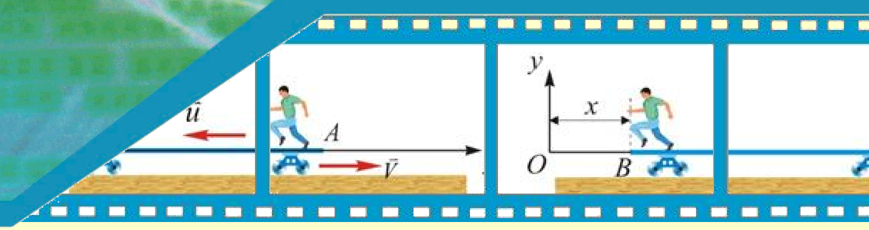
力学篇

第2章 质点动力学



第2章 质点动力学

质点动力学的任务: 研究物体之间的相互作用, 及这种相互作用引起的物体运动状态变化的规律.

研究: 引入动量、角动量、能量等基本概念, 探讨与之相对应的守恒定律.

运动的描述

运动的度量

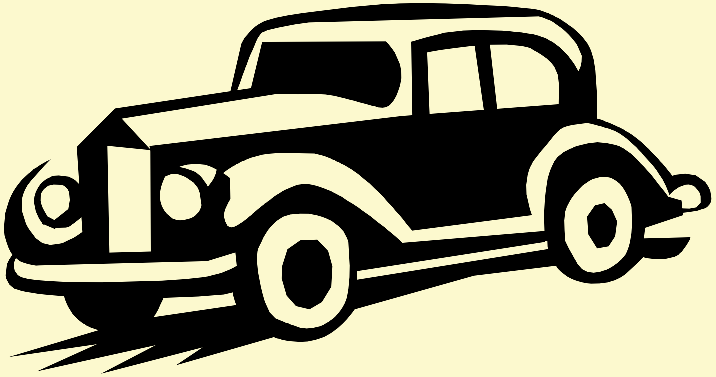
- 动量 动量守恒定律
- 角动量 角动量守恒定律
- 能量 能量守恒定律

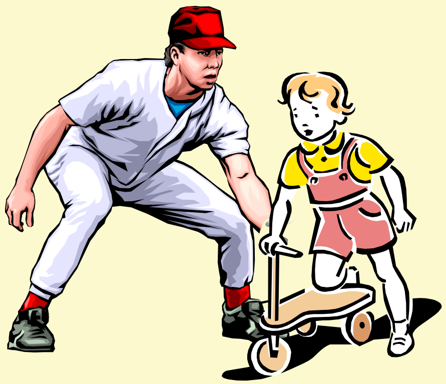
§2-1 动量 动量守恒定律

2.1.1 动量 质量

1. 动量(momentum)

危急中, 此位先生为什么挡住小孩, 而不去挡汽车?

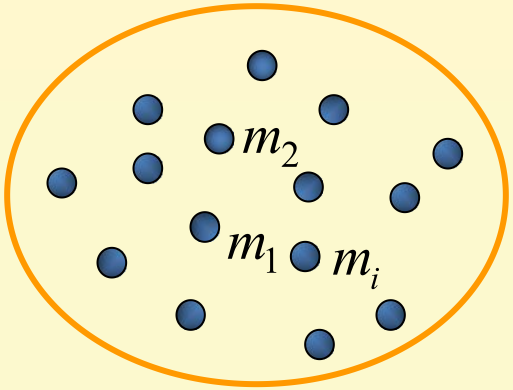




有机械运动量转换时, 同时考虑质量与速度两个因素, 才能全面地表达物体的运动状态.

1. 动量

质点的动量: $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$ 单位: kg·m·s^{-1}



质点系的动量: $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i$

2. 质量(mass)

(1) 惯性(inertia): 物体保持其运动状态不变的特性(固有特性)

(2) 惯性质量(inertial mass): 物体惯性大小的量度

(3) 引力质量(gravitation mass): 物体间相互作用“能力”大小的量度

思考: 1. 物体保持静止或匀速直线运动状态相对哪个参考系?

2. 什么情况下惯性质量与引力质量相等?

2.1.2 动量的时间变化率 力

1. 质点动量的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}+m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$v<<c$

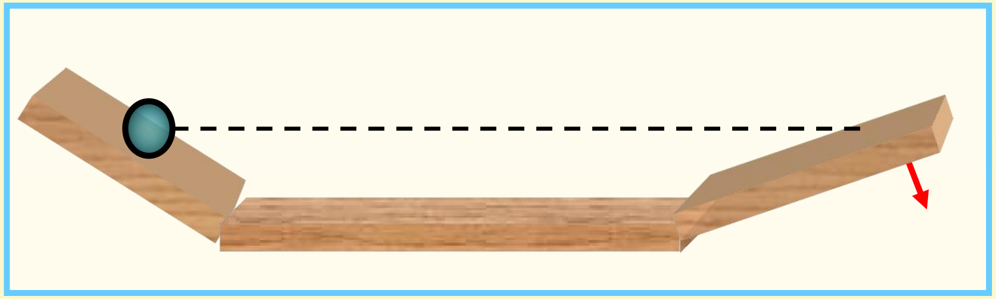
质量--恒量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

2. 力(force) —— 物体间的相互作用

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

维持运动状态无需力，只有“改变”物体运动状态的时候才需要力.



四种基本相互作用

种类	作用对象	作用距离 (cm)	相对强度 (10^{-13}cm处)	传递作用的微观粒子
引力	所有粒子	∞	10^{-38}	引力子?
弱力	大多数粒子	$<10^{-16}$	10^{-13}	中间玻色子
电磁力	带电粒子	∞	10^{-2}	光子 (γ)
强力	强子	$<10^{-13}$	1	胶子 (g)

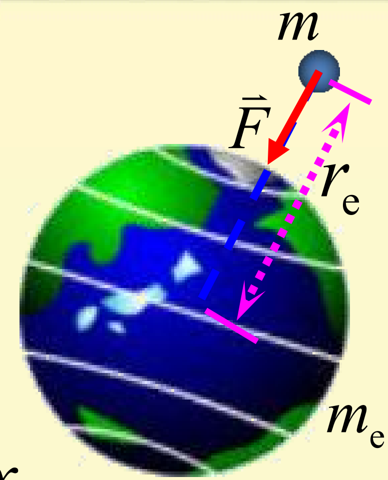
万有引力(gravitation): 地球从宇宙中聚合而成, 绕太阳旋转, 使人类享受阳光与热力;

电磁力(electromagnetic force): 使原子聚合为一体, 产生物质;

强力(strong force): 除氢外还产生其它元素, 从而生命得以形成;

弱力(weak force): 使星球发光发热, 否则, 生命不能持续.

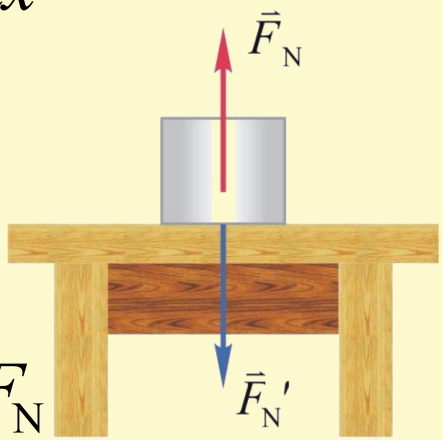
力学中常见的几种力:



1) 万有引力(gravitational force) $F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$

重力(gravity) $\vec{F} = m\vec{g}$

2) 弹性力(elastic force)
- 弹簧的弹性力 $F = -kx$
- 挤压引起的弹性力
- 绳子的拉力(L)

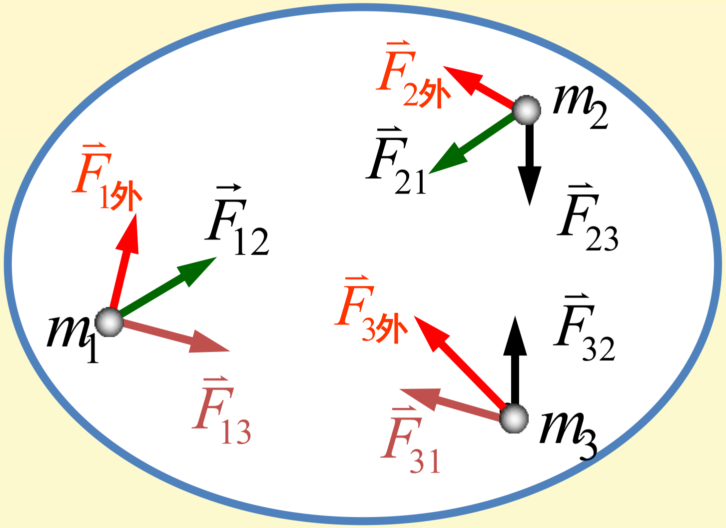


3) 摩擦力(friction force)
- 静摩擦力 $f_{max} = \mu_0 F_N$
- 滑动摩擦力 $f = \mu F_N$

粘滞阻力: 流体之间存在相对运动时受到的摩擦力

内力和外力

内力: 系统内质点间的相互作用力, 质点系内质点间的内力总是成对出现, 必有



$$\vec F_{内}=\sum_i \vec F_{i内}\equiv 0$$

外力: 系统外的物体对系统内任一质点的作用力

$$\vec F_{外}=\sum_i \vec F_{i外}$$

3. 质点系动量的时间变化率

对第i个质点 $\vec F_i+\vec f_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec p_i}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\sum_i \vec f_i=0}\sum_i \vec F_i=\sum_i\dfrac{\mathrm{d}\vec p_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec p_i$

质点系动量 $\vec p=\sum_i \vec p_i$

$$\boxed{\vec F_{外}=\sum_i \vec F_i=\frac{\mathrm{d}\vec p}{\mathrm{d}t}}$$

4. 惯性系中的牛顿运动定律

1) 牛顿第一定律(惯性定律) (Newton’s First Law)

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态, 直至其它物体所作用的力迫使它改变这种状态为止.

$$\vec{F}=0,\ \vec{v}=\text{恒矢量}$$

2) 牛顿第二定律 (Newton′s Second Law)

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}}$$

说明

1) 质点动力学基本方程
2) $\vec{F}$是合外力
3) 加速度与合外力同向
4) 反映瞬时关系
5) 适用于惯性参考系

力的叠加原理: 几个力同时作用在一个物体上所产生的加速度a, 等于各个力单独作用时所产生加速度的矢量和.

$\vec{F}$矢量分解 → $\begin{cases} F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_\mathrm{n} = ma_\mathrm{n} = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$ → $\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$

3) 牛顿第三定律 (Newton's Third Law) $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

注: 1) 作用力和反作用力成对, 同时存在.
2) 分别作用于两个物体上, 不能抵消.
3) 属于同一种性质的力.
4) 物体静止或运动均适用.

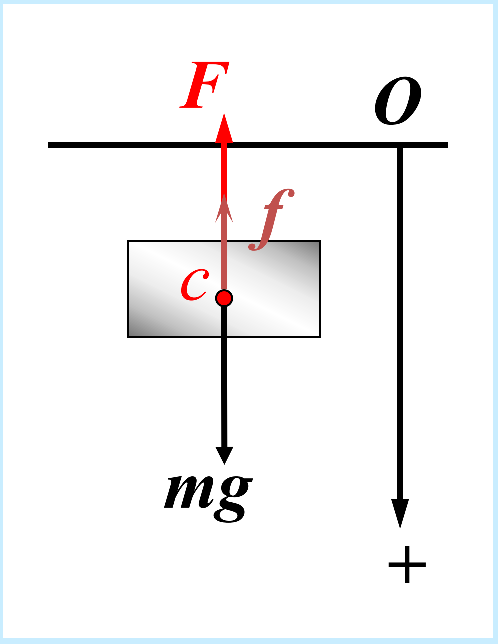
解题步骤: 1) 确定研究对象, 对于物体系, 画出隔离图.
2) 进行受力分析, 画出示力图.
3) 建立坐标系.
4) 对各隔离体建立牛顿运动方程(分量式)
5) 解方程,进行文字运算,然后代入数据.

牛顿运动定律应用

例2-1 一艘质量为m的潜水艇, 全部浸没水中, 并由静止开始下沉. 设浮力为F, 水的阻力 $f = kAv$, 式中A为潜水艇水平投影面积, k为常数. 求潜水艇下沉速度与时间的关系.

解 以潜艇为研究对象, 受力如图,

在地球系中建立如图坐标



由牛顿第二定律:

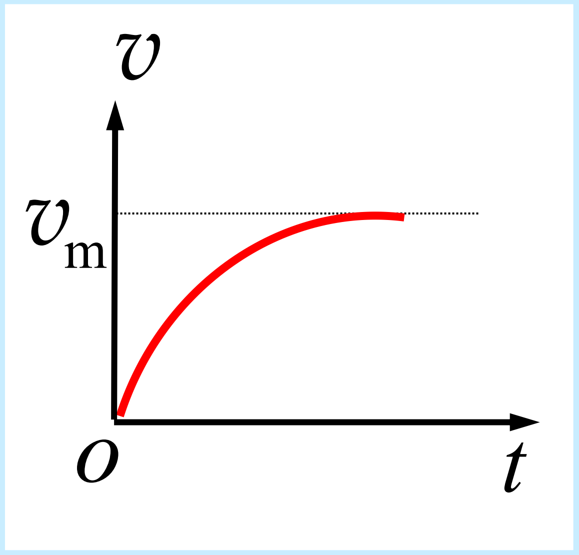
$$mg - F - kAv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v \frac{m\mathrm{d}v}{mg - F - kAv} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$-\frac{m}{kA}\ln\frac{mg-F-kAv}{mg-F}=t$$

$$\frac{mg-F-kAv}{mg-F}=\mathrm{e}^{-\frac{kA}{m}t}$$

$$v=\frac{mg-F}{kA}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{kA}{m}t}\right)$$



讨论潜艇运动情况

$t=0 \quad v=0, \qquad t\uparrow \quad v\uparrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\downarrow,$

$t\to\infty \quad v=v_{\max}=\frac{mg-F}{kA}=$ **恒量**

极限速率(收尾速率)

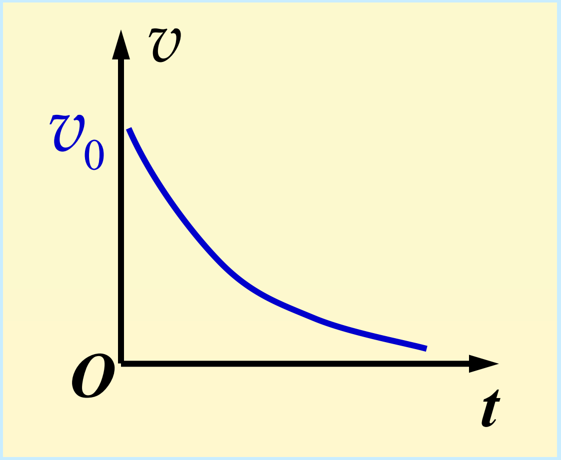
类似处理: 跳伞运动员

有阻力的抛体运动下落

小球在粘滞流体中下落...

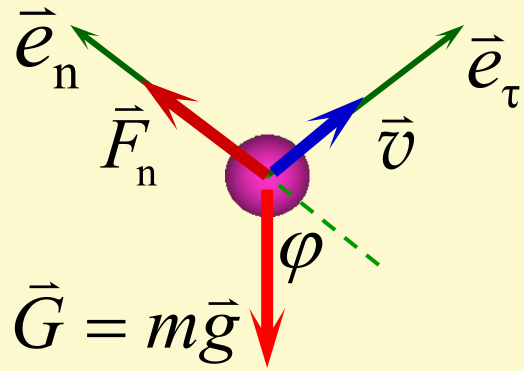
练 习 已知当物体在粘性流体中运动速度不太大时, 受到流体的阻力与速度大小成正比, 方向与速度方向相反, 即 $\vec{f}=-\beta\vec{v}$, 其中β为由流体性质决定的常数. 今有一质量为m的物体, 在$t=0$时以初速v_0进入粘性流体, 设物体除受阻力外, 未受其它力作用. 试求某一时刻 t 物体的速度大小.

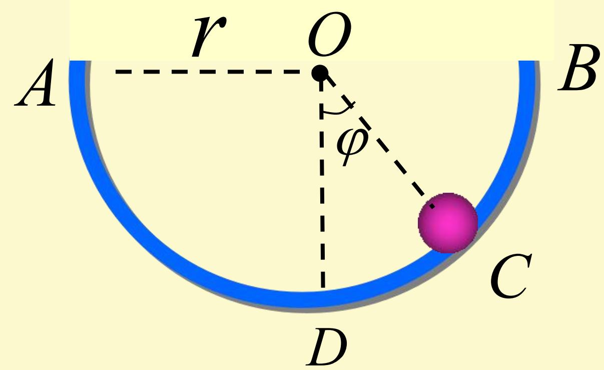
答案: $$v=v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}$$



例2-2. 一质量为m的小球最初位于如图所示的A点, 然后沿半径为r的光滑圆弧的内表面$ADCB$下滑. 试求小球在C处时的角速度和对圆弧表面的作用力.

解 取自然坐标系, 小球受力如图



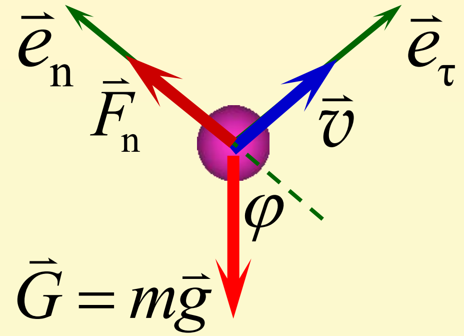


由牛顿第二定律得 :

切向 $F_\tau = ma_\tau$ $\quad -mg\sin\varphi = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ①

法向 $F_n = ma_n$ $\quad F_n - mg\cos\varphi = m\dfrac{v^2}{r}$ ②

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\omega=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{v}{r}$$



由①式得 $\quad -mg\sin\varphi = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\dfrac{v}{r}$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi}(-rg\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \longrightarrow v=\sqrt{2rg\cos\varphi}$$

$$\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{2g\cos\varphi}{r}}$$

代入②式得

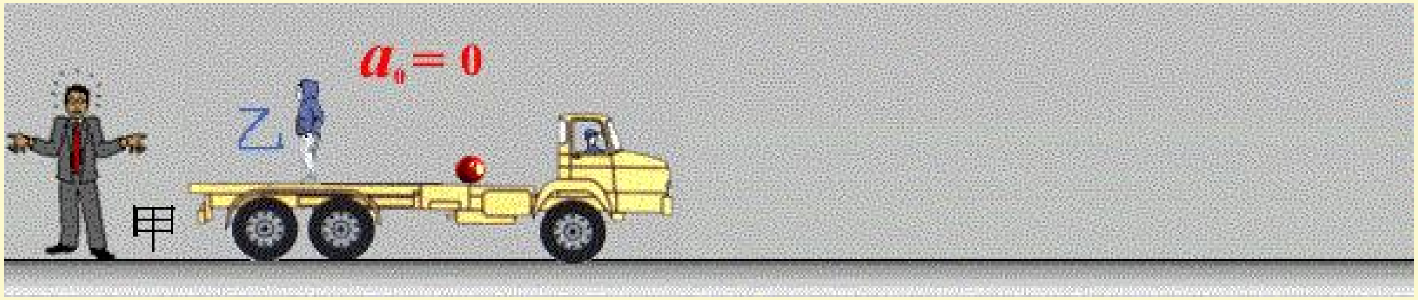
$$F_{\mathrm{n}}=mg\cos\varphi+m\frac{v^2}{r}=3mg\cos\varphi$$

小球对圆弧的作用力为

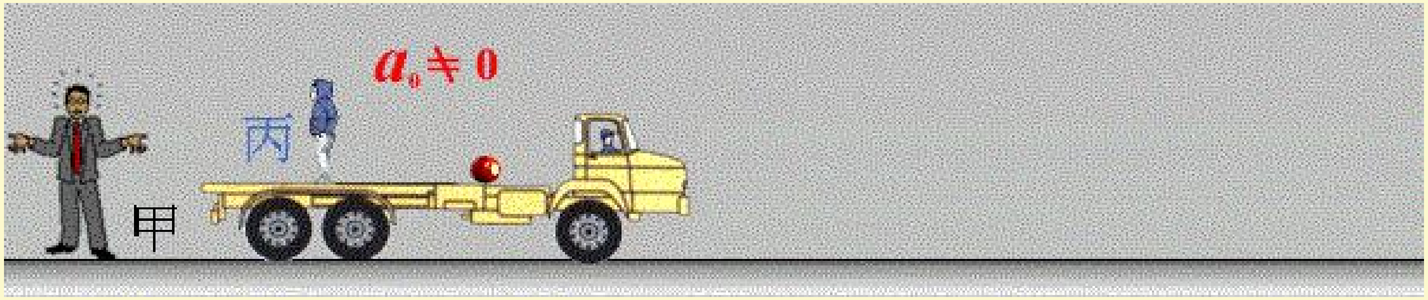
$$F_{\mathrm{n}}'=-F_{\mathrm{n}}=-3mg\cos\varphi$$

5. 非惯性系中的牛顿运动定律

第一定律: 指出了惯性的存在



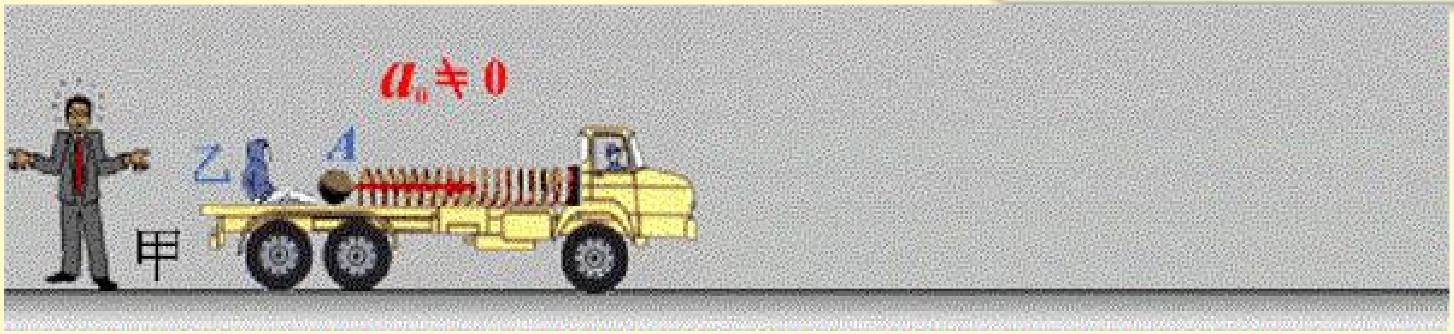
甲对地: 静止　　甲对乙: ← 匀速运动 符合第一定律



甲对丙: ← 加速运动, 但没有受力, 第一定律不符合

惯性参考系(inertial reference frame)(简称惯性系inertial frame): 牛顿第一定律适用的参考系

第二定律:



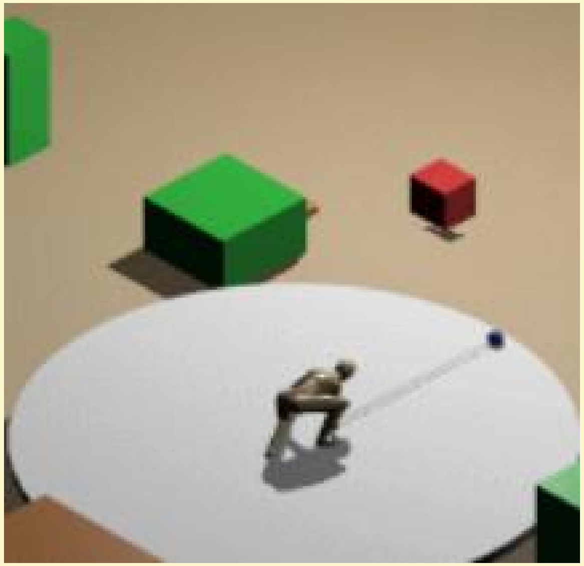
A对甲:

$f \Rightarrow a$ 定律符合

A对乙:

$f \neq 0,\ a = 0$ 定律不符合

非惯性系(non-inertial frame): 相对于惯性系作加速运动的参考系. 在非惯性系内牛顿定律不成立.



判断:

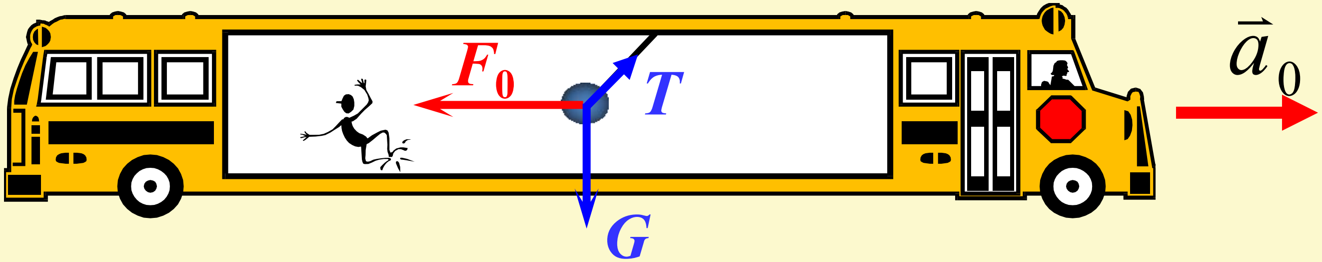
$\sum \vec{F} = 0$时, $\begin{cases} \vec{a} = 0 & \text{惯性系} \\ \vec{a} \to 0 & \text{近似惯性系} \\ \vec{a} \neq 0 & \text{非惯性系} \end{cases}$

$\sum \vec{F} \neq 0$时, $\begin{cases} \vec{a} \neq 0 & \text{惯性系} \\ \vec{a} = 0 & \text{非惯性系} \end{cases}$

(1) 平动加速参考系中的惯性力

以加速度 $\vec{a}_0$ 相对于惯性系 S 平动的非惯性系 S'

设想其中所有物体都受一虚拟力(惯性力)的作用



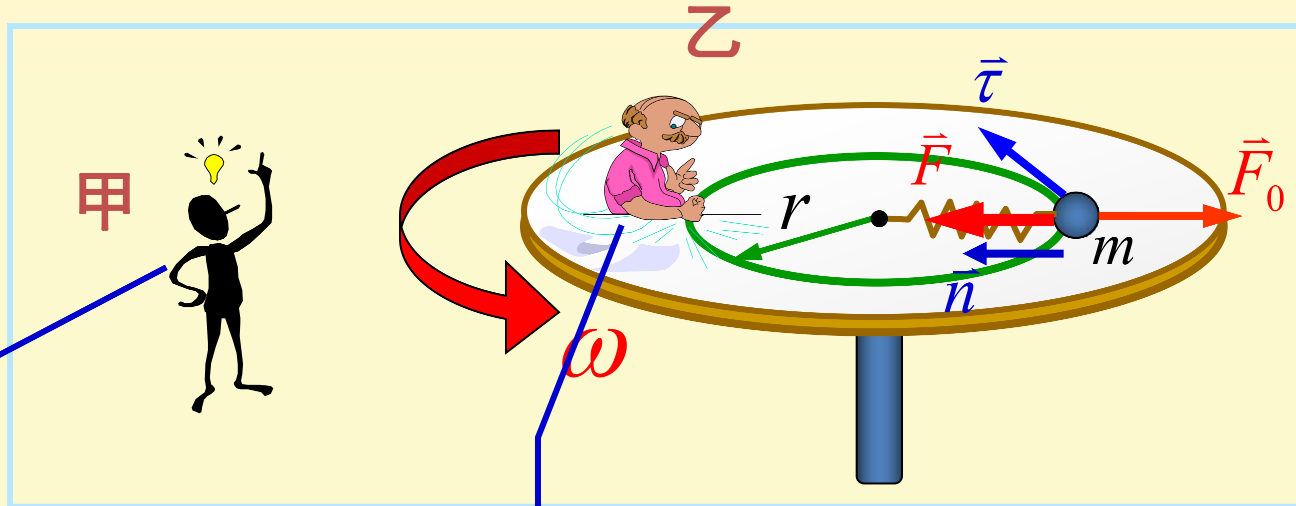
惯性力 { 大小: 物体质量×非惯性系对惯性系的加速度
方向: 与非惯性系对惯性系的加速度方向相反

$$\vec{F}_{惯} = \vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$$

性质: 不是真实的力, 无施力物体, 无反作用力.

实质: 物体的惯性在非惯性系中的表现

(2) 转动动加速参考系中的惯性力



$\vec{F}=m\omega^2 r\vec{e}_{\rm n}$ 圆周运动

$\vec{F}=m\omega^2 r\vec{e}_{\rm n}$ 不运动？

圆盘: 非惯性系，**小球m受力:** 弹性力+与圆盘向心加速度方向相反的惯性力的作用.

$$\vec{F}_0=-m\omega^2 r\vec{e}_{\rm n}$$

惯性离心力

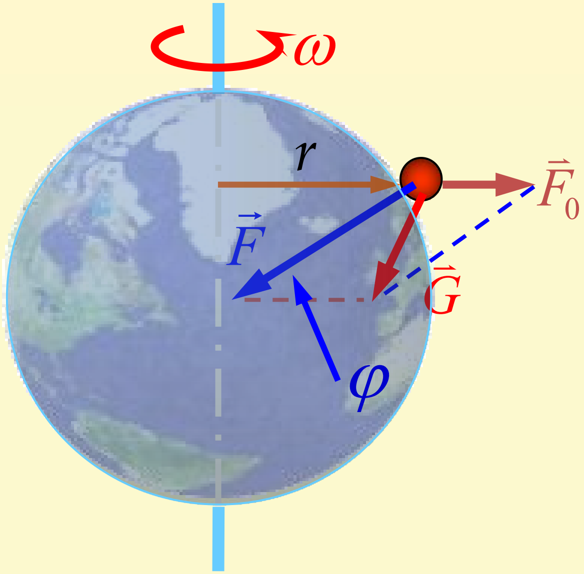
在非惯性系中，牛顿运动定律表示为:

$$\boxed{\vec{F}+(-m\vec{a}_0)=m\vec{a}}$$

讨论: 寻找重力加速度与纬度的关系.

物体的重力=引力+惯性离心力

地球自转→地球表面物体将受到的**惯性离心力(inertial centrifugal force)**.



$$g^2 = a_{引}^2 + a_{离}^2 - 2a_{引}a_{离}\cos\varphi$$

$$a_{引} >> a_{离} \qquad g \approx a_{引} - a_{离}\cos\varphi$$

$$a_{引} = \frac{GM_E}{R^2} \qquad a_{离} = \omega^2 R \qquad \boxed{g = G\frac{M_E}{R^2}\left(1 - 0.0035\cos^2\varphi\right)}$$

$g_{赤道}$=9.778 m/s^2 $g_{北极}$=9.832 m/s^2

物体的重量随纬度增加而增加! 自学科里奥利力

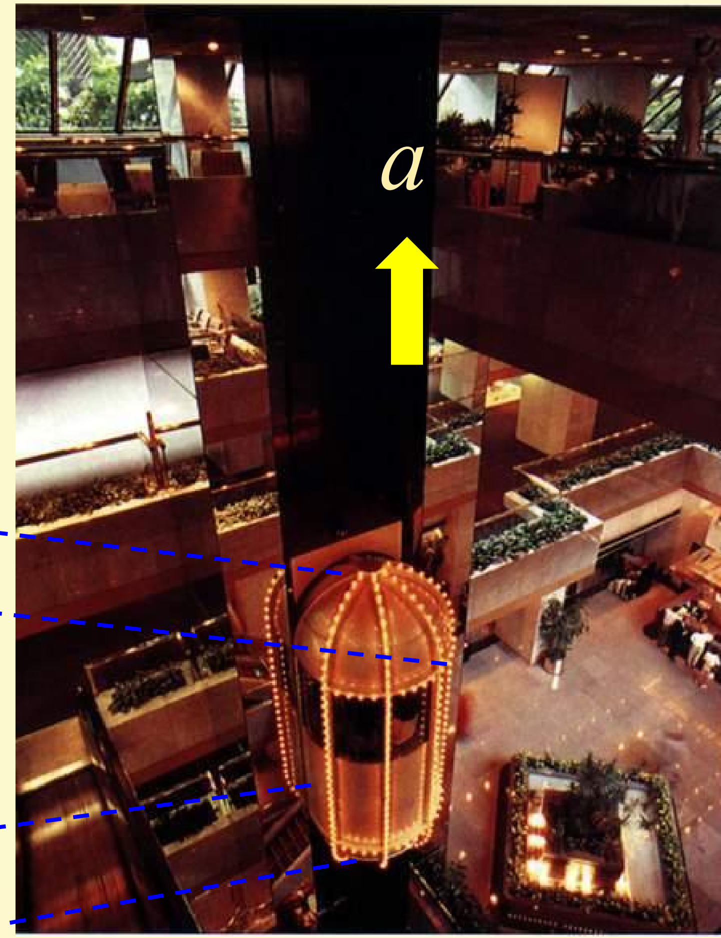
非惯性系和惯性力实例

$$\vec{F}+(-m\vec{a}_0)=m\vec{a}$$

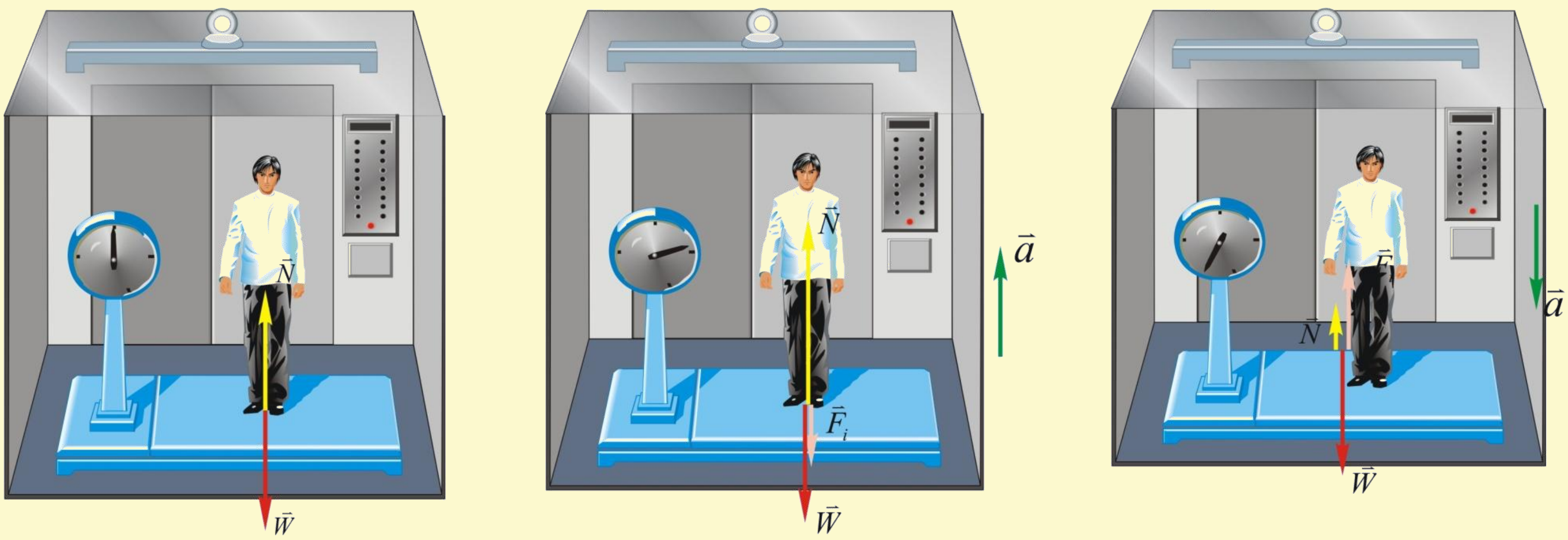
以加速上升的电梯为参考系，乘坐电梯的人除了受到重力的作用，还受到一个向下的惯性力，重力和惯性力的合力使人感受到了超重.

a

$G,-ma$



超重与失重



正常重量　　超重　　失重

思考题: 非惯性系中的惯性力有哪些?

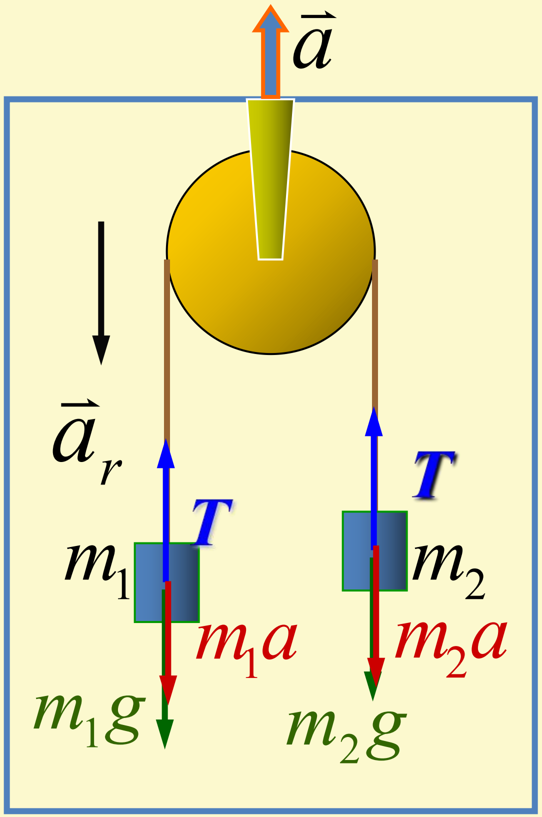
宇航员为了适应失重力的环境, 一般在地球上是怎样实现的?

人造重力: 21世纪, 人类在空间站中长期生活, 为了克服失重带来的不利影响, 将空间站设计成一个大转轮, 绕轴自转, 其上各点都有一个指向转动轴的向心加速度. 以空间站为参考系, 与它一起旋转的物体都受到一个背离转动轴的惯性力.

太空舱的人造重力

例2-3 升降电梯相对于地面以加速度a 铅直向上运动. 电梯中有一轻滑轮绕一轻绳, 绳两端悬挂质量分别为m_1和m_2的重物($m_1>m_2$). 求: (1) 物体相对于电梯的加速度; (2) 绳子的张力.

解 设所求加速度为a_r, 以电梯为参考系对两物作受力分析如图



$$m_1g+m_1a-T=m_1a_r \qquad (1)$$

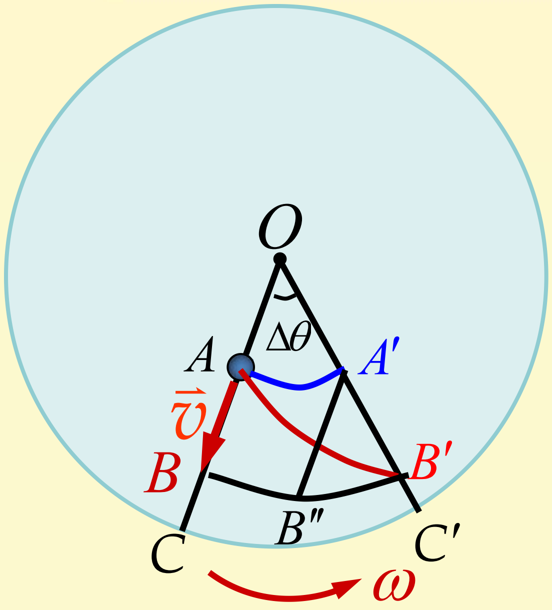
$$T-m_2g-m_2a=m_2a_r \qquad (2)$$

$$a_r=\frac{(m_1-m_2)\cdot(g+a)}{m_1+m_2}$$

$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g+a)$$

6. 科里奥利力(Coriolis force)

观测者从圆盘外看，质点m同时参与了两个运动：以 $\vec{v}$ 相对于圆盘的运动及随圆盘运动.



①若圆盘不动，则质点在Δt末到达B点

②若圆盘转动，质点相对于圆盘静止，则在Δt末到达A'点.

③实际运动，在Δt末到达B'点. $v_\tau = r\omega$

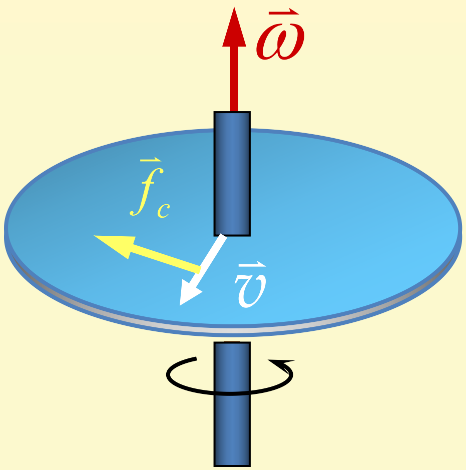
$$\Delta s = B'B'' = A'B''\Delta\theta = v\Delta t\omega\Delta t = v\omega(\Delta t)^2$$

$$\Delta t \to 0, \quad \Delta s = B'B'' = \frac{1}{2}a_\tau(\Delta t)^2$$

比较以上两式，得 $a_\tau = 2v\omega$

$\vec{a} \perp \vec{v}$指向右， $f_\tau = ma_\tau = 2mv\omega$

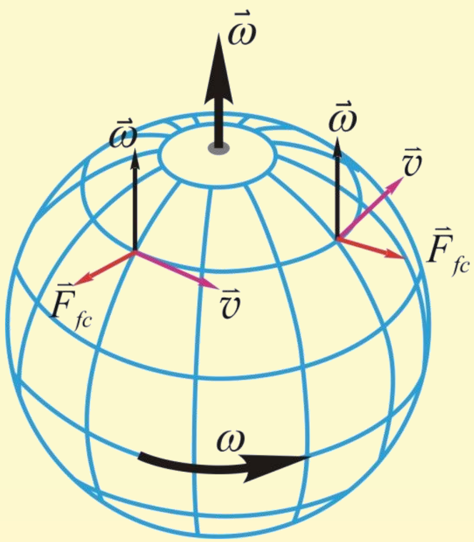
在圆盘这个非惯性系中观察, 小球沿直线运动 → 一个附加的力(科里奥利力) $\vec{f}_c$ 与 $\vec{f}_\tau$ 平衡.



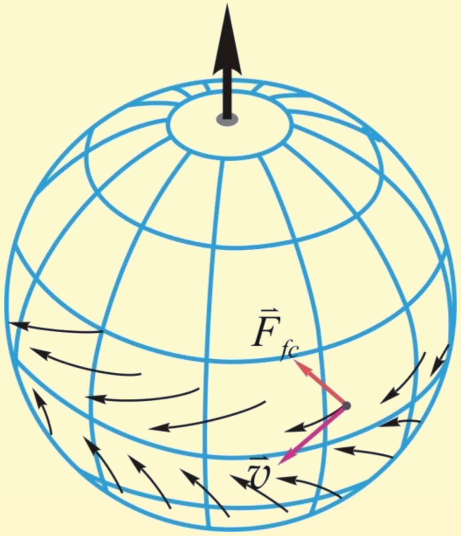
$$\vec{f}_\tau + \vec{f}_c = 0 \Rightarrow f_c = 2mv\omega$$

科里奥利力 $\boxed{\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}}$

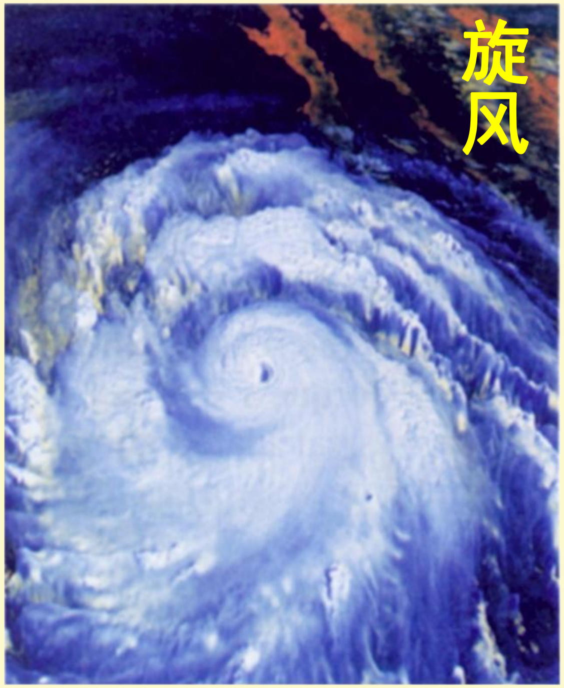
南北半球的科里奥利力

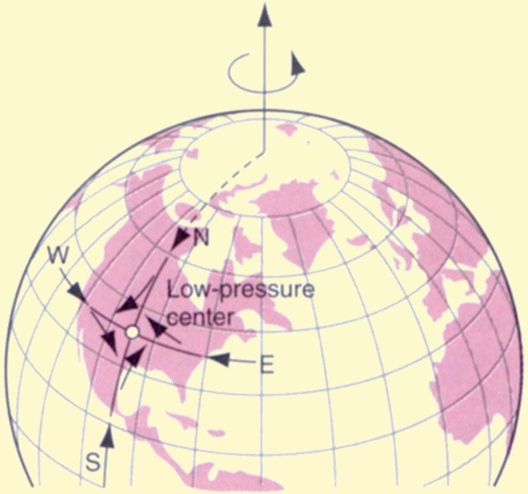


北半球 f_c



信风





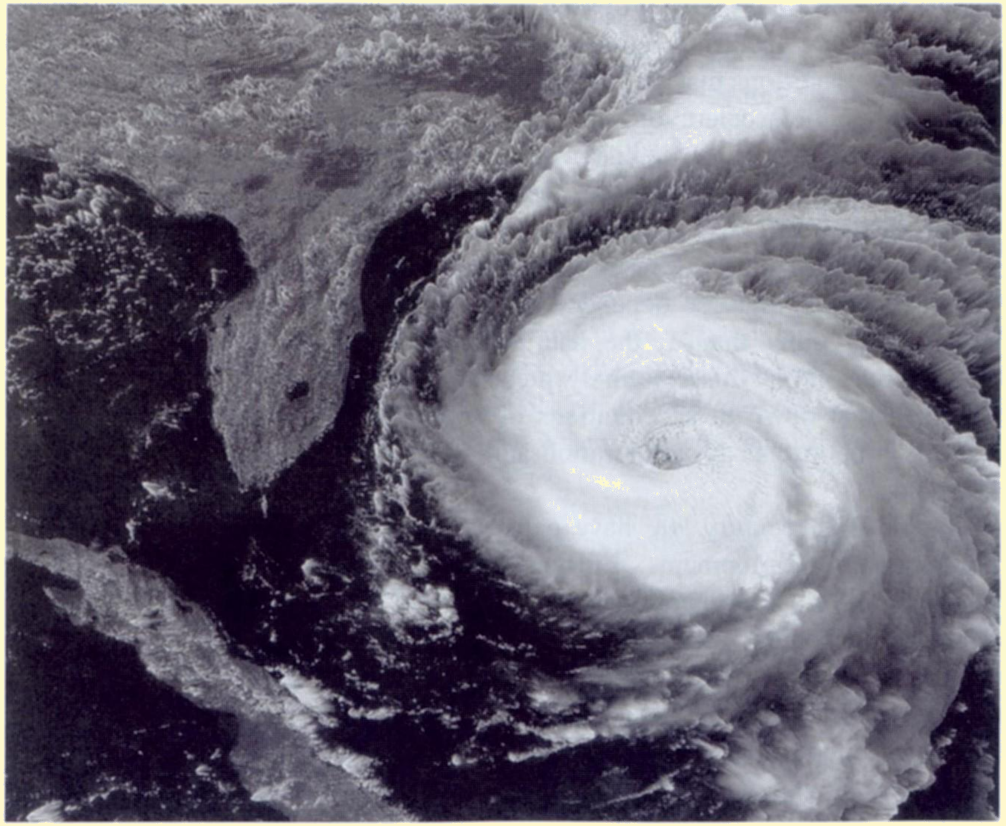
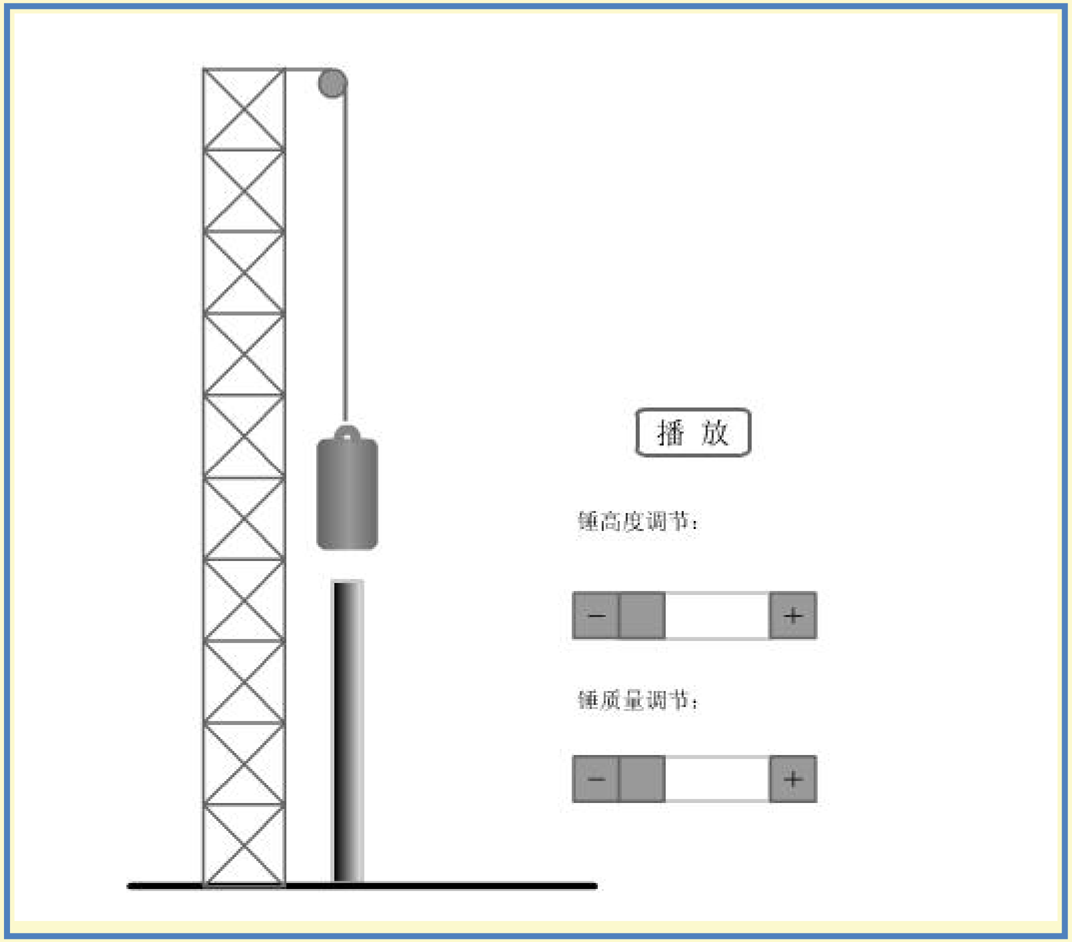


FIGURE 5-23. A low-pressure center on the rotating Earth. As the air flows inward, it appears to rotate counterclockwise to noninertial observers in the northern hemisphere of the rotating Earth. A hurricane (photo) is such a low-pressure center.

2.1.3 动量定理 动量守恒定律

打桩机
(pile driver)



结论: 物体的运动状态不仅取决于速度, 而且与物体的质量有关.

傅科摆: 体内装有铜的镀金球体. 一不锈钢丝从75英尺高的天花板上悬吊此球体.万向接头使它可以自由地朝任何方向摆动.傅科摆下方的电磁铁抵消了空气摩擦力,使摆可以持续地均匀摆动.由于地球的自转,摆摆动的方向似乎会变化,约需要36小时45分钟才能完成一个周期.

1. 质点动量定理 (theorem of momentum)

由 $$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$$

冲量(impulse): 作用力与作用时间的乘积——反映力在时间过程中的累积效应

恒力的冲量: $\vec{I}=\vec{F}\cdot(t_2-t_1)$

变力的冲量: $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\cdot\mathrm{d}t$ 单位: N·s

如果力的作用时间从 $t_1\rightarrow t_2$, 质点动量从 $\vec{p}_1\rightarrow\vec{p}_2$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p} \longrightarrow \boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$$

质点动量定理: 质点在运动过程中, 所受合外力的冲量等于质点动量的增量.

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

说明: (1) 冲量的方向 $\vec{I}$ 与动量增量 $\Delta\vec{p}$ 的方向一致.

(2) 定理中的动量和冲量都是矢量, 符合矢量叠加原理. 计算时可用平行四边形法则, 或把动量和冲量投影在坐标轴上以分量形式计算.

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=mv_{x_2}-mv_{x_1}$$

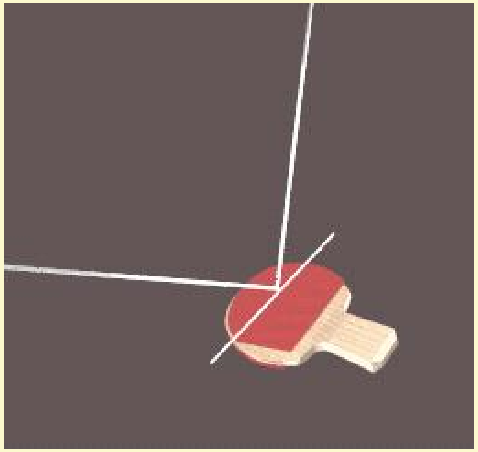
$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=mv_{y_2}-mv_{y_1}$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=mv_{z_2}-mv_{z_1}$$

运动员在投掷标枪时, 伸直手臂, 尽可能的延长手对标枪的作用时间, 以提高标枪出手时的速度.

冲力(impulsive force)

当两个物体碰撞时, 在极短的相互作用时间里, 相互作用力很大且迅速变化, 这种力称为冲力.



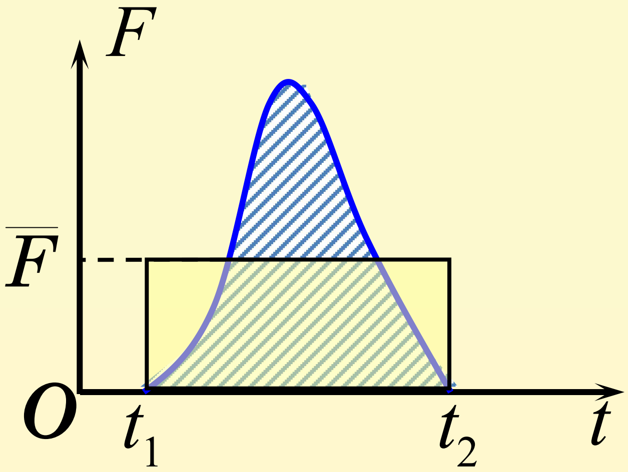
冲量 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\overline{\vec{F}}\Delta t$

平均冲力 $\overline{\vec{F}}=\dfrac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t$

得 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}(t_2-t_1)=\vec{p}_2-\vec{p}_1$

分量式

$$I_x=\overline{F}_x(t_2-t_1)=mv_{x2}-mv_{x1}$$
$$I_y=\overline{F}_y(t_2-t_1)=mv_{y2}-mv_{y1}$$
$$I_z=\overline{F}_z(t_2-t_1)=mv_{z2}-mv_{z1}$$

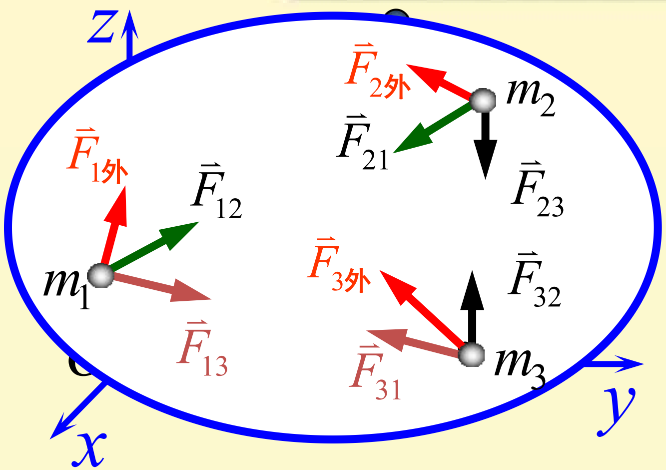


结论: 物体动量变化一定的情况下, 作用时间越长, 物体受到的平均冲力越小; 反之则越大.

海绵垫子可以延长运动员下落时与其接触的时间, 这样就减小了地面对人的冲击力.

2. 质点系的动量定理

内力和外力:



设n个质点构成一个系统

第i个质点: $\int_{t_0}^{t}\left(\vec{F}_i+\vec{f}_i\right)\mathrm{d}t=m_i\vec{v}_i-m_i\vec{v}_{i0}$

整个系统: $\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{外i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_{内i}\right)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$

根据牛顿第三定律 $\sum\vec{f}_i=0$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{外i}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{外i}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

合外力的冲量　系统末动量　系统初动量

质点系的动量定理:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t}\sum\vec{F}_i\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0=\Delta\vec{p}}$$

合外力的冲量等于系统总动量的增量

分量式:

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_{外x}\mathrm{d}t=\Delta p_x$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_{外y}\mathrm{d}t=\Delta p_y$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_{外z}\mathrm{d}t=\Delta p_z$$

微分式: $\boxed{\sum\vec{F}_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$

思考: 内力的冲量起什么作用?

动量定理应用(22″)➡火箭携带航天飞机起飞

例2-4 质量m=1kg的质点从O点开始沿半径R=2m的圆周运动，以O点为自然坐标原点. 已知质点的运动方程为 $s=0.5\pi t^2$ m. 试求从 $t_1=\sqrt{2}$ s到t_2=2s这段时间内质点所受合外力的冲量.

解

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\pi t \qquad v_1=\sqrt{2}\,\pi(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$v_2=2\,\pi(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

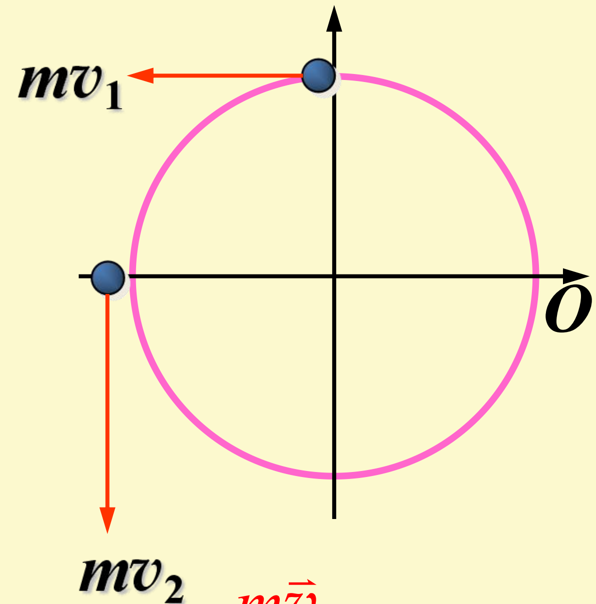
$$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\Delta(m\vec{v})$$

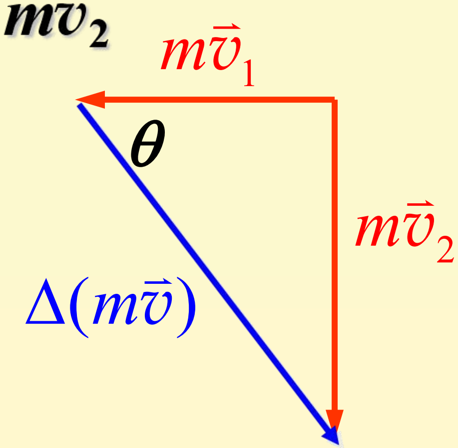
$$s_1=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2=\pi \quad \theta_1=\frac{s_1}{R}=\frac{\pi}{2} \qquad \theta_2=\frac{s_2}{R}=\pi$$

$$|\Delta m\vec{v}|=\sqrt{(mv_1)^2+(mv_2)^2}=\sqrt{6}\,\pi\,(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

$$|\vec{I}|=\sqrt{6}\,\pi=7.69\,(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{mv_2}{mv_1}=\frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \theta=54°44'$$





例2-5 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为

$$F=400-4\times10^5t/3\text{(SI)},$$

子弹从枪口射出时的速率为300m·s^{-1}. 设子弹离开枪口处合力刚好为零.

求: (1)子弹走完枪筒全长所用的时间t;

(2)子弹在枪筒中所受力的冲量I ;

(3)子弹的质量.

解 (1) $F=400-\dfrac{4\times10^5}{3}t=0$ $\qquad t=\dfrac{3\times400}{4\times10^5}=0.003\,\mathrm{s}$

(2) $$I=\int F\mathrm{d}t=\int_0^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t=400t-\frac{4\times10^5t^2}{2\times3}\bigg|_0^{0.003}$$

$$=0.6\,\mathrm{N\cdot s}$$

(3) $I=mv-0$ $\qquad m=\dfrac{I}{v}=\dfrac{0.6}{300}=0.002\mathrm{kg}=2\,\mathrm{g}$

3. 动量守恒定律(law of momentum conservation)

系统所受合外力为零($\sum \vec{F}_i = 0$)时, 其总动量保持不变

$$\boxed{\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{常矢量}}$$

注: 1) 动量具矢量性, $p_{总}$不变, p_i可能变.

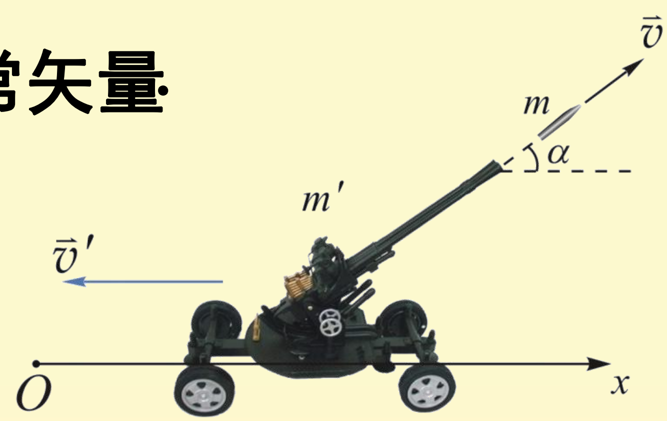
2) 条件: ① 系统不受外力作用;

② 合外力=0;

③ $F_{内} >> F_{外}$, $\sum m_i \vec{v}_i \approx$ 常矢量

3) 若 $\sum \vec{F}_i \neq 0$, 但 $\sum \vec{F}_{ix} = 0$

动量守恒定律在x方向上成立.



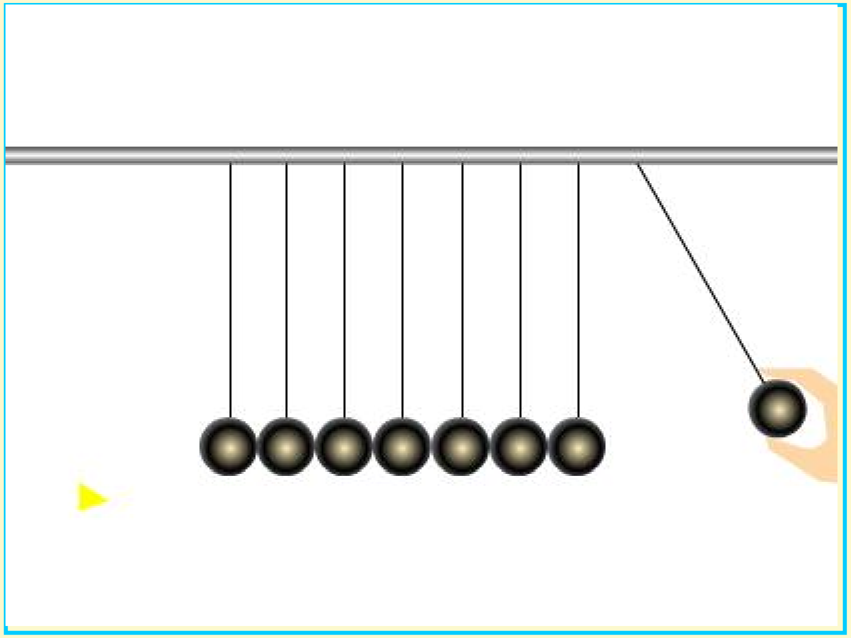
4) 动量守恒定律只适用于惯性系.

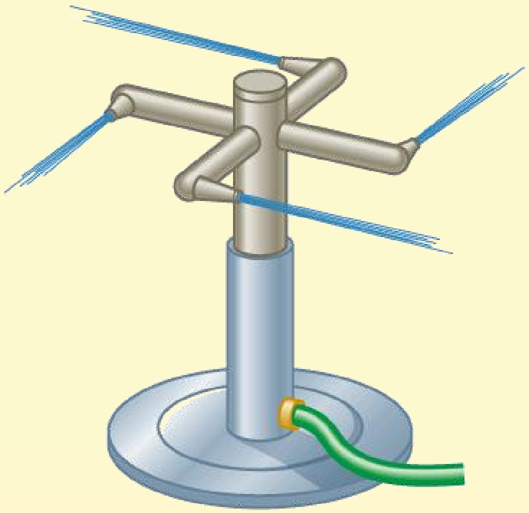
动量守恒的分量式:

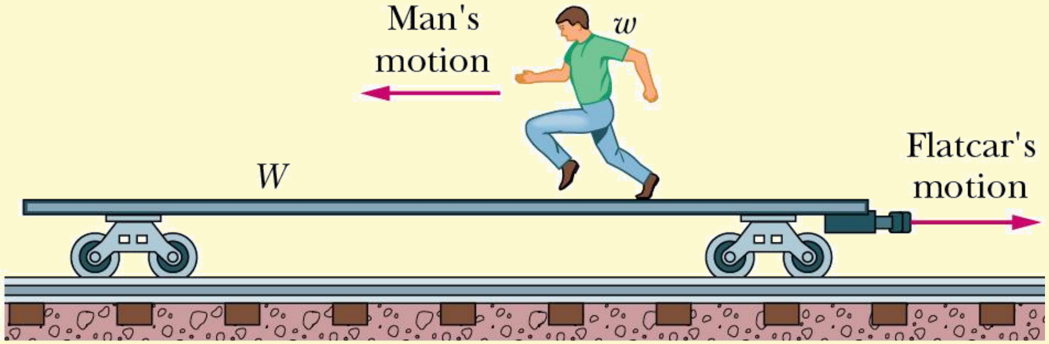
$$p_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量}$$

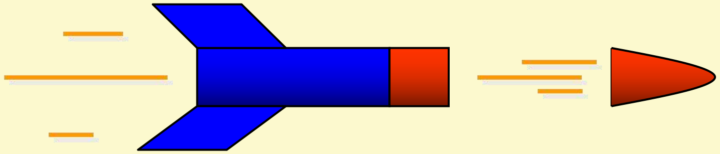
$$p_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量}$$







例2-6 火箭以$2.5\times10^3 \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率水平飞行, 由控制器使火箭分离. 头部仓$m_1$=100kg, 相对于火箭的平均速率为$10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 火箭容器仓质量$m_2$=200kg. 求容器仓和头部仓相对于地面的速率.



解 设火箭速率为v,

头部仓相对速率为v_r

相对于地: 头部仓速率为v_1, 容器仓速率为v_2

$$v_1 = v_r + v_2$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1(v_2 + v_r) + m_2 v_2$$

$$v_2 = v - \frac{m_1 v_r}{m_1 + m_2} = 2.17\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_1 = v_2 + v_r = 3.17\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

* 火箭飞行原理

依靠排出其内部燃烧室中产生的气体获得向前的推力. 设发射时质量为m_0, 速率为v_0; 燃料烧尽时质量为m', 气体相对于火箭排出速率为v_r. 不计空气阻力, 火箭所能达到的最大速率?

解 火箭和燃气组成一个质点系.

t 时刻系统总质量: m

系统总动量: $\vec{p}_1 = m\vec{v}$

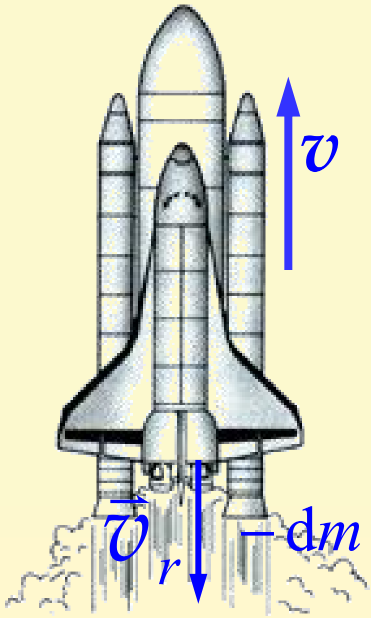
$t+\mathrm{d}t$ 时刻

火箭质量: $m+\mathrm{d}m \quad (\mathrm{d}m<0)$

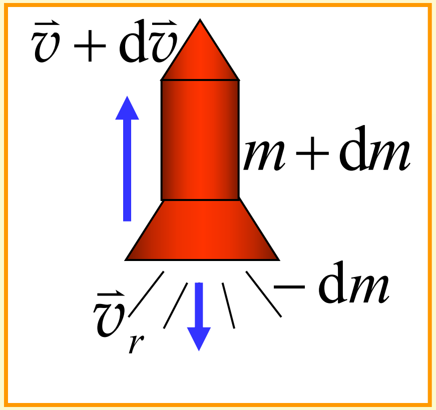
排出的燃气质量: $-\mathrm{d}m$

火箭速度: $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$

排出的燃气速度: $\vec{v}_r+(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$



系统总动量



$$\vec{p}_2=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+(-\mathrm{d}m)(\vec{v}_r+\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$$
$$=m\vec{v}+m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_r\mathrm{d}m$$

质点系动量定理: $\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{v}_r\mathrm{d}m$

火箭方程: $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\vec{v}_r\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r\uparrow\\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\uparrow\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\uparrow$$

无外力*F* 或进入太空:

$$\int_{v_0}^{v_\mathrm{m}}\mathrm{d}v=v_r\int_{m_0}^{m'}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$\boxed{v_\mathrm{m}=v_0+v_r\ln\frac{m_0}{m'}}$$

用增大喷气速度和增大质量比的方法可以提高火箭末速度.

$$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m'} \xrightarrow{\text{质量比} N=m_0/m'} v_0 + v_r \ln N$$

多级火箭:

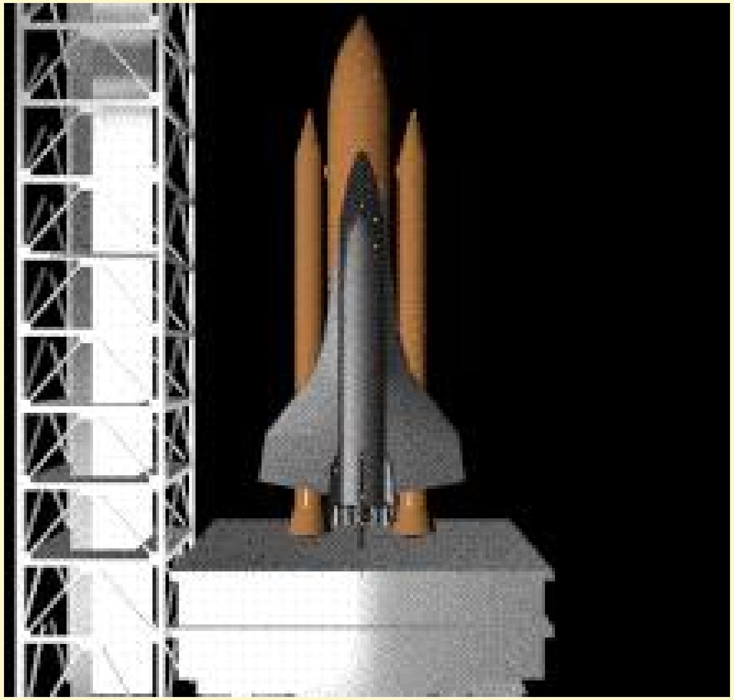
$$v_{\mathrm{m}} = v_0 + v_r \ln N_1 + v_r \ln N_2 + \cdots + v_r \ln N_n$$
$$= v_0 + v_r (\ln N_1 + \ln N_2 + \cdots + \ln N_n)$$
$$= v_0 + v_r \ln (N_1 \cdot N_2 \cdots N_n)$$

设: $v_r = 2500 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$N_1 = N_2 = N_3 = 6$

$v_{\mathrm{m}} = 2500 \cdot \ln 6^3 = 13440 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

足以发射人造地球卫星



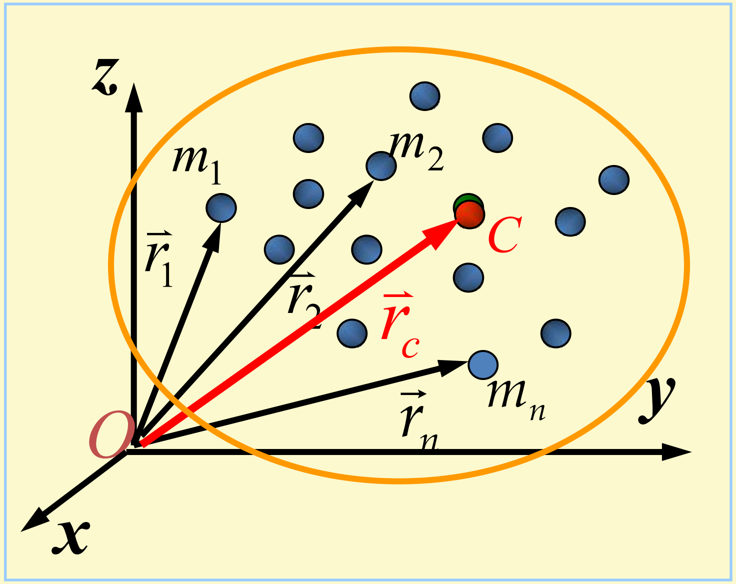
*2.1.4 质心 质心运动定理

1. 质心(center of mass)

n个质点系统中, 其总动量为

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$
$$= \sum_i m_i\vec{v}_i$$

如何简化？



类比法: 质点系总质量为 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

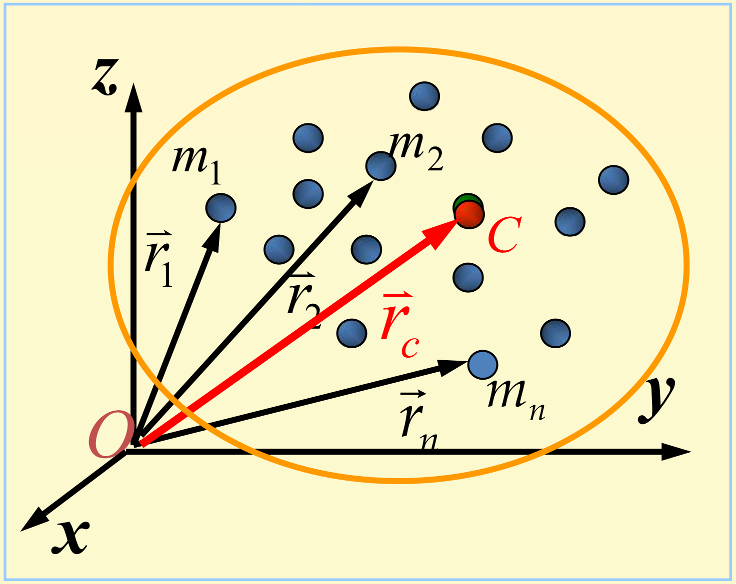
质点 $\vec{p} = m\vec{v} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

质点系 $\vec{p} = M\vec{v}_c = M\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}$

寻找特殊点 C — 质心

其位矢为 $\vec{r}_c$

质点系总动量: $\vec{p} = M\dfrac{d\vec{r}_c}{dt}$



$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{m_i\vec{r}_i}{M}\right)$$

质心位质矢量:

$$\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\vec{r}_i}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 + \cdots + \frac{m_n}{M}\vec{r}_n$$

权重

即:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

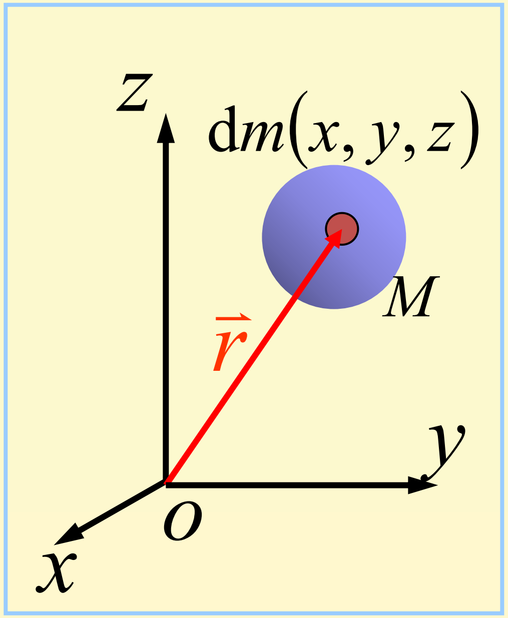
质心位矢是各质点位矢的加权平均

直角坐标系中，质心的位置：

分立的质点系

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \begin{cases} x_c = \dfrac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_c = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_c = \dfrac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

质量连续分布的质点系



$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{M} \qquad \begin{cases} x_c = \dfrac{\int x\,\mathrm{d}m}{M} \\ y_c = \dfrac{\int y\,\mathrm{d}m}{M} \\ z_c = \dfrac{\int z\,\mathrm{d}m}{M} \end{cases}$$

质心的速度与加速度:

$$\vec{v}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\frac{m_i\vec{r}_i}{M}=\sum\frac{m_i}{M}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum\limits_i m_i\vec{v}_i}{M}\quad\text{或}\quad\vec{v}_c=\frac{\int\vec{v}\,\mathrm{d}m}{M}$$

质心速度是各质点速度的**加权平均**

同理:

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\sum\limits_i m_i\vec{a}_i}{M}\qquad\text{或}\qquad\vec{a}_c=\frac{\int\vec{a}\,\mathrm{d}m}{M}$$

质心加速度是各质点加速度的**加权平均**

$\vec{v}_c$, $\vec{a}_c$ 也可以写成分量式.

2. 质心运动定理

$$M\vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i \qquad M\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \qquad M\vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i$$

由质点系动量定理的微分式可得:

$$\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = M\vec{a}_c}$$ 质心运动定理

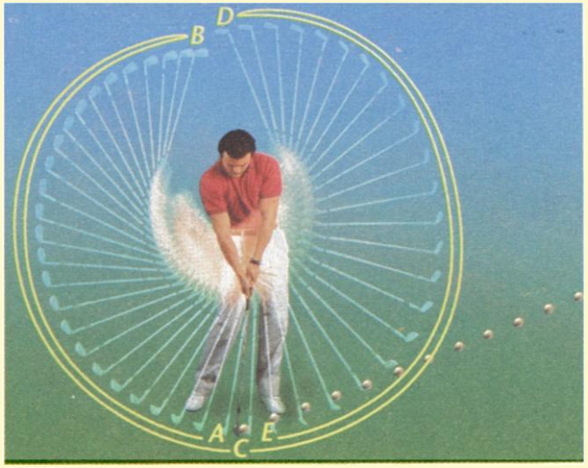
质心的两个重要性质: (L)

(1) 系统$\Sigma F=0$时, 质心的速度为一恒矢量. 内力既不能改变质点系的总动量,也不能改变质心的运动状态.

(2) 系统在外力作用下, 质心$a_c = \Sigma F / M$

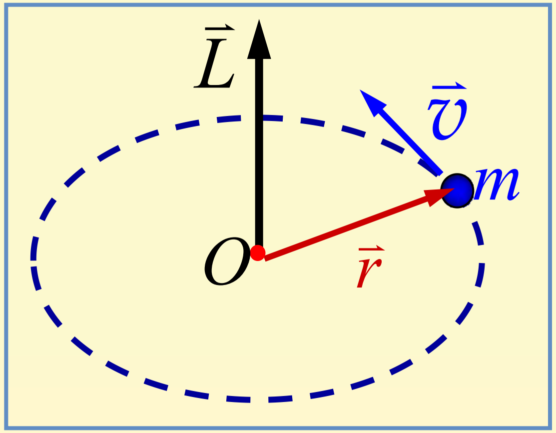
§2-2 角动量 角动量守恒定律

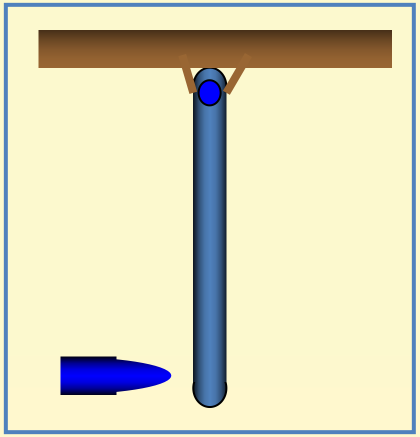
2.2.1 质点的角动量

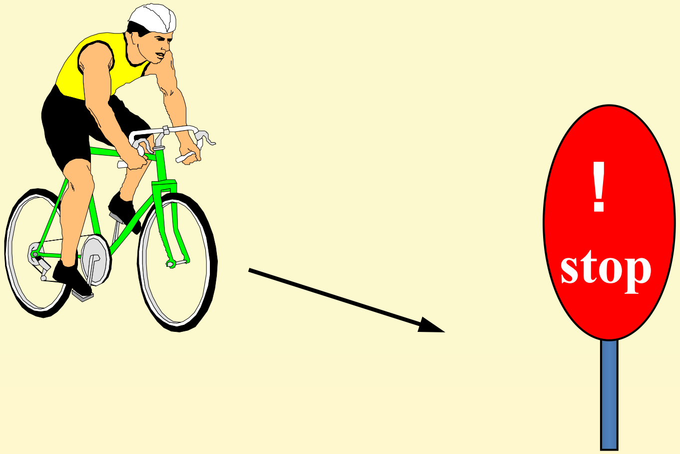


问题: 如何量度转动物体的机械运动量?

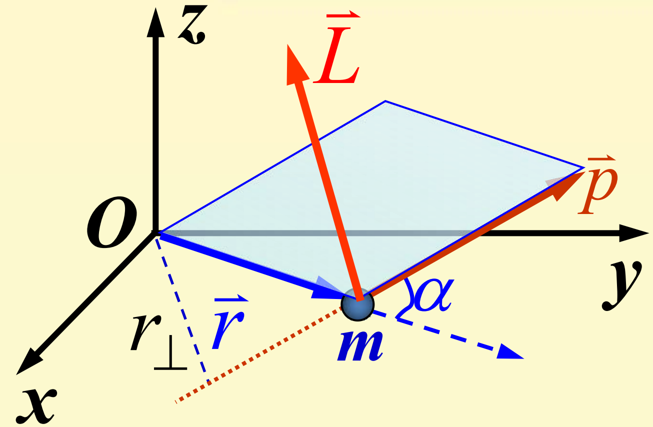
当质点作曲线运动或对某点有转动趋势时引人与动量$\vec{p}$ 对应的角量$\vec{L}$ ——角动量(angular momentum)(动量矩(moment of momentum))







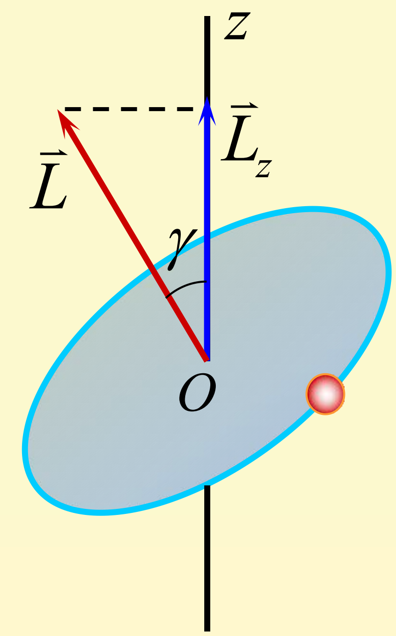
1. 质点的角动量



$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

$$\vec{L}\begin{cases}\text{大小}: L = rmv\sin\alpha = r_{\perp}p\\ \text{方向}: \text{垂直于}\ \vec{r}\ \text{和}\ \vec{p}\ \text{组成的平面 (右手螺旋)}\\ \text{单位}: \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}\qquad \text{量纲}: \mathrm{ML^2T^{-2}}\end{cases}$$

质点对某参考点的角动量反映质点绕该参考点旋转运动的强弱.



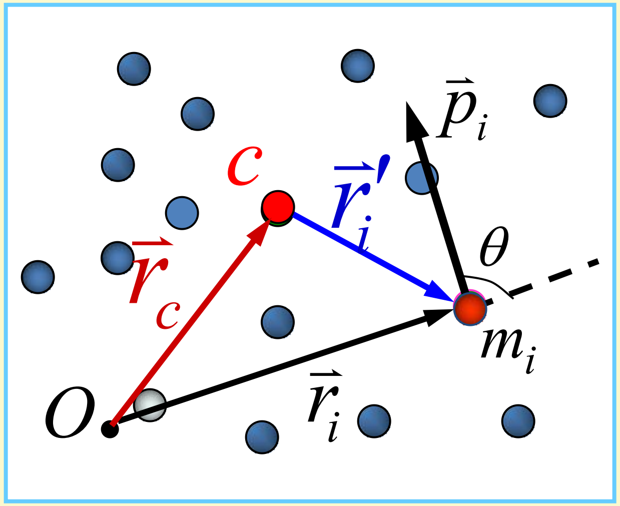
质点对定轴的角动量: 质点对参考点的角动量在通过点的任意轴线上的投影

$$L_z = L\cos\gamma$$

2. 质点系的角动量

系统内所有质点对同一参考点角动量的**矢量和**

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$



$$\because\ \begin{cases}\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_i' \\ \vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'\end{cases}$$

$$\therefore\quad \vec{L}=\sum_i\left(\vec{r}_c+\vec{r}_i'\right)\times m_i\vec{v}_i$$

$$=\vec{r}_c\times\sum_i m_i\vec{v}_i+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\left(\vec{v}_c+\vec{v}_i'\right)$$

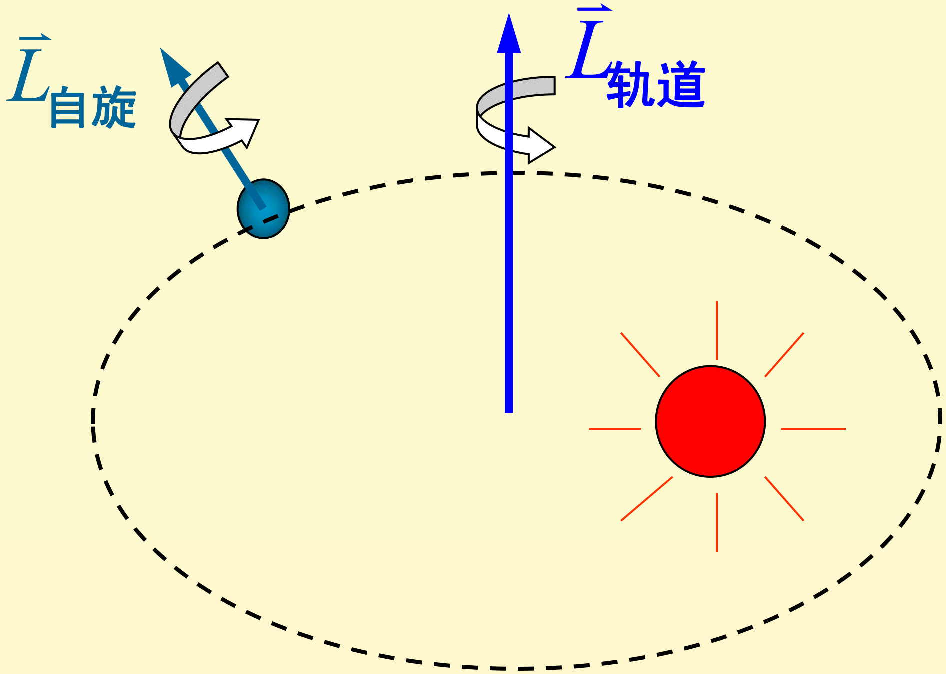
$$=\vec{r}_c\times\sum_i m_i\vec{v}_i+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_c+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$$

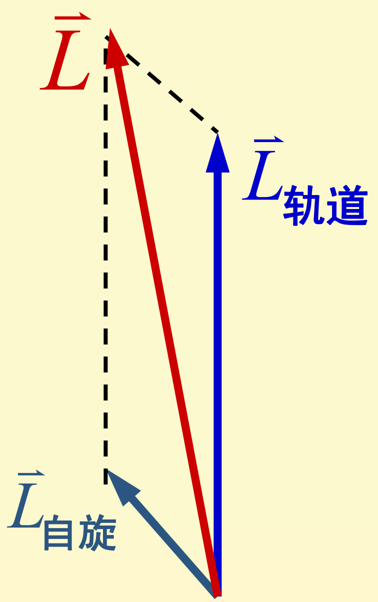
$$=\vec{r}_c\times M\vec{v}_c+0+\sum_i \vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$$

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \vec{L}_{轨道} + \vec{L}_{自旋}$$

$\vec{L}_{轨道}$：描述质点系整体绕参考点的旋转运动

$\vec{L}_{自旋}$：描述质点系绕质心的旋转运动, 与参考点的选择无关.





2.2.2 质点角动量的时间变化率 力矩(moment)

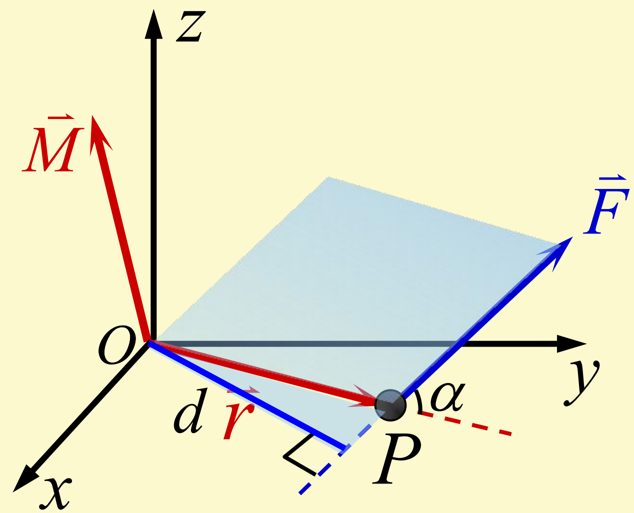
质点的角动量 $\vec{L}$ 随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}}_{=\mathbf{0}}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\quad\rightarrow\vec{F}$$

定义外力 $\vec{F}$ 对参考点 O 的力矩:

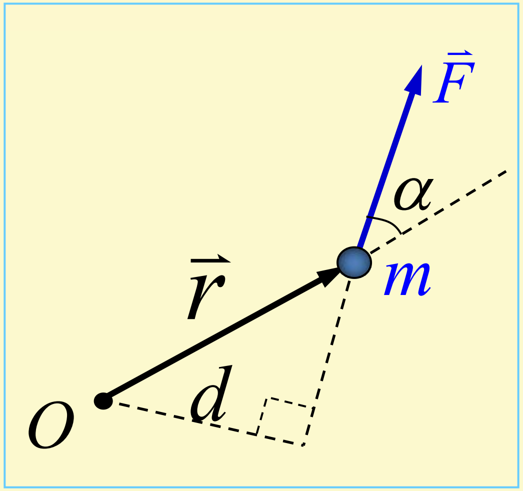
$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}\quad(\mathrm{N\cdot m})$$

$$\vec{M}\begin{cases}\text{大小: } M=rF\sin\alpha\\ \text{方向: } \vec{r}\rightarrow\vec{F}\text{ 右旋前进方向}\end{cases}$$



2.2.3 质点的角动量定理 角动量守恒定律

1. 质点的角动量定理



$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

微分式: $M \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$

积分式: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$ **称为“冲量矩”**

质点的角动量定理: 质点在$t_1 \rightarrow t_2$时间内所受合外力矩的冲量矩等于该段时间内质点角动量的增量.

2. 质点系的角动量定理

质点系的角动量： $\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}_i}_{=\mathbf{0}}+\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_i+\vec{f}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum\vec{r}_i\times\vec{f}_i$$

$$\sum\vec{r}_i\times\vec{f}_i=0$$

$$\vec{M}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

质点系角动量定理： 质点系对某一参考点的角动量随时间的变化率等于系统所受各个外力对同一参考点力矩之矢量和.

2.2.3 角动量守恒定律

由角动量定理 $\int \vec{M}_{外}\mathrm{d}t = \Delta\vec{L}$

当 $\vec{M}_{外} = 0$时，$\Delta\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ 恒矢量

角动量守恒定律: 刚体所受合外力矩为零，则刚体的角动量保持不变.

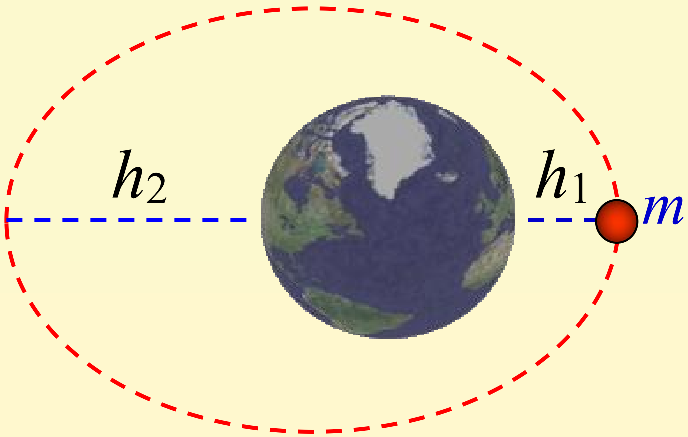
$$\boxed{\vec{M}_{外} = 0 \quad \vec{L}_2 = \vec{L}_1}$$

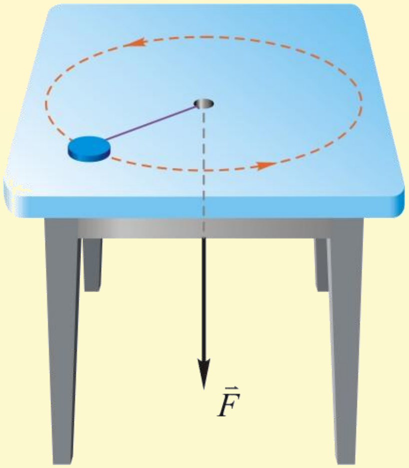
分量式: $\begin{cases} M_x = 0\text{时 } L_x = \text{恒量} \\ M_y = 0\text{时 } L_y = \text{恒量} \\ M_z = 0\text{时 } L_z = \text{恒量} \end{cases}$

例物体在有心力场中运动: (L)

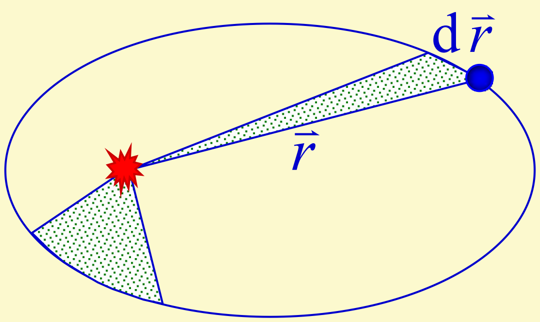
天体运动 (行星绕恒星、卫星绕行星...)

微观粒子运动 (电子绕核运动；加速器中粒子与靶核散射...)





例2-8 证明开普勒第二定律: 行星和太阳之间的连线在相等时间内扫过的椭圆面积相等.



证

$$\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2m}\vec{r}\times m\vec{v}=\frac{1}{2m}\vec{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\text{恒矢量}$$

证毕

§2.3 能量 能量守恒定律

2.3.1 动能 功 动能定理

1. 动能(kinetic energy)

——物体因有速度而具有的作功本领

质点的动能: $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^{2}$ 单位: 焦耳(J), 量纲式: $\mathrm{ML^{2}T^{-2}}$

质点系的动能: $E_{\mathrm{k}}=\sum\limits_{i}E_{\mathrm{k}i}=\sum\limits_{i}\dfrac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}$

2. 动能的时间变化率 功

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

状态改变量 过程量

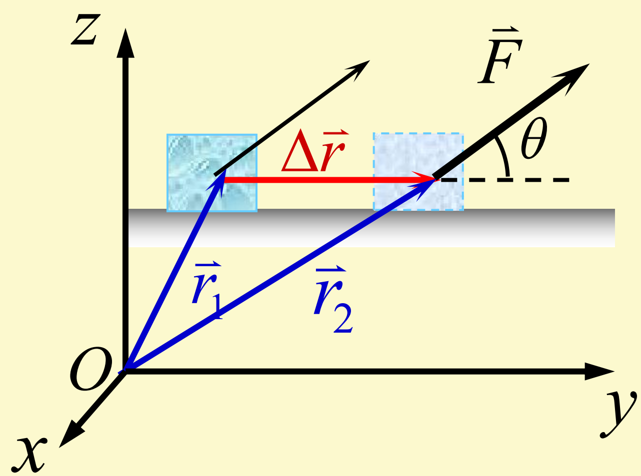
$$\Rightarrow \boxed{\int\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

1) 功(work) 度量能量转换的基本物理量, 描述力对空间积累作用.

定义: 力 $\vec{F}$ 在物体发生位移方向的分力与位移 $\Delta\vec{r}$ 的乘积称为力 $\vec{F}$ 对物体所作的功A.

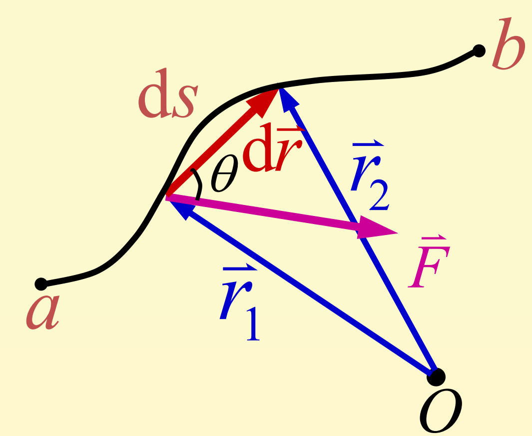
$$A = \left|\vec{F}\right|\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

国际单位: 焦耳(J) N·m



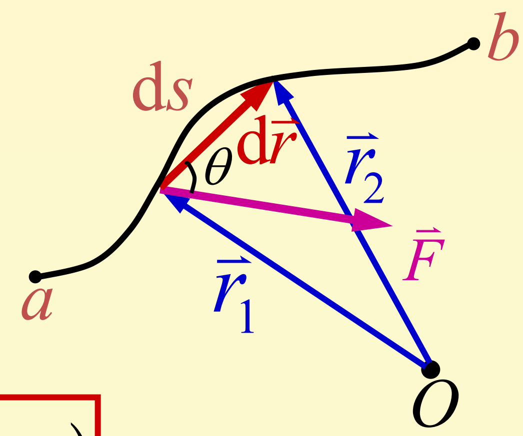
$a\rightarrow b$变力的功:

元功 $\boxed{\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$



总功: $A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

总功: $A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

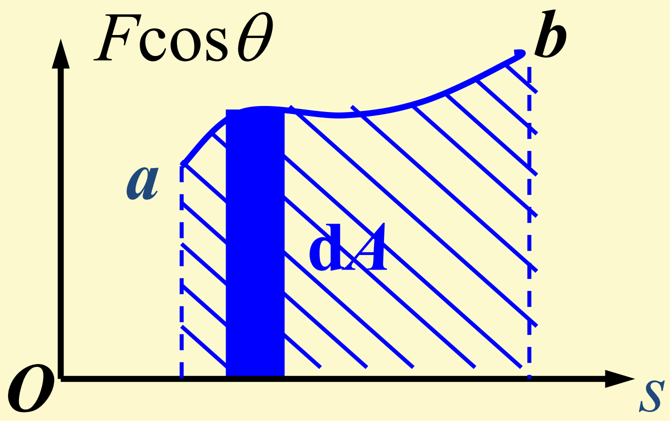


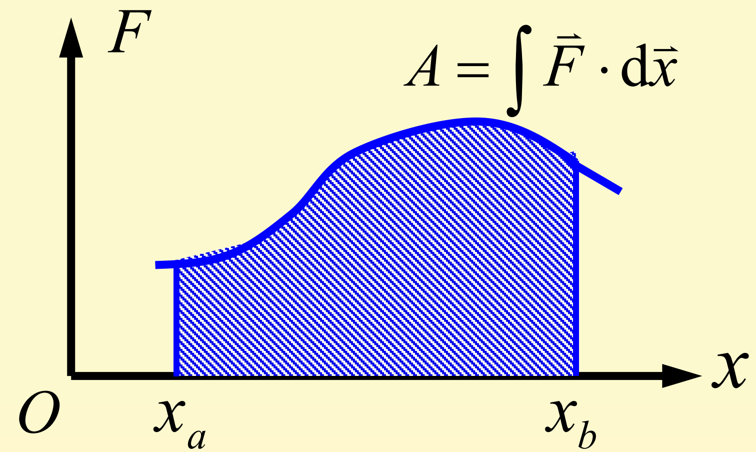
直角坐标系中 $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\boxed{A=\int_a^b\left(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\right)}$$

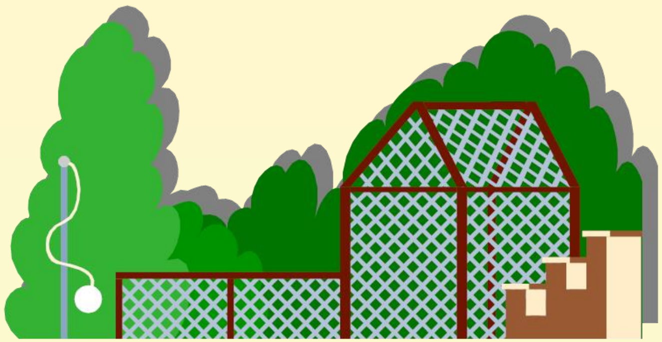
示功图(功的图示法)





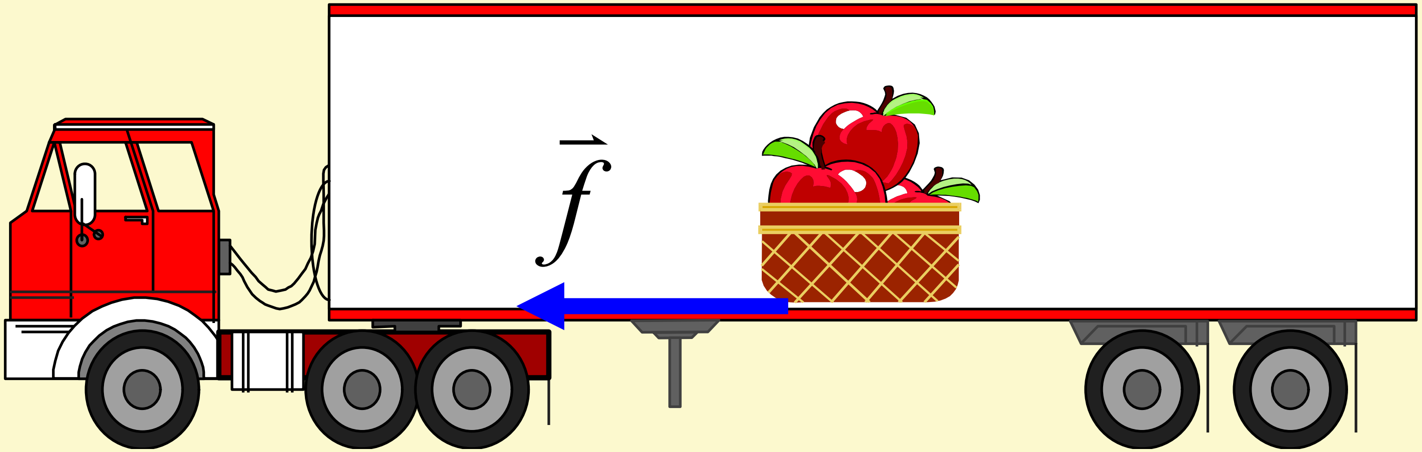
力～位移曲线下的面积表示力*F*所作的功的大小

功和参考系



功与参考系有关，具有相对性！

举例



以车厢为参考系，摩擦力不作功．以地面为参考系，摩擦力作功．通常约定以地面为参考系．

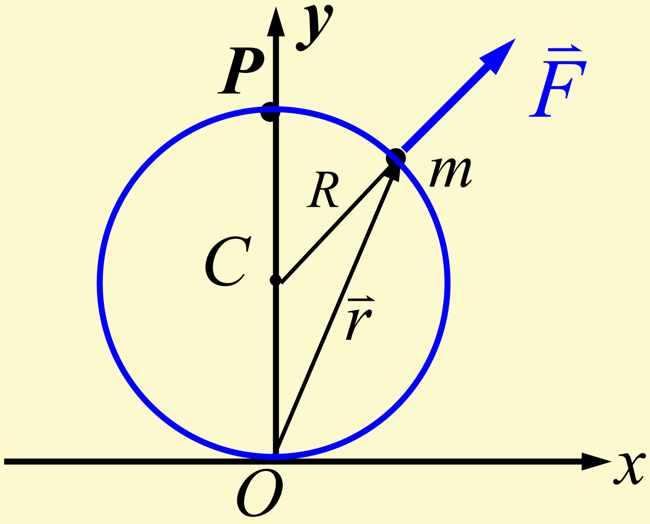
例2-9 一质点做圆周运动, 有一力$\vec{F}=F_0(x\vec{i}+y\vec{j})$作用于质点. 在质点由原点至$P(0,2R)$点过程中, 力$\vec{F}$作的功 $A=?$

解

$$\vec{F}=F_0x\vec{i}+F_0y\vec{j}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}$$



$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^0F_0x\,\mathrm{d}x+\int_0^{2R}F_0y\,\mathrm{d}y=2F_0R^2$$

例2-10 设作用在质量为2kg的物体上的力$F=6t$(N). 如果物体由静止出发沿直线运动, 在头2s内这力作了多少功?

解 $$a=\frac{F}{m}=\frac{6t}{2}=3t$$

$$\because\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad\qquad \therefore\quad \mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t=3t\,\mathrm{d}t$$

两边积分 $$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 3t\,\mathrm{d}t\qquad\qquad v=\frac{3}{2}t^2$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\qquad\qquad \mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$A=\int F\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{9}{4}t^4\Big|_0^2=36(\mathrm{J})$$

注意:

① 功是标量(代数量) $\begin{cases} A > 0 & \text{力对物体做功} \\ A < 0 & \text{物体反抗阻力做功} \\ A = 0 & \text{力作用点无位移} \end{cases}$

力与位移相互垂直

当质点受几个力作用时, 其合力的功为

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_a^b \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_a^b \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

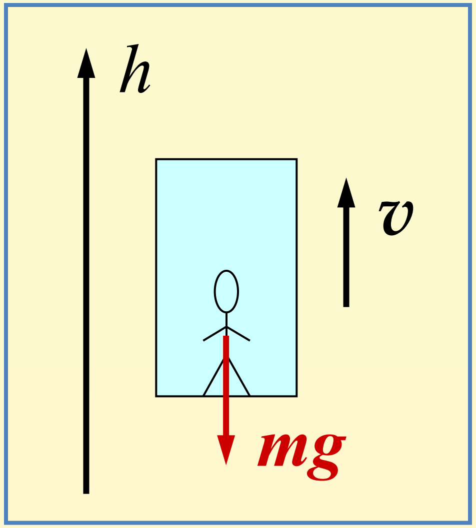
$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

② 功是过程量

与力作用点的位移相关

↓

与参考系的选择相关



地面系 $W_G \neq 0$

电梯系 $W_G = 0$

2) 功率(power)

——反映作功快慢程度的物理量

定义: 单位时间内力所作的功称为功率.

(1) 平均功率 $\overline{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

(2) 瞬时功率 $$\boxed{P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

瞬时功率等于力和速度的标积.

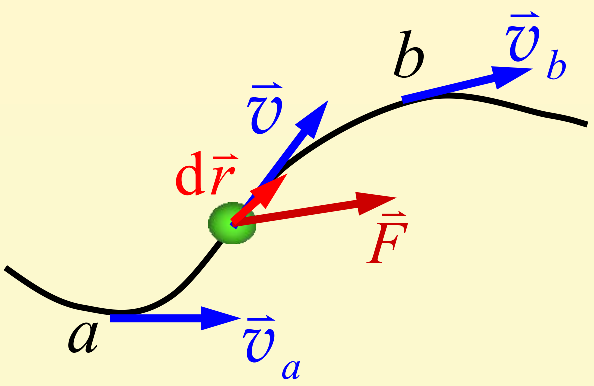
功率的单位(SI): 瓦特(W)

$$1\text{瓦特}(\mathrm{W})=1\text{焦耳}\cdot\text{秒}^{-1}(\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

3. 动能定理

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{v}=\int_a^b m\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v}=\Delta E_{\mathrm{k}}$$



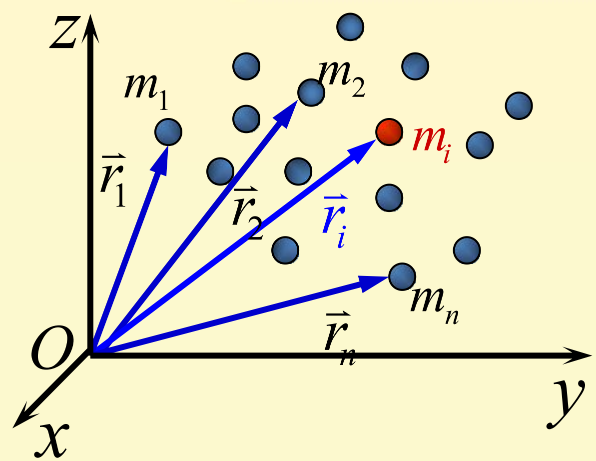
(1) 质点的动能定理

$$\boxed{A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{E_{\mathrm{k1}}}^{E_{\mathrm{k2}}} \mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}=\Delta E_{\mathrm{k}}}$$

注意:

- 动能是标量, 是状态量v的单值函数 → 状态量;
- 功是过程量, 是能量变化的量度;
- 动能定理由牛顿第二定律导出, 只适用于惯性参考系, 动能也与参考系有关.

(2) 质点系的动能定理



对于质点系统:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

对第i个质点:

$$A_i = \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i = \Delta E_{ki}$$

对整个系统, 其动能定理为

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} (\int \vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_{ki}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \int \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_{ki}$$

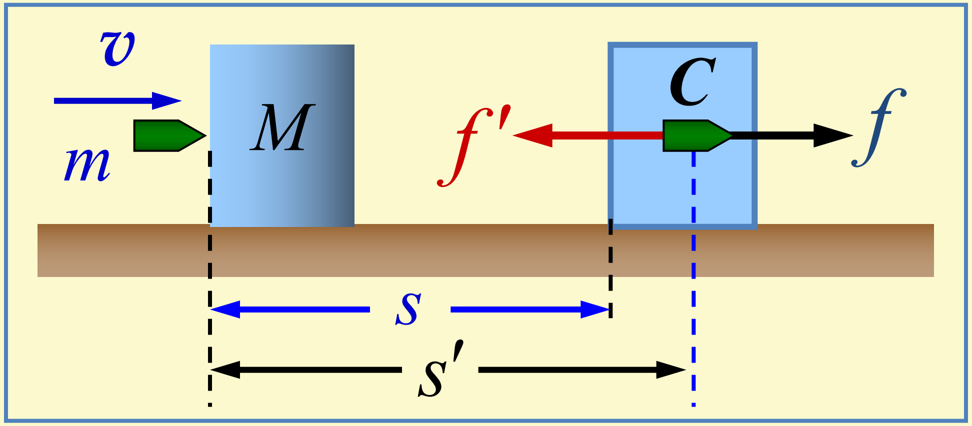
$$\boxed{A_{外} + A_{内} = \Delta E_k}$$

$$A_{内} = \sum_{i=1}^{n} \int \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = ?$$

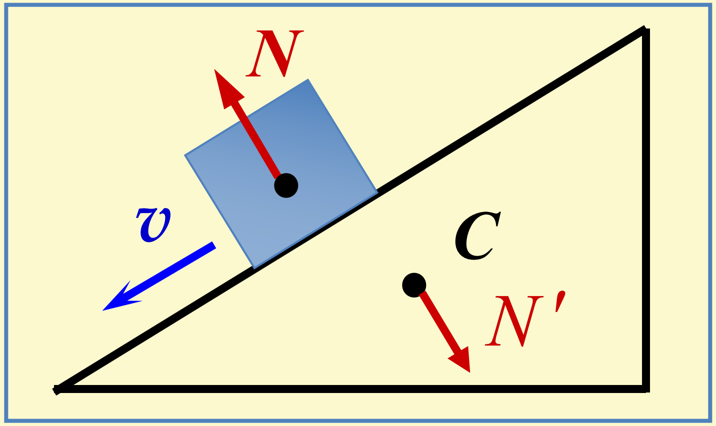
一对作用力与反作用力作功的代数和不一定为零

力作用点的位移不一定相同

质点系内力做功的代数和不一定为零



$$A_f + A_{f'} < 0$$



$$A_N + A_{N'} = 0$$

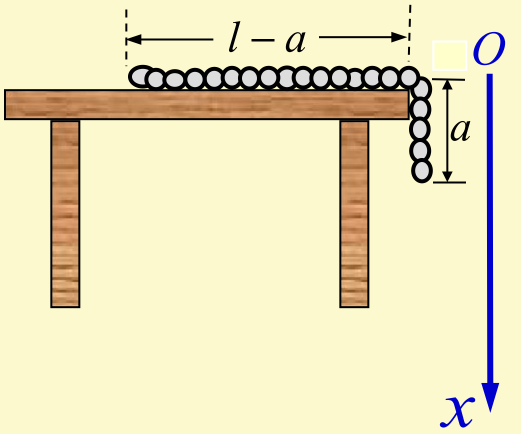
什么条件下, 一对内力做功为零?

- 作用点无相对位移
- 相互作用力与相对位移垂直

例2-11 一链条总长度为l, 放在桌面上. 初始使其一端下垂, 下垂一段的长度为a. 设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为μ, 令链条由静止开始运动, 求

(1) 到链条离开桌面的过程中, 摩擦力对链条作的功;

(2) 链条离开桌面时的速率.



解 (1) 建立如图所示的坐标系Ox

设链条质量为m

t 时刻链条垂掉长度为x

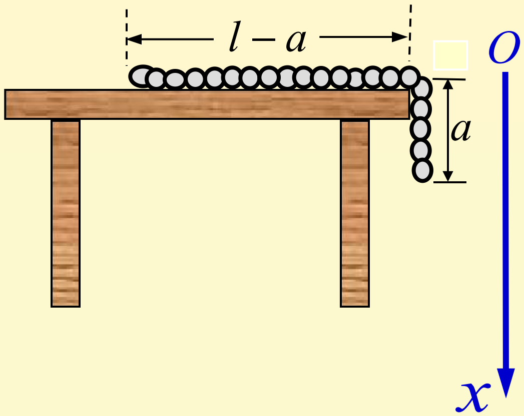
摩擦力 $f=\mu\dfrac{m}{l}(l-x)g$

链条离开桌面的过程中, 摩擦力作功:

摩擦力作负功

$$A_f=\int\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_a^l\mu\frac{m}{l}(l-x)g\,\mathrm{d}x=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

(2) 以链条为研究对象, 由质点系动能定理, 有:



$$W_G + W_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_G = \int_a^l \frac{m}{l} xg\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2l}mg(l^2 - a^2)$$

于是有

$$\frac{1}{2l}mg(l^2 - a^2) - \frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

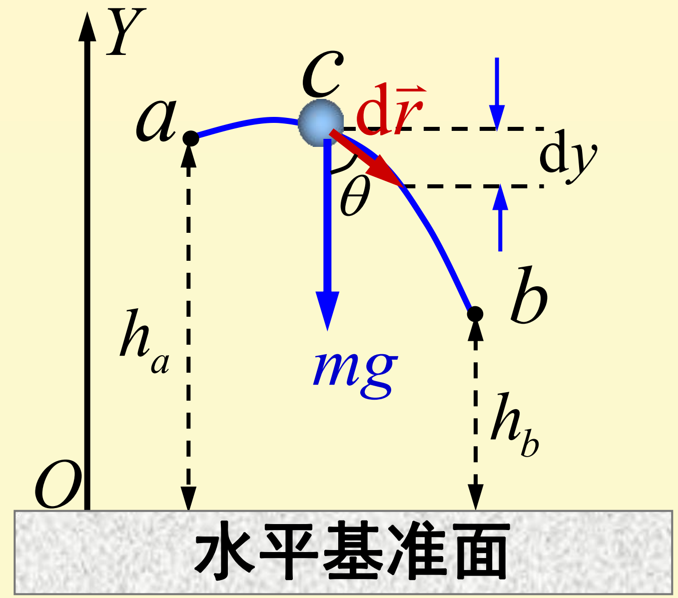
$$v = \sqrt{\frac{g}{l}\left[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2\right]}$$

问题: 外力对物体作功, 对物体运动状态的改变带来什么结果?

2.3.2 保守力 势能 功能原理

1. 几种力的功

1) 重力的功



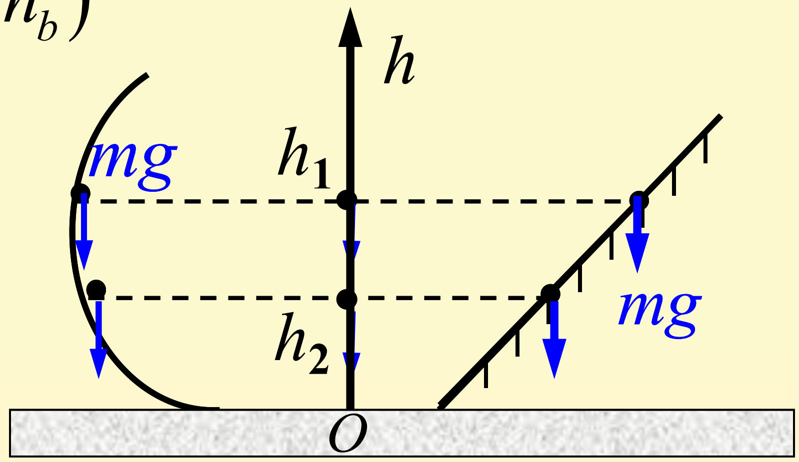
$$\mathrm{d}A = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = mg\cos\theta\,|\,\mathrm{d}\vec{r}\,|$$

$$= -mg\mathrm{d}y$$

物体从a到b重力作的总功:

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{h_a}^{h_b} -mg\mathrm{d}y = mg\left(h_a - h_b\right)$$

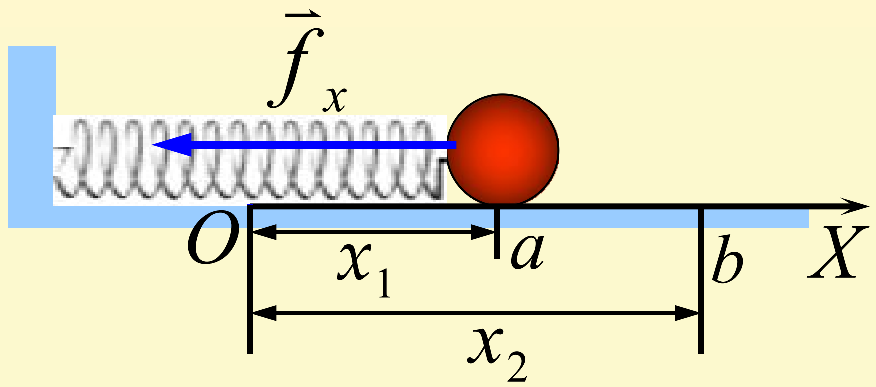
$$= -\left(mgh_b - mgh_a\right)$$



结论: 重力对小球做的功只与小球的始末位置有关, 与小球的运动路径无关.

2) 弹性力的功

弹性力 $\vec{f}_x = -kx\vec{i}$



弹性力的功为

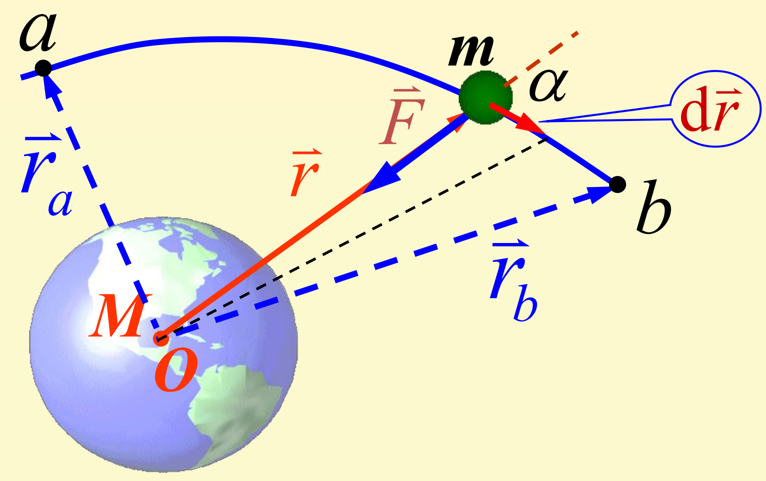
$$A = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i}$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

结论: 弹性力对小球做的功只与小球的始末位置有关, 与小球的运动路径无关.

3) 万有引力的功

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$



万有引力的功为

$$A = \int_a^b -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$

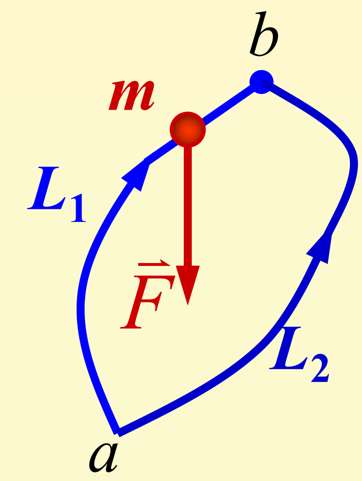
结论: 万有引力的功只与物体的始末位置有关, 与物体的运动路径无关.

重力、弹力、万有引力的共同特点:

① 作功与路径无关, 只与起、末点位置有关

② 作功与相互作用物体的相对位置有关——等于某函数在始末位置的值之差

2. 保守力和非保守力



若 $A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$, $\vec{F}$为保守力.

$$A=\int_{a\ \text{路径}L_1}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{a\ \text{路径}L_2}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

若 $A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\neq 0$, $\vec{F}$为非保守力.

保守力(conservative force): 具有作功与路径无关特性的力

非保守力(nonconservative force): 不具备作功与路径无关特性的力; 或称**耗散力**(dissipative force).

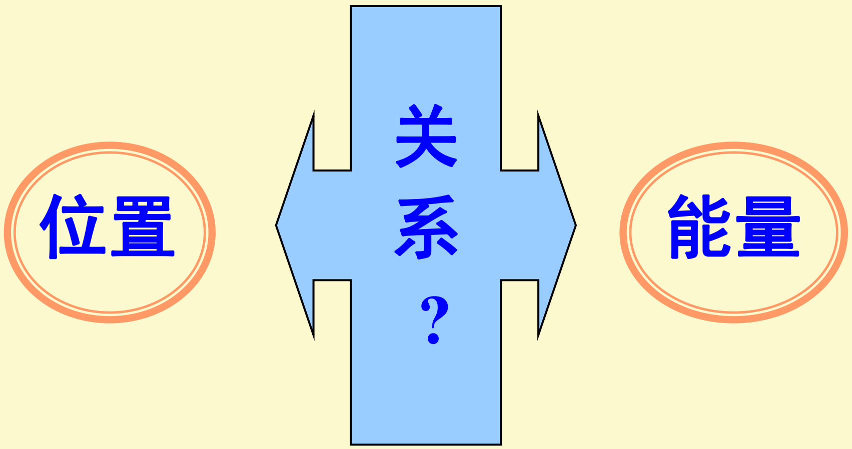
保守力: 重力、弹性力、万有引力、静电力

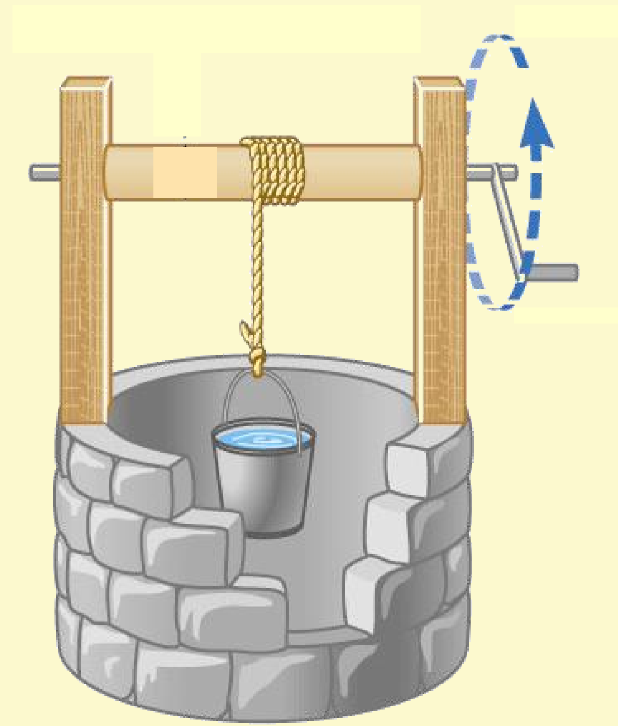
非保守力: 摩擦力、爆炸力

3. 势能(potential energy)

1) 势能

保守力做功只与位置有关

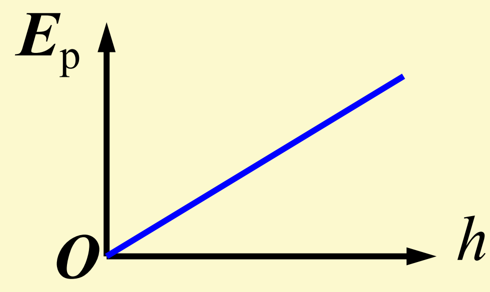
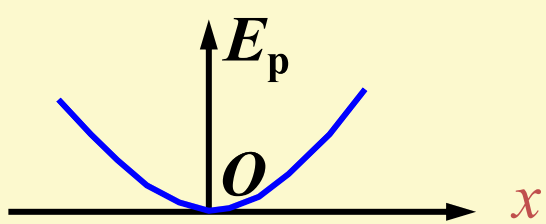
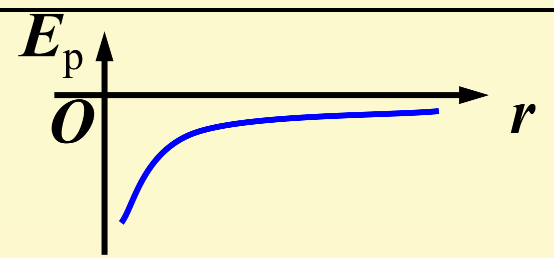




作功是能量变化的量度

凡保守力的功均可表示为与相互作用物体相对位置有关的某函数在始末位置的值之差, → 将该函数定义为此物体系的势能 → 一个状态函数.

几种常见的势能和势能曲线

保守力	势能(E_P)	势能零点	势能曲线
重 力	质点mgh	$h=0$	
弹力	$\frac{1}{2}kx^2$	$x=0$	
引力	$-G\frac{mM}{r}$	$r\to\infty$	

2) 势能差

物体在保守力场中a、b两点的势能$E_p(a)$、$E_p(b)$之差等于质点自a点移到b点过程中保守力$\vec{F}$对它做的功W_{ab},即

$$\boxed{E_{pa}-E_{pb}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

选取$\vec{r}_0$作为势能零点,即$E_{p0}=0$. 那么某点的势能E_{p1}等于质点从该点移动到势能 零点位置时保守力所做 的功.

$$E_{p1}=E_{p1}-E_{p0}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

势能为状态量, 是状态(位置)的单值函数. 其数值还与零势能点的选取有关.

只有保守力场才能引入势能的概念.

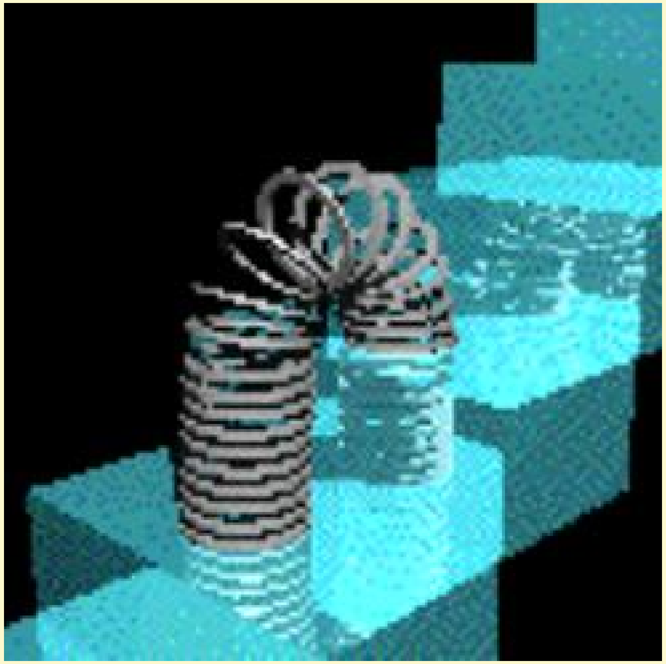
3) 保守力的功与势能的关系

保守力做的功等于势能增量的负值

$$\boxed{A_{保} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_{p}}$$

由势函数求保守力

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{p}$$

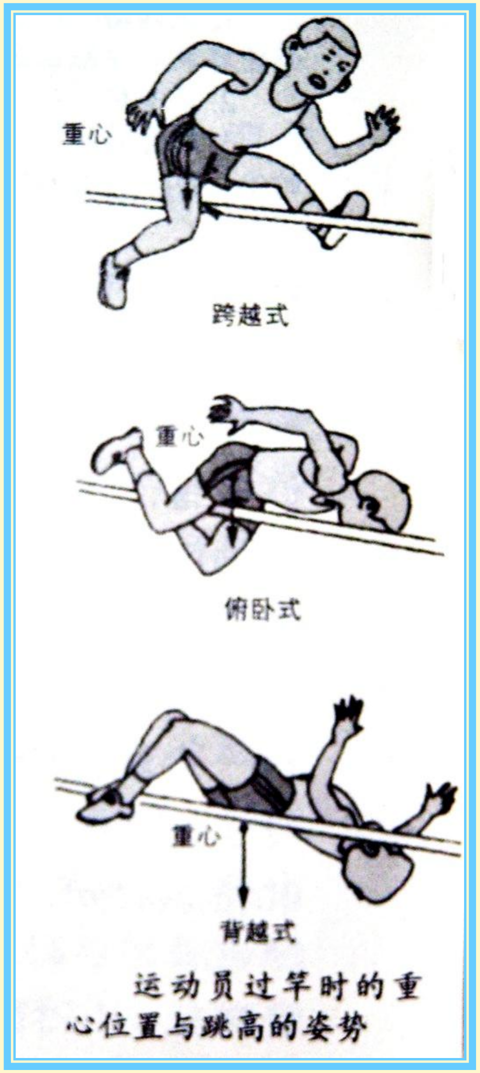


$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}E_{P} = \frac{\partial E_{P}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_{P}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_{P}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_{P}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{P}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{P}}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_{P}$$

跳高采用那种方式最好，为什么？



运动员过竿时的重心位置与跳高的姿势

撑杆与不撑杆结论相同吗？

4. 系统的功能原理 (principle of work and energy)

质点系的动能定理 $A_{外} + A_{内} = \Delta E_{k}$

$$A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = \Delta E_{k}$$

$$-\Delta E_{P}$$

定义机械能 $E = E_{k} + E_{P}$

$$\boxed{W_{外} + W_{非保内} = \Delta\left(E_{k} + E_{P}\right) = \Delta E}$$

质点系所受外力和非保守内力做功的总和等于质点系机械能的增量.

2.3.3 机械能守恒定律

1. 当各微元过程都满足 $\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{非保内}=0$ 时,

$\mathrm{d}E=0 \quad E=$ 恒量, 系统机械能守恒.

2. 当过程满足 $A_{外}+A_{非保内}=0$ 时, $E_1=E_2$

系统初、末态机械能相等.

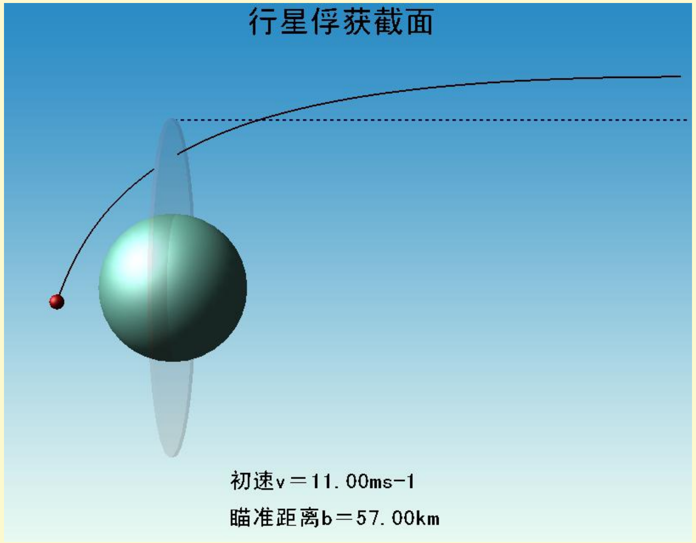
机械能守恒定律(law of conservation of mechanical energy): 当作用于质点系的外力和非保守内力不作功时, 质点系的总机械能守恒.

能量守恒定律(law of energy): 在孤立系统内, 无论发生什么变化过程, 各种形式的能量可以互相转换, 但系统的总能量保持不变.

锥体为什么上滚？

探究学习一例 —— 行星的俘获截面

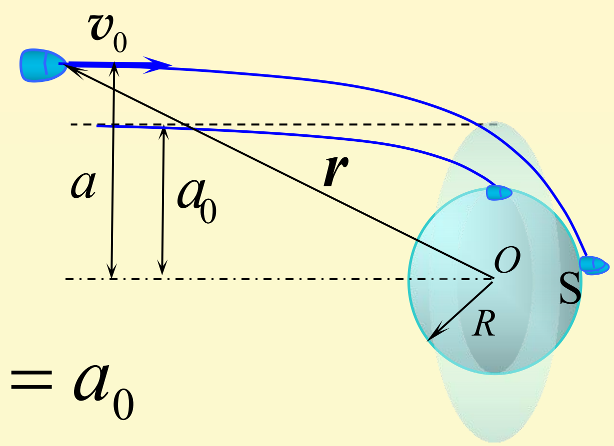
行星的俘获截面: 一无动力的宇航器以靶距a向目标行星靠近, 行星的半径为R. 由于行星引力作用, 存在一个临界值$a_0>R$. 对于$a > a_0$, 宇航器将从行星旁边掠过, 而不会命中在行星着陆; 反之若$a \le a_0$, 则宇航器将命中该行星. 定义面积πa_0^2为行星对宇航器的俘获截面, 设M为行星的质量, v_0为宇航器的初速. 忽略太阳及其它因素的影响, 临界值a_0应满足什么关系?



解 航行器动能 $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$ 势能 $E_p = -\dfrac{GMm}{r}$

总能量 $E = E_k + E_p = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{GMm}{r}$

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$



航行器相对于行星中心的角动量

$$L = mrv\sin\phi$$

条件: 起始时 $r \to \infty, v = v_0 \quad r\sin\phi = a_0$

$$L_{\infty} = ma_0v_0, \quad E_{\infty} = \frac{mv_0^2}{2}$$

航行器与行星相切碰撞处 $r = R \quad \vec{v} \perp \vec{r}$

$$L_R = mRv_R \quad E = \frac{mv_R^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

由守恒定律 $L_{\infty} = L_R, \quad E_{\infty} = E_R$

$$a_0 = R\sqrt{1 + 2\frac{MG}{Rv_0^2}}$$

试编程设计一个行星的俘获截面的模型