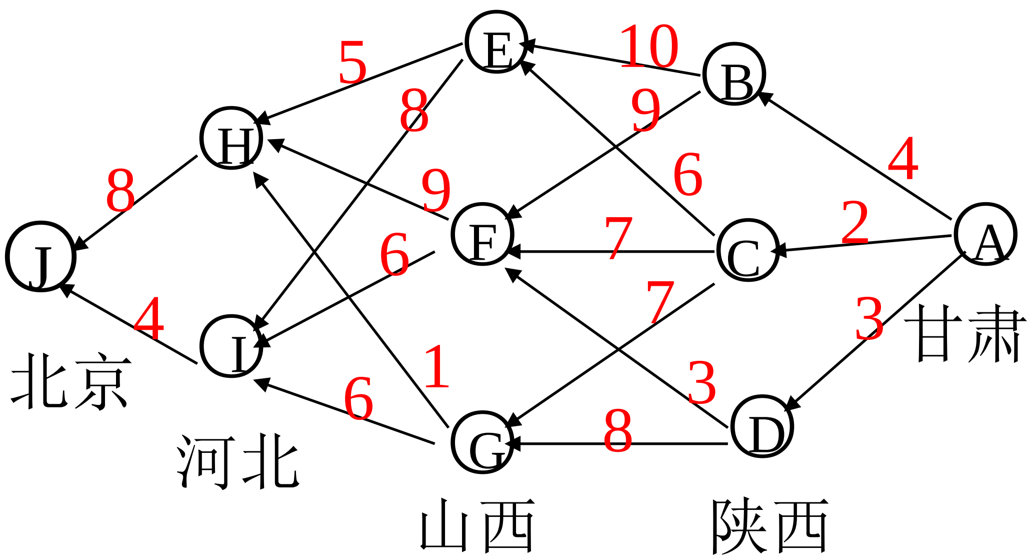
8.4 离散动态规划建模与求解

8.4.1 离散例子

例1　设从甘肃要铺一条煤气管道到北京，途中须经过三个省：陕西、山西、河北，每省设一个中间站。各省建站可供选择的地点及各段距离如下图，现要求选择一条甘肃到北京的铺管线路，使总距离最短。



8.4.1 离散动态规划的建模举例

例2（生产与存储问题）某工厂生产并销售某种产品。已知今四个月市场需求预测如下表，又每月生产j个单位产品的费用为

i月	1	2	3	4
d_i需求	2	3	2	4

$$c(j)=\begin{cases}0 & j=0\\ 3+j & j=1,2,\ldots,6\end{cases}$$

每月库存i个单位产品的费用$E(i)=0.5i$(千元），该厂最大库存容量为3个单位，每月最大生产能力为6个单位，计划开始和计划期末库存量都是零，试制定四个月的生产计划，在满足用户需求条件下，使总费用最小。

8.3.2 离散动态规划建模及求解

第一步　过程描述

1. (分阶段) 分阶段，$k = 1, 2, \ldots, n$

2. (明状态) 明确第 k 阶段的始态 s_k 和终态 s_{k+1}

3. (定决策，看结果) 明确第 k 阶段的决策及其产生的效用。(在连续动态规划中，效用一般为一个表达式；而在离散动态规划中，常表现为一个数值)

4. (知演变) 明确状态转移关系。有时可以写出状态转移方程，有时是不可以的。

8.4.2 离散动态规划建模及求解

第二步 计算(正向法)

1. 利用前部最优值指标函数的递推公式

$$\begin{cases} f_1(s_2) = V_1(u_1, s_1) \\ f_k(s_{k+1}) = f_{k-1}(s_k) + V_k(u_k, s_k)(2 \le k \le n) \end{cases}$$

直到计算出 $f_n(s_{n+1})$ 为止

8.4.2 离散动态规划建模及求解

第二步　计算(反向法)

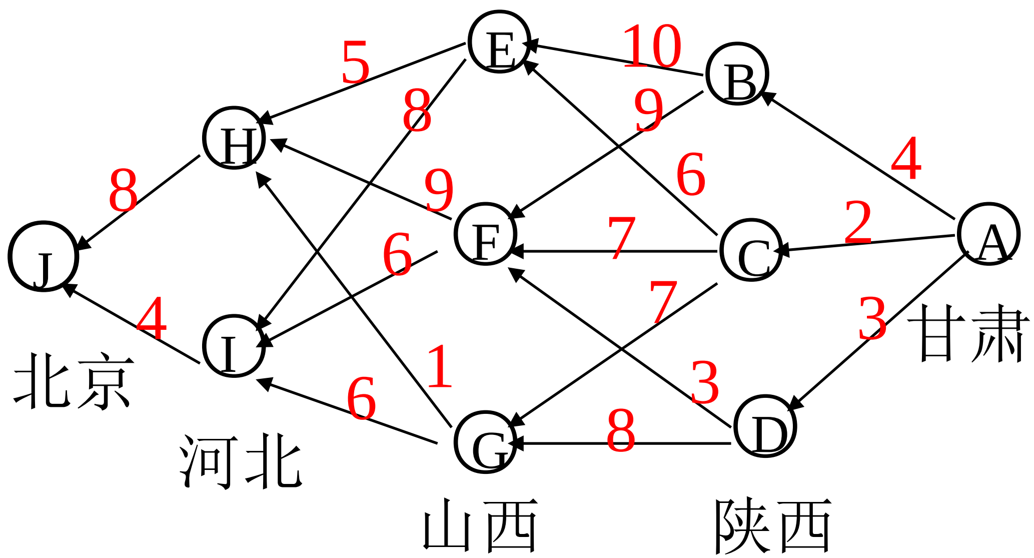
2. 利用后部最优值指标函数的递推公式

$$\begin{cases} f_n(s_n) = opt\{V_n(u_n, s_n)\} \\ f_k(s_k) = opt\{f_{k+1}(s_{k+1}) + V_k(u_k, s_k)\}\ (1 \le k \le n-1) \end{cases}$$

直到计算出 $f_1(s_1)$ 为止

8.4.3 离散动态规划的举例—正向求解

例1　　设从甘肃要铺一条煤气管道到北京，途中须经过三个省：陕西、山西、河北，每省设一个中间站。各省建站可供选择的地点及各段距离如下图，现要求选择一条甘肃到北京的铺管线路，使总距离最短。



8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第一步　过程描述

1. 分 4 个阶段，$k=1,2,3,4$ (分阶段)

2. (明状态)

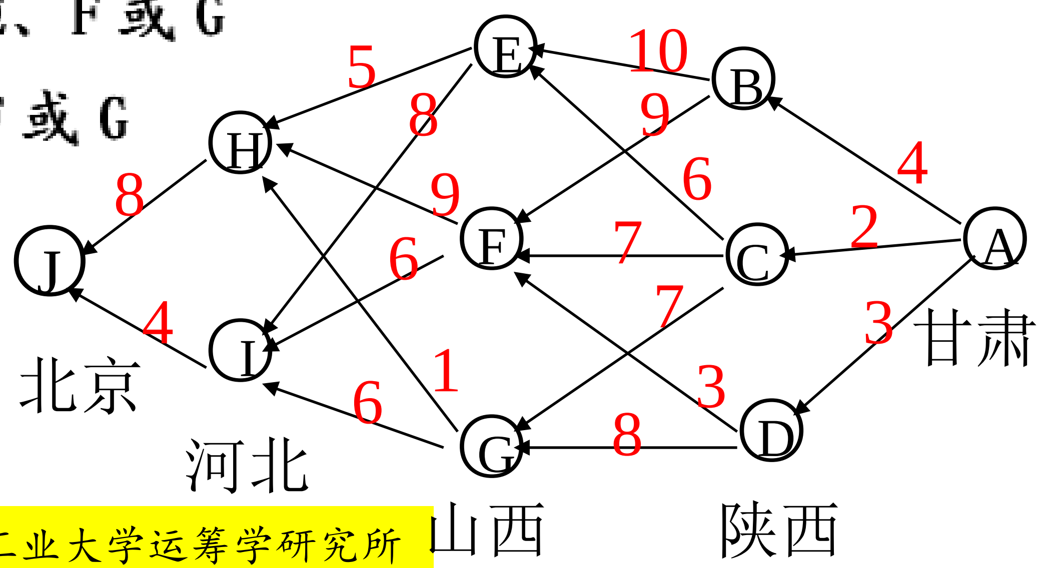
第二个阶段的始态 s_2 的值有 3 个，即点 B、C、D

第二个阶段的终态 s_3 的值是这样定义的

当 $s_2=\text{B}$ 时　　s_3=E 或 F

当 $s_2=\text{C}$ 时　　s_3=E、F 或 G

当 $s_2=\text{D}$ 时　　s_3=F 或 G

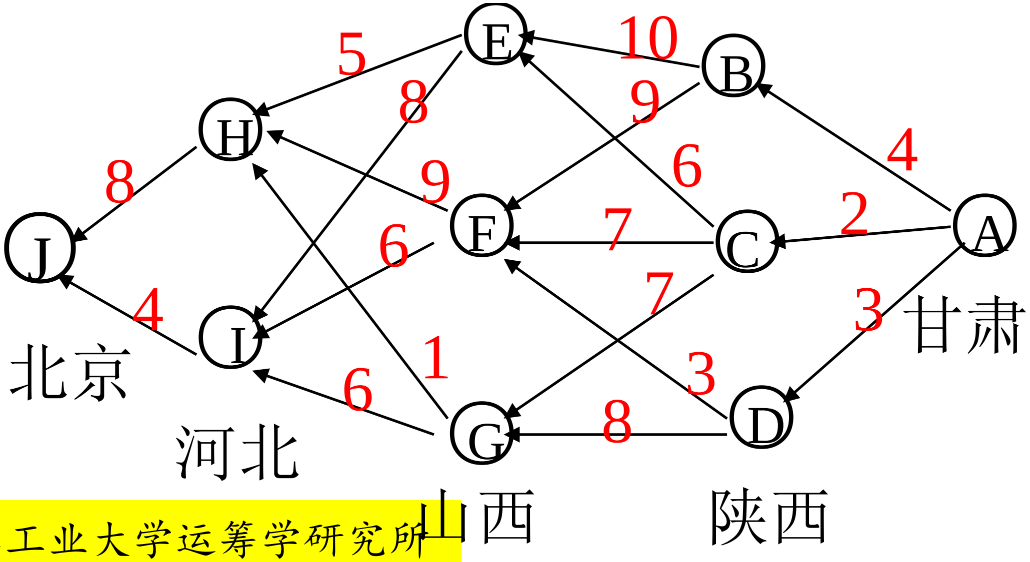


8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第一步　过程描述

3. (定决策，看结果)如果第 2 个阶段的始态 s_2 为点 C，那么 C→F 则是在第 2 个阶段进行的一个决策，决策的效用为 7

4. (知演变)第 2 个阶段作了决策 C→F 后，状态由第二阶段的 $s_2=\text{C}$，进入到第三阶段的状态 $s_3=\text{F}$



8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

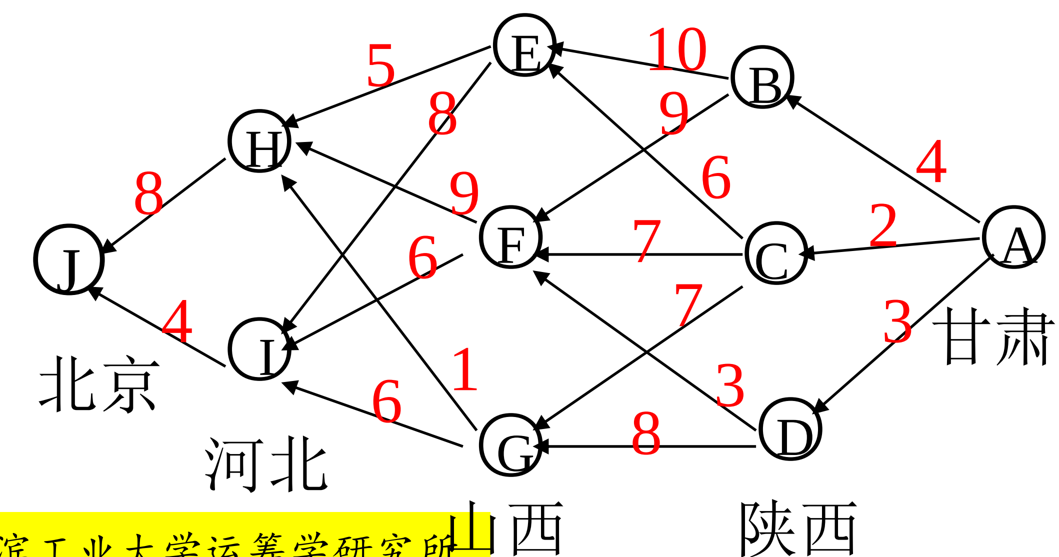
1. 求 $f_1(s_2)$ 即求 $f_1(B)$, $f_1(C)$ 和 $f_1(D)$

利用公式　$f_1(s_2)=\min\{V_1(u_1,s_1)\}$

当 $u_1 = A \to B$ 时, $V_1(u_1,s_1)=4$　故 $f_1(s_2=B)=4$

当 $u_1 = A \to C$ 时, $V_1(u_1,s_1)=2$　故 $f_1(s_2=C)=2$

当 $u_1 = A \to D$ 时, $V_1(u_1,s_1)=3$　故 $f_1(s_2=D)=3$



8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

$$\begin{cases} f_1(B)=4 \\ f_1(C)=2 \\ f_1(D)=3 \end{cases}$$

2. 求 $f_2(s_3)$　即求 $f_2(E)$, $f_2(F)$ 和$f_2(G)$

利用公式　$f_2(s_3)=\min\{f_1(s_2)+V_2(u_2,s_2)\}$

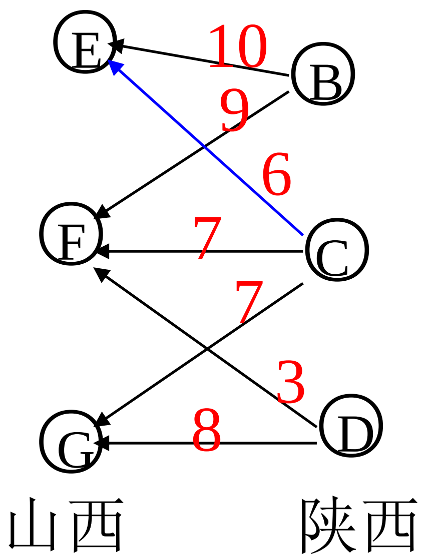
当$s_3=E$时, 从s_2到s_3只有两条路径, 即

$$B\rightarrow E \text{和} C\rightarrow E$$

$$\begin{cases} \text{当}u_2=B\rightarrow E\text{时}, V_2(u_2,s_2)=10 \\ \text{当}u_2=C\rightarrow E\text{时}, V_2(u_2,s_2)=6 \end{cases}$$

则

$$f_2(E)=\min\{f_1(B)+10, f_1(C)+6\}$$
$$=\min\{4+10,2+6\}=8$$



8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

2. 求 $f_2(s_3)$　即求 $f_2(E), f_2(F)$ 和 $f_2(G)$

$$\begin{cases} f_1(B)=4 \\ f_1(C)=2 \\ f_1(D)=3 \end{cases}$$

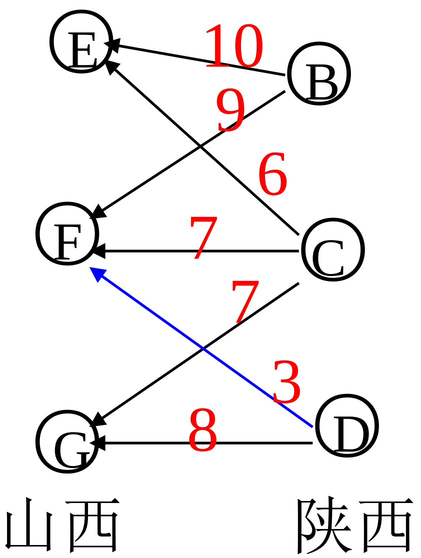
当 $s_3=F$ 时, 从 s_2 到 s_3 有三条路径, 即

$$B\to F, C\to F \text{和} D\to F$$

$$\begin{cases} \text{当} u_2=B\to F \text{时}, V_2(u_2,s_2)=9 \\ \text{当} u_2=C\to F \text{时}, V_2(u_2,s_2)=7 \\ \text{当} u_2=D\to F \text{时}, V_2(u_2,s_2)=3 \end{cases}$$

则

$$f_2(F)=\min\{f_1(B)+9, f_1(C)+7, f_1(D)+3\}$$
$$=\min\{4+9, 2+7, 3+3\}=6$$



8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

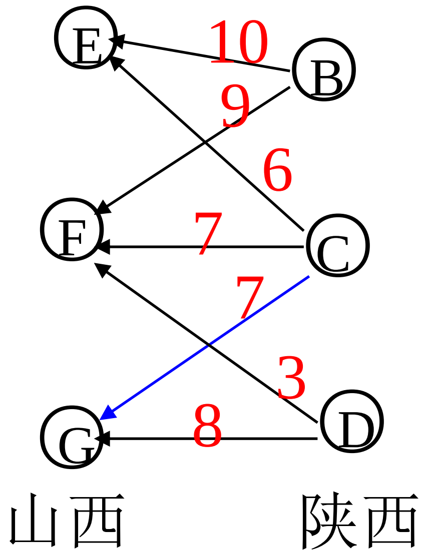
$$\begin{cases} f_1(B)=4 \\ f_1(C)=2 \\ f_1(D)=3 \end{cases}$$

2. 求 $f_2(s_3)$　即求 $f_2(E)$, $f_2(F)$ 和 $f_2(G)$

当 $s_3=G$ 时, 从 s_2 到 s_3 有两条路径, 即

$$C\to G \text{ 和 } D\to G$$

$$\begin{cases} \text{当 } u_2=C\to G \text{ 时}, V_2(u_2,s_2)=7 \\ \text{当 } u_2=D\to G \text{ 时}, V_2(u_2,s_2)=8 \end{cases}$$



则

$$f_2(G)=\min\{f_1(C)+7,\ f_1(D)+8\}$$
$$=\min\{2+7, 3+8\}=9$$

8.4.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

3. 求 $f_3(s_4)$　即求 $f_3(H), f_2(I)$

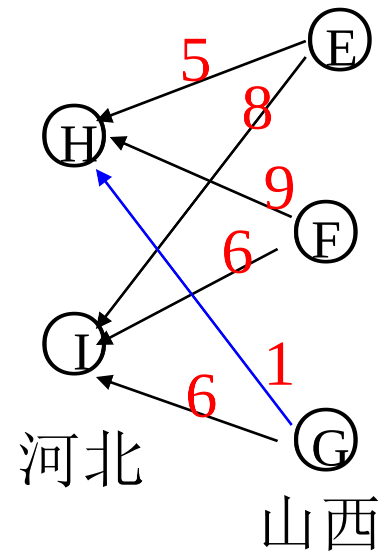
$$\begin{cases} f_2(E)=8 \\ f_2(F)=6 \\ f_2(G)=9 \end{cases}$$

利用公式　$f_3(s_4)=\min\{f_2(s_3)+V_3(u_3,s_3)\}$

当$s_4=H$时, 从s_3到s_4有三条路径, 即

$$E\to H, F\to H \text{和} G\to H$$

$$\begin{cases} \text{当} u_3=E\to H \text{时}, V_3(u_3,s_3)=5 \\ \text{当} u_3=F\to H \text{时}, V_3(u_3,s_3)=9 \\ \text{当} u_3=G\to H \text{时}, V_3(u_3,s_3)=1 \end{cases}$$



则

$$f_3(H)=\min\{f_2(E)+5,\ f_2(F)+9,\ f_2(G)+1\}$$
$$=\min\{8+5,6+9,9+1\}=10$$

8.3.3 离散动态规划举例—正向求解

第二步　求解

3. 求 $f_3(s_4)$　即求 $f_3(H), f_2(I)$

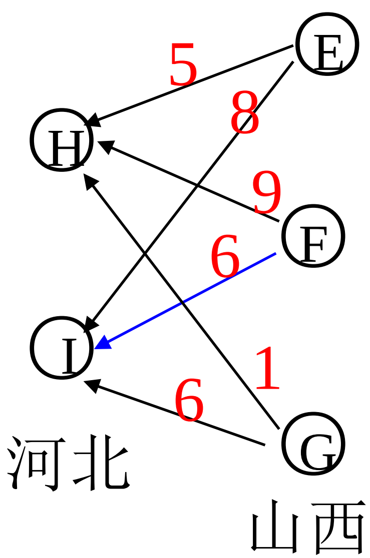
$$\begin{cases} f_2(E)=8 \\ f_2(F)=6 \\ f_2(G)=9 \end{cases}$$

利用公式　$f_3(s_4)=\min\{f_2(s_3)+V_3(u_3,s_3)\}$

当$s_4=I$时, 从s_3到s_4有三条路径, 即

$$E\to I, F\to I \text{和} G\to I$$

$$\begin{cases} \text{当} u_3=E\to I \text{时}, V_3(u_3,s_3)=8 \\ \text{当} u_3=F\to I \text{时}, V_3(u_3,s_3)=6 \\ \text{当} u_3=G\to I \text{时}, V_3(u_3,s_3)=6 \end{cases}$$



则

$$f_3(I)=\min\{f_2(E)+8, f_2(F)+6, f_2(G)+6\}$$

$$=\min\{8+8, 6+6, 9+6\}=12$$

8.4.3 离散动态规划的举例—正向求解

第二步　求解

4. 求 $f_4(s_5)$　即求 $f_4(J)$, $f_4(J)$

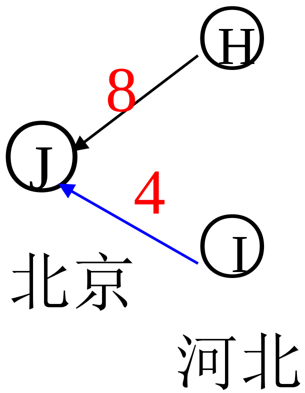
$$\begin{cases} f_3(H)=10 \\ f_3(I)=12 \end{cases}$$

利用公式　$f_4(s_5)=\min\{f_3(s_4)+V_4(u_4,s_4)\}$

当$s_5=J$时, 从s_4到s_5有两条路径, 即

$$H\to J \text{和} I\to J$$

$$\begin{cases} \text{当} u_4=H\to J\text{时}, V_4(u_4,s_4)=8 \\ \text{当} u_4=I\to J\text{时}, V_4(u_4,s_4)=4 \end{cases}$$



则

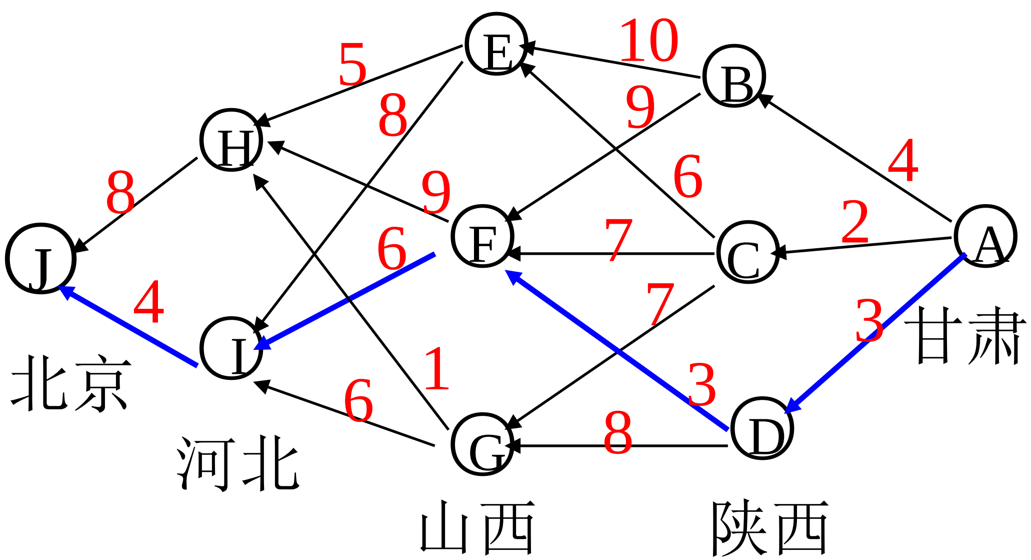
$$f_4(J)=\min\{f_3(H)+8, f_3(I)+4\}$$
$$=\min\{10+8, 12+4\}=16$$

8.4.3 离散动态规划的举例—正向求解

结论：

逆推可得最优方案为

$$A \to D \to F \to I \to J$$



8.4.3 离散动态规划的举例——反向求解

例2（生产与存储问题）某工厂生产并销售某种产品。已知今四个月市场需求预测如下表，又**每月生产j个单位产品**的费用为

i月	1	2	3	4
d_i需求	2	3	2	4

$$c(j)=\begin{cases}0 & j=0\\ 3+j & j=1,2,\ldots,6\end{cases}$$

每月库存i个单位产品的费用$E(i)=0.5i$(千元），该厂最大库存容量为3个单位，每月最大生产能力为6个单位，**计划开始和计划期末库存量都是零**，试制定**四个月**的生产计划，在满足用户需求条件下，使总费用最小。

8.4.3 离散动态规划的举例——反向求解

第一步　过程描述

1. (分阶段) 分 4 个阶段，$k=1,2,3,4$

关键词：1. 试制定四个月的生产计划

2. 每月生产 j 个单位产品

2. (明状态,知演变) 以库存为状态

关键词：计划开始和计划期末库存量都是零

a. 第 1 阶段的始态 $s_1=0$，第 4 阶段的终态 $s_5=0$

b. 任意一个状态 $s_1=0$ 满足要

$$0 \le s_i \le 3 \qquad i=1,2,\ldots,5$$

c. 下月初库存=上月初库存+上月生产量-上月需求量

8.4.3 离散动态规划的举例——反向求解

第一步　过程描述

3. (定决策，看结果)

关键词：每月生产 j 个单位产品

决策：第 k 月生产的产品数量 u_k　　$k=1,2,3,4$

后果：1. 每一阶段的费用由两部分组成，即生产费用和库存费用. 每多生产一个产品就会增加下个月的一个产品的库存费用

2. 生产和库存的总量不小于需求

$$u_k + s_k - d_k \geq 0$$

3. $0 \leq u_k \leq 6$　　$k=1,2,3,4$

8.4.3 离散动态规划的举例——反向求解

第一步　过程描述

4. 第k阶段决策产生的效用

$$V_k(s_k, u_k) = c_k(u_k) + E(s_k)$$

$$c_k(u_k) = \begin{cases} 0 & \text{当} u_k = 0 \\ 3 + u_k & \text{当} u_k > 0 \end{cases}$$

$$E(s_k) = 0.5 * s_k$$

5. 状态转移方程：　$s_{k+1} = u_k + s_k - d_k$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

i月	1	2	3	4
d_i	2	3	2	4

第二步　求解

1. 求 $f_4(s_4)$　即求 $f_4(0), f_4(1), f_4(2), f_4(3)$

利用公式　$f_4(s_4)=\min\{V_4(u_4,s_4)\}$

由于$s_5=0$, d_4=4且$s_5=s_4+u_4-d_4$

再根据约束条件

$0\le u_4\le 6$和$0\le s_4\le 3$

可有四种情形:

$$\begin{cases}当s_4=0时,\ u_4=4\\ 当s_4=1时,\ u_4=3\\ 当s_4=2时,\ u_4=2\\ 当s_4=3时,\ u_4=1\end{cases}$$

则
$$\begin{cases}f_4(0)=\min\{V_4(u_4,s_4)\}\\ \qquad =\min\{c(4)+E(0)\}=7\\ f_4(1)=\min\{V_4(u_4,s_4)\}\\ \qquad =\min\{c(3)+E(1)\}=6.5\\ f_4(2)=\min\{V_4(u_4,s_4)\}\\ \qquad =\min\{c(2)+E(2)\}=6\\ f_4(3)=\min\{V_4(u_4,s_4)\}\\ \qquad =\min\{c(1)+E(3)\}=5.5\end{cases}$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

第二步　求解

s_4	0	1	2	3
$f_4(s_4)$	7	6.5	6	5.5

2. 求 $f_3(s_3)$　即求 $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$

利用公式　$f_3(s_3)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

由于 $d_3=2$ 且 $s_4=s_3+u_3-d_3$

再根据约束条件

$$0\le u_3\le 6 \text{和} 0\le s_3\le 3$$

当 $s_3=0$ 时, 可有四种情形:

$$\begin{cases} \text{当} s_4=0 \text{时}, u_3=2 \\ \text{当} s_4=1 \text{时}, u_3=3 \\ \text{当} s_4=2 \text{时}, u_3=4 \\ \text{当} s_4=3 \text{时}, u_3=5 \end{cases}$$

则 $f_3(0)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_4(0)+c_3(2)+E_3(0) \\ f_4(1)+c_3(3)+E_3(0) \\ f_4(2)+c_3(4)+E_3(0) \\ f_4(3)+c_3(5)+E_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 7+5+0 \\ 6.5+6+0 \\ 6+7+0 \\ 5.5+8+0 \end{Bmatrix}=12$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_4	0	1	2	3
$f_4(s_4)$	7	6.5	6	5.5

第二步　求解

2. 求 $f_3(s_3)$　即求 $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$

利用公式　$f_3(s_3)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

由于 $d_3=2$ 且 $s_4=s_3+u_3-d_3$

再根据约束条件

$$0\le u_3\le 6 \text{和} 0\le s_3\le 3$$

当 $s_3=1$ 时，可有四种情形：

$$\begin{cases}\text{当} s_4=0\text{时}, u_3=1\\ \text{当} s_4=1\text{时}, u_3=2\\ \text{当} s_4=2\text{时}, u_3=3\\ \text{当} s_4=3\text{时}, u_3=4\end{cases}$$

则 $f_3(1)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix}f_4(0)+c_3(1)+E_3(1)\\ f_4(1)+c_3(2)+E_3(1)\\ f_4(2)+c_3(3)+E_3(1)\\ f_4(3)+c_3(4)+E_3(1)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}7+4+0.5\\ 6.5+5+0.5\\ 6+6+0.5\\ 5.5+7+0.5\end{Bmatrix}=11.5$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

第二步　求解

s_4	0	1	2	3
$f_4(s_4)$	7	6.5	6	5.5

2. 求 $f_3(s_3)$　即求 $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$

利用公式　$f_3(s_3)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

由于 $d_3=2$ 且 $s_4=s_3+u_3-d_3$

再根据约束条件

$$0\le u_3\le 6 \text{和} 0\le s_3\le 3$$

当 $s_3=2$ 时, 可有四种情形:

$$\begin{cases} \text{当} s_4=0\text{时}, u_3=0 \\ \text{当} s_4=1\text{时}, u_3=1 \\ \text{当} s_4=2\text{时}, u_3=2 \\ \text{当} s_4=3\text{时}, u_3=3 \end{cases}$$

则 $f_3(2)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_4(0)+c_3(0)+E_3(2) \\ f_4(1)+c_3(1)+E_3(2) \\ f_4(2)+c_3(2)+E_3(2) \\ f_4(3)+c_3(3)+E_3(2) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 7+0+1 \\ 6.5+4+1 \\ 6+5+1 \\ 5.5+6+1 \end{Bmatrix}=8$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_4	0	1	2	3
$f_4(s_4)$	7	6.5	6	5.5

第二步　求解

2. 求 $f_3(s_3)$　即求 $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$

利用公式　$f_3(s_3)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

由于 $d_3=2$ 且 $s_4=s_3+u_3-d_3$

再根据约束条件

$$0\le u_3\le 6 \text{和} 0\le s_3\le 3$$

当 $s_3=3$ 时，可有三种情形：

$$\begin{cases}\text{当} s_4=1 \text{时}, u_3=0\\ \text{当} s_4=2 \text{时}, u_3=1\\ \text{当} s_4=3 \text{时}, u_3=2\end{cases}$$

则 $f_3(3)=\min\{f_4(s_4)+V_3(u_3,s_3)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix}f_4(1)+c_3(0)+E_3(3)\\ f_4(2)+c_3(1)+E_3(3)\\ f_4(3)+c_3(2)+E_3(3)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}6.5+0+1.5\\ 6+4+1.5\\ 5.5+5+1.5\end{Bmatrix}=8$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_3	0	1	2	3
$f_3(s_3)$	12	11.5	8	8

第二步　求解

3. 求 $f_2(s_2)$　即求 $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$

利用公式　$f_2(s_2)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

由于 $d_2=3$ 且 $s_3=s_2+u_2-d_2$

再根据约束条件

$$0\le u_2\le 6 \text{和} 0\le s_2\le 3$$

当 $s_2=0$ 时，可有四种情形：

$$\begin{cases} \text{当} s_3=0 \text{时}, u_2=3 \\ \text{当} s_3=1 \text{时}, u_2=4 \\ \text{当} s_3=2 \text{时}, u_2=5 \\ \text{当} s_3=3 \text{时}, u_2=6 \end{cases}$$

则 $f_2(0)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_3(0)+c_2(3)+E_2(0) \\ f_3(1)+c_2(4)+E_2(0) \\ f_3(2)+c_2(5)+E_2(0) \\ f_3(3)+c_2(6)+E_2(0) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 12+6+0 \\ 11.5+7+0 \\ 8+8+0 \\ 8+9+0 \end{Bmatrix}=16$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_3	0	1	2	3
$f_3(s_3)$	12	11.5	8	8

第二步　求解

3. 求 $f_2(s_2)$　即求 $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$

利用公式　$f_2(s_2)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

由于 $d_2=3$且$s_3=s_2+u_2-d_2$

再根据约束条件

$$0\le u_2\le 6 \text{和} 0\le s_2\le 3$$

当$s_2=1$时, 可有四种情形:

$$\begin{cases} \text{当}s_3=0\text{时}, u_2=2 \\ \text{当}s_3=1\text{时}, u_2=3 \\ \text{当}s_3=2\text{时}, u_2=4 \\ \text{当}s_3=3\text{时}, u_2=5 \end{cases}$$

则 $f_2(1)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_3(0)+c_2(2)+E_2(1) \\ f_3(1)+c_2(3)+E_2(1) \\ f_3(2)+c_2(4)+E_2(1) \\ f_3(3)+c_2(5)+E_2(1) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 12+5+0.5 \\ 11.5+6+0.5 \\ 8+7+0.5 \\ 8+8+0.5 \end{Bmatrix}=15.5$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_3	0	1	2	3
$f_3(s_3)$	12	11.5	8	8

第二步 求解

3. 求 $f_2(s_2)$ 即求 $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$

利用公式 $f_2(s_2)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

由于 $d_2=3$ 且 $s_3=s_2+u_2-d_2$

再根据约束条件

$$0\le u_2\le 6 \text{和} 0\le s_2\le 3$$

当 $s_2=2$ 时，可有四种情形：

$$\begin{cases}\text{当}s_3=0\text{时}, u_2=1\\ \text{当}s_3=1\text{时}, u_2=2\\ \text{当}s_3=2\text{时}, u_2=3\\ \text{当}s_3=3\text{时}, u_2=4\end{cases}$$

则 $f_2(2)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix}f_3(0)+c_2(1)+E_2(2)\\ f_3(1)+c_2(2)+E_2(2)\\ f_3(2)+c_2(3)+E_2(2)\\ f_3(3)+c_2(4)+E_2(2)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}12+4+1\\ 11.5+5+1\\ 8+6+1\\ 8+7+1\end{Bmatrix}=15$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_3	0	1	2	3
$f_3(s_3)$	12	11.5	8	8

第二步　求解

3. 求 $f_2(s_2)$　即求 $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$

利用公式　$f_2(s_2)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

由于 $d_2=3$ 且 $s_3=s_2+u_2-d_2$

再根据约束条件

$$0\le u_2\le 6 \text{和} 0\le s_2\le 3$$

当 $s_2=3$ 时, 可有四种情形:

$$\begin{cases} \text{当} s_3=0\text{时}, u_2=0 \\ \text{当} s_3=1\text{时}, u_2=1 \\ \text{当} s_3=2\text{时}, u_2=2 \\ \text{当} s_3=3\text{时}, u_2=3 \end{cases}$$

则 $f_2(3)=\min\{f_3(s_3)+V_2(u_2,s_2)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_3(0)+c_2(0)+E_2(3) \\ f_3(1)+c_2(1)+E_2(3) \\ f_3(2)+c_2(2)+E_2(3) \\ f_3(3)+c_2(3)+E_2(3) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 12+0+1.5 \\ 11.5+4+1.5 \\ 8+5+1.5 \\ 8+6+1.5 \end{Bmatrix}=13.5$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

s_2	0	1	2	3
$f_2(s_2)$	16	15.5	15	13.5

第二步　求解

4. 求 $f_1(s_1)$　即求 $f_1(0)$

利用公式　$f_1(s_1)=\min\{f_1(s_2)+V_1(u_1,s_1)\}$

由于$s_1=0, d_1=2$且$s_2=s_1+u_1-d_1$

再根据约束条件$0\le u_1\le 6$

可有四种情形:

$$\begin{cases}当s_2=0时, u_1=2\\ 当s_2=1时, u_1=3\\ 当s_2=2时, u_1=4\\ 当s_2=3时, u_1=5\end{cases}$$

则 $f_1(0)=\min\{f_2(s_2)+V_1(u_1,s_1)\}$

$$=\min\begin{Bmatrix} f_2(0)+c_1(2)+E_1(0)\\ f_2(1)+c_1(3)+E_1(0)\\ f_2(2)+c_1(4)+E_1(0)\\ f_2(3)+c_1(5)+E_1(0)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}16+5+0\\ 15.5+6+0\\ 15+7+0\\ 13.5+8+0\end{Bmatrix}=21$$

8.4.3 离散动态规划的举例—反向求解

结论：

逆推可得最优方案为

$u_1^* = 2 \quad s_2^* = 0$ 第1个月生产2个

$u_2^* = 5 \quad s_3^* = 2$ 第2个月生产5个

$u_3^* = 0 \quad s_4^* = 0$ 第3个月生产0个

$u_4^* = 4$ 第4个月生产4个

最小费用 $f_1(0) = 21$

动态规划模型的求解总结

解法
- 离散型：分段穷举法
- 连续型：利用解析方法

难！

没有固定的方法

具体模型具体分析

要求：经验 、技巧、灵活