最短路问题

The shortest path problem

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

6.3.1 最短路问题(the shortest path problem)

最短路问题是重要的组合最优化问题之一, 它不仅可以直接用于解决实际生产中的许多问题,如管道铺设、厂区布局、设备更新等问题, 而且也常常作为解决其它组合优化问题的工具。

简单的东西不简单

——Goldberg

——美国SIAM、ACM的Fellow

——提出负权最短路问题最有竞争力的算法

几位图灵奖获得者

1. 1972年，Dijkstra(艾兹格 ·迪科斯彻)
2. 1978年，Floyd (罗伯特 ·弗洛伊德)
3. 1985年，Karp(理查德 ·卡普)
4. 1986年，Tarjan(罗伯特 ·塔扬)

6.3.2 最短路问题的分类

- 按照图是否有向进行分类：可以把最短路问题分为无向最短路问题和有向最短路问题。

- 按照图的权进行分类：各边的权均为1的最短路问题（单位权最短路问题）、正权最短路问题、负权最短路问题。

- 按照源点或始点个数进行分类：单源点最短路问题、多源点最短路问题及所有点间的最短路问题。

6.3.3 课程所学的最短路问题

- 无向、正权、单源点最短路问题
- 无向、正权、所有点间最短路问题
- 有向、正权、单源点最短路问题
- 有向、正权、所有点间最短路问题

6.3.4 正权单源点最短路问题

- 给定一个具有n个点、m条边的图G(V，E)，始点为s，边(x，y)的权w(x，y)为正实数。若点x为图中任意一点，设P是D中从s到x的一条路，定义路P的权是所有边的权之和，记为w(P)。单源点最短路问题就是在所有从*s*到*x*的路P中，求一条权最小的路P_0满足

$$w(P_0)=\min\{w(P)\}。$$

6.3.5 正权单源点最短路问题的历史

$O(n^4)$	Shimbel [1955]
$O(n^2mL)$	Ford[1956]
$O(nm)$	Bellman[1958], Moore[1959]
$O(n^2\log n)$	Dantzig[1958,1960], Minty (cf. Pollack and Wiebenson) [1960], Whiting and Hillier [1960]
$O(n^2)$	Dijkstra[1959]
$O(m+nL)$	Johnson[1972]
$O(dn\log_d n+m+m\log_d(n^2/m))$	(For any $d\geq 2$) Johnson[1973]
$O(m+\log_{m/n} n)$	Johnson[1973, 1977], Tarjan[1983]

表1：正权最短路问题历史进展情况
来自：Combinatorial Optimization (Volume A), page:103
Polyhedra and Efficiency 著

6.3.5 正权单源点最短路问题的历史

$O(L+m\log\log L)$	Van Emde Boas, Kaas, and Zijlstra[1977]
$O(m\log\log L+n\log L\log\log L)$	Johnson[1977]
$O(\min_{k\geq 2}(nkL^{1/k}+m\log k))$	Denardo and Fox[1979]
$O(m\log L)$	Hansen[1980]
* $O(m\log\log L)$	Johnson[1982], Karlsson and Poblete[1983]
* $O(m+n\log n)$	Fredman and Tarjan[1984,1987]
$O(m\log_{m/n} L)$	Gabow[1983,1985]
* $O(m+\sqrt{\log L})$	Ahuja, Mahlhorn, Orlin, and Tarjan[1990]

续表1：正权最短路问题历史进展情况

6.3.5 正权单源点最短路问题的历史

评价

- 长期以来公认的最好算法是 1959 年的 Dijkstra 算法，应用 Fobonacci 堆计算复杂性为 $O(m+n\log n)$，这一优秀的工作来自 Fredman and Tarjan[1984,1987]。
- 2002 年的 Pettie 和 Ramachandran 的算法，在边的最大权与最小权之比小于 $n^{(\log n)^{O(1)}}$ 时，Pettie 和 Ramachandran 所得到的算法计算复杂性为 O(m+nloglogn)，但该算法最坏的计算复杂性仍然为 O(m+nlogn)

6.3.6 单源点最短路问题的算法—Dijkstra算法

1．初始化

$(1)T(s)=0,\lambda(s)=s;\quad (2)T(x)=+\infty,\lambda(x)=M;\quad (3)S=\phi$

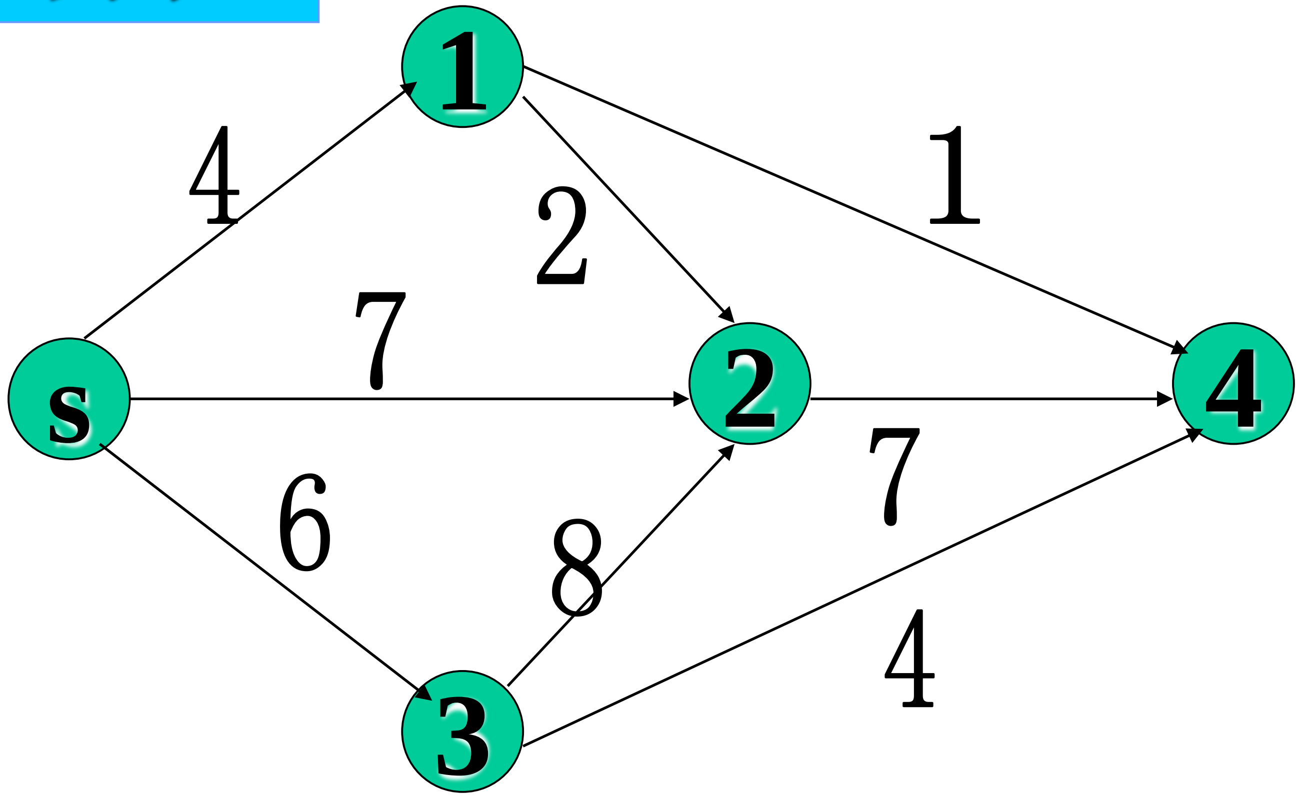
2．选取不属于集合 S(也就是还没有 P 标号)但具有最小 T 标号的点 y，同时令 $P(y)=T(y),\quad S=S\bigcup\{y\}$

3．对所有未进入集合 S 的、点 y 的邻点 x 进行 T 标号更新过程。即如果 $T(y)+w(y,x)<T(x)$，那么 $T(x)=T(y)+w(y,x)$，同时令 $\lambda(x)=y$。

4．如果所有点都进入集合 S，那么算法停止，否则转入步骤 2。

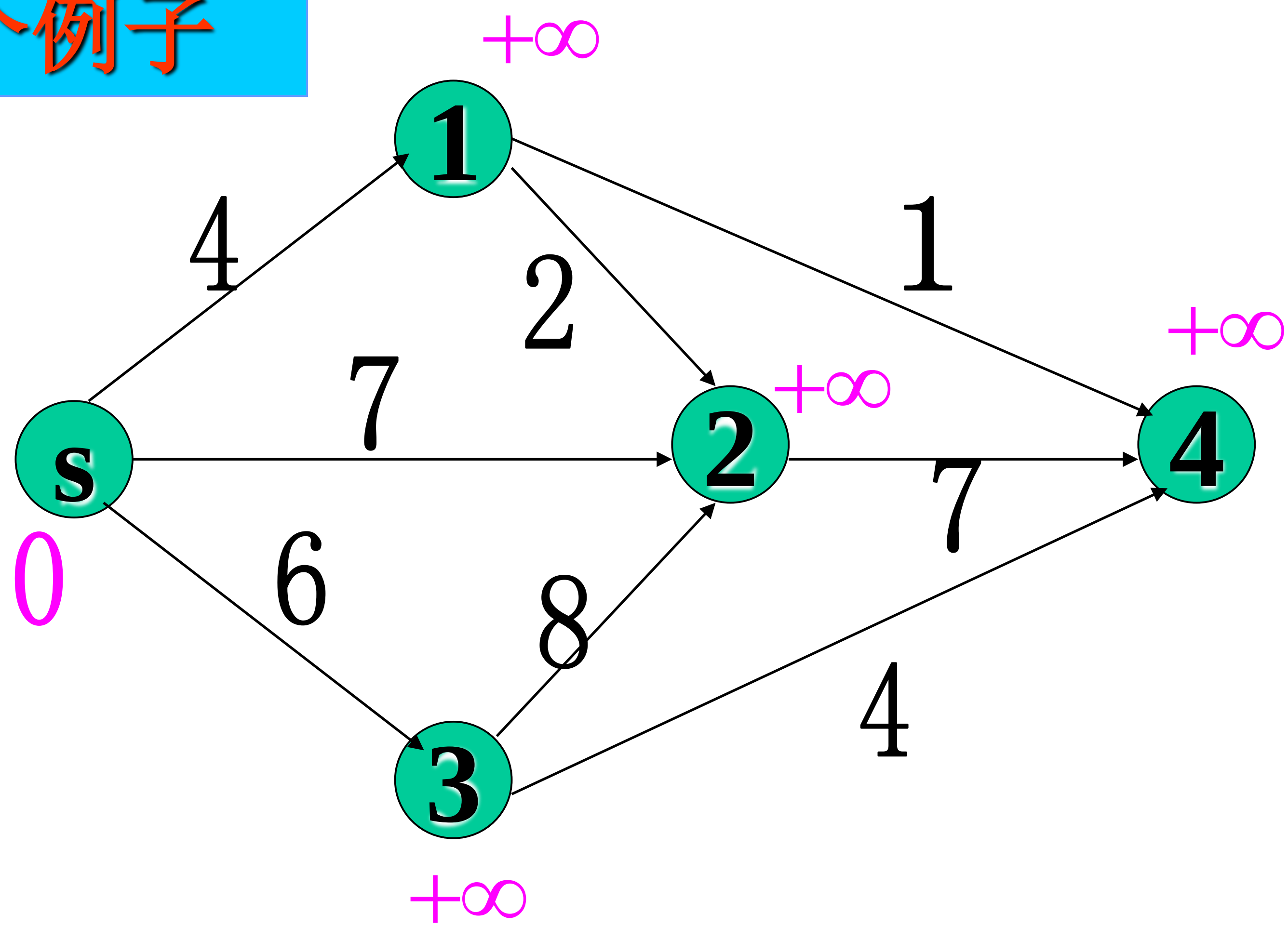
6.3.6 单源点最短路问题的算法—Dijkstra算法

一个例子



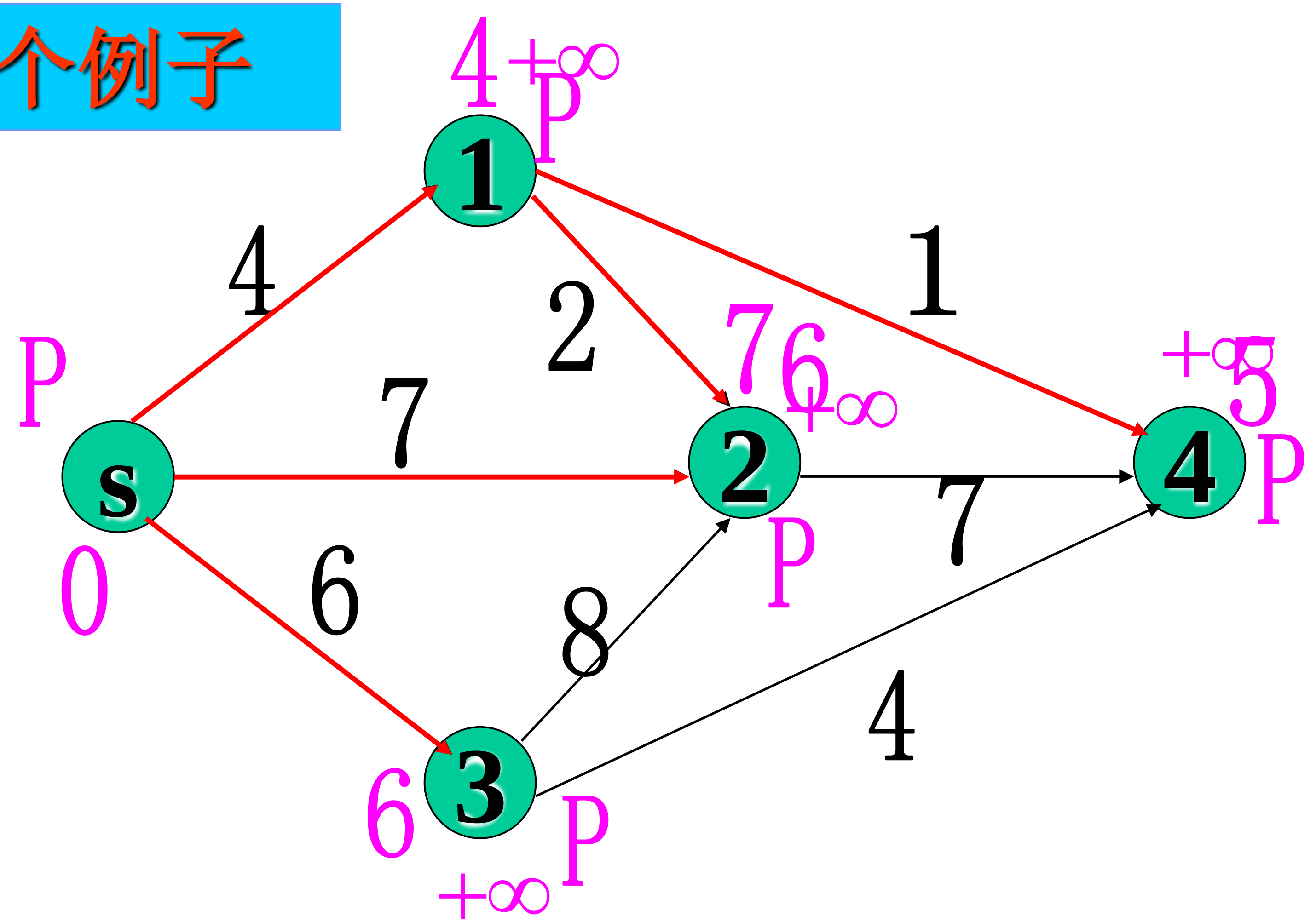
6.3.6 单源点最短路问题的算法—Dijkstra算法

一个例子



6.3.6 单源点最短路问题的算法—Dijkstra算法

一个例子



6.3.7 正权所有点间最短路问题

- 给定一个具有n个点、m条边的图G(V，E)，边(x，y)的权w(x，y)为正实数。若点x和点y为图中任意两点，则求任意两点x和y间的最短路径。

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

1． 将图中的顶点编号为 1，2，…，N, 确定初始矩阵 D^0，如果点 i 和点 j 相邻

则中 (i, j) 元素的值为 $d_{ij} = w(i, j)$，否则令 $d_{ij} = +\infty$，且令 $d_{ii} = 0$。

2． 对 $m = 1, 2, \cdots, N$,依次由 D^{m-1} 的元素确定 D^m，利用递归公式。

$$d_{ij}^m = \min\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\}$$

每确定一个元素时，就记下它所走的路。在算法终止时，矩阵 D^N 的 (i, j) 元素就表示从点 i 到点 j 的最短路径的长度。

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

$$D^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{(0)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & NIL & 4 & NIL & NIL \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{(1)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(1)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(2)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—Warshall算法

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(3)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

$$D^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(3)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(4)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

6.3.7 所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(4)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(5)}=\begin{pmatrix} NIL & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(5)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 2 & -4\\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1\\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3\\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2\\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}\quad B^{(5)}=\begin{pmatrix}NIL & 3 & 4 & 5 & 1\\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1\\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1\\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1\\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL\end{pmatrix}$$

由于在矩阵$B^{(5)}$中$b_{42}=3$，$b_{43}=4$那么4到2的最短路径为$4\to3\to2$

由于在矩阵$B^{(5)}$中$b_{52}=3$，$b_{53}=4$, $b_{54}=5$,那么5到2的最短路径为$5\to4\to3\to2$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(0)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & NIL & 4 & NIL & NIL \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(3)} = \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(4)}=\begin{pmatrix} NIL & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Floyd-Warshall例子

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{(5)} = \begin{pmatrix} NIL & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

由于在矩阵B$^{(5)}$中b$_{42}$=3，b$_{43}$=4那么4到2的最短路径为4→3→2

由于在矩阵B$^{(5)}$中b$_{52}$=3，b$_{53}$=4, b$_{54}$=5,那么5到2的最短路径为5→4→3→2