

第二章 对偶理论课后思考题

1. 一个线性规划问题总存在对偶问题，请解释对偶问题及其对偶变量的经济含义。如果原问题是最大化问题情况如何？如果原问题是最小化问题情况又如何？
2. 请说出原单纯形法和对偶单纯形法的区别和联系。
3. 请谈谈进行灵敏度分析和参数分析的实践背景，并说明它们的决策价值。
4. 请说明影子价格和市场价格的区别？如何计算影子价格？
5. 怎样用影子价格判定资源的稀缺性？
6. 怎样用影子价格判定一种新产品可以进行生产？
7. 影子利润和检验数的关系如何？隐含成本的经济含义如何，表达式是什么？
8. 如何理解影子价格和机会成本的关系？
9. 请说明单纯表中的检验数和对偶变量之间联系。
10. 能否说出强对偶定理并进行证明。
11. 在使用对偶单纯形法求解时，如果 i 行技术系数均为非负，而 b_i 为负，可判断对偶问题是无界的，为什么？

第二章 基本作业题

内容 1：根据原规划，写出对偶规划

1. 写出下面线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = x + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 8 \\ 12x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 9x_4 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}
 \end{aligned}$$

内容 2：由原问题的最优解得到对偶问题的最优解

2. 已知线性规划问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

已知原问题的最优解为 $X^* = (2, 2, 4, 0)$ ，试根据对偶理论直接求出对偶问题的解。

内容 3：计算影子价格和隐含成本

3. 某厂生产 A、B、C 三种产品，其所需要的劳动力、材料等有关数据见下表，试确定劳动力和材料的影子价格，并计算产品 A 的隐含成本，同时判定哪种资源为稀缺资源。

表 1 产品情况表

消 资源 耗	产品	A	B	C	可用量
劳动力		6	3	5	45
材料		3	4	5	30
单位产品利润		3	1	4	

内容 4：会使用对偶单纯形法

4 用对偶单纯形法解下列问题(除 a 外，给出思路即可，不要求得到最优解)

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\
 \text{(a.)} \quad & \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 12 \\ x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

内容 5：能进行敏感性分析

5 现有线性规划问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 8 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

先用单纯形法得到最优单纯形表，然后进行如下分析

- (1) 变量 x_1, x_2 的价值系数分别在什么范围内最优解不发生改变?
- (2) 第一行的资源系数在什么范围内最优基不发生改变?
- (3) 增加约束条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ 最优解将会有有什么变化?
- (4) 增加一个变量 x_4 ，价值系数为 8，技术向量为 $\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ ，最优解将会有有什么变化?

内容 6：会解参数规划

6. 求解下列参数规划问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \quad (0 \leq t \leq 25) \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 \leq 10 + 2t \\ x_1 + x_2 \leq 25 - t \\ x_2 \leq 10 + 2t \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

第二章 对偶理论进阶作业题

7. 写出下面线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (1 \leq i \leq m_1, m_1 \leq m) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (m_1 + 1 \leq i \leq m) \\ x_j \geq 0 & (1 \leq j \leq n_1, n_1 \leq n) \\ x_j \text{ 无约束, 当 } n_1 + 1 \leq j \leq n \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

8. 根据对偶理论, 判定原问题有最优解、无解和无界

(1) 应用对偶理论, 证明线性规划问题有最优解。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(2) 应用对偶理论, 证明线性规划问题是可行的, 但无最优解。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = x_1 - x_2 + x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(3) 应用对偶理论, 证明线性规划问题无解。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

9. 原规划为

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 3x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 5x_2 \leq 15 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}
 \end{aligned}
 \quad \text{引入松弛变量后为} \quad
 \begin{aligned}
 \max \quad & z = 3x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对偶规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 5y_3 \leq 3 \\ y_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

已知对偶规划的最优解为(3/2, 0, 0), 试完成原规划的最优单纯形表(不用单纯形求解, 并写出具体思路)。

表 2 最优单纯形表

			3	3	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
					0	1/4	0
						5/4	1
					1/2		0
$c_j - z_j$							

10. 下列问题能否经过转化变形后再使用对偶单纯形方法直接求解

(b)
$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -8 \\ x_1 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_3 \leq 7 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \min \quad & z = 9x_1 - 7x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

11. (课本 2.8) 已知线性规划问题 A 和 B 如下

问题 A

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j = b_2 \\ & \sum_{j=1}^n a_{3j} x_j = b_3 \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

问题 B

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n 5a_{1j} x_j = 5b_1 \\ & \sum_{j=1}^n \frac{1}{5} a_{2j} x_j = \frac{1}{5} b_2 \\ & \sum_{j=1}^n (a_{3j} + 3a_{1j}) x_j = b_3 + 3b_1 \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

若 y_1, y_2, y_3 是问题的对偶变量, $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ 是问题 B 的对偶变量, 试用 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ 表达 y_1, y_2, y_3 。

12. 解下列参数规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = (2+t)x_1 + (1+2t)x_2 \quad (0 \leq t \leq 25) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 25 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, 2 \end{aligned}$$

第二章 对偶理论选做题

13. 设线性规划问题 1 是

$$\begin{aligned} \max \quad & z_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ & x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

其中 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 是其对偶问题的最优解。

又设线性规划问题 2 是

$$\begin{aligned} \max \quad & z_2 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i \\ & x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

其中 k_i 是给定的常数, 求证

$$\max(z_2) \leq \max(z_1) + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

14. 设线性规划问题 1 是

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m) \\ & x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

又设线性规划问题 2 是

$$\begin{aligned} \min \quad & z_2 = \sum_{j=1}^n (c_j - y_k^* a_{kj}) x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m, i \neq k) \\ & x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

设 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 是线性规划问题 1 的最优解, $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 为其对偶问题的最优解, 请证明 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 也是问题 2 的最优解。