

2023年春季学期复变函数课程测试题

考 试 科 目:《复变函数》

姓名:

学号:

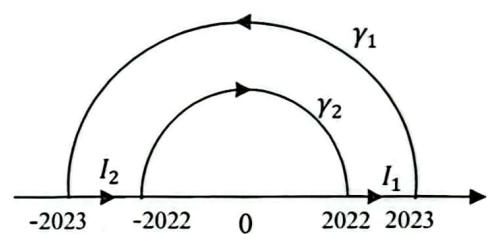
班级:

一、求复数 $w = \frac{1+z}{1-z}$ ($z \neq 1$)的实部, 虚部和模长. (15分)

注意
行为
规范

遵守
考场
纪律

二、计算积分 $I = \int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$, 其中 Γ 为闭圆环 $2022 \leq |z| \leq 2023$ 上半部分的边界(如下图). (15分)



主管
领导
审核
签字

三、求 $f(z) = \frac{1}{z(z-2023)}$ 在 (1) $0 < |z| < 2023$, (2) $2023 < |z| < \infty$ 内的 Laurent 展开式. (15 分)

四、如果函数 $f(z)$ 在圆 $|\xi - z_0| < R$ 内解析, 在闭圆 $|\xi - z_0| \leq R$ 上连续, 则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi$. (15 分)

五、设函数 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上解析. 如果存在 $\alpha > 0$, 使得当 $|z| = R$ 时, $|f(z)| > \alpha$ 且 $|f(0)| < \alpha$, 试证在圆 $|z| < R$ 内 $f(z)$ 至少有一个零点. (15 分)

六、如果函数 $f(z)$ 为一整函数且存在实数 M 使得 $\operatorname{Re} f(z) < M$ 成立, 证明 $f(z)$ 为常函数. (10 分)

七、(15 分) 设 U 、 V 是复平面中的区域, $f: U \rightarrow V$ 是解析的双射.

- (1) 证明映射 f 的 Jacobi 矩阵的行列式在点 (x, y) 处的值为 $|f'(z)|^2$, 其中 $z = x + iy$.
- (2) 如果 U 是开单位圆盘, 且 f 在 U 内有展开式 $f(z) = \sum c_n z^n$, 证明 V 的面积等于 $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.