几个有关测度的反例

1. 若函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 未必依测度收敛于 f.

   例如: 定义在 $E=[0,+\infty)$ 上的函数

   $$f_n(x)=\begin{cases}1, x\in(n,n+1)\\0, x\notin(n,n+1)\end{cases},\ f(x)=0.$$

   自然地, 其也可以作为几乎处处收敛但不近一致收敛的例子.

2. 反之, 若函数列 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 未必几乎处处收敛于 f.

   例如: 构造在 $E=[0,1)$ 定义的函数列 $\{f_n\}$ 满足

   $$f_n=\psi_{\left[\frac{k-1}{2^t},\frac{k}{2^t}\right)}(x), \text{其中} t\in\mathbb{N}, k\in[\![1,2^t]\!].$$

   其中 $n=2^t-1+k$.

   自然地, 其也可以作为依测度收敛但不近一致收敛的例子.

3. 存在减缩序列: $E_1\supset E_2\supset\cdots$, 满足其每项的外测度有限, 但是

   $$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\lim_{n\to\infty}m^*E_n.$$

   例如: 从不可测集的角度构造例子. 设 A 为代表元在 $[0,1]$ 选取的不可测集. 将 $[0,1]$ 的有理数排成一列 $\{r_n\}$. 令

   $$E_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}(A+r_k).$$

   容易验证不等式左侧对应的集合是空集, 右侧是有正上界 $(m^*(A))$ 的序列.

4. 和上题类似地, 存在两两不交集列 $\{E_n\}$, 满足

   $$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\sum_{n=1}^{\infty}m^*E_n.$$

   例如: 从不可测集的角度构造例子. 在上题的环境下, 令

   $$E_n=A+r_n.$$

5. 陈述一个事实: 对于一有界开区间, 其不可以写成无交的闭区间的并.

   提示: 其源于教材第 35 页第 32 题. 可从 Cantor 三分集点构成的角度考虑对区间进行 “尽力” 覆盖后所剩下的点.