样就可以写出直到前 *6* 项系数的公式

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\frac{50521}{362880}x^{10}+o(x^{11})$$

称 E_{2n} 为 *Euler* 数。当 n 为偶数时，E_{2n} 为正奇数，且除 E_0 外，其个位数字都是；当为奇数时，n 为负奇数，其个位数都是 *1*.

定义 14.3 (伯努利数 B_n)

定义: 由级数 $\dfrac{t}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}B_n\dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 B_n 称为伯努利数，即 *Bernoulli* 数或 *Bernoulli Numbers* ♣

表 14.2: 常用的几个伯努利数

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	$\cdots$
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\cdots$

例题 14.32 计算 $x\cot x$ 的 Maclaurin 展开式。在 $x=0$ 处的函数值补充定义为 1

解 考虑 *Euler* 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$
\begin{aligned}
x\cot x &= x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=ix\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}=ix+\frac{2ix}{e^{2ix}-1}\\
&= ix+B_0+\frac{B_1}{1!}2ix+\frac{B_2}{2!}(2ix)^2+\cdots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n}+o(x^{2n})\\
&= \mathrm{Re}\left\{ix+B_0+\frac{B_1}{1!}2ix+\frac{B_2}{2!}(2ix)^2+\cdots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n}+o(x^{2n})\right\}\\
&= 1-\frac{\bar{B}_1 2^2}{2!}x^2-\frac{\bar{B}_2 2^4}{4!}x^4+\cdots-\frac{\bar{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0)
\end{aligned}
$$

写出其前 5 项的系数，即有

$$
z\cot x=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\frac{1}{4725}x^8+o(x^9)\ (x\to 0)
$$

例题 14.33 计算 $\tan x$ 的 Maclaurin 展开式。

解 利用恒等式 $\tan x=\cot x-2\cot 2x$，当 $x\to 0$ 时将右边取其极限 0. 这样有

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \frac{x\cot x-2x\cot 2x}{x}\\
&= \frac{\bar{B}_1(2^2-1)2^2}{2!}x-\frac{\bar{B}_2(2^4-1)2^4}{4!}x^3+\cdots-\frac{\bar{B}_n(2^{2n-1})2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})\ (x\to 0)
\end{aligned}
$$

写出前 5 项的系数，即有

$$
\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+o(x^{10})\ (x\to 0)
$$

例题 14.34 设 $P_0=1$, 且 $P_n+\frac{P_{n-1}}{1!}+\frac{P_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{P_0}{n!}=1$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$

解 (by 向禹) 注意到

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(P_n+\frac{P_{n-1}}{1!}+\frac{P_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{P_0}{n!}\right)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n=\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n
$$

因此

$$
P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\to e^{-1}
$$

例题 14.35 证明:

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}
$$

证明 函数 $B(x)=\frac{x}{e^x-1}$ 为伯努力数 B_k 的生成函数，有 B 是亚纯，且只在 $2\pi in$ 有极点，利用 Mittag-Leffler 定理可以展开为

$$
\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2\pi in}{x-2\pi in}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}-\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2\pi in}}\right).
$$

而注意到后者又可以展开为几何级数相加:

$$\frac{x}{e^x-1} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{2\pi i n}\right)^k = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}x^{2n}$$

是由于在重排级数的同时，奇数项消去了而偶数项留下了，所以我们就得到如下式子:

$$B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}$$

也就是要求计算

$$B_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2}\right\} = \frac{1}{12}$$

那么 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 就能得到了。

推论 14.1 ($\zeta(2k)$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!},\ (k\geqslant 1)$$

证明 ([84])

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \Longrightarrow x\coth x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n} \tag{14.3}$$

我们有

$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{x^2}{n^2x^2}+1\right),$$

上时两边求导, 得

$$\begin{aligned} x\coth x &= 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2x^2} \\ &= 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n\pi)^2}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m} \\ &= 1 + 2x^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(n\pi)^{2m+2}} \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}}x^{2m+2} \end{aligned}$$

将上式与 (14.3) 对比, 可得

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\ ,\quad \forall k\geqslant 1$$

练习 14.1 求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\zeta(x) - \frac{1}{x^x-1}\right)$$

解 *Built around $x=1$, we have*

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma - \gamma_1(x-1) + O\left((x-1)^2\right)$$

where appears the Stieltjes constant. On the other hand, starting from

$$x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + O\left((x-1)^4\right)$$

$$\frac{1}{x^x-1} = \frac{1}{x-1} - 1 + \frac{x-1}{2} + O\left((x-1)^2\right)$$

So,

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^x-1}=(1+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{1}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

and then the result.

Edit

Making the problem more general, it is quite simple to show that

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^{x^n}-1}=(n+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{n^2}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

定理 14.14 (Faulhaber' s formula)

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^l B_{k+1-l}(n+1)^l$$

证明 [84] 设 t 为实数, 考虑函数 $\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$ 关于 x 的幂级数展开

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n,$$

其系数 $B_n(t)$ 称为第 n 个 Bernoulli 多项式. 为了看出 $B_n(t)$ 的确是关于 t 的多项式, 我们要利用幂级数的乘积公式. 从等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}e^{tx}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n\right)$$

中比较两端 x^n 的系数, 得

$$B_n(t)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k B_{n-k}t^k,\ n\geqslant 0. \tag{14.4}$$

因此 $B_n(t)$ 是关于 t 的 n 次多项式, 且 $B_n(0)=B_n$. 另一方面, 由定义

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n\qquad\frac{xe^{(t+1)x}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)}{n!}x^n$$

两式相减, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)-B_n(t)}{n!}x^n=xe^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^{n+1},$$

比较等式两边 x^{k+1} 的系数, 得

$$B_{k+1}(t+1)-B_{k+1}(t)=(k+1)t^k,\ \forall k\geqslant 1, \tag{14.5}$$

在上式中分别取 $t=1,2,\cdots,n$, 再把这些等式相加, 得

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

在 (14.5) 中取 $t=0$ 知 $B_{k+1}(1)=B_{k+1}(0)=B_{k+1}$, 再利用 (14.4), 上式可改写为

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^l B_{k+1-l}(n+1)^l$$

特别地, 当 $k=2$ 时可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(n+1)-\frac{3}{2}(n+1)^2+(n+1)^3\right]=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

当 $k=3$ 时可得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\left[(n+1)^2-2(n+1)^3+(n+1)^4\right]=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

14.4.3 Euler-maclaurin 公式

例题 14.36 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0,\ f(1)=1$.
证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

证明 将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份, 设分点 $x_k=\dfrac{k}{n}$, 则 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$, 且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right)\\
\xlongequal{\text{积分中值定理}}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中 }\xi_k\in(x_{k-1},x_k)\\
\xlongequal{\text{拉格朗日中值定理}}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中 }\eta_k\in(\xi_k,x_k)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_k)^2\right]\right)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)(x_{k-1}-x_k)\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例题 14.37 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

证明 由题, 可将 $f(x)$ 在 $x_i\ \left(x_i=a+\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}\right)$ 处进行如下泰勒展开

$$\begin{aligned}
f(x)=&f\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)+f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\\
&+\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

其中 $x\in\left[a+\dfrac{i-1}{n}(b-a),a+\dfrac{i}{n}(b-a)\right]$, ξ_i 介于 x 与 $a+\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}$ 之间. 设

$$B_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)$$

则

$$\begin{aligned}
n^2B_n&=n^2\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\mathrm{d}x\right]\\
&=n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\left[f(x)-f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}$$

$$= n^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \left[f'\Big(a + \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big) \cdot \Big(x - a - \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{f''(\xi_i)}{2}\Big(x - a - \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big)^2 \right] \mathrm{d}x \right\}$$
$$\xlongequal{\text{奇偶性}} n^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \frac{f''(\xi_i)}{2}\Big(x - a - \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big)^2 \mathrm{d}x \right\}$$
$$\leqslant \frac{n^2}{6} \sum_{i=1}^{n} M_i \Big(x - a - \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big)^3 \Bigg|_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{24} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i$$

$f'\Big(a + \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big) \cdot \Big(x - a - \frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\Big)$ 是关于 $x_i = a + \frac{2i-1}{2n}(b-a)$ 对称的直线

同理可得

$$n^2 B_n \geqslant \frac{(b-a)^2}{24} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i$$

其中 M_i, m_i 分别是 $f''(x)$ 在 $\left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)\right]$ 上的最大值, 最小值,

而 $f''(x)$ 可积, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i = \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)$$

根据夹逼准则,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} f\Big(a + (2i-1)\frac{b-a}{2n}\Big) \right] = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b) - f'(a)]$$

例题 14.38 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big)$$

证明 考虑积分: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 应用分部积分法

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)B_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= f(x)B_1(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x$$

继续应用此方法, 注意到在 $n > 1$ 时都有关系:

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad \text{以及} \quad B_{2n+1} = 0$$

因此, 便可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big)$$

例题 14.39 证明: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)$

证明 [84] 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{f(n)}{2} + R - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(n) - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{2m+1}(n), \quad \theta_n \in (0,1).$$

其中, $R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$

$$R_n = -\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(1) + \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)\,\mathrm{d}t,$$

令 $f(x) = \ln x$, 我们有

$$n\ln n - n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n + C - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k+1)} \frac{1}{n^{2k-1}} - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad \theta_n \in (0,1). \tag{14.6}$$

由 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n} \tag{14.7}$$

代入 (14.6) 式并令 $n \to \infty$, 可知 $C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$, 且得到 δ_n 的如下展开式

$$\delta_n = \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k+1)} \frac{1}{n^{2k-1}} + \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

取 $m = 1$ 得

$$\delta_n = \frac{B_2}{2}\frac{1}{n} + \theta_n \frac{B_4}{12}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{12n} - \frac{\theta_n}{360n^3}, \quad \theta_n \in (0,1);$$

再取 $m = 2$ 得

$$\delta_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\theta_n}{1260n^5}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

等等. (14.7) 也可以写成

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots$$

例题 14.40 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right] = \frac{\ln(2\pi)}{2e}$

解

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n!\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k\right)$$

由 *Euler-maclaurin* 公式可得

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots$$

故

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k\right) = \exp\left(\ln n - 1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{1}{12n} + o(1/n)\right)$$

$$= \frac{n}{e}\exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{1}{12n} + o(1/n)\right)$$
$$= \frac{n}{e}\left(1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right)$$

从而

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right] \\
=& \lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right) - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right] \\
=& \lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2en} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right) - \frac{1}{2en}\right] \\
=& \lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\left(\frac{\frac{\ln(2\pi)}{\ln n} + 1}{2en} + \frac{\ln n}{4n^2} + o(\ln n/n^2)\right)\right) - \frac{1}{2en}\right] \\
=& \lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{\ln(2\pi)}{2en\ln n} + \frac{\ln n}{4n^2} + o(\ln n/n^2)\right] \\
=& \frac{\ln(2\pi)}{2e} + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{4n} + + \lim_{n\to\infty} o(\ln^2 n/n) = \frac{\ln(2\pi)}{2e}
\end{aligned}$$

例题 14.41 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

定理 14.15 (Euler-maclaurin 公式)

设 $f(t)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 的函数, $f^{(2k)}(t)$ 都具有相同的符号, 且当 $t\to\infty$ 时, 有 $f^{(2k+1)}(t)\to 0$.

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{f(n)}{2} + R - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(n)$$
$$- \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{2m+1}(n), \quad \theta_n \in (0,1).$$

其中, $R = \lim_{n\to\infty} R_n$

$$R_n = -\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(1)$$
$$+ \frac{1}{(2m+2)!}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)\,\mathrm{d}t,$$

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f^{2k-1}(n) = -\frac{(2k-1)!}{n^{2k}}$ $(k = 1,2,\cdots)$. 我们有

$$\ln n = -\frac{1}{2n} + C + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}(2k)}{n^{2k}} + \theta_n \frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)}, \quad \theta_n \in (0,1). \tag{14.8}$$

再由 γ 常数的定义

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

代入 (14.8) 式并令 $n\to\infty$, 可知 $C = -\gamma$, 且得到 ε_n 的如下展开式

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{n^{2k}(2k)} - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{n^{2k}(2k)} - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

例题 14.42 Define

$$A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

Find

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]$$

Proposed by Yong-xi Wang, China

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &\sim \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)\\ &=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\frac{1}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{720}\big(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\big)+R_k\end{aligned}$$

代入表 14.3 得

表 14.3: $f(x)$ 及其奇数阶导数在 $x=0$ 与 $x=n$ 的值

Start	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$\cdots$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\frac{n}{n^2+x^2}$	$-\frac{2nx}{(n^2+x^2)^2}$	$\frac{24xn}{(n^2+x^2)^3}-\frac{48x^3n}{(n^2+x^2)^4}$	$-\frac{720nx}{(n^2+x^2)^4}+\frac{3840x^3n}{(n^2+x^2)^5}-\frac{3840x^5n}{(n^2+x^2)^6}$	$\cdots$
$x=0$	$\frac{1}{n}$	0	0	0	$\cdots$
$x=n$	$\frac{1}{2n}$	$-\frac{1}{2n^2}$	0	$\frac{15}{n^6}$	$\cdots$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4n}-\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

即得

$$A_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4n}-\frac{1}{24n^2}+\frac{1}{2016n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$$

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)\sim\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &\sim n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f(1)-f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\big)\frac{1}{n^{2k-1}}\\ &=n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f(1)-f(0)}{2}+\frac{1}{12n}\big(f'(1)-f'(0)\big)\\ &\quad-\frac{1}{720n^3}\big(f^{(3)}(1)-f^{(3)}(0)\big)+\frac{1}{30240n^5}\big(f^{(5)}(1)-f^{(5)}(0)\big)+R_n\end{aligned}$$

令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 则 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=A_n\ ;$$

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

$$f'(1)-f'(0)=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

故

$$\frac{\pi}{4}=A_n+\frac{1}{4n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$$

练习 14.2 设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$. 求极限:

$$\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\frac{1}{24}-n\left(n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right)\right)$$

解 这里提供一个一般的方法.

定义 14.4 (Euler-maclaurin 求和公式)

设函数 $f\in C^{(2m+2)}[a,b], h=\dfrac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[a,b]$, $B_{2k}(k=1,2,\cdots,m+1)$ 是 Bernoulli 数 ♣

取 $a=0, b=1, f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $h=\dfrac{1}{n}, x_i=\dfrac{i}{n}, A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$, 则

$$\begin{aligned}A_n+\frac{1}{4n}-\frac{\pi}{4}&=\frac{1}{2}\left[\left(A_n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)+A_n\right]-\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{B_2}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}[f'(1)-f'(0)]+\frac{B_4}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}[f'''(1)-f'''(0)]\\ &\quad+\frac{B_6}{6!}\cdot\frac{1}{n^6}\left[f^{(5)}(1)-f^{(5)}(0)\right]+\frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)\end{aligned}$$

其中, $\xi\in[0,1]$ 也即

$$n^4\left(\frac{1}{24}-n\left(n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{2016}+\frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)$$

注意到 $f^{(8)}(\xi)$ 有界, 因此 $n\to+\infty$ 时所求极限为 $\dfrac{1}{2016}$

例题 14.43 Define

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

Find

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{4}-n\left(\ln 2-S_n\right)\right]$$

解 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}f(n)&\sim\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)\\ &=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\frac{1}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{720}\big(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\big)+R_k\end{aligned}$$

代入表 14.4 得

表 14.4: $f(x)$ 及其奇数阶导数在 $x=0$ 与 $x=n$ 的值

Start	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(7)}(x)$	$\cdots$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+x}$	$-\frac{1}{(n+x)^2}$	$-\frac{6}{(n+x)^4}$	$-\frac{120}{(n+x)^6}$	$-\frac{5040}{(n+x)^8}$	$\cdots$
$x=0$	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n^2}$	$-\frac{6}{n^4}$	$-\frac{120}{n^6}$	$-\frac{5040}{n^8}$	$\cdots$
$x=n$	$\frac{1}{2n}$	$-\frac{1}{4n^2}$	$-\frac{3}{8n^4}$	$-\frac{15}{8n^6}$	$-\frac{315}{16n^8}$	$\cdots$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2+\frac{3}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+\frac{1}{256n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

即得

$$S_n=\ln 2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{4}-n\left(\ln 2-S_n\right)\right]=\frac{1}{16}$$

练习 14.3 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right)$$

解[94] 由 *Euler-maclaurin* 公式

$$\sum_{j=0}^{m-1}f(j)=\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(m)-f^{(k-1)}(0)\right).$$

令 $f(x)=x^n$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{n-1}k^n\\
&=1+\frac{1}{n^n}\int_0^n x^n\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(0)\right)\\
&=1+\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(n)\\
&=1+\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{k!}n^{n-k+1}\left(n(n-1)\cdots(n-k+2)\right)\right]\\
&=1+\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{k!}n^{1-k}\left(n(n-1)\cdots(n-k+2)\right)\right]\\
&=1+\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=1+\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

又

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k=\frac{x}{e^x-1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}=\frac{1}{e-1}-1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{e-1}$$

例题 14.44 证明: $\lim\limits_{s\to0^+}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-sn^2}=\frac{1}{2}$.

解 令 $f_s(x)=e^{-sx^2}$, 利用 *Euler-Maclaurin* 公式, 我们有

$$\sum_{n=0}^{N}f_s(n)=\int_0^N f_s(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f_s(0)+f_s(N)}{2}+\frac{f_s'(0)+f_s'(N)}{12}-\frac{1}{2}\int_0^N B_2(x)f_s''(x)\,\mathrm{d}x$$

因为 $f_s'(x)=-2sxe^{-sx^2}$, $f_s''(x)=2se^{-sx^2}(2sx^2-1)$, 我们可以得到

$$\int_0^N f_s(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}f_s(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-sx^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$f_s(0)+f_s(N)=1+e^{-sN^2}\to1$$

$$f_s'(0)+f_s'(N)=-2sNe^{-sN^2}\to0$$

$$\begin{aligned}\int_0^N B_2(x)f_s''(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}B_2(x)f_s''(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}B_2(x)2se^{-sx^2}(2sx^2-1)\,\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{s}\int_0^{+\infty}B_2(\tfrac{x}{\sqrt{s}})e^{-x^2}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$, 因此, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-sn^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}+\frac{1}{2}-2\sqrt{s}\int_0^{+\infty}B_2(\tfrac{x}{\sqrt{s}})e^{-x^2}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $B_2(x)$ 有界, 我们可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-sn^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}+\frac{1}{2}+O(\sqrt{s})$$

令 $s\to0^+$, 故

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ne^{-sn^2}=\frac{1}{2}=2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-4sn^2}-\sum_{n=0}^{\infty}e^{-sn^2}=\frac{1}{2}+O(\sqrt{s}).$$

例题 14.45 [1] 证明:

$$(1!)^{-\frac{1}{n}}+(2!)^{-\frac{1}{n}}+\cdots+(n!)^{-\frac{1}{n}}\sim\frac{n}{\ln n}$$

定理 14.16 (Abel-Plana formula)

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)=\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(0)+\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{f(\mathrm{i}t)-f(-\mathrm{i}t)}{e^{2\pi t}-1}\,\mathrm{d}t$$

14.4.3.1 变符号项的和式的估计

定理 14.17 (变符号项的和式的估计)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是正值函数, $f''(x)$ 在任意有限区间可积. 则

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^kf(k)=\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{2}f(2n+2)+O\left(\int_0^{2n+2}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

证明 [95] 由简单的计算, 可以知道

$$f(2k+1)-f(2k)=f'(2k)+\int_{2k}^{2k+1}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

[1] https://www.zhihu.com/question/444950580/answer/1735711951

以及

$$\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x = f'(2k) + \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} (2k+2-x) f''(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.9}$$

因此,

$$\begin{aligned} f(2k+1) - f(2k) &= \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} (2k+2-x) f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{2k}^{2k+1} (2k+1-x) f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f''(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} |x-2k-1| f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} (1-|x-2k-1|) f''(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由此得到

$$\sum_{k=0}^{n}\big(f(2k+1)-f(2k)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2} (1-|x-2k-1|) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

即是

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k f(k) + \frac{1}{2}\int_{0}^{2n+2} f'(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2} O\big(|f''(x)|\big)\,\mathrm{d}x \\ &= O\left(\int_{2k}^{2k+2} |f''(x)|\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

定理证毕.

例题 14.46 估计和式

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sqrt{k+1}.$$

解 令 $f(x) = \sqrt{x+1}$, 则

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

得到

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \sqrt{k+1} = -\frac{1}{2}\sqrt{2n+2} + O(1)$$

定理 14.18 (变符号项的和式更精细的估计)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是正值函数, $f'''(x)$ 在任意有限区间可积. 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} f(k) =& \frac{1}{2}\big(f(2n+2)-f(0)\big) - \frac{1}{4}\big(f'(2n+2)-f'(0)\big) \\ &+ O\left(\int_{0}^{2n+2} |f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

证明 [95] 利用泰勒公式

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \int_{a}^{a+h} \frac{1}{2}(a+h-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x,$$

我们得到

$$f(2k+1) - f(2k) = f'(2k) + \frac{1}{2} f''(2k) + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{2}(2k+1-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.10}$$

由 (14.9) 式, 又有

$$f'(2k) = \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$f''(2k) = \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f''(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$

将此二式代入 (14.10) 式, 得到

$$\begin{aligned}
&f(2k+1) - f(2k) &(14.11)\\
=&\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2} f''(x)\,\mathrm{d}x &(14.12)\\
&- \frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2k}^{2k+2}\frac{1}{2}(2k+2-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2} f''(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x\\
&- \frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由分部积分可以得到

$$\begin{aligned}
\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left(f''(2k+2) - f''(2k) - \int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'''(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

代入式(14.11), 得到

$$f(2k+1) - f(2k) = \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2} f''(x)\,\mathrm{d}x + O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left(f(2k+1) - f(2k)\right)\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{2(n+1)} f'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^{2(n+1)} f''(x)\,\mathrm{d}x + O\left(\int_{2k}^{2(n+1)}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(f(2n+2) - f(0)\right) + \frac{1}{4}\left(f'(2n+2) - f'(0)\right) + O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

定理证毕.

14.4.4 欧拉公式

定理 14.19 (欧拉 (Euler) 公式)

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \iff \begin{cases}\cos x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}} + e^{-x\mathrm{i}}}{2}\\[2mm] \sin x = \dfrac{e^{x\mathrm{i}} - e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\end{cases}$$

例题 14.47 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数

解 由欧拉公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 知: $\cos x = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})$

故

$$e^x\cos x = e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}(e^x\cdot e^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right]$$

因为

$$
\begin{aligned}
e^{(1+\mathrm{i})x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+\mathrm{i})^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!}, \quad x\in(-\infty,+\infty)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
e^x\cos x &= \mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!}, \quad x\in(-\infty,+\infty)
\end{aligned}
$$

例题 14.48 求定积分

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

解 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$e^{e^{i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k!}$$

故

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right) = \int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k}\sin(k\theta)\right]_0^{\pi} = \pi
\end{aligned}
$$

例题 14.49 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}, \forall x\in(0,2\pi)$

证明 [13] 只需要考虑 $x\in(0,2\pi)$ 的情况, 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n e^{inx}}{n},\ t\in[0,1].$$

利用 Dirichlet 判别法, 不难看到, 对于任何 $x\in(0,2\pi)$ 上式作为 t 的幂级数, 在 $[0,1]$ 上都是收敛的. 于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} &= \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} = \mathrm{Im}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}e^{inx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\frac{\sin x}{(t-\cos x)^2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}t = \int_{-\cot x}^{\frac{1-\cos x}{\sin x}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \arctan\frac{1-\cos x}{\sin x} - \arctan(-\cot x) \\
&= \arctan\tan\frac{x}{2} - \arctan\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi-x}{2}, \quad \forall x\in(0,2\pi)
\end{aligned}
$$

例题 14.50 证明: $\displaystyle -\ln\sin x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}, x\in(0,2\pi).$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2inx}+e^{-2inx}}{2n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{2ix})^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-2ix})^n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-e^{2ix}) - \ln(1-e^{-2ix})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left[(1-e^{2ix})(1-e^{2ix})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos 2x) = -\frac{1}{2}\ln(2-2(1-2\sin^2 x)) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(4\sin^2 x) \\
&= -\ln 2 - \ln\sin x
\end{aligned}
$$

练习 14.4 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^n-1}{4n^2} \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2 - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2 - \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\zeta(3)\right) + \frac{1}{4}\zeta(3) \\
&= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2 + \frac{7}{16}\zeta(3)
\end{aligned}
$$

练习 14.5 计算积分: $\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,d\theta &\xlongequal{t=\tan\frac{\theta}{2}} \int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{1/t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)dt \\
&= \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1/t}+\sqrt{1/t^3}}{t+1/t}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{x^2+2}\ln^2\left(\frac{2}{x^2+2}\right)dx \\
&\xlongequal{x=\sqrt{2}\tan u} 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\left(\cos^2 u\right)du \\
&= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\,du = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2 du \\
&= 8\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2 2du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4kx}{2}dx\right) \\
&= 4\sqrt{2}\pi\ln^2 2 + 2\sqrt{2}\pi\zeta(2) = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi^3 + 4\sqrt{2}\ln^2 2.
\end{aligned}
$$

练习 14.6 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\ln\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi\ln 2)^2}{8} - \frac{\pi^4}{192}$

解

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x \ln \cos x \,\mathrm{d}x}_{A} \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \frac{\pi}{4} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \ln \cos x \,\mathrm{d}x}_{B}$$

由傅里叶级数不难得到

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi$$

用 $2x$ 代替 x,

$$\ln(2\cos x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nx}{n}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \ln \sin x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \,\mathrm{d}\frac{\sin 2nx}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \sin 2nx \cdot \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sin 2nx}{\sin x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{4n}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos x) \cdot \ln \sin x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4n^2} = B + \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \,\mathrm{d}x$$

马上看到

$$B = \frac{\pi}{2} \ln^2 2 - \frac{1}{48}\pi^3, \quad A = \frac{(\pi \ln 2)^2}{8} - \frac{\pi^4}{192}$$

14.4.5 几个特殊函数

定义 14.5 (黎曼 ζ 函数)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

定理 14.20

$\zeta(3)$ 是无理数

证明 b 站 up 主: 我真的不懂分析[96]. Apéry 的证明: 对于 $0 \leqslant k \leqslant n \in \mathbb{N}$ 定义

$$C_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} C_{n,k} = \zeta(3).$$

引理 14.1

对于 $k \in \mathbb{N}$, $\{C_{n,k}\}$ 一致地收敛到 $\zeta(3)$. 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 对任意 $0 \leqslant k \leqslant n$

$$|C_{n,k} - \zeta(3)| < \varepsilon,$$

证明: 因为 $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}=\zeta(3)$, 所以对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 N_1 使得当 $n>N_1$ 时, 有

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

另一方面,

$$m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}\geqslant n(n+1)$$

因为, 若 $1\leqslant m\leqslant n-1$, 则 $\binom{n}{m}\geqslant n$,

$$m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}\geqslant n(n+m)\geqslant n(n+1)$$

若 $m=n$, 则

$$m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}=n^3\binom{2n}{n}=n(n+1)\cdot\binom{2n}{n-1}\geqslant n(n+1)$$

故

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right|\leqslant\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{k}{2n(n+1)}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\to 0,\quad n\to\infty$$

所以存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall n>N_2$

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

故取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则有

$$|C_{n,k}-\zeta(3)|\leqslant\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right|+\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right|<\varepsilon,$$

引理 14.1 得证 □

推论 14.2

对于任意的正数数列 $\{x_{n,k}\}$, 有 $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}x_{n,k}C_{n,k}}{\sum_{k=0}^{n}x_{n,k}}=\zeta(3).$

证明: 由引理 14.1 可知, $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 对任意 $0\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\zeta(3)-\varepsilon<C_{n,k}<\zeta(3)+\varepsilon$$

两边同乘以 $x_{n,k}$

$$\sum_{m=1}^{k}x_{n,k}(\zeta(3)-\varepsilon)<\sum_{m=1}^{k}x_{n,k}C_{n,k}<\sum_{m=1}^{k}x_{n,k}(\zeta(3)+\varepsilon)$$

变形得到

$$\zeta(3)-\varepsilon<\frac{\sum_{k=0}^{n}x_{n,k}C_{n,k}}{\sum_{k=0}^{n}x_{n,k}}<\zeta(3)+\varepsilon$$

推论 14.2 得证 □

递推关系:

- 最关键的步骤: 取适当的 $\{x_{n,k}\}$, 使得相应的 $\{y_n\}$ 能够以足够快的速度收敛. 没人知道 Apéry 是如何找到下面这个答案的, 我们只知道它的确满足要求.

取

$$x_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \tag{14.13}$$

并记

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n,k} C_{n,k}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n,k}, \tag{14.14}$$

则根据推论 14.2, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \zeta(3)$. 这两个数列还具有更神奇的性质.

引理 14.2

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足如下递推关系 (取 $u = a$ 或 b):

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0, \tag{14.15}$$

并且它们由初始条件 $a_0 = 0, a_1 = 6, b_0 = 1, b_1 = 5$ 唯一决定.

证明: 初始条件和唯一性都是显然的,

$$a_0 = x_{0,0}C_{0,0} = 1 \cdot 0 = 0, \quad a_1 = x_{1,0}C_{1,1} = 1 \cdot 1 + 4(1 + \tfrac{1}{4}) = 6, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 5.$$

真正要证的是递推关系. 为证明 $\{b_n\}$ 满足递推关系 (14.15), 先把 $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_{n,k}$ 代入 (14.15) 得

$$(n+1)^3 \sum_{k=0}^{n+1} x_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) \sum_{k=0}^{n} x_{n,k} + n^3 \sum_{k=0}^{n-1} x_{n-1,k} = 0 \tag{14.16}$$

注意到当 $k > n$ 时, $x_{n,n+1} = 0, x_{n-1,n} = 0, \cdots$. 于是式子 (14.16) 可改写为

$$(n+1)^3 \sum_{k=0}^{n+1} x_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) \sum_{k=0}^{n+1} x_{n,k} + n^3 \sum_{k=0}^{n+1} x_{n-1,k} = 0$$

即证明

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left((n+1)^3 x_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)x_{n,k} + n^3 x_{n-1,k} \right) = 0$$

我们记

$$z_{n,k} = (n+1)^3 x_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)x_{n,k} + n^3 x_{n-1,k},$$

接下来只需证明 $\sum\limits_{k=0}^{n+1} z_{n,k} = 0$. 这里采用组合数学中的 Telesloping(望远镜) 技巧, 把 $z_{n,k}$ 表示为 $B_{n,k} - B_{n,k-1}$, 则

$$\sum_{k=0}^{n+1} z_{n,k} = B_{n,0} - B_{n,-1} + B_{n,1} - B_{n,0} + \cdots + B_{n,n+1} - B_{n,n} = B_{n,n+1} - B_{n,-1},$$

设 $B_{n,k} = \sum\limits_{l=0}^{k} z_{n,l}$, 下面证明 $B_{n,n+1} = 0$. 计算一下 $B_{n,0}, B_{n,1}, B_{n,2}$. 从最简单的 $B_{n,0}$ 开始

$$\begin{aligned} B_{n,0} = z_{n,0} &= (n+1)^3 x_{n+1,0} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)x_{n,0} + n^3 x_{n-1,0} \\ &= (n+1)^3 - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) + n^3 \overset{\text{wolframalpha}}{=\!=\!=\!=} -4(2n+1)^3 \end{aligned}$$

复杂一点的 $B_{n,1}$

$$\begin{aligned}B_{n,1} = z_{n,0} + z_{n,1} = & -4(2n+1)^3 + (n+1)^3\left(\binom{n+1}{1}^2\binom{n+2}{1}^2\right) \\ & -(34\cdots)\left(\binom{n}{1}^2\binom{n+1}{1}^2\right) + n^3\left(\binom{n-1}{1}^2\binom{n}{1}^2\right) \\ = & \cdots = -8n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1)\end{aligned}$$

更复杂的 $B_{n,2}$, 手算就很恐怖了

$$\begin{aligned}B_{n,2} = B_{n,1} + z_{n,2} = & -8n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1) + (n+1)^3\left(\binom{n+1}{2}^2\binom{n+2}{2}^2\right) \\ & -(34n^3\cdots)\left(\binom{n}{2}^2\binom{n+1}{2}^2\right) + n^3\left(\binom{n-1}{2}^2\binom{n}{2}^2\right) \\ = & 4(2n+1)(10-(2n+1)^2)x_{n,2}\end{aligned}$$

通过因式分解, 观察出规律, 可以猜出如下公式:

$$B_{n,k} = 4(2n+1)\left(k(2k+1)-(2n+1)^2\right)x_{n,k},$$

利用数学归纳法来证明. 容易验证, 当 $k=0,1,2$ 时规律成立.

$$B_{n,k+1} = B_{n,k} + z_{n,k+1} = \cdots,$$

特别地, 取 $k=n+1$ 得 $B_{n,n+1}=0$, 得证 $\{b_n\}$ 的递推关系.
但对于 $\{a_n\}$ 的递推关系的证明要麻烦一些. 我们引入

$$w_{n,k} = (n+1)^3x_{n+1,k}C_{n+1,k} - (34n^3+51n^2+27n+5)x_{n,k}C_{n,k} + n^3x_{n-1,k}C_{n-1,k},$$

需要证明 $\sum\limits_{k=0}^{n+1} w_{n,k} = 0$, $A_{n,k} = \sum\limits_{l=0}^{k} w_{n,l}$ 要证 $A_{n,n+1}=0$. 这里的思路是把 $A_{n,k}$ 和 $B_{n,k}$ 作比较, 先把 $w_{n,k}$ 和 $z_{n,k}$ 做比较.

$$z_{n,k} = (n+1)^3x_{n+1,k} - (34n^3+51n^2+27n+5)x_{n,k} + n^3x_{n-1,k},$$

考虑把 $(34n^3+51n^2+27n+5)$ 干掉, 首先将 $w_{n,k}$ 改写为

$$w_{n,k} = C_{n,k}z_{n,k} + (n+1)^3x_{n+1,k}(C_{n+1,k}-C_{n,k}) - n^3x_{n-1,k}(C_{n,k}-C_{n-1,k}).$$

记 $d_{n,k} = C_{n,k} - C_{n-1,k}$, 事实上,

$$d_{n,k} = \frac{(-1)^k}{n^2(n-k)\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}}, \quad 0 \leqslant k < n.$$

对 k 归纳. 当 $k=0$ 时, $d_{n,0} = \dfrac{1}{n^3}$ 成立;

$$\begin{aligned}d_{n,k} - d_{n,k-1} &= (C_{n,k}-C_{n-1,k}) - (C_{n,k-1}-C_{n-1,k-1}) \\ &= \left[\frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3}\left(\frac{1}{\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} - \frac{1}{\binom{n-1}{m}\binom{n-1+m}{m}}\right)\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k-1}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3}\left(\frac{1}{\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} - \frac{1}{\binom{n-1}{m}\binom{n-1+m}{m}}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k^3}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} - \frac{1}{\binom{n-1}{k}\binom{n-1+k}{k}}\right)\end{aligned}$$

要证它等于

$$d_{n,k} - d_{n,k-1} = \frac{(-1)^k}{n^2(n-k)\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{n^2(n-k+1)\binom{n-1}{k}\binom{n-1+k}{k}}$$

记 $A_{n,k}=\sum_{l=0}^{k}w_{n,l}$, 于是有

$$\begin{aligned}A_{n,k}=\sum_{l=1}^{k}w_{n,l}&=\sum_{l=0}^{k}\left(C_{n,l}\left(B_{n,l}-B_{n,l-1}\right)+(n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}\right).\\&=C_{n,0}(B_{n,0}-\underbrace{B_{n,-1}}_{=0})+C_{n,1}(B_{n,1}-B_{n,0})+\cdots\\&\quad+C_{n,k}(B_{n,k}-B_{n,k-1})+\sum_{l=0}^{k}\left((n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}\right)\\&=C_{n,k}B_{n,k}+B_{n,0}(C_{n,0}-C_{n,1})+B_{n,1}(C_{n,1}-C_{n,2})+\cdots\\&\quad+B_{n,k-1}(C_{n,k-1}-C_{n,k})+\sum_{l=1}^{k}\left((n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}\right)\end{aligned}$$

记 $e_{n,k}=C_{n,k}-C_{n,k-1}=\dfrac{(-1)^{k}}{2k^{3}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}}$, 利用分部求和公式可得

$$A_{n,k}=B_{n,k}C_{n,k}+\sum_{l=1}^{k}\left((n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}-B_{n,l-1}e_{n,l}\right).$$

记上式右边的和式为 $f_{n,k}$,

$$f_{n,k}=\sum_{l=1}^{k}\left((n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}-B_{n,l-1}e_{n,l}\right),$$

只需证明 $f_{n,n+1}=0$. 利用对 k 的归纳可以证明

$$f_{n,k}=\frac{(-1)^{k-1}5k(2n+1)}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}.$$

对 k 归纳. 当 $k=0$ 时, $f_{n,0}=0$ 成立

$$f_{n,k}-f_{n,k-1}=(n+1)^{3}x_{n+1,l}d_{n+1,l}-n^{3}x_{n-1,l}d_{n,l}-B_{n,l-1}e_{n,l}$$

我们希望它等于

$$f_{n,k}-f_{n,k-1}=\frac{(-1)^{k-1}5k(2n+1)}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}-\frac{(-1)^{k-2}5(k-1)(2n+1)}{n(n+1)}\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}$$

于是

$$A_{n,n+1}=B_{n,n+1}C_{n,n+1}+f_{n,n+1}=0.$$

这样就证明了 $\{a_n\}$ 的递推关系. 引理 14.2 得证 □

利用数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的递推关系可以证明它们的很多其它性质.

推论 14.3

数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n=\dfrac{6}{n^3}$.

证明: 由引理14.2

$$(n+1)^{3}a_{n+1}-(34n^{3}+51n^{2}+27n+5)a_{n}+n^{3}a_{n-1}=0,$$

$$(n+1)^{3}b_{n+1}-(34n^{3}+51n^{2}+27n+5)b_{n}+n^{3}b_{n-1}=0,$$

将 a_n 的递推关系乘以 b_n, 减去 b_n 的递推关系乘以 a_n 可得:

$$(n+1)^{3}\left(a_{n+1}b_{n}-a_{n}b_{n+1}\right)=n^{3}\left(a_{n}b_{n-1}-a_{n-1}b_{n}\right),$$

于是

$$\Rightarrow (n+1)^3(a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}) = n^3(a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n)$$
$$= \cdots = 1^3\,(a_1b_0 - a_0b_1) = 6.$$

推论 14.3 得证. □

推论 14.4

极限 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在, 且 $\alpha = \left(1+\sqrt{2}\right)^4$.

证明: 将 $\{b_n\}$ 的递推关系改写为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{b_{n+1}}{b_n} - \left(34 + \frac{51}{n} + \frac{27}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) + \frac{b_{n-1}}{b_n} = 0.$$

设 $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $\mu = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, 对上式分别求上下极限可得

$$\lambda - 34 + \frac{1}{\mu} = 0, \quad \mu - 34 + \frac{1}{\lambda} = 0,$$

注意 $b_n > 0$, 所以 $\lambda, \mu \geqslant 1$, 由此可解得 $\lambda = \mu = \left(1+\sqrt{2}\right)^4$. 推论 14.4 得证. □

推论 14.5

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1(\alpha-\varepsilon)^n < b_n < C_2(\alpha+\varepsilon)^n.$$

证明: 由极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有

$$\alpha - \varepsilon < \frac{b_{n+1}}{b_n} < \alpha + \varepsilon$$

取 $n = N+1, N+2, \cdots, n$, 有

$$\alpha - \varepsilon < \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} < \alpha + \varepsilon$$
$$\vdots$$
$$\alpha - \varepsilon < \frac{b_n}{b_{n-1}} < \alpha + \varepsilon$$

相乘得到

$$(\alpha-\varepsilon)^{n-N-1} < \frac{b_n}{b_{N+1}} < (\alpha+\varepsilon)^{n-N-1}$$

即

$$\frac{b_{N+1}}{(\alpha-\varepsilon)^{N+1}}(\alpha-\varepsilon)^n < b_n < \frac{b_{N+1}}{(\alpha+\varepsilon)^{N+1}}(\alpha+\varepsilon)^n$$

最后取 $C_1 = \min\left\{\frac{b_1}{\alpha-\varepsilon}, \frac{b_2}{(\alpha-\varepsilon)^2}, \cdots, \frac{b_{N+1}}{(\alpha-\varepsilon)^{N+1}}\right\}$, $C_2 > \max\left\{\frac{b_1}{\alpha+\varepsilon}, \frac{b_2}{(\alpha+\varepsilon)^2}, \cdots, \frac{b_{N+1}}{(\alpha+\varepsilon)^{N+1}}\right\}$ 推论 14.5 得证 □

整除性质:

- 根据定义 (14.14), $\{a_n\}$ 是正有理数序列, $\{b_n\}$ 是正整数数列. 为了计算 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 对 $\zeta(3)$ 的逼近速度, 我们需要对 $\{a_n\}$ 的分母有一定的估计.

引理 14.3

设 D_n 是 $1, 2, \ldots, n$ 的最小公倍数, 则 a_n 的分母整除 $2D_n^3$.

证明: 根据 a_n 的定义 (14.13), (14.14), 要证

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{k}\frac{D_n^3\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\in\mathbb{N}$$

我们只需证明 $2D_n^3\begin{pmatrix}n+k\\k\end{pmatrix}C_{n,k}$ 是整数. 其中 $C_{n,k}$ 的第一个和式中的每一项的分母都整除 D_n^3, 所以乘完之后当然是整数. 对于第二个和式, 我们只需证明对于 $1\leqslant m\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\frac{D_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}=\frac{D_n^3\binom{n+k}{k-m}}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}\in\mathbb{N}.$$

要证明这样的结论, 我们只需说明对任意的素数 p, 它在上式分子中的阶大于等于它在分母的阶. 关于组合数中素数的阶有著名的 Kummer 定理,

引理 14.4 (Kummer 定理)

我们记 $\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$ 中素数 p 的阶, 则 $\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$ 等于在 p 进制中计算 $n=m+(n-m)$ 时发生进位的次数.

如果 m 的 p 进制表达式末尾有若干零 (零的个数即 $\mathrm{ord}_p m$), 那么这些位置显然不会发生进位, 所以进位次数与零的个数之和应该小于 n 的 p 进制表达式的长度减一 (因为 n 的第一位不会发生进位), 所以如下不等式成立

$$\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}+\mathrm{ord}_p m\leqslant\left[\frac{\log n}{\log p}\right]=\mathrm{ord}_p D_n,\quad D_n=LCM\{1,\cdots,m\}$$

同理可得

$$\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}+\mathrm{ord}_p m\leqslant\mathrm{ord}_p D_k\leqslant\mathrm{ord}_p D_n,$$

再注意到

$$\mathrm{ord}_p m\leqslant\mathrm{ord}_p D_n,$$

则有

$$3\mathrm{ord}_p D_n\geqslant 3\mathrm{ord}_p m+\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}+\mathrm{ord}_p\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}.$$

等级于

$$\mathrm{ord}_p\frac{D_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}\geqslant 0,$$

这就证明了 $2D_n^3\begin{pmatrix}n+k\\k\end{pmatrix}c_{n,k}$ 的整性. 引理 14.3 得证. □

根据上述引理, 定义

$$p_n=2D_n^3a_n,\quad q_n=2D_n^3b_n,$$

则它们都是整数, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\zeta(3)$

定理证明:

- 先证明一个关于 $\dfrac{p_n}{q_n}\to\zeta(3)$ 的逼近速度的定量刻画

引理 14.5

存在常数 $C, \delta > 0$, 使得

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{C}{q_n^{1+\delta}}.$$

证明：根据推论 14.3,

$$\frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n b_{n-1}} = \frac{6}{n^3} \cdot \frac{1}{b_n b_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{6}{n^3 b_n b_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{6}{n^3 b_n b_{n-1}},$$

所以 $\frac{p_n}{q_n}$ 是严格单调上升的, 且对于 $N > n$, 有

$$\frac{p_N}{q_N} - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}.$$

令 $N \to \infty$ 得

$$0 < \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} < \frac{C_0}{b_n^2},$$

其中 C_0 可取为 $6\zeta(3)$. 根据推论 14.5 还可以知道, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_1 > 0$, 使得

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{C_0'}{(\alpha - \varepsilon)^{2n}},$$

其中 $C_0' = \frac{C_0}{C_1^2}$. 接下来我们要把上式右边的分母换成 q_n 的某个幂次. 根据 q_n 的定义和推论 14.5, 对于之前的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_2 > 0$, 使得

$$b_n < C_2(\alpha + \varepsilon)^n \quad \Rightarrow \quad q_n = 2D_n^3 b_n < 2C_2 D_n^3 (\alpha + \varepsilon)^n.$$

其中 D_n 满足

$$D_n = \prod_{p \leqslant n} p^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} < \prod_{p \leqslant n} p^{\log n / \log p} = \prod_{p \leqslant n} n = n^{\pi(n)} = e^{\pi(n) \log n}.$$

根据素数定理 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\pi(n) \log n}{n} = 1$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有 $\pi(n) \log n < n(1 + \varepsilon)$, 于是

$$q_n < 2C_2(\alpha + \varepsilon)^n e^{3\pi(n) \log n} < 2C_2 \left((\alpha + \varepsilon) e^{3(1+\varepsilon)}\right)^n.$$

取 $\delta = \frac{2\log(\alpha - \varepsilon)}{\log(\alpha + \varepsilon) + 3(1 + \varepsilon)} - 1$, 则

$$q_n^{1+\delta} = q_n^{\frac{2\log(\alpha - \varepsilon)}{\log(\alpha + \varepsilon) + \varepsilon(1 + C)}} < (2C_2)^{1+\delta} (\alpha - \varepsilon)^{2n}.$$

所以有

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{C_3}{q_n^{1+\delta}},$$

其中 $C_3 = C_0'(2C_2)^{1+\delta}$. 注意上式仅对 $n > N$ 成立, 要使它对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 可以适当扩大 C_3, 将前 N 项也包含进去即可.

最后, 还需要说明 $\delta > 0$. 只需取 $\varepsilon = 0.05$, 经过直接的计算可知 $\delta > 0.05$. 引理 14.5 得证 □

最终的证明:

- (Apéry) $\zeta(3)$ 是无理数.

证明：假设 $\zeta(3) = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}$. 由引理 14.5 可知

$$|pq_n - qp_n| < Cq q_n^{-\delta}.$$

注意 $\frac{p_n}{q_n}$ 是严格单调增的, 所以至多只会有一个 n 使得 $|pq_n - qp_n| = 0$, 所以当 n 充分大时可以知道

$$|pq_n - qp_n| \geqslant 1.$$

另一方面, 右边当 $n \to \infty$ 时显然以 0 为极限, 矛盾! □

注 看看吧! 万一自己接下来证明了 $\zeta(5), \zeta(7), \cdots$ 的无理性呢?

例题 14.51 (太公杯) $\zeta'(s)$ 在区域 $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ 上无零点.

定义 14.6 (二重对数函数)

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

♣

例题 14.52 证明 Euler 公式

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x),\ \ x \in [0,1]$$

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) &= \mathrm{Li}_2(0) + \mathrm{Li}_2(1) + \int_0^x \left(\mathrm{Li}_2(t) + \mathrm{Li}_2(1-t)\right)' \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{n-1}}{n}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} + \frac{\ln t}{1-t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \left(\ln t \ln(1-t)\right)\Big|_0^x = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)
\end{aligned}$$

例题 14.53 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \mathrm{Li}_2(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2.$

解

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln x \ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ln^2 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln^2 2 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2
\end{aligned}$$

例题 14.54 计算积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \frac{\ln x}{2-x}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{2-x=t} \int_2^1 \frac{1}{t}\ln(2-t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^2 \frac{\ln 2}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{\ln(1-\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-\frac{t}{2})^n}{n} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^t \cdot n}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n^2}\bigg|_1^2 = -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

定义 14.7 (LambertW 函数)

LambertW 函数[a] 定义为：函数 $f(W) = We^W$ 的反函数.

- $z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = -\dfrac{W(-\ln z)}{\ln z}$,
- 若 $z > 0$, 则 $\ln W(z) = \ln z - W(z)$.

LambertW 函数在 $x = 0$ 的泰勒级数如下：

$$
W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \cdots
$$

其收敛半径为 $\frac{1}{e}$

[a] https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html

♣

例题 14.55 (MSE,3538960)

$$
\int_0^1 (x^x)^{(x^x)^{(x^x)^{(x^x)^{\cdots}}}} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}
$$

解 [2] *LambertW* 函数

$$
h(z) = z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = -\frac{W(-\ln z)}{\ln z}
$$

LambertW 函数的级数展开式

$$
W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n
$$

于是就有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 -\frac{W(-x\ln(x))}{x\ln(x)} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} n^{-1+n} x^{-1+n} \ln^{-1+n}(x)}{n!}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{2n} n^{-1+n} x^{-1+n} \ln^{-1+n}(x)}{n!} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^{2n} n^{-1+n}\right) \int_0^1 x^{-1+n} \ln^{-1+n}(x)\, \mathrm{d}x}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^{2n} n^{-1+n}\right)\left(-\left(-\frac{1}{n}\right)^n \Gamma(n)\right)}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1+3n}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

[2] https://math.stackexchange.com/questions/3538960

定理 14.21 (Lagrange–Bürmann)

若 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有反函数，且 $y_0=f(x_0)\neq 0$，那么其可以被表示为：

$$x=f^{-1}(y)=x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(\frac{z-x_0}{f(z)-y_0}\right)^n\bigg|_{z=x_0}(y-y_0)^n$$

例题 14.56 LambertW 函数在 $x=0$ 的泰勒级数如下：

$$W_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n=x-x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{8}{3}x^4+\frac{125}{24}x^5-\cdots$$

解 注意到

$$W(z)e^{W(z)}=z\Rightarrow W(0)=0$$

由 *Lagrange* 反演公式

$$\begin{aligned}
W_0(z)&=0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}W^{n-1}}\left(\frac{W-0}{We^W-0}\right)^n\bigg|_{W=0}(z-0)^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{W\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}W^{n-1}}e^{-nW}\right]\frac{z^n}{n!}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^{n-1}\frac{z^n}{n!}=z-z^2+\frac{3}{2}z^3-\frac{8}{3}z^4+O(z^5).
\end{aligned}$$

该级数的收敛半径为 e^{-1}.

14.5 幂级数的应用

14.5.1 求级数的和

例题 14.57 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 (by Euler, 174?).

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6}&=\frac{4}{3}\frac{(\arcsin 1)^2}{2}=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\int_0^1 x^{2n}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]\\
&=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

练习 14.7 求

$$\frac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$$

解 考虑 $\sin x$ 的幂级数展开

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

记

$$p=1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots$$

$$q=\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots$$

则

$$\pi p-\pi^3 q=\pi-\frac{1}{3!}\pi^3+\frac{1}{5!}\pi^5-\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}\pi^{2n-1}+\cdots=\sin\pi=0$$

所以

$$\frac{p}{q}=\pi^2$$

例题 14.58 计算积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^2$$

所以原积分

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\mathrm{d}x^2\\&=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n!)^2}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{2^n(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}\\&=e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例题 14.59 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^{n-1}}{(n-1)!}=xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\cdot 2^n\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((2n)!!)^2}\cdot 2^n\Gamma(n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{(n)!}=\sqrt{e}\end{aligned}$$

例题 14.60 设 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 确定系数 a_0,a_1,a_2 和 a_3, 并证明当 $n\geqslant 2$ 时, 有 $a_n>\dfrac{\mathrm{e}}{(\gamma\ln n)^n}$, 其中 γ 是大于 e 的一个常数.

解

$$e^{e^x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\xRightarrow{x=0}a_0=e$$

$$(e^{e^x})'=e^{e^x}e^x=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\xRightarrow{x=0}a_1=e$$

$$(e^{e^x})''=e^{e^x}e^{2x}+e^{e^x}e^x=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\xRightarrow{x=0}a_2=e$$

$$(e^{e^x})'''=e^{e^x}e^{3x}+3e^{e^{2x}}e^x+e^{e^x}e^x=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}\xRightarrow{x=0}a_3=\frac{5}{6}e$$

利用幂级数展开式可知

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right),$$

从而

$$a_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}>\frac{k^n}{n!k!},\ \forall k\geqslant 0$$

对于任意固定的 n，只需要找出适当的 k 使得本题的不等式成立即可. 又因为对于前面有限个 n, 我们可以适当放大 γ 满足题意, 因此只要在等价的意义下成立即可. 这时又可以将阶乘理解为 Γ 函数, 因此 k 用非整数代入是可以的. 以下证明, 取 $k=\dfrac{n}{\ln n}$ 代入已经可以得到所要的不等式. 这时就有

$$\frac{k^n}{n!k!}=\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{n!\left(\frac{n}{\ln n}\right)!}\sim\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot\sqrt{\frac{2\pi n}{\ln n}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}}=\frac{(\mathrm{e}\ln n)^{\frac{n}{\ln n}}\sqrt{\ln n}}{2\pi n(\ln n)^n}.$$

由于最后一式中的分子为无穷大量, 大于 e 没有问题. 又由于 $a>1$ 时, $\dfrac{2\pi n}{a^n}=o(1)$, 因此任取 $\gamma>\mathrm{e}$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $a_n>\dfrac{\mathrm{e}}{(\gamma\ln n)^n}$. 最后再放大 γ 使得不等式对一切 $n\geqslant 2$ 成立即可.

本题背景：来自著名的 *Bell number* 的系列问题研究，详细见：https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_number. 2010 年，*Berend and Tassa* 给了 *Bell* 数一个下界的结论, 即

$$B_n=\frac{n!\cdot a_n}{e}<\left(\frac{0.792n}{\ln(n+1)}\right)^n.$$

进一步可以变成

$$a_n<\frac{e\cdot(0.792)^n}{n!}\left(\frac{n}{\ln(n+1)}\right)^n.$$

练习 14.8 设 $x>1$, 求 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$ 的和

解

$$\begin{aligned}
I&=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\
&=1+\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}\right)+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\
&=1-\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\
&=1-\frac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\
&=\cdots=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)}=1.
\end{aligned}$$

练习 14.9 求 $1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.

解 事实上,

$$b_k=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^k}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}$$
$$=-b_{k-1}-C_{k-1}^{1}b_{k-2}-\cdots-C_{k-1}^{k-2}b_1-b_0,$$

其中 $b_0=1/e$. 因此 $b_1=-1/e, b_2=0, b_3=1/e$. 因此

$$1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{n!}$$
$$=b_3+3b_2+3b_1+b_0=-\frac{1}{e}.$$

例题 14.61 (CMC,2019) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

解 级数通项 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2}$, 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2n+2},$$

则收敛区间为 $(-1,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\right]$, $f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2g(x)$, 其中 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$. 因为

$$g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}$$
$$=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xg(x)],$$

所以 $g(x)$ 满足 $g(0)=0$, $g'(x)-\frac{x}{1-x}g(x)=\frac{1}{1-x^2}$. 解这个一阶线性方程, 得

$$g(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{1-x^2}e^{-\int\frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

由 $g(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $f(x)=(\arcsin x)^2$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi^2}{16}$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{8}.$$

例题 14.62 求级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+2+2)}$ 之和.

解 *(by 冬眠的小老鼠)* 令 $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{m+n+2}}{mn(m+2+2)}$. 则

$$f'(x)=x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x\ln^2(1-x)$$

故

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+2+2)}=f(1)=\int_0^1 x\ln^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{4}$$

练习 14.10 级数求和: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}$.

证明 显然有

$$-n\int_0^1 (1-x)^{n-1}\ln x dx = -\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k} = H_n$$

考虑积分

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k (-1)^{k+1}}{k}$$

另外一方面

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}du = H_n$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\ln x dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n^2}\ln x dx$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} = \frac{\mathrm{Li}_2(1-x)}{1-x}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(1-x)\ln x}{1-x}dx = \frac{1}{2}(\mathrm{Li}_2(1-x))^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

✍ **练习 14.11** 求和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{H_n - H_{2n}}{n\,(2n+1)}$.

解 首先不难得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n - H_{2n}}{n\,(2n+1)} =& 2\sum_{n=1}^{\infty} (H_n - H_{2n})\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
=& 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)\int_0^1 \frac{x^{2n}-x^n}{1-x}dx \\
=& \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \ln\frac{1+x}{1-x} - \ln(1+x)}{1-x}dx \\
&+ \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)dx,
\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}dt = 4\ln 2.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2(-1) = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(\sqrt{x}-1)}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx &= -2\int_0^1 \frac{t}{1+t}\ln\frac{1+t}{1-t}dt \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} - \frac{\ln(1-t)}{1+t}\right]dt - 2\int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}dt \\
&= \ln^2 2 + 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\ln 2 = \frac{\pi^2}{6} - 4\ln 2.
\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \ln\frac{1+x}{1-x} - \ln(1+x)}{1-x}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln 2}{1-x}dx-2\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x\right)-\ln 2}{1-x}dx,$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln 2}{1-x}dx &= 2\int_0^1 \frac{t}{1-t^2}\ln\frac{1+t}{2}dt\\ &=\int_0^1 \frac{1}{1-t}\ln\frac{1+t}{2}dt-\int_0^1 \frac{1}{1+t}\ln\frac{1+t}{2}dt\\ &=-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln^2 2=\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x\right)-\ln 2}{1-x}dx=-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{2n}}{n\left(2n+1\right)}&=4\ln 2-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}-4\ln 2+2\left(\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}\right)-2\left(\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}\right)\\ &=\ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

练习 14.12 证明:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\gamma\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2},$$

其中 γ 是 Euler 常数.

证明 法 1. 因为

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{n^x}\\ &=\frac{\log 2}{2^{x-1}}\zeta(x)+\left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta'(x)\end{aligned}\tag{14.17}$$

$$\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma+O(x-1)$$

带入 (14.17), 令 $x\to 1^+$ 可求得

$$f(1)=\gamma\log 2-\frac{1}{2}\log^2 2$$

法 2. 考虑部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}&=2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\ln 2k}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\\ &=\ln 2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{k}-\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{\ln k}{k}\end{aligned}$$

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 可知当 $x>e$ 时为单调递减且趋于 0 函数, 有估计

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}f(k)\leqslant\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算得

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n} f(k)-\frac{\ln 2}{2}\ln(\frac{n^2}{2})=o(1)$$

所以原式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\ln k}{k}&=\ln 2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{k}-\ln(n/2)-\frac{\ln 2}{2}\right)\\&=\ln 2(\gamma-\frac{1}{2}\ln 2)\end{aligned}$$

练习 14.13 求极限 (西西 2017 年新年祝福)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)$$

解 *法 1(西西) 注意*

$$\sqrt{x}-\sqrt{k}=\frac{x-k}{\sqrt{x}+\sqrt{k}}$$

则有

$$\left|\frac{e^x}{\sqrt{x}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}+\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{k}}{\sqrt{kx}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{|x-k|}{\sqrt{kx}}$$

由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{|x-k|}{\sqrt{k}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

且

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k}\leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\leqslant\frac{2}{x}e^x$$

且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2=xe^x$$

所以

$$\left|\frac{e^x}{\sqrt{x}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2}\frac{e^x}{x}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=1$$

法 2(那日蓝天) 引理: 设 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)$ *和* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi(k)$ *收敛, 且* $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}=1$ *则*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)x^k}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi(k)x^k}=1$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{n}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\xlongequal{Stiring}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{-n-\frac{1}{2}}}=1$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$f(x)$ 满足方程

$$f'(x)=f(x)+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\qquad (f(0)=0)$$

解之得

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^x\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$$

法 3. 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kq^2}dq,$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{x}e^{-x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^{\infty}e^{-kq^2}dq\\&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq.\end{aligned}$$

因此所求极限等价于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq=1.$$

下面证明此式. (逆逆) 首先有 $t\geqslant x\geqslant 0$ 时, $xe^{-t^2}\leqslant xe^{-x^2}\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$ 时, $e^y-1\leqslant(e-1)y\leqslant 2y$.

(1) 因此

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}2xe^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2x\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\to 0,\quad x\to\infty$$

(2) 对任意 $\varepsilon>0$, 我们有

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_{\varepsilon}^{x}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{x}}{e^x}\cdot x\cdot e^{xe^{-\varepsilon^2}}=x^{3/2}/e^{x\left(1-e^{-\varepsilon^2}\right)}\to 0,\quad x\to\infty$$

只需计算

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

令

$$y=1-e^{-t^2},\quad t=\sqrt{-\ln(1-y)},\quad \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{-\ln(1-y)}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{1-y},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t&=\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{1-e^{-\varepsilon^2}}\frac{e^{x(1-y)}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y,\quad \text{其中}\,\delta(\varepsilon)=1-e^{-\varepsilon^2}\end{aligned}$$

对 $\forall\alpha>0$, 取 ε 足够小, 当 $0\leqslant y\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时, 我们有 $-(1+\alpha)y\leqslant\ln(1-y)\leqslant -y$. 于是

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\alpha}}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{x}}{1-\delta(\varepsilon)}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)}}e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)x}}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}&\leqslant\varliminf_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\\&\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\leqslant\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}=e^{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

依次令 $\varepsilon\to 0,\alpha\to 0$ 便可得到结论.

14.5.2 求微分方程的通解

例题 14.63 (同济 7, P298) 试用幂级数求方程 $y''+xy'+y(x)=0$ 的通解.

解 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解, 则

$$\begin{aligned}y'&=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\y''&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\end{aligned}$$

代入方程 $y''+xy'+y(x)=0$ 中, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n\right]=0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0$$

即

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2},\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

- 当 $n=2(k-1)$ 时,

$$a_{2k}=\left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0=\frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}.$$

- 当 $n=2k-1$ 时,

$$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域均为 $(-\infty,+\infty)$, 故

$$\begin{aligned}y&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

即

$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$

其中, a_0,a_1 是任意常数.

14.5.3 求数列通项

例题 14.64 数列 $F_0,F_1,\cdots,F_n,\cdots$ 如果满足条件

$$F_0=F_1=1,\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n\geqslant 2$$

则称此数列为斐波那契 (Fibonacci) 数列.

解 我们记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n$$

那么有

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=F_0+F_1x+\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n\\&\xlongequal{\text{代入条件}}1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n\\&=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n\\&=1+x+x\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^{x-1}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^{n-2}\\&=1+x+x(f(x)-1)+x^2f(x)\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

记 x_1,x_2 为方程 $1-x-x^2=0$ 的根:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

将 $f(x)$ 展开为幂级数

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{x_2-x_1}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_2-x_1}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)x^n\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{x_2-x_1}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}}-\frac{1}{x_1^{n+1}}\right)=\frac{1}{(x_1x_2)^{n+1}}\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_2-x_1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\quad\forall n\geqslant 0\end{aligned}$$

例题 14.65 设 $a_0=1,a_1=\dfrac{2}{3}$.

$$(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}=\frac{2}{3}a_n$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{3}}a_n=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$

解 (ytdwdw[26], 楼红卫[9]) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 可得收敛域内 $[(1-x^2)S(x)]'=\frac{2}{3}S(x)$. 解得

$$S(x)=\frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{4}{3}}.$$

利用 Cauchy 乘积并比较系数得到, 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3n\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}\sum_{\substack{k+j=n-1\\k,j\geqslant 0}}(-1)^k\frac{\Gamma(k+\frac{2}{3})\Gamma(j+\frac{4}{3})}{k!j!}\\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\sum_{\substack{k+j=n-1\\k,j\geqslant 0}}(-1)^k nC_{n-1}^k\int_0^1 t^{k-\frac{1}{3}}(1-t)^{j+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\int_0^1(1-2t)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\int_{-1}^1\frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}}s^{n-1}\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\int_0^1\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}}s^{n-1}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\int_0^1\frac{\sqrt[3]{1+s}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}}s^{n-1}\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}\int_{-1}^0\frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}}s^{n-1}\,\mathrm{d}s\\
&= F_n+G_n+H_n
\end{aligned}$$

接下来说明 nG_n, nH_n 有界, $n^{\frac{2}{3}}a_n\to\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$

例题 14.66 设 a_0 和 a_1 是实数, 且满足 $a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}$, 证明: 序列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛, 并求极限。

证明 设

$$S(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则

$$\begin{aligned}
S(x)&=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\\
&=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\\
&=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nx^{n+1}+\frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}\right)\\
&=a_0+a_1x+x(S(x)-a_0)+2\int_0^x tS(t)dt
\end{aligned}$$

两边对 x 求导, 得到微分方程

$$(x-1)S'(x)+(2x+1)S(x)+a_1-a_0=0$$

注意到初值 $S_0=a_0$, 解这个 ODE, 得到

$$S(x)=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(2x^2-6x+5)(a_0-a_1)+(5a_1-9a_0)e^{-2x}}{(x-1)^3}\right]$$

我们有展开式

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k\ ,\quad e^{-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}x^k$$

则

$$(2x^2-6x+5)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}=5+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n$$

$$e^{-2x}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}$$

于是

$$S(x)=\frac{1}{4}(a_1-a_0)\left(5+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n\right)+\left(\frac{9}{4}a_0-\frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$$

对比 x^n 项的系数，得到

$$a_n=\frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0)+\left(\frac{9}{4}a_0-\frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}\right)$$

下面来计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0)}{n^2}=\frac{1}{8}(a_1-a_0)$$

又注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}(n-k+2)(n-k+1&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}[n^2+3n-2kn+(k-2)(k-1)]\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}+o(1)\to\frac{e^{-2}}{2}\qquad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\left(\frac{9}{8}e^{-2}-\frac{1}{8}\right)a_0+\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{8}e^{-2}\right)a_1$$

14.5.4 几个常数的近似计算

14.5.4.1 π 的近似计算

例题 14.67 (Machin,1706) 证明: $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$

解 利用等式

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}$$

当 $u=\arctan(1/5)$ 时, 有

$$\tan(2u)=\frac{2/5}{1-(1/5)^2}=\frac{5}{12},\quad\tan(4u)=\frac{10/12}{1-(5/12)^2}=\frac{120}{119}.$$

因此

$$\tan(4u-\pi/4)=\frac{120/119-1}{1+120/119}=1/239$$

这就得到下面等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

注: 1706 年, Machin 用这个公式将 π 计算到了小数点后 100 位

例题 14.68 (Ramanujan,1914) 证明:

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}=\frac{1}{\pi}.$$

解 *Just to make this more intriguing, define the fundamental unit* $U_{29}=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ *and fundamental solutions to Pell equations,*

$$\left(U_{29}\right)^3=70+13\sqrt{29},\quad \textit{thus}\ \ 70^2-29\cdot 13^2=-1$$

$$\left(U_{29}\right)^6=9801+1820\sqrt{29},\quad \textit{thus}\ \ 9801^2-29\cdot 1820^2=1$$

$$2^6\left(\left(U_{29}\right)^6+\left(U_{29}\right)^{-6}\right)^2=396^4$$

then we can see those integers all over the formula as,

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{k!^4}\frac{29\cdot 70\cdot 13\,k+1103}{\left(396^4\right)^k}=\frac{1}{\pi}$$

例题 14.69 (Bailey-Borwein-Plouffe, BBP formula) 证明:

$$\pi=\sum_{k\geqslant 0}\left[\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)\right]$$

证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geqslant 0}\left[\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)\right]\\
&=\int_0^1\sum_{k\geqslant 0}\frac{4x^8-2x^{8k+3}-x^{8k+4}-x^{8k+5}}{16^k}\,\mathrm{d}x\\
&=16\int_0^1\frac{1-x}{4-4x+2x^3-x^4}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x\mapsto 1-x}16\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+2x-x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&=4\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-4\int_0^1\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=(\pi+\ln 4)-\ln 4=\pi
\end{aligned}$$

例题 14.70 (Brounckner) 证明:

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\cdots}}}}}$$

.

证明 [3] 我们令 $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 则 $I_0=\dfrac{\pi}{4}$, $I_1=1-\dfrac{\pi}{4}$ 且

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1},$$

[3]群文件《MSE2017》P165

由此可知

$$\frac{I_n+I_{n+1}}{I_{n+1}+I_{n+2}}=\frac{2n+3}{2n+1}$$

令 $r_n=\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$, 可得

$$\frac{1+1/r_n}{r_{n+1}+1}=\frac{2n+3}{2n+1},\quad r_n=\frac{2n+1}{2+(2n+3)r_{n+1}}$$

因此

$$r_0=\frac{1}{2+3r_1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+5r_2}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+7r_3}}}=\cdots$$

且注意到 $r_0=\dfrac{\pi}{4}-1$ 以及 $I_n=O\left((2n+1)^{-1}\right)$ 得证.

14.5.4.2 欧拉常数

定义 14.8 (Euler–Mascheroni 常数)

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=0.5772\cdots$$

目前, 我们还不知道 γ 是有理数还是无理数?

注 贴吧某民科趣闻：三江方士的“中华级数”

- 原始版“中华级数”：调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛于 400
  - 吧友调侃：“万物收敛于 400”
- 进阶版“中华级数”：调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛于 61.35
  - 吧友调侃：“谁告诉你万物收敛于 400？现在收敛于 61.35!”
- 最新版“中华级数”：调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛于 57.106

笔者已经很久没关注过了, 也不知道现在收敛于多少了, 哈哈哈哈哈哈.

例题 14.71 证明 $H_n=-n\displaystyle\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}H_n&=\int_0^1(1+x+\cdots+x^{n-1})dx\xlongequal{\text{等比数列求和}}\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx\\&\xlongequal{t=1-x}\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{分部积分}}[1-(1-t)^n]\ln t\Big|_0^1-\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t\\&=-n\int_0^1(1-t)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例题 14.72 设

$$H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

记 $\varphi(n)$ 为满足 $H(k)\geqslant n$ 的最小自然数, 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=e$

解 由 $\varphi(n)$ 的定义知

$$n \leqslant H(\varphi(n)) \leqslant n + \frac{1}{\varphi(n)} \quad \text{及} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$$

另外, 由欧拉常数的定义

$$\lim_{n\to+\infty} \big(H(n) - \ln n\big) = \gamma \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \big(n - \ln \varphi(n)\big) = \gamma$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = e$$

例题 14.73 求极限: $I = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{[n\pi]} + \dfrac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \dfrac{1}{4n} \right)$

解 考虑欧拉常数的定义

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

故有

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[n\pi - 1]} = \ln[n\pi - 1] + \gamma + \varepsilon_{[n\pi]-1} \tag{14.18}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n} = \ln(4n) + \gamma + \varepsilon_{4n} \tag{14.19}$$

由 (14.19)–(14.18) 得

$$\frac{1}{[n\pi]} + \frac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \frac{1}{4n} = \ln \frac{4n}{[n\pi - 1]} + \varepsilon_{4n} - \varepsilon_{[n\pi]-1}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{[n\pi]} + \dfrac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \dfrac{1}{4n} \right) = \ln \dfrac{4}{\pi}$

例题 14.74 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$, 求极限: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}} \right)^n$

解 注意到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}} \right)^n}$$

而

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}} \right)^n = -\ln n - n \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}{n} \right) \\
&= -\ln n - n \ln \left(\frac{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n} \right) = -\ln n - n \ln \left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n} \right) \\
&= -\ln n - n \left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n^2} - o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n^2} \right) \right) \\
&= -\ln n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n} + o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n - 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n} + o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \right)^2}{2n} \right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n\\
=&\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n-1+\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)-1+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)\\
=&\gamma-1
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n=e^{\gamma-1}$$

例题 14.75 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$$

其中 γ 是欧拉常数, 若现在我们知道

$$\lim_{n\to\infty}n\big(A-n(H_n-\ln n-\gamma)\big)=B$$

其中 A, B 是两个常数, 求 $\frac{A}{B}$

解 设

$$f(n)=H_n=\ln n+\gamma+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}+\frac{k}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

则有

$$\begin{aligned}
f(n+1)-f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-c\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-d\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
-k\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

且 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}$, 取 $x=\frac{1}{n}$, 那么简单计算有

$$\frac{x}{1+x}=\ln(1+x)-cx^2\cdot\frac{1}{1+x}-dx^3\cdot\frac{x+2}{(x+1)^2}-kx^4\cdot\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

利用泰勒公式有

$$x(1-x+x^2)+o(x^4)=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)-cx^2(1-x)-dx^3\cdot 2+o(x^4)$$

比较系数得

$$c=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{12}$$

例题 14.76 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]$$

解 利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2kp^{2k}}+R(m,p)$$

其中 $-\dfrac{B_{2k}}{2k}$ 被 $\zeta(1-2k)$ 所代替，又对于所有正整数 m，有 $\zeta(-m)=0$ 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{\gamma+R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right\}$$

由

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}=\psi(m)+\gamma+\frac{1}{m}\text{ ; }|B(m,p)|\leqslant\frac{|B_{2n+2}|}{(2p+2)m^{2p+2}}\cdots[1]$$

对于 $m>0$, $p\leqslant 0$；由 $|B_{2p}|\sim 4\sqrt{\pi p}\left(\dfrac{p}{\pi e}\right)^{2p}$, $n\to\infty\cdots[2]$ 结合 *[1], [2]* 得出:

$$\left|R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right|\leqslant(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}\cdots[3]$$

由

$$\lim_{n\to\infty}(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}=0$$

即得所求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\gamma$$

例题 14.77 求极限

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma$$

解 *For* $s>1$, *write*

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}\right).$$

Assuming this, we have

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right).$$

The sum of the first N terms of the above is

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1).$$

So

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)\right)=\gamma$$

例题 14.78 求极限: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)$.

解 *(by* 挑灯*)* 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma \tag{14.20}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)&\xlongequal{(14.20)}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}+\frac{\gamma}{3}\right)\\&\xlongequal{\text{通分}}\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+1)}+\frac{\gamma}{3}+1\right)\end{aligned}$$

记

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k+1}}{3k(3k+1)}\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k}}{3k}\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{3k-1}=\frac{x^2}{1-x^3}\Rightarrow f'(x)=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$$

从而易得,

$$f(1)=f(1)-f(0)=-\frac{1}{3}\int_0^1\ln(1-x^3)\,\mathrm{d}x=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\ln 3}{2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{\ln 3}{2}+\frac{\gamma}{3}$$

14.5.4.3 卡特兰常数

定义 14.9 (Catalan 常数)

$$G=\beta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

目前,我们还不知道 G 是有理数还是无理数?

例题 14.79 计算: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

解 (by 潘神)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{例14.50}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2kx\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k^2}\\&\xlongequal{k\mapsto 2n+1}-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G\end{aligned}$$

14.6 发散级数

笔记 全体自然数的和等于 $-\frac{1}{12}$

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots+n=-\frac{1}{12}$$

解 由级数的收敛的必要条件,可知级数 $\sum_{k=1}^{n}k$ 发散!所以是结论错的,完结撒花!然而并不是

> 数学上经常有这样的操作[97]:如果定义不够使用,就推广定义;如果推广以后仍然不能满足数学家的野心,那就修改定义;如果还不行,就抛弃这个定义.

透过黎曼 ζ 函数正规化与拉马努金求和等方法可产生一有限值 $-\frac{1}{12}$

第十五章 傅里叶级数

定义 15.1 (正交性)

若两个函数 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

则称 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上是正交的, 或在 $[a,b]$ 上具有正交性.

定理 15.1 (三角函数系的正交性)

组成三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{15.1}$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交, 即在三角函数系 (15.1) 中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad (k,n = 1,2,3,\cdots)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad (k,n = 1,2,3,\cdots,k \neq n)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\mathrm{d}x = 0 \quad (k,n = 1,2,3,\cdots,k \neq n)$$

15.1 周期为 2π 的函数的 Fourier 级数展开

定理 15.2 (傅里叶级数)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{15.2}$$

右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,3,\cdots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned} \tag{15.3}$$

如果公式 (15.3) 中的积分都存在, 这时他们定出的系数 $a_0, a_1, b_1, \cdots$ 叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶 *(Fourier)* 系数, 将这些系数带入到 (15.2) 式的右端, 所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{15.4}$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

例题 15.1 将周期为 2π 的函数 $f(x) = |x|, x \in [-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数, 并由此求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

解 按系数公式计算系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\ (n=1,2,\cdots)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=1,2,\cdots)$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos nx\right),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=0$, 可得

$$0=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right)\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}L+\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例题 15.2 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的单调函数, 则

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

解[1] 因 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的单调函数, 所有 $\exists M>0,\forall x\in[0,2\pi],|f(x)|\leqslant M$. 又根据第二积分中值定理, $\exists\xi\in(0,2\pi)$, 使

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}f(0)\int_0^{\xi}\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin n\xi}{n\pi}[f(0)-f(2\pi)]\end{aligned}$$

所以

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n\pi}|\sin n\xi|[|f(0)|+f(2\pi)]\leqslant\frac{2M}{\pi}\frac{1}{n}$$

于是 $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. 同理可证: $b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

15.1.1 平移变换

问题 15.1 区间端点不是 $-\pi,\pi$ 时, 区间长度不是 2π 时, 还能讨论傅里叶展开式吗? 回答是肯定的!

- 由命题 6.1 可知: 当 $f(x)$ 以 2π 为周期时, $[-\pi,\pi]$ 可随意换成 $[a,a+2\pi]$.
- 若区间长度不是 2π 时, 作变换 $x=\frac{l}{\pi}t$, 可得到一般周期函数的傅里叶级数

例题 15.3 设函数 $f(x)$ 是以为 2π 周期的周期函数, 且 $f(x)=e^{\alpha x}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, 其中 $\alpha\neq0$, 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和.

解 先求出系数:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a\pi}(e^{2\pi\alpha}-1)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

[1]数学分析选讲 P426

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\cdot\frac{n}{\alpha^2+n^2}, \quad n=1,2,\cdots$$

由狄利克雷收敛定理知

$$e^{\alpha x} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cos nx - n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\right], \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

令 $\alpha=1, x=0$, 由狄利克雷收敛定理知

$$\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right] = \frac{f(0)+f(2\pi)}{2} = \frac{e^{2\pi}+1}{2}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}$$

15.1.2 周期延拓

例题 15.4 设 a 不为整数, 将 $f(x)=\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数

证明 将 $f(x)$ 延拓为正规数轴上的以 2π 为周期的函数, 记延拓后的函数为 $\hat{f}(x)$, 则 $\hat{f}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 2π 的连续偶函数. 因此,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2},\ n=0,1,2,\cdots, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nx\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{奇函数}} 0,\ n=1,2,\cdots.$$

故 $\hat{f}(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\hat{f}(x) = \frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in(-\infty,+\infty).$$

限制在 $[-\pi,\pi]$ 上就有

$$\cos ax = \frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi].$$

上式令 $x=0$, 就可得

$$\frac{\pi}{\sin ax} = \frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2},\ a\notin\mathbb{Z}.$$

15.2 正弦级数与余弦级数

定义 15.2 (正弦级数)

对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n=0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{15.5}$$

即知奇函数的傅里叶级数只是含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \tag{15.6}$$

♣

例题 15.5 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

解 构造 $f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$, 将 $f(x)$ 展开成正弦级数, 有

$$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin(nx)\,,\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

令 $x=\frac{\pi}{2}\in(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4}&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin(n\tfrac{\pi}{2})\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\pi^2}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}4}{(2n+1)^3}\right]\\&=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}-\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\left(\frac{\pi^3}{32}-\frac{\pi^2}{4}\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^3}{32}$$

更多解法参考: http://tieba.baidu.com/p/4428450841#87016105253l

定义 15.3 (余弦级数)

对周期为 2π 的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x & (n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=0 & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}\tag{15.7}$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\tag{15.8}$$

♣

例题 15.6 设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\ (-\pi,\pi)$, 则 $a_2=$ ____

解 根据余弦级数的定义, 有

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x=1$$

例题 15.7 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

证明 取 $f(x)=x^4$, 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^4}{5}\\a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi\quad(n=0,1,2,3,\cdots)\\b_n&=0\quad(n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

于是

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

令 $x=\pi$ 得

$$\begin{aligned}\pi^4&=\frac{1}{5}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2\pi^2-48}{n^4}\cos^2 n\pi\\&=\frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\left(-1+\frac{1}{5}+\frac{8}{6}\right)=\frac{\pi^4}{48}\cdot\frac{8}{15}=\frac{1}{90}\pi^4.$$

例题 15.8 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

证明 取 $f(x)=x^3$. 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成余弦级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\ (n=0,1,2,3,\cdots)$$

因此,

$$x^3=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(nx)\,,\quad x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=\pi$, 得

$$\pi^3=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(n\pi)$$

$$\frac{3\pi^3}{4}=6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=-\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

例题 15.9 证明: $\cot x=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\,,\quad x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$

证明 令 $\alpha\in(0,1)$, 利用 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos\alpha x=\frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=\pi$ 得

$$\cos\alpha\pi=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos n\pi\right]$$

再令 $a\pi=t$, 即得

$$\cot t=\frac{1}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\frac{t}{\pi}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2-n^2}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\,,\quad t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$$

✍ **练习 15.1** 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

证明

$$\pi x\cot\pi x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2}=1-2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2x^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}-\cdots \tag{15.9}$$

$$\pi x^{1/2}\cot\pi x^{1/2}=1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}-\cdots$$

For $z\sim 0$:

$$z\cot z=\frac{z}{\tan z}\sim\frac{z}{z+z^3/3+2z^5/15}=\frac{1}{1+z^2/3+2z^4/15} \tag{15.10}$$

$$\sim 1-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}+\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}^2\sim 1-\frac{z^2}{3}-\frac{2z^4}{15}+\frac{z^4}{9}=1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45} \tag{15.11}$$

$$\pi x^{1/2}\cot\pi x^{1/2}\sim 1-\frac{\pi^2}{3}x-\frac{\pi^4}{45}x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=--\frac{\pi^4}{45}=\frac{\pi^4}{90}$$

例题 15.10 证明 $\dfrac{1}{\sin t}$ 的部分分式展开式:

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2},\quad t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$$

证明 令 $\alpha\in(0,1)$, 利用 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha x}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=0$ 得

$$1=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right],$$

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{\alpha\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},$$

再令 $\alpha\pi=t$, 即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin t}&=\frac{1}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\frac{t}{\pi}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2-n^2}\\&=\frac{1}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2},\quad t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.\end{aligned}$$

例题 15.11 证明: $\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\ x\in(0,\pi)$

证明 令 $\alpha\in(0,1)$, 利用 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos\alpha x=\frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=\pi$ 得

$$\cot\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2},\ \alpha\in(-1,1) \tag{15.12}$$

(15.12) 式对 α 从 0 到 t 上积分,

$$\ln\frac{\sin\pi t}{\pi t}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right),\ t\in(0,1)$$

最后, 令 $x=\pi t$, 得

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),\ x\in(0,\pi)$$

例题 15.12 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

证明 收敛是没有问题的. 考虑 $\sin x$ 的无穷乘积公式

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

取 $x=\mathrm{i}\pi$ 然后利用复变函数中 $\sin z$ 的展开式 $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 得

$$\sin(\mathrm{i}\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\mathrm{i}\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-e^{\pi})$$

15.2.1 奇 (偶) 延拓

问题 15.2 若 $f(x)$ 只在 $[0,l]$ 上给出, 要将其展开为以 $2l$ 为周期的傅里叶级数, 该怎么办?

(1) 奇延拓, 即令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,l]\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x\in[-l,0)\end{cases}$$

这个 $F(x)$ 是延拓后的奇函数. 这里应特别注意 $x=0$ 的情形. 若原先 $f(x)\neq 0$, 只能修改此处定义, 强行令 $F(0)=0$, 以保证 $F(x)$ 为 $[-l,l]$ 上的奇函数.

(2) 偶延拓, 即令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,l]\\ f(-x), & x\in[-l,0)\end{cases}$$

这个 $F(x)$ 是延拓后的偶函数.

例题 15.13 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad \forall x\in(0,\pi)$$

解 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数. 作

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi]\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓, 则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 处间断, 又在 $(0,\pi]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$, 因此 $\Psi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_0=0\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$

✍ **练习 15.2** 计算: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^5}=\dfrac{17\pi^5}{5832}$..

解 *(by 予一人)*[98] 设 $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^5}$, 通过逐阶求导，有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4},$$
$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3},$$
$$f'''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$
$$f''''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

最后一式右端是熟知的 *Fourier* 级数结果, 由此得微分方程, 通过反复积分, 即可解得

$$f(x)=-\frac{x^5}{240}+\frac{\pi x^4}{48}+C_3x^3+C_2x^2+C_1x+C_0.$$

将 $f(0)=0, f'(0)=\zeta(4), f''(0)=0, f'''(0)=-\zeta(2)$ 等初值代入，可求得待定系数

$$C_0=0, C_1=\zeta(4), C_2=0, C_3=-\frac{1}{6}\zeta(2).$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^5}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{17\pi^5}{5832}.$$

15.3 任意周期的函数的 Fourier 展开

定理 15.3 ($[-l,l]$ 上 $f(x)$ 的傅里叶展开)

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad(x\in C)\tag{15.13}$$

其中

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x\\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}\tag{15.14}$$

♡

证明 若函数 $f(x)$ 的周期为 2π, 为变为周期为 $2l$ 的函数, 令 $x=at$, 则

$$f(x)=f(x+2\pi)\Rightarrow f(kt)=f(at+2\pi)$$

- 若函数 $f(x)$ 为周期为 T 的周期函数, 则函数 $f(ax+b)$ 为周期为 $\frac{T}{a}$ 的周期函数

$$f(t)\sim 2l\Rightarrow f(at)\sim\frac{2l}{a}\quad\Rightarrow\quad\frac{2l}{a}=2\pi\Rightarrow a=\frac{l}{\pi}$$

故作变换 $x = \frac{l}{\pi}t$, 则

$$\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = f(x)$$

是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期为 $2l$ 的函数. 利用前面的结果, 有

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

代回变量, 就有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

相应的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

例题 15.14 计算 $\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$ 的 Fourier series.

解 考虑 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1+\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})} = \frac{1}{1+r\cos\theta+ir\sin\theta} \\ &= \frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2} - i\cdot\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

于是，记

$$a = \frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}, b = -\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

我们得到 $\frac{1}{1+z} = a + ib$, 那么它的辐角

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = -\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}a+ib &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\varphi}\end{aligned}$$

又注意到

$$\sqrt{a^2+b^2} = |a+bi| = \frac{1}{|1+z|} = \frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\bar{z})}}$$

所以

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\bar{z})}}e^{i\varphi}$$

就是

$$-i\varphi = i\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+z) - \ln(1+\bar{z}))$$

这时，利用 $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ 及 $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, 得到

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta)$$

$$\ln(1+\overline{z})=\overline{\ln(1+z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta-ir^n\sin n\theta)$$

于是，自然就得到

$$\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}r^n\sin n\theta$$

这个不是别的，就是它的 *Fourier Series*. 另外，若令 $r=-1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

例题 15.15 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$. 用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

证明 由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知, f 为以 2, $\sqrt{3}$ 为周期的周期函数,
所以它的 Fourier 系数为:

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\,,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$, 所以

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$; 同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$.
联立, 有

$$\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$$

得 $a_n=b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$.
而 f 可导, 其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$, 所以有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常数

例题 15.16 设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $f(x)+f(x+\frac{1}{2})=f(2x)$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明 (by ytdwdw) 设 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2k\pi x+b_k\sin 2k\pi x)$$

则 $f(x)+f(x+\frac{1}{2})$ 的 Fourier 展开式为

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+(-1)^k)a_k\cos 2k\pi x+(1+(1+(-1)^k))b_k\sin 2k\pi x\right]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(2a_{2k}\cos 4k\pi x+2b_{2k}\sin 4k\pi x)$$

而 $f(2x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 4k\pi x+b_k\sin 4k\pi x)$$

比较系数得到 $a_0=0$,

$$a_k=2a_{2k}\,,\quad b_k=2b_{2k}\,,\quad k\geqslant 1.$$

从而

$$a_k=2^n a_{2^n k}\,,\quad b_k=2^n b_{2^n k}\,,\quad \forall k\geqslant 1, n\geqslant 1.$$

注意到 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}nb_n=0$$

所以

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}2^nkna_{2^nk}=0\,,\quad b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}2^nknb_{2^nk}=0\,,\quad \forall k\geqslant 1.$$

这样 $f(x)$ 的 Fourier 系数均为零, 所以 $f(x)\equiv 0$.

笔记 关于 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 的条件可以减弱为: 设 $g(x)$ 以 1 为周期, 可积且绝对可积, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0, f(x)=f(0)+\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

15.3.1 正弦级数与余弦级数

定理 15.4 ($[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是奇 (偶) 函数的傅里叶展开)

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时

$$f(x)=\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}}^{\text{正弦级数}}\quad (x\in C) \tag{15.15}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{15.16}$$

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时

$$f(x)=\overbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}}^{\text{余弦级数}}\quad (x\in C) \tag{15.17}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad (n=0,1,2,3,\cdots) \tag{15.18}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x$$

注

$$[0,l]\text{上}f(x)\text{展开成正弦或余弦级数}\begin{cases}\xrightarrow[f(x)\to\text{奇函数}]{\text{作奇延拓}}\text{正弦级数}\\ \xrightarrow[f(x)\to\text{偶函数}]{\text{作偶延拓}}\text{余弦级数}\end{cases}$$

15.3.2 Parseval 等式

定理 15.5 (Parseval 等式)

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数，且有 $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例题 15.17 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

证明 考虑函数 $f(x) = x, x \in (-\pi,\pi)$, 将其傅立叶展开

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

利用 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

其中 a_n 为 e^{inx} 的系数，即 $\dfrac{(-1)^n}{n} i, a_0 = 0$ 那么有

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

例题 15.18 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$

证明 取 $f(x) = x^2$. 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成余弦级数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \forall n = 1,2,\cdots$$

因此,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

根据 Parseval 等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2$$

即

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

例题 15.19 记 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha \\ 0, & \alpha \leqslant |x| < \pi \end{cases}$ 的 Fourier 系数为 $\{a_0, a_n, b_n\}$, 试求级数的和:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

证明 依题设知 $b_n = 0\,(n \in \mathbb{N})$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

根据 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

我们有

$$\frac{2\alpha}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{(\pi-\alpha)\alpha}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(\pi-\alpha)\alpha}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$$

例题 15.20 计算 $I = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$

解 *(by 西西)* 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$$

由于

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{3} = \sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$I = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$$

再利用熟悉的 (傅里叶或者 $\mathrm{Li}_2(z)$) 性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$$

将 $x = \frac{\pi}{3}$ 带入即可得到 $I = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{72}$.

例题 15.21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 将 $f(x)$ 奇延拓到 $[-1,0]$ 上，则延拓后的函数 $f(x)$ 能在 $[-1,1]$ 上展开为 Fourier 级数，且有

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x), 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

逐项求导得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)b_n\cos(n\pi x), 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

再由 Parseval 等式得

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 b_n^2 = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 \\ &\geqslant \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi^2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi^2\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $b_n = 0(n \geqslant 2)$ 也即 $f(x) = b_1\sin(\pi x)$ 时成立, 其中 b_1 为常数.

例题 15.22 设 $f(x) \in C^1[a,b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 则有不等式

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

其中, 常数 $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 是最佳常数, 不能改进. 等号成立当且仅当

$$f(x) = c\sin\frac{(x-a)\pi}{b-a}.$$

其中 c 为常数

证明 令 $t = \frac{(x-a)\pi}{b-a}$, 且定义 $g(t) = f(x) = f\left(\frac{b-a}{\pi}t + a\right)$

$$g'(t) = \frac{b-a}{\pi}f'(x) = \frac{b-a}{\pi}f'\left(\frac{b-a}{\pi}t + a\right),$$

则有

$$g(0) = f(a) = 0 = f(b) = g(\pi),$$

将 $g(t)$ 奇延拓到 $[-\pi,0]$ 上，则延拓后的函数 $g(t)$ 能在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数，且有

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nt, 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

逐项求导得

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos nt, 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

再由 Parseval 等式得

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b\left[\frac{\pi}{b-a}g'(t)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b-a}\int_0^\pi [g'(t)]^2\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{Parseval}} \frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 \\
&\geqslant \frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{\pi}{b-a}\int_0^\pi g^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

故

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $b_n = 0(n \geqslant 2)$ 也即 $f(x) = b_1\sin\frac{(x-a)\pi}{b-a}$ 时成立, 其中 b_1 为常数.

笔记 解答中的变换是由 $y = kx + c$ 按照 $x = a, b$ 分别变成 $0, \pi$ 待定出来的.

例题 15.23 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 且 $f(a) = f(b)$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x) = c\cos\frac{2\pi}{b-a}x + d\sin\frac{2\pi}{b-a}x$.

证明 令 $x=\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a$, 且定义 $g(t)=f(x)=f\left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a\right)$

$$g'(t)=\frac{b-a}{2\pi}f'(x)=\frac{b-a}{2\pi}f'\left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a\right)$$

则有

$$g(-\pi)=f(a)=f(b)=g(\pi),$$

将函数 $g(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数, 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a\right)dt=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),t\in[-\pi,\pi]$$

逐项求导, 得

$$g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nt+nb_n\cos nt),t\in[-\pi,\pi]$$

再由 Parseval 等式得

$$\begin{aligned}\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\left[\frac{2\pi}{b-a}g'(t)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{b-a}\int_{-\pi}^{\pi}[g'(t)]^2\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{Parseval}}\frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)\\&\geqslant\frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\pi}{b-a}\int_{-\pi}^{\pi}g^2(t)\,\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等号当且仅当 $a_n=0,b_n=0(n\geqslant 2)$ 也即

$$g(t)=a_1\cos t+b_1\sin t\Rightarrow f(x)=-a_1\cos\frac{2\pi(x-a)}{b-a}-b_1\sin\frac{2\pi(x-a)}{b-a}$$

时成立, 其中 a_1,b_1 为常数.

例题 15.24 (Wirtinger 不等式)[99] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数, 且 $a_0=a_{n+1}=0$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-a_{k-1})^2\leqslant 2\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

例题 15.25 (Hilbert 不等式) 设级数 $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}a_m^2$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}a_m^2$ 收敛. 证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_mb_n}{n+m}\leqslant\pi\sqrt{\sum_{m=1}^{+\infty}a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2}$$

定理 15.6 (广义 Parseval 等式[84])

设 $f,g\in\mathbb{R}^2[-\pi,\pi]$, 则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

其中 a_n,b_n 是 f 的 Fourier 系数, α_n,β_n 是 g 的 Fourier 系数.

15.4 傅里叶级数的收敛判别法

定理 15.7 (狄利克雷 (Dirichlet) 收敛定理)

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数, 如果在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足:

1. 连续或只有有限个第一类间断点;
2. 只有有限个极值点;

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 记其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{15.19}$$

且 $S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{ 为端点} \end{cases}$

例题 15.26 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\,,\ n=1,2,\cdots.$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则求 $S(-\frac{9}{4})$

解 作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|, & x\in[0,1] \\ -f(-x)=-\left|x+\dfrac{1}{2}\right|, & x\in[-1,0] \end{cases}$$

画图知 $x=-\dfrac{1}{4}$ 为 $F(x)$ 的连续点，根据周期性

$$S(-\tfrac{9}{4})=S(-\tfrac{1}{4})=-\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{4}$$

例题 15.27 假设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x-1, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$ 的周期为 2 傅里叶级数 $S(x)$, 则在 $x=-\dfrac{1}{2}, x=0, x=1, x=\dfrac{3}{2}$ 处 $S(x)$ 分别收敛于 ____, ____, ____, ____

解

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{ 为端点} \end{cases}$$

画图可知，$x=-\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的连续点，故

$$S(-\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，故

$$S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

$x=1$ 为 $f(x)$ 的端点，故

$$S(1)=S(-1)=\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

根据周期性 $S(\frac{3}{2}) = S(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$

15.5 傅里叶级数的微分与积分

定理 15.8 (逐项微分)

设 $f(x) \in C^{(1)}([-\pi,\pi])$, 且是以 2π 为周期的函数, 若在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外 $f''(x)$ 存在, 且 $f'' \in R([-\pi,\pi])$, 则 $f(x)$ 的 *Fourier* 展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

可在 $[-\pi,\pi]$ 上进行逐项微分

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

且上式中级数一致收敛

例题 15.28 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

证明 考虑三角级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. 显然该级数在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛, 因而在 $(0,2\pi)$ 上, 确有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^x \frac{\pi - t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4},\ \forall x \in [0,2\pi]\end{aligned} \tag{15.20}$$

对 (15.20) 式在 $[0,2\pi]$ 上积分就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

定理 15.9 (Du Bois Reymond, 逐项积分[84])

设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 *Riemann* 可积, 其 *Fourier* 展开为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则对任意区间 $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

15.5.1 Weierstrass 逼近

定理 15.10 (Weierstrass 第二逼近)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 则对于任何 $\varepsilon>0$ 存在三角多项式:

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

使得

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall x\in[0,2\pi]$$

15.5.1.1 傅里叶级数的复数形式

定理 15.11 (傅里叶级数的复数形式)

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}$.

其中 $c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

例题 15.29 (周明强, P425) 设 $f(x)\in C((-\infty,+\infty))$. 若有 $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})\ (x\in\mathbb{R})$, 则 $f(x)\equiv C$(常数)

证明 考察 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 依题设知

$$C_n=\int_0^1 f(x)e^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x+\sqrt{2})e^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$$

令 $t=x+\sqrt{2}$, 可得

$$C_n=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}f(t)e^{-2n\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_0^1 f(t)e^{-2n\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\cdot C_n.$$

由于 $n\neq0$ 时, $e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\neq1$, 故知 $C_n=0\ (n\neq0)$.

15.6 傅里叶积分与傅里叶变换

定义 15.4 (傅里叶变换)

1. *Fourier 正变换 (简称傅氏正变换)*

$$\underset{\text{象函数}}{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\mathcal{F}[f(t)]$$

2. *Fourier 逆变换 (简称傅氏逆变换)*

$$\underset{\text{象原函数}}{f(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中, $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为傅里叶变换对, 记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

例题 15.30 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 (Richard Troll) 由泊松求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)$$

可知, 其中 $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ 为傅立叶变换。那么有 $f(x)=e^{-a|x|}$,f 的傅立叶变换为

$$\hat{f}(\xi)=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$$

也就是说

$$\frac{1}{2a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-a|n|}-\frac{1}{a^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{a^2+4\pi^2k^2}$$

则

$$\lim_{a\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{a^2+4\pi^2k^2}=\lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right)-\frac{1}{a^2}\right\}=\frac{1}{12}$$

从而就有 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$

性质 傅里叶变换的性质:

(1) 线性性质: 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, $G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]$, α, β 为常数, 则

$$\mathcal{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(t)+\beta G(t)]=\alpha f(\omega)+\beta g(\omega)$$

(2) 位移性质: 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, t_0, ω_0 为实常数, 则

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega),$$
$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(t).$$

(3) 相似性质: 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, a 为非零常数, 则

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(4) 微分性质: 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0$, 则

$$\mathcal{F}[f'(t)]=\mathrm{i}\omega\mathcal{F}[f(t)],$$

一般地, 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^n\mathcal{F}[f(t)].$$

(5) 积分性质: 设 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t$, 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$, 则

$$\mathcal{F}[g(t)]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}[f(t)].$$

定理 15.12

若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除有限个非整数的极点外处处解析，且存在常数 $R>0$ 和 $M>0$，使当 $|z|>R$ 时，有 $|zf(z)|\leqslant M$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n)=-\sum_{f(z)\text{的极点}}\operatorname{res}(\pi\cot\pi z f(z))$$

例题 15.31 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$ 的和

解 (by 向禹)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sum\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=\pm\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}$$

其中

$$\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2}, z=\mathrm{i}\right)=\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2}, z=-\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}\pi\coth\pi$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}\coth\pi-\frac{1}{2}$$

例题 15.32 计算: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2+1}$

解 *(by 向禹) 法 1.* 令 $\omega=e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 则

$$n^4+n^2+1=(n^2-\omega)(n^2-\omega^2)$$

于是

$$\frac{1}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(\frac{1}{n^2-\omega}-\frac{1}{n^2-\omega^2}\right).$$

利用傅里叶级数, 我们可以得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a}=\frac{-1+\pi\sqrt{a}\coth(\pi\sqrt{a})}{2a}$$

故可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega}\right)=\frac{1}{6}\left(-3+\pi\sqrt{3}\tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

法 2(留数).

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^4+z^2+1}, z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}, e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}, e^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}\right)-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{2}\cdot 2\left[\frac{\cos\left(e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\pi\right)}{2+\left(-2+e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)}+\frac{\cos\left(e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\pi\right)}{2+\left(-2+e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)}\right]-\frac{1}{2}\\&=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

参考文献

[1] RICE R, SCHWEIZER B, SKLAR A. When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$?[J/OL]. The American Mathematical Monthly, 1980, 87(4): 252-263. http://yaroslavvb.com/papers/rice-when.pdf.

[2] 予一人. 一个函数方程问题 [EB/OL]. 2019. https://zhuanlan.zhihu.com/p/89982205.

[3] 徐大顺. 全网首发 | 谢惠民上册答案 PDF 版免费发 | 共两百六十二页 | 非标题党 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/165650660.

[4] 予一人. 怎样证明根号 3 是无理数? [EB/OL]. 2019. https://www.zhihu.com/question/20485843.

[5] 我真的不懂分析. 如何选择一本适合你的《数学分析》教科书? [EB/OL]. 2020. https://www.bilibili.com/video/BV1xp4y1e7Nh.

[6] tian27546 西西. 西西的大学数学竞赛搞笑秘密献给浪哥 [Z]. [出版地不详: 出版者不详], 2013.

[7] 杨艳萍, 明清河. 数学分析中的重要定理 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2015.

[8] 周明强. 数学分析习题演练 [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2010.

[9] 楼红卫. 数学分析要点·难点·拓展 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[10] 舒阳春. 高等数学中的若干问题解析 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[11] ACHILLE HUI. showing $a_n = \frac{\tan(1)}{2^1} + \frac{\tan(2)}{2^2} + \cdots + \frac{\tan(n)}{2^n}$ is not cauchy[EB/OL]. 2013. https://math.stackexchange.com/questions/501182.

[12] 徐森林, 薛春华. 数学分析第一册 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[13] 楼红卫. 微积分进阶 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[14] MATHROC, 予一人, 要是 Masami 就好了. 如何证明这个数列极限收敛问题?[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/452405197.

[15] 国防科学技术大学数学竞赛指导组. 大学生数学竞赛指导 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[16] MBFKK. 【问题与解答】关于某道根的极限问题的一些想法 [EB/OL]. 2018. https://mp.weixin.qq.com/s/Il584ijmcjJb_-QGv8oveQ.

[17] 逆逆. 【问题与解答】级数等式渐近分析与麻蛋定理 [EB/OL]. 2018. https://mp.weixin.qq.com/s/DP9-b72Hx0BJMOth2vFurg.

[18] 徐森林, 薛春华. 数学分析精选习题全解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[19] 予一人, MATHROC. 如何求该和式序列的极限?[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/479655650.

[20] HUKILAU17. Denote $s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i}{n+1+i}$, find $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$[EB/OL]. 2018. https://artofproblemsolving.com/community/c7t116f7h1617426_limit_calculus.

[21] MAORENFENG88. 一类数列问题的做法。[EB/OL]. 2018. http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=38220&extra=page%3D1.

[22] 予一人. 需要用定积分定义吗?[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/478995971.

[23] FURDUI O. Limits, series, and fractional part integrals[M]. [S.l.]: Springer New York, 2013.

[24] 同济大学数学系. 高等数学习题全解指南 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[25] TOBINBIRD, GAO R, JOHN. 一致连续性的实用性在哪？为什么要叫一致连续性？有了连续性为什么还需要一致连续性？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/356778601.

[26] YTDWDW. 数学分析高等数学例题选解 V6[EB/OL]. 2016. http://wenku.baidu.com/view/d252c01ccf84b9d528ea7aa4.html.

[27] 神琦冰河. 高阶导数公式汇总 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/303161999.

[28] 予一人, 电渺陶琅, 聆歌君.Egregium. 如何计算函数 $f(x) = log(x)/x$ 的 n 阶导数？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/471102829.

[29] 同济大学数学系. 高等数学 [M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[30] 虚调子. 请问这道含积分的中值定理题目怎么做?[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/451360006.

[31] 考研竞赛数学. 2021 年东南大学高数竞赛暨江苏省第十八届高数竞赛选拔赛试题及参考解答 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/hxtfUNyUCl_rz9v7F14ldg.

[32] 数海梦寻. 中值随思 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/_obSpLY1kKUxKKIspovXbg.

[33] 予一人. 图片中的问题如何证明呢？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/460059787.

[34] 考研竞赛数学. 每日一题 193：常系数线性微分方程求解的降阶法 [EB/OL]. 2018. https://mp.weixin.qq.com/s/nI_pHa4Lku7S8UH3C7bxBA.

[35] 刘思齐. 数学分析（1）：第 6 次习题课 [EB/OL]. 2014. http://www.siqiliu.com/note/notes/MA-I/answer-6.pdf.

[36] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 等. 数学分析习题课讲义 [M]. 第一版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[37] 予一人, PERPLEXBOY. 数学分析，大佬第四题咋整？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/440538787.

[38] 予一人. 一道数学分析题?[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/371517976.

[39] 零蛋大. 多次中值定理题目的解题思路 [EB/OL]. 2019. https://zhuanlan.zhihu.com/p/76520470.

[40] 零蛋大. 微分多中值等式命题证明的思路探索与典型例题分析 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/Ryh8vwr8q_eC0fcHDJPULw.

[41] YTDWDW. 避开 Taylor 公式求 $lim_{x\to0}[sin(tanx) - \tan(sinx)]/x^7$[EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4849863006?pid=99918090290&cid=#99918090290.

[42] 零蛋大. 求极限：泰勒公式应展开到第几阶？[EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/219965285.

[43] 山大附中西西的博客. 谈加边 [EB/OL]. 2016. http://blog.sina.com.cn/s/blog_62a489bd0102wf0h.html.

[44] 朱尧辰. 数学分析范例选解 [M]. 安徽: 中国科学技术大学出版社, 2015.

[45] SAMMY711. 请证明：e^{π}>21?? ——东京大学 1999 年高考第六题 (理科)[EB/OL]. 2017. https://zhuanlan.zhihu.com/p/28278604.

[46] DID. How prove this inequality $\frac{3}{4} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} < 1$[EB/OL]. 2013. https://math.stackexchange.com/questions/532059.

[47] 予一人. 如何证明不等式 $\sin x/x \geqslant (\pi^2-x^2)/(\pi^2+x^2), x\in\mathbb{R}$? [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/355479801.

[48] MEI J, XU H. Note on the hölder norm estimate of the function $x\sin(1/x)$[J]. arXiv preprint arXiv:1407.6871, 2014.

[49] 神琦冰河. 积分级数欣赏 (5)[EB/OL]. 2020. https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=Mzg5MDAxNTc3NQ==&mid=2247485333&idx=1&sn=595976c1b666458664b5e1e19e26a6bb&chksm=cfe25ee5f895d7f3e273cdc8b3f1ed7b7d668b8ca2bd3b195485144ae77a2178e2ee8c56f9de&mpshare=1&scene=23&srcid=0309PhZMG5rmuyoBjOSgadQL&sharer_sharetime=1615266353755&sharer_shareid=79447cb4c502fae62a97c9bae0bed672#rd.

[50] MATHROC, 予一人. 这道难度较大的定积分如何做? [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/383448413.

[51] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[52] 金玉明, 顾新身, 毛瑞庭. 积分的方法与技巧 [M]. 安徽: 中国科学技术大学出版社, 2017.

[53] 零蛋大. 利用定积分定义求极限 (by 汤)[EB/OL]. 2018. https://wenku.baidu.com/view/aad329b2b9f67c1cfad6195f312b3169a451eac3.html.

[54] 向禹. 一道贴吧极限题 [EB/OL]. 2018. https://mp.weixin.qq.com/s/CeKUGc0cT5CELJnpYm2oPg.

[55] 徐森林, 薛春华. 数学分析第三册 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[56] 予一人. 求教一道数学分析题，怎么做啊? [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/432119362.

[57] 庄碧如. 最佳逼近常数的上界的 D.Jackson 估计 [J/OL]. 新疆大学学报 (自然科学版), 1990, 007(002): 17-26. http://www.doc88.com/p-8886316941014.html.

[58] OLOA O. Inequality of numerical integration $\int_0^\infty x^{-x}\,dx$[EB/OL]. 2014. https://math.stackexchange.com/questions/909637.

[59] PTR. 这道积分不等式该如何思考? [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/478027453.

[60] 零蛋大. 巧用"拼凑法"妙证积分不等式 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/gvUQ7VhK8fRRW_Rr1qZwyA.

[61] LEE S. How to prove this intergral inequality with the $\frac{4}{15}$[EB/OL]. 2017. https://math.stackexchange.com/questions/2086301.

[62] KOUBA O, NEGOMETYANOV Y, NEGOMETYANOV Y. Prove that $\left|30240\int_0^1 x(1-x)f(x)f'(x)dx\right| \leqslant 1$.[EB/OL]. 2020. https://math.stackexchange.com/questions/3783034.

[63] BILER P, WITKOWSKI A. Problems in mathematical analysis[M]. [S.l.]: CRC Press, 1990.

[64] 汪林, 戴正德, 杨富春, 等. 数学分析问题研究与评注 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[65] 汪林. 数学分析中的问题和反例 [M]. 云南: 云南科技出版社, 1990.

[66] SCIBIRD. 我的数学分析积木 [EB/OL]. 2014. http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=30035.

[67] 零蛋大. 请问这个题如何想到这种换元? [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/458633176.

[68] FIN3574. 这道题到底有多少种做法? [EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4331366750.

[69] 予一人. 一道三角函数的积分题，有没有比较方便的做法？[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/427786981.

[70] 予一人. 1/(1+sinx)š 的积分怎么积？[EB/OL]. 2019. https://www.zhihu.com/question/355563130.

[71] UNDULOID. 这个定积分怎么计算？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/447433058.

[72] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[73] 陈兆斗, 郑连存, 王辉, 等. 大学生数学竞赛习题精讲 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.

[74] UNDULOID, 素履之往. 如何求解这个微分方程 $y'' = f(x, y)$?[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/448021277.

[75] FIN3574.【微分方程】二阶线性微分方程の Wronskian 法 [EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4501477872.

[76] UNDULOID. 如何求解该变系数微分方程方程组?[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/433273925.

[77] 予一人. 下面这个递推数列如何求其通项？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/463034302.

[78] DYLAAAN.【数列】浅谈“不动点”求数列通项的方法 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/104544760.

[79] 三千弱水. xdm，这题怎么做呀？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/474707626.

[80] 予一人. 如何求这个含取整运算的递归数列的通项公式？[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/436369659.

[81] 徐小湛. 高等数学学习手册 [M]. 第一版. 北京: 科学出版社, 2005.

[82] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[83] 考研竞赛数学. 每日一练 375：多元函数条件极值拉格朗日乘数法中齐次化方法 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/nDE7rznIwKgBgFh9RtCzZQ.

[84] 梅加强. 数学分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[85] 零蛋大, MATHROC, 虚调子, 等. 这个积分如何证明？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/480883708.

[86] 向禹. 一道知乎上复杂的二重积分计算 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzI2MjgzOTE5Nw==&mid=2247485465&idx=1&sn=205d71f66487f335ebc6d913906ada01.

[87] UNDULOID, 无人之马. 如何计算妹红的二重积分？[EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/447320633.

[88] 张筑生. 数学分析新讲 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[89] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (下册)[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[90] ROBJOHN, R9M. A serie about $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}$[EB/OL]. 2015. https://math.stackexchange.com/questions/1487596.

[91] 向禹. qq 群的一道审敛题 [EB/OL]. 2020. https://mp.weixin.qq.com/s/-AEWddMQ24CA2qxTsHZomQ.

[92] 向禹. 数学分析葵花宝典 [EB/OL]. http://yuxtech.club/math/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%88%86%E6%9E%90%E8%91%B5%E8%8A%B1%E5%AE%9D%E5%85%B8.pdf.

[93] 欧阳珈樱. 一道求和函数的题 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/197627545.

[94] SPIVEY M Z. The euler-maclaurin formula and sums of powers[J]. Mathematics Magazine, 2006, 79(1): 61-65.

[95] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计 [M]. 山东: 山东科学技术出版社, 1983.

[96] 我真的不懂分析. 北京某高校《微观数学》之《$\zeta(3)$ 的无理性》[EB/OL]. 2020. https://www.bilibili.com/video/BV17a4y1i72D?from=search&seid=23335786383491274.

[97] 法国球. 为什么全体自然数的和是负十二分之一? [EB/OL]. 2018. https://zhuanlan.zhihu.com/p/35397224.

[98] 予一人. 救救孩子！这个级数怎么算，太难了？[EB/OL]. 2019. https://www.zhihu.com/question/357452421.

[99] ALZER H. Converses of two inequalities of ky fan, o. taussky, and j. todd[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, 161(1): 142-147.

[100] 齐民友. 重温微积分 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[101] 陈天权. 数学分析讲义 (第一册)[M]. 第 1 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[102] 陈天权. 数学分析讲义 (第二册)[M]. 第 1 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[103] 陈天权. 数学分析讲义 (第三册)[M]. 第 1 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[104] RUDIN W. 华章数学译丛: 数学分析原理 [M]. 赵慈庚, 蒋铎, 译. 第三版. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[105] 徐森林, 薛春华. 数学分析第二册 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[106] 裴礼文. 数学分析中的问题和反例 [M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[107] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.

[108] 徐利治, 陈文忠. 渐近分析方法及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[109] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 第四版. 山东: 山东科学技术出版社, 2010.

[110] KUIPERS L N H. Uniform distribution of sequences[M]. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

[111] 吴崇试. 数学物理方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[112] BRONSTEIN M, ANTIPOLIS I S. Symbolic integration tutorial[J]. Inria Sophia Antipolis Issac, 1998.

[113] TOPSøE F. Some bounds for the logarithmic function[J]. Inequality theory and applications, 2007.

[114] 于品. 数学分析之课程讲义（丘成桐数学英才班试用）[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/425449191/answer/1523054581.

[115] tian27546 西西. 第四届网络杯数学竞赛试题 [EB/OL]. 2015. https://tieba.baidu.com/p/3735326803?red_tag=0336938263.

[116] tian27546 西西. 2015 年西西辅导班征解试题 (第二期)[EB/OL]. 2015. https://tieba.baidu.com/p/3613872754.

[117] tian27546 西西. 大学数学竞赛前 5 次讲义 [Z]. [出版地不详: 出版者不详], 2013.

[118] YTDWDW. 一道难爆的极限题，只有大神才会 [EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4841341640.

[119] YTDWDW. 请问谁会证明梅尔滕斯定理啊 [EB/OL]. 2015. https://tieba.baidu.com/p/3790549679?red_tag=0103617084.

[120] YTDWDW. 个人感觉偏技巧的一道极限题 [EB/OL]. 2017. https://tieba.baidu.com/p/4999729581?red_tag=3083521989.

[121] 未知. Problem. Compute lim sin tan x tan sin x arcsin arctan x[EB/OL]. https://math.berkeley.edu/~giventh/lim.pdf.

[122] 零蛋大. 多元函数求极限方法总结 [EB/OL]. 2019. https://zhuanlan.zhihu.com/p/98921951.

[123] 零蛋大. 求极限：添项拆项法的应用 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/270731675.

[124] 零蛋大. 求极限：取对数的" 套路"[EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/296376879.

[125] 零蛋大. 不定积分的解题思路及技巧总结 [EB/OL]. 2020. https://zhuanlan.zhihu.com/p/326288584.

[126] 零蛋大. 利用微分方程法构造辅助函数的进一步探索 [EB/OL]. 2021. https://zhuanlan.zhihu.com/p/372195576.

[127] 零蛋大. 待定系数法在积分不等式的应用 [EB/OL]. 2021. https://mp.weixin.qq.com/s/D8i4pP5djjpMxlOIPUgrFQ.

[128] EUFISKY. 巴塞尔问题 (Basel problem) 的多种解法 [EB/OL]. 2016. http://www.cnblogs.com/Eufisky/p/7648569.html.

[129] FIN3574, 街角和风铃, 超级马里奥 045, 等. 发个题， 想看看大家的解法。[EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4428450841#87016105253l.

[130] UNDULOID. 是怎么求出来的？ [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/429110722.

[131] UNDULOID, 向禹. 如何计算下面这个二重积分？[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/426216082.

[132] 虚调子, 匿名用户. 如何处理下列的差分方程？ [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/407198647.

[133] 予一人. 导函数必连续？ 这个错在哪！ [EB/OL]. 2019. https://zhuanlan.zhihu.com/p/89791382.

[134] 予一人. 这个问题应该如何解决？ [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/436969624/answer/1652172119.

[135] 予一人. 这个数列极限题加加边题怎么做？[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/436915738/answer/1650333187.

[136] 予一人, 向禹, 水之心. 请问如何证明下面这个双中值等式?[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/400768411.

[137] 予一人, 匿名用户. 如何证明此不等式呢？ [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/434609840.

[138] 予一人. 这题咋写啊？ [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/459416568.

[139] 予一人. 这个中值定理题目怎么证明?[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/397747389.

[140] 苏承心. 如何证明不等式`(x+1)^(1/(x+1))+x^(-1/x)>2`?[EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/404707051.

[141] 长白山. 高数证明题怎么解？ [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/455538428.

[142] 罗旻杰, 向禹, 不可描述, 等. 如何计算这个数列极限？ [EB/OL]. 2020. https://www.zhihu.com/question/429850861.

[143] 不可描述, 海阔天空, 三千弱水. 又是一个做不出来的极限，该怎么做？ [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/448100756.

[144] RICKY, 予一人. 如何证明: $e > 23$? [EB/OL]. 2021. https://www.zhihu.com/question/465861734.

[145] CLIN. How find the minimum of the value k such this intergral $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant k\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$ [EB/OL]. 2014. https://math.stackexchange.com/questions/786563.

[146] USER48941. If $f(2x - f(x)) = x$. find all bijective functions.[EB/OL]. 2015. https://math.stackexchange.com/questions/891116.

[147] ACHILLE HUI. How to show the existence of the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ if xn satisfy $x^{-n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x+k)^{-n}$?[EB/OL]. 2018. https://math.stackexchange.com/questions/2982897.

索　引