运输问题的理论及其求解

Transportation Problem

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

内 容

- 运输问题及其模型
- 运输问题的算法
- 产销不平衡的运输问题

问题描述及其模型

运输问题的描述

假设某种物资有m个生产地点A_i(i=1,2,…m),其产量(供应量)分别为a_i, 有n个销地B_j(j=1,2,…,n),其销量(需求量)分别为b_j。从A_i运输到B_j单位物资的运价为C_{ij}。问如何组织运输才能使得总运费用很小。

销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

运输问题的模型

设从产地A_i运输到销地B_j的物资数量为x_{ij}

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

s.t. 供应： $$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \qquad i=1,2,\cdots,m$$

需求： $$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \qquad j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij}\ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$$

运输问题的模型

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
A= & \left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{ 行} \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{ 行}
\end{array}
\end{array}
$$

$$A = [P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1n}, P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2n}, \ldots, P_{m1}, P_{m2}, \ldots, P_{mn}]$$

$$P_{ij} = (0, \ldots, 1, \ \ldots, 1, \ldots, 0) = e_i + e_{m+j}$$

由于 $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \end{cases}$$ 所以 $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

从而运输问题的m+n个资源约束条件线性相关，这意味着最多有m+n-1个线性无关的资源约束条件，也就是矩阵A的秩 $\leq$ m+n-1。

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{m}\text{ 行}\\
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{n}\text{ 行}
\end{array}
$$

1. 去掉第m+n行

2. 行(1) – 行(m+1) – 行(m+2) – … – 行(m+n-1)

得到新的矩阵B

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m,n-1} & x_{mn} \end{matrix} \\
B= & \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} \boldsymbol{m}\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} \boldsymbol{n\text{-}1}\text{行} \end{matrix}
\end{array}
$$

由于第1, 2,⋯, n-1, n, 2n, ⋯, mn列均为单位向量

故A的秩为m+n−1， **意味着运输问题有m+n-1个基变量**

运输问题的对偶问题

$$\max \ \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

s.t. $\quad u_i + v_j \le c_{ij}$ $\Rightarrow$ 对偶变量 $\mathbf{x_{ij}}$

$$i = 1,2,\cdots,m; \quad j = 1,2,\cdots,n$$

u_i, v_j 无约束

$$i = 1,2,\cdots,m; \ j = 1,\cdots,n$$

原问题和对偶问题之间的关系

目标函数：$\min\ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

st. 供应：$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i$ → 对偶变量 $\mathbf{u_i}$

$i=1,2,\cdots,m$

需求：$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j$ → 对偶变量 $\mathbf{v_j}$

$j=1,2,\cdots,n$

$x_{ij}\geq 0,\qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$

原问题：

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & i=1,2,\ldots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & j=1,2,\ldots,n\\ x_{ij}\geq 0 & i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

对偶问题：

$$\max\ \omega=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

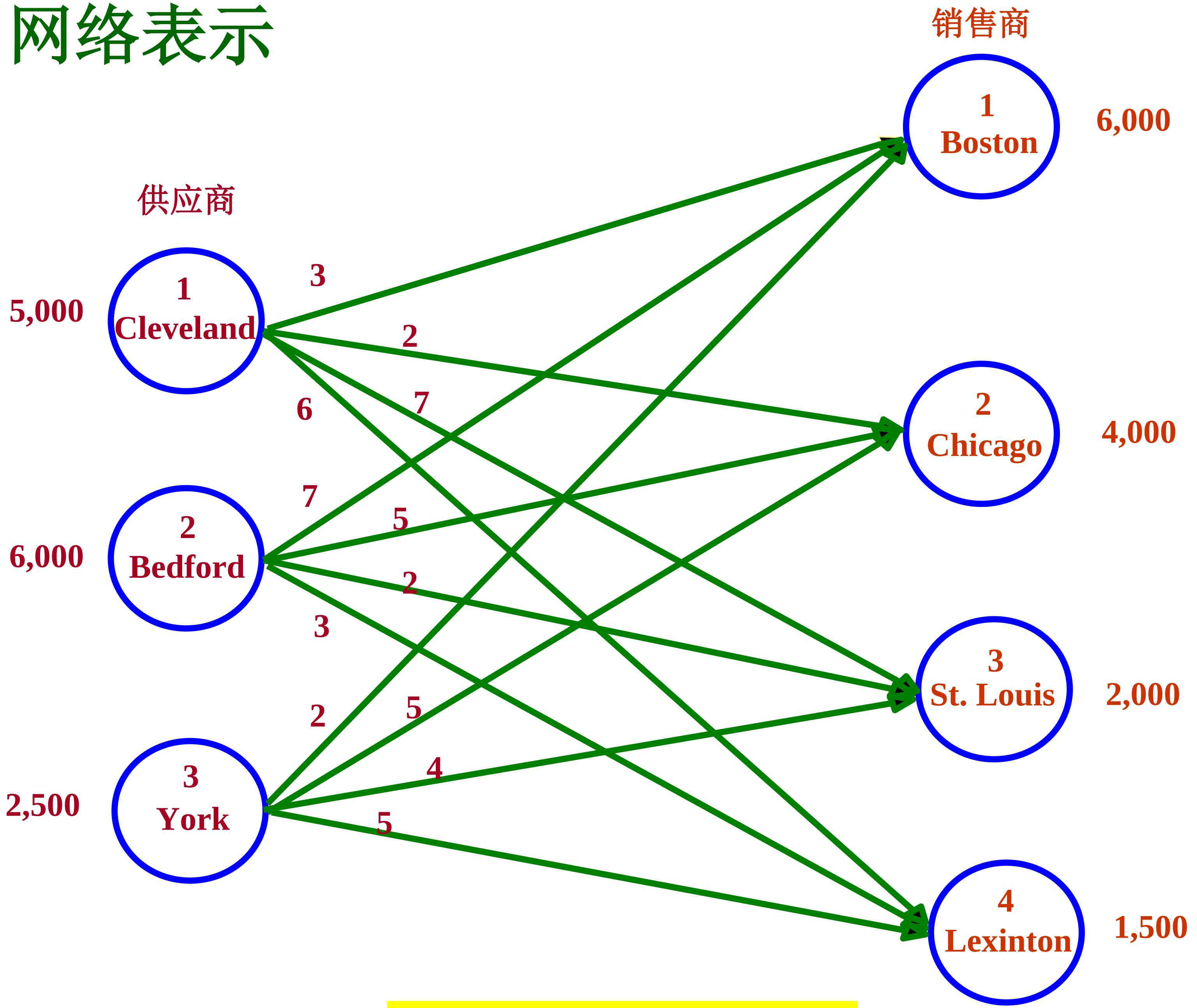
$$s.t.\begin{cases}u_i+v_j\leq c_{ij} & i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\\ u_i\in R & i=1,2,\ldots,m\\ v_j\in R & j=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

运输问题例子

销售商 / 供应商	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	生产能力(吨)
Cleveland	3	2	7	6	5,000
Bedford	7	5	2	3	6,000
York	2	5	4	5	2,500
需求量(吨)	6,000	4,000	2,000	1,500	

每吨运输成本(＄/吨)

网络表示


销售商
供应商
1
Cleveland
5,000
2
Bedford
6,000
3
York
2,500
1
Boston
6,000
2
Chicago
4,000
3
St. Louis
2,000
4
Lexinton
1,500
3
2
6
7
7
5
2
3
2
5
4
5

线性规划模型

$$\min\ z = 3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+2x_{31}+5x_{32}+4x_{33}+5x_{34}$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=6000 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=2500 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=6000 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=4000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=2000 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=1500 \\ x_{ij}\geq 0 \quad i=1,2,3;\ j=1,2,3,4 \end{cases}$$

特殊的模型

1. 总供给与总需求平衡
2. A的结构
3. A的秩为m+n-1
4. 图形式为二分图

特殊的解

- 如果各产地的供给量a_i和各需求地的需求量b_j均为整数，则任意一个基可行解都是整数解。

- 关于运输问题一定存在可行解和最优解

$$x_{ij}=\frac{a_i b_j}{S}\qquad\left(S=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$

- 基变量的个数一定为m+n-1个

特殊的算法

——表上作业法

表上作业法

第1步：求初始可行基解(西北角法\最小元素法)

第2步：求检验数(位势法), 判定是否是最优解。当所有的检验数非负，则算法结束；否则进入第三步。

第3步：基变换

1. 选定入基变量(最小检验数规则)
2. 决定出基变量并给出θ值(闭回路法)
3. 根据θ值得到新的基可行解(闭回路法)，转入第2步。

初始基本可行解的构造

——特有的专门方法

在运输表上逐一获得m+n-1个基变量及其值

运输问题特殊的表结构

	B_1	B_2		B_n	产量
A1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A2	c_{11} x_{21}	c_{12} x_{22}	…	c_{12} x_{2n}	a_2
…	…	…	…		…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

西北角方法

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 5000	2	7	6	~~5,000~~ 0
Bedford	7 1000	5 4000	2 1000	3	~~6,000~~ ~~5000~~ ~~1000~~ 0
York	2	5	4 1000	5 1500	~~2,500~~ 1500
需求量	~~6,000~~ ~~1000~~ 0	~~4,000~~ 0	~~2,000~~ ~~1000~~ 0	1,500	

最小元素法

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 1000	2 4000	7	6	~~5,000~~ ~~1000~~ 0
Bedford	7 2500	5	2 2000	3 1500	~~6,000~~ ~~4000~~ 2500
York	2 2500	5	4	5	~~2,500~~ 0
需求量	~~6,000~~ ~~3500~~ 2500	~~4,000~~ 0	~~2,000~~ 0	~~1,500~~ 0	

退化问题的处理

保证基变量的个数为m+n-1

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 5000	2	7	6	~~5,000~~ 0
Bedford	7	5	2	3	6,000
York	2	5	4	5	2,500
需求量	~~5,000~~ 0	4,000	2,000	2,500	

检验数的计算

——特有的位势法

检验数：目标函数的系数减去对偶变量之和

检验数：非基变量增加一个单位引起的成本变化量

原问题变量 x_{ij} 检验数计算公式：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

其中u_i, v_j为对偶问题的变量，即

$$Y = (u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

特别对于m+n-1个基变量，均有

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$$

检验数公式的推导

根据检验数公式 $\sigma = C - C_B B^{-1} A = C - YA$

既然 $\begin{cases} A = (P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1n}, \ldots, P_{m1}, P_{m2}, \ldots, P_{mn}) \\ C = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn}) \end{cases}$

可得 $\sigma_{ij} = c_{ij} - YP_{ij} \quad i = 1, 2, .., m; \ j = 1, 2, .., n$

由于 $\begin{cases} Y = (u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ P_{ij} = e_i + e_{m+j} \end{cases}$

从而 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad i = 1, 2, .., m; \ j = 1, 2, .., n$

位势法的例子

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3	2	7	6	5,000
Bedford	7	5	2	3	6,000
York	2	5	4	5	2,500
需求量	6,000	4,000	2,000	1,500	

初始基本可行解：

基可行解

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3	2	7	6	5,000
	1000	4000			
Bedford	7	5	2	3	6,000
	2500		2000	1500	
York	2	5	4	5	2,500
	2500				
需求量	6,000	4,000	2,000	15,000	

位势计算：

		v_1	v_2	v_3	v_4
		Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
u_1	Cleveland	3 1000	2 4000	7	6
u_2	Bedford	7 2500	5	2 2000	3 1500
u_3	York	2 2500	5	4	5

$$\begin{cases} u_1+v_1=3 \\ u_1+v_2=2 \\ u_2+v_1=7 \\ u_3+v_1=2 \\ u_2+v_3=2 \\ u_2+v_4=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0; & u_3=-1; \\ v_1=3; & v_3=-2; \\ v_2=2; & v_4=-1 \\ u_2=4; & \end{cases}$$

检验数的计算：

		$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=-2$	$v_4=-1$
		Boston	**Chicago**	**St. Louis**	**Lexington**
$u_1=0$	**Cleveland**	3	2	7	6
		1000	4000	9	7
$u_2=4$	**Bedford**	7	5	2	3
		2500	-1	2000	1500
$u_3=-1$	**York**	2	5	4	5
		2500	4	7	7

入基变量

位势法练习

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 5000	2	7	6	5000
Bedford	7 1000	5 4000	2 1000	3	6000
York	2	5	4 1000	5 1500	2500
需求量	6000	4000	2000	1500	

确定出基变量

——特有的闭回路法

从入基变量出发，找到回到原点的道路

关于闭回路

- 从入基变量(非基变量)出发，按转90度的方法，能够且仅能够得到一个闭回路
- 闭回路上的变量，除一个非基变量外，其余均为基变量。
- 闭回路上的变量的个数一定为偶数个，以非基变量为第一个变量，那么有些变量处于偶数位置，有些变量处于奇数位置。
- 闭回路上各格的调整数量θ等于偶数格上的最小数量，偶数格均减去θ，奇数格均加上θ

基可行解、检验数和入基变量

		$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=-2$	$v_4=-1$
		Boston	**Chicago**	**St. Louis**	**Lexington**
$u_1=0$	**Cleveland**	3 1000	2 4000	7 9	6 7
$u_2=4$	**Bedford**	7 2500	5 -1	2 2000	3 1500
$u_3=-1$	**York**	2 2500	5 4	4 7	5 7

入基变量

构造闭回路，确定θ值

θ=2500

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
Cleveland	+θ 3 1000	-θ 2 4000	7	6
Bedford	-θ 7 2500	+θ 5 -1	2 2000	3 1500
York	2 2500	5	4	5

得到新的基可行解

	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
Cleveland	3 3500	2 1500	7	6
Bedford	7	5 2500	2 2000	3 1500
York	2 2500	5	4	5

闭回路练习

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	**3** **5000**	**2**	**7**	**6**	5000
Bedford	**7** **1000**	**5** **4000**	**2** **1000**	**3**	6000
York	2	5	4 **1000**	5 **1500**	2500
需求量	6000	4000	2000	1500	

求解的整个过程

第一步

给出问题

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3	2	7	6	5000
Bedford	7	5	2	3	6000
York	2	5	4	5	2500
需求量	6000	4000	2000	1500	

第二步

给出初始基可行解

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 1000	2 4000	7	6	5000
Bedford	7 2500	5	2 2000	3 1500	6000
York	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	

求解的整个过程

第三步

计算检验数

定入基变量

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	u_i
Cleveland	3 0	2 0	7 9	6 7	0
Bedford	7 0	5 -1	2 0	3 0	4
York	2 0	5 4	4 7	5 7	-1
v_j	3	2	-2	-1	

第四步

构造闭回路

定出基变量

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 1000	2 4000	7	6	5000
Bedford	7 2500	5	2 2000	3 1500	6000
York	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	

求解的整个过程

第五步

新基可行解

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	供应量
Cleveland	3 3500	2 1500	7	6	5000
Bedford	7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
York	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	

第六步

重算检验数

获得最优解

	Boston	Chicago	St.Louis	Lexington	u_i
Cleveland	3 0	2 0	7 8	6 6	0
Bedford	7 1	5 0	2 0	3 0	3
York	2 0	5 4	4 6	5 6	-1
v_j	3	2	-1	0	

非平衡问题的处理

——转为平衡问题

供过于求的处理

销售商 / 供应商	A	B	C	D	生产能力(吨)
甲	3	2	7	6	5000
乙	7	5	2	3	6000
丙	2	5	4	5	4500
需求量(吨)	6000	4000	2000	1500	

销售商 / 供应商	A	B	C	D	E	生产能力(吨)
甲	3	2	7	6	0	5000
乙	7	5	2	3	0	6000
丙	2	5	4	5	0	4500
需求量(吨)	6000	4000	2000	1500	2000	

供不应求的处理

销售商 供应商	A	B	C	D	生产能力(吨)
甲	3	2	7	6	5000
乙	7	5	2	3	6000
丙	2	5	4	5	2500
需求量(吨)	6000	4000	2000	3500	

销售商 供应商	A	B	C	D	生产能力(吨)
甲	3	2	7	6	5000
乙	7	5	2	3	6000
丙	2	5	4	5	2500
丁	**0**	**0**	**0**	**0**	**2000**
需求量(吨)	6000	4000	2000	3500	

运输问题总结

1. 运输问题的模型
2. 运输问题的初始可行解
3. 检验数计算及闭回路构建
4. 退化问题的处理
5. 产销不平衡的运输问题