片纸鉴心 诚信不败

授课教师________ 姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

一. 判断题，正确需简要证，错误需说明理由。(每题 6 分，共 60 分)

1. 若$E\subset\mathbb{R}$是有理数集，则E的余集无理数集$E^c$是 Borel 集。(　　)

2. 若E、F是[0，1]中两个不可测集，那么EUF一定也是不可测集。(　　)

3. 若 M 是可列集，存在一可列子集$M_n\subset M(n=1,2\cdots),\{M_n\}$两两不交且$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$。(　　)

4. 如果在[0，1]区间上可积函数列$\{f_n\}$满足$f_n\xrightarrow{a.e}0$，那么$\int_{[0,1]}f_n dm\to 0$。(　　)

5. 若$u_n:E\to\mathbb{R}$是一列可测函数，满足$\int_E|u_n|dm<\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$在$E$上几乎处处收敛。(　　)

6. 若$f: E \to \mathbb{R}$是可积函数，则$\lim\limits_{n \to \infty} mE(|f| \geq n) = 0$。 (　　)

7. 设$F \subset \mathbb{R}^n$为非空闭集，记$G_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(x,F) < \frac{1}{k}\right\}, (k = 1,2,\cdots)$.那么$G_k$是开集。(　　)

8. 若$A, B$是$\mathbb{R}^n$中的可测集，且$m(A) = m(B)$. 若E满足$A \subset E \subset B$,则E也是可测集。 (　　)

9. 若$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$是有界变差函数，记$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$，则$h$也是$[a,b]$上的有界变差函数。 (　　)

10. 设$f: [0,1] \to [0,1]$，满足对$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$有

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq 1, (n = 1,2,\cdots).$$

则$\{x: f(x) \neq 0\}$是至多可列集。 (　　)

二（10 分）若$\{E_n\}$是$[0,1]$中一列可测集，且$m(E_n)=1(n=1,2,\cdots)$，证明：

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)=1$$

三（10 分）设$f_n,f$均是$E$上定义的可测函数，且满足$mE(f_n \neq f)<\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，证明：

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f.$$

授课教师________ 姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

四（10分）设 $f$ 为 $[0,\ 1]$ 上定义的不取整数值的可测函数，证明如下极限存在并求其值

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\ 1)}|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}\,dm$$

五（10分）设 $mE<+\infty$，证明：$f\in L(E)$ 的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE(|f|\geq n)$ 收敛.

以下判断题by徐玉豪，大题by梁潮启

1. 若 $E\subset\mathbb{R}$ 是有理数集，则E的余集无理数集$E^c$是Borel集.

是：由于单点是~~可测~~Borel集，全体有理数可列.

所以 E ~~可测~~.是Borel集

所以$E^c$是Borel集.

2. 若 E、F是[0, 1]中两个不可测集，那么$E \cup F$也是不可测集

否：设 G是可测集，E是不可测集且$E \subset G$，

记$F = G \setminus E$ 也是不可测集。

但 $E \cup F = G$ 可测。

3. 若 $M$ 是可列集. 存在一可列子集 $M_n \subset M$ $(n=1,2\cdots)$

$\{M_n\}$ 两两不交且 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

是: 存在性. 构造例子即可.

记 $M = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\cdots\}$.

$$M_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots\}.$$

$M_n \subset M$. $(n=1,2,\cdots)$

且 $\{M_n\}$ 两两不相交.

且 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

4. 如果区间 $[0,1]$ 上可积函数列 $f_n$ 满足 $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$，那么 $\int_{[0,1]} f_n \, dm \to 0$

错

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0<|x|<\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le |x| \le 1,\ x=0 \end{cases}$$

$f_n \xrightarrow{a.e.} 0$，但 $\int_{[0,1]} f_n \, dm = 1$.

5. 若 $u_n: E\to \mathbb{R}$ 是一列可测函数满足 $\int_E |u_n|\,dm < \frac{1}{n}$，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $E$ 上几乎处处收敛

否：取 $E_1 \subset E$，$0 < E_1 < \infty$

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n\cdot mE_1} & x\in E_1 \\ 0 & x \in \bar{E}_1 \end{cases}$$

$\int_E |u_n|\,dm < \frac{1}{n}$，但

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $E$ 上不几乎处处收敛

6. 若 $f: E\to R$ 是可积函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f|\geq n)=0$

是. 若不然 $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f|\geq n)=a>0$.

$\varepsilon=\frac{a}{2}$, $\exists N>0$ 当 $n>N$ 时. $|mE(|f|\geq n)-a|<\varepsilon$.

$mE(|f|\geq n) > a-\varepsilon=\frac{a}{2}$.

$\int_E |f|dm > n\cdot\frac{a}{2}$.

$n\to\infty$ 则 $\int_E |f|dm=\infty$ 不可积、矛盾

7. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 为非空闭集，记 $G_k=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \rho(x,F)<\frac{1}{k}\}$，那么 $G_k$ 是开集。

是：若 $G_k$ 是闭集

取 $\{x_n\}\subset G_k$，其中 $\rho(x_n,F)=\frac{1}{k}\cdot(\frac{n-1}{n})$

且 $x_n\in F$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,F)=\rho(\lim\limits_{n\to\infty}x_n,F)=\frac{1}{k}$.

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ \bar{\in}\ G_k$，与 $G_k$ 闭集矛盾。

8 若$A$ $B$是$R^n$中可测集. $mA=mB$、若$E$满足$A\subset E\subset B$. 则$E$也是可测集

证: $\cancel{B\setminus E \subset B\setminus A}$. $\cancel{E\setminus A \subset B\setminus A}$

$m^*E \le mB$. $m_*E \ge mA$.

$mB = mA$.

$m^*E = m_*E$. 可测

9. 若 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界变差函数.

记 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 则 $h$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

是: $\bigvee_a^b h(x) \leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) < \infty$.

所以 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

10、设 $f:[0,1]\to[0,1]$，满足对 $\forall x_1,x_2\cdots x_n\in[0,1]$ 有 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\le 1$．$(n=1,2,\cdots)$ 则 $\{x: f(x)\ne 0\}$ 是至多可列集

是：$\forall \alpha>0$．$E(f\ge\alpha)$ 是一个有限集．

若不然．取 $n=[\frac{1}{\alpha}]+1$．$x_1\ x_2\cdots x_n\in E(f\ge\alpha)$．

则 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ge \alpha([\frac{1}{\alpha}]+1)>1$．矛盾．

$E(f>0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\ge\frac{1}{n})$ 是至多可列集．

又 $0\le f\le 1$．所以 $E(f\ne 0)=E(f>0)$．

真题一　以下页码为第五版

二. $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$ 德摩根公式 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$.

$E_n \subset [0,1]$ 有界，且 $E_n$ 可测，所以 $E_n^c$ 可测，且 $mE_n^c = 1 - mE_n = 0$ ($P_{46}$ 定理 3.2)

~~由可列~~ 进而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$ 可测 ($P_{47}$ 定理 3.4)，则 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k^c = 0$.

所以 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = 1 - 0 = 1$ ($P_{46}$ 定理 3.2).

by 梁琪启

三. 证 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 即证 $mE(f_n \not\to f)=0$

$E(f_n \not\to f)=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{G=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{g>G}^{+\infty}E(|f_g-f|>\frac{1}{k})$ （$P_{90}$ 例1），$E(|f_g-f|>\frac{1}{k})\subset E(f_g\neq f)$，

故 $mE(f_n\not\to f)=m\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{G=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{g>G}^{+\infty}E(|f_g-f|>\frac{1}{k})\leq m\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{G=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{g>G}^{+\infty}E(f_g\neq f)=m\bigcap\limits_{G=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{g>G}^{+\infty}E(f_g\neq f)$

由于 $E(f_g\neq f)\leq\frac{1}{g^2}$，故 $mE(f_n\not\to f)=m\bigcap\limits_{G=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{g>G}^{+\infty}E(f_g\neq f)\leq\lim\limits_{G\to+\infty}\sum\limits_{g=G}^{+\infty}\frac{1}{g^2}=0$. #

by 翟潮启.

以下页码为第五版.

四. 由鲁津定理($P_{97}$ 定理3.1)知对 $\forall \varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset[0,1]$, 使得 $m([0,1]\setminus F)<\varepsilon$, 且 $f(x)$ 在F上为连续函数. 又由于 $\cos\pi x$, $x\in F$ 为有界连续函数; $|x|^{\sqrt{n}}$, $x\in F$ 也为连续函数, 所以 $g_n(x)=|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}$ 在F上为有界连续函数, 又有F为有界闭集, 易知 $g_n(x)$ 在F上可测, 又有 $|g_n(x)|\le 1$, 由勒贝格控制收敛定理知 $g_n(x)$ 在F上可测且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_F|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}dm=\int_F\lim\limits_{n\to+\infty}|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}dm=\int_F 0\,dm=0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,1)}|\cos\pi f(x)|dm=\lim_{n\to+\infty}\int_F|\cos\pi f(x)|dm+\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]\setminus F}|\cos\pi f(x)|dm<\varepsilon.$$

$P_{124}$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{(0,1)}|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}dm\ge 0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{(0,1)}|\cos\pi f(x)|^{\sqrt{n}}dm=0$ # by 梁潮启.

以下第五版

五. $f\in L(E) \Rightarrow |f|\in L(E)$. (P108 定理1.1)

记 $E_n = E(|f|\geq n)$, $\tilde{E}_n = E(n+1>|f|\geq n)$, 则 $E_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}\tilde{E}_n$, 由于 $E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$,

所以 $mE_n=\sum_{i=n}^{\infty} m\tilde{E}_i$ (P47 定理3.4). $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} m\tilde{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot m\tilde{E}_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m\tilde{E}_n \leq \int_E |f|\,dm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\tilde{E}_n}|f|\,dm \leq \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot m\tilde{E}_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m\tilde{E}_n + mE$$

所以 $|f|\in L(E) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m\tilde{E}_n = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ 收敛. # 梁潮启