整数规划的理论与求解

—— 0－1 规划

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

1. 榜上有名
2. 形影不离(夫唱妇随)
3. 势不两立
4. 脱颖而出

0-1规划的应用

决策变量x_i ——是否做第i件事 $i=1,2,\cdots,n$

$$x_i=\begin{cases}1 & 做第i件事\\ 0 & 不做第i件事\end{cases}$$

n件事中必须做k件并只做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n=k$

n件事中最多做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\le k$

n件事中至少做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\ge k$

做第i件事的充要条件是做第j件事 $\Leftrightarrow x_i=x_j$

做第i件事的充要条件是不做第j件事 $\Leftrightarrow x_i=1-x_j$

只在做了第i件事前提下才考虑是否做第j件事 $\Leftrightarrow x_j\le x_i$

0-1规划的应用

1. 相互排斥的约束条件
2. 资源系数的多重选择
3. 固定费用问题
4. 相互排斥的计划

例1（投资问题） 华美公司有5个项目被列入投资计划，每个项目的投资额和期望的投资收益见下表。该公司只有600万资金可用于投资，由于技术上的原因，投资受到以下约束：

1. 在项目1、2和3中必须有一项被选中
2. 项目3和4只能选中一项
3. 项目5被选中的前提是项目1被选中

如何在 满足上述条件下选择一个最好的投资方 案，使投资收益最大

项 目	1	2	3	4	5
投资额(万元)	210	300	100	130	260
投资收益(万元)	150	210	60	80	180

项　目	1	2	3	4	5
投资额(万元)	210	300	100	130	260
投资收益(万元)	150	210	60	80	180

投资项目模型：

解：设x_i为决策变量（$i=1,2,\cdots,5$）　$x_i=\begin{cases}1 & \text{投资第i个项目}\\ 0 & \text{不投资第i个项目}\end{cases}$

$$\max\ Z=150x_1+210x_2+60x_3+80x_4+180x_5$$

$$\begin{cases}210x_1+300x_2+100x_3+130x_4+260x_5\le 600 \\ x_1+x_2+x_3\ge 1 \\ x_3+x_4\le 1 \\ x_5\le x_1 \\ x_i\ge 0 \quad i=1,2,3,4,5\end{cases}$$

资金限制

在项目1、2和3中必须有一项被选中

项目3和4只能选中一项

项目5被选中的前提是项目1被选中

例2(布点问题) 某城市共有6个区，每个区都可以建消防站。市政府希望设置的消防站最少，但必须满足在城市任何地区发生火警时，消防车要在15分钟内赶到现场。据实地测定，各区之间消防车行驶的时间见右表。请为该市制定一个最节省的计划。

地区	1	2	3	4	5	6
1	0	10	16	28	27	20
2	10	0	24	32	17	10
3	16	24	0	12	27	21
4	28	32	12	0	15	25
5	27	17	27	15	0	14
6	20	10	21	25	14	0

解：$x_i = \begin{cases} 1 & \text{在第i个地区建站} \\ 0 & \text{不在第i个地区建站} \end{cases}$

i=1,2, …,6

z表示全区消防站总数

布点问题模型：

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \ge 1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \ge 1 \\ x_i = 0,1 \qquad i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

最优解

$x_2=1, x_4=1$

最优值

z=2

例3. 高压容器公司制造小、中、大三种尺寸的金属容器，所用资源为金属板、劳动力和机器设备，制造一个容器所需的各种资源的数量如表所示。不考虑固定费用，每种容器售出一只所得的利润分别为 4万元、5万元、6万元，可使用的金属板有500吨，劳动力有300人/月，机器有100台/月，此外不管每种容器制造的数量是多少，都要支付一笔固定的费用：小号是l00万元，中号为 150 万元，大号为200万元。现在要制定一个生产计划，使获得的利润为最大。

资源	小号容器	中号容器	大号容器
金属板(吨)	2	4	8
劳动力(人月)	2	3	4
机器设备(台月)	1	2	3

解：设x_1，x_2，　x_3 分别为小号容器、中号容器和大号容器的生产数量。各种容器的固定费用只有在生产该种容器时才投入，为了说明固定费用的这种性质，设 $y_i = 1$(当生产第 i种容器, 即 $x_i > 0$ 时) 或0（当不生产第 i种容器即 $x_i = 0$ 时）。

引入约束 $x_i \le M y_i$ ，i =1，2，3，M充分大，以保证当 $y_i = 0$ 时，$x_i = 0$ 。这样我们可建立如下的数学模型：

$$\text{Max } z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ & x_i \le M y_i \quad i = 1, 2, 3;\ M\text{充分大} \\ & x_j \ge 0 \quad y_j \text{ 为0-1变量，} i = 1,2,3 \end{aligned}$$

例4.1 三个相互排斥的约束条件，如何保证是其中一个成立？

$$(1)\quad x_1 + x_2 \le 3$$

$$(2)\quad 2x_1 + x_2 \le 5$$

$$(3)\quad 3x_1 + 4x_2 \le 8$$

例4.2 三个相互排斥的约束条件，如何保证是其中一个成立？

(1) $x_1 + x_2 \le 3$

(2) $2x_1 + x_2 \ge 5$

(3) $3x_1 + 4x_2 \le 8$

例4.3 三个相互排斥的约束条件，如何保证是其中一个成立？

(1) $x_1 + x_2 \le 3$

(2) $2x_1 + x_2 \ge 5$

(3) $3x_1 + 4x_2 = 8$

二、过滤隐枚举法　（适合于变量个数较少的0-1规划）

运算次数：21

例：求 $\max Z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

枚举法：
检验可行解：
32次运算

计算目标
函数值：8次

（$x_1\ x_2\ x_3$）	Z值	约束条件（1）	（2）	（3）	（4）	过滤条件
（0 0 0）	0	√	√	√	√	Z≥0
（0 0 1）	-2					
（0 1 0）	5	√	√	√	√	Z≥5
（1 0 0）	3					
（1 0 1）	1					
（1 1 0）	8	×				
（0 1 1）	3					
（1 1 1）	6	√	√	√	√	

最优解：$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$
最优值 $Z = 6$