

计划评审技术和关键路线法

Program evaluation & review technique(PERT)
and Critical path method (CPM)

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

内 容

- 为什么要学习PERT
- **PERT网络图的基本概念**
- **PERT网络图的构建**
- **PERT网络图的计算**
- **PERT网络图的优化**

PERT概述

引例：工程项目进度的安排方法

如何表示如下交通工程：

- 2008年1-8月完成路基工程，费用为23349万元；
- 2008年2月中旬-11月完成路面工程，费用为34396万元；
- 2008年2月-2009年2月完成交通工程及设施建设，费用为17023万元；
- 2008年2月-2009年1月完成环保绿化工程，费用722万元；
- 2009年3月完成工程扫尾与验收。

PERT概述

工程项目进度的安排方法——甘特图



PERT概述

甘特图

也称横道图，或条状图(Bar chart)。是在1917年由亨利·甘特开发的，其内在思想简单，基本是一条线条图，横轴表示时间，纵轴表示活动(项目)，线条表示在整个期间上计划和实际的活动完成情况。

它**直观地**表明任务计划在什么时候进行，及实际进展与计划要求的对比。

管理者由此极为便利地弄清一项任务还剩下哪些作业要做，并可评估作业是提前还是滞后，亦或正常进行，是一种理想的控制工具。

但不同活动之间的**逻辑关系**，甘特图很难反映清楚。

PERT概述

- 网络计划主要应用于新产品研制与开发、大型工程项目的计划编制与计划的优化，是项目管理和项目安排领域目前比较科学的一种计划编制方法，比甘特图（Gantt chart）或称横道图(bar chart)计划方法有许多优点。
- 网络计划有利于对计划进行控制、管理、调整和优化，更清晰地了解工作之间的相互联系和相互制约的逻辑关系，掌握关键工作和计划的全盘情况。

PERT历史与起源

- PERT起源于美国
- 在20世纪50年代，很多人都在探索如何制定一种比甘特图（工程进度表）更科学的计划方法。1956年，由美国一些数学家和工程师组成的小组开始了研究。1957年，杜邦化学公司的数学家、工程师和管理人员为改进公司内部的计划管理，在兰德公司的配合下提出和应用了“关键路线法” CPM。
- 此方法借助于网络图表示各项作业和所需要的时间，及各项作业间的关系，从而找出编制与执行计划的关键路线。首先用于化学工厂的建设与维修，获得良好效果，第一年就节约了资金100万美元，是该公司用于CPM研究发展费用的5倍，工期缩短2个月。由于CPM中各作业时间是确定的，由经验数据得出，称之为肯定型网络，适用于工程建设项目。

PERT历史与起源

- 1958年，美国海军武器局计划处，在研制“北极星”导弹计划时应用了网络图方法，但注重于对各项任务安排的评价和审查，称为“计划评审技术”PERT，工期由10年缩短为8年。该计划有几十亿个管理项目，仅编制网络图就用了半年时间。
- 从1959年开始，PERT逐渐被推广应用于几乎所有的大工业和重大科研项目中，特别是阿波罗载人登月计划成功后，世界上很多新开发项目竞相采用PERT。PERT中各作业时间是不确定的，计入不确定因素的影响，通过采用3个估计值（最短时间、最长时间和最可能时间）加权运算来确定，称之为非肯定型网络，更适用于科研项目和一次性计划。

PERT网络图的基本概念

- 作业
- 事件
- 路线与关键路线

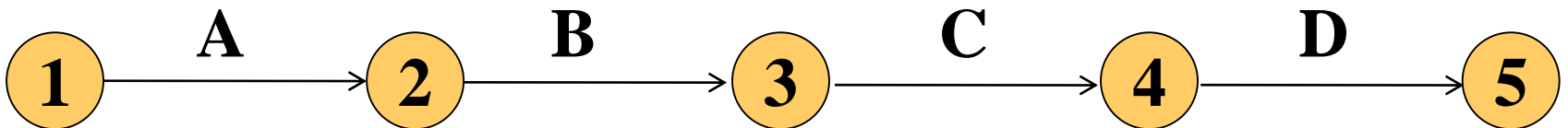
PERT网络图的基本概念

- **作业** 或称为**工序、活动** 指任何消耗时间或资源的活动，如新产品设计中的初步设计、技术设计、工装制造等。根据需要，工序可以划分得粗一些，也可以划分得细一些。
- **虚工序** 用来表达相邻工序之间的衔接关系，不需要时间和资源。

PERT网络图的基本概念

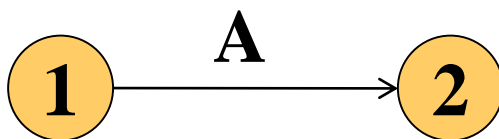
- 紧前工序、紧后工序、前道工序、后续工序

在下图中，A是B的紧前工序，C是B的紧后工序，C、D是A的后续工序但不是A的紧后工序；A、B是D的前道工序但不是D的紧前工序。



PERT网络图的基本概念

- **事件** 标志工序的开始或结束，本身不消耗时间或资源，或相对作业讲，消耗量可以小得忽略不计。某个事件的实现，标志着在它前面各项作业（紧前工序）的结束，又标志着在它之后的各项作业（紧后工序）的开始。如机械制造业中，只有完成铸锻件毛坯后才能开始机加工；各种零部件都完成后，才能进行总装等。



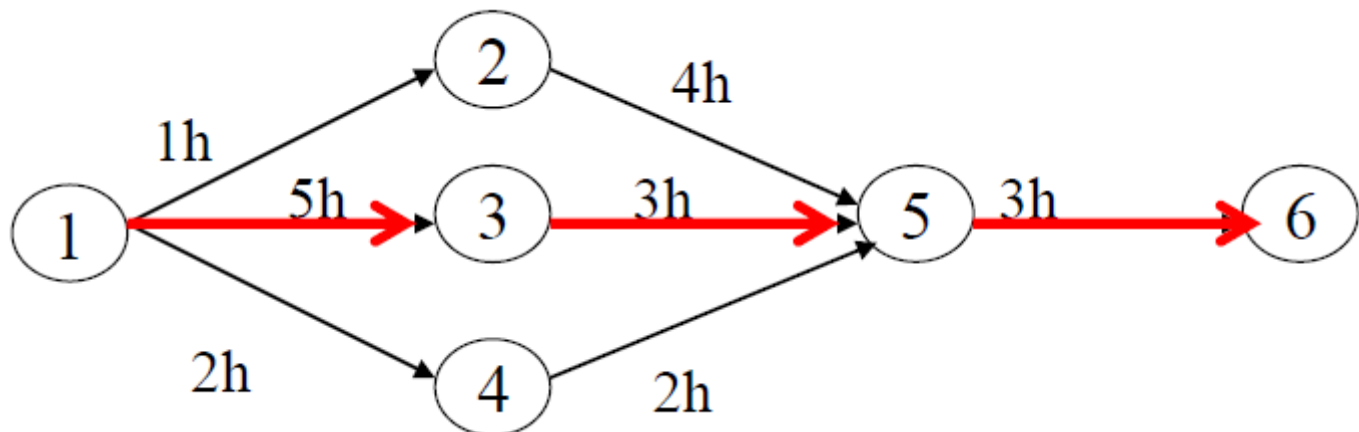
- **最初事件、最终事件（均唯一）**

PERT网络图的基本概念

- **路线** PERT 网络图中由最初事件到最终事件的各项作业连贯组成的一条路。
- **路线长度** 完成该路上各项作业持续时间的长度和
- **关键路线** 由最初事件到最终事件的各项作业累计时间最长的路。

路线1, 2, 5, 6 : 8小时

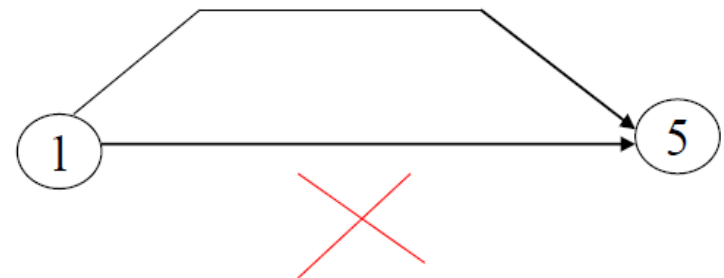
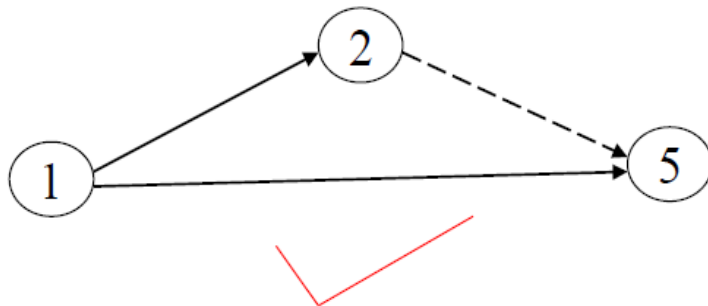
路线1, 3, 5, 6 : 11小时 **关键路径**



PERT网络图的构建

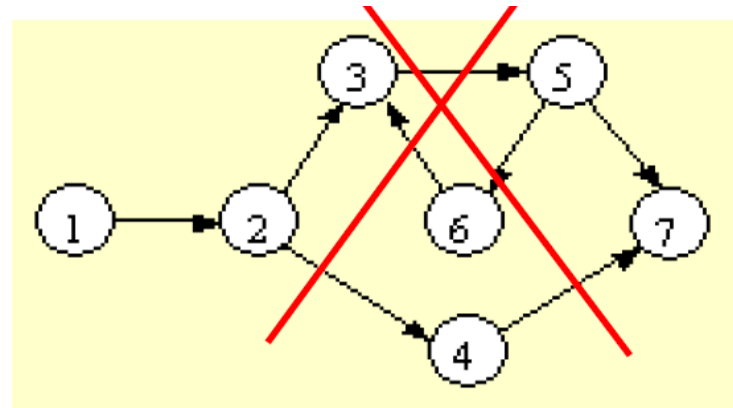
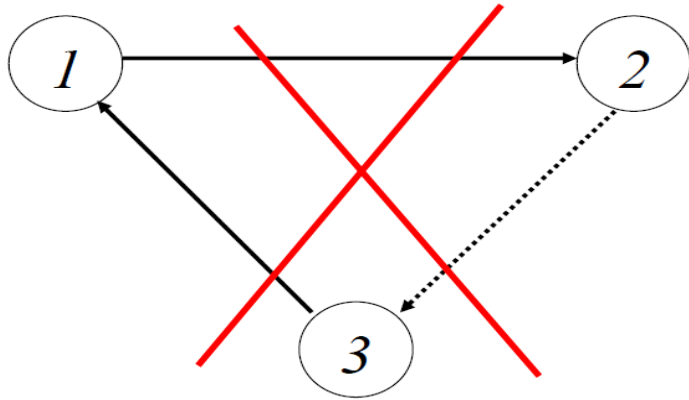
- 原则1: 作业 (i, j) 用唯一箭线表示, 起点事件 (箭尾事件) 编号小于终点事件 (箭头事件) 的编号。
- 原则2: 应有唯一的最初事件和最终事件
- 原则3: 两个事件之间只能用一条箭线表示一项作业, 具有相同开始和结束的不同作业, 需引进虚事件和虚作业。

虚箭线表示虚活动, 不
消耗资源, 不占用时间



PERT网络图的构建

- 原则4：不允许出现回路

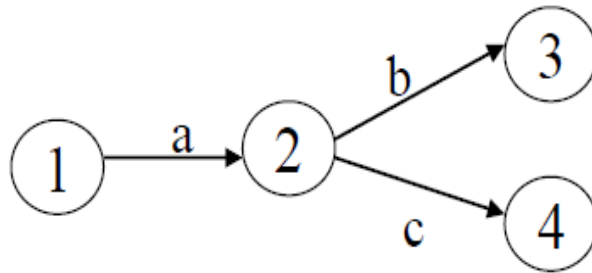


解决办法：取消某一作业

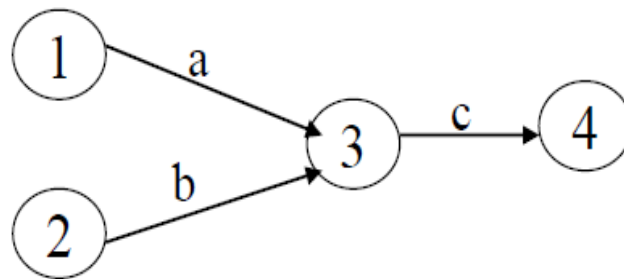
PERT网络图的构建

- 原则5：紧前作业或紧后作业有多条时的构建原则

情形1：作业 a 结束后可以开始 b, c



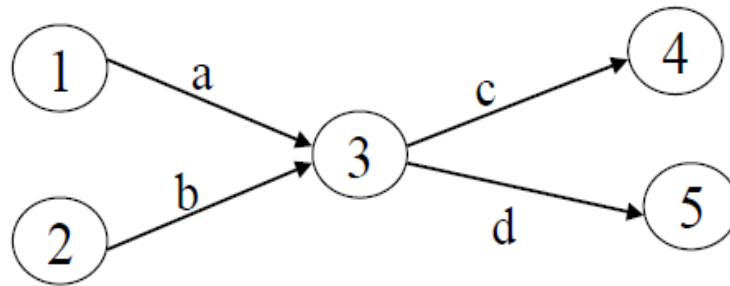
情形2：作业 c 在 a, b 结束后才可以开始



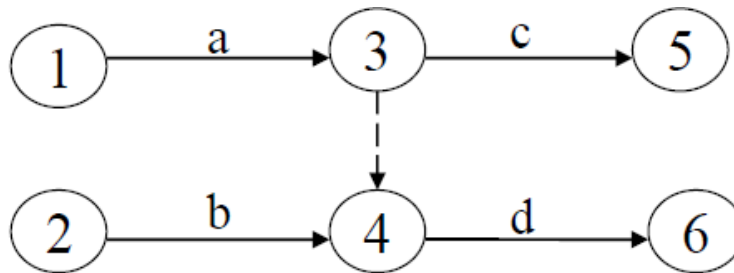
PERT网络图的构建

- 原则5：紧前作业或紧后作业有多条时的构建原则

情形3：作业 a, b 结束后可以开始 c, d

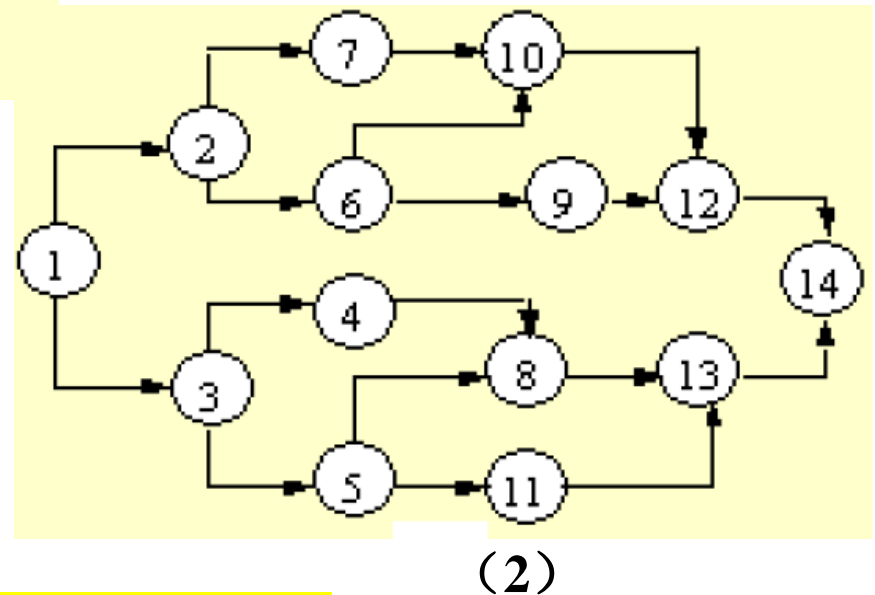
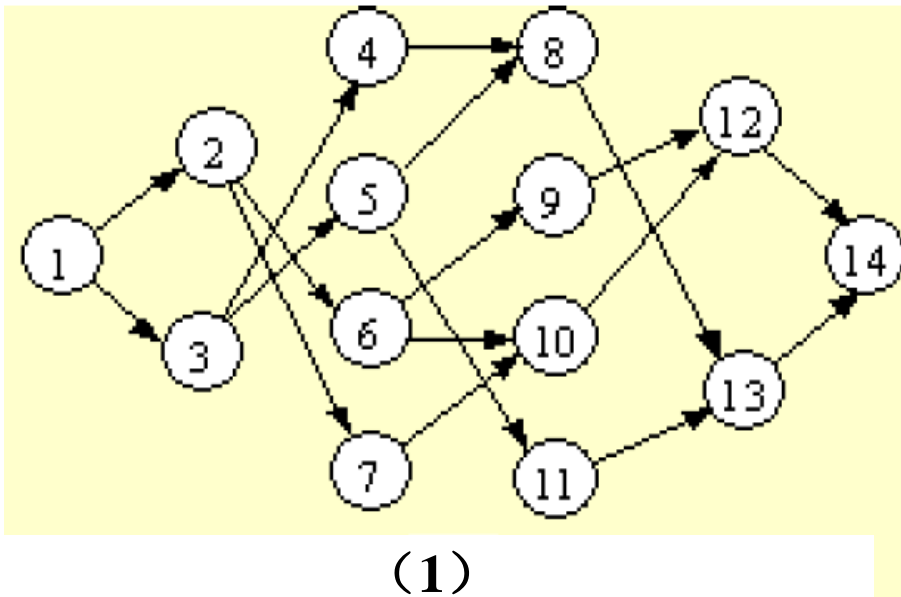


情形4：作业 c 在 a 结束后即可以开始， d 在 a, b 结束后才 可以开始。



PERT网络图的构建

- 原则6：事件按升序从左到右、从上到下，不能交叉



PERT网络图的构建

- 任务的分解：一个任务首先要分解成若干项工作，并分析清楚这些工作之间工艺上和组织上的联系及制约关系。确定各工作的先后顺序。列出工作项目明细表。
 - (1) 不同单位执行的作业要分开
 - (2) 完成时间不同的作业要分开
 - (3) 使用不同设备、器材的作业要分开
 - (4) 工作方法不同的作业要分开
 - (5) 实施区域不同的作业要分开
- 列出作业清单：明确各作业的先后顺序和相互关系，列出作业间的逻辑关系

作业名称	紧前作业	工作时间
...

PERT网络图的构建

- 画网络图

(1) **作业表达**. 从第一道作业开始，以箭线代表作业，结点表示前面的作业结束和后面作业的开始，顺序为从左到右依次画下去，一直到最后一道作业为止。同时在每个箭线上（或下）方标注作业时间。

(2) **结点标号**. 按照标号规则从左到右、从上到下给结点标号。规定：箭头标号>箭尾标号

(3) **网络调整**. 调整结点的“摆放”位置，使网络图美观。

PERT网络图的构建

- 练习1

工作	工作内容	紧前工作	工时（周）
A	市场调查	/	4
B	资金筹备	/	10
C	需求分析	A	3
D	产品设计	A	6
E	产品研制	D	8
F	制订成本计划	C, E	2
G	制订生产计划	F	3
H	筹备设备	B, G	2
I	筹备原材料	B, G	8
J	安装设备	H	5
K	调集人员	G	2
L	准备开工投产	I, J, K	1

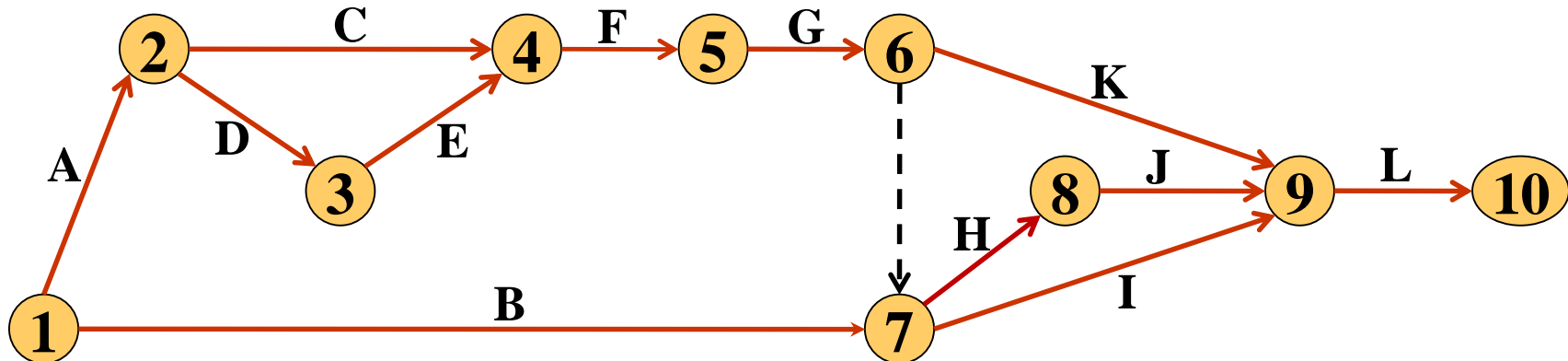
PERT网络图的构建

- 练习2

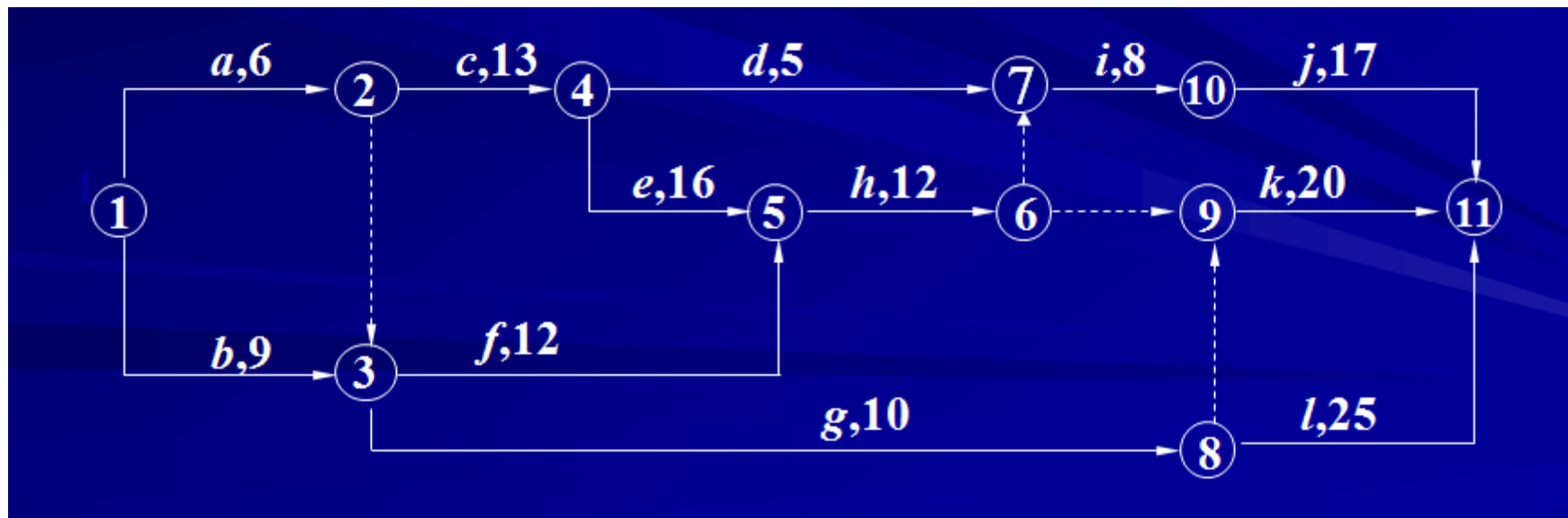
工序	紧前工序	工序时间(天)	工序	紧前工序	工序时间(天)
<i>a</i>	—	6	<i>g</i>	<i>a, b</i>	10
<i>b</i>	—	9	<i>h</i>	<i>e, f</i>	12
<i>c</i>	<i>a</i>	13	<i>i</i>	<i>d, h</i>	8
<i>d</i>	<i>c</i>	5	<i>j</i>	<i>i</i>	17
<i>e</i>	<i>c</i>	16	<i>k</i>	<i>h, g</i>	20
<i>f</i>	<i>a, b</i>	12	<i>l</i>	<i>g</i>	25

PERT网络图的构建

- 练习1答案



- 练习2答案



PERT网络图的计算

根本任务

- 找出关键线路
- 找出非关键线路的时差
- 网络图的优化。本着“向关键线路要时间，向非关键线路要资源”的原则，作出最优（满意）的作业计划。

PERT网络图的计算

时间参数及符号

参数	名称	符号	英文单词
工期	计算工期	T_c	Computer Time
	要求工期	T_r	Require Time
	计划工期	T_p	Plan Time
作业的时间参数	持续时间	D_{i-j}	Day
	最早开始时间	ES_{i-j}	Earliest Starting Time
	最早完成时间	EF_{i-j}	Earliest Finishing Time
	最迟完成时间	LF_{i-j}	Latest Finishing Time
	最迟开始时间	LS_{i-j}	Latest Starting Time
	总时差	TF_{i-j}	Total Float Time
	自由时差	FF_{i-j}	Free Float Time
结点的时间参数	最早时间	ET_i	Earliest Time
	最迟时间	LT_i	Latest Time

PERT网络图的计算

网络时间的计算

1. **作业最早开始时间** $ES_{i-j} = \max_k \{EF_{k-i}\}$

是它的各紧前作业最早结束时间中的最大一个值

2. **作业最早结束时间** $EF_{i-j} = ES_{i-j} + D_{i-j}$

是它的最早开始时间加上该项作业的计划时间的值

3. **作业最迟结束时间** $LF_{i-j} = \min_k \{LS_{j-k}\}$

是它的各项紧后作业最迟开始时间中的最小一个，各项作业的紧后作业的开始时间应以不延误整个工期为原则。

4. **作业最迟开始时间** $LS_{i-j} = LF_{i-j} - D_{i-j}$

是它的最迟结束时间减去该项作业的时间

PERT网络图的计算

网络时间的计算

5. 作业的总时差或松弛时间

$$\begin{aligned} S(i, j) &= T_{LS}(i, j) - T_{ES}(i, j) \\ &= T_{LF}(i, j) - T_{EF}(i, j) \\ &= T_{LF}(i, j) - T_{ES}(i, j) - t(i, j) \end{aligned}$$

作业最迟开始(结束)时间与最早开始(结束)时间之差

6. 作业的单时差或自由时间

$$F(i, j) = \min_{\varphi} \{T_{ES}(j, \varphi)\} - T_{EF}(i, j)$$

在不影响紧后工序的最早开始时间的条件下，作业的开始时间可以推迟的时间。

PERT网络图的计算

网络时间的计算

7. 事件的最早时间

$$ST_i = \min_j \{ES_{i-j}\}$$

该结点前面作业全部完成后，以该结点为开始结点的各项作业的最早开始时刻。

8. 事件的最迟时间

$$LT_i = \max_k \{LS_{k-i}\}$$

在不影响计划工期的情况下，以该结点为完成结点的各项作业的最迟完成时刻

PERT网络图的计算

网络时间的计算

9. 项目的完成时间

项目最后的一道工序完成的时间。

10. 关键工序

总时差等于0的工序。最早开始时间和最迟开始时间相同没有推迟时间。

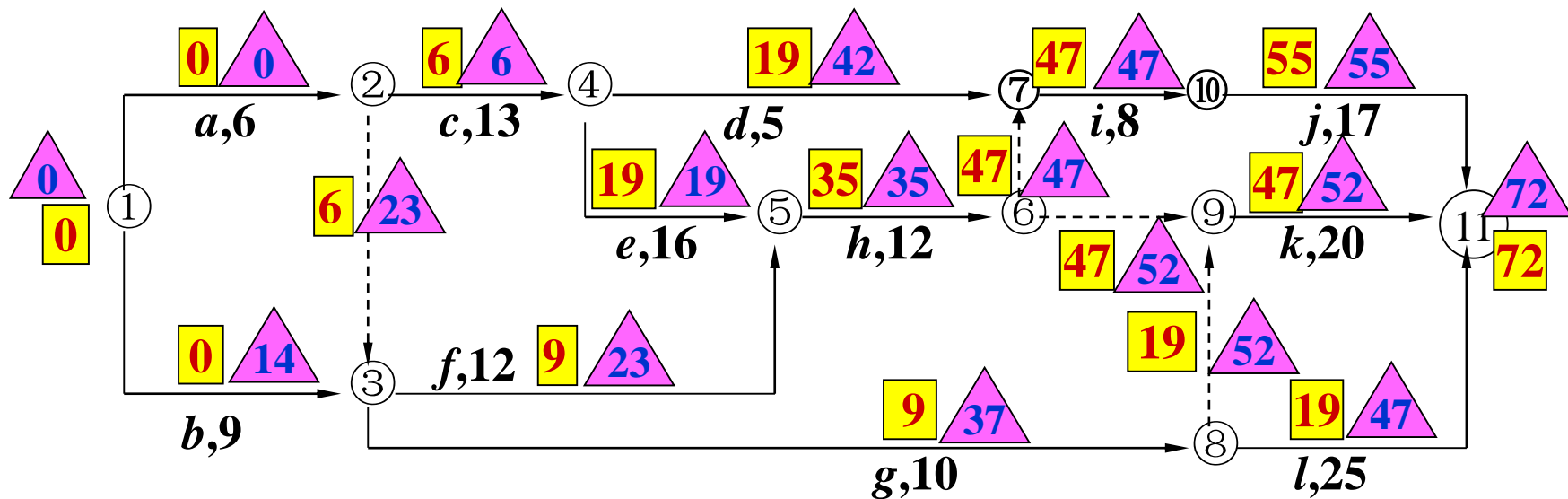
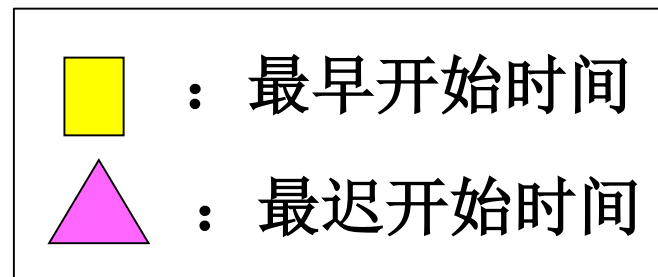
11. 关键路线

网络图中由关键工序组成的从发点到收点的路线。

【例7.3】以网络图7-3为例。

- (1) 在图上计算各工序的最早开始和最迟开始时间。
- (2) 用表格计算工序的6个时间参数。
- (3) 指出项目的关键工序和关键路线。
- (4) 求项目的完工时间。

【解】(1)最早开始和最迟开始时间

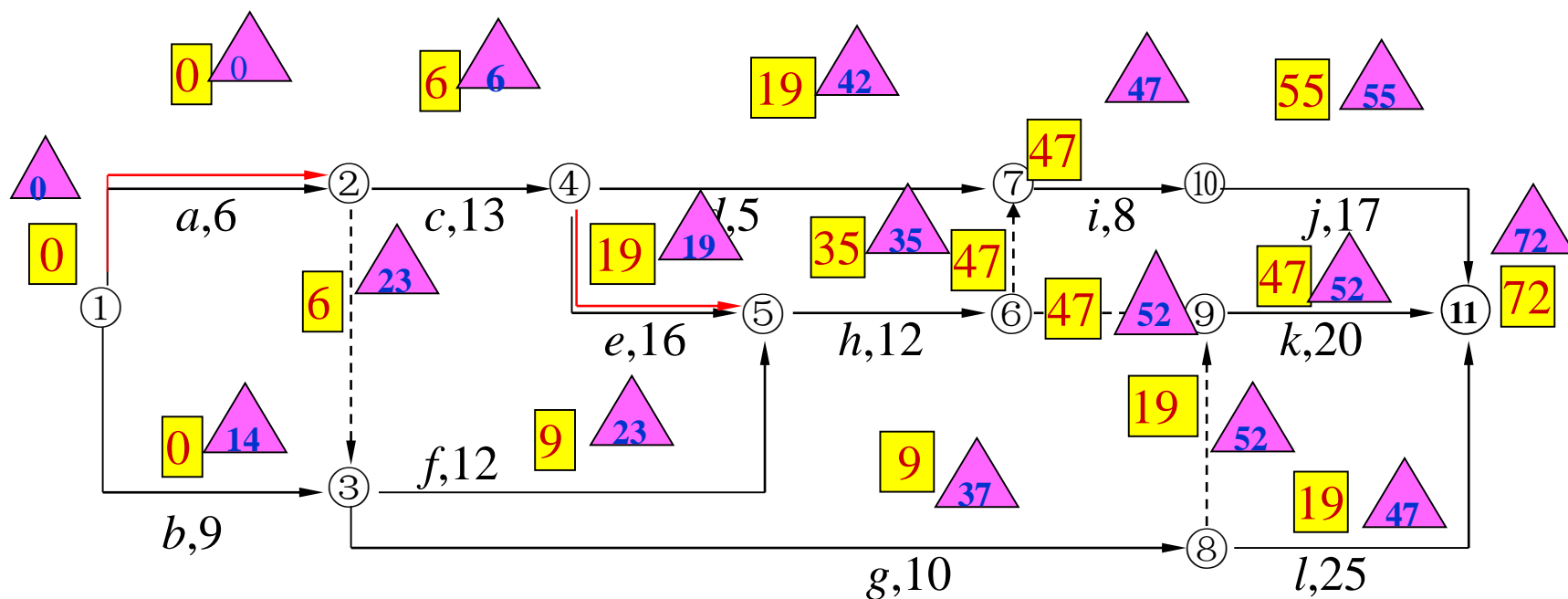


表格计算

工序	(i,j)	t_{ij}	$T_{ES}(i,j)$	$T_{EF}(i,j)$	$T_{LS}(i,j)$	$T_{LF}(i,j)$	$S(i,j)$	$F(i,j)$	关键工序
a	(1,2)	6	0	6	0	6	0	0	是
b	(1,3)	9	0	9	14	23	14	0	
c	(2,4)	13	6	19	6	19	0	0	是
d	(4,7)	5	19	24	42	47	23	23	
e	(4,5)	16	19	35	19	35	0	0	是
f	(3,5)	12	9	21	23	35	14	14	
g	(3,8)	10	9	19	37	47	28	0	
h	(5,6)	12	35	47	35	47	0	0	是
i	(7,10)	8	47	55	47	55	0	0	是
j	(10,11)	17	55	72	55	72	0	0	是
k	(9,11)	20	47	67	52	72	5	5	
l	(8,11)	25	19	44	47	72	28	28	

(3)关键工序: a 、 c 、 e 、 h 、 i 、 j

关键路线: ①→②→④→⑤→⑥→⑦→⑩→⑪



(4)工程的完工时间为72天

PERT网络图的优化

网络优化的意义

- 1、关键路线的持续时间决定了完成全盘计划所必需的**最少时间**；
- 2、关键路线上的各项作业对计划进度起决定作用，必须投入充分的人、财、物保证各作业按时完工。若想提前完工，**必须缩短关键路线上的有关作业的时间**。
- 3、**次关键路线可能成为关键路线**，也要注意。

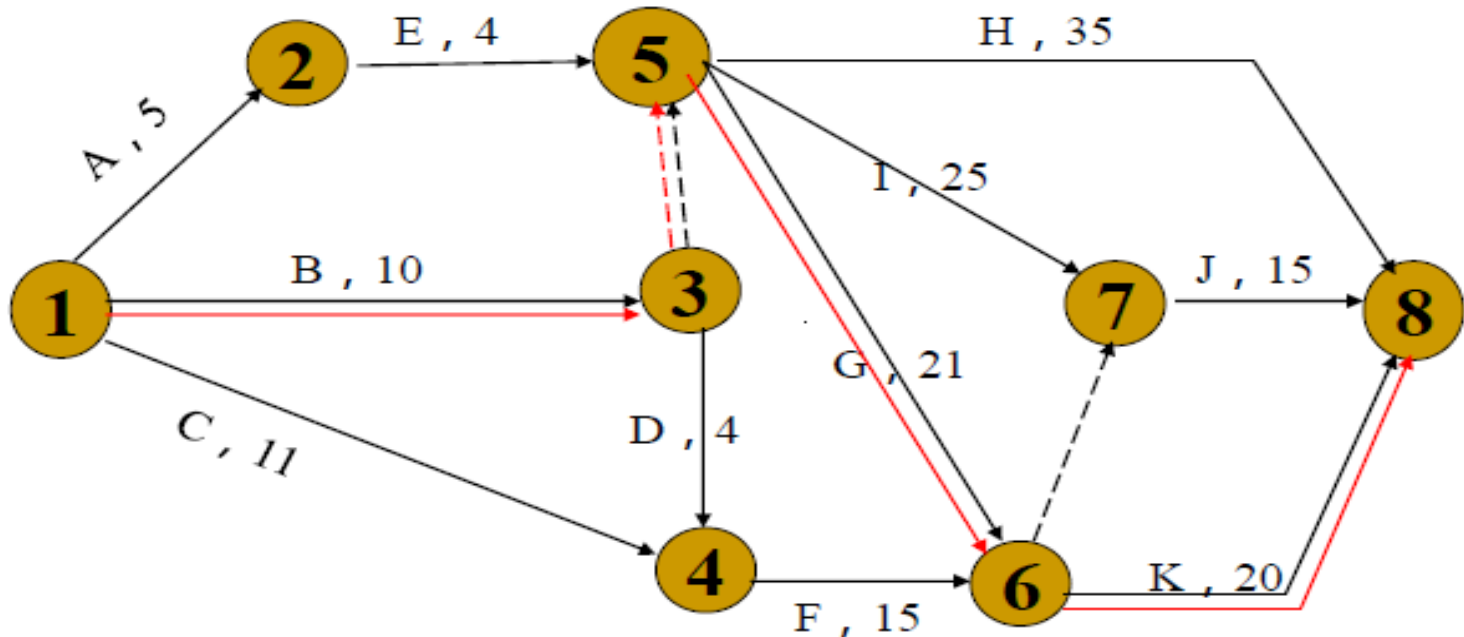
PERT网络图的优化

缩短工期的步骤

1. 列出所有可缩短工期的作业
2. 计算缩短单位工时所增加的费用
3. 找出关键路线上缩短单位时间增加费用最小的作业
4. 将该项作业缩短时间的值控制。取下列三者的最小值
 - (1) 工期要求需缩短的时间
 - (2) 该项作业最多可缩短的时间
 - (3) 到出现新关键路线时可缩短的时间
5. 计算并累计增加的费用
6. 满足要求停止，否则转到步骤3.

PERT网络图的优化

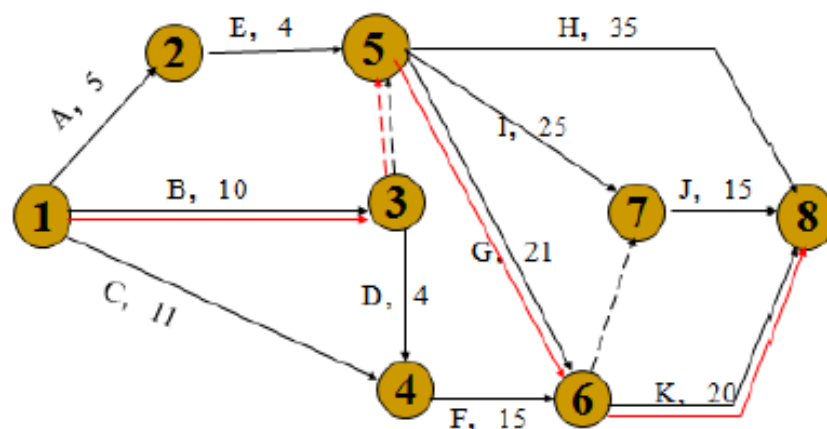
关键路线



关键路线上各作业的总时差均为0。
计算工期是51天。需要缩短为49天

PERT网络图的优化

作业 (i,j)	计划完成时间	最短完成时间	缩短1天增加的费用
B (1,3)	10	8	700
C (1,4)	11	8	400
E (2,5)	4	3	450
G (5,6)	21	16	600
H (5,8)	35	30	500
I (5,7)	25	22	300
J (7,8)	15	12	400
K (6,8)	20	16	500

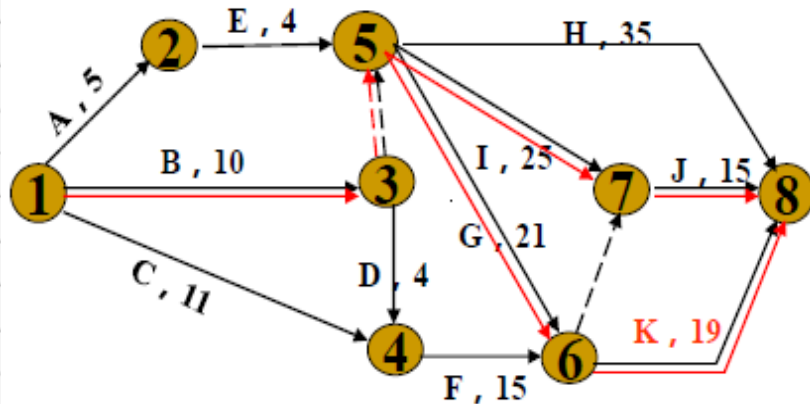


- 1、要缩短工期，应缩短关键路线上的 B, G, K 作业时间
- 2、额外费用要最小，先考虑 K
- 3、缩短1天即会产生新的关键路线，故先缩短1天

$$\text{Min}[2,4,1]=1$$

PERT网络图的优化

作业 (i,j)	计划完成时间	最短完成时间	缩短1天增加的费用
B (1,3)	10	8	700
C (1,4)	11	8	400
E (2,5)	4	3	450
G (5,6)	21	16	600
H (5,8)	35	30	500
I (5,7)	25	22	300
J (7,8)	15	12	400
K (6,8)	20	16	500



- 4、现有两条关键路线，应缩短关键路线上的 B, G, K，或 B, I, J 作业时间
- 5、额外费用要最小，考虑 B
- 6、缩短1天即会产生新的关键路线，故缩短1天。已满足要求

$$\text{Min}(1,2,1)=1$$

PERT网络图的优化

网络优化的代价

在满足工程在49天内完成要求的情况下，额外费用增加的费用是：

$$500+700=1200$$