12-5 一沿 x 轴正方向传播的平面简谐波, 振幅为 2.0×10^{-2} m, 频率为 5.0 Hz, 波长为 7.0×10^{-2} m. 设在 $t=0$ 时, 原点处质点在 $\sqrt{2}\times10^{-2}$ m 处且向平衡位置运动, 试求 (1) 此波的波函数; (2) 与原点相距为 $x_1=3.5\times10^{-2}$ m 处质点的振动表达式及其初相; (3) 与原点相距为 $x_2=10.5\times10^{-2}$ m 处质点的振动表达式及其初相; (4) x_1 和 x_2 两点之间在 $t=2$ s 和 $t=3$ s 时的相位差.

(1) $\varphi_0 = \arccos \dfrac{\sqrt{2}\times10^{-2}}{2\times10^{-2}} = \pm\dfrac{\pi}{4}$. 向平衡位置移动 $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

$u = \lambda\nu = 5\times7\times10^{-2} = 0.35$ m. $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$

$\therefore$ 波函数 $y(x,t) = 0.02\cos\left[10\pi\left(t-\dfrac{x}{0.35}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]$

(2) $y(x_1,t) = 0.02\cos\left(10\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

$\varphi_{10} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

(3) $y(x_2,t) = 0.02\cos\left(10\pi t - \dfrac{11}{4}\pi\right)$

$\varphi_{20} = -\dfrac{11\pi}{4}$

(4) $t=2s$ 时

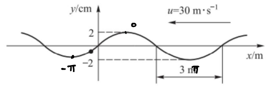
$\varphi_{12} = \dfrac{77}{4}\pi$ $\varphi_{22} = \dfrac{69}{4}\pi$

$\Delta\varphi_2 = -2\pi$

两点之间相位差不随时间改变

$t=2s$ 时 $t=3s$ 时 相位差均为 -2π.

12-8 题图 12-8 为一开始时刻的横波波形曲线, 一切数据均由图中表明, 写出该波的波函数, 并画出经 2 s 后的波形曲线.



题图 12-8

解: $\lambda = 6$m. $u = 30\,m/s^2$ (方向向x轴负向) $A = 2$cm

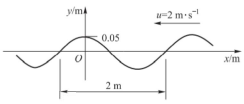
$T = \dfrac{\lambda}{u} = 0.2$ s $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10\pi$

$y(x,t) = 0.02\cos\left[10\pi\left(t+\dfrac{x}{30}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]$

$y(x,t+2) = 0.02\cos\left[10\pi\left(t+\dfrac{x}{30}\right)+\dfrac{39}{2}\pi\right]$

$\Delta\varphi = 20\pi$ 恰好同向, 波形原如图

12-9 题图 12-9 为 $t=\dfrac{3}{4}T$ (T 为周期) 时刻的横波波形曲线, 写出其波函数, 并求原点的振动表达式.



题图 12-9

解 $\lambda = 2m$ $u = 2m/s$ $A = 0.05\,m$

$T = \dfrac{\lambda}{u} = 1s$. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$

在原点, 有 $\cos\left[2\pi\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{0}{2}\right)+\varphi_0\right] = 1$.

$\Rightarrow \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 取 $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$y(x,t) = 0.05\cos\left[2\pi\left(t+\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y(0,t) = 0.05\cos\left[2\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right]$

12-11 一列平面余弦波沿直径为 0.14 m 的圆柱形玻璃管前进, 波的强度为 9×10^{-3} J·s^{-1}·m^{-2}, 频率为 300 Hz, 波速为 30 m·s^{-1}, 问 (1) 波的平均能量密度和最大能量密度各是多少? (2) 平均说来, 每两个相邻相位差为 2π 的同相面间的能量为多少?

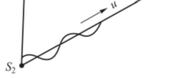
解: (1) $\bar{w} = \dfrac{I}{u} = \dfrac{9\times10^{-3}}{30} = 3\times10^{-4}$ J·m^{-3}

余弦波. $w_{max} = 2\bar{w} = 6\times10^{-4}$ J·m^{-3}

(2) 相邻相位差为 2π 的同相面距离正好为波长 $\lambda = \dfrac{u}{\nu} = \dfrac{30}{300} = 0.1$ m.

$E = \bar{w}\cdot\Delta V = \bar{w}\cdot\lambda\cdot\dfrac{\pi D^2}{4} = 3\times10^{-4}\times\dfrac{30}{300}\times\dfrac{\pi\ 0.14^2}{4} = 4.62\times10^{-7}$ J

12-13 S_1 和 S_2 为同一介质中的两个相干波源, 其振动方程分别为 $y_1=0.10\cos2\pi t$ (SI 单位), $y_2=0.10\cos(2\pi t+\pi$, 假定两波传播过程中振幅不变, 它们传到 P 点相遇, 已知两波的波速 $u=20$ m·s^{-1}, $PS_1=40$ m, $PS_2=50$ m, 如题图 12-13 所示. 试求两波在 P 点的分振动运动方程及在 P 点的合振幅.



题图 12-13

解: $y_1(x,t) = 0.10\cos2\pi\left(t-\dfrac{x}{20}\right)$

$y_2(x,t) = 0.10\cos\left[2\pi\left(t-\dfrac{x}{20}\right)+\pi\right]$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1s$ $\lambda = \dfrac{u}{T} = 20m$

P点 $\begin{cases} y_1(40,t) = 0.10\cos2\pi(t-2) = 0.10\cos(2\pi t-4\pi) \\ y_2(50,t) = 0.10\cos[2\pi(t-2.5)+\pi] = 0.10\cos(2\pi t-4\pi) \end{cases}$

$\Delta\varphi = 0$. $A = A_1+A_2 = 0.20$ m.

12-15 同一介质中的两个相干波源位于 A 和 B 两点, 其振幅相等, 频率皆为 100 Hz, B 比 A 的相位超前 π. 若 A 和 B 相距 30 m, 波速为 400 m·s^{-1}, 试求 AB 连线间因干涉而静止的各点的位置.

解: $\lambda = \dfrac{u}{\nu} = 4m$.

干涉而静止的点, 两波应正好反相, 即有:

$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \dfrac{2\pi}{\lambda}(\Delta r) = (2k+1)\pi$. $\Rightarrow \Delta r = 4k(m)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} r_B - r_A = 4k \\ r_B + r_A = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_B = 15+2k. \\ r_A = 15-2k. \end{cases}$

距离A点、1.3.5, ... , 29 米, 即所有奇整数米的点

12-17 已知驻波的波函数为 $y = 2.0\cos(0.16x)\cos(750t)$, 式中 x、y 以 cm 为单位, t 以 s 为单位. 求 (1) 节点间的距离; (2) 在 $t = 2.0\times10^{-3}$ s 时, 位于 $x = 5.0$ cm 处质点的运动速度.

解: (1) $A = 1.0\,(\text{cm})$ $\frac{2\pi}{\lambda} = 0.16 \Rightarrow \lambda = 12.5\pi\,(\text{cm})$

相邻节点距离 $\frac{\lambda}{2} = 6.25\pi\,(\text{cm})$.

节点之间距离 $\frac{\lambda}{2}k = 6.25k\pi\,(\text{cm})$ $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

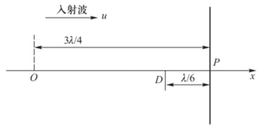
(2)

$v = \frac{dy}{dt} = -1500\cos(0.16x)\sin(750t)$.

$v(5.0, 2.0\times10^{-3}) = -1500\cos(0.16\times5)\sin(2.0\times10^{-3}\times750)$

$= -1042.44$ cm/s

12-19 平面简谐波入射到 P 点反射, 以后形成驻波. 设反射点存在半波损失, 在 $t = 0$ 时刻 O 点处质元处在平衡位置且向 y 轴负方向运动. 求驻波波函数以及 D 点的振动表达式.



题图 12-19

解: 入射波: $y_1(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) + \frac{\pi}{2}$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda}$ $y_1(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$.

反射波: $\Delta s = \frac{3\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{4} - x = 2\lambda - x$.

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s$.

$\Rightarrow y_2(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(2\lambda - x)\right) = A\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda} + \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\,\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t + \frac{\pi}{2}\right)$

$y(\frac{7}{12}\lambda, t) = 2A\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}A\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t + \frac{\pi}{2}\right)$

12-20 一列火车以 $20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度在静止的空气中行驶, 若机车汽笛的频率为 500 Hz (设此时声波波速为 $340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) 问 (1) 一静止在介质中的听者在机车前后所听到的声波的频率各为多大? (2) 设有另一列火车以 $15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度驶近或远离第一列火车时, 车内乘客所听到的声音频率各为多少?

解: (1) $\nu'_{前} = \frac{u}{u - v_s}\nu = \frac{340}{320}\cdot 500 = 531.25$ Hz

$\nu'_{后} = \frac{u}{u + v_s}\nu = \frac{340}{360}\cdot 500 = 472.22$ Hz

(2)

驶近: $\nu = \frac{u + v_0}{u - v_s} = \frac{340 + 15}{340 - 20}\nu = 554.69$ Hz

远离: $\nu = \frac{u - v_0}{u + v_s} = \frac{340 - 15}{340 + 20}\nu = 451.39$ Hz

12-21 一个沿 z 轴负方向传播的平面电磁波, 其电场强度沿 x 方向, 传播速度为 c. 在空间某点的电场强度为

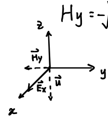
$$E_x = 300\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right)\ (\text{SI 单位})$$

试求在同一点的磁场强度表示式, 并用图表示电场强度、磁场强度和传播速度之间的相互关系.

解: 可知磁场强度方向沿 y 轴负向.

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x = -\sqrt{\frac{8.854\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\cdot 300\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right) = -0.80\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right)$ (SI).



$\vec{E}\perp\vec{u}$ $\vec{H}\perp\vec{u}$