

对偶理论的性质及证明

性质 1(对称性) 对偶问题的对偶问题是原问题

证明 设原问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = CX \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & w = Yb \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} YA \geq C \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

对偶问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi = CU \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} AU \leq b \\ U \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

比较式(1)和式(3), 显然二者是等价的, 命题得证.

性质 2(弱对偶性) 设原问题为式(1), 对偶问题为式(2), \bar{X} 是原问题的任意一个可行解, \bar{Y} 是对偶问题的任意一个可行解, 那么总有

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}b \quad (4)$$

证明 根据式(1), 由于 $AX \leq b$, 又由于 $\bar{Y} \geq 0$, 从而必有

$$\bar{Y}AX \leq \bar{Y}b \quad (5)$$

根据式(2), 由于 $YA \geq c$, 又由于 $\bar{X} \geq 0$, 从而必有

$$\bar{Y}AX \geq C\bar{X} \quad (6)$$

结合式(5)和式(6), 立即可得 $C\bar{X} \leq \bar{Y}b$, 命题得证.

性质 3(最优性) 设 X^* 原问题式(1)的可行解, Y^* 是对偶问题式(2)的可行解, 当是 $CX^* = Y^*b$ 时, X^* 是原问题式(1)的最优解, Y^* 是对偶问题式(2)的最优解.

证明 设 \bar{X} 是式(1)的最优解, 那么有

$$C\bar{X} \geq CX^* \quad (7)$$

由于 $CX^* = Y^*b$, 那么

$$C\bar{X} \geq Y^*b \quad (8)$$

根据弱对偶性质, 又有

$$C\bar{X} \leq Y^*b \quad (9)$$

从而 $C\bar{X} = Y^*b$, 也就是 X^* 是原问题式(1)的最优解。

同理，也可证明 Y^* 是对偶问题式(2)的最优解。

性质 4(无界性) 设原问题为无界解，则对偶问题无解。

证明 用反证法证明。

设原问题为式(1)，对偶问题为式(2)。

假定对偶问题有解，那么存在一个可行解为 \bar{Y} 。这时对偶问题的目标函数值为 $\bar{Y}b = T$ 。

由于原问题为无界解，那么一定存在一个可行解 \bar{X} 满足 $C\bar{X} > T$ ，因此 $C\bar{X} > \bar{Y}b$ 。

而根据弱对偶性，又有 $C\bar{X} \leq \bar{Y}b$ ，发生矛盾。从而对偶问题没有可行解。

性质 5(强对偶性、对偶性定理) 若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且最优目标函数值相等。

证明 设 B 为原问题式(1)的最优基，那么当基为 B 时的检验数为 $C - C_B B^{-1}A$ ，其中 C_B 为由基变量的价值系数组成的价值向量。

既然 B 为原问题式(1)的最优基，那么有 $C - C_B B^{-1}A \leq 0$ 。

令 $Y = C_B B^{-1}$ ，那么有 $C - YA \leq 0 \Rightarrow YA \geq C$ ，从而 $Y = C_B B^{-1}$ 是对偶问题式(2)的可行解。

这样一来， $Y = C_B B^{-1}$ 是对偶问题的可行解， $X_B = B^{-1}b$ 是原问题的最优基可行解。

由于 $CX = C_B X_B + C_N X_N = C_B B^{-1}b$ ，而 $Yb = C_B B^{-1}b$ ，从而有 $CX = Yb$ 。根据性质 3，命题得证。

性质 6(对偶松弛定理、松弛性) 若 \hat{X} ， \hat{Y} 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{Y}X_s = 0$ 和 $Y_s \hat{X} = 0$ ，当且仅当 \hat{X} ， \hat{Y} 为最优解。

证明 设原问题和对偶问题的标准型是

原问题	对偶问题
$\max z = CX$	$\min w = Yb$
$s.t. \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$	$s.t. \begin{cases} YA \geq C \\ X \geq 0 \end{cases}$

将原问题目标函数中的系数向量 C 用 $C = YA - Y_s$ 代替后，得到

$$Z = CX = (YA - Y_s)X = YAX - Y_s X \quad (10)$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量，用 $b = AX + X_s$ 代替后，得到

$$\omega = Yb = Y(AX + X_s) = YAX + YX_s \quad (11)$$

若 $\hat{Y}X_s = 0$ ， $Y_s \hat{X} = 0$ ，则 $C\hat{X} = \hat{Y}A\hat{X} = \hat{Y}b$ ，由最优性可知 \hat{X} ， \hat{Y} 分别是原问题和对偶问题的最优解。

又若 \hat{X} ， \hat{Y} 分别是原问题和对偶问题的可行解，再根据最优性，则有 $C\hat{X} = \hat{Y}b$

由式(10)和(11)，必有 $\hat{Y}X_s = 0$ ， $Y_s \hat{X} = 0$ 。