线性规划的模型

The models of Linear programming

线性规划问题模型的本质

在行为有效的条件下，应该如何规范人类的决策行为，使得决策目标得到尽可能大的满足，产生最佳的社会效用。

1. 线性规划问题的一般数学模型

1. 模型的三要素

（1）决策变量(decision variable)：变量，表示我们的决策行为。

（2）目标函数(objective function)：所达目标的数学表达式，决策行为产生的后果。

（3）约束条件(constraint condition)：决策行为所受资源环境限制的数学描述，用以规范决策行为。

2. 线性规划模型的要求

（1）变量取值为连续的、可控的量；

（2）目标函数必须是线性表达式；

（3）约束条件必须是线性的等式或者不等式。

线性规划的一般形式模型(代数形式)

目标函数：$\min(\max)\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

$$
s.t.\begin{cases}
\text{普通约束}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge\ or\ =) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge\ or\ =) b_2 \\
\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge\ or\ =) b_m
\end{cases} \\
\text{变量约束：} x_i \ge 0 (x_i \le 0\ or\ \text{无约束）}\ i = 1, 2, \ldots, n
\end{cases}
$$

min：minimize
max：maximize
s.t. --- subject to

$$
\text{常量}\begin{cases}
c_j\text{称为价值系数} \\
b_i\text{称为资源系数} \\
a_{ij}\text{称为技术系数和工艺系数}
\end{cases}
$$

线性规划的模型

不正确的一般形式

目标函数：$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

$$
s.t.\begin{cases}
\text{普通约束}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge \ or \ =) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge \ or \ =) b_2 \\
...... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge \ or \ =) b_m
\end{cases} \\
\text{变量约束：} x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, ..., n
\end{cases}
$$

s.t.---subject to

部分模型的和形式

和形式

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \ge 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

部分模型的矩阵形式和向量形式

$C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$称为价值向量

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$ 称为资源向量

定义A为技术矩阵，P_j为变量x_j的技术向量或列向量，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\min \quad z=CX$$

$$s.t. \quad \begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

向量形式

$$\min \quad z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

$$s.t. \quad \begin{cases} P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n \geq b \\ x_j \geq 0; \quad j=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

线性规划的模型

标准形式（代数形式）

目标函数：$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$
s.t.\begin{cases}
\text{普通约束}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases} \\
\text{变量约束：}x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{cases}
$$

s.t.---subject to

标准模型的矩阵形式和向量形式

矩阵形式

$$\min \quad z = CX$$

$$s.t. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

向量形式

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

线性规划问题的标准形式

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

五个要求：

(1) 所有变量均$x_j \geqslant 0$

(2) 目标函数取最大形式

(3) 普通约束取等号

(4) 资源次数b_i非负

(5) 技术矩阵A的秩为m

线性规划问题的标准形式

标准形式：

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 6 \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \ge 0; \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

一般形式：

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -6 \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le -4, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

一般形式和标准形式的关系

定理 线性规划模型的一般形式总可以转化为标准形式

一般形式向标准形式的转化

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -6 \\ -8x_1 - 6x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le -1, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

第一步　变量规范化

对于 $x_2 \le -1$

令 $x_2^{'} = -1 - x_2$

显然 $x_2^{'} \ge 0$

对于 x_3无约束

令 $x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$

其中 $x_3^{'} \ge 0$，$x_3^{''} \ge 0$

一般形式向标准形式的转化

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -6 \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le -4, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min \quad z = 3x_1 + 2(-x_2^{'} - 4) - 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2(-x_2^{'} - 1) - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) \le 4 \\ 3x_1 - 4(-x_2^{'} - 1) + 7(x_3^{'} - x_3^{''}) = -6 \\ -8x_1 + 6(-x_2^{'} - 1) - (x_3^{'} - x_3^{''}) \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2^{'} \ge 0,\ x_3^{'} \ge 0,\ x_3^{''} \ge 0 \end{cases}$$

一般形式向标准形式的转化

$$\min \quad z = 3x_1 + 2(-x_2^{'} - 4) - 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2(-x_2^{'} - 1) - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) \le 4 \\ 3x_1 - 4(-x_2^{'} - 1) + 7(x_3^{'} - x_3^{''}) = -6 \\ -8x_1 + 6(-x_2^{'} - 1) - (x_3^{'} - x_3^{''}) \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2^{'} \ge 0,\ x_3^{'} \ge 0,\ x_3^{''} \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \quad z = 3x_1 - 2x_2^{'} - 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2^{'} - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) \le 6 \\ 3x_1 + 4x_2^{'} + 7(x_3^{'} - x_3^{''}) = -10 \\ -8x_1 - 6x_2^{'} - (x_3^{'} - x_3^{''}) \ge 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2^{'} \ge 0,\ x_3^{'} \ge 0,\ x_3^{''} \ge 0 \end{cases}$$

一般形式向标准形式的转化

$$\min \quad z = 3x_1 - 2x_2^{'} - 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2^{'} - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) \le 6 \\ 3x_1 + 4x_2^{'} + 7(x_3^{'} - x_3^{''}) = -10 \\ -8x_1 - 6x_2^{'} - (x_3^{'} - x_3^{''}) \ge 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2^{'} \ge 0,\ x_3^{'} \ge 0,\ x_3^{''} \ge 0 \end{cases}$$

第二步　目标最大化

对于

$$\min \quad z = 3x_1 - 2x_2^{'} - 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

令 $z^{'} = -z$

则转化为

$$\max \quad z^{'} = -3x_1 + 2x_2^{'} + 4(x_3^{'} - x_3^{''})$$

一般形式向标准形式的转化

$$\max \quad z' = -3x_1 + 2x_2' + 4(x_3' - x_3'')$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2' - 3(x_3' - x_3'') \le 6 \\ 3x_1 + 4x_2' + 7(x_3' - x_3'') = -10 \\ -8x_1 - 6x_2' - (x_3' - x_3'') \ge 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0 \end{cases}$$

第三步　资源系数非负化

对于

$$3x_1 + 4x_2' + 7(x_3' - x_3'') = -10$$

转化为

$$-3x_1 - 4x_2' - 7(x_3' - x_3'') = 10$$

一般形式向标准形式的转化

$$\max \quad z' = -3x_1 + 2x_2' + 4(x_3' - x_3'')$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2' - 3(x_3' - x_3'') \le 6 \\ -3x_1 - 4x_2' - 7(x_3' - x_3'') = 10 \\ -8x_1 - 6x_2' - (x_3' - x_3'') \ge 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0 \end{cases}$$

第四步　普通约束恒等化

对于

$$x_1 - 2x_2' - 3(x_3' - x_3'') \le 6$$

引入变量$x_4 \ge 0$

转化为

$$x_1 - 2x_2' - 3(x_3' - x_3'') + x_4 = 6$$

对于

$$-8x_1 - 6x_2' - (x_3' - x_3'') \ge 7$$

引入变量$x_5 \ge 0$

转化为

$$-8x_1 - 6x_2' - (x_3' - x_3'') - x_5 = 7$$

一般形式向标准形式的转化

$$\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -6 \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le -4, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\max \quad z' = -3x_1 + 2x_2' + 4(x_3' - x_3'')$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2' - 3(x_3' - x_3'') + x_4 = 6 \\ -3x_1 - 4x_2' - 7(x_3' - x_3'') = 10 \\ -8x_1 - 6x_2' - (x_3' - x_3'') - x_5 = 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0 \\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \end{cases}$$

练习

$$\min \quad z = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq -1 \\ x_1 \leq 0, x_2\text{无约束}, -2 \leq x_3 \leq 4 \end{cases}$$

两个定义

对于 $x_1 - 2x_2^{'} - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) \le 6$

引入变量$x_4 \ge 0$, 转化为 $x_1 - 2x_2^{'} - 3(x_3^{'} - x_3^{''}) + x_4 = 6$

定义变量x_4为松弛变量

对于 $-8x_1 - 6x_2^{'} - (x_3^{'} - x_3^{''}) \ge 7$

引入变量$x_5 \ge 0$, 转化为 $-8x_1 - 6x_2^{'} - (x_3^{'} - x_3^{''}) - x_5 = 7$

定义变量x_5为剩余变量

复习思考题：

1. 什么是模型结构的三要素？
2. 什么是线性规划模型及其经济含义
3. 线性规划模型中价值系数、资源系数、技术系数含义
4. 线性规划模型有几种形式？能否写出这些形式？
5. 什么是线性规划模型的标准形式？为何提出标准形式？你能否把一个线性规划模型的非标准形式转化为标准形式？
6. 松弛变量、剩余变量的定义及作用