对上述第一类分类的展开：

1. Description of disposable singular points.

For a function f holomorphic in a punctured neighborhood $V=\{0<|z-a|<\varepsilon\}$ of a point a. the following statement are equavalent:

(1) $z=a$ is a disposable singular point (fixable)

(2) $f(z)$ is bounded in some punctured neighborhood. $V'=\{0<|z-a|<\varepsilon', \varepsilon'>0$ of the point a.

(3) the Laurent coefficients C_n of the function f in the punctured neighborhood $V=\{0<|z-a|<\varepsilon\}$ satisfy the condition

$$C_n=0 \quad \text{at} \quad n<0.$$

(4) it is possible to define the function $f(z)$ for $z=a$ in such a way that the resulting function f becomes holomorphic in the complete neighborhood of $U=\{|z-a|<\varepsilon\}$ of the point a.

Proof:

(1)→(2) based on the definition of limit.

(2)→(3) If $|f(z)|<M$ for $0<|z-a|<\varepsilon'$

then according to Cauchy inequality

$$|C_n| \le M\rho^n \qquad \rho\in(0,\varepsilon')$$

$$\rho^n \to 0 \quad C_{-k}=0 \text{ for every } k=1,2,\cdots$$

(3)⇒(4)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n \quad \text{for } 0<|z-a|<\varepsilon$$

put $f(a)=C_0$, this equality hold for $|z-a|<\varepsilon$.

⇒ f is holomorphic in $\{|z-a|<\varepsilon\}$

(4)⇒(1) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)=C_0$

留数的概念：

若$f(z)$在z_0的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，则在此领域内，$f(z)$可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+C_{-2}(z-z_0)^{-2}+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$$

现在 $0<|z-z_0|<R$ 内任取一条绕 z_0 的正向简单闭曲线 C，对上式两边在 C 上作积分

利用 $$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\cdot C_{-1}$$

我们把这个积分值除以 $2\pi i$ 以后所得的数，称为$f(z)$在z_0处的留数. 记 $Res[f(z), z_0]$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{\oint_C f(z)dz}{2\pi i}=C_{-1}$$

① 通过$\oint_C f(z)$计算

C是任意包含孤立奇点的留数.

洛朗展开计算

例 5-3.

求 $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ 在孤立奇点 $z=0$ 处的留数.

$$z\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$Res[f(z),0]$ $\quad C_{-1}=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$

例5-4，求 $\text{Res}\left[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-z}, 1\right]$

$$\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} \quad \frac{e}{1}$$

$$\text{Res}\left[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-z}, 1\right]=e$$

留数的计算方法.

(1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗展开式中不含负幂次项，从而 $C_{-1}=0$，故当 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点时，$\text{Res}[f(z),z_0]=0$

(2) 若 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗展开式为

$$f(z)=C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots$$

显然 $C_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$，故当 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点时 $\text{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

(3) 若 z_0 为 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点，且 $Q'(z_0)\neq 0$，则

$$\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

事实上，因为 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，所以 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$

$$\text{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(4) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

事实上，因为 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，所以有

$$f(z)=C_{-m}(z-z_0)^{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots \quad (C_m\neq 0)$$

$$(z-z_0)^m f(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+C_0(z-z_0)^m+\cdots$$

上式两边求 $(m-1)$ 阶导

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!C_{-1}+\{\text{含有}(z-z_0)\text{的正幂项}\}$$

两边取 $z\to z_0$ 时的极限，可得

$$\text{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

⇒ 当 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点时，几乎没有什么简捷方法，因此对于本性奇点处的留数，我们只能利用洛朗展开式的方法或计算积分的方法求解.

例5-5 求 $\text{Res}\left[\frac{ze^z}{z^2-1}, 1\right]$

(1) $f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$

$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{ze^z}{z+1}$

⇒ 一阶极点

$$\text{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\frac{e}{2}$$

(3) $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad \text{Res}[f(z),1]=\frac{e}{2}$

$P(z)=ze^z \quad Q(z)=z^2-1$

例5-6

例5-7.

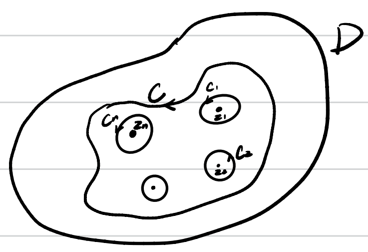
留数定理及其应用.

定理5-2（留数定理）

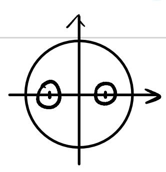
设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_k ($k=1,2,\cdots,n$) 处处解析，C 为 D 内包围各奇点的一条闭曲线

则 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z),z_k]$

留数定理的重要作用之一，就是把计算封闭路径 C 上的积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.



例5-8. 计算积分 $\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz$，$C:|z|=2$



$$\oint_C=2\pi i\sum \text{res}_{a_i}f(z)=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2}$$

$$\lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z-1}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

无穷远点的留数

1. 无穷远点留数的定义

设函数在环形域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz$$

为$f(z)$在无穷远点的留数，记作 $Res[f(z),\infty]$ 即

$$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz.$$

其中C^-为环形域 $R<|z|<+\infty$ 内绕原点的一条简单闭曲线.

2、无穷远点留数和洛朗级数的关系.

设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n,\quad R<|z|<+\infty$$

两边在 C^- 上积分

$$\oint_{C^-} f(z)dz=\oint_{C^-}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n dz=-\oint_{C}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n dz$$

$$=-C_{-1}\oint_{C}\frac{1}{z}dz=-2\pi i C_{-1}$$

故 $Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=-C_{-1}$

3、无穷远点 留数的两个结论

定理 5-3.

$$Res[f(z),\infty]=-Res[f(\tfrac{1}{z})\cdot\tfrac{1}{z^2},0]$$

Proof: 在无穷远点的留数定义中取C为半径足够大的正向圆周 $C_R: |z|=R$，作变换 $z=\frac{1}{\xi}$，并设 $z=Re^{i\theta}$，$\xi=\rho e^{i\varphi}$，其中$\rho=\frac{1}{R}$

$\theta=-\varphi$ 当z沿 C_R^- (顺时针)转一圈时，ξ沿 C_ρ: $|\xi|=\frac{1}{R}=\rho$ 的方向逆时针绕一圈.

$$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R^-} f(z)dz \xlongequal{z=\frac{1}{\xi}} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(\tfrac{1}{\xi})(-\tfrac{1}{\xi^2})d\xi$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(\tfrac{1}{\xi})\cdot\tfrac{1}{\xi^2}d\xi$$

$=-Res[f(\frac{1}{\xi})\cdot\frac{1}{\xi^2},0]$

$=-Res[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

因为 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，所以$f(\frac{1}{\xi})$ 在 $0<|\xi|<\frac{1}{R}=\rho$内解析，$\frac{f(\frac{1}{\xi})}{\xi^2}$ 在 $|\xi|<\rho$ 内只有孤立奇点

⇒ 此定理提供了一种将无穷远点的留数转化为有限点 $(z=0)$ 处 留数的方法.

定理 5-4. 如果函数 $f(z)$在扩充的复平面上只有有限个孤立奇点 (包括∞在内，设为 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$)，则 $f(z)$在所有孤立奇点处的留数和为0.

证：

作以原点为中心，充分大的R为半径的C，使z_1到z_n全在圆内，则由留数定理及无穷远点留数的定义有

$$Res[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} f(z)dz=0$$

例 5-14 & 例 5-15

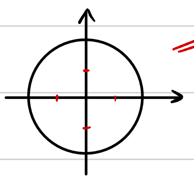
求 $Res[\frac{z}{z^4-1},\infty]$

$$Res[\frac{z}{z^4-1},\infty]=-Res\left[\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^4}-1}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-Res\left[\frac{z}{1-z^4},0\right]=0$$

$$z(1+z^4+z^8+\cdots)=0$$

计算积分 $\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz$，$C: |z|=2$



⇒ $\oint_C\frac{z}{z^4-1}=2\pi i\sum_{i=1}^{4}Res[f(z),z_i]=-2\pi i\ Res[f(z),\infty]=0$

例5-16 计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z-3)(z^5-2)}dz$ ，$C: |z|=2$

$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-2)}$ 在 $|z|=2$ 内的奇点是 $z^5=2$ 的五个根，z_k $(k=1,2,3,4,5)$

在外部的奇点 3 和 ∞，由留数定理和定理5-4.

$$\oint_C \frac{1}{(z-3)(z^5-2)}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{5}[f(z),z_k] = (-\mathrm{Res}[f(z),\infty]-\mathrm{Res}[f(z),3])\cdot 2\pi i$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(1-3z)(1-2z^5)},0\right]=0$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \frac{1}{241}$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-3)(z^5-2)}dz = -\frac{1}{241}\cdot 2\pi i$$

计算闭路积分时，如果奇点较多、含高阶奇点，此时用无穷远点的留数计算较为方便

5.3 留数在实变量积分计算中的应用

$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型积分

要用留数计算
- ① 将此积分化为复变量的围线(封闭路径)积分
- ② 利用留数定理将复变量的围线积分转化为留数问题，计算留数可得原积分值

曲线 $\longrightarrow$ 变量

在 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 中，$R(\cos\theta,\sin\theta)$ 表示 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 的有理函数 且在 $[0,2\pi]$ 上连续

令 $z=e^{i\theta}$

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\\ dz = de^{i\theta} = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta\end{cases}$$

对于 $\frac{1}{1+a\cos\theta+b\cos^2\theta}$ $(\sin\theta)$ $(\sin^2\theta)$ 积分时计算有困难

从 $z=e^{i\theta}$ 知 θ 从 0 到 2π 时 z 恰好沿单位圆周 C $|z|=1$ 的正向绕一周.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \oint_C R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}dz$$

使 $f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$ 在 C: $|z|=1$ 的内部有 n 个孤立奇点 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 时.

由留数定理知

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

☆ $z=e^{i\theta}$

求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$ $(0<p<1)$ 的值

令 $z=e^{i\theta}$ $\cos 2\theta=\frac{1}{2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})=\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(z-p(z^2+1)+zp^2)}dz=\oint_{|z|=1}\underbrace{\frac{1}{2iz^2(1-pz)(z-p)}}_{f(z)}dz$$

$$=2\pi i(\text{相加})\Rightarrow\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$$

$z=0$ $\rightarrow$ 在 $|z|=1$ 内
$z=p<1$
$z=\frac{1}{p}>1$

$z=0$ 二阶
$z=p$ 一阶.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(f(z)\cdot z^2)=\frac{1+p^2}{2ip}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}(z-p)f(z)=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}$$

Lecture $f(x)$ as real function

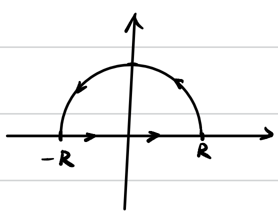
latter

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 型积分

假设 $P(x)$, $Q(x)$ 为互质的关于 x 的多项式，分母 $Q(x)$ 次数高于 $P(x)$ 的次数两次以上，且 $Q(x)$ 在实轴上没有零点

这是一个有理函数的无穷积分. 现在来说明利用留数计算这类函数的方法.

选取积分路径 C 为上半圆周 C_R: $|z|=R$, $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ 与实轴上的线段 $-R\leq x\leq R$，$\mathrm{Im}(z)=0$ 围成的闭曲线



被积函数取 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，取 R 充分大 使 $f(z)$ 在上半平面内的一切孤立奇点 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 由留数定理可知

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

即 $\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{C_R}f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

如果我们可以证出 $R\to\infty$ $\oint_{C_R}f(z)\to 0$ 那么便可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的计算公式

对于 $\int_{C_R} f(z)dz$, $z=Re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$, $dz=Rie^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta$$

因 $Q(z)$ 次数比 $P(z)$ 次数高两次，故

$$\lim_{z\to+\infty} zf(z)=\lim_{z\to+\infty}\frac{zP(z)}{Q(z)}=0$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，当 $|z|=R$ 充分大的时候

$$|zf(z)|=|f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}|<\varepsilon$$

从而

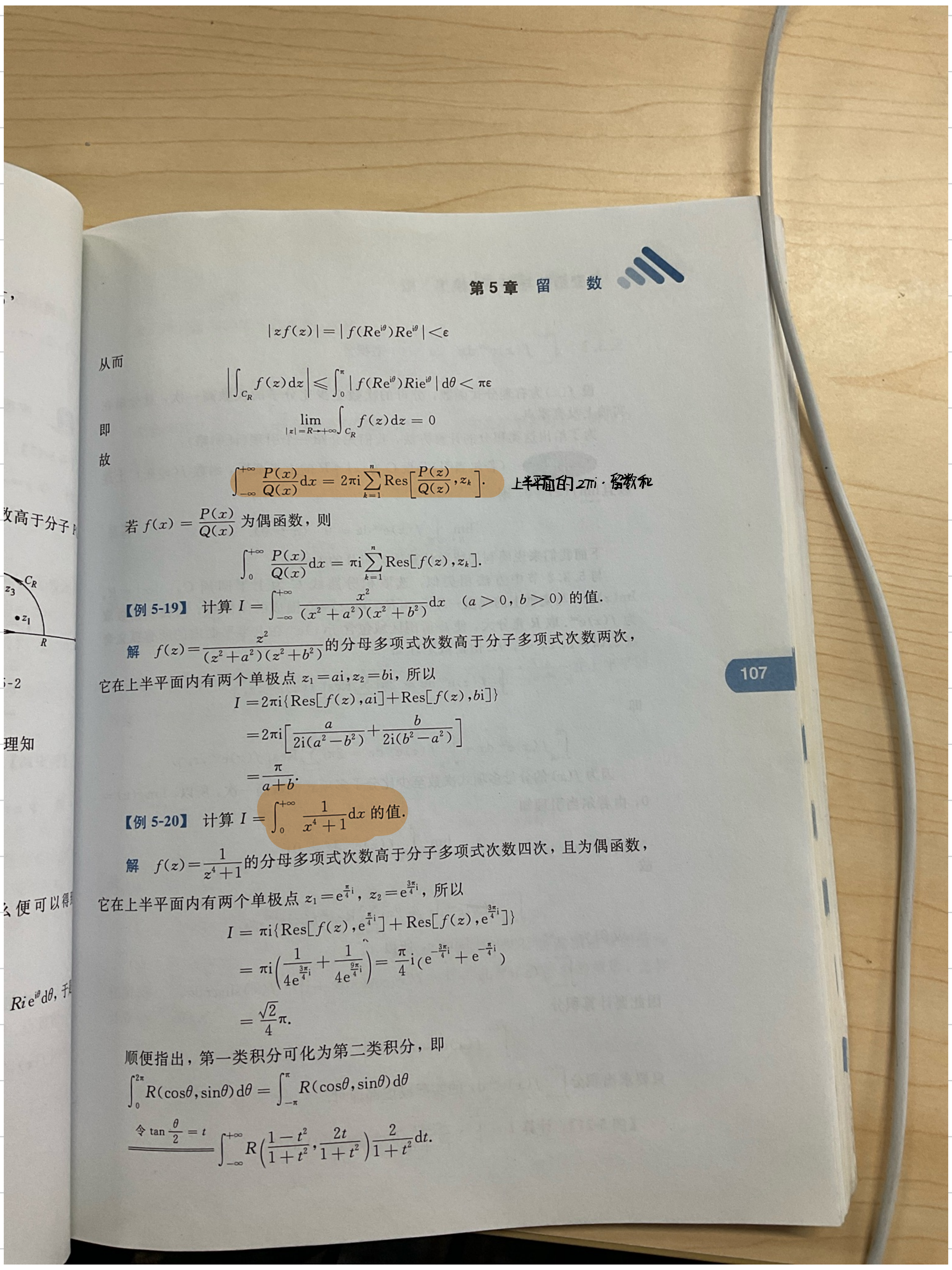
$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right|\leq\int_0^{\pi}|f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}|\,d\theta<\pi\varepsilon$$

$$\lim_{|z|=R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$$

$\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right]$

若 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为偶函数

则 $\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right]$



第5章 留 数

$$|zf(z)|=|f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}|<\varepsilon$$

从而

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\pi}|f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta<\pi\varepsilon$$

即

$$\lim_{|z|=R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right].$$

上半平面的 $2\pi i\cdot$ 留数和

若 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为偶函数，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

【例 5-19】 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$ $(a>0, b>0)$ 的值.

解 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 的分母多项式次数高于分子多项式次数两次，它在上半平面内有两个单极点 $z_1=ai, z_2=bi$，所以

$$\begin{aligned}I&=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),ai]+\mathrm{Res}[f(z),bi]\}\\&=2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right]\\&=\frac{\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

【例 5-20】 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$ 的值.

解 $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ 的分母多项式次数高于分子多项式次数四次，且为偶函数，它在上半平面内有两个单极点 $z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}$，$z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}$，所以

$$\begin{aligned}I&=\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{\pi}{4}i}]+\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{3\pi}{4}i}]\}\\&=\pi i\left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}+\frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}}\right)=\frac{\pi}{4}i(e^{-\frac{3\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i})\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.\end{aligned}$$

顺便指出，第一类积分可化为第二类积分，即

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\text{令}\tan\frac{\theta}{2}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$