授课教师________ 密 姓名________ 封 学号________ 线 院系________

一．判断题(60 分，每题 4 分，需要简要证明或举反例)

1.若$\{F_k\}$是$\mathbb{R}^n$中一列非空闭集，且$F_k \supset F_{k+1}(k=1,2,\cdots)$,则$\cap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$. ( )

2.若$E \subset \mathbb{R}$是可列集，则E的余集E^c是 Borel 集。 ( )

3.存在$E \subset \mathbb{R}^n$中非空，满足E'是可数集，但E不是可数集。 ( )

4.存在闭集$F \subset \mathbb{R}$,满足F是无理数的子集且$mF > 0$. ( )

5.若$f: E \to \mathbb{R}$是可测函数，则$\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f| \geq n) = 0$. ( )

6.若$E \subset [0,1]$是正测度集，$\aleph_E$是E在$[0,1]$上的特征函数，那么$\aleph_E$在$[0,1]$上 Riemann 可积。 ( )

7.若$u_n: E \to \mathbb{R}$是一列可测函数，满足$\int_E |u_n| dm < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$在E上几乎处处收敛。 ( )

8.已知$f: E \to \mathbb{R}$是可测函数，且$mE < +\infty$,那么$\frac{f}{1+|f|} \in L(E)$. ( )

9.若$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$是绝对连续函数，记$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，则h也是$[a,b]$上的绝对连续函数。

( )

10.若$E\subset\mathbb{R}^2$是可测集，那么对$\forall x\in\mathbb{R}$，截集

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}|(x,y)\in E\}$$

是$\mathbb{R}$中可测集。

( )

11. 若$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是绝对连续函数，且$f'(x)=1$几乎处处成立，那么$f(x)=f(a)-a+x$.

( )

12. 若$f\in L(E)$且$\int_E f\,dm=1$，则存在可测集$E_0\subset E$，使得

$$\int_{E_0} f\,dm=\frac{1}{2}.$$

( )

13. 若$E\subset\mathbb{R}$可测，$f:E\to[0,1]$是可积函数，则

$$\int_E f\,dm\in[0,1].$$

( )

14. 若$f_n\in L(E)$且$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则$f\in L(E)$.

( )

15. 已知$f\in L^3(E)$，$g:E\to\mathbb{R}$是有界可测函数，则$f\cdot g\in L(E)$.

( )

二.(10 分)设A, B是$\mathbb{R}^n$中两个非空有界集。证明：

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)\le m^*A+m^*B.$$

特别，当A可测时，上述不等式等号成立。

三.(10 分)设$f_n: E\to[1,+\infty)$可测，且$f_n\xrightarrow{m}f$，证明：$\frac{1}{f_n}\xrightarrow{m}\frac{1}{f}$

授课教师______ 姓名______ 学号______ 院系______

密 封 线

四.(10 分)设$f_n \in L^2(0,1)$且$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dm \le 1$. 如果$f_n \xrightarrow{a.e.} 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dm = 0.$$

五.(10 分)已知$f(0)=0, f(x)=x^\alpha \sin\frac{1}{x}\ (0<x\le 1, \alpha>0)$.

(1)证明：$0<\alpha\le 1$时，$f(x)$在$[0,1]$上不是有界变差函数。

(2)证明：$\alpha>1$时，$f(x)$在$[0,1]$上是绝对连续函数。

以下提供者马效恒

1. ×

反例 $F_i=[i,+\infty)$ $i=1,2\cdots$ 则 F_i 为闭集

但 $\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i=\phi$

2. √.

证 $E=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$

$\{a_1\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1-\frac{1}{2^n},a_1+\frac{1}{2^n})$ => $\{a_1\}$ 为Borel集 => $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$ 为Borel集 => E^c 为Borel集

3. ×

3. 存在 $E\subset R^n$ 中非空，满足 E' 是可数集，但 E 不是可数集（×）

若 E' 是可数集，则 E 是可数集。

证明: $E=E'\cup(E\setminus E')$ 只需证明 $E\setminus E'$ 是可数集.

由 $E\setminus E'$ 的点都是孤立点（否则包含于 E'）

只需说明 R^n 中孤立点集一定可数. 设为 A. 由孤立点定义

$\forall x\in A$, $\exists\delta_x>0$, s.t. $U(x,\delta_x)\cap A=\{x\}$

由 $\{U(x,\delta_x)\}_{x\in A}$ 是可列的.

故 x 可列.

4. 存在闭集 $F\subset R$, 满足 F 是无理数的子集且 $mF>0$.（√）

记 $[0,1]$ 中有理数集为 $Q=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$

作 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(r_k-\frac{1}{2^{k+2}},r_k+\frac{1}{2^{k+2}})$. 是开集. 且包含 Q.

则 $F=[0,1]\setminus E$ 是闭集且是无理数的子集.

由 $mE\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$.

知 $mF\ge 1-mE>\frac{1}{2}>0$.

5. 若 $f:E\to R$ 是可测函数. 则 $\lim_{n\to\infty}mE(|f|\ge n)=0$.（√）

用反证法. 若 $\lim_{n\to\infty}mE(|f|\ge n)\ne0$, 记 $\lim_{n\to\infty}mE(|f|\ge n)=a$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. 当 $n\ge N$ 时, $mE(|f|\ge n)>a-\varepsilon$

取 $a-\varepsilon=\frac{a}{2}>0$

$\int_E|f|\,dm\ge\int_{E(|f|\ge n)}|f|\,dm\ge n\ mE(|f|\ge n)>\frac{n}{2}a\longrightarrow\infty$. $n\to\infty$ 时

这与 $f\in L(E)$ 矛盾

6. 若 $E\subset[0,1]$ 是正测度集. χ_E 是 E 在 $[0,1]$ 上的特征函数. 那么 χ_E 在 $[0,1]$ 上 R-可积.（√）

$(L)\int_{[0,1]}\chi_E\,dm=\int_E 1\,dm=mE=(R)\int_0^1\chi_E(x)dx$.

7. 若 $u_n: E\to R$ 是一列可测函数 $\int_E |u_n| dm < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$
则函数项级数 $\sum u_n$ 在E上几乎处处收敛

× $u_n = \frac{1}{2n}$ $E=[0,1]$上.

8. $f: E\to R$ 可测 $mE<+\infty$ $\frac{f}{1+|f|} \in L(E)$

✓ 但证明不太会。

9. $f, g: [a,b] \to R$ 绝对连续 $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. h也绝对连续$[a,b]$.

✓ $f+g$, $f-g$ 也绝对连续 $h=\frac{f+g+|f-g|}{2} \in AC[a,b]$

10. $E\subset R^2$ 可测 $\forall x\in R$ $E_x=\{y\in R \mid (x,y)\in E\}$ 是R中可测集 ×

$E=\{(x,y), y\in$不可测$, x=0\}$ 则 $mE=0$. 而 $E_0=$ 不可测

11. ✓

证 $f\in AC[a,b] \Rightarrow f(x)=f(a)+\int_a^x f'\,dm$

$= f(a)+\int_a^x 1\,dm$

$= f(a)+\int_a^x 1\,dy = f(a)+x-a$

12. ✓

证: 令 $E_x = E\cap(-\infty, x)$ 可测   扩展f: 在 $x\in E^c$ 令 $f(x)=0$ 多余.

令 $h(x)=\int_{E_x} f\,dm$ $\forall x_1<x_2$

$|h(x_2)-h(x_1)| = |(\int_{E_{x_2}} - \int_{E_{x_1}}) f\,dm| = |\int_{E\cap[x_1,x_2]} f\,dm| \le \int_{[x_1,x_2]} |f|\,dm$

$= \int_{[x_1,x_2]\setminus E} |f|\,dm + \int_{[x_1,x_2]\cap E} |f|\,dm$

$\le 0 + \int_{[x_1,x_2]\cap E} |f|\,dm$

由积分绝对连续性. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|h(x_2)-h(x_1)|<\varepsilon$

$\Rightarrow h(x)$在R上 连续

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$ $\lim_{x\to+\infty} h(x)=1$ $\overset{介值}{\Rightarrow}$ $\exists$ $x_0\in R$ s.t. $h(x_0)=\frac{1}{2}$

$\int_{E\cap(-\infty,x_0)} f\,dm = \frac{1}{2}$ 取 $E_0 = E\cap(-\infty,x_0)$ 即可

13. ×

反例. $E=[0,2]$

$f(x)=1\ \forall x\in E$, 则 $f: E\to[0,1]$ 可积

但 $\int_E f\,dm = 2 \notin [0,1]$

14. ×

反例 $f_n=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in[\frac{1}{n},1]\\ 0 & x\in[0,\frac{1}{n})\end{cases}$ 则 $f_n\in L(E)$ $E=[0,1]$

且 $f_n\to f=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$ 但 $\int_E f\,dm=+\infty$ $f\notin L(E)$

15. ×

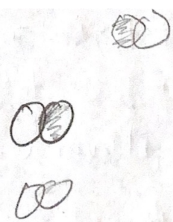
反例 $E=[1,+\infty)$

$f(x)=\frac{1}{x}$ 则 $f^3(x)\in L(E)$

令 $g(x)=1\ \forall x\in E$ 有界可测

但 $\int_E f\cdot g\,dm=\int_E \frac{1}{x}\,dm=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=+\infty \Rightarrow fg\notin L(E)$

二、Proof.



$\exists$ 开集列 $\{G_n\}$, $G_n\supset A$ $mG_n\to m^*A$

开集列 $\{P_n\}$ $P_n\supset B$ $mP_n\to m^*B$.

又 $(G_n\cup P_n)\setminus P_n = G_n\setminus(G_n\cap P_n)$

$m(G_n\cup P_n)-mP_n = mG_n - m(G_n\cap P_n)$

$m(G_n\cup P_n)+m(G_n\cap P_n)=mG_n+mP_n$.

又 $G_n\cup P_n\supset A\cup B$ $G_n\cap P_n\supset A\cap B$

$\Rightarrow m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)\le mG_n+mP_n$ 令 $n\to\infty$. $m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)\le mA+mB$

若 A 可测.

则 $m^*(B)=m^*(B\cap A)+m^*(B\cap A^c)$

$m^*(B\cup A)=m^*(B\cup A\cap A)+m^*(B\cup A\cap A^c)=m^*(A)+m^*(B\cap A^c)$

相减 即得 Q.E.D

三. 设 $f_n: E \to [1, +\infty)$ 可测 且 $f_n \xrightarrow{m} f$, 证明 $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{m} \frac{1}{f}$

解: $\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| = \frac{|f_n - f|}{|f_n \cdot f|} \le |f_n - f|$

$\therefore \forall \eta > 0$, $E(|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}| \ge \eta) \subset E(|f_n - f| \ge \eta)$

$mE(|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}| \ge \eta) \le mE(|f_n - f| \ge \eta)$

而 $f_n \xrightarrow{m} f$ 即 $\forall \eta > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n - f| \ge \eta) = 0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}| \ge \eta) = 0$

四、$mE = 1 < +\infty$ 则由叶果洛夫 $f_n \xrightarrow{a.e.} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.u.} 0$

$\forall k \in N$, 往证 $\lim\limits_n \int_0^1 |f_n| dm \le \frac{1}{k}$ $\forall \varepsilon > 0$

设 $E_n = E(|f| \ge k]$ 取 $\delta > 0$. s.t. $k\delta < \varepsilon$.

$\exists E_\delta$, $mE_\delta < \delta$ $f_n \overset{E \setminus E_\delta}{\rightrightarrows} f$. 则

有 $E = [E \setminus (E_n \cup E_\delta)] \cup E_n \cup [(E_\delta \setminus E_n)]$

$\int_E |f_n| dm \le \int_{E \setminus (E_n \cup E_\delta)} |f_n| dm + \int_{E_n} |f_n| dm + \int_{E_\delta \setminus E_n} |f_n| dm$

n充分大时

$< \varepsilon \cdot mE + \frac{1}{k} \int_{E_n} |f_n|^2 dm + k \cdot mE_\delta$

$<$

$\le 2\varepsilon + \frac{1}{k}$

由 ε 任意性 $\int_E |f_n| dm \le \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n| dm = 0$

五、 $f(0)=0$ $\quad f(x)=x^{a}\sin\frac{1}{x}\ (0<x\leq 1,\ a>0)$

证：(1) $0<a\leq 1$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是有界变差

(2) $a>1$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续

(1) 分点 $\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}$ 此时 $\sum |f(x_k)-f(x_{k-1})| \to +\infty$

(2) $f'(x)=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}$

$f'(x)$ 绝对可积

$\int_0^x f'(t)\,dm=\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-\lim\limits_{\delta\to 0} f(\delta)=f(x)$

$f(x)\in AC[0,1]$