

## 实变函数反例

1. 不满足任何阶的 Lipschitz 条件的绝对连续函数

$$\text{Lip} \Rightarrow \text{绝对连续}$$

eg. 在区间  $[0, \frac{1}{2}]$  上, 令

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & , x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & , x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

即  $f$  在  $[0, \frac{1}{2}]$  上处处可微. 由数学分析知识得

$f'$  在  $[0, \frac{1}{2}]$  上 Riemann 广义可积

又  $f' \geq 0$ . 故  $f' \in L([0, \frac{1}{2}])$

从而  $f$  在  $[0, \frac{1}{2}]$  上绝对连续

但由于

$$\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \frac{\frac{1}{\ln x}}{x^\alpha} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 0)$$

故  $f$  不满足任何  $\alpha > 0$  阶的 Lip 条件

•  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件指: 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的函数,  $L$  为一正常数, 若对于  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ , 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|^\alpha$$

2. 设  $\{f_n\}$  是可测集  $E$  上的非负有界可测函数序列, 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$ , 但  $\{f_n\}$  却无处收敛到零.

eg. 注意到, 对于  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 可以将  $n$  唯一地表示成

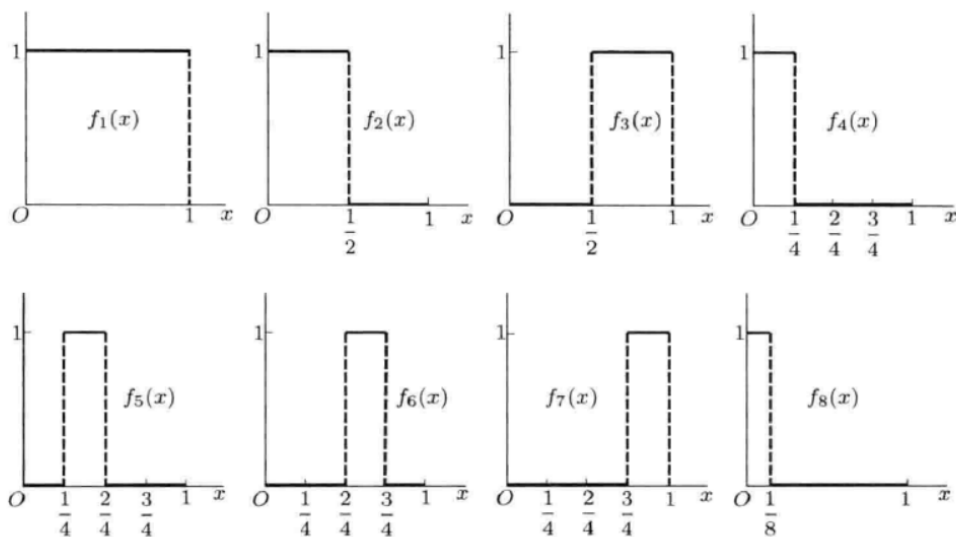
$$n = 2^k + i$$

其中  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq i \leq 2^k - 1$

现令  $f_n$  为: 当  $n=2^k+i$  时, 设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{2^k} \leq x < \frac{i+1}{2^k} \\ 0, & [0,1] \text{ 中的其他点} \end{cases}$$

画出示意图:



显然有

$$\int_{(0,1)} f_n(x) dm = \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2^k}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $k \rightarrow \infty$ , 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

但是  $f_n$  在  $[0,1]$  上的无论哪一点都不趋于零.

□

$$\begin{aligned} 3. \quad f_n &\xrightarrow{\text{强}} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \\ f_n &\xrightarrow{\text{m.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \end{aligned}$$

这两个反例都可以是这个:

$$E = [0,1], f \equiv 0. \text{ 令}$$

$$f_1(x) = \chi_E(x).$$

$$f_2(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x), f_3(x) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

$$f_4(x) = \chi_{[0, \frac{1}{4}]}(x), \dots, f_7(x) = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]}(x) \dots$$

$$\text{则 } \int_E |f_n - f|^p dm = \int_E |f_n|^p dm \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

这是因为

$$\int_E |f_1|^p dm = 1, \int_E |f_2|^p dm = \frac{1}{2}, \int_E |f_3|^p dm = \frac{1}{2},$$

$$\int_E |f_4|^p dm = \frac{1}{4}, \dots, \int_E |f_n|^p dm = \frac{1}{2^k}, \quad (n = 2^k + i)$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } k \rightarrow \infty \text{ 此有 } \int_E |f_n|^p dm \rightarrow 0.$$

$$\text{由 } f_n \xrightarrow{\text{强}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f. \quad (\text{习} \times \text{P156})$$

$$\text{但证推不出 } f_n \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\forall x \in E, f_n(x) \not\rightarrow f(x). \text{ 实际上, } \forall x \in E, \exists \{n_k^{(1)}\} \text{ 和 } \{n_k^{(2)}\} \text{ 满足}$$

$$f_{n_k^{(1)}}(x) = 1, f_{n_k^{(2)}}(x) = 0.$$

这就找到了  $\{f_n(x)\}$  的两个子列, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^{(1)}}(x) = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^{(2)}}(x) = 0. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ 不存在}$$

$$\text{即不满足 } f_n \xrightarrow{a.e.} f.$$

□

4. (1)(L)可积而不(R)可积

(2) 广义(R)可积而不(L)可积

(3) (L)可积而不广义(R)可积

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

若  $f$  有界且在  $[a, b]$  上 (R) 可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上必 (L) 可积

(2) 书 P 114 有一例, 这里再给出一例:

在开区间  $(0, 1)$  上定义  $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2n+1, & \frac{1}{2n+2} < x < \frac{1}{2n+1} \\ -(2n+2), & \frac{1}{2n+3} \leq x \leq \frac{1}{2n+2} \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  易见  $f$  在  $(0, 1)$  上的广义 (R) 积分存在, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (2n+1) \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) - (2n+2) \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\end{aligned}$$

但  $\int_0^1 |f(x)| dx = +\infty$   
故  $f(x)$  在  $(0,1)$  上非  $(L)$  可积

注: 若  $f$  非负且  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  可积, 则  $f$  亦必  $(L)$  可积  
“非负性”不能去.

(3) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  是收敛的正项级数, 在  $[0,1)$  上定义  $f$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{|x-b_n|^{\frac{1}{2}}}, \quad x \neq b_n, \quad f(b_n) = 0$$

其中  $\{b_n\}$  为  $[0,1)$  中的可数稠密子集. 易知  $f$  在  $[0,1)$  上非负可测

$$\begin{aligned}\text{且 } \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left( \int_0^{b_n} \frac{dx}{(b_n-x)^{\frac{1}{2}}} + \int_{b_n}^1 \frac{dx}{(x-b_n)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2\sqrt{b_n} + 2\sqrt{1-b_n}) \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty\end{aligned}$$

即  $f \in L([0,1))$ , 但  $f$  在  $[0,1)$  上并不  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  可积.

5. 在每个子集上都  $(L)$  可积, 但在并集上并不一定  $(L)$  可积

eg. 易证: 若  $f$  是  $E_n$  上的可测函数, 则  $f$  也是  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  上的可测函数  
然而, 对于  $(L)$  积分而言, 相应的命题并不成立. 如.

$$\text{令 } E_n = \left( \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

则  $E_n$  两两不交, 且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0,1]$ . 令

$$f(x) = \begin{cases} n, & \frac{2n}{4n^2-1} < x \leq \frac{1}{2n-1} \\ -n, & \frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{2n}{4n^2-1} \end{cases}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

则  $f$  在每个  $E_n$  上都是有界可测的. 从而  $f \in L(E_n)$ . 其积分值为

$$\int_{E_n} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2n}{4n^2-1}} (-n) dx + \int_{\frac{2n}{4n^2-1}}^{\frac{1}{2n-1}} n dx$$

$$= -n \left( \frac{2n}{4n^2-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + n \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{2n}{4n^2-1} \right)$$

$$= 0.$$

但是

$$\int_E |f(x)| dm = \int_0^1 |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} |f(x)| dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$$

可见  $|f|$  在  $E$  上并不是  $(\mathbb{L})$  可积的。从而  $f$  也不是  $(\mathbb{L})$  可积的。

□