

# 数学分析3。2023年11月-12月，哈尔滨

讲师Aleksei Savelev

## 1个依赖于一个参数的积分

### . 1.1 基本定理

当处理“两个变量”的函数时，i. e.，如果函数定义在两个集合的直接积上，我们需要回答这样一个问题：对不同变量的操作可交换吗？我们将在其中一个操作是集成的情况下研究这个问题。

我们的目标是研究一个“依赖于一个参数的积分”的性质，即一个由该形式的方程定义的函数 $J$

$$J(y) = \int_Y f(x, y) d\mu(x) \quad (y \in Y)$$

这里 $\mu$ 是定义在集合 $E$ 的子集的 $\sigma$ 代数上的度量，函数 $E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  (每 $y \in Y$ 在 $E$ 上是可和的， $Y$ 是一个可度量拓扑空间的子集。如果 $X$ 是一个拓扑空间，那么我们总是假设测度 $\mu$ 定义在所有的Borel集上 (因此， $X$ 上的所有连续函数都是可测量的)。

首先，我们感兴趣的是连续性和

$Y \subset \mathbb{R}^m$ ), 在函数 $J$ 的可微性中。实际上，这是一个关于第一个变量的积分与第二个变量的其他分析操作 (极限、微分) 交换的有效性问题。我们之前在讨论积分符号下的极限通道时就遇到了这种情况，而一个函数的索引起着参数的作用。这些结果将作为后续推理的基础。

研究关于一个参数的积分问题也是很自然的。然而，这里没有必要讨论这个问题，因为这个问题在很大程度上是由富比尼定理解决的。

### 1.1.1

对于第一步，我们对一个“连续参数”的情况重申了前面几部分的三个定理。在所有这三个语句中， $a$ 都是一个极限点<sup>1</sup>空间中的集合 $Y$ 和 $\phi(x) = \lim_{y \rightarrow a} f(x, y)$ ，其中 $f$ 和 $\phi$ 分别是定义在 $X \times Y$ 和 $X$ 上的函数（通常为复值）。我们提出了以下关系成立的条件：

$$J(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x) \quad (1)$$

i. e.,

$$\lim_{y \rightarrow a} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \left( \lim_{y \rightarrow a} f(x, y) \right) d\mu(x)$$

#### 定理1

如果 $\mu(X) < +\infty$ 和收敛 $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} \phi(x)$ 是一致的，对于 $x \in X$ ，那么函数 $\phi$ 在 $X$ 上是可和的，关系(1)成立。

#### 证明

$Y$ 由于空间是可度量的，我们可以“根据序列”来争论。我们必须证明

$$J(y_n) = \int_X f(x, y_n) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X \phi(x) d\mu(x)$$

为每个序列 $\{y_n \in Y \mid y_n \neq a, n \in \mathbb{N}\}$ ，收敛到 $a$ 。这一事实和 $\phi$ 的可和性直接遵循“极限与积分的交换”的定理1，所有的条件都用 $f$ 来满足 $f_n(x) = f(x, y_n)$ 。□

### 1.1.2

下一步，我们将讨论对勒贝格定理的修正和对维塔利定理的推论。

#### 定理2

让 $\phi(x) = \lim_{y \rightarrow a} f(x, y)$ 为几乎所有的 $x \in X$ 。假设存在一个 $a$ 的邻域 $U$ 和一个函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ，从而保持以下条件：

$$(L_{loc}) \begin{cases} (a) \text{ for almost all } x \in X \text{ and every } y \in (Y \cap U) \setminus \{a\} \\ \quad \text{the inequality } |f(x, y)| \leq g(x) \text{ holds,} \\ (b) \text{ the function } g \text{ is summable on } X. \end{cases}$$

那么函数 $\phi$ 在 $X$ 上是可和的，关系(1)成立。

<sup>1</sup> 特别是，如果 $Y = [-\infty, +\infty]$ ，那么 $Y = \pm\infty$ 的情况是可能的。 $\hat{Y}$

条件 (L<sub>loc</sub>) 可以通过要求不等式  $|f(x, y)| \leq g(x)$  对每个  $y \in Y$  仅在一组可能依赖于  $x$  的完整测度上有效来削弱。上述定理的证明对于这个条件的推广仍然有效 (L<sub>1 loc</sub>)。然而，在续集中，（见定理5和6），我们需要条件的精确公式 (L<sub>loc</sub>)，在定理2中给出。

在定理1中，我们考虑函数序列  $f_n(x) = f(x, y_n)$ ，其中  $y_n \rightarrow a, y_n \in (Y \cap U) \setminus \{a\}$ ，并应用勒贝格定理。□

在  $X = \mathbb{N}$  和  $\mu$  是计数测度的情况下，积分  $\int_X f(x, y) d\mu(x)$  成为（绝对收敛）级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n, y)$  和条件 (L<sub>loc</sub>) 与一个级数在  $a$  的邻域内一致收敛的维尔斯特拉斯  $m$  检验的条件一致。它遵循定理2，这个和的极限可以立即找到。

如果  $\mu(X) < +\infty$  和函数  $f$  是有界的，则条件 (L<sub>loc</sub>) 显然适用于  $Y$  的每一个极限点。□

在有限测量的情况下，条件 (L<sub>loc</sub>) 可以用前面讨论的推论\*的条件 (V) 的修改来代替

**(推论\* 让  $\mu(X) < +\infty$ ，并让  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  是一系列可测的函数，它在度量上收敛于一个函数  $f$ 。如果存在  $p > 1$  和  $C > 0$ ，则是这样的**

$$\int_X |f_n|^p d\mu \leq C \quad \text{for all } n$$

然后函数  $f_n$  和  $f$  是可求和的  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$  .  $\longrightarrow$ )

### 定理3

让  $\mu(X) < +\infty$  和  $\phi(x) = \lim_{y \rightarrow a} \int_X f(x, y) d\mu$  为几乎所有的  $x \in X$ 。如果存在一个  $a$  的邻域  $U$ ，编号为  $\gamma > 1$  和  $C > 0$

$$\int_X |f(x, y)|^\gamma d\mu(x) \leq C \quad \text{for all } y \in (Y \cap U) \setminus \{a\}, \quad (V_{loc})$$

那么函数  $\phi$  在  $X$  上是可和的，关系 (1) 成立。

### 证明

这个定理的证明与前一个证明定理的证明相同，唯一的区别是现在我们指的是推论\*而不是勒贝格的

定理□

在某些情况下，条件 (V<sub>loc</sub>) 是一个有用的替代条件 (L<sub>loc</sub>)。为了

例如，如果  $X = Y$  是  $\mathbb{R}^m$  中的一个球， $\mu$  是勒贝格测度量， $f(x, y) = \frac{1}{\|x-y\|^p}$  其中  $p < m$ ，然后条件 (V<sub>loc</sub>)（对于  $1 < m/p$ ）在任意点一个  $y \in Y$ ，因此，函数  $J$  在  $Y$  上是连续的。在同一时间，条件 (L<sub>loc</sub>) 不能在任何  $y \in Y$ ，因为我们有

$$\sup_{y \in U \setminus \{x\}} \int_U f(x, y) d\mu = +\infty \quad \text{for all } x \in U$$

在  $a$  的每个邻居  $U$  中。

### 1.1.3

下面的定理显然是前一节定理2的一个特例。

#### 定理4

如果一个函数 $f$ 满足条件 $(L_{loc})$ 在某个点 $y_0 \in Y$ 相对于第二个变量几乎所有 $x \in X$ 都是连续的。e.,

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(x, y_0), \text{ 为几乎所有的 } x \in X \quad (2)$$

那么函数 $J$ 在 $y$ 处是连续的0:

$$J(y) = \int_Y f(x, y) d\mu(x) \quad J(y \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0) = \int_Y f(x, y_0) d\mu(x)$$

我们注意到, 如果 $X$ 是一个拓扑空间, 并且函数 $f$ 在 $X \times Y$ 上是连续的, 那么条件(2)肯定会被满足。

#### 推论

如果 $X$ 是一个具有有限测度的紧致空间, 而 $Y \subset \mathbb{R}$ 是一个任意区间, 那么 $f$ 在 $X \times Y$ 上的连续性意味着积分的连续性 $J(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ 。

#### 证明

实际上, 区间中的每个点都有一个相对邻域 $U$ , 它的闭包是包含在区间中的一个紧集。根据维尔斯特拉斯定理, 函数 $f$ 在乘积 $X \times U$ 上有界, 它保证了条件 $(L_{loc})$ .  $\square$

很明显, 该推论不仅对一个区间有效, 而且对每个局部紧空间 $Y$ 都有效; 特别地, 如果 $Y$ 是欧几里得空间的开或闭子集, 它是有效的。

### 1.1.4

我们考虑两个例子。我们证明了由方程式定义的函数 $H$ 和 $K$

$$H(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \quad \text{for } y \in \mathbb{R}$$

$$K(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx \quad \text{for } y \in (0, +\infty)$$

是连续的。

在第一种情况下, 我们有 $f(x, y) = \frac{\cos xy}{1+x^2}$ 自从

$$\left| \frac{\cos xy}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$$

我们可以看到函数 $f$ 满足条件 $(L_{loc})$ 在每一点 $y \in \mathbb{R}$ 。它请参考定理2。

在第二种情况下，我们有  $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ 。与前面的例子相比，现在没有主要  $y_0$  所有  $y \in Y$  共同，可和  $(0, +\infty)$ ，其中不等式  $|f(x, y)| \leq g_0(x)$  适用于所有的  $x, y > 0$ 。然而，条件 (L1oc) 仍然支持每一点  $y \in (0, +\infty)$ ，但现在，对于每一个  $y > 0$ ，我们必须根据邻域选择一个邻域和一个可求和的多数值。的确，让你  $y_0 > 0$  和  $U = (y_0/2, +\infty)$ 。然后

$$|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-\frac{xy_0}{2}} \quad \text{for all } x > 0, y \in U, \quad \text{and} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{xy_0}{2}} dx < +\infty.$$

上述第二个示例可以通过直接计算以不同的方式进行处理。的确，通过两次部分积分，我们得到了

$$\begin{aligned} K(y) &= -e^{-xy} \cos x \Big|_0^\infty - y \int_0^\infty e^{-xy} \cos x dx \\ &= 1 - y \left( e^{-xy} \sin x \Big|_0^\infty + y \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx \right) = 1 - y^2 K(y) \end{aligned}$$

因此， $K(y) = 1/(1 + y^2)$  对于每一个  $y > 0$ 。基于一般方案，本文提出的第一个解决方案有两个原因。首先，这是一个典型的问题。例如，用同样的方法，我们也可以证明这个积分  $\int_0^\infty e^{-xy} h(x) dx$  对于参数  $y$  是连续的。其次，即使我们知道如何计算积分，我们有时也必须检查条件 (L1oc) 的被积函数 (我们将在后面的 Ex 中讨论这个想法。2节 1.1.6)。

### 1.1.5

定理2使我们很容易地得到连续性的条件，而且得到积分随参数的可微性的条件。

#### 定理5

设  $Y \subset \mathbb{R}$  为任意区间。假设：

(a) 导数

$$f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

几乎存在于所有的  $\mu \in \mathcal{M}$  和每个  $\mu \in \mathcal{M}$ ；  
 $f'_y(b)$  的函数  $f$  满足条件 (L1oc) 在某个点  $y_0 \in Y$ 。  
 那么函数  $J$  在  $y$  处是可微的  $0$  和

$$J'(y) = \int_Y f'_y(x, y_0) d\mu(x) \quad (3)$$

这个公式被称为莱布尼茨规则。

证明让  $x \in X$ ,  $y_0 + h \in Y$ ,  $h \neq 0$ , 和

$$F(x, h) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}.$$

自从

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_X \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} d\mu(x) = \int_X F(x, h) d\mu(x),$$

我们可以看到一个有限导数  $J$  的存在性  $\backslash(y_0)$  和等式 (3) 在等式中的积分号下以  $h \rightarrow 0$  传递到极限, 立即得到 (4). 如果我们证明函数  $F$  满足条件 (L), 我们可以用定理 3 证明到极限的通道 (loc) 在  $h = 0$ . 让我们检查一下。  
 因为函数  $f$  满足条件 (L<sub>loc</sub>), 存在一个正数  $\delta$  和一个可求和的函数  $g$

$$|f(x, y)| \leq g(x) \text{ 为几乎所有的 } x \in X \text{ 和 } y \in Y, 0 < |y - y_0| < \delta.$$

拉格朗日均值定理应用于端点为  $y$  的区间上的函数  $y \mapsto f(x, y)$  和  $y_0 + h$  给出了关系  $F(x, h) = f(x, y_0 + \theta h) - f(x, y_0)$ , 其中  $\theta$  是区间  $(0, 1)$  中的一个数字。因此,  $|F(x, h)| \leq g(x)$  为几乎所有的  $x \in X$  和  $0 < |h| < \delta$ 。因此, 条件 (L<sub>loc</sub>) 为  $F$  完成。□

通常, 当使用上面证明的定理时, 对于偏导数  $f$  的存在性是毫无疑问的, 它只需要检查它是否满足条件 (L<sub>loc</sub>)。在  $X = [p, q]$ ,  $Y = [a, b]$ , 以及函数  $f$  和  $f$  在矩形  $X \times Y$  中是连续的情况下, 情况更简单。

然后是函数  $J(y) = \int_p^q f(x, y) dx$  在  $a$ 、 $b$  和  $J$  上是连续可微的  $\backslash(y) = \int_p^q f'_y(x, y) dx$ 。

注释定理 5 显然在更一般的情况下也仍然有效, 其中  $Y$  是一个多维空间的子集和导数  $J \backslash(y)$  被对其中一个坐标的偏导数所取代。

### 1.1.6

现在我们考虑所得到的结果的一些应用。首先, 我们用它们来计算两个重要的函数积分, 它们的原数不能用初等函数表示。

#### 示例 1

计算积分

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx dx \quad \text{for } y \in \mathbb{R}$$

根据一个积分对一个参数的微分定理（该定理的所有条件都明显满足），这是一个光滑的函数和

$$J'(y) = - \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \sin yx dx$$

按部分积分，我们得到

$$J'(y) = \left. \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin yx \right|_0^{\infty} - \frac{y}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx dx = -\frac{y}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx dx$$

因此， $J'(y) + J(y) = 0$ 。因此， $(e^{y^2/4} J(y))' = 0$ 。因此  $J(y) = C e^{-y^2/4}$ 。由于  $C = J(0)$ （在积分理论中讨论），我们得到了所需的结果，

$$J(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2/4}$$

## 示例2

我们考虑积分

$$J(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{for } y \in (0, +\infty)$$

我们证明了函数  $J$  是可微的，并利用这个事实找到了  $J'(y)$ 。

很明显，在我们的例子中，我们有  $f(x, y) = e^{-xy} \frac{\sin x}{x}$  代表所有的  $x, y > 0$ 。作为在教区证明。1.1.4，的函数  $f$  满足条件 (L1oc)， $y$  出现在其中的每一点上半轴  $(0, +\infty)$ 。因此，我们可以使用莱布尼茨规则，

$$J'(y) = - \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx \quad \text{for } y > 0$$

在实施例1中计算了最后一个积分。我们注意到，知道这个积分并不免除我们使用条件的必要性 (loc)，作为上述公式的证明性)。因此，

$$J'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{and} \quad J(y) = C - \arctan y \quad \text{for all } y > 0$$

其中  $C$  是一个常数。为了确定这个常数，我们观察到  $J(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$  自  $|J$

$(y) \leq \int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$  因此， $C = \frac{\pi}{2}$ ，并因此  $\frac{\pi}{2}$

$$J(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y \quad \text{for all } y > 0 \quad (5)$$

到目前为止，我们只考虑了  $y > 0$  的积分  $J(y)$ 。然而，被积函数对于  $y = 0$  也有意义。此外，我们必须知道，尽管函数  $f(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$  是不可求和的，是不当的积分吗  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  尽管如此， $dx$  还是收敛了。因此，对积分的定义  $J(y)$  也是很自然的

对于  $y = 0$  由  $J(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . 这自然提出了一个问题, 即这样定义的积分  $J(y)$  是否在零处连续。很明显

$$e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{ 对于所有的 } x, > 0$$

由于被积函数  $J(0)$  是不可和的, 对极限  $J(y) \rightarrow J(0)$  的证明变得复杂。因此, 我们不能在这里使用定理2, 其条件保证了极限函数的可和性。在教区。1.4, 我们得到了一般的定理, 允许我们验证一个基于参数的不当积分的连续性, 但现在我们证明了函数  $J$  在零处是连续的。我们验证了这个差异

$$J(y) - J(0) = \int_0^{\infty} (e^{-yx} - 1) \frac{\sin x}{x} dx$$

趋于0, 如  $y \rightarrow 0$ 。为此, 我们分别估计了区间  $[0, t]$  和  $[t, +\infty)$  上的积分; 这里的  $t > 0$  是一个辅助参数, 将在后面指定。区间  $[0, t]$  上的积分可以粗略估计: 因为  $0 \leq 1 - e^{-yx} \leq yx$ , 我们有

$$\left| \int_0^t (e^{-yx} - 1) \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^t xy \frac{1}{x} dx = yt$$

在第二个积分中的部分积分, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} (e^{-yx} - 1) \frac{\sin x}{x} dx &= \int_t^{\infty} (e^{-yx} - 1) \frac{d(-\cos x)}{x} \\ &= -(1 - e^{-ty}) \frac{\cos t}{t} + \int_t^{\infty} \cos x \left( \frac{e^{-yx} - 1}{x} \right)' dx \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{\infty} (e^{-yx} - 1) \frac{\sin x}{x} dx \right| &\leq \frac{1}{t} + \int_t^{\infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} e^{-yx} \right) dx \\ &\leq \frac{2}{t} + \frac{y}{t} \int_t^{\infty} e^{-yx} dx < \frac{3}{t} \end{aligned}$$

因此,  $|J(y) - J(0)| \leq \frac{3}{t} y t$  表示所有正的  $y$  和  $t$ 。把  $t = \frac{1}{\sqrt{y}}$  放, 我们看到了

即  $|J(y) - J(0)| \leq 4\sqrt{y}$ , 这意味着  $J(y)$  的连续性为  $y \rightarrow 0$ 。考虑到 (5), 我们得到了重要积分的值

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



### 1.1.7

定理5在关于复参数的可微性的情况下也仍然有效。

#### 定理6

设 $Y$ 是复平面的一个开子集。如果条件：(a)，函数 $y \mapsto f(x, y)$ 对于几乎所有 $x \in X$ 都是全纯的；

(b)的偏导数 $f$ 满足条件 $(L'_y \text{loc})$ 在某个点 $y_0 \in Y$ ，被实现，然后是积分 $J(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ 在 $y$ 处可微0和

$$J'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x)$$

#### 证明

定理5的证明可以逐字重复，唯一的区别是，现在，在磁盘 $(y_0, h)$ 位于 $Y$ 中，我们使用估计值

$$|F(x, h)| = \left| \int_0^1 f'_y(x, y_0 + th) dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f'_y(x, y_0 + th)|$$

而不是拉格朗日均值定理。按条件 $(L_{\text{loc}})$ ，对于绝对值足够小的 $h$ ，上述不等式的右边有一个独立于 $h$ 的可求和多数值。知道了这一点，我们就可以在实参数的情况下完成证明。 $\square$

根据上面的定理，如果函数 $\phi$ 在一个有限区间 $[a, b]$ 上是可和的，那么这个函数

$$F(z) = \int_a^b \phi(t) e^{zt} dt$$

在整个复平面上都是全纯的。因此，具有紧支持的可和函数的拉普拉斯和傅里叶变换，即积分

$$\mathcal{L}(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) e^{-zt} dt \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-izt} dt$$

是整个函数。

#### 示例1

我们找到了一个幂函数的拉普拉斯变换。让一个 $a > 0$ ， $z \in \mathbb{C}$ ， $x = \text{Re}(z) > 0$ ，和

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-zt} dt$$

显然， $|f(t, z)| = t^{a-1} e^{-\text{Re}(z)t} = t^{a-1} e^{-xt}$ ，因此，被积函数对于每个 $z$ ， $\text{Re}(z) > 0$ 都是可和的。导数 $f$ 满足条件 $(L'_z \text{loc})$ 在右半平面的每一点上。因此

$$\mathcal{L}'(z) = - \int_0^\infty t^a e^{-zt} dt = \left. \frac{1}{z} t^a e^{-tz} \right|_{t=0}^\infty - \frac{a}{z} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-zt} dt = -\frac{a}{z} \mathcal{L}(z)$$

这个方程可以用  $(z)$  的形式表示  $aL(z) \backslash = 0$ , 这意味着  $z^a L(z) = \text{常量}$ 。我们将假设它是  $z^a$  是幂函数的分支, 在  $z = 1$  处等于 1。  $\frac{\mathcal{L}(1)}{z^a}$  然后是  $L(z) =$ , 它还需要回忆伽马函数的定义来完成计算,

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a)$$

因此,  $L(z) = \frac{\Gamma(a)}{z^a}$

### 示例2

让  $X$  是一个封闭的子集的复平面, 让  $G$  是  $X$  的补充, 让  $h$  是一个函数可和  $X$  对测量  $\mu$  (我们记得, 根据我们的协议的开始, 测量拓扑空间定义至少为所有 Borel 子集)。我们用这个方程在  $G$  上定义了一个函数  $J$

$$J(z) = \int_X \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \quad (z \in G)$$

这个函数  $J$  被称为柯西型的积分。

我们证明了这个函数在  $G$  中是全纯的, 它的导数可以通过对积分下的参数的微分来计算符号, 即,

$$J^{(n)}(z) = n! \int_X \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\mu(\zeta) \quad \text{for all } z \in G, n \in \mathbb{N}$$

在我们的例子中, 我们有  $f(\zeta, z) = h(\zeta) / (\zeta - z)$  和  $f(\zeta, z) = h(\zeta) / (\zeta - z)$ ,  $\zeta \in X$ ,  $z \in G$ . 在  $z$  的附近 0, 分母  $\zeta - z$  分开

$|\zeta - z| > r$  适用于  $|z - z_0| < r$  和  $\zeta \in X$ . 因此, 函数  $\zeta \mapsto f(\zeta, z)$  对于每个  $z \in G$  和

从零开始。实际上, 如果磁盘  $B(z_0, 2r)$  包含在  $G$  中, 则为不等式

$$|f'_z(\zeta, z)| = \left| \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{|h(\zeta)|}{r^2} \quad \text{for all } \zeta \in X, |z - z_0| < r$$

最后一个估计表明, 函数  $f$  满足条件 (L1oc) 在  $z_0$ . 自从  $z_0$  是任意的, 我们通过定理 1.1.7 得到函数  $J$  在  $G$  中是全纯的

$$J'(z) = \int_X \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\mu(\zeta) \quad \text{for all } z \in G$$

高阶导数的计算方法类似。

## 1.2.1 伽马函数

在本节中，我们考虑一个依赖于一个参数的积分的重要例子。这里我们讨论的是由欧拉引入的函数，或者第二类的欧拉积分，它与初等函数具有相同的基本意义。我们已经用了伽马函数来计算 $m$ 维球的体积。

### 1.2.1

我们记得 $x > 0$ 的函数是由公式定义的

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

很容易验证被积函数 $f(t, x) = t^{x-1} e^{-t}$ 满足条件(1)在每个点 $x$ 的邻域内 $x > 0$ 。根据定理5，这个函数是可微的

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$$

同样地，我们可以证明该函数具有任意阶的导数，并找到它的一个公式。特别是

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^2 t dt > 0.$$

因此，该函数是 $C^\infty$ 类的凸函数 $\Gamma((0, +\infty))$ 。

通过部分积分，我们可以很容易地验证 $\Gamma$ 满足函数方程

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ 为 } x > 0 \quad (2)$$

我们对正整数计算 $\Gamma$ 。很明显， $\Gamma(1) = 1$ 。由等式(2)和诱导，我们得到 $\Gamma(n+1) = n!$  对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 。因此，这个函数是函数 $n$ 的延续！到正实轴(乍一看，函数 $n!$ 只与正整数密切相关)。

通过变量 $t = u^2$ 的变化，积分 $\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma(1/2)$ 可以被简化为欧拉-泊松积分 $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ ，这是计算 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 。根据这个结果和函数方程(2)，我们可以找到在半整数处的 $\Gamma$ 的值，

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N})$$

方程(2)使我们能够研究 $\Gamma$ 在零附近的行为，

$$\frac{1}{x} \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \sim \text{作为 } x \rightarrow +0.$$

对于较大的 $x$ ，值 $\Gamma(x)$ 很大，因为

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \geq \int_x^{\infty} t^x e^{-t} dt \geq x^x \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

这个简单的估计很好地描述了 $\Gamma$ 在无穷远处的增长。然后，我们得到了 $\Gamma(x)$ 作为 $x \rightarrow +\infty$ 的精确渐近性态。

函数方程(2)表明 $\Gamma$ 向负半轴的自然延续。实际上，我们应该取公式 $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ 为 $\frac{1}{x}$

区间上 $\Gamma$ 的定义 $(-1, 0)$ ，那么 $\Gamma$ 在 $(-1, 0)$ 的值为在点0和点-1上的负的和统一的极限是无限的。使用

定义 $\Gamma$ 在 $(-1, 0)$ ，我们可以在区间 $(-2, -1)$ 上定义它。正在进行

这样，我们为所有的 $x < 0$ ， $x-1$ ， $-2$ 定义 $\Gamma(x)$ 。我们看到 $(-1)^n \Gamma(x) > 0$

如果 $x \in (-n, -n+1)$ 和 $|\Gamma(x)| \rightarrow +\infty$  ( $n = 1, 2, \dots$ )。现在很明显了

平衡(2)可概括如下： $x \rightarrow -n$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ 用于 } x \in \mathbb{R}/\{0, -1, -2, -3, \dots\} \quad (2')$$

上面得到的伽马函数的性质允许我们画出 $\Gamma$ 的图(见图.1.1)。我们注意到，由于 $\Gamma(2) = 1 = \Gamma(1)$ ，Rolle定理暗示在区间 $(1, 2)$ 中有一个(唯一的) $\Gamma$ 的临界点。此时，该函数假定为一个局部最小值。此外，每个间隔

$(-n, -n+1)$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，包含一个唯一的 $\Gamma$ 临界点。

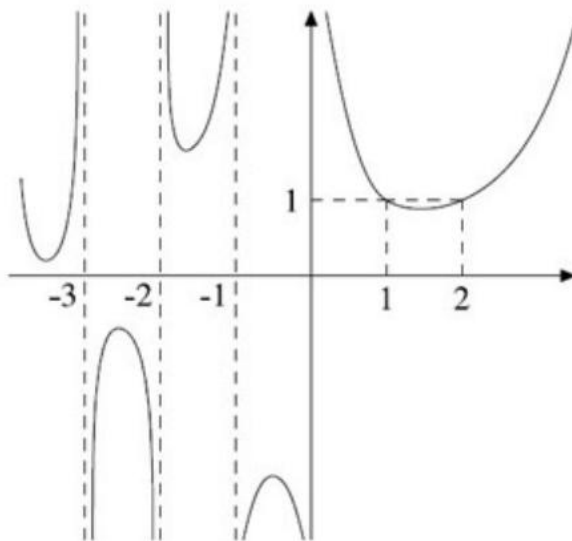


图1.1伽马函数的曲线图

用等式中用复数 $z$ 替换 $x(1)$  (与 $t$ 有关 $z-1$ 如 $e^{(z-1)\ln t}$ )，我们看到这个方程允许我们不仅在 $x > 0$ 处定义 $\Gamma$

但在复 $z$ 处也提供了 $\operatorname{Re}(z) > 0$ ，即在右边的复半平面上。根据定理6可知， $\Gamma$ 在这个半平面上是全纯的。此外，标识 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 仍然有效，可用于定义 $\Gamma$

整个复平面，除了点 $0, -1, -2, \dots$ ，就像对在半轴上的 $\Gamma(-\infty, 0)$ 。然而，我们满足于自己研究这个函数只在实轴上。

## 1.2.2

现在我们得到了伽马函数的非常重要的公式。

首先，我们回忆起连接函数 $B$ 和 $\Gamma$ 的公式。这个

函数 $B$ 被定义为 $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ ，其中 $x, y > 0$ 。已证明在上个学期，我们有 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ 。

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3)$$

从这个方程中，我们推导出以下渐近关系：

$$\Gamma(x+a) \sim x^a \text{ 针对 } x \rightarrow +\infty \text{ 的 } \Gamma(x) \quad (4)$$

利用 $\Gamma$ 的函数方程，足以证明 $a > 0$ 的这一点。通过(3)，我们得到

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{x-1} dt \quad (a, x > 0)$$

为了方便起见，我们用 $x+1$ 代替了 $x$ 。利用变量 $t = u/x$ 的变化，我们得到

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a+1)} = \frac{1}{x^a} \int_0^x u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^x du$$

Since  $1 - \frac{u}{x} \leq e^{-\frac{u}{x}}$ , we see that  $1 - \frac{u}{x} \leq e^{-\frac{u}{x}}$  and  $\left(1 - \frac{u}{x}\right)^x \leq e^{-u}$  for  $0 \leq u \leq x$ . Consequently, for every  $x$ , the integrand in the last integral (we assume this function for  $u > x$  is zero) has the main part  $u^{a-1}e^{-u}$  on  $(0, +\infty)$ . Therefore, theorem 2 means

$$x^a \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a+1)} = \int_0^x u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^x du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du = \Gamma(a)$$

除以 $\Gamma(a)$ ，我们可以用一种相当于(4)的形式来表示它：

$$x^a \frac{x\Gamma(x)}{(x+a)\Gamma(x+a)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

### 1.2.3

下面的公式可以不积分地找到  $\Gamma$  的值:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n)} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, -1, -2, \dots$$

这个公式类似于欧拉对  $\Gamma$  的定义, 被称为欧拉-高斯公式。

为了证明, 我们观察到  $\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)x\Gamma(x)$ 。因此

$$\frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{n}{x+n} \cdot \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} = \frac{n}{x+n} \cdot \Gamma(x) \cdot \frac{n^x \Gamma(n)}{\Gamma(x+n)}.$$

它仍需要使用关系 (4)。

对于  $x = \frac{1}{2}$ , 欧拉-高斯公式基本上与沃利斯公式一致。事实上, 对于  $x = \frac{1}{2}$ , 我们得到了

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{nn!}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (\frac{1}{2} + n)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

这相当于沃利斯公式。

为了得到一个与更著名的函数有关的公式, 我们回顾了谐波级数部分和的渐近行为: 存在一个  $V$  (欧拉常数), 使

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = \ln n + V + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

这就源于该级数的收敛性。对  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$  以后, 我们利用这个结果来得到函数  $\Gamma$  在无穷乘积中的漂亮展开。我们还记得, 通过一个数值序列  $a$  的无穷乘积  $1, a_2, \dots$ , 我们指的是极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k$ , 其记号为  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ 。

我们证明了

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

(自  $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$  作为  $x \rightarrow 0, -1, -2, \dots$ , 我们很自然地假设  $1/\Gamma$  在这些点上是零)。所得到的关系称为韦尔斯特拉斯公式。

为了证明, 我们将欧拉-高斯公式改写为

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-x} x(1+x) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

现在，经过初等变换后，我们得到了

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

由于  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma$ ，我们看到了这个极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = e^{-\gamma x}$  存在，维尔斯特拉斯公式有效。

#### 1.2.4

式(3)使我们能够得到勒让德（重复）公式，也简称为重复公式：

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x) \quad (x > 0)$$

为此，我们变换了方程的右边

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt$$

我们有

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 (t-t^2)^{x-1} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right)^{x-1} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - s^2\right)^{x-1} ds$$

替换  $u = 4s^2$ ，我们通过(3)得到

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{1-2x} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{x-1} du = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}$$

自  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ，我们得到了所要求的公式。

如下(2)，上面证明的公式不仅对正  $x$  有效，而且对所有实  $x$  也有效，如  $2x = 0, -1, -2, \dots$ 。

#### 1.2.5

现在我们得到了与伽马函数有关的最重要的公式之一。这是欧拉的反射公式

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{用于 } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

我们证明了积  $\theta(x) = \Gamma(x) \Gamma(1-x)$  在  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  上是恒数的。它从等式(2)，表示函数  $\theta$  的周期为1。的确，

$$\theta(x+1) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \Gamma(x+1) \Gamma(-x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} x \Gamma(x) \frac{\Gamma(1-x)}{-x} = \theta(x).$$

此外,

$$\theta(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)}$$

因此, 利用公式  $\theta(n) = 1$  推广  $\theta$  对于  $n \in \mathbb{Z}$ , 我们得到了一个在零邻域内无穷可微的1周期函数, 从而在整个实轴上。很明显,  $\theta > 0$  在  $\mathbb{R}$ 。

对于  $x > 0$ , 勒让德的公式意味着 (读者可以很容易地验证) 这种关系

$$\theta\left(\frac{x}{2}\right)\theta\left(\frac{1+x}{2}\right) = \theta(x)$$

取对数, 我们可以看到

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(x), \quad (6)$$

其中,  $g = \ln \theta$ 。因此, 连续和1周期函数  $g$  满足身份

$$g''\left(\frac{x}{2}\right) + g''\left(\frac{1+x}{2}\right) = 4g''(x).$$

对于  $M = \max_{x \in [0,1]} |g''(x)|$ , 我们得到了  $2M > 4M$ 。由于  $0 \leq M < +\infty$ , 这意味着  $M = 0$ , i.e.,  $g = \ln \theta$  是一个线性函数。考虑到  $g(0) = g(1) = 0$ , 我们得到了  $g \equiv 0$ , i.e.,  $\theta \equiv 1$ 。

反射公式可以得到欧拉著名因式分解  
正弦函数变成“简单因子”, 就像多项式可以用类似的形式表示一样。

由于正弦函数有无穷多个零, 我们必须使用无限乘积。欧拉曲线的结果如下:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad \text{for each } x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

拒绝这个平凡的情况, 我们可以假设  $x \notin \mathbb{Z}$ 。乘法  $\Gamma(x)$  和  $\Gamma(x)$  的维爾斯特拉斯公式, 我们得到

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -x^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

它还需要应用反射公式,

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\pi}{(-x)\Gamma(x)\Gamma(-x)} = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

我们注意到, 从上述证明中可以看出, 反射公式可以反过来可以从维爾斯特拉斯公式和等式推导出来(7)。



### 1.2.6

现在我们转向对  $\Gamma(x)$  作为  $x \rightarrow +\infty$  的渐近行为的更实质性的研究。其渐近性态用斯特林公式描述

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^{-x} e^{-x} \quad (8)$$

在下一节中，我们将这个结果作为一个更一般的陈述的特殊情况得到的，但现在我们使用一种不同的方法，基于我们对伽马函数的知识，并允许我们获得渐近公式(8)的锐化。

首先，我们用快速递减的伽马函数替换为它的对数。下一步是找到  $\ln \Gamma(x)$  的二阶导数的渐近行为。

在等式中接受对数(5)对于  $x > 0$ ，我们得到

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$$

鉴别两次，我们得到

$$(\ln \Gamma(x))'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad (9)$$

由于得到的级数都是均匀收敛的，所以得到的级数在  $(0, +\infty)$  上，三次微分是合法的。

特别是，由欧拉-麦克劳林公式提供，可以得到任意精确的  $x \rightarrow +\infty$  级数(9)和的渐近表示。然而，我们不会使用它，而是得到  $(\ln \Gamma(x))$  的渐近性的前几个项。直接地由于级数(9)的和很接近于积分，所以可以很容易地找到渐近值的主项。我们得到

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

因此

$$(\ln \Gamma(x))'' = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(从这里到本节的最后，我们假设  $x > 0$  和符号  $O$  指的  $x \rightarrow +\infty$ ，而没有显式地说它)。我们将在这里使用的技巧如下。我们将依次锐化得到的渐近公式，通过级数提取出容易求和的主部分。首先，我们用这个形式来表示  $\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

然后从(9)中减去它。我们得到

$$\begin{aligned} (\ln \Gamma(x))'' - \frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

再次，将得到的级数与相应的积分进行比较，我们可以看到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(x+1)^2} &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t+1)^3} \leq (\ln \Gamma(x))'' - \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)} \\ &\leq \frac{1}{x^3} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^3} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

因此，

$$(\ln \Gamma(x))'' - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + h(x), \text{ where } h(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (11)$$

这个结果已经足以证明(8)。事实上，很明显

$$\int_1^x h(t)dt = \int_1^{\infty} h(t)dt - \int_x^{\infty} h(t)dt = \text{const} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

因此，对从1到x的展开(11)进行积分，得到方程

$$(\ln \Gamma(x))' = A + \ln x - \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

再加一个积分，就给出了这个关系

$$\ln \Gamma(x) = B + Ax + x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln x + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

为了找到A和B，可以方便地将这个方程(稍微粗化)写成等价性

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Cx^x e^{-\frac{1}{2}x} e^{(A-1)x}$$

其中  $C = e^B$ . 为了确定A，我们使用函数方程，这意味着

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{x} (x+1)^{x+\frac{1}{2}} e^{(A-1)(x+1)}.$$

取这些等价物的右边的比率，我们得到

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} e^{A-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

只有当一个=为0。常数B也可以用勒让德公式找到，这意味着

$$C^2 x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left(x + \frac{1}{2}\right)^x e^{-x-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} C(2x)^{2x-\frac{1}{2}} e^{-2x}.$$

除以 $C^{2x-\frac{1}{2}} e^{-2x}$ ，我们看到了 $C \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x e^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$ ，这意味着相等的 $C = \sqrt{2\pi}$ 。因此

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

i. e.,

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \quad (8)$$

上述关系，以及等式(8)，也被称为斯特林公式。为了锐化渐近性，我们用这个形式来表示 $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{(x+n+1)^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x+n)+1}{(x+n)^2(x+n+1)^2}$$

再乘以，我们从(10)中减去它。 $\frac{1}{2}$ 我们得到

$$(\ln \Gamma(x))'' - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)^2} \quad (12)$$

自从

$$\begin{aligned} \frac{1}{6(x+1)^3} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t+1)^4} \\ &\leq (\ln \Gamma(x))'' - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^4} = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6x^3}, \end{aligned}$$

我们看到



$$\prod_{k=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n! n^{x + \frac{k}{p}}}{\prod_{j=0}^n \left(x + \frac{k}{p} + j\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p n^{px + \frac{p-1}{2}} p^{(n+1)p}}{\prod_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^n (px + pj + k)}$$

很容易看出，所产生的乘积等于

$0 \leq i \leq pn + p - 1$  的  $px + 1$ 。替换最后一个  $p-1$  因子  
通过等量  $pn$  (如  $n \rightarrow \infty$ )，我们得到乘积为  
等于

$$(pn)^{p-1} \prod_{i=0}^{pn} (px + i)$$

因此

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{p}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p n^{px + \frac{p-1}{2}} p^{(n+1)p}}{(pn)^{p-1} \prod_{i=0}^{pn} (px + i)} \\ &= p^{-px} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p p^{np+1}}{(np)! n^{\frac{p-1}{2}}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(np)^{px} (np)!}{px(px+1) \cdots (px+pn)} \end{aligned}$$

根据高斯公式，第二个极限是  $\Gamma(px)$ 。仍然需要观察的是，第一个极限（独立于  $x$ ）等于  $(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p$ 。这可以很容易地用斯特林的公式来证明，并留给读者来阅读。因此，我们就得到了所需的结果。

### 1.2.8

现在我们停下来讨论伽马函数的另一个性质。它将表明，这个性质连同函数方程(2)表征的函数到一个常数因子。我们说的是对数凸性。如果  $\ln f$  是一个凸函数，则一个正函数  $f$  称为对数凸。 $\ln \Gamma$  的凹凸性当然可以从公式(9)来证明  $(\ln \Gamma)'' \geq 0$ 。然而，从  $\Gamma$  的定义中可以直接证明  $\Gamma$  的对数凸性。的确， $\Gamma$  的对数凸性是很明显的相当于  $\Gamma(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \Gamma^\alpha(x) \Gamma^{1-\alpha}(y)$  对于所有正的  $x, y$  和  $\alpha \in (0, 1)$ 。最后一个不等式来自于霍尔德不等式。的确，

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^\alpha (t^{y-1} e^{-t})^{1-\alpha} dt \\ &\leq \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^\alpha \left( \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1-\alpha} = \Gamma^\alpha(x) \Gamma^{1-\alpha}(y). \end{aligned}$$

该函数不是函数方程  $f(x+1) = xf(x)$  的唯一解。例如，其他的解可以通过相乘得到

由1-周期函数组成的伽马函数。因此，这个方程并不能唯一地确定伽马函数。如果我们在对数凸函数类中求解，其状态就会发生根本性的变化。在这类中，所讨论的方程有一个唯一的（直到一个正的系数）解。

换句话说，下面的陈述是真的。

#### 定理

如果一个对数凸函数  $f$  在  $(0, +\infty)$  满足函数方程  $f(x+1) = xf(x)$ ，则  $f(x) = f(1)\Gamma(x)$ 。

#### 证明

我们验证了商  $f/\Gamma$  是常数的。为此，我们考虑函数  $M = \ln(f/\Gamma)$ ，它在  $(0, +\infty)$  上是连续的，作为2的差值凸函数。此外， $M$  是单边的1周期的，i.e.,  $M(x+1) = M(x)$  对于所有的  $x > 0$ 。假设  $M$  不是常数，我们考虑一个点  $x_0 \in (1, 2]$  其中  $M$  达到其最大值。在这种情况下，对于一些  $h \in (0, 1)$ ，

第二个差异  $\Delta M(x) = M(x+h) - 2M(x) + M(x-h)$  是负的， $\Delta M(x_0^2) = \delta < 0$ 。同时， $\Delta(\ln f(x)) > 0$ ，因为  $f$  是对数的

$$0 \leq \Delta_h^2(\ln f(x_0 + n)) = \Delta_h^2 M(x_0 + n) + \Delta_h^2(\ln \Gamma(x_0 + n)) =$$

凸的然而，对于每一个  $n$ ，单边周期性意味着  $\Delta_h^2 M(x_0 + n) = \delta + \Delta_h^2(\ln \Gamma(x_0 + n))$ 。

从(4)得出， $\Delta(\ln \Gamma(x)) \rightarrow 0$  为  $x \rightarrow +\infty$ 。因此，在不等式  $0 \leq \delta + \Delta$  中通过  $n \rightarrow \infty$ ，我们得到  $0 \leq \delta < 0$ ，一个矛盾。□

### 1.3.1. 卷积的存在条件和基本性质

我们将假设本节中所考虑的所有函数一般都是 $\mathbb{R}$ 上的复值和可测量的 $\mathbb{m}$ （在广义上说），一个测量将意味着勒贝格测量。如前所述，设 $B(r)$ 为半径为 $r$ 的球，其中心在原点。

#### 1.3.1

我们将介绍本节所专门讨论的主要概念。定义设 $f$ 和 $g$ 是在 $\mathbb{R}$ 上可测的函数 $\mathbb{m}$ 。如果

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)g(y)| dy < +\infty \quad \text{for almost all } x \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

然后函数 $h$ 几乎处处由方程定义

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y) dy \quad (2)$$

被称为 $f$ 和 $g$ 的卷积，用 $f * g$ 表示。

条件(1)将被称为卷积存在条件。由

改变变量 $y \rightarrow z = x-y$ ，我们可以很容易地验证上述条件是否等同于该条件

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(z)g(x-z)| dz < +\infty \quad \text{for almost all } x \in \mathbb{R}^m$$

在这种情况下，方程(2)意味着 $h(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(z)g(x-z) dz$ 。因此卷积 $f * g$ 和 $g * f$ 同时存在，且相等。因此 $\mathbb{R}^m$ 中 $f$ 和 $g$ 的卷积是交换的。e.， $f * g = g * f$ （如果至少有一个卷积存在）

我们可以看到卷积的性质与数的相乘的性质相似。卷积不仅是可交换的，而且，显然，也是可分布的，i. e.， $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ 。如果不深入研究这个类比（参见练习1），我们将使用这个关联所调用的术语。特别地，我们称函数 $f$ 和 $g$ 为卷积因子。我们还提到卷积与移位交换：如果 $f_h$ 是 $f$ 的变化，

i. e.， $f_h(x) = f(x-h)$ ，然后它直接遵循卷积的定义该 $(f * g)_h = f_h * g = f * g$ 。除了纯粹的数学问题（其中，正如我们将在下一节中看到的，是近似问题）之外，卷积的概念也起源于应用问题。例如，卷积作为一个转换传入信号的真实设备的自然数学模型出现。让我们更详细地讨论一下。假设我们有一个设备（“黑箱”）反应的信号，这将被视为时间的函数与紧凑的支持。我们很自然地假设设备的反应（它的“反应”）对信号 $f_h$ 有延迟 $h$ 与它对信号 $f$ 的响应不同在对应的

延迟的时间 $\alpha$ 。换句话说，将传入信号 $f$ 接收到其响应的设备所执行的转换与时间的位移交换： $f_h = (\cdot)_h f$ 。此外，我们假设该装置将信号的线性组合转换为响应的线性组合。这种装置（或，通常说，系统功能）的主要特征是它对脉冲作用 $\delta$ 的反应 $\alpha$ ，可以看作是一个在非常小的区间 $\Delta$ 上具有单位积分（“脉冲能量”）常数的函数 $\alpha = [\text{为} 0, \alpha)$ ，在它外面等于零。换句话说， $\delta_\alpha = \frac{1}{\alpha} \alpha$ ，其中 $\alpha$ 是区间 $\Delta$ 的特征函数吗 $\alpha$ 。对于足够小的 $\alpha$ ，器件对信号 $\delta$ 的反应 $\alpha$ 实际上并不依赖于 $\alpha$ 。因此，更换 $\delta_\alpha$ 通过“极限函数”，我们可以将一个瞬时单位脉冲视为狄拉克函数 $\delta$ ，它具有以下性质：

$$\delta(t) = 0 \quad \text{if } t \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

对信号 $\delta \approx \delta_\alpha$ 的响应 $E_\alpha$ 被称为该设备的系统功能。将任意信号 $f$ 表示为区间 $[n\alpha, (n+1)\alpha)$ 上的阶跃函数常数的线性组合，具有所需的精度，我们得到了它

$$f(t) \approx \sum_n f(n\alpha) \alpha(t - n\alpha) \approx \alpha \sum_n f(n\alpha) \delta_\alpha(t - n\alpha)$$

由于器件进行的变换是线性的，并与移位交换，我们得到

$$\tilde{f}(s) \approx \alpha \sum_n f(n\alpha) E(s - n\alpha)$$

这个和只是这个积分的一个积分和

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) E(s - t) dt$$

考虑到上述近似成为仲裁的事实

对于足够小的 $\alpha$ 非常准确，我们可以假设 $\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) E(s - u) du$ 。

因此，器件对信号 $f$ 的响应与 $f$ 的卷积与器件的系统功能相一致。因此，卷积在光学和无线电工程的理论上具有重要意义。

### 1.3.2

首先，我们建立了一个辅助语句。

引理，如果 $f$ 和 $g$ 是 $R$ 上的可测函数 $m$ 满足条件(1)，那么它们的卷积 $f$ 也在 $*$ 上可测量 $m$ 。

证明它足以证明实值函数的定理。在这个情况下，我们可以使用引理(提醒让 $f$ 是一个可测函数定义在

$R^m$ 。然后函数 $(x, y) \rightarrow f(x-y)$ 和 $(x, y) \rightarrow f(x+y)$ 是可测量的在空间上 $2^m$ .)，这意味着等式中的被积函数(2)不仅仅是



可测量的几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^m$ 作为 $y$ 的函数，但也可测量关于变量 $x$ 和 $y$ 的“整体”(i. e., 函数 $(x, y) \mapsto$

$F(x, y) = f(x-y)g(y)$ 可在 $\mathbb{R}$ 上测量 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ). 因此, 证明引理, 它仍需参考托内利定理的推论2.  $\square$

**(提醒! 推论2**如果函数 $f$ 在 $X \times Y$ 上是可测量的, 则:

(1) 对于几乎所有的 $x \in X$ , 函数 $f_x$ 可用 $Y$ 值进行测量;

(2) 如果 $\int_Y |f_x(y)| dv(y) < +\infty$  对于几乎所有的 $x \in X$ , 然后是函数 $x \mapsto \int_Y f(x, y) dv(y)$ 在广义上是可测量的。

定理函数 $f$ 和 $g$ 在 $\mathbb{R}$ 上的卷积 $f * g$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎有定义 $\mathbb{R}^m$ , 是可求和的, 并满足该不等式

$$\int_{\mathbb{R}^m} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(x)| dx.$$

**证明**我们把 $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)g(y)| dy$ . 因为(提醒, 让 $f$ 是 $a$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义的可测函数 $\mathbb{R}^m$ . 然后是函数 $(x, y) \mapsto f(x-y)$ 和

$f(x-y)g(y)$ 可在 $\mathbb{R}$ 上测量 $\mathbb{R}^m$ 是可测量的根据托内利定理得出的 $\rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy.$$

$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx$ 为每个 $y$ . 因此

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(y)| dy < +\infty$$

因此, 函数 $H$ 可求和, 因此,  $H(x) < +\infty$ 几乎无处不在。这样, 就满足了条件(1), 并且存在卷积 $(f * g)(x)$ 。它的可测性在引理中建立了, 其可和性由不等式 $(f * g)(x) \leq H(x)$ 。此外,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(y)| dy$$

$\square$

### 1.3.3

我们补充了定理1.3.2, 得到了卷积存在的充分替代条件。我们考虑比 $L$ 更广泛的函数 $\mathbb{R}^m$ ), 一类可测函数, 在函数理论和其他数学分支中经常遇到。

**定义 $\mathbb{R}$ 中的可测函数 $f \in \mathcal{M}$** 在 $\mathbb{R}$ 中称为局部可和 $\mathbb{R}^m$ 如果它在每个有界集上都是可和的, 那么i. e., 如果

$$\int_{B(R)} |f(x)| dx < +\infty \quad \text{for every } R > 0$$

在 $\mathbb{R}^m$ 中局部可求和的所有函数的集合 $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ 。显然，每一个局部可求和的函数几乎到处都是有限的 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ 。

我们提醒大家，关闭的集合 $\{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \neq 0\}$ 称为对函数 $f$ 的支持，用 $\text{supp}(f)$ 表示。由 $A + B$ ，其中 $A, B \subset \mathbb{R}^m$ ，我们表示集合 $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ 。

**定理，如果** $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ ， $g$ 是一个具有紧支持的可和函数，则卷积存在

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g) \quad (3)$$

**证明** Let  $\text{supp}(g) \subset B(r)$ 。在定理1.3.2中，我们把

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)g(y)|dy = \int_{B(r)} |f(x-y)g(y)|dy$$

并证明了 $H(x) < +\infty$ 几乎处处可见。为此，我们检查了 $H \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ ，i.e.，那 $\int_{B(R)} H(x) dx < +\infty$ 为每个 $R > 0$ 。事实上，自从 $\text{supp}(g) \subset B(r)$ 以来，我们已经有了

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} H(x) dx &= \int_{B(R)} \left( \int_{B(r)} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{B(r)} |g(y)| \left( \int_{B(R)} |f(x-y)| dx \right) dy \\ &\leq \int_{B(r)} |g(y)| \left( \int_{B(r+R)} |f(u)| du \right) dy \\ &= \int_{B(r+R)} |f(u)| du \cdot \int_{B(r)} |g(y)| dy < +\infty. \end{aligned}$$

最后一个不等式是有效的，因为 $f$ 是局部可和的。因此，函数 $H$ 在球 $B(R)$ 中几乎所有地方都是有限的，因此，在 $\mathbb{R}^m$ 上几乎到处都是有限的。因此，满足条件(1)，存在 $*$ 的卷积。

为了证明包含(3)，我们注意到，如果 $f(x-y)g(y) \neq 0$ ，那么 $x-y \in \text{supp}(f)$ 和 $y \in \text{supp}(g)$ ，因此， $x = (x-y) + y \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ 。因此

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid (f * g)(x) \neq 0\} \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)。$$

由于 $\text{supp}(g)$ 是紧致的，所以这个包含的右边的集合是封闭的（我们把它留给读者来独立地证明这一点，这意味着 $\text{supp}(f * g) = \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ ，i.e.，

$$\text{supp}(f * g) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (f * g)(x) \neq 0\} \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$$

两个具有紧支持的函数和函数的卷积具有紧的支持。

### 1.3.4

现在我们讨论卷积的微分性质。首先，我们证明了一个辅助结果。

**引理（截断引理）** 设  $f, \tilde{f} \in L_{loc}(\mathbb{R}^m)$ ，并设一个函数  $g$  有界并满足包含  $\text{supp}(g) \subseteq B(r)$ 。如果  $f$  与球  $B(R+r)$  中重合，那么  $f * g$  和  $\tilde{f} * g$  的卷积在球  $B(R)$  中重合。

**证明** 让  $\|x\| < R$ 。然后  $\|x-y\| < R+r$  为  $\|y\| < r$ 。因此

$$(f * g)(x) = \int_{B(r)} f(x-y)g(y)dy = \int_{B(r)} \tilde{f}(x-y)g(y)dy = (\tilde{f} * g)(x).$$

**定理** 让  $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^m)$ ，并设  $g$  是一个具有紧支持的有界函数。然后

- (1) 如果  $g$  的至少有一个函数是连续的，那么  $f * g$  的卷积是连续的；
- (2) 如果  $g$  的至少有一个函数是连续可微的，那么卷积是连续可微的，其导数可以用公式 ( $k = 1, \dots, m$ )

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} \left(f * \frac{\partial g}{\partial x_k}\right)(x) & \text{if } g \in C^1(\mathbb{R}^m) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} * g\right)(x) & \text{if } f \in C^1(\mathbb{R}^m) \end{cases} \quad (4)$$

这个定理的第一个断言承认了一个本质的锐化。正如我们将在后续中看到的，局部可和函数和有界可和函数的卷积是连续的，没有任何额外的假设。

**证明** 我们将假设  $\text{supp}(g) \subset B(r)$ 。

(1) 如果  $g$  是连续的， $f$  是可和的，则积分  $\int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy$  对于定理4（第1.1.3节）中的参数，它是连续的。如果  $f$  是不可求和的，那么我们可以使用一个明显的事实，即它足以证明在任意球  $B(R)$  中卷积的连续性。我们也可以使用截断引理，并将  $f$  替换为一个可和函数，它在球  $B$  上与  $f$  重合 ( $R+r$ )。如果  $f$  是连续的，也可以应用同样的方法，因为在这种情况下，我们可以假设它是连续的。

(2) 关于卷积的平滑性的证明，我们首先进行假设

这个函数  $g$  是平滑的。很明显，如果  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  和  $\|x-x_0\| < 1$ ,

那时

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = \int_{B(x_0, r+1)} f(y)g(x-y)dy$$

应用莱布尼茨规则（见定理1.1.5）在这个方程的右侧，我们立即得到了所需的结果，

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_k}(x) = \int_{B(x_0, r+1)} \frac{\partial g}{\partial x_k}(y) (x - y) dy = f * \frac{\partial g}{\partial x_k}(x)$$

我们证实，在这种情况下，莱布尼茨规则的应用是合法的。为此，我们必须检查偏导数  $(f(y)g(x-y)) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(y)(x-y)$  satisfies condition  $(L_{loc})$  at  $x_0$ . 这个确实是 indeed the case because

$$\left| f(y) (x - y) \frac{\partial g}{\partial x_k} \right| \leq M |f(y)| \times B(x_0, r+1)(y) \text{ 为所有的 } x \in B(x_0, r+1),$$

其中  $M = \max_x \left| \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} \right|$ .

现在假设  $f$  是连续可微的。证明卷积是可微的  $B(R)$ ，我们应该取代  $f$  函数有一个紧凑的支持和恰逢  $f$  足够大的球，正如我们的证明卷积的连续性，唯一的区别是这个函数现在必须光滑。 $f \tilde{f}$  例如，我们可以用  $f$  乘以一个光滑的函数，它有一个紧的支撑，在一个球  $B$  上等于 1  $(R+r)$ 。然后，交换  $g$  和的作用，并利用上面证明的公式，我们发现  $f$

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_k}(x) = (x) = \frac{\partial(g * \tilde{f})}{\partial x_k} g * \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(x) = g * \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k} * g(x)$$

适用于  $\|x\| < R$ 。由于  $R$  是任意的，这就证明了这个定理。

如果  $\phi$  的至少有一个函数是无限可微的，则局部可和函数  $f$  和具有紧支持的有界函数  $\phi$  的卷积是无限可微的。

证明这个断言应该用 (4) 的归纳法来证明。

特别地，它从一个具有常系数的线性微分算子与卷积交换的推论中得出。

### 1.3.5

卷积的概念有不同的概括和修改。我们提到了其中的一些。

在问题的函数是周期性的，卷积的定义与上面唯一的区别，现在积分在  $R$  取代的积分区间长度等于周期（无论使用哪个间隔）。为了确定，我们将假设周期为  $2\pi$ 。显然，周期函数的卷积也是周期的。我们让读者来独立验证

定理1.3.2的一个模拟对于周期函数的卷积是有效的。一个简单地重复这个定理的证明，适当地改变积分域。

以上内容完全适用于在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 $m$ 和关于每个变量的 $2\pi$ -周期。它们的卷积由方程定义

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

卷积定义的另一个版本可以得到如下。

如果一个函数 $g$ 是可和的，且非负的，那么积分 $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)dy$ 可以看作是密度为 $g$ 的测度 $\nu$ 的积分吗

关于勒贝格的测量方法 $g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)d\nu(y)$ 。正确的这个方程的手边将被用作 $a$ 的卷积的定义

函数和度量。为了保证卷积的存在，我们将会

假设所有的测度都是有限的，并且所有的函数都是有界的。

**定义**设 $\nu$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有限波莱尔测度 $m$ ，设 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测有界函数 $m$ ，卷积 $f * \nu$ 由该方程定义

$$(f * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)d\nu(y) \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

如果 $\mu$ 是定义在整数格 $\mathbb{Z}$ 上的计数测度，则可以考虑卷积的另一个版本 $m$ 。在这种情况下，我们说的是多个序列，而不是函数。与(2)类似，这些序列的卷积 $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m}$ 和 $g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m}$ 是由这个公式定义的吗

$$(f * g)_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} f(k-n)g(n)d\mu(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} f_{k-n}g_n \quad (k \in \mathbb{Z}^m)$$

## 1.4 近似标识

### 1.4.1

如果其中一个卷积因子是非负的，其积分为1，则

卷积可以看作是其他因子的平均值。的确，如果  $g \geq 0$  且  $\int_{\mathbb{R}^m} g(y) dy = 1$ ，然后是

$\inf_{\mathbb{R}^m} f \leq (f * g)(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^m} f$  为  $x \in \mathbb{R}^m$ 。如果  $g$  的支撑包含在球  $B(r)$  中，那么估计可以强化如下：

$$\inf_{B(x, r)} f \leq (f * g)(x) \leq \sup_{B(x, r)} f \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

因此，如果  $f$  是连续的，那么对于一个较小的  $r$ ，卷积必须接近于  $f$ 。同时，卷积往往比函数  $f$  本身具有更高的光滑度。特别是，正如我们将在第二节的例子1中证明的那样。1.4.2，任意局部可和函数和任意球的特征函数的卷积是连续的。因此，我们希望利用卷积可以得到一种用平滑函数逼近函数的方法。

由于局部可和函数和球的特征函数的卷积是连续的，我们得到不存在局部可和函数发挥卷积的恒等作用；换句话说，不存在卷积不会改变的局部卷积因数。同时，与测度  $\delta_0$  进行卷积由集中在零的单位点质量产生的，具有这个性质，

$$(f * \delta_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) d\delta_0(y) = f(x) \text{ 表示 } \mathbb{R} \text{ 中的所有 } x^m$$

测量  $\delta_0$  当然没有勒贝格测量没有密度。但是，避免了与度量  $\delta$  相关的集成0，著名的物理学家保罗·狄拉克实际上建议假设这样的密度仍然存在。他引入了一个“函数”  $\delta$ （现在称为狄拉克函数），具有以下性质：

$$\text{I. } \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq 0, \\ +\infty & \text{for } x = 0, \end{cases} \quad \delta(x) \text{ 是和} \\ \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x) dx = 1.$$

由此他得出结论，对于  $\mathbb{R}$  上的每一个连续函数  $f^m$  那  
关系  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) \delta(y) dy$  有效，即那个  $\delta$  是  $\text{con-}$  的一个身份  
连续函数类中的卷积。正是这个事实对得至关重要  
角色描述狄拉克函数的性质I和性质II清楚地地在-中  
兼容的然而，如果我们考虑积分  $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) \delta(y) dy$  简单地作为a  
积分J的新符号  $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) d\delta_0(y)$ ，然后计算涉及到  
函数  $\delta$  成为合法的。

正如前面所说的，该措施为  $\delta_0$  对勒贝格测度没有密度，并且不存在满足性质 I 和性质 II 的函数。在这方面，有一个近似  $\delta$  的问题通过有密度的措施，i. e.，测量  $\omega(x)dx$ 。在广泛的情况下，我们将看到，一方面，与这种形式的度量进行卷积会导致函数的变化很小(因为度量接近于  $\delta_0$ )，另一方面，它产生的函数比初始函数更平滑。这为用光滑函数逼近任意函数提供了可能性。一个近似值的性质可能会有所不同，因此需要加以澄清。

首先，我们定义了一组函数，通过它来度量  $\delta_0$  近似值。

**定义** 让  $T \subset (0, +\infty)$ ，然后让  $t_0$  是  $T$  的一个极限点 ( $0 \leq t_0 \leq +\infty$ )。一个函数族  $\{\omega_t\}_{t \in T}$  定义在  $\mathbb{R}^m$  在  $\mathbb{R}$  中被称为近似恒等式<sup>m</sup>(如  $t \rightarrow t_0$  如果

- (a)  $\omega_t > 0$ ,
- (b)  $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x) dx = 1$ ,
- (c)  $\int_{\|x\| > \delta} \omega_t(x) dx \rightarrow 0$  为每个  $\delta > 0$ 。

备注:

(1) 考虑到方程 (b)，我们可以重申条件 (c) 在以下形式:

$$\int_{\|x\| < \delta} \omega_t(x) dx \rightarrow 1 \text{ 为每个 } \delta > 0$$

因此，对积分的主要贡献是什么  $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x) dx$  来自于一个任意小的零邻域上的积分。这个近似恒等式的性质有时被称为局部化性质。它说，对于  $t$  接近  $t_0$ ， $\omega$  的图表<sub>t</sub>可以显示为“窄而高的驼峰”。这种函数有时被称为  $\delta$ -图像。

(2) 有时是  $\omega$  的阳性条件<sub>t</sub>而条件 a) 被限制性较少的假设所取代

$$(a') \quad \int_{\mathbb{R}^m} |\omega_t(x)| dx \leq C \text{ 为一些 } C, > 0 \text{ 和所有的 } t \in T$$

(和函数  $\omega_t$  在条件下，(c) 被  $|\omega|$  取代<sub>t</sub>)。

由于方程 (b)，条件 (a') 对于非负函数会自动实现。下面获得的许多结果在更一般的情况下仍然有效，但我们不会详述这一点。

#### 1.4.2

我们考虑一些近似恒等式的例子。在所有情况下，所考虑的族都是近似恒等式为  $t \rightarrow +0$ ， $t \in (0, +\infty)$ ，并且假设卷积因子在  $\mathbb{R}$  上局部可和<sup>m</sup>。

示例1 (Steklov平均值) 让  $\omega_t = \frac{1}{v(t)} B(t)$ , 其中  $v(t)$  是  $R$  中的球  $B(t)$  的体积 (勒贝格测量值)  $m$ . 显然, 这个家族是一个近似的身份. 卷积的值  $t$  在某一点上,  $x$  是  $f$  对球  $B(x, t)$  的平均值:

$$(f * \omega_t)(x) = \int_{R^m} f(y) \times \frac{1}{v(t)} B(t)(x - y) dy = \frac{1}{v(t)} \int_{B(x, t)} f(y) dy.$$

这个平均值已经被斯特克洛夫和卷积法系统地使用过了  
 $f_t = f * \omega_t$  被称为  $f$  的斯特克洛夫平均值. 如果函数是连续的, 则它们是连续的

本地可求和. 事实上, 假设  $\|x - x_0\| < 1$ . 对于这样的  $x$ , 是对称的  
 差分  $e_x$  球的数量  $0$  和  $B(x, t)$  位于球  $B(x_0, 1 + t)$ . 自从  
 函数  $f$  在  $B$  上是可求和的  $0, 1 + t$ , 和  $\lambda(e_x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow x_0$ , 它如下  
 从积分的绝对连续性出发

$$|f_t(x) - f_t(x_0)| \leq \frac{1}{v(t)} \int_{B(x_0, 1+t)} |f(y)| dy \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

例子2上面考虑的例子符合一个允许构造不同的近似恒等式的一般方案. 该方案如下.

设  $\psi$  是  $R$  上的一个非负可和函数  $m$ , 然后让

$$C = \int_{R^m} \psi(x) dx > 0$$

我们把

$$\omega_t(x) = \psi \frac{1}{C t^m} \frac{x}{t} (x \in R^m)$$

家族  $\{\omega_t\}_{t>0}$  是  $t \rightarrow 0$  的近似恒等式. 近似恒等式定义中的条件 (a) 明显得到了满足, 而条件 (b) 有效的事实可以通过变量  $y = x/t$  的变化来验证:

$$\int_{R^m} \omega_t(x) dx = \frac{1}{C} \int_{R^m} \psi(y) dy = 1$$

同时, 条件 (c) 也被满足了, 因为我们有了

$$\int_{\|x\| < \delta} \omega_t(x) dx = \frac{1}{C} \int_{\|y\| < \delta/t} \psi(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

对于每个  $\delta > 0$ .

在实施例1中, 球  $B(1)$  的特征函数起到了  $\psi$  的作用.

在  $\psi$  是  $C$  类的函数的情况下, 使用由上述方法得到的近似恒等式特别方便  $\infty$  而它的支持就在于单位球上. 这种近似恒等式首先被索波列夫系统地使用, 我们称之为索波列夫近似恒等式.



### 1.4.3

现在我们陈述关于近似恒等式的主要结果。

定理设  $f$  是  $\mathbb{R}^m$  上的一个有界可测函数，让  $\{\omega_t\}_{t \in T}$  是一个近似的恒等式， $f_t = f * \omega_t$ 。然后

(1) 如果极限  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在，并且对于一点  $x_0$  在  $\mathbb{R}^m$ ，  
然后  $f_t(x_0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} L$

(2) 如果  $f \in C^k(\mathbb{R}^m)$ ，然后  $f_t \rightarrow f$  对每个有界集。  $t \rightarrow 0$   
根据定义证明

$$f_t(x_0) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_0 - y) \omega_t(y) dy$$

乘方程

$$1 = \int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y) dy$$

用  $L$  减去前一个得到的方程，我们得到

$$f_t(x_0) - L = \int_{\mathbb{R}^m} (f(x_0 - y) - L) \omega_t(y) dy$$

我们证明了这个关系的右侧趋于零。根据假设，我们到处都有  $|f| \leq C$ 。因此，不等式

$$\begin{aligned} |f_t(x_0) - L| &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy = \int_{\|y\| < \delta} |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy + \int_{\|y\| > \delta} |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy \\ &\leq \sup_{0 < \|z - x_0\| < \delta} |f(z) - L| \int_{\|y\| < \delta} \omega_t(y) dy + \int_{\|y\| > \delta} |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy \end{aligned} \quad (1)$$

适用于每个  $\delta > 0$ 。因为  $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y) dy = 1$ ，这样

$$|f_t(x_0) - L| \leq \sup_{0 < \|z - x_0\| < \delta} |f(z) - L| + 2C \int_{\|y\| > \delta} \omega_t(y) dy$$

现在，我们可以通过适当的  $\delta$  选择使不等式右边的第一个和任意小，然后，固定  $\delta$ ，我们可以通过条件 (c) 使第二个和任意小。

如果我们替换  $x$ ，对该定理的第二个论断的证明将重复第一个命题的证明。通过  $x$ ， $L$  和  $f(x)$ ，并考虑到，对于每个有界集  $E$ ，我们可以为所有的  $x \in E$  选择相同的  $\delta$ ，因为  $f$  在每个有界集上都是一致连续的。

从定理的证明中可以看出，如果  $f$  在整个空间上是一致连续的，那么  $f_t$  上的二阶导数  $f''_t$ 。

$t \rightarrow 0$

如果  $g$  是一个在零处连续的有界函数，那么

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(y) \omega_t(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow t_0} g(0)$$

证明这是该定理陈述的一个特殊情况

$x_0=0$ 、 $f(x)=g(-x)$  和  $L=g(0)$ 。  
这个推论强化了我们引入近似恒等式的动机。由此从推论得出，措施  $v_t$  密度  $\omega_t$  收敛于测度  $\delta_0$  由集中在零的单位负荷产生，对于每个有界连续函数  $g$ ，我们都有

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) dv_t \xrightarrow{t \rightarrow t_0} g(0) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\delta_0(x)$$

如果我们也假设是  $\omega_t$  是具有紧凑支持收缩到零的函数，那么这个语句对每个（可能是无界的）连续函数都有效。

#### 1.4.4

摘要考虑了近似恒等式的一个重要应用，并证明了维尔斯特拉斯著名的近似定理，即在闭有界区间上的每个连续函数都可以用一个多项式逼近。我们在这里使用的证明方法是，我们首先用一些“好的”函数的卷积，用小误差替换给定的函数，然后构造一个卷积的多项式近似。这种方法同样适用于一个变量的函数和多个变量的函数。

在维尔斯特拉斯之后，我们将考虑一个给定的函数和该形式的函数的卷积

$$W_t(x) = e^{-\frac{1}{2} \frac{|x|^2}{t}} \quad (x \in \mathbb{R}^m, t > 0)$$

这个族与  $t \rightarrow +0$  近似相同。近似恒等式定义的条件 (a)；利用多维欧拉积分的值，我们可以很容易地验证条件 (b)。我们将对本地化属性的验证留给了读者。

定理1（维尔斯特拉斯近似定理）让  $f \in C(\mathbb{R}^m)$ 。那么对于任何  $R > 0$  和  $\varepsilon > 0$  在  $m$  个变量中存在一个多项式  $P$

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ 为 } (R) \text{ 中的所有 } x。$$

$\bar{B}$  证明首先，我们假设  $f$  的支持是一个位于球  $\equiv (R)$  中的紧的集合（否则我们可以增加半径  $R$ ）。我们把  $f_t = f * W_t$ 。如在对定理1.4.3的注释中所指出的， $f_t \rightarrow f$  as  $t \rightarrow 0$ 。我们固定了这样一个  $t$

$$|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon \text{ 在 } (R) \text{ 中每个 } x \text{ 的。}$$

(2)

现在我们展示了每个函数  $f_t$  可以用球中的一个多项式均匀地逼近。因为  $f$  在外面是零，所以我们得到了  $\bar{B}$

$$f_t(x) = \int_{B(R)} f(y) W_t(x-y) dy$$

我们假设  $x \in \bar{B}$ ，这意味着在最后一个积分中的  $x-y \in B(2R)$ 。下一个想法是为这个函数找到一个好的多项式近似  $W_t$  在球  $B(2R)$  中，并使用一个函数的卷积与紧支持和一个多项式也是一个多项式。验证最后一个

断言时，我们考虑一个任意的多项式  $Q$ 。很明显， $Q(x-y)$  也是  $x$  坐标上的多项式系数依赖于  $y$ 。再乘以具有紧支持的函数  $f(y)$ ，得到系数成为可求和的。对它们进行积分，我们就会得到一定的数字，因此，卷积是一个多项式。

现在我们把注意力转向近似的函数  $W_t$  由多项式。通过泰勒公式（与余数的拉格朗日形式），我们得到

$$e^{-u} = T_{n-1}(u) + r_n(u) \quad \text{我们这里 } T_{n-1} \text{ 是一个 } n-1 \text{ 次多项式}$$

$$\frac{1}{n!} e^{-\theta u} (-u)^n, 0 < \theta < 1. \quad \text{它满足 } |r_n(u)| \leq u^n / n! \text{ 对于 } u \geq 0$$

由  $W_t$  的定义，我们获得

$$W_t(x) = T_{n-1}\left(\frac{\|x\|^2}{t^2}\right) + r_n\left(\frac{\|x\|^2}{t^2}\right) = P_n(x) + \rho_n(x),$$

其中  $P_n$  是一个多项式 (如和多项式的组成  $T_{n-1}$  和  $\frac{\|x\|^2}{t^2}$ ) 和  $\rho_n$  满足估计

$$|\rho_n(x)| = \left| r_n\left(\frac{\|x\|^2}{t^2}\right) \right| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\|x\|^2}{t^2}\right)^n \leq \frac{1}{n!} \frac{4\pi R^{2n}}{t^2} \quad (3)$$

适用于  $\|x\| \leq 2R$ 。由于  $f(x) = 0$  在球外，我们可以看到  $f * \rho$  的卷积满足不等式

$$|(f * \rho_n)(x)| = \int_{B(R)} f(y) \rho_n(x-y) dy \leq \int_{B(R)} |f(y)| \rho_n(x-y) dy$$

对于  $\|x\| \leq R$ ，我们可以用 (3) 来估计在右边的积分高于不等式。我们得到

$$|(f * \rho_n)(x)| \leq M \int_{B(R)} \frac{1}{t^{m_n}} \frac{4\pi R^{2n}}{t^2}$$

式中， $v(R)$  是球  $B(R)$  的  $m$  维体积。现在我们固定一个  $n$ ，使最后一个不等式的右边小于  $\varepsilon$ 。然后我们显然得到了

$$|f_t(x) - (f * P_n)(x)| = |(f * \rho_n)(x)| < \varepsilon$$

(4)

适用于  $\|x\| \leq R$ 。这个不等式和(2)一起表明,  $|f(x) - (f * P_n)(x)| < 2\varepsilon$   $x \in B$ 。这就完成了对一个紧函数定理的证明

支持, 因为, 如上所述, 卷积  $f * P_n$  是一个多项式。

在一般情况下, 只要用连续函数  $f$  代替  $f$  就足够了。它有一个紧致的支撑点, 并且与球中的  $f$  重合。 $B$  构造一个近似于  $f$  的多项式  $P$  在  $B$  中, 我们也找到了  $f$  的近似。

推论1 设  $f$  是紧集  $K \subset \mathbb{R}$  上的连续函数。

然后对于每一个  $\varepsilon > 0$  都存在一个多项式  $P$ , 使得  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$

对于所有的

用提策-乌里索恩定理得到的证明(每个函数  $f_0$  在可度量空间  $X$  的闭子集上的连续数是来自  $C(X)$  的函数的限制。如果  $|f_0| \leq C$ , 我们可以假设扩展函数也满足这个不等式。), 在空间  $\mathbb{R}$  的一个闭子集上的每个连续函数  $f$  可以推广到定义在整个空间上的连续函数。因此, 假设  $R$  很大到  $K \subset B(R)$ , 那么将该定理应用到扩展函数上就足够了。

我们将提到维尔斯特拉斯近似定理的另一个结果。

推论2 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的一个连续函数。假设  $f$  有一个紧致的支持。然后, 对于每一个  $\varepsilon > 0$ , 都存在一个无限可微的函数  $g$ , 它具有一个紧致的支持, 使得所有  $x \in \mathbb{R}$  的

$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  证明假设  $f$  在球  $B(R)$  外消失, 并设  $P$  是球  $B(R+1)$  中的一个多项式近似  $f$ , 精度为  $\varepsilon$ 。如果我们把  $P$  乘以  $C$  类的函数  $\phi$ , 我们得到所需的函数  $g^\infty$  这样,  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi(x) = 1$  对于  $x \in B(R)$ , 和  $\phi$  消失在  $B(R+1)$  之外。

如果推论2中的函数  $f$  是非负的, 那么我们可以假设函数  $g$  也是非负的。

事实上, 否则, 函数  $g$  可以被  $\phi \cdot (g + \varepsilon)$  取代, 它显然是非负的, 并且近似为  $2\varepsilon$ 。

推广定理1, 证明了一个光滑函数及其导数可以用一个多项式逼近。在下一个定理中, 字母  $k$  表示一个多索引 ( $k \in \mathbb{Z}_+^m$ ), 和符号  $D^k f$ , 其中  $k = (k_1, \dots, k_m)$ , 表示阶  $|k| = k_1 + \dots + k_m$  的导数。这样就可以对第  $j$  个坐标进行微分  $j$  乘以

**定理2** 设  $f \in C^r(\mathbb{R}^m)$  ( $r \in \mathbb{N}$ )。然后, 对于所有的  $R > 0$  和  $\varepsilon > 0$ , 在  $m$  个变量中存在一个多项式  $P$

$$|D^k f(x) - D^k P(x)| < \varepsilon \text{ 为所有 } x \text{ 在 } B(R) \text{ 和所有 } k, 0 \leq |k| \leq r.$$

如定理1中的证明, 我们可以不失一般性地假设

附录  $(f) \subset B(R)$ 。因为, 根据卷积的性质, 我们有  $D^k(f_t) = (D^k f) * w_t$ , 我们可以选择参数  $t > 0$ , 使  $D$  的不等式(2)和类似的不等式  $D^k f$  对  $|k| \leq r$  和所有  $x \in \mathbb{R}$  都有效。我们把  $M = \max_{|k| \leq r} |D^k f(x)|$ 。

然后, 对于 $n$ 的适当选择, 不等式(4)不仅对函数 $f$ 有效, 而且对其包含 $r$ 阶的所有导数都有效。

#### 1.4.5

本文基于周期函数卷积的概念, 定义了一个周期近似恒等式, 并证明了用三角多项式近似的维尔斯特拉斯定理。我们可以很容易地通过收缩来改变一个时期。因此, 我们可以在毫不丧失一般性的情况下假设, 本节中所考虑的所有函数对于每个变量都是 $2\pi$ -周期的(只有这样的函数将被称为周期的)。

对于周期函数的情况, 有一个近似恒等式的定义

从教派。1.4.1可以很容易地修改如下(下面,  $Q = [-\pi, \pi]^m$ ): a 周期函数族 $\{\omega_t\}_{t \in T}$ 它被称为周期近似恒等式吗 (如 $t \rightarrow t_0$ 如果

- (a)  $\omega_t > 0$ ,
- (b)  $\int_Q \omega_t(x) dx = 1$ ,
- (c)  $\int_{Q/B(6)} \omega_t \xrightarrow{t \rightarrow t_0} (x)$  每个  $\delta \in (0, \pi)$ 。

我们还介绍了以下本地化属性的强版本:

$$(c') \quad \omega_t(x) \text{ 每个 } \delta \in (0, \pi) \text{ 当 } t \rightarrow t_0$$

几乎完全重复了定理1.4.3的证明, 验证了周期卷积 $f$ 的以下近似性质 $t = f * \omega_t$ .

假设一个周期函数 $f$ 在立方体上可测量并有界  
Q. 然后

(a), 如果限制为 $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 并且在点 $x$ 处是有限的,  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ , 然后 $f_t(x_0) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} L$

(b) 如果 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ , 然后 $f_t$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上的二阶导数

备注: 如果一个近似的恒等式满足条件(c'), 则断言(a)对于 $Q$ 上的每个可求和的周期函数仍然有效。为了证明, 我们用不等式代替不等式(1)

$$\begin{aligned} |f_t(x_0) - L| &\leq \int_Q |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy = \int_{B(6)} \dots \\ &+ \int_{Q/B(6)} \dots \leq \sup_{y \in B(6)} \int_Q |f(x_0 - y) - L| \omega_t(y) dy, \end{aligned}$$

然后用定理1.4.3的证明: 首先, 选择 $\delta$ , 使不等式右侧的第一个求和变小, 然后借助条件(c'使第二个求和变小)。

基于最后一个定理, 我们现在得到了维尔斯特拉斯近似定理的一个周期版本。因为它是一个可和函数的卷积

对于一个三角多项式也是一个三角多项式，我们就足以构造一个由这些多项式组成的近似恒等式。

我们从一维的情况开始，并考虑三角多项式

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{c_n} \cos^{2n} \frac{x}{2}, \quad \text{where } c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2} dx.$$

where the coefficient  $c_n$  is such that  $\int_{-\pi}^{\pi} \Theta_n(x) dx = 1$ , i.e.,  $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2} dx$ . These integrals were calculated previously, but in what follows it is important that they tend to zero, and not too fast,

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2} dx > \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2} dx = \frac{4}{2n+1}.$$

由此可见，函数的序列为  $\Theta_n$  具有很强的定位特性 (见本节开始时所述)，

$$\sup_{0 < |x| < \pi} \Theta_n(x) \leq \cos^{2n} \frac{\delta}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ 代表每个 } \delta \in (0, \pi).$$

利用周期近似恒等式  $\Theta_n$  对于上面构造的一个变量，我们可以很容易地构造它的多维对应物，

$$\omega_n(x) = \Theta_n(x_1) \cdots \Theta_n(x_m) \text{ 为 } x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

该三角多项式序列满足条件 (a)–(c)，因此，该定理对具有  $T$ 、 $\infty$ 、 $N$  和  $T$  的序列是有效的  $0 < \delta < \pi$ 。自  $f_n = f * \omega_n$  是一个三角多项式，我们得到了维尔斯特拉斯近似定理的一个周期版本。

**推论 (维尔斯特拉斯)** 设  $f$  到处都是连续周期函数。然后在  $\mathbb{R}$  上存在一个均匀收敛于  $f$  的三角多项式序列  $\{f_n\}$ 。

## 2 表面积分

在这一章中，我们的主要目的是给一个光滑表面的面积的概念一个确切的定义，并发展一种计算它的方法。毫无疑问，每个人都对一个人在日常生活中使用的曲面的面积有一个直观的概念（例如，当一个人估计油漆的消耗量时）。同时，与平面图中的类似问题相比，对曲面面积的评价是一个相当困难的问题。只有在圆锥面和圆柱面的情况下，才能用基本的方法将第一个问题简化为第二个问题：只要“展开”它们就足够了。在学校里，人们会通过一些不明显的论证来计算一个球体或球体的各个部分的面积。

在我们继续讨论问题的计算方面之前，有必要克服主要的困难，即定义一个曲面的面积。

我们不将自己限制在二维曲面上，所以在接下来的内容中，我们讨论了在任意维的光滑流形上的测度（表面积）的构造。为此目的，我们需要从光滑映射的理论中得到一些结果。为方便读者，所需的材料收集在本章的辅助第一部分。

### . 1.2 辅助概念

在这里，我们提醒读者注意光滑流形理论的主要概念和事实，并确定相关的符号和术语。

我们用符号  $C^r(0, \mathbb{R}^m)$  ( $1 \leq r \leq +\infty$ ) 在集合  $0 \subset \mathbb{R}$  上定义的  $r$  次连续可微映射的集合  $k$ ，它总是被假定是开放的，取  $\mathbb{R}$  中的值  $m$ 。我们叫  $C^1$ -绘制平滑地图。如果我们讨论一个在任意（非开放）集合上平滑的映射，我们总是意味着它是定义的，并且在这个集合的某个邻域上连续可微的。e.，在一个更宽的空地上。

我们用  $d_a \Phi$  表示  $a$  地图的差分  $\Phi \in C^1(0, \mathbb{R}^m)$  在一个点  $a \in 0$ ，并由  $\Phi^{-1}(a)$  对应的矩阵（在空间  $\mathbb{R}$  的规范基中  $k$  和  $\mathbb{R}^m$ ），i. e.，雅可比矩阵。这个  $m \times k$  矩阵（有  $m$  行和  $k$  列）是由众所周知的偏导数形成的  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}$  ( $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq k$ ) 的坐标函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  在地图上的  $\Phi$ 。如果  $m = k$ ，那么雅可比矩阵是平方。它的行列式  $\det$ （称为映射  $\Phi$  的雅可比矩阵）也记为。  $\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i} \right\| \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(t_1, \dots, t_k)}$

#### 2.1.1

我们将介绍一个在以下内容中至关重要的概念。

**定义一个集合  $M$ ,  $M \subset \mathbb{R}^m$** ，称为简单的  $k$  维流形

它与集合  $\mathbb{R}$  的一个开子集  $0$  是同态的  $k$  ( $k \leq m$ )。同源性

$\xrightarrow{0} \text{phism } \Phi: 0 \rightarrow M$  被称为流形  $M$  的参数化。如果对某些

$r = 1, 2, \dots, +\infty$ ,  $\Phi \in C^r(0, \mathbb{R}^m)$  和  $\text{rank } d_a \Phi = k$  在每一个点上都是一个

参数化 $\Phi$ 据说是 $C$ 类的平滑化<sup>r</sup>. 具有这种参数化的简单流形也称为光滑(类<sup>r</sup>) .

我们强调, 根据定义, 参数化的域总是一个开集。

由于一个点 $p = \Phi(t)$ 在一个流形上的位置是由参数 $t$ 唯一决定的, 所以它的坐标 $t_1, \dots, t_k$ 通常被称为点 $p$ 的曲线坐标。在特殊情况下, 它们通常有一个简单的几何意义, 从而简化了问题的解决方案。

一个 $k$ 维流形的最简单的例子是一个 $k$ 维向量空间。例如, 它的参数化可以通过以下方法得到。修复一个任意的基,  $\tau_1, \dots, \tau_k$ 在子空间和集合中

$$\Phi(t) = t_1 \tau_1 + \dots + t_k \tau_k \quad (t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k).$$

显然, 地图 $\Phi$ 满足了所有的要求。子空间中一个向量的“曲线坐标”只是它在基 $\tau$ 中的坐标 $t_1, \dots, t_k$ .

**定义(光滑流形的第一个定义)** 一个集合 $M, M \subset \mathbb{R}^m$ , 被称为 $C$ 类的 $k$ 维流形<sup>r</sup>如果 $M$ 中的每个点 $p$ 都有一个邻域 $U$ , 这样交点 $U \cap M$ 是 $C$ 类 $\cap$ 的一个简单的 $k$ 维流形<sup>r</sup>. 它的参数化称为流形 $M$ 在点 $p$ 附近的局部参数化。

$C$ 类的一个 $k$ 维流形<sup>0</sup>用类似的方式定义: 它是一个集合 $M$ , 局部是一个简单的 $k$ 维流形(没有任何光滑条件)。它的每个点都有一个邻域 $U$ , 这样交点 $U \cap M$ 是一个简单的 $\cap$ 维流形。数 $k$ 称为流形 $M$ 的维数, 用符号 $\dim M$ 表示。这个

差分模称为流形的余维数。一个流形  
余数维数 $l$ 被称为曲面。

与局部参数化相反, 一个简单流形的参数化也被称为全局参数化。

如果参数 $r > 1$ 的值不重要(在大多数情况下, 足以采取 $r = 1$ ), 我们称集合 $M$ 光滑 $k$ 维流形, 或光滑流形, 有时只是流形否则流形的特征明确表示。

如果一个点 $p$ 属于一个流形 $M \subset \mathbb{R}^m$ , 然后通过它的 $m$ 邻域, 或相对邻域, 我们表示 $R$ 中 $p$ 的邻域的交集 $m$ 与歧管 $M$ . 一起工作。很明显, 流形上的每一个点都有一个 $M$ 个邻域的基底, 它的闭包在 $M$ 个邻域中。坐标邻域是一个相对邻域, 它是一个简单的流形, i. e., 它允许进行参数化(因此, 可以引入曲线坐标)。

在简单而重要的情况下, 我们会遇到“几乎光滑”流形的例子(例如, 考虑一个正方形, 或一个立方体的边界, 等等)。因此, 我们将光滑流形的定义扩展如下: 分段光滑 $k$ 维流形是光滑 $k$ 维流形(可能不连通)和一个零 $k$ 维Hausdorff测度的并集。它



由此可见，根据这个定义，多面体的边界是分段光滑的表面。

正式地说，当我们考虑 $R$ 中的一个光滑流形 $M$ ，我们不排除 $\dim M$ 等于 $m$ 的可能性。在这种情况下，由定义可知， $M$ 只是 $R$ 的一个开子集 $M$ 。因此，在下面的内容中，我们只考虑其维数小于包络空间的维数的流形，除非另有说明。同时，我们承认 $\dim M = 1$ 。在这种情况下，我们使用术语“曲线”而不是术语“流形”。一个连通的简单曲线也被称为简单弧。

光滑流形的另一个定义将会很有用。

**定义（光滑流形的第二个定义）** 一个集合 $M \subset R^m$

被称为 $C$ 类的 $k$ 维（ $1 \leq k < m$ ）流形 $M$ 如果每个点

$p \in M$ 存在一个邻域 $U$ 和函数 $F_1, \dots, F_{m-k} : U \rightarrow R$

将其定义为：

(1)  $x \in M \cap U$ 当且仅当

$$F_1(x) = 0, \quad \dots, \quad F_{m-k}(x) = 0 \quad (5)$$

和

(2) 向量

$$\text{grad} F_1(p), \quad \dots, \quad \text{grad} F_{m-k}(p) \quad (6)$$

是线性独立的。

特别地，一个光滑曲面（一个余维数为1的流形）在局部上是一些具有非零梯度的光滑函数的水平集。从后一个定义中可以看出，局部每个流形都位于某个曲面上。

## 2.1.2

与光滑流形的概念相关的是切向量和切空间的重要概念。回想一下，有一个路径（在 $R^m$ 中）是从某个分段到 $R$ 的任何连续映射 $\gamma$ 。如果一个路径的坐标函数，那么它被称为平滑

是光滑的，如果它被定义在一个并集上，则是分段光滑的 $\bigcup_{j=0}^{n-1} [c_j, c_{j+1}]$ 以及它对分段的限制 $\gamma|_{[c_j, c_{j+1}]}$ 是光滑的路径。

**定义** 设 $M$ 是 $R^m$ 中的一个光滑流形。一个载体 $\tau \in R^m$ 如果存在一个平滑路径 $\gamma$ ， $p \in M$ ，则称为一个切向量到 $M$ ： $[a, b] \rightarrow R^m$ 这样， $\gamma(t) \in M$ 对于 $t \in [a, b]$ ，而对于一些 $c \in (a, b)$ ，我们有 $\gamma(c) = p$ 和 $\gamma'(c) = \tau$ 。

如果一个点的某个邻域位于光滑函数 $F$ 的水平集中，那么 $F(\gamma(t)) \equiv \text{常量}$ 接近 $c$ 。因此， $\text{Subgrad} F(p), \gamma'(c) = 0$ ，i. e.，点 $p$ 处的切向量与向量 $\text{grad} F(p)$ 正交。

设 $\Phi$ 是流形 $M$ 在一个点 $p = \Phi(a)$ 附近的局部参数化“冻结”一个点的所有坐标，即 $a = (a_1, \dots, a_k)$ ，除了第 $j$ 个，并使后者在 $a$ 附近发生变化 $j$ ，我们得到了一条参数化通过点 $p$ 的曲线的路径。这条曲线被称为坐标线。在对应的点 $p$ 处与此曲线相切的向量

对上述参数化的是矩阵 $\Phi$ 的第 $j$ 列 $\tau_j(a)$ ；我们用 $D$ 来表示它 $d_a\Phi(a)$ 或 $\tau_j = \tau_j(a)$ 。因为等级 $\text{rank } d_a\Phi = k$ ，向量 $\tau_1, \dots, \tau_k$ 是线性独立的。很明显， $\tau_j(a) = d_a\Phi(e_j)$  (其中的向量为 $e_1, \dots, e_k$ 在 $R$ 中的规范基 $^k$ )。我们称它们为与参数化 $\Phi$ 相关的标准切向量。在 $p$ 点上与流形 $M$ 相切的所有向量的集合称为相切线空间，用 $T_p(M)$ 或 $T_p$ 简称。请注意，这个术语需要验证，也就是说，必须检查该 $T_p$ 实际上是一个向量空间。

**Lemma**  $T_p$ 是空间 $R$ 的一个 $k$ 维子空间 $^m$ 。

在 $k = m-1$ 的情况下，我们也称之为子空间 $T_p$ 切线平面。  
证明假设在点 $p$ 附近，流形 $M$ 由方程给出。(1) 并且向量(2)是线性无关的。

我们检查了它，以及任意两个向量 $\tau_1, \tau_2$ ，集合 $T_p$ 包含他们的线性组合 $\tau = \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2$ 。我们可以假设 $\tau$ 为0，否则就是它只要选择一条不变的路径就足够了。增强向量系统(2)，即

与向量 $\tau$ 正交，与向量 $h$ 相交 $1, \dots, h_{k-1}$ 到正交的基础对 $\tau$ 的补充，我们考虑方程组

$$F_1(x) = 0, \dots, F_{m-k}(x) = 0, \quad \langle x - p, h_1 \rangle = 0, \dots, \langle x - p, h_{k-1} \rangle = 0 \quad (7)$$

根据光滑流形的第二个定义，该系统在点 $p$ 附近定义了一个光滑的一维流形。e.，一条平滑的曲线，显然位于 $M$ 中，并穿过 $p$ 。  
设 $\gamma$ 是这个曲线在 $p$ 点附近的一些参数化。不失一般性，我们可以假设 $p = \gamma(0)$ 。然后是非零值！“载体 $\gamma$ ” $\gamma'(0)$ 与系统(3)中出现的所有函数的梯度（在 $p$ 点）正交。因此，它与向量 $\tau$ 成正比。  
为了适当选择系数 $\theta$ ，与路径 $\gamma(t) = \gamma(\theta t)$   $|t| \leq \delta$ 在 $t = 0$ 处的向量与 $\tau$ 重合。e.， $\tau \in T_p$ 。

因此，我们已经证明了 $T_p$ 是空间 $R$ 的一个向量子空间 $^m$ 。它的维数不超过 $k$ ，因为它中的所有向量都与系统(2)的向量正交。此外，它还包含了 $k$ 个与坐标线相切的线性无关的向量。因此， $\dim T_p = k$ 。□

如果表面 $M$ 由点 $p$ 和 $\text{grad} F(p) \neq 0$ 附近的方程 $F(x) = 0$ 定义，那么，如引理前面所述，在 $p$ 点上与它相切的向量与向量 $\text{grad} F(p)$ 正交。因此，在 $p$ 点上与 $M$ 的切线空间是由与 $\text{grad} F(p)$ 正交的向量组成的平面。e.，它由方程 $x, \text{grad} F(p) = 0$ 定义。

我们注意到，由于与流形 $M$ 的参数化 $\Phi$ 对应的正则切向量是线性无关的，因此它们在切线空间中形成了一个基。映射 $d$ 的线性度 $d_a\Phi : R^k \rightarrow R^m$ 意味着对于每个向量 $t = (t_1, \dots, t_k)$ 在 $R^k$ 平等

$$d_a\Phi(t) = \sum_{j=1}^k t_j \tau_j$$

保存因此，参数化映射的微分值为 $R^k$ 同构地放在切线空间上。

有时在几何上考虑仿射切线空间 $L$ 更清晰 $p$ 而不是切线空间 $T_p$ ；这是 $T$ 的转变 $p$ 通过向量 $p: L_p =$

$p + T_p$ . 自 $p + d\Phi$ 以来 $a(t - a) \in L_p$ ，其中 $p = \Phi(a)$ ，和

$$\Phi(t) = p + d\Phi_a(-) + (// - //) \text{ 作为 } \rightarrow,$$

点 $x = \Phi(t)$ 满足该关系

$$\text{Dist}(x, L_p) = \text{dist}(\Phi(t), L_p) \leq \| \Phi(t) - (p + d\Phi_a(t - a)) \| \\ = o(\|t - a\|) \text{ 作为 } t \rightarrow a.$$

由来自教派的推论1得出的结论。2.1.4，地图 $\Phi^{-1}$ 满足利普希茨条件

$$\|t - a\| = \|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)\| \leq C\|x - p\|$$

在 $p$ 点的附近，因此

$$\text{Dist}(x, L_p) = o(\|x - p\|) \text{ 作为 } x \rightarrow p, x \in M$$

因此，当我们替换子空间 $L$ 中的点时 $p$ 对于流形中的点，相对误差趋于零，i. e., 流形 $M$ 在小部分“几乎是平的”。后一种关系是我们将切空间作为流形“紧拟”空间的直观思想的形式化。可以证明仿射切空间的这种性质唯一地决定了它。

### 2.1.3

我们给出一些例子。

例子1曲面的一个重要例子是定义在空间 $R$ 的开放子集上的光滑函数 $f$ 的图 $m - 1$ 。根据图的定义，它是集合

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in R^m \mid (x_1, \dots, x_{m-1}) \in O, y = f(x_1, \dots, x_{m-1})\}$$

地图

$$O \ni x = (x_1, \dots, x_{m-1})' \rightarrow \Phi(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}, f(x))$$

显然，这是一个图的全局参数化。我们称之为参数化规范。

函数 $f$ 的图可以被认为是由

函数 $F(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = y - f(x_1, \dots, x_{m-1})$ ，定义在集合 $O$ 上 $\setminus = O \times R$ . 我们注意到在集合 $O$ 中到处都有 $\text{grad} F|_O$ 特别是在 $\Gamma_f$ . 从引理2.1.2证明后的注释，仿射切

平面在点 $p = (a_1, \dots, a_{m-1}, f(a))$ ，其中有一个 $= (a_1, \dots, a_{m-1}) \in O$ ，是由方程给出

$$y-f(a)=\text{grad} f(a), x-a = \sum_{j=1}^{m-1} f'_{x_j}(a) (x_j - a_j)$$

一个可以通过改变坐标的顺序（使“依赖的”坐标不会出现在最后一个位置）从图中得到的集合也被称为图，或者，更准确地说，是一个更广泛意义上的图。显然，一套  $M \subset \mathbb{R}^m$  这样， $M \cap U$  是一个图（在这个广义的意义上），它的每个点的某个邻域  $U$  是一个曲面。

示例2，请考虑这个球体

$$S(R) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2\}$$

在  $\mathbb{R}^m$  我们检查它是否是一个表面。对于每一点， $p = (p_1, \dots, p_m)$ ，在  $S(R)$  中，至少有一个坐标是非零的。为了明确起见，假设  $p_m > 0$ 。那么点  $p$  就属于上半球  $S_+(R) =$

$$\{x \in S(R) \mid x_m > 0\}$$

这就是函数  $f(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}) =$

$\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2}$  在空间  $\mathbb{R}$  的一个球中定义的  $m-1$  这个函数为  $C^\infty$ 。因此，上半球的  $S_+(R)$ ，因此所有的球体  $S(R)$ ，都是  $C^\infty$  面

从直观地看，球体没有全局参数化。同时，我们可以很容易地给出一个参数化几乎所有球体的映射。

我们把自己限制在  $\mathbb{R}$  中二维球体的最明显的特殊情况下<sup>3</sup>（见练习5中对一般情况的讨论）。回忆起一个点上的地理坐标、经度  $\phi$  和纬度  $\theta$  地球表面。对于  $\phi \in [-\pi, \pi]$  和  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，我们设置

$$\Phi(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \sin \phi \cos \theta, R \sin \theta) \quad (8)$$

（相应的坐标线是平行线和子午线；东部的

半球对应  $\phi$  的正值，西面对应负值

取值时，北半球由不等式  $\theta > 0$  决定，而

南半球对应于  $\theta < 0$ ）。在给定的例子中，我们

处理一个相当典型的情况。正式来说，映射  $\Phi$  是定义的

对于任何  $\phi$  和  $\theta$ ，但我们只感兴趣是它对某些子集的限制

这很便于我们的考虑。很明显， $\Phi$  是一个无限的

可微映射，但它不是双射自  $\Phi(\phi, \pm \frac{\pi}{2})$  针对所有产品的  $(0, 0, \pm R)$

$\phi$  值（没有自然的方法将经度归为北或南

柱子此外，对于任何  $\theta$ ，我们都失去了  $\phi = \pm \pi$  的注入性，因为角度为  $\phi = \pi$

和  $\phi = -\pi$  对应于球体上的同一个点。这些值的

参数  $\phi$  对应于地球上的子午线，称为国际

日期线，当船舶或飞机向东或向西穿过它时，日期发生变化。删除它（连同两极一

起），我们得到了“切割球体”，i.e.,  $C^\infty$ -在一个开放矩形  $|\phi| < \pi, |\theta| <$

上定义的曲面。 $\frac{\pi}{2}$  条件  $\text{rank} d\Phi = 2$ , i.e., 切向量的线性独立性

$$\tau_1 = D_1 \Phi(\phi, \theta) = (-R \sin \phi \cos \theta, R \cos \phi \cos \theta, 0)$$

$$\tau_2 = D_2 \Phi(\phi, \theta) = (-R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta)$$

是它们的正交性( $\tau$ 的结果吗1是否与平行线和 $\tau$ 相切2到一个子午线), 因为  
 $\|\tau_1\| = R \cos \theta$ , 0和 $\|\tau_2\| = R$ .

正如我们稍后将看到的, 当一个人在一个球体上积分时, 删除一个子午线是不必要的。

还应注意的是, 在分析中, 角度为 $\theta$ 在半径向量和OZ轴的正方向之间经常被用来代替纬度。它在区间 $[0, \pi]$ 上变化, 与纬度 $\theta$ 通过关系 $\theta + \theta = \pi/2$ 。

例子3考虑环面, 即 $R$ 中的曲面<sup>3</sup>通过旋转

圆圈 $(R-x)^2 + z^2 = r^2$  ( $0 < r < R$ ) 绕轴线奥兹. 可以很容易地  
 可见, 环面可以用方程 $(R-x)^2 + y^2 + z^2 = r^2$  不

环面的全局参数化存在(我们不讨论这一事实的证明)。一个点在这个表面上的位置是由两个角度 $\phi$ 和 $\theta$ 决定的(类似于球体上的经度和纬度的角度)是由这些关系决定的  $x = (R + r \cos \theta) \cos \phi$ ,  $y = (R + r \cos \theta) \sin \phi$ ,  $z = r \sin \theta$

$\sin \theta$  无限可微映射(定义在 $R$ 中<sup>2</sup>)

$$\Phi(\phi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

绘制正方形 $[-\pi, \pi]^2$ 在环面上。它不是双射的, 由于 $2\pi$ -  
 三角函数的周期性。删除所对应的两个圆圈  
 角 $\phi = \pm \pi$ 和 $\theta = \pm \pi$ , 我们得到了“有两个切割的环面”, 一个表面  
 $C^\infty$ 类, 其中 $\Phi$ 对正方形的限制 $(-\pi, \pi)^2$ 是一个全球性的  
 参数化条件 $\text{rank } d\Phi \equiv 2$ 被满足, 因为切线  
 向量

$$\tau_1 = D_1 \Phi(\phi, \theta) = (-(R + r \cos \theta) \sin \phi, (R + r \cos \theta) \cos \phi, 0), \quad \tau_2 = D_2 \Phi(\phi, \theta) = (-r \cos \phi \sin \theta, -r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

是线性无关的: 它们是正交的和 $\|\tau_1\| = R + r \cos \theta > 0$ ,  $\|\tau_2\| = r > 0$ .

为了检查不仅有切割的环面, 而且在整个环面, 是一个光滑的表面, 我们需要证明每个点 $p = \Phi(\phi_0, \theta_0)$ 在环面上有一个允许全局参数化的邻域。如果我们改变映射 $\Phi$ 的定义域, 就可以得到这个参数化。我们让读者来检查一下广场

$(\phi_0 - \pi, \phi_0 + \pi) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ 可以被视为这样的一个域。cor  
 环面上 $p$ 点的响应邻域是带有切割的环面  
 沿着圆圈,  $\phi = \phi_0 \pm \pi$ 和 $\theta = \theta_0 \pm \pi$ .

我们注意到, 在 $r = R$ 的极限情况下, 我们旋转了圆 $(R-x)^2 + z^2 = R^2$  围绕 $oz$ 轴。因此得到的集合 $M$ 不是一个光滑的表面

因为没有原点的邻域，那是一个简单的曲面。然而，读者可以检查设置  $M/\{0\}$  是  $C^\infty$  类的光滑表面，所以  $M$  是一个分段光滑的曲面。

示例4考虑一个最小维数的流形，i.e., 曲线。它在任意点附近的参数化是定义在实线区间上的光滑向量函数。它是一个具有非零导数的同胚。很明显，定义在区间上的一个变量的函数图是一条光滑的平面曲线。e.g., 在  $\mathbb{R}^2$  中的一条曲线<sup>2</sup>。

另一条众所周知的曲线是一个圆。为了得到一个更一般的例子，回顾一下，根据光滑流形的第二个定义，具有非零梯度的两个变量的光滑函数的水平集是一个光滑曲线。伯努利的一个例子，一个由点  $(x, y)$  组成的平面集

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0,$$

证明了关于梯度的假设是重要的：这个点

$(0, 0)$ ，其中函数  $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$  的梯度等于零，没有与区间同胚的相对邻域。在原点附近，柠檬酸可以看作是两个图的并集。e.g., “一个自我分割的曲线”。注意，如果我们从这个集合中删除原点，我们将得到一条（断开连接的）平滑曲线。这表明柠檬酸盐是一条分段光滑的曲线。

例5考虑正交  $n \times n$  矩阵的群  $O(n)$ 。我们把它看作是  $n$  的一个子集<sup>2</sup>—维欧几里得空间，我们识别所有  $n$  个矩阵的集合  $U = \{u_{ij}, j=1, \dots, n\}$  与元素  $u_{ij}$ 。这个子集由方程组定义的。

$$\begin{aligned} u_{i,1}^2 + \dots + u_{i,n}^2 &= 1, & 1 \leq i \leq n, \\ u_{i,1}u_{k,1} + \dots + u_{i,n}u_{k,n} &= 0, & 1 \leq i < k \leq n. \end{aligned}$$

函数  $F$  的梯度  $\nabla F(U) = u_{i,1}^2 + \dots + u_{i,n}^2$  和  $\text{Fik}(U) = u_{i,1}u_{k,1} + \dots + u_{i,n}u_{k,n}$  在  $O(n)$  点处的求值值是线性无关的。为了让我们相信这是真的，将这些梯度表示为由  $u$  上的导数组成的矩阵  $i, j$  放置在第  $i$  行和第  $j$  列的交叉处。然后，表示梯度的线性组合的矩阵中的每一行只包含矩阵  $U$  的（成对正交）行的线性组合，从而很容易遵循所需的属性。

因此， $O(n)$  是一个维数为  $n$  的光滑流形<sup>2</sup>—  $n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ 。

把这个地图称为  $U \rightarrow U$  是很自然的， $U$ （或  $U_0$ ） $\rightarrow U(U_0)$ ，其中  $U \in \mathbb{R}^{n^2}$  和  $U_0 \in O(n)$  中的某个元素，左（相应，右）移位

所有矩阵的集合。该位移保持了矩阵之间的欧氏距离

因为，这很容易看到，矩阵  $U$  和  $U$  的欧几里得范数  $\|U - U(U_0)\|$ ，

作为空间  $\mathbb{R}^{n^2}$  的元素，是一样的。因此，在

$O(n)$  是相对于包络引起的  $O(n)$  的等距

$n^2$ -尺寸空间。

#### 2.1.4

在接下来的内容中，一个 $k$ 维流形的参数化是很重要的 $m$ 可以在局部上被看作是对子空间 $R$ 的限制吗 $k$ 定义在空间 $R$ 的开放子空间上的微分同构 $m$ 。更准确地说，我们可以考虑 $R$ 的规范嵌入 $k$ 在 $R^m$ 其中向量 $(x_1, \dots, x_k)$ 在 $R^k$ 是用向量 $(x$ 来标识的吗 $1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ 在 $R^m$ 。那么下面关于参数化扩展到微分同构的陈述是正确的。

引理设 $O$ 是空间 $R$ 的一个开子集 $k$ 而 $a$ 则是 $O$ 中的一个点。对于集合 $\Phi(O) \subset R^m$ 的平滑参数化 $\Phi^m$ ，一个社区 $V \subset R^m$ 该点的 $a = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$ ，在其上定义一个微分 $F$ ，使 $\Phi$ 和 $F$ 在 $V \cup R$ 上重合 $k$ 。

证明自雅可比矩阵 $\Phi$ 的秩以来 $\setminus(a)$ 是 $\times$ ，它有一个非零小调。不失一般性，我们可以假设它是由矩阵的第一行组成的。 $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(t_1, \dots, t_k)} \neq 0$ 然后是 $(a), 0$ ，其中是 $\phi_1, \dots, \phi_k$ 是映射 $\Phi$ 的坐标函数。

我们考虑来自 $O \times R$ 的地图 $\Theta^m - k$ 到 $R^m$ 由公式定义

$$\Theta(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m) = \Phi(t_1, \dots, t_k) + (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m)$$

其中 $(t_1, \dots, t_k) \in O$ 和 $(t_{k+1}, \dots, t_m) \in R^{m-k}$ 。很明显， $\Theta$ 是一个平滑的地图，并将 $\Phi$ 扩展到 $O \times R^{m-k}$ 。此外， $\text{rank}_a \Theta = m$ 自 $\det \Theta$ 以来 $\setminus(a) = (a)$ 。 $0. \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(t_1, \dots, t_k)} \neq 0$

根据局部可逆性定理， $\Theta$ 对点 $a$ 的一个（足够小的）邻域 $V$ 的限制是一个微分同构。这个限制应该对 $F$ 。 $\square$

如果 $\Phi$ 是 $k$ 维流形 $M$ 在点 $p$ 附近的局部参数化，而 $F$ 是上述引理中描述的微分同态，则 $\Phi^{-1}$ 和 $F^{-1}$ 在点 $p$ 的某个 $m$ 邻域上重合，更准确地说，在集合 $\Phi(V_0)$ ，其中 $V_0 = V \cup R^k$ 。因此，接下来的两个语句将遵循这个引理。

推论1在一个点 $p$ 的一个足够小的 $m$ 邻域中，映射 $\Phi^{-1}$ 满足利普希茨条件， $i$ 。  
e.,

$$\|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\| \leq C \|x - y\| \text{ 为 } x, y \in M$$

和一些 $C$ 。

为了证明这个结果，只需注意到光滑映射 $F^{-1}$ 在映射域内的每个闭球中都满足利普希茨条件。

**推论2**让 $O$ 和 $O \setminus$ 在 $R$ 中是打开集 $k$ 和 $\Phi \in C^1(O, R^m)$ 是流形 $M, M \subset R$ 的参数化 $m$ 。如果是 $\Psi \in C^1(O \setminus, R^m)$ 和 $\Psi(O \setminus) \subset M$ ，然后是组成的 $\Phi^{-1} \circ \Psi$ 是一张平滑的地图。

事实上，对于任何一点 $t_0 \in O \setminus$ 地图 $\Phi^{-1}$ 与光滑的地图 $F$ 重合 $^{-1}$ 在 $\Psi$ 点的一些 $m$ 邻域中 $O$ 。因此，在点 $t$ 的一个足够小的邻域中 $O$ ，地图 $\Phi^{-1} \circ \Psi = F^{-1} \circ \Psi$ 是一个平滑的地图的组成部分。

### 2.1.5

我们将根据以下观察结果使用一个简单的几何事实。

空间 $R$ 的每个开子集 $G^m$ 是 $G$ 中球的并集，其中半径和中心坐标是有理数。  
 因为集合 $G$ 中的每一个点 $x$ 都可以看作是一个球的中心  
 $B(x, r)$ 在 $G$ 中，只要注意到 $x \in B(y, \rho) \subset B(x, r)$  对于  $0 < \rho < r/2$  和  
 $\|x - y\| < \rho$ 。显然，数字 $\rho$ 和向量 $y$ 的坐标可能是  
 被选为理性。

**任何族的定理（林德洛夫）**  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  在 $R$ 中打开的集合 $^m$ 最多存在一个可计数的亚族  $\{G_{\alpha_0}\}_{\alpha_0 \in A_0}$  (集合 $A_0, A_0 \subset A$ , 最多是可数的) 具有相同的联合：

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha$$

证明考虑包含在至少一个集合 $G$ 中的具有有理半径和有理中心坐标的任意球 $\alpha$ 。这些球的集合是可数的。让我们 $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是此集合的一个枚举。通过选择这些球，对于任何 $n \in \mathbb{N}$ 都存在一个指数 $\alpha_n \in A$ ，这样的 $B_n \subset G_{\alpha_n}$ 。此外，每一组 $G_\alpha$  被这样选择的球弄得筋疲力尽：

$$G_\alpha \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ 对于任何索引 } \alpha \in A$$

因此，

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\alpha_n}$$

□ 由于明显的包含物  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ ，我们可以取第 $A$ 组 $0$ 作为指数集 $\alpha_n$ 。

光滑流形可以将光滑流形表示为一个最多可数的简单流形族的并集。

由于曲线坐标的范围是紧集的可数并集，所以下面的陈述是正确的。

**推论2光滑流形是紧集的最多可数并集，这样的集都是一个简单流形的子集。**

以下推论是前一个结论的直接结果。**推论3A在 $R$ 中的光滑流形 $^m$ 是这个空间的一个波雷尔子集。**

由于光滑曲面局部是光滑函数的图（广义上），我们也有以下内容。

**推论4光滑曲面是光滑函数图的最多可数的并集。**

### 2.1.6

现在我们证明了一个有用的事实，它允许我们将平滑函数表示为具有小支持的平滑函数的和。它常常会导致重要的技术问题



由于问题的“本地化”而被简化(见第二节. 2.6.5). 回想一下, 对一个函数  $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , 用符号  $\text{supp}(\phi)$  表示, 是集合  $\{x \mid \phi(x) \neq 0\}$  的闭包。

定理 (在统一的光滑划分上) 对于每一个  $\varepsilon > 0$  都存在一个非负函数  $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ , 使  $\text{supp}(\phi_\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]^m$  和

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \phi_\varepsilon(x - \varepsilon n) = 1 \text{ 为任何在 } \mathbb{R}^m \text{ 中的 } x$$

注意, 这个和的非零项数在每个附近是有限的

点  $x \in \mathbb{R}^m$ . 更准确地说, 如果  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]^m$  和  $\phi_\varepsilon(x - \varepsilon n) \neq 0$ , 那么  $n \in [-2, 2]^m$

**Proof**

$C^\infty(\mathbb{R})$ :

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{如果 } t > 0 \end{cases}$$

对于非零  $t$ , 它的所有阶导数的存在性是明显的, 并且在零时是  $\psi$  的易于检查表示的结果  $\psi^{(n)}(t)$ , 对于  $t > 0$ , 形式为  $\psi^{(n)}(t) = P_n(1/t) e^{-1/t}$ , 其中  $P_n$  是一个多项式。

设置  $\psi(x) = \prod_{k=1}^m \psi(1 - x_k^2)$  其中  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . 显然,  $\psi$  是一个类  $C^\infty(\mathbb{R}^m)$  函数在立方体中为正  $(-1, 1)^m$  等于零

在外面。因此, 每个函数  $x \mapsto \psi(x - \varepsilon n)$  在移位的立方体中都是正的  $\varepsilon n + (-1, 1)^m$  ( $n \in \mathbb{Z}^m$ ). 因为每个点  $x$  至少属于一个这样的立方体, 这笔钱

$$\Phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \psi(x - \varepsilon n)$$

是积极的。它是有限数量的无限可微函数的和 (参见定理陈述之后的注释)。因此,  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ . 采取  $\phi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\Phi(x)}$  很明显, 这个函数满足  $\varepsilon = 1$  定理的假设。构造函数  $\phi_\varepsilon$  对于任意的  $\varepsilon$ , 通过缩放来设置  $\phi$  就足够了  $\phi_\varepsilon(x) = \phi_1(\frac{1}{\varepsilon}x)$ .  $\square$

### 2.1.7

我们展示了如何使用一个单位的划分来构造一个特征函数的光滑逼近。可以直观地看出, 在集合  $E$  之外, 其特征函数的值可以逐渐改变, 没有突然的跳跃, 降至零。这种“下降”也可以在  $E$  附近实现, 而不超过其任意小的  $\varepsilon$  邻域的限制。回想一下, 集合  $E$  的  $\varepsilon$ -邻域就是这个集合

$$E_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(y, E) < \varepsilon\} = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$$

我们还证明了这种平滑可以在没有平滑函数*i*的急剧下降的情况下进行。e., 我们可以控制它的梯度的范数, 这样, 在所考虑的情况下, 它是可能的最小的阶数。

**定理(平稳下降)** 在每个集合  $E \subset \mathbb{R}^m$  每一个  $\varepsilon > 0$  都有一个函数  $\theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  到这样的程度

- (a)  $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$  在  $\mathbb{R}^m$  上;
- (b)  $\theta_\varepsilon(x) = 1$ , 如果是  $x \in E$ ;
- (c)  $\theta_\varepsilon(x) = 0$  在  $E$  外的;
- (d)  $\|\text{grad } \theta_\varepsilon\| \leq \frac{c_m}{\varepsilon}$  在  $\mathbb{R}^m$ , 其中  $c_m$  是一个只依赖于维度的系数。

**证明** 采取  $\delta = \varepsilon / (2^m)$ , 让  $\phi_\delta$  是先前定理  $Q = (-1, 1)$  中构造的函数<sup>m</sup>. 我们只保留了这些求和点

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \phi_\delta(x - \delta n) = 1$$

其中立方体  $\delta(n + Q)$  与  $E$  相交, 并设置

$$\theta_\varepsilon(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^m \\ \delta(n + Q) \cap E \neq \emptyset}} \phi_\delta(x - \delta n)$$

很明显, 有  $0 \leq \theta_\varepsilon(x) \leq 1$  到处都和  $\theta_\varepsilon(x) = 1$ , 如果是  $x \in E$ . 此外, 由于  $\text{diam}(Q) = 2$ , 我们有  $\theta_\varepsilon(x) = 0$  在  $E$  外的. 因此, 函数  $\theta_\varepsilon$  满足条件 (a)-(c). 现在我们检查了条件 (d). 因为定义了  $\theta$  的和  $\varepsilon$  它由每个点附近的有限数量的和组成 (如前面的定理所述), 可以逐项微分. 很明显

$$\|\text{grad } \theta_\varepsilon(x)\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \|\text{grad } \phi_\delta(x - \delta n)\|$$

因为每个点  $x$  最多属于  $2^m$  立方体  $\delta(n + Q)$ , 因此

$$\begin{aligned} \|\text{grad } \theta_\varepsilon(x)\| &\leq 2^m \max_x \|\text{grad } \phi_\delta(x)\| = \max_x \frac{2^m}{\delta} \|\text{grad } \phi_1\left(\frac{x}{\delta}\right)\| \\ &= \frac{2^m}{\delta} \max_y \|\text{grad } \phi_1(y)\| = \frac{2^m}{\delta} L \end{aligned}$$

其中  $L = \max_y \|\text{grad } \phi_1(y)\|$  不依赖于  $\varepsilon$  (但确实依赖于  $m$ ).  $\square$

## 2.1.8

我们对统一划分的定理作了修正. 首先, 我们证明了一个有用的几何事实。

**引理** 设  $K$  是空间  $\mathbb{R}^m$  中的一个紧集. 让  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  做它的封面. 然后存在一个数字  $\delta > 0$ , 使得每个集合  $e$  与  $K$  相交

并且具有属性直径(e) < δ 包含在至少一个属于封面的集合中。

证明假设引理的陈述是错误的。那么对于每n个 ∈ N 都存在一个集合 e<sub>n</sub> 它不包含在任何集合 G 中 α 与此同时

$$e_n \cap K \neq \emptyset, \text{ 直径}(e_n) < \frac{1}{n}$$

修复点 x<sub>n</sub> 在每个 e<sub>n</sub> ∩ K. 不失一般性, 我们可以考虑那个 x<sub>n</sub> → x<sub>0</sub> 对于一些 x<sub>0</sub> ∈ K (否则, 一个人可以传递到一个子序列)。点 x<sub>0</sub> 属于 G 族中的某个集合 α 比如说, 对 G α<sub>0</sub>. 因此

B(x<sub>0</sub>, r) ⊂ G α<sub>0</sub> 对于一些 r > 0. 如果 n 足够大, 那么 ||x<sub>n</sub> - x<sub>0</sub>|| < r/2 和 diam(e<sub>n</sub>) < r/2, 其中 e<sub>n</sub> ⊂ B(x<sub>0</sub>, r) ⊂ G α<sub>0</sub>. 这表明, 集合 e<sub>n</sub>

在集合 G 中包含了较大的指数 α<sub>0</sub>, 与 e 的选择相反. □

在需要用指定集合中的支持函数来替换任意函数的情况下, 使用以下定理是很方便的。

**定理 (在一个隶属于一个覆盖的单位的划分上)** 设 K 是空间 R 的一个紧子集<sup>m</sup> 让 {G α} α ∈ A 做它的封面。然后存在一个非负有限酉函数 ψ 的有限族 1, ..., ψ<sub>N</sub> 类 8 (R<sup>m</sup> 到这样的程度

$$\sum_{j=1}^N \psi_j \text{ 在 } R^m \text{ 上的 } \leq 1, \sum_{j=1}^N \psi_j(x) = 1, \text{ 如果是 } x \in K$$

以及对 ψ 的支持 j 包含在构成所有 j 的封面中的一个集合中。

功能族 ψ<sub>1</sub>, ..., ψ<sub>N</sub> 称为 K 的覆盖 {G} 的统一划分 α} α ∈ A.

证明 δ 是上面引理的一个数字对应于给定的

对 δ 构造一个划分 {G<sub>ε</sub>} 使得 diam(G<sub>ε</sub>) < δ. 只保留那些总和 φ<sub>ε</sub>(x - ε<sub>n</sub>) 在的分区中与 K 相交, 我们显然得到一个有限的族,

它只需要列举一下了。□

## . 22 表面积

### 2. 2. 1

在 R 中的一个 k 维区域<sup>m</sup> (1 ≤ k ≤ m) 我们将理解一个满足类似于勒贝格测度 λ 性质的性质的 Borel 测度 k.

特别是在 k 维仿射子空间的子集上, 该测度必须与勒贝格测度一致。这让我们可以谈到领域

由平面部分组成的集合, 特别是在 k = m-1 的情况下, 的面多面体然而, 这当然并不足以作出一个合理的定义

我们必须指定“曲线图”的面积的一些性质，以允许我们比较它在非平面集上的值（i. e., 不位于 $k$ 维仿射子空间中的集合）。在我们的方法中，这种情况的作用是由以下直观明确的要求来发挥的：在弱收缩下，面积不会增加。由于在弱收缩（甚至在投影下）下的图像可能不是波雷尔集，我们假设后一种条件只适用于紧集。因此，我们采用以下定义。

**定义** 让 $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m$ 。测量 $\sigma_k$ 定义在 $\sigma$ -代数 $B$ 上 $\mathbb{R}$ 的所有Borel子集 $m$ 被称为 $k$ 维区域 $m$ ，如果它满足以下两个公理：

(I) 在 $\mathbb{R}$ 的每个 $k$ 维仿射子空间 $L$ 上 $m$ ，测量 $\sigma_k$ 与勒贝格测度 $\lambda$ 的限制相一致 $k$ 到 $L$ 的Borel子集的 $\sigma$ -代数；

(二) 关于紧型套装， $\sigma_k$ 如果 $\Phi$ 是一个紧化集 $Q$ 的弱收缩，那么

$$\sigma_k(\Phi(Q)) \leq \sigma_k(Q)$$

我们已经同意称余维为1的曲面的流形。因此它是

自然地称 $(m-1)$ 维面积称为表面积。然而，通过滥用对于语言，我们将用这个术语来表示任意 $k$ 的 $k$ 维区域。作为

我们很快就会看到， $\mathbb{R}$ 中的一个 $k$ 维区域 $m$ 存在于所有 $k = 1, \dots, m$ 。

对于每一个Borel测量，表面积具有规律性：

如果 $\sigma_k(E) < +\infty$ ，然后是 $\sigma_k(E) = \sup \{ \sigma_k(Q) \mid Q \text{ 是一个紧致的集合, } Q \subset E \}$ 。

(1)

通过公理(I)， $\sigma_m$ 与勒贝格测度 $\lambda$ 相一致 $m$ （更准确地说，它被限制在 $B$ 上 $m$ ）。性质(II)适用于勒贝格测度。

请注意，公理(II)和条件(1)意味着一个表面积在任何等距下都是不变的，因为一个等距和逆于一个等距的映射都是弱收缩。特别地，它在平移和旋转下是不变的，因此同余集的面积是相等的。在一个正交投影下（这显然是一个弱收缩），一个紧化集的面积不会增加。

让我们建立 $\sigma$ 的另一个重要性质 $k$ 。

定理有限区域的波雷尔集的面积在展开映射下不减小。

**证明** 让 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是有限面积的Borel集， $\Theta$ 是 $E$ 上的展开映射。我们已经知道了，图像 $E \setminus = \Theta(E)$ 也是一个Borel集合。如果 $E$ 是一个紧集，我们可以将公理(II)应用于映射 $\Theta^{-1}$ （因为它是一个微弱的收缩），其中 $\sigma_k(E) \leq \sigma_k(E \setminus)$ 。在一般情况下，使用使用条件(1)。□

我们用一个简单但重要的结果来补充这个定理。它提供了一个具有利普希茨参数化的集合的面积上的双边界。此属性将在以下内容中重复使用。

**引理** 让  $E \subset \mathbb{R}^m$  是一个 Borel 集合,  $\Psi$  是一个从  $E$  到  $\mathbb{R}^k$  的映射. 如果存在一个  $C > 1$  是这样的

$$\frac{1}{C} \|x - y\| \leq \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq C \|x - y\| \text{ 为 } x, y \in E$$

那时

$$\frac{1}{C^k} \lambda_k(\Psi(E)) \leq \sigma_k(E) \leq C^k \lambda_k(\Psi(E))$$

显然, 证明了, 它足以证明有界集的期望不等式. 因此, 我们假设集合  $E$ , 因此, 它的图像  $E^\sim$  是有界的. 根据  $H = C\Psi$  和  $\Theta: u \mapsto \Psi^{-1}(Cu)$  正在  $E$  和  $E$  上扩展地图  $\frac{1}{C}$  各自地正如我们所建立的, 每个映射发送一个 Borel 集合到一个 Borel 集. 由于弱收缩  $H^{-1}$  是一致连续的, 我们可以假设它是定义在紧集  $Q = CE$  上的, 其面积 (与勒贝格测度相一致) 是有限的. 因此

$$\sigma_k(E) = \sigma_k(H^{-1}(CE^\sim)) \leq \sigma_k(H^{-1}(Q)) \leq \sigma_k(Q) = \lambda_k(Q) < +\infty$$

这使得我们可以将该定理应用于扩展映射  $H$ , 并得到所需的上界:

$$\sigma_k(E) \leq \sigma_k(H(E)) = \lambda_k(C\Psi(E)) = C^k \lambda_k(\Psi(E)).$$

另一方面,

$$\sigma_k(E) = \sigma_k\left(\Theta\left(\frac{1}{C}\Psi(E)\right)\right) \geq \sigma_k\left(\frac{1}{C}\Psi(E)\right) = \lambda_k\left(\frac{1}{C}\Psi(E)\right) = \lambda\frac{1}{C^k}(\Psi(E)),$$

这就产生了这个下限.  $\square$

从证明中可以看出, 如果  $\Psi$  的上域结构域不是  $\mathbb{R}$ , 则引理仍然有效<sup>k</sup>, 而是任意维空间的  $k$  维 (线性或仿射) 子空间, 其中  $k$  维区域与公理 (I) 的勒贝格测度重合.

### 2.2.2

表面积是否存在的问题已经基本上得到了解决. 事实上, 豪斯多夫测量了  $\mu_k$  满足公理 (II), 并与  $k$  维子空间上的勒贝格测度成正比. 比例系数等于体积  $\alpha_k$  单位球的单位球<sup>k</sup>. 因此, 函数  $\alpha_k \mu_k$  考虑到  $\mathbb{R}$  的所有 Borel 子集<sup>m</sup> 是  $k$  维区域. 因此, 下面的定理就成立了.

定理对于每个正整数  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , 在  $\mathbb{R}$  中有一个  $k$  维区域<sup>m</sup>.

我们可以证明一个Borel测度所满足的条件(I)和(II)并不是唯一的。对相关的微妙结果的讨论超出了这本书的范围。但是, 请注意, 面积的非唯一性可能只在相当复杂的集合上表现出来。我们很快就会看到, 满足某些自然几何条件的波雷尔集的面积是唯一确定的。

### 2.2.3

现在我们转向一维情况, 考虑计算测度 $\sigma$ 的问题。在简单的弧线上, 我.e., 区间的同态图像。为了简洁起见, 我们还将使用术语“arc”作为同义词。当然, 称 $\sigma$ 是很自然的 $\sigma(L)$ 圆弧的长度 $L$ 。然而, 现在使用这个术语可能会导致某种歧义。事实上, 早在学校时代, 读者就学会了, 以圆为例, 将曲线的长度定义为内接多边形链长度的极限。对这一定义的自然推广导致了弧长的经典定义。因此, 最好确保度量 $\sigma$ 同意这个定义。在着手解决这个问题之前, 我们首先介绍路径长度的概念。

考虑一个任意的路径 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . 给定由点 $t$ 组成的区间 $[a, b]$ 的一个分区 $\tau: 0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ , 集

$$S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

根据定义,  $\gamma$  的长度等于  $s(\gamma) = \sup_\tau S_\tau$ . 已调用了一条路径

如果其长度有限, 则可修正。请注意,  $s(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ , 因为  $S_\tau \geq$

$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|$  由三角形不等式组成。

如果  $\phi_1, \dots, \phi_m$  是  $\gamma$  的坐标函数, 那么, 显然, 对于任何一个  $i = 1, \dots, m$  和  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\|\phi_i(t_{k+1}) - \phi_i(t_k)\| \leq \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leq \sum_{j=1}^m \|\phi_j(t_{k+1}) - \phi_j(t_k)\|$$

因此, 函数  $\phi$  的变化  $k$  满足不等式

$$V_a^b(\phi_i) \leq s(\gamma) \leq \sum_{j=1}^m V_a^b(\phi_j) \quad (1)$$

因此, 当且仅当它所有的所有坐标函数都是有界变化时, 路径是可修正的。我们可以看到, 路径长度是相加的, 即.e.,  $s(\gamma) = s(\gamma_1) + s(\gamma_2)$ , 其中  $\gamma_1, \gamma_2$  对间隔  $[ac]$  和  $[cb]$  的限制 ( $a < c < b$ )。

为了定义经典的弧长, 我们需要一个简单的辅助结果。对于一个路径, 它是一个线段在弧上的同态, 我们保留术语“参数化”, 即使它不是定义在一个开区间上, 因为它应该根据定义2.1.1, 而是在一个封闭区间上。

引理一个简单圆弧的两个参数化的长度重合。

**证明** 让  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_1: [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$  是一个简单的圆弧  $L$  的两个参数化。设置  $\omega(x) = \gamma_1^{-1}(\gamma(x))$  ( $a \leq x \leq b$ )。那么函数  $\omega$  是连续的，一对一的，因此，严格单调的。因此，每个分区  $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$  产生了区间的  $[p, q]$  的划分，它是由点  $\omega(x_0), \dots, \omega(x_n)$ ，如果  $\omega$  正在增加，并通过点  $\omega(x_n), \dots, \omega(x_0)$ ，如果  $\omega$  在下降。此外， $\gamma(x) = \gamma_1(\omega(x))$ 。因此

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma_1(\omega(x_{k+1})) - \gamma_1(\omega(x_k))\| \leq s(\gamma_1)$$

但是  $\tau$  是任意的，其中  $s(\gamma) \leq s(\gamma_1)$ 。由于参数化了  $\gamma$  和  $\gamma_1$  是可互换的，这意味着  $s(\gamma) = s(\gamma_1)$ 。□

现在我们将一个弧的长度定义为其所有参数化的长度的公共值。一个弧  $L$  的长度将用  $s(L)$  表示。因此，如果  $\gamma$  是  $L$  的参数化， $s(L) = s(\gamma)$ （使用弧的长度和参数化的长度，不会导致矛盾）。如果弧的长度有限，则称为可修正。由于路径的长度不小于其端点之间的距离，因此弧长满足明确的几何原理：“一个线段是连接两个给定点的最短弧”：

$$s(L) \geq \|B - A\|, \text{ 如果 } L \text{ 包含 } A \text{ 和 } B. (2)$$

根据公理 (II)，这一原理可以扩展到（任何）度量  $\sigma_1$ ：

$$\sigma_1(L) \geq \|B - A\|, \text{ 如果 } L \text{ 包含 } A \text{ 和 } B. (3)$$

（因为  $L$  对通过  $A$  和  $B$  的线的投影包含了连接它们的整个段）。

还要注意，如果一个路径  $\gamma$  是可修正的，那么函数  $x \mapsto \theta(x) = s(\gamma|_{[a, x]})$  是连续的。事实上，如果一个  $a \leq x < y \leq b$ ，那么，鉴于 (1)（以下简称  $\phi_1, \dots, \phi_m$  是参数化  $\gamma$  的坐标函数），

$$|\theta(y) - \theta(x)| = s(\gamma|_{[x, y]}) \leq \sum_{j=1}^m V_x^y(\phi_j)$$

其中  $V_x^y(\phi_j) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow y$

$\theta$  的连续性允许我们引入一个新的可修正的弧  $L$  的参数化。由于  $\theta$  的值集合与  $[0, S]$  重合，其中  $S = s(L)$ ，因此映射  $u \mapsto \delta(u) = \gamma(\theta^{-1}(u))$  被定义在  $[0, S]$  上，连续的，一对一的，并满足  $\delta([0, S]) \subset L$ 。读者可以很容易地检查  $\delta([0, S]) = L$ 。因此， $\delta$  是  $L$  的一个参数化。根据  $\theta$  的定义可以得出，对于  $0 \leq u \leq S$ ，我们总是有  $s(\delta([0, u])) = u$ 。此外，通过长度的可加性，这个

参数化也具有以下属性：如果为  $0 \leq u_1 < u_2 \leq S$ ，然后

$s(\delta([u_1, u_2])) = u_2 - u_1$ . 因此， $\delta$  中的参数  $u$  具有简单的几何性质

解释：两个值  $u$  的差值  $u_2 - u_1$  (其中  $u_1 < u_2$ ) 等于

对应于区间的圆弧的长度  $[u_1, u_2]$ . 这个参数化

简单弧称为自然。这是一个微弱的收缩，因为

$$u_2 - u_1 = s(\delta([u_1, u_2])) \geq \|\delta(u_2) - \delta(u_1)\| / 2.$$

**每一个简单弧的定理**  $L, \sigma_1(L) = s(L)$ .

首先我们检查那个  $s(L) \leq \sigma_1(L)$ . 设  $\gamma$  是定义在  $[a, b]$  上的  $L$  的参数化。考虑

一个由点  $t$  组成的  $[a, b]$  的任意分区  $\tau: 0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$  和设置  $L_k =$

$\gamma([t_k, t_{k+1}])$  ( $0 \leq k < n$ ). 因为  $\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leq \sigma_1(L_k)$

由 (2) 由此得出结论...

$$S_\tau \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_1(L_k) = \sigma_1(L)$$

但是  $\tau$  是任意的，其中  $s(L) \leq \sigma_1(L)$ .

当证明反向不等式时，我们可以假设  $L$  是可整正的。e.,  $S = s(L) < +\infty$ .

正如我们已经注意到的， $L$  的自然参数化是在  $[0, S]$  上的一个弱收缩。因此  $\sigma_1(L) \leq$

$\sigma_1([0, S]) = S = s(L)$ .  $\square$

这个定理允许我们调用  $\sigma_1$  长度

## 2.2.4

正如我们在上一小节中所看到的， $\sigma_1$  任何简单的  $\text{arc} L$  的测度都等于内接在  $L$  中的多边形链长度的上值。“常识”表明，为了计算曲面的面积，我们应该应用类似的过程：考虑多面体表面与顶点  $M$  (多面体内接在  $M$ )，计算面积的总和他们的脸，然后把限制的脸变得越来越小。然而，简单的分析表明，这种方法即使是对一个圆柱体也不能得到合理的结果。我们简要地概述了相应的经典反例的构造，即所谓的“施瓦兹灯”。

考虑一个半径为  $R$ 、高度为  $H$  的右圆柱体，并在其中刻上一个如下构造的多面体表面。通过垂直于其轴线的平面将圆柱体切割成  $m$  个相等的小圆柱体。在每个小圆柱体的顶部和底部刻有一个规则的  $n$ -gon，这样顶部多边形的顶点位于弧的中间，由底部多边形的侧面支撑。换句话说，顶部多边形相对于底部多边形旋转  $\frac{\pi}{n}$ 。将每个多边形中的每个顶点与多边形中最近的顶点按线段上的一个水平连接起来。这样的段从一个给定的顶点到一个相邻的多边形，以及这个多边形的相应边，形成一个等腰三角形。这些三角形一起形成了一个类似于中国灯笼的多面体表面 (见图。

2.1)。

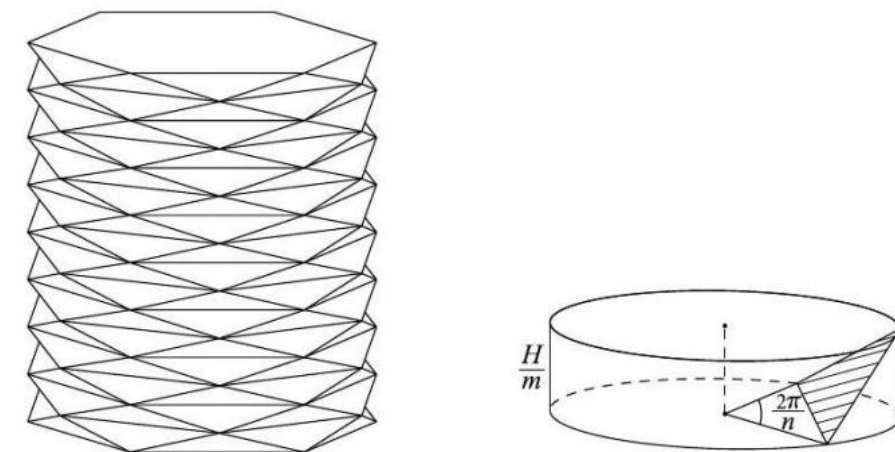
在两个相邻的横截面之间有  $2n$  个三角形的面 (其中一半是基于底部的  $n$ -gon，另一半是基于顶部的  $n$ -gon)。因此，我们的多面体表面由  $2mn$  等的三角形面组成。显然，



这些面的边的长度趋于零，为 $m, n \rightarrow \infty$ 。观察到，如果水平面的高度小于多边形的边长，则这些面的平面几乎垂直于圆柱体的轴线。

区域 $s_{mn}$ 每个面的大小都很容易计算出来：

$$s_{mn} = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2}$$



放弃平方根符号下的第二项，我们有(考虑帐户， $\sin \phi > \phi$  为  $\phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ )

$$s_{mn} > R \sin \frac{\pi}{n} \cdot 2R \sin^2 \frac{\pi}{2n} > \frac{4R^2}{n^3}$$

因此，多面体表面的总面积，i. e.,  $2mn s_{mn}$ ，均为不小于  $8R^2 \frac{m}{n^2}$ . 因此，我们可以在圆柱中加入任意大面积的多面体表面(取  $\gg 2$ )，尽管它的面是具有任意小的边的三角形。请注意，这个极限等于圆柱体的面积，i. e.,  $2\pi RH$ ，仅当  $\frac{m}{n^2}$  为0时。

上述构造说明了为什么如果我们计算面积，当计算弧长失败时的方法是有效的。原因很简单：如果内嵌在光滑曲线上的多边形链的线段的长度足够小，那么它们几乎与曲线相切。对于曲面，情况是完全不同的：内接到曲面上的多面体的任意小面可能几乎与表面正交(内接表面可能是“崎岖的”)。因此，在计算一个曲面的面积时，我们应该放弃与内接多面体相关的朴素方法。

## 2.3 一个平滑流形的表面积的特性

在本节中，所有的流形和参数化都默认假定是平滑的。余维数为1的流形被称为曲面。

### 2.3.1

我们的直接目标是得到一个计算一个简单的光滑 $k$ 维流形的Borel子集的面积公式。然后，通过该区域的可数可加性，我们将能够计算出这些集合的可数并集的面积，特别是任意光滑流形的子集的面积。

让我们讨论几何考虑，以什么形式建议期望公式应该有。让 $\Phi \in C^1(0, \mathbb{R}^m)$ 是一个简单的参数化

流形 $M$ 与 $\dim M = k$ ，并让 $(t) = \Phi(a) + d\tilde{\Phi}_a \Phi(t-a)$ 是 $\text{lin-}\Phi$ 在 $\in 0$ 点的接地。 $\Phi$ 的值的集合是 $k$ 维的

仿射切空间，勒贝格测量 $\lambda_k$ 已定义。考虑一个

立方细胞 $Q_h \subset 0$ ，顶点为 $a$ ，边长度为 $h$ 。它在 $\Phi$ 下的图像是

“弯曲同位素” $R_h = \Phi(Q_h)$ 。对于小的 $h$ ，它几乎是等距的

相应的“规模” $\tilde{R}_h$ ， $Q$ 的图像 $h$ 在线性化的地图下(请参见 $\tilde{\Phi}$

下一节中的引理)。因此，我们应该期望到的区域

“弯曲同位素” $R_h$ 是否接近于集合的勒贝格度量 $\tilde{R}_h$ 。它可以

由平行六边形 $d$ 的平移得到 $a\Phi([0, h)^k)$ 躺在

切丛因此， $\lambda_k(\tilde{R}_h) = \lambda_k(d_a\Phi([0, h)^k)) = h^k \lambda_k(d_a\Phi([0, 1)^k))$ 。

我们会打电话给 $C_a = d_a\Phi([0, 1)^k)$ 伴随的同位素。因此 $\sigma_k(R_h)$

必须接近 $h^k \lambda_k(C_a)$ ，在他们的比例上趋向于 $h^{d-1}$

起折痕这表明，一个简单的光滑流形 $M$ 的表面积为

只是在 $\Phi$ 下的 $k$ 维勒贝格测度的加权图像，用

重量 $\omega_\Phi: t \mapsto \lambda_k(C_t)$ 等于伴随的平行四边形因素的体积。

### 2.3.2

为了验证我们的启发式考虑是正确的，我们首先证明了流形点偏离切子空间的双边界。其中一种可能的“矫直”映射，具有简单的几何性质，可以通过正交将切点的一个足够小的邻域投影到切空间得到。然而，从技术上讲，将一个单独的矫直图（靠近一个投影）与每个参数化关联起来更方便。

**引理** 让 $\Phi \in C^1(0, \mathbb{R}^m)$ 是一个流形 $M$ 和 $(t) = \Phi(a) + d$ 的局部参数化 $\tilde{\Phi}_a \Phi(t-a)$ 是它在 $\in 0$ 点上的线性化。然后

(1) 地图 $\Psi = \Phi \tilde{\Phi}^{-1}$ 在 $p = \Phi(a)$ 点附近几乎是等距的：对于每一个 $C > 1$ ，在 $p$ 的一个足够小的 $m$ 邻域 $U$ 中，

$$\frac{1}{C} \|x - y\| \leq \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq C \|x - y\| \quad (x, y \in U)$$

(2) 对于每一组， $A, \in, A^k$ ,

$$\lambda_k \tilde{\Phi}(A) = \omega_\Phi(a) \lambda_k(A) \quad (1)$$

证明它足以检验在 $p$ 附近的不等式

$$\|(x - y) - (\Psi(x) - \Psi(y))\| \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \|x - y\|$$

保存因为地图 $\Phi^{-1}$ 局部满足Lipschitz条件(见第1节中的推论1.2.1.4), 它足以检查每一个 $\varepsilon > 0$ 存在一个小的 $M$ 邻域 $U$ , 这样

$$\|(x - y) - (\Psi(x) - \Psi(y))\| \leq \varepsilon \quad \|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\| \quad (x, y \in U).$$

设置 $s = \Phi^{-1}(x)$ 和 $t = \Phi^{-1}(y)$ , 我们可以看到这个不等式等价于这个条件

$$\|(\Phi(s) - \Phi(t)) - d_a\Phi(s-t)\| \leq \varepsilon \|s-t\| \text{ 在 } a \text{ (2) 附近, 后者遵}$$

循 $\Phi$ 的平滑度。的确, 让 $r$ 这么小

$\|d_u\Phi - d_a\Phi\| \leq \varepsilon$  表示 $k$ 维球 $B(a, r)$ 中的每个 $u$ 。然后, 通过拉格朗日不等式的推论(我们不会在课程中讨论它),

$$\|(\Phi(s) - \Phi(t)) - d_a\Phi(s-t)\| \leq \sup_{u \in B(a, r)} \|d_u\Phi - d_a\Phi\| \|s-t\|$$

这意味着(2)。因此, 作为 $p$ 的一个期望的 $m$ 邻域 $U$ , 如果半径 $r$ 足够小, 我们可以取 $\Phi(B(a, r))$ 。

为了证明(1), 观察测量值 $A \mapsto \lambda_k \tilde{\Phi}(A)$ 是平移不变的因此与 $\lambda$ 成比例 $k$ 。

$\lambda_k \tilde{\Phi}([0, 1]^k) = \lambda_k(C_a) = \omega_\Phi(a)$ , 比例系数等于 $\omega_\Phi(a)$ 。□

现在我们可以证明一个计算位于光滑流形上的集合的面积公式。证明的思想与多重积分中变量变化的定理相同。

对于一个简单的光滑流形 $M$ 中包含的每个Borel集 $E$ ,

$$\sigma_k(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega_\Phi(t) dt \quad (3)$$

其中 $\Phi$ 是 $M$ 的任意光滑参数化。

正如我们前面提到的, 面积公理并不是在所有的Borel集合上唯一地决定它。相反, 上面的定理表明, 在足够“好”的集合-光滑流形和它们的波雷尔子集-所有的区域重合。因此, 不同领域之间的差异可能只在相当复杂的波雷尔集合上表现出来。

证明设 $O$ 是定义参数化 $\Phi$ 的开集, 并考虑度量 $v(A) = \sigma_k(\Phi(A))$ 在 $O$ 的Borel子集上。我们将验证它是否满足这个条件

$$\inf_A \omega \Phi \lambda_k(A) \leq v(A) \leq \sup_A \omega \Phi \lambda_k(A) \quad (4)$$

这意味着  $v(A) = \int_A \omega \Phi(t) dt$ ，它相当于所需的断言。

如果这些不等式支持形成递增序列的集合，那么它们显然支持这些集合的并集。因此，假设  $A$  是一个有界集，其闭包包含在  $0$  中就足够了。两个不等式 (4) 用相同的方法证明，所以我们只证明上界，让读者对下界进行类似的论证。

如果 (4) 中的右不等式是假的，那么对于某些  $C_0 > 1$  我们有

$$v(A) > C_0 \sup_A \omega \Phi \lambda_k(A) \quad (5)$$

将  $A$  分成有限多的部分，每个部分的直径最大直径为  $(A)/2$ 。那么 (5) 必须保持这些部分中的一个，我们用  $A$  表示  $A_1$ 。用  $A$  替换  $A_1$  重复这个论证，我们得到一个集合  $A_2$  等通过归纳法，我们将构造一个嵌套集合  $A_n$  的序列  $A_n$  在直径趋于零的情况下。在十字路口取一个点  $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 。通过集合  $A$  的构造  $A_n$ ，他们满足 (5)：

$$v(A_n) > C_0 \sup_{A_n} \omega \Phi \lambda_k(A_n) \quad (6)$$

让我们证明，这导致了一个矛盾。根据引理，对于每一个  $C > 1$ （后面指定）都存在一个这样的邻域  $V$ ，对于  $x, y \in U = \Phi(V)$ ，我们有

$$\frac{1}{C} \|x - y\| \leq \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq C \|x - y\|$$

在哪里，如在引理中， $\Psi = \Phi \tilde{\Phi}^{-1}$ ， $\tilde{\Phi}$  是  $\Phi$  的线性化 (i.e.,

$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(a) + d_a \Phi(t - a)$ 。如果  $n$  大到  $A_n \subset V$ ，然后是  $\Phi(A_n) \subset U$ 。因此，通过引理 8.2.1，对于集合  $E_n = \Phi(A_n)$  我们有  $\sigma_k(E_n) \leq C^k \lambda_k(\Psi(E_n))$ 。自  $\Psi(E_n) = (\Phi \tilde{\Phi}^{-1})(A_n)$  和，根据 (1)， $\lambda_k(\tilde{\Phi}(A_n)) = \omega \Phi(a) \lambda_k(A_n)$  由此得出结论...

$$\begin{aligned} v(A_n) &= \sigma_k(\Phi(A_n)) = \sigma_k(E_n) \leq C^k \lambda_k(\Psi(E_n)) = C^k \lambda_k(\tilde{\Phi}(A_n)) \\ &\leq C^k \sup_{A_n} \omega \Phi \lambda_k(A_n). \end{aligned}$$

从 (6) 和最后一个不等式，我们看到  $1 < C_0 \leq C^k$ 。然而，如果  $C$  被选择得足够接近于 1，这是不可能的。因此，我们的假设是错误的，这个定理如下。□

这个结果的一个特殊情况（对于  $k = m$ ）是关于的行为的定理微分下的勒贝格测度，因为在这种情况下  $\omega \Phi = J \Phi \equiv$

$|\det(\Phi^{\setminus})|$ . 这些定理的证明是相似的, 但这里我们使用了面积的性质, 这使我们不能跟踪小立方单元图像的度量。

### 2.3.3

在这里, 我们将讨论  $\sigma$  区域的基本性质  $k$  在空间  $R$  中  $m$ , 总是假设  $k < m$ 。为了简洁起见, 我们将称它为区域, 省略对维度的引用。

很明显,  $\sigma$  的性质  $k$  在某些方面与勒贝格测量的熟悉性质有很大的不同。例如, 由于每个  $m$  维的立方体都包含一个同余的成对不相交的  $k$  维立方体的连续体, 在  $R$  中  $m$  有一个无限面积的紧集。也很明显, 每一个非空的开集都有无限的面积。这一事实立即意味着该面积不是  $\sigma$ -有限的, 也不能是一个常规的度量。因此, 在研究  $\sigma$  的性质时  $k$  更详细地说, 我们宁愿不考虑这个区域“作为一个整体”, 而是考虑它对一个固定流形中所包含的子集的限制。为了更准确地说, 我们引入了以下与光滑  $k$  维流形  $M \subset R$  相关的符号  $m$  (与  $k < m$ )。由  $B_M$  我们表示  $M$  中所有 Borel 集的系统  $m$   $k$  维面积对  $B$  的限制  $M$ 。因为  $M$  本身是一个 Borel 集合, 所以  $B_M$  是一个  $\sigma$ -代数和  $\sigma$  吗  $M$  是一个措施。

公式 (3) 允许我们计算一个简单流形的 Borel 子集的面积。如果  $\Phi$  是相应的参数化, 那么它对于任意流形的坐标邻域的子集显然也是有效的, 但不一定是简单的。

让我们确定该地区的几个重要性质。

(1) 光滑流形的紧子集的面积是有限的。

对于坐标邻域的紧子集, 这从 (3) 得到, 因为它在每个参数化下的逆像是一个紧集, 权值为  $\omega \Phi$  是连续的。流形的任意紧子集可以被有限面积的有限多个坐标邻域所覆盖。

(2) 测量  $\sigma_M$  是  $\sigma$ -有限的。

这个属性遵循前一个和第二节的推论 2.2.1.5。由于零测度的 Borel 集可能具有非 Borel 子集, 因此度量为  $\sigma_M$  不完整。为了得到一个完整的度量, 我们应该考虑它的属性扩展。定义它的  $\sigma$ -代数将用  $A$  表示  $M$ , 以及  $A$  的元素  $M$  将被称为勒贝格可测量, 或者, 简而言之, 可测量。 $\sigma$  的扩展  $M$  至  $A_M$  是唯一的。对于这个扩展, 我们保留了旧的符号  $\sigma_M$  并且仍然称之为区域 (流形  $M$  的区域)。每个可测量的集合都可以从内部和外部进行近似为相同度量的 Borel 集。

如果  $\Phi$  是一个简单流形  $M$  的参数化, 而  $E \subset M$  是一个任意的勒贝格可测集, 那么为 Borel 集建立的公式 (3) 仍然有效。因此

(3) 测量  $\sigma_M$  在一个简单的  $k$  维流形上,  $M$  是  $k$  维勒贝格测度相对于任意参数化  $\Phi$  的加权年龄。一个简单流形的子集是可测的, 当且仅当它的逆像是可测的。

事实上, 一个可测量的集  $E$  可以写成  $E = A \cup e$  的形式, 其中  $A$  是一个 Borel 集和  $\sigma_M(e) = 0$ 。此外,  $e \subset e^c$ , 其中  $e^c$  它是一个为零的波雷尔集合吗地区因此  $\Phi^{-1}(e) \subset \Phi^{-1}(e^c)$ , 此外, 还有  $\lambda_k(\Phi^{-1}(e^c)) = 0$ 。后者保持, 自  $0 = \sigma$  以来  $M(e^c) = \int_{\Phi^{-1}(e^c)} \omega_\Phi(t) dt$  和  $\omega_\Phi > 0$ 。通过勒贝格测度的完备性, 集合  $\Phi^{-1}(e)$  是可测量的 (并且测量值为零)。因此

$$\sigma_M(E) = \sigma_M(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \omega_\Phi(t) dt = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega_\Phi(t) dt$$

用类似的方法, 我们也可以证明  $\Phi^{-1}(E)$  表示  $E$  的可测量性。

(4) 测量  $\sigma_M$  是常规的, 我。e.

$$\sigma_M(E) = \inf_{\substack{E \subset G \subset M \\ G \text{ is open in } M}} \sigma_M(G) = \sup_{\substack{E \supset F \\ F \text{ is compact set}}} \sigma_M(F)$$

对于每个可测量的集合  $E$ ,  $E \subset M$ 。

如果  $M$  是一个简单的流形, 那么这个性质是勒贝格测度和公式 (3) 的正则性的直接结果。我们让读者在任意流形的情况下证明它。

(5) 设  $L$  为任意光滑流形  $2 < k$ 。然后  $\sigma_k(L) = 0$ 。

让我们证明  $L$  中的每个点都有一个邻域  $U$ , 这样交点  $L \cap U$  的面积为零 (这就足够了, 因为根据林德洛夫定理,  $L$  可以被可数的许多这样的邻域覆盖)。

根据光滑流形的第二个定义,  $U$  的选择可以使  $L \cap U$  包含在一个维数为  $k$  的简单光滑流形  $M$  中。此外, 我们可以不失一般性地假设  $\dim L = k-1$ 。

设  $\Phi$  是  $M$  的参数化。然后  $\Phi^{-1}(L)$  是  $R$  中的一个光滑的表面  $k$ , 可以写成光滑函数图的可数并集。2.1.5). 因为每个这样的图的  $k$  维体积消失了, 我们有  $\lambda_k(\Phi^{-1}(L)) = 0$ 。因此  $\sigma_k(L) = 0$ 。例如, 当计算球的子集的面积时, 我们可以丢弃小维的流形。这允许我们不失一般性地假设所考虑的集合包含在“切割”球面中, 并使用相应的参数化和公式 (3)。

(6) 在  $\lambda$  值为 0 的同态下,  $k$  维流形  $M$  中包含的一个集合的测度乘以  $a^k$ :  $\sigma_k(aE) = a^k \sigma_k(E)$  如果  $E \in \mathcal{A}_M$ 。

事实上, 面积与豪斯多夫测量成正比, 它具有所期望的属性。

注意, 在流形  $M$  的任意线性变换的情况下, 在  $M$  和其图像上的测度没有这样一个简单的关系。查看

这样，就足够考虑压缩一个圆了：一个简单的计算表明，一个弧的长度 椭圆 具有偏心度的  $\varepsilon > 1$  可以通过  $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$  来计算。

椭圆积分  $\int_0^\phi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$  违背宗数的恶行  $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$ ，它不是一个基本的函数。总之，我们在定义 2.2.1 之后立即陈述了该区域的财产。

(7) 该面积在等距下是不变的。

特别地，球体上的面积是旋转不变的。

### 2.3.4

为了通过公式 (3) 计算流形的面积，我们需要权值  $\omega$  的显式表达式  $\Phi(t)$  等于伴随的平行六边形素  $C_t$  的度量  $t$ 。对于  $k = 1$ ， $C_t$  只是端点为 0 和  $\Phi$  的线段  $\Phi'(t)$ 。因此

$\omega_\Phi(t) = \lambda_1(C_t) = \|\Phi'(t)\|$ ，因此，为了计算，为例如，一个  $\text{arc} L = \Phi([a, b])$  的长度，我们应该对切向量的长度进行积分： $\sigma_1(L) = \int_a^b \|\Phi'(t)\| dt$ 。

在一般情况下，平行四边素  $C_t$  是由正则切向量  $\tau$  张成的吗  $\tau_1(t)$ ， $\dots$ ， $\tau_k = \tau_k(t)$  对应于参数化的  $\Phi$ 。由于它们是线性无关的，所以  $C$  的体积  $t$  是积极的，我。e.，我们总是有  $\omega_\Phi(t) > 0$ 。值  $\omega_\Phi(t)$  可以通过 Gram 行列式进行计算：

$$\begin{aligned}\omega_\Phi(t) &= \lambda_k(C_t) = \sqrt{\Gamma(\tau_1, \dots, \tau_k)} = \sqrt{\det((\langle \tau_i, \tau_j \rangle)_{i,j=1}^k)} \\ &= \sqrt{\det[(\Phi'(t))^T \Phi'(t)]}.\end{aligned}$$

根据比奈-柯西公式得出的结论

$$\omega_\Phi^2(t) = \det[(\Phi'(t))^T \Phi'(t)] = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \left( \frac{D(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \dots, \varphi_{j_k})(t)}{D(t_1, t_2, \dots, t_k)} \right)^2$$

其中  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  是  $\Phi$  的坐标函数。

对于一个表面，i. e.，在  $k = m-1$  的情况下， $\omega$  的表达式  $\Phi(t)$  提供通过比奈-柯西公式简化：

$$\omega_\Phi^2(t) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{D(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi_j}, \dots, \varphi_m)(t)}{D(t_1, \dots, t_{m-1})} \right)^2$$

(符号  $\sim$  表示省略了相应的功能) 右边有一个简单的几何解释。让  $e_1, \dots, e_m$  是  $\mathbb{R}^m$  中的规范基础<sup>m</sup>。考虑向量

$$N_\Phi(t) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{D(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi_j}, \dots, \varphi_m)(t)}{D(t_1, \dots, t_{m-1})} \cdot e_j$$

它可以通过符号行列式来写出来

$$N_{\Phi}(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_2} & \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_{m-1}} & \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_{m-1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial t_{m-1}} \end{vmatrix}$$

除了第一个行外，其行都由切向量组成。

向量  $N_{\Phi}(t)$  正交于每个切向量  $\tau_j(t)$ ，因为内积  $N_{\Phi}(t) \cdot \tau_j(t)$  可以写成一个有两行相等的行列式。因此  $N_{\Phi}(t)$  在  $\Phi(t)$  点处是  $M$  的正线。它将被称为与参数化  $\Phi$  对应的法线。显然， $N$  的长度  $\Phi(t)$  等于  $\omega_{\Phi}(t)$ 。

从  $m=3, k=2$ ，我们看到  $N_{\Phi}(t)$  是切向量的向量积  $\Phi(t) = \tau_1(t) \times \tau_2(t)$ 。显然，

$$\omega_{\Phi}^2 = \begin{vmatrix} \langle \tau_1, \tau_1 \rangle & \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \\ \langle \tau_2, \tau_1 \rangle & \langle \tau_2, \tau_2 \rangle \end{vmatrix} = EG - F^2$$

其中  $EGF$  是曲面的第一基本形式的系数，i.e.,  $E = \|\tau_1\|^2, G = \|\tau_2\|^2$  和  $F = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ 。如果正切向量为  $\tau_1$  和  $\tau_2$  是正交的，然后是  $\omega_{\Phi} = \|\tau_1\| \cdot \|\tau_2\|$ 。

如果  $M = \Gamma_f$  是  $C$  中的一个函数  $f$  的图吗  $I(0, R)$ ，然后是地图

$$0 \ni x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \rightarrow I \quad \Phi(x) = (x, f(x))$$

是它的标准参数化，和吗

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_{m-1})}(x) = (-1)^{m+j+1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

对于  $1 \leq j \leq m-1$ 。如果  $j = m$ ，那么这个行列式相等 向一 因此

$N_{\Phi}(x) = (-1)^m f'_{x_m}(x), \dots, f'_{x_1}(x), -1$  和  $\omega_{\Phi}(x) = 1 +$   
密度  $\omega_{\Phi}$  对应于规范化的参数化，可以很容易地得到

直接从几何考虑因素计算，而不使用一般的-  
穆拉。实际上，与标准参数对应的切向量-

该图的组成部分是  $\tau_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, f'_{x_j}(x))$ 。对  $R$  的投影  $m-1$   
发送随附的平行六面素  $C_x$  由这些向量跨越到这个单位

立方体  $[0, 1]^{m-1}$ 。因此  $\lambda_{m-1}(C_x) = \frac{1}{|\cos \theta(x)|}$ ，其中  $\theta(x)$  是两者之间的夹角  
最后一个坐标轴和与切平面  $T$  的任意法线  $(x, f'(x))$ 。

这是众所周知的(参见第11节中的示例1.2.1.3)，这样一个法线就是向量

$v(x) = (-f'_{x_1}(x), \dots, -f'_{x_{m-1}}(x), 1)$  (观察到正常的  $N_{\Phi}(x)$  和  $v(x)$   
奇数  $m$  重合，偶数  $m$  相反)。因此

$$|\cos \theta(x)| = \frac{\langle v(x), e_m \rangle}{\|v(x)\| \|e_m\|} = \frac{1}{\|v(x)\|}$$



因此

$$\omega_{\Phi}(x) = \lambda_{m-1}(C_x) = \frac{1}{|\cos \theta(x)|} = \|v(x)\| = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}$$

因此，在图  $\Gamma$  中所包含的每个集合  $E$  的面积  $f$  可以用这个公式来计算吗

$$\sigma_{\Gamma_f}(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{dx}{|\cos \theta(x)|} = \int_{P(E)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2} dx \quad (7)$$

其中  $P(E)$  是正交的  $E$  到  $\mathbb{R}^m$  的投影。

特别是，如果  $f(x) = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}$ ,  $x \in B^{m-1}(R)$ ，然后是  $\Gamma_f$  是上半球的  $S^{m-1}(R)$ 。因为球面  $S$  上的一个点的半径向量  $x \in B^{m-1}(R)$  是  $S$  的正常值  $x \in B^{m-1}(R)$ ，我们有  $\cos \theta = f(x)/R$ 。因此，对于位于半球  $S$  上的可测量集合  $E$  的面积  $\sigma_{\Gamma_f}(E)$  我们得到了这个公式

$$\sigma_{\Gamma_f}(E) = \int_{P(E)} \frac{1}{|\cos \theta(x)|} dx = \int_{P(E)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}} dx. \quad (8)$$

### 2.3.5

现在我们考虑几个例子。

**示例1 (二维球体子集的面积) 根据部分的属性 (5)。** 2.3.3，在计算球面子集的面积时的值为  $S^2(R) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ，人们可以放弃平滑的曲线。我们引入了球面坐标  $\phi, \theta, \psi$ ，i.e.，考虑地图

$$(\varphi, \theta) \mapsto \Phi(\varphi, \theta) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta) \in S^2$$

$$\left( |\varphi| < \pi, |\theta| < \frac{\pi}{2} \right)$$

它提供了沿着子午线  $\phi = \pm \pi$  切割的球面的参数化。这个参数化的坐标线是子午线和平行线。这使得人们可以很容易地计算出由角度  $\phi, \phi + h$  和  $\theta, \theta + h$  ( $h > 0$ ) 对应的坐标线所限定的小四边形的近似面积。由于子午线和平行线是正交的，伴随的平行六边形是一个矩形，其小  $h$  的边长几乎等于包围弯曲四边形的弧的长度。后者是半径为  $R$  (沿子午线) 和  $R \cos \theta$  (沿平行线) 的圆弧。因此，伴随的平行四边形的面积近似等于  $(R^2 \cos \theta) h^2$ 。这表明，重量为  $\omega_{\Phi}$  对应于问题中的参数化等于  $R^2 \cos \theta$ 。我们让读者通过寻找切向量和计算相应的格兰氏行列式来检查得到的结果是否正确。

知道了重量，就可以很容易地找到球体上的面积。为简单起见，考虑一个以平行线和子午线为界的球形四边形  $Q$ ：

$$Q = \{ \Phi(\phi, \theta) \mid -\pi \leq \alpha_1 < \phi < \alpha_2 \leq \pi, -\beta_1 \leq \theta < \beta_2 \leq \frac{\pi}{2} \}.$$

显然,

$$\sigma_2(Q) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R^2 \cos \theta d\phi d\theta = R^2 (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) (\alpha_2 - \alpha_1)$$

对于  $\alpha$  的极值  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , 我们得到了整体的面积球体:  $\sigma_2(S^2(R)) = 4\pi R^2$ .

**例2 (二维环面子集的面积)** 根据部分的性质 (5)。2.3.3, 在计算中的子集的面积时

$\{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2)^2 + z^2 = r^2\}$ , 我们可以放弃光滑曲线让我们从例3中考虑的切割环面参数化对应的权重。2.1.3. 回想一下, 这个参数化的  $\Phi$  如下:

$$\Phi(\phi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

其中,  $\phi, \theta \in (-\pi, \pi)$ 。

在球体的情况下, 坐标线 (平行线和子午线的类似物) 形成了两组正交的圆。

如例1所示, 计算一个由坐标线限定的小曲线四边形的面积, 我们得出一个合理的结论, 即所选参数化对应的权值形式为  $\omega_\Phi(\phi, \theta) = r(R + r \cos \theta)$ 。读者可以轻松执行所有必要的正式计算。

很明显, 环面上弯曲的四边形的面积由“子午线“ $\phi = \alpha$ ”包围  $\alpha_1, \phi = \alpha_2$  和“平行的“ $\theta = \beta_1, \theta = \beta_2$ ”等于

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} r(R + r \cos \theta) d\phi d\theta = r(R(\beta_2 - \beta_1) + r(\sin \beta_2 - \sin \beta_1))(\alpha_2 - \alpha_1)$$

对于  $\alpha$  的极值  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , 我们得到了整体的面积环面:  $\sigma_2(T^2) = 4\pi rR^2$ .

**例3 (一个圆锥曲面的子集的面积)** 让我们找出一个集合  $E$  的面积如何位于圆锥曲面  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{m-1}, y = c\|x\|\}$  与投影  $P(E)$  到平面  $y = 0$  的面积有关。

如果  $0 \in E$ , 则  $E$  位于一个光滑的表面上, 则函数  $f(x) = c\|x\|$  的图定义在  $\mathbb{R}^{m-1}/\{0\}$ 。我们可以很容易地看到  $\|\text{grad} f(x)\| = |c|$  到处都是 (切平面和平面  $y = 0$  之间的夹角是常数的)。因此

$$\sigma_{m-1}(E) = \int_{P(E)} \sqrt{1 + \|\text{grad} f(x)\|^2} dx = \sqrt{1 + c^2} \lambda_{m-1}(P(E)).$$

我们现在考虑几个与多维球体有关的例子。

#### 示例4（多维球体的面积）进行计算

一个球体的面积  $\sigma_{m-1}(R)$  任意半径，就足以计算

单位球体  $S^m$  的面积  $\sigma_m = 1$ ，自  $\sigma_{m-1}(R) = R \sigma_{m-1}$  因此，请参阅

宗派的财产 (6) (1, 2, 3, 3)  $\sigma_{m-1}(S^m) = R^{m-1} \sigma_{m-1}(S^m)$ 。该地区

单位球的计算已经被计算使用的事实，它由两个半球，每个都是光滑函数的图。我们不会

重现这些计算结果，但只写下它们所得到的公式：

$$\sigma_{m-1}(S^m) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} R^{m-1}$$

右侧等于  $m \alpha_m R^{m-1} = (\alpha_m R^m)'_R$  因此，一个球体的面积等于相应的球的体积的导数（相对于半径）。稍后（参见第1节中的注释 (3)。2.4.3），我们将更详细地讨论这个问题。

让我们也计算从球面切割的球形“帽”的面积

$S^m$  通过距离其中心距离  $H$  ( $0 \leq H < R$ ) 的平面（对于  $H = 0$ ，我们因此得到一个半球）。由于面积是旋转不变的，我们可以说所讨论的集合是

$$S_H(R) = \{(x, y) = (x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in S^m \mid y > H\}$$

这显然是图表的一部分的函数  $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}$  它就在球  $B$  的上方  $R^2 - H^2$ 。公式 (7) 产量

$$\sigma_{m-1}(S_H(R)) = \int_{B^{m-1}(\sqrt{R^2-H^2})} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}} dx$$

现在我们用这个公式来计算一个径向函数的积分：

$$\begin{aligned} \sigma_{m-1}(S_H(R)) &= (m-1)\alpha_{m-1}R \int_0^{\sqrt{R^2-H^2}} \frac{u^{m-2} du}{\sqrt{R^2-u^2}} \\ &= (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1} \int_0^{\sqrt{R^2-H^2}/R} \frac{v^{m-2} dv}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Here  $\alpha_{m-1} = \lambda_{m-1}(B^{m-1}) = \pi^{(m-1)/2} / \Gamma((m+1)/2)$ 。设置  $H = \delta R$ ，我们可以重写 (9) as

$$\begin{aligned} \sigma_{m-1}(S_{\delta R}(R)) &= (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1} \int_0^{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{v^{m-2} dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1} \int_{\arcsin \delta}^{\pi/2} \cos^{m-2} t dt \end{aligned}$$

现在我们找出，当维度  $m$  无限增加时，多维球体的哪一部分属于球面帽，而从切断球面帽的平面到球面中心的距离保持不变

简化公式，我们考虑 $R$ 中的球体 $m+1$ 而不是在 $R^m$ 。在球体半径等于1（在所有维度中）且它与 $\delta$ 成正比的两种情况下，考虑这个问题特别有指导意义。

首先，我们考虑单位球面的情况。

例子5在一个大维空间中，我们有“测量集中”现象：球的几乎所有区域都集中在赤道附近的任意狭窄区域。更准确地说，对于帽子 $S_\delta = S_\delta(1)$ ，比率 $\sigma_m(S_\delta) / \sigma_m(S_0)$ 随着尺寸的增长而迅速衰减：

$$\frac{\sigma_m(S_\delta)}{\sigma_m(S_0)} = \frac{\int_{\arcsin \delta}^{\pi/2} \cos^{m-1} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} t dt} < 3e^{-\frac{m\delta^2}{2}} \quad (10)$$

为了证明（10），让我们首先估计分母。

$$W_m \equiv \int_0^{\pi/2} \cos^m t dt = \frac{(m-1)!!}{m!!} v_m$$

其中 $v_m$ 等于1或 $\pi/2$ ，这取决于 $m$ 的奇偶性。因此 $W_m W_{m+1} = \frac{\pi}{2m+2}$ 因为积分 $W_m$ 下降，由此可见

$$\sqrt{\frac{\pi}{2m+2}} < W_m < \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$$

应用不等式 $\delta \leq \arcsin \delta$ 和代价 $\leq$ 来估计分子 $e^{-t^2/2}$ ：

$$\begin{aligned} W_m(\delta) &\equiv \int_{\arcsin \delta}^{\pi/2} \cos^m t dt \leq \int_{\delta}^{\pi/2} e^{-\frac{m}{2}t^2} dt < \int_0^{\infty} e^{-\frac{m}{2}(t+\delta)^2} dt \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2m}} e^{-\frac{m}{2}\delta^2} \end{aligned}$$

因此，对于 $m \rightarrow \infty$ ，我们有

$$\frac{\sigma_m(S_\delta)}{\sigma_m(S_0)} = \frac{W_{m-1}(\delta)}{W_{m-1}} < \sqrt{\frac{m}{m-1}} e^{-\frac{m-1}{2}\delta^2} \leq \sqrt{\frac{me}{m-1}} e^{-\frac{m}{2}\delta^2} < 3e^{-\frac{m\delta^2}{2}}.$$

观察到，在用 $\delta$ 代替 $\arcsin \delta$ 后，我们估计了由不等式 $y > \sin \delta$ 所决定的帽的面积，它略大于 $S_\delta$ 。

如果我们用更强的测地线度规代替球面上的欧几里得度规，自然会出现这样的集合。在后一个度规中，球体的两点之间的距离等于它们的半径向量之间的夹角。很明显，较大的帽由偏离赤道（球面与平面 $y=0$ 的交点）在测地线度规中至少为 $\delta$ 的点组成。

示例6现在让我们讨论上面提出的第二个问题：随着 $m$ 的增长，帽 $S$ 的面积比率如何 $H(R)$ 到的区域

环境球体  $S^m(R)$  在  $R = R$  的条件下表现  $\hat{m} = \theta^{-1}$ , 其中  $\theta > 0$ . 设置  $P_m(H) = \frac{\sigma_m(S_H(R))}{\sigma_m(S^m(R))}$ . 这个值可以看作是从球体中“随机选取”的一个点落入帽中的概率。有人也可以说,  $P_m(H)$  是从球体中随机选取的一个点的最后一个坐标大于  $H$  的概率。

从 (9) (用  $m$  代替  $m+1$ ) 可知

$$P_m(H) = \frac{m\alpha_m}{(m+1)\alpha_{m+1}} \int_0^{\sqrt{1-H^2/(m\theta^2)}} \frac{t^{m-1} dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

自  $\Gamma(x + \frac{1}{2}) \sim x \Gamma(x)$  为  $x \rightarrow +\infty$  (参见第1节中的公式 (4)。7.2.2), 我们有

$$\frac{m\alpha_m}{(m+1)\alpha_{m+1}} = \frac{m}{m+1} \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+3}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{m}{2\pi}}$$

从何处

$$P_m(H) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_0^{\sqrt{1-H^2/(m\theta^2)}} \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

让我们看看最后一个积分是如何行为的, 设置为简洁的  $\delta = H/\theta$ 。使替换  $v = \sqrt{m} \sqrt{1-t^2}$ , 我们获得

$$\sqrt{m} \int_0^{\sqrt{1-\delta^2/m}} \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\delta}^{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{v^2}{m}\right)^{\frac{m-2}{2}} dv \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\infty} e^{-v^2/2} dv$$

因此

$$P_m(H) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{H/\theta}^{\infty} e^{-v^2/2} dv = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \int_H^{\infty} e^{-t^2/(2\theta^2)} dt$$

这个极限可以解释为高斯随机性的概率

密度为  $e$  的变量  $\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} - t^2/(2\theta^2)$  取一个大于  $H$  的值。这个结果, 有时被称为庞加莱或麦克斯韦引理, 意味着相对于半径的  $m$  维球体的归一化表面积  $\theta^{-1}$  米, 坐标的分布“几乎是高斯分布”。

### 2.3.6

现在我们将讨论一个更特殊的问题, 即弯曲下区域的行为。流形  $M$  的弯曲通常意味着在  $M$  上的曲线长度不变化的变换。就我们的目的来说, 这种意义太宽了, 因为在这样的映射下, 一个光滑的流形可以转换为一个不是流形的集合。例如, 实轴的间隔可以弯曲成“八字形”(连续

映射  $t \mapsto ((1-\cos t) \sin t, \sin t)$  将区间  $(-2\pi, 2\pi)$  转换为一对

触摸的圆圈；它是一一对应的，但不是同态的)。此外，我们继续限制自己在平滑的地图。因此，对弯曲变换施加额外的条件将是明智的。

定义了位于 $R$ 中的光滑流形 $M$ 的弯曲 $\Theta$ 是一个光滑的地图 $\Theta: M \rightarrow R^d$ 可满足以下条件:

- (1)  $\Theta$ 是 $M$ 和 $\Theta(M)$ 之间的同态;
- (2)  $\Theta$ 保留了平滑曲线的长度:  $\sigma_1(L) = \sigma_1(\Theta(L))$ 表示 $M$ 中包含的每条平滑曲线 $L$ 。

回想一下,  $\Theta$ 在 $M$ 上的平滑性意味着这个映射在一个包含 $M$ 的开集上是平滑的。

直观地清楚, 弯曲不会改变集合在表面上的面积。例如, 这一观察结果是计算学校所知的圆锥体和圆柱体的面积的基础。让我们更详细地讨论这些例子中的第一个(第二个, 参见练习5)。

例如, 考虑 $R$ 中的一个圆锥 $K^3$ 由从原点(圆锥体的顶点)开始的光线形成。这样的圆锥体是由它与单位球体 $i$ 的交点唯一决定的。e., 设置为 $\ell = K \cap S^2$ 。显然, 曲面 $\ell \setminus \{0\}$ 的平滑度意味着 $\ell$ 是一条平滑的曲线。采用这个假设, 我们还假设 $\ell$ 的长度 $\Delta$ 是有限的, 而 $\Psi$ 是定义在 $(0, \Delta)$ 上的自然参数化。让我们以这样一种方式“展开”圆锥, 使曲线 $\ell$ 变成相同长度的单位圆的弧; 更准确地说, 一个点 $\Psi(s)$ 映射到 $z(s) = (\cos s, \sin s)$ , 通过 $\Psi(s)$ 的射线映射到通过 $z(s)$ 的射线(假设所有的射线都从原点开始)。我们还假设 $\Delta < 2\pi$ (否则 $\ell$ 应该被分为几个部分)。

为了正式验证所描述的映射是弯曲的, 使用逆映射 $\Theta$ 很方便。我们将假设它被定义为一个角度 $C$ , 其顶点在原点, 其点由它们在区间 $(0, \Delta)$ 上的极角决定。为了得到 $\Theta$ 的解析表达式, 考虑光滑映射 $P: C \rightarrow (0, \Delta) \times (0, +\infty)$ , 它与 $C$ 的每个点 $z$ 的极坐标 $\Phi(z)$ 和 $r(z)$ 相关联。然后 $\Theta(z) = r(z)\Psi(\Phi(z))$ 。让我们检查一下 $\Theta$ 确实是一个弯曲的例子。

设 $\gamma(t)$  ( $t \in (a, b)$ ) 是位于 $C$ 中的光滑曲线 $L$ 的参数化。它生成曲线 $\Theta(L) \subset K$ 的参数化 $\Phi = \Theta \circ \gamma$ 。我们必须证明其长度为 $\sigma_1(L)$ 和 $\sigma_1(\Theta(L))$ 的这些的曲线同时发生设置 $P(\gamma(t)) = (\omega(t), \rho(t))$ 。注意 $\sigma_1(L)$

$= \int_a^b (\rho'(t))^2 + \rho^2(t) \cdot (\omega'(t))^2 dt$ . 因为 $\Phi(t) = \rho(t)\Psi(\omega(t))$ , 切向量 $\Phi'$ 可分为两个术语:  $\Phi' = \rho'\Psi + \rho\omega'\Psi'$ . 自 $\|\Psi\| = \|\Psi'\| = 1$ 和 $\Psi' \perp \Psi$ , 那么 $\|\Phi'\|^2 = (\rho')^2 + \rho^2 \cdot (\omega')^2$ . 因此

$$\sigma_1(\Theta(L)) = \int_a^b \|\Phi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t) \cdot (\omega'(t))^2} dt = \sigma_1(L)$$

按需要

因此,  $\Theta$ 是一个弯曲的过程。根据定理8.3.6(见下文), 它保留了该面积。特别是, 锥 $K$ 在半径为 $R$ 的球中的面积

以锥顶点为中心等于圆形扇区  $C \cap B(0, R)$  的面积。

现在让我们研究一下，在什么条件下，平滑的地图是弯曲的。

**引理** 让  $M \subset \mathbb{R}^m$  是一个光滑的流形和  $\Theta: M \rightarrow \mathbb{R}^d$  是一个平滑的同胚体。它保留了  $M$  中的曲线的长度，当且仅当  $M$  中的每个点  $p$  的映射  $d_p \Theta$  是切空间  $T_p(M)$  到  $\mathbb{R}^d$ 。

证明 让  $L \subset M$  是一条通过点  $p$  的平滑曲线，设  $t \mapsto \gamma(t)$  ( $t \in (a, b)$ ) 是  $L$  与  $p = \gamma(t_0)$  的 (平滑) 参数化。然后  $\delta = \Theta \circ \gamma$  是曲线  $= \Theta(L)$  的参数化。 $\tilde{L}$  很明显， $\delta'(t) = d_{\gamma(t)} \Theta(\gamma'(t))$ ，以及  $\text{arclength} = \gamma(t)$  的长度  $(t_0, t)$ ， $\ell = \delta^{-1}((t_0, t))$ ，由公式给出

$$\sigma_1(\ell) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du, \quad \sigma_1(\tilde{\ell}) = \int_{t_0}^t \|\delta'(u)\| du \quad (11)$$

如果  $\Theta$  是一个弯曲的，那么这些长度就相等了。为了区别于  $t$ ，我们看到了  $\|\delta'(t_0)\| = \|\gamma'(t_0)\|$ 。这意味着  $\|d_p \Theta(\gamma'(t_0))\| = \|\gamma'(t_0)\|$ ，i.e.,  $\|d_p \Theta(x)\| = \|x\|$  为每个向量  $x$ ，可以写成形式  $x = \gamma'(t_0)$ 。根据切线空间的定义，每个向量从  $T_p(M)$  可以用这种形式写出来。因此，从保留曲线的长度， $\|d_p \Theta(x)\| = \|x\|$  用于  $x \in T_p(M)$ ，i.e.,  $d_p \Theta$  是切空间  $T_p(M)$  上的等距  $p(M)$ 。如果每个  $p \in M$  都满足这个条件，则为  $\|\delta'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$  每个  $t$  的，使等式 (11) 的右侧重合，这意味着  $\Theta$  是一个弯曲。□

从引理中可以得出，如果  $\Theta$  是一个弯曲的，那么  $\text{rank } d_p \Theta = \dim M$  和，因此，集合  $= \Theta(M)$  是一个与  $M$  具有相同维数的光滑流形。 $\tilde{M}$

现在我们可以很容易地证明弯曲保留了面积。

**定理** 设  $M$  是一个光滑的  $k$  维流形， $\Theta$  是  $M$  的弯曲，和  $= \Theta(M)$ 。 $\tilde{M}$  然后是每一组  $E \in \mathcal{A}_M$ ，它的图像  $= \Theta(E)$  也有相同的区域： $\tilde{E}$

$$\sigma_k(E) = \sigma_k(\tilde{E})$$

证明，它足以证明位于某坐标邻域  $U \subset M$  的集合定理的主张。设  $\Phi$  是  $U$  和  $= \Theta \circ \Phi$  的参数化。 $\tilde{\Phi}$  差分  $d\Phi(t)$  是与  $\Phi$  对应的平行六边素在与  $\Phi$  对应的平行六边素上的等距。 $\tilde{\Phi}$  由于等距保留了勒贝格的度量值，这些平行四边形的度量值重合，即权值  $\omega_{\Phi} = \omega_{\tilde{\Phi}}$  是相等的。因此，这里就包含了集合的区域在你身上不会改变。□

请注意，弯曲也可能是一个扩展的地图；例如，圆弧的“矫直”，圆柱体的“展开”到一个平面，等等。这些例子表明，在一个严格增加某些点之间的距离的扩展地图下，长度和面积并不总是严格增加。



### 2.3.7

我们已经观察到球体的面积是旋转不变的(见第11节中的属性(7)。2.3.3)。让我们讨论另一个不变量的例子

衡量考虑测量值  $\sigma = \sigma_{n(n-1)/2}$  关于正交的群  $O(n)$   $n \times n$  个矩阵与由  $R$  诱导的度规  $h^2$  (见教派。2.1.3, 示例5)。由于这个集合是紧致的, 所以测度  $\sigma$  是有限的。正如我们已经在教派。2.1.3, 在  $O(n)$  组上的一个平移(在左边的乘法或在右边是一个固定的元素  $U_0$  从  $O(n)$  映射  $O(n)$  等距到它自己由于面积在等距下是不变的, 所以测度  $\sigma$  是不变的在  $O(n)$  上的翻译。特别是, 对于每个可和函数  $f$  on  $O(n)$  和  $O(n)$  中的每个  $V$ , 我们都有

$$\int_{O(n)} f(UV) d\sigma(U) = \int_{O(n)} f(VU) d\sigma(U) = \int_{O(n)} f(U) d\sigma(U). \quad (12)$$

利用群  $O(n)$  上不变测度的存在性, 可以证明该测度的唯一性和球面上旋转不变测度的唯一性。更准确地说, 下面的定理成立。

#### 定理

- (1) 在  $S$  上的一个有限的 Borel 旋转不变测度  $\mu^{m-1}$  对于一个乘法常数是唯一的。
- (2) 在任意右或左平移下  $O(n)$  不变的有限 Borel 测度  $\sigma$ , 在左右方向下乘以  $O(n)$  组的一个元素是唯一的一个乘法常数。

证明(1) 设  $\nu$  是  $S$  上的一个波雷尔旋转不变测度  $\mu^{m-1}$  和  $\sigma$  是在  $O(m)$  上的面积, 我们知道它是平移不变的。假定

$\nu(S^{m-1}) = \sigma_{m-1}(S^{m-1})$ ; 我们将证明措施  $\nu$  和  $\sigma_{m-1}$  同时发生

考虑通过将测量值  $\sigma$  归一化得到的  $O(m)$  上的测量值  $\mu$  (i. e.,  $\mu = \sigma \frac{1}{\sigma(O(m))}$ ) , 然后让  $E$  是球体  $S$  的一个 Borel 子集  $S^{m-1}$ . 首先让我们显示了这个价值  $\int_{O(m)} \chi_E(Ux_0) d\mu(U)$  并不依赖于点  $x$  的选择  $x_0$  从  $S^{m-1}$ . 事实上, 对于每个向量  $x \in S^{m-1}$  有一个正交变换  $V$ , 使得  $x = Vx_0$ . 因此, 通过 (12) 与  $f(U) = \chi_E(Ux_0)$ ,

$$\int_{O(m)} \chi_E(Ux) d\mu(U) = \int_{O(m)} \chi_E(UVx_0) d\mu(U) = \int_{O(m)} \chi_E(Ux_0) d\mu(U),$$

按需要因为, 通过  $\nu$  的不变性,

$$\nu(E) = \int_{S^{m-1}} \chi_E(x) d\nu(x) = \int_{S^{m-1}} \chi(Ux) d\nu(x)$$

对于  $O(m)$  中的每一个  $U$ , 将这个关于 (标准化) 度量  $\mu$  的等式进行积分, 并改变积分产量的顺序



$$\begin{aligned}\nu(E) &= \int_{O(m)} \nu(E) d\mu(U) = \int_{O(m)} \left( \int_{S^{m-1}} \chi_E(Ux) d\nu(x) \right) d\mu(U) \\ &= \int_{S^{m-1}} \left( \int_{O(m)} \chi_E(Ux) d\mu(U) \right) d\nu(x) = \nu(S^{m-1}) \int_{O(m)} \chi_E(Ux) d\mu(U),\end{aligned}$$

正如我们在上面所建立的，右边并不依赖于什么地方

x. 显然，一个类似的等式可以用 $\nu$ 替换为 $\sigma_{m-1}$ . 这个等式的右边两边是相等的。因此，左边也是如此。根据需要重合。

当改变积分的顺序时（因此，使用托内利定理），我们假设这个函数 $(x, U) \mapsto \phi(x, U) \equiv x \cdot Ux$ 可在 $S$ 上测量 $m-1 \times 0(m)$ . 事实确实如此，因为 $\phi$ 是集合 $\{(x, U) \mid Ux \in E\} = \Psi^{-1}(E)$ 的特征函数 $\chi_E$ ，其中 $\Psi(x, U) = Ux$ . 由于映射 $\Psi$ 显然是连续的，而 $E$ 是一个Borel集，所以它的逆像 $\Psi^{-1}(E)$ 也是一个Borel集合。

权利要求(2)的证明也完全类似。□

## 2.4在光滑流形上的集成

### 2.4.1

关于光滑流形的表面积的计算，或者总之，曲面积分的计算，可以简化为关于勒贝格测度的多重积分的计算。这种转变不需要额外的努力，因为，从属性(3)从第二节。2.3.3，一个简单流形的面积是勒贝格测度的加权图像。因此，我们可以将一般定理应用于对测度的加权图像的积分计算，在考虑的情况下，会导致以下结果。

定理设 $M$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个简单的光滑流形， $\omega_M$ 和 $f$ 是 $M$ 上的非负可测函数。然后

$$\int_M f(x) d\sigma_k(x) = \int_{\Phi^{-1}(M)} f(\Phi(t)) \omega_\Phi(t) dt$$

对于 $M$ 的每个参数化 $\Phi$ 。

这个公式也适用于 $M$ 上的每个可和函数。

回想一下 $\omega_\Phi(t)$ 有一个简单的几何解释：这是体积伴随的平行六面素。对于 $k=1$ ，它等于 $\Phi(t)$ 的长度

切向量 $\Phi'(t)$ ，对于 $k=m-1$ ，到正交 $N$ 的长度 $\Phi(t)$ 对应于参数化的 $\Phi$ （见第二节。2.3.4）。

在一般情况下，一个类似的公式也适用于不定义在整个流形 $M$ 上的函数，而只适用于 $M$ 的一个可测子集上。如果流形 $M$ 不是简单的，那么 $M$ 上的一个积分可以通过考虑 $a$ 来计算

将M划分为最多可数的许多集合，每个集合都包含在一个坐标邻域中。

在 $\dim M = m$ 的情况下，该定理的断言只是一个微分同构的变量公式的变化。

当流形是定义在 $\mathbb{R}$ 的开子集 $O$ 上的光滑函数 $\phi$ 的图时，观察一个重要的特殊情况 $m = 1$ 。考虑规范的参数化的那图 $O \ni x \mapsto \Phi(x) = (x, \phi(x))$ 。然后（请参阅 Sect. 2.3.4） $\omega_{\Phi(x)} = 1 + \|\text{grad } \phi(x)\|^2$ 和 $\Phi^{-1}(E) = P(E)$ ，其中 $P$ 是与 $\mathbb{R}$ 的正交投影 $m = 1$ 。因此，对于每个可测量集 $E \subset M = \Gamma_{\phi}$ ，

$$\int_E f d\sigma_{m-1} = \int_{P(E)} f(x, \phi(x)) \sqrt{1 + \|\text{grad } \phi(x)\|^2} dx \quad (1)$$

**示例1** 让 $\Sigma_m = S^{m-1}_+ \cap \mathbb{R}$ 是单位球体 $S$ 的一部分 $m = 1$ 的 $\mathbb{R}^m$ 躺在“第一八位字符”里。假设球体是均匀的，我们将找到表面 $\Sigma$ 的质心 $C_m$ 。通过对称性，这个向量的所有坐标都相等： $C = (c, \dots, c)$ 。正如我们所确定的，它们是由公式给出的

$$c = \frac{1}{\sigma_{m-1}(\Sigma_m)} \int_{\Sigma_m} x_m d\sigma_{m-1}(x) = \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_{\Sigma_m} x_m d\sigma_{m-1}(x)$$

要计算此值\_积分，观察 $\Sigma_m$ 是函数 $\phi(t) = \sqrt{1 - \|t\|^2}$ 在单位球 $B$ 上定义的 $m = 1$ 和投影 $\Sigma_m$ 与交叉口 $A = B \cap \mathbb{R}^{m-1}_+$ 重合 $m = 1 \cap \mathbb{R}^{m-1}_+$ 。应用(1)与 $f(x) = x_m$ ，我们获得

$$\begin{aligned} c &= \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_A \phi(t) \sqrt{1 + \|\text{grad } \phi(t)\|^2} dt = \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_A 1 dt = \frac{2^m}{m\alpha_m} \lambda_{m-1}(A) \\ &= \frac{2\alpha_{m-1}}{m\alpha_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m+1}{2})}. \end{aligned}$$

特别是

$$\|C\| = \frac{\sqrt{m}\Gamma(\frac{m}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m+1}{2})}$$

作为 $m \rightarrow \infty$ ，这些规范倾向于 $\frac{2}{\pi}$ 。我们可以证明它们减少了。注意质心 $C \in \mathbb{R}^m_+$ 位于 $\mathbb{R}$ 中的单位球的那部分的坐标是 $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{m+1} = \frac{c}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m+1}{2})}$ 和 $\|C\|$ 趋向于相同的极限 $\frac{2}{\pi}$ ，但增加而不是减少。

**例2** 设 $M$ 是 $\mathbb{R}$ 中光滑的 $k$ 维流形 $m$ ， $\sigma_k(M) < +\infty$ ，和 $x_0 \in M$ 。让我们找出哪个 $p > 0$ 的积分

$$I_0 = \int_M \frac{d\sigma_k(x)}{\|x - x_0\|^p}$$

有限的。首先，我们要找到一个必要的条件。考虑参数化

点 $x$ 的 $m$ 邻域的 $\Phi_0 = \Phi(a)$ . 在一些球 $B(a, \rho) \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Phi$  满足利普希茨条件:  $\|\Phi(t) - \Phi(a)\| \leq L\|t - a\|$ , 其中 $L$ 是固定的正数. 如果 $\rho$ 足够小, 那么 $\omega_\Phi(t) > \omega_\Phi(a)$  为 $t \in B(a, \rho)$ . 因此

$$I_0 \geq \int_{B(a, \rho)} \frac{\omega_\Phi(t) dt}{\|\Phi(t) - \Phi(a)\|^p} \geq \frac{\omega_\Phi(a)}{2L^p} \int_{B(a, \rho)} \frac{dt}{\|t - a\|^p}$$

如果 $I_0$ 是有限的, 那么右边的积分也是有限的, 这只对 $p < k$ 有可能。

现在我们将证明条件 $p < k$ 不仅是必要的, 而且是充分的 $I_0$ 是有限的。为了立即证明一个更强的结果, 我们引入了积分

$$I(y) = \int_M \frac{d\sigma_k(x)}{\|x - y\|^p} \quad (y \in \mathbb{R}^m)$$

显然,  $I_0 = I(x_0)$ . 我们将证明对于 $p < k$ , 积分 $I$ 在 $x$ 附近是有界的。注意, 一般情况下, 条件 $y \in M$ 不足以使 $I(y)$ 是有限的 $\in M^-/M$ .

我们仍然假设 $\Phi$ 是 $x$ 的 $m$ 邻域的参数化 $I_0$ 和 $x_0 = \Phi(a)$ . 回想一下, 在参数化的附近,  $\Phi$ 是一些微分同胚 $P$ 的限制 (见引理2.1.4; 我们假设空间 $\mathbb{R}^k$ , 在一个定义了 $\Phi$ 的子集上, 被规范地嵌入到 $\mathbb{R}^m$ ). 在一个足够小的球 $B(x_0, r)$ , 地图 $F^{-1}$ 满足某个常数 $C$ 的Lipschitz条件:

$$\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| \leq C\|x - y\| \text{ 为 } x, y \in B(x_0, r) \quad (2)$$

假设 $r$ 很小, 所以 $\omega_\Phi(F^{-1}(x)) \leq 2\omega_\Phi(a)$  为所有 $x$ 值中的 $M_r = M \cap B(x_0, r)$ , 我们将证明积分 $I$ 在球 $B$ 上是有界的 $(x_0, r)$ . 从这个球中取任意点 $y$ , 写成积分 $I(y)$

$$I(y) = \int_{M_r} \frac{d\sigma_k(x)}{\|x - y\|^p} + \int_{M \setminus M_r} \frac{d\sigma_k(x)}{\|x - y\|^p} = I_1(y) + I_2(y).$$

很明显

$$I_2(y) \leq \frac{1}{r^p} \int_{M \setminus M_r} d\sigma_k(x) \leq \frac{1}{r^p} \sigma_k(M) < +\infty$$

它还需要估计积分 $I_1(y)$ 在简单的流形 $M$ 上 $r$ :

$$I_1(y) = \int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{\omega_\Phi(t) dt}{\|\Phi(t) - y\|^p} \leq 2\omega_\Phi(a) \int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{dt}{\|\Phi(t) - y\|^p}$$

让我们从下面估计范数 $\|\Phi(t) - y\|$ . 设 $x = \Phi(t)$ 和 $s = F^{-1}(y)$ . 从(2)可知, 对于 $x, y \in B(x_0, r)$ ,

$$\|\Phi(t) - y\| = \|x - y\| \geq \frac{1}{C}\|t - s\| \geq \frac{1}{C}\|t - u\|,$$

其中 $u$ 是 $s$ 到 $R$ 的投影<sup>k</sup>. 因为点 $x = \Phi(t)$ 和 $y$ 是在球 $B(0, r)$ , 我们有 $\|\Phi(t) - y\| < 2r$ , 因此,  $\|t - u\| \leq C\|\Phi(t) - y\| < 2Cr$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{dt}{\|\Phi(t) - y\|^p} &\leq \int_{\|t-u\| < 2Cr} \left( \frac{C}{\|t-u\|} \right)^p dt = C^p \int_{\|v\| < 2Cr} \frac{dv}{\|v\|^p} \\ &= C^p \frac{k\alpha_k}{k-p} (2Cr)^{k-p}. \end{aligned}$$

所以, 对于 $y \in B(x_0, r)$ ,

$$I(y) \leq 2C^k \omega_\Phi(a) \frac{k\alpha_k}{k-p} (2r)^{k-p} + \frac{1}{r^p} \sigma_k(M)$$

(参数 $C$ 和 $r$ 取决于流形 $M$ 和点 $x_0$ , 但在指数 $p$ 上)。

例3 (类似于简单层势的积分) 设 $M$ 是 $R$ 中的一个光滑的 $k$ 维流形<sup>m</sup>,  $E$ 是 $M$ 的一个紧子集, 和 $w \in C(E)$ . 让我们检查 $p < k$ , 函数

$$y \mapsto I(y) = \int_E \frac{w(x)}{\|x - y\|^p} d\sigma_k(x) \quad (y \in \mathbb{R}^m)$$

在整个空间中是连续的, 在 $R$ 中是无限可微的吗<sup>m</sup>/ $E$ .

$I$ 在 $E$ 之外的平滑性来自于对于 $y_0 \notin E$

如果 $x \in \mathbb{R}^m$ 和 $y$ 位于一个足够小的位置, 范数 $\|x - y\|$ 有界远离零 $y$ 附近0. 因此, 被积函数, 以及它所有的偏导数

关于坐标 $y_1, \dots, y_m$ , 在 $y$ 附近0.

因此在 $y_0$ 条件 (L1oc)的满足, 我们可以应用莱布尼茨规则。

为了证明我在 $y$ 点上是连续的 $0 \in E$ , 我们使用第二部分的定理3. 1. 1. 2. 修复一个数字 $>1$ , 使 $<$ 和把 $C = \max_E |w|$ . 就像我们一样

established in the previous example, the integral  $\tilde{I}(y) = \int_E \frac{C d\sigma_k(x)}{\|x - y\|^{sp}}$  is bounded in the vicinity of  $y_0$ , and this, by Theorem 3 of Sect. 1.1.2, suffices for  $I$  to be in this point continuous.

## 2.4.2

在本节中, 我们将得到富比尼定理的推广

其中,  $R$ 的一个开放的子集<sup>m</sup> ( $m > 2$ ) 不是分层成仿射子空间, 而是分层成一个平滑函数的水平表面。在水平面是同心球体的特殊情况下。事实上, 在这个定理中, 证明了球 $B(0, r)$ 中可和的 $\subset \mathbb{R}^m$ ,

$$\int_{B(0,r)} f(x)dx = \int_0^r t^{m-1} \left( \int_{S^{m-1}} f(t\xi) d\sigma_{m-1}(\xi) \right) dt$$

因为这两个地区都是由  $\sigma$  地区造成的  $m-1$  和体积  $\lambda_m$  是平移不变的吗  
可以考虑具有任意中心的球体。此外，使用等式

$\sigma_{m-1}(tE) = t^{m-1}\sigma_{m-1}(E)$  for  $t > 0$  (see Property (6) in Sect. 2.3.3) and the  
change of variables theorem, we can write the next assertion:

$$\int_{B(a,r)} f(x)dx = \int_0^r \left( \int_{S(a,t)} f(x) d\sigma_{m-1}(x) \right) dt \quad (3)$$

我们接下来要考虑的定理是对这个结果的一个影响深远的推广。

设  $O$  是  $\mathbb{R}^m$  的一个开子集,  $F \in C^1(O)$  和  $\text{grad} F \neq 0$  英寸。然后对于每个可求和的  
函数  $f$ ,

$$\int_O f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{M(t)} \frac{f(x)}{\|\text{grad} F(x)\|} d\sigma_{m-1}(x) \right) dt \quad (4)$$

其中,  $M(t) = \{x \in O \mid F(x) = t\}$ 。

证明让我们首先证明这个定理的一个局部版本: 每一个点  $x_0 \in O$  有一个很小的  
邻域  $U$ , 这样 (4) 对于消失  $U$  之外的每个函数  $f$  都成立。

我们不失一般性地假设  $F(x_0) = 0$ . 此外, 如果需要, 应用平移和正交变换,  
我们可以假设  $x_0 = 0$ , 以及在原点处到  $M(0)$  的切平面与坐标子空间  $x_m = 0$ . 为了  
简化公式, 用  $u$  表示  $x$  到这个子空间的投影, 设  $v$  是最后一个坐标  $x_m$ , 所以  $x = (u,$   
 $v)$ ,  $u =$

$(u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}, v \in \mathbb{R}$ . 然后  $F'_{u_k}(0) = 0$  表示  $1 \leq k < m$  和  $F'(0) = 0$ .  
考虑一下地图  $T: O \rightarrow \mathbb{R}^m$  “直线” 水平面:  $T(x) = (u, F(x))$ . 它将水平曲面转换  
为平行于子空间  $\mathbb{R}^{m-1}$  的平面. 雅各比  $J_T$  这个映射在  $x=0$  处不会消失, 因为  
 $J_T(0) = F'(0) = 0$ . 因此,  $T$  对原点的某个邻域  $U$  的限制是一个微分同型。让我  
们假设  $U$  被投影到一个半径为  $\delta$  的球中

位于水平面  $M(-\varepsilon)$  和  $M(\varepsilon)$  之间, i. e.,

$$U = \{x = (u, v) \mid \|u\| < \delta, |F(x)| < \varepsilon\}$$

其中,  $\delta$  和  $\varepsilon$  都是足够小的正数。然后为  $|t| < \varepsilon$  的设置  
 $T(M(t) \cap U)$  包含在仿射子空间  $v = t$  中, 并且  $T(U)$  与  
笛卡尔积  $W = B^{m-1}(0, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . 显然, 地图  $\Phi$  逆到  
 $T$  对  $U$  的限制, 以及  $T$  本身, 只影响的最后一个坐标  
这个论点, 使它有形式

$$\Phi(u, t) = (u, \phi(u, t)), \text{ 其中 } \|u\| < \delta, |t| < \varepsilon$$

( $\phi$  是地图  $\Phi$  的最后一个坐标函数,  $\phi \in C^1(W)$ ).

因此, 对于  $|t| < \varepsilon$ ,  $M(t)$  位于  $U$  中的部分只是光滑函数  $u \mapsto \phi$  的图  $t(u) \equiv \phi(u, t)$ . 因为  $F(u, \phi_t(u)) \equiv t$ , 很容易建立函数  $\phi$  的梯度之间的关系  $t$  和  $F$ :

$$F'_{u_j}(u, \phi_t(u)) + F'_v(u, \phi_t(u)) \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial u_j} \equiv 0 \quad \text{for } 1 \leq j < m$$

因此

$$\frac{1}{|F'_v|} = \frac{\sqrt{1 + \|\text{grad } \phi_t\|^2}}{\|\text{grad } F\|} \quad (5)$$

此外, 利用恒等式  $F(u, \phi(u, t)) \equiv 1$ , 我们可以计算出  $\Phi$  的雅可比矩阵:

$$J_\Phi(u, t) = \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = \frac{1}{F'_v(\Phi(u, t))}$$

假设  $f$  在  $U$  之外, 我们得到一个替换

$$\int_U f(x) dx = \int_W \frac{f(\Phi(u, t))}{|F'_v(\Phi(u, t))|} du dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left( \int_{\|u\| < \delta} \frac{f(\Phi(u, t))}{|F'_v(\Phi(u, t))|} du \right) dt.$$

让我们把内部积分写成  $\phi$  图上的一个积分  $t$  (见 (1)). 鉴于 (5), 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\|u\| < \delta} \frac{f(\Phi(u, t))}{|F'_v(\Phi(u, t))|} du &= \int_{\|u\| < \delta} \frac{f(u, \phi_t(u))}{\|\text{grad } F(u, \phi_t(u))\|} \sqrt{1 + \|\text{grad } \phi_t(u)\|^2} du \\ &= \int_{M'(t)} \frac{f(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} d\sigma_{m-1}(x), \end{aligned}$$

其中  $M'(t)$  是  $\phi$  的曲线图  $t$ , i. e.,  $U$  中包含的  $M(t)$  部分. 因此

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left( \int_{M(t) \cap U} \frac{f(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} d\sigma_{m-1}(x) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{M(t) \cap U} \frac{f(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} d\sigma_{m-1}(x) \right) dt \end{aligned}$$

由于  $f = 0$  在  $U$  之外, 因此 (4) 对于不只在  $x$  足够小的邻域中消失的函数  $0$ .

根据得到的定理的局部版本, (4) 支持一个由  $0$  的紧子集支持的可和函数  $f$ . 事实上, 对于每个点  $x \in 0$  选择一个邻域  $U_x \subset 0$ , 使 (4) 适用于在  $U$  外消失的函数  $x$ . 根据定理 2.1.8, 存在一个单位  $\phi$  的划分  $1, \dots, \phi_N$  在隶属于家庭的 “ $\text{supp } (f)$ ” 组上  $x \in 0$ . 为  $f \phi$  写入 (4)  $k$ :

$$\int_{\mathcal{O}} f(x) \varphi_k(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{M(t)} f(x) \varphi_k(x) d\sigma_{m-1}(x) \right) dt.$$

加上这些等式，我们得到了紧支持函数的期望结果。为了证明一个具有任意支持的非负函数（显然，这足以证明该定理），我们应该用一个增加的紧子集 $K_n$ 序列来耗尽集合 $\mathcal{O}_n$ 并应用李维斯

(4) 两边的定理，用 $f$ 用 $f \chi_{K_n}$ 代替 $f$ 。□

备注：如果 $f$ 是连续的，则该函数

$$t \mapsto \int_{M(t)} \frac{f(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} d\sigma_{m-1}(x)$$

也是连续的。如果 $f$ 的支持度很小，则从(6)开始。一般的情况可以用一个单位的划分来证明。

同时也观察到，当在满足这些条件的封闭集合 $E$ 上违反了 $F$ 的光滑性时，该定理仍然有效

$$\lambda_m(E) = 0, \quad \sigma_{m-1}(M(t) \cap E) = 0 \text{ 为每个 } t$$

为了证明这一点，只要将该定理应用于 $\mathcal{O} \setminus E$ ，用 $M(t)$ 替换为 $M(t) \setminus E$ 就足够了。

### 2.4.3

我们现在对所得到的结果再作一些评论。

(1) 显然，公式(3)遵循上述定理与 $\mathcal{O} = \mathbb{R}^m \setminus \{a\}$

和 $F(x) = \|x - a\|$ （注意 $\|\text{grad } F(x)\| \equiv 1$ ）。

(2) 用 $f/\|\text{grad } f\|$ 替换 $f$ ，我们可以重写(4)的形式

$$\int_{\mathcal{O}} f(x) \|\text{grad } F(x)\| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{M(t)} f(x) d\sigma_{m-1}(x) \right) dt \quad (4')$$

如果 $F$ 足够光滑，条件可以去掉 $\|\text{grad } F\| \neq 0$ ，因为，根据Sard定理，函数 $F \in C^1$ 的临界值的集合 $\nabla F^{-1}(0)$ 的测量值为零。 $\tilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset$ 的确，让 $\tilde{\mathcal{O}} = \{x \in \mathcal{O} \mid \|\text{grad } F(x)\| = 0\}$ ，设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 $F$ 的临界值的集合，使 $\lambda_1(E) = 0$ 。如果 $t \in E$ ，则 $F$ 不取 $\mathcal{O}$ 上的值 $t$ ，因此，取 $M(t) \cap \tilde{\mathcal{O}} = M(t)$ 。因此，我们可以通过应用(4')向 $\tilde{\mathcal{O}}$

(3) 让 $V(u) = \lambda_m(\{F < u\})$  ( $u \in \mathbb{R}$ )。假设 $V(u) < +\infty$ ， $f \equiv 1$ ，并将(4)应用于 $\mathcal{O}(F < u)$ ，我们有（考虑到 $t > u$ 的 $M(t) = \emptyset$ ）

$$V(u) = \int_{-\infty}^u \left( \int_{M(t)} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} \right) dt$$



因为函数是  $t \rightarrow \frac{1}{M(t) \|\text{grad } F(x)\|} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{dt}$  是连续的 (见备注8.4.2), 区分最后一个等式, 我们得出以下结果:

$$V'(u) = \int_{M(u)} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\text{grad } F(x)\|} \quad (7)$$

在特殊情况下,  $F(x) = \|x\|$  (相应地,  $\|\text{grad } F(x)\| = 1$ ), 得到的公式导致等式  $(\lambda_m(B(u)))' = \sigma_{m-1}(S^{m-1}(u))$ , 我们已经遇到过了。2.3.5, 示例4)。

#### 2.4.4

现在我们用公式(7)来联系一个表面的面积和它的闵可夫斯基面积。可以证明对于光滑曲面中包含的紧集合  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,

$$\sigma_{m-1}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_m(A_\varepsilon \setminus A)}{2\varepsilon}$$

其中  $A_\varepsilon$  是  $A$  的  $\varepsilon$ -邻域。我们将证明一个类似的公式, 不是对于光滑曲面的任意紧子集, 而是光滑函数的紧勒贝格集的边界。

**定理** 设  $O$  是  $\mathbb{R}^m$  的一个开子集,  $F \in C^2(O)$ ,  $K = \{x \in O \mid F(x) \leq C\}$  和  $M = \partial K$ 。如果集合  $K$  是紧的, 在  $M$  上的梯度为  $f$ , 那么  $M$  的面积与闵可夫斯基面积重合。e.,

$$\sigma_{m-1}(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_m(K_\varepsilon \setminus K)}{\varepsilon}$$

证明首先假设  $\|\text{grad } F\| \equiv 1$  对  $M$ ; 我们也可以不失一般性地假设  $C = 0$ 。修复了  $\delta > 0$ , 这样就做了  $K_\delta \subset O$ 。设  $\omega$  为集合  $K$  上映射  $x \mapsto \text{grad } F(x)$  的连续性模  $\omega: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。我们将假设  $\delta$  太小了, 以至于  $\omega(\delta) < 1/2$ 。让我们证明, 对于小的  $\varepsilon > 0$ , 集合  $V(\varepsilon) = \{x \in K_\delta \mid F(x) \leq \varepsilon\}$  靠近  $K$  的  $\varepsilon$  邻域。为此, 保持上述的符号, 我们将证明下面的引理成立。

**引理** 让  $\varepsilon < \delta/2$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon(1 - \omega(2\varepsilon))$  和  $\varepsilon'' = \varepsilon(1 + \omega(2\varepsilon))$ ; 然后

$$V(\varepsilon') \subset K_\varepsilon \subset V(\varepsilon'')$$

**引理的证明**, 如果  $x \in K_\delta \setminus K$  和  $x_0 \in M$  最近的点吗到  $x$ , 那么

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &\leq \max_{z \in [x, x_0]} \|\text{grad } f(z)\| \|x - x_0\| \\ &\leq (1 + \omega(\|x - x_0\|)) \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

因此, 对于  $K$  中的每个点  $x_\varepsilon$ , 对于  $\varepsilon < \delta$ , 我们有  $F(x_\varepsilon) \leq (1 + \omega(\varepsilon))\varepsilon \leq \varepsilon''$ 。因此,  $K_\varepsilon \subset V(\varepsilon'')$ 。

现在我们将证明  $V(\varepsilon') \subset K_\varepsilon$ 。让  $x \in V(\varepsilon') \setminus K$ , 然后让  $x_0$  是  $M$  中最接近  $x$  的点。根据  $V(\varepsilon')$  的定义, 我们有  $\|x - x_0\| < \delta$ 。



我们很容易看到向量 $x-x_0$ 和 $\text{grad}F(x_0)$ 成比例:

$x - x_0 = \omega \|x - x_0\| \text{grad}F(x_0)$ . 因此, 对于一些 $z \in [x_0, x]$ 我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq F(x) - F(x_0) = \langle \text{grad}F(z), x - x_0 \rangle = \langle \text{grad}F(x_0), x - x_0 \rangle \\ &\quad + \langle \text{grad}F(z) - \text{grad}F(x_0), x - x_0 \rangle \\ &\geq \|x - x_0\| - \omega (\|x - x_0\|) \|x - x_0\| \end{aligned} \quad (8)$$

因为 $\|x-x_0\| < \delta$ , 我们得到了 $\omega (\|x-x_0\|) \leq \omega(\delta) \leq 1/2$ , 其中 $\|x-x_0\| \leq 2\varepsilon$ . 回到(8), 我们看到了那个

$$\varepsilon > \|x - x_0\| - \omega (\|x - x_0\|) \|x - x_0\| > \|x - x_0\| - \omega(2\varepsilon) \|x - x_0\|,$$

i.e.,  $\|x - x_0\| \leq t = \varepsilon / (1 - \omega(2\varepsilon))$ . 由此可见,  $V(\varepsilon) \subset K_t$ . 从 $t > \varepsilon$ 开始我们有 $\omega(2\varepsilon) \leq \omega(2t)$ , 其中 $\varepsilon = t(1 - \omega(2\varepsilon)) > t(1 - \omega(2t))$ ,

$$V(t(1 - \omega(2t))) \subset V(\varepsilon) \subset K_t,$$

用 $\varepsilon$ 替换 $t$ , 可以重写成这个形式

$$V(\varepsilon \setminus) = V(\varepsilon(1 - \omega(2\varepsilon))) \subset K_\varepsilon$$

□

让我们回到这个定理的证明上来。从引理中可以得出

$$(1 - \omega(2\varepsilon)) \frac{\lambda_m(V(\varepsilon') \setminus K)}{\varepsilon'} \leq \frac{\lambda_m(K_\varepsilon \setminus K)}{\varepsilon} \leq (1 + \omega(2\varepsilon)) \frac{\lambda_m(V(\varepsilon'') \setminus K)}{\varepsilon''}.$$

通过(7), 如 $\varepsilon \rightarrow 0$ , 这个不等式的最外层部分趋向于 $1_{M \setminus \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\text{grad}F(x)\|}} = \sigma_{m-1}(M)$ , which completes the proof of the theorem under the additional assumption made above. Note that at this stage of the proof, we haven't yet used  $C^2F$ 的平滑度, 但只使用了 $C^1$ 平滑度。

在一般情况下 (仍然假设 $C=0$ ), 我们通过公式引入一个辅助函数 $H$

$$H(x) = \frac{F(x)}{\sqrt{\|\text{grad}F(x)\|^2 + F^2(x)}}.$$

很明显,  $H \in C^1(0)$ 、 $K=0$  ( $H \leq 0$ ), 和

$$\text{grad}H(x) = \frac{\text{grad}F(x)}{\sqrt{\|\text{grad}F(x)\|^2 + F^2(x)}} + F(x) \text{grad} \frac{1}{\sqrt{\|\text{grad}F(x)\|^2 + F^2(x)}}.$$

因此, 对于  $x \in M$ ,  $\|\text{grad}H(x)\|=1$ , 并且期望的等式在证明的第一部分中成立。  
◻

## 2.4.5

利用等周不等式和定理2.4.4, 我们可以得到加格里亚多-尼伦伯格-索波列夫不等式的主要特情况。对于  $p = 1$ , 它采用这样的形式

$$\left( \int_{\mathbb{R}^m} |F(x)|^{\frac{m}{m-1}} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} \|\text{grad} F(x)\| dx$$

$F \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$ . 我们将证明它, 并顺便减小右边的系数。因为每一个光滑函数, 连同它的所有导数, 都可以用  $C$  类的函数均匀地近似 (见第二节的定理2.4.4), 在接下来的部分中, 我们假设  $F \in C(\mathbb{R}_0^\infty)$ . 然后公式 (4') 与  $f \equiv 1$  产生

$$\int_{\mathbb{R}^m} \|\text{grad} F(x)\| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{m-1}(M(t)) dt \quad (9)$$

其中,  $M(t)$  是集合  $V(t) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) > t\}$ . 由于, 根据Sard定理, 函数  $F$  的临界值集的测度为零, 如果我们将  $\int \|\text{grad} F(x)\| dx$  积分而不在整个空间  $\mathbb{R}^m$  上, 这个等式显然仍然有效, 但只超过设置的  $0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) = 0, \text{grad} F(x) = 0\}$ . 在这种情况下, 我们可以假设  $F > 0$ , 因为否则  $F$  可以被  $|F|$  取代。

根据定理2.4.4, 对于非临界值  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma_{m-1}(M(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_m((V(t))_\varepsilon \setminus V(t))$$

根据等周不等式, 右侧不小于  $m \alpha_m \lambda_m^{1/m}(V(t))$ , 其中  $\alpha_m$  是单位球的体积。因此 (9) 意味着

$$\int_{\mathbb{R}^m} \|\text{grad} F(x)\| dx \geq m \alpha_m^{1/m} \int_0^\infty \lambda_m^{1/m}(V(t)) dt \quad (10)$$

要估计最后一个积分, 我们需要以下引理。

引理如果一个非负函数  $\psi$  在  $[0, +\infty)$  上没有增加, 那么对于任何  $r > 1$  和  $s > 0$ ,

$$\left( \int_0^s \psi^r(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_0^s \psi(t) dt$$

引理的证明表示不等式的左边和右边分别为  $I(s)$  和  $J(s)$ 。由于函数  $\psi$  不增加,  $I(s) \geq \psi(s) \left( \int_0^s dt \right)^{\frac{1}{r}} = s \psi(s)$ . 因此, 几乎所有的  $s > 0$

$$I'(s) = \frac{1}{r} r s^{r-1} \psi^r(s) \leq (s \psi(s))^{r-1} r s^{r-1} \psi^r(s) = \psi(s) = J'(s).$$

由于I, J函数是绝对连续的, 并且 $I(0) (=J(0)) (=0)$ 。□  
 将引理应用于函数 $\psi(t) = \lambda(V(t))$ , 我们得到了

$$\int_0^\infty \lambda(V(t)) dt \geq \frac{1}{r} \int_0^\infty t^{r-1} \lambda_m(V(t)) dt = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^m} |F(x)|^r dx$$

(最后, 我们使用了命题6.4.3)。对于 $r = \frac{m}{m-1}$ , 这个不等式与(10)一起生成所需的界限:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |F(x)|^{\frac{m}{m-1}} dx \leq \frac{1}{m\alpha_m^{1/m}} \int_{\mathbb{R}^m} \|\text{grad} F(x)\| dx$$

注意 $m\alpha_m^{1/m} > 2^{\frac{1}{m}}$ , 因为

$$\frac{1}{m} \alpha_m = \lambda(B(1)) > \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{m}} B(1)\right) = \frac{1}{\sqrt{m}} \lambda(B(1)) = \frac{2}{\sqrt{m}}$$

## 5.2 向量场的整合

### 2.5.1

在力学和物理问题中, 人们经常遇到形式的积分

$$\int_M \langle V, \theta \rangle$$

其中 $M$ 是光滑流形,  $V(x)$ 是所考虑的问题对应的向量,  $\theta(x)$ 是仅与 $M$ 相关的单位向量,  $\sigma$ 是 $M$ 的表面积。注意, 对于被积函数可和, 向量 $V(x)$ 的所有坐标在 $M$ 上可和就足够了, 这等价于条件 $\int_M \|V(x)\| d\sigma(x) < +\infty$ 。在下面的内容中, 我们假设这个条件被满足了。

我们将只讨论两种特别感兴趣的极端情况。

(I)  $M$ 是一个一维流形,  $\theta(x)$ 是 $M$ 在 $x$ 处的一个单位切向量。

(II)  $M$ 是余维1(曲面)的流形,  $\theta(x)$ 是 $M$ 在 $x$ 处的单位法向量。

我们将介绍几个术语, 使我们能够澄清所产生的积分的物理解释。

让我们考虑一个连续的映射 $V: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 其中 $E \subset \mathbb{R}^m$ , 作为向量的族 $x \in E$ 并称它为 $E$ 上的向量场。作为一个规则, 我们假设集合 $E$ 是开的, 并且字段是平滑的(后者意味着映射 $V$ 是 $C^1$ 平滑)。

我们可以将 $V(x)$ 解释为施加在 $x$ 点上的力, 并谈论一个力场。我们也可以想象在集合 $E$ 中有一个稳态

物质（流体或气体）的流动，使粒子在 $t$ 时刻处于 $x \in E$ 位置的速度不依赖于时间，而等于 $V(x)$ 。在这种情况下，有人说在 $E$ 中有一个静止的流， $V$ 是它的速度场。我们将遵守这些机械的解释。然而，人们应该记住，在应用中，另一种性质的矢量场也发挥了重要的作用，例如，在麦克斯韦方程中出现的电场或磁场。

## 2.5.2

在一个定向曲线上的积分。让我们先讨论一下案例I。为简单起见，我们假设向量场 $V$ 定义在一个域 $0 \subset \mathbb{R}^m$ 中。为了强调所考虑到的问题的一维性质，改变符号是有益的。一个一维的流形将被称为一条曲线，并用 $L$ 表示。测量值 $\sigma = \sigma_1$ 将像往常一样被称为长度。

用 $\tau(x)$ 表示在点 $x$ 处向 $L$ 的单位切向量。显然，存在

只有两个这样的向量： $\tau(x)$ 和 $-\tau(x)$ 。在平滑曲线上的方向 $L$ 是定义在 $L$ 上的连续单位切向量族。换句话说

一个连续的家族 $\tau = \{\tau(x)\}_{x \in L}$ 是 $L$ 上的一个方向，如果 $\|\tau(x)\| = 1$ 和 $\tau(x)$ 是所有 $x \in L$ 的 $x$ 处的切向量。一条曲线配备有一个方向，我.e.，这对曲线 $(L, \tau)$ 被称为定向曲线。

使用坐标函数 $V_1, \dots, V_m$ 对于场 $V$ ， $V, \tau$ 的线积分可以写成以下形式

$$\int_L \langle V(x), \tau(x) \rangle d\sigma(x) = \int_L V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m$$

它也被记为 $\int_L V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m$ ；后一种符号并没有明确地表示方向（假定该方向是给定的）。

显然，从 $\tau = \{\tau(x)\}$ 反转方向 $x \in L$ 到 $\{-\tau(x)\}_{x \in L}$ 更改直线积分的符号。

在一个连接的曲线上，只有两个相反的方向。事实上，如果 $\{\tilde{\tau}(x)\}_{x \in L}$ 是 $L$ 上的一个方向，那么函数 $x \mapsto \tilde{\tau}(x)$ ， $(x)$ 在 $L$ 上是连续的，并且只取值 $\pm 1$ 。 $\tilde{\tau}$ 通过连通性，这个函数在 $L$ 上是恒定的，这意味着它或者与 $\tau$ 重合，或者与相反的方向一致。 $\tilde{\tau}$ 注意，为了在连接曲线上定义方向，仅在一处上定义切向量就足够了。

使用平滑参数化 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 对于一个简单的曲线 $L$ ，我们可以很容易地在 $L$ 上构造一个方向，我们将其称之为与 $\gamma$ 对应的方向。它是由这个公式来定义的。

$$\tau(x) = \frac{\gamma'(\gamma^{-1}(x))}{\|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\|}$$

这意味着(参见定理8.4.1)是一个计算积分(1)的公式：

$$\int_{(L, \tau)} V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$
 这就导致了一个有用的概括。设  $\gamma$  是定义在  $[a, b]$  上的  $O$  中的一个分段光滑路径。向量场  $V$  在  $\gamma$  上的积分是最后一个公式右边的积分。它用  $\int_{\gamma} V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m$ 。

现在我们将解释如何解释一个有向曲线  $(L, \tau)$  上的积分(1)。假设  $V$  是一个力场,  $L$  是  $O$  中包含的一条曲线。考虑一个点  $x \in L$  的一个小的邻域  $U$ 。鉴于  $U$  的体积很小, 我们可以假设这条曲线几乎是直的, 而在它上面的场  $V$  几乎是恒定的。因此, 力  $V$  沿  $U$  所做的功必须近似等于恒定力  $V(x)$  在通过矢量  $\sigma(U)\tau(x)$  移动粒子时所做的功。后一个功等于  $V(x) \cdot \tau(x) \sigma(U)$ 。因此, 我们很自然地假设力  $V$  沿着定向曲线的任意段  $e$  所做的功  $A(e, \tau)$  满足估计值

$$\inf_{x \in e} V(x) \cdot \tau(x) | \sigma(e) \leq A(e, \tau) \leq \sup_{x \in e} V(x) \cdot \tau(x) | \sigma(e)$$

此外,  $A(e, \tau)$  的加性依赖于1。在这些假设下, 使用一般的方案, 我们可以看到力  $V$  在移动一个粒子沿定向曲线  $(L, \tau)$  时所做的功是由积分(1)给出的。很明显, 位于  $O$  中的分段光滑路径上的积分也有相同的解释。

**定义一个向量场**  $V = (V_1, \dots, V_m)$  如果在  $O$  上存在一个光滑函数  $F$ , 使得  $V(x) = \text{梯度}(x)$  对于所有点  $x \in O$ , 则在域  $O$  中定义的)称为势。

在势场的情况下, 积分  $\int_{\gamma} V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m$  满足所谓的梯度定理, 或线积分的基本定理。

**命题1** 设  $F$  是向量场的势  $V = (V_1, \dots, V_m)$ , 设  $\gamma$  为  $O$  中从  $a$  开始到  $B$  结束的分段光滑路径。然后

$$\int_{\gamma} V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m = F(B) - F(A)$$

证明它足以证明只有一个平滑路径  $\gamma$  的断言。我们假设它被定义在一个区间  $[a, b]$  上, 因此  $A = \gamma(a)$  和  $B = \gamma(b)$ 。它很容易检查,  $V(\gamma), \gamma' = (F(\gamma))'$ 。因此

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} V_1(x) dx_1 + \dots + V_m(x) dx_m &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b (F(\gamma(t)))' dt \\
 &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A). \quad \square
 \end{aligned}$$

因此，一个势场沿着路径所做的功只取决于其端点上的势的值，并且等于势的增量。在这种情况下，有人说这个积分是与路径无关的。至关重要是，反之也是如此。

命题2 如果一个直线积分是与路径无关的，那么相应的向量场是势的。

证明 域0中的任意两点A和B都可以由位于0中的分段光滑路径连接。设V是0中的一个向量场，它沿着这些路径的所有积分都重合。用来表示它们的共同值

$\int_A^B V_1(z) dz_1 + \dots + V_m(z) dz_m$ . 固定一个点A ∈ 0，考虑“具有变上限的积分”

$$F(x) = \int_A^x V_1(z) dz_1 + \dots + V_m(z) dz_m (x \in 0).$$

很容易看出， $F(y) - F(x) = \int_x^y V_1(z) dz_1 + \dots + V_m(z) dz_m$  核对应，然后将 $F(y)$ 作为通过x的路径的积分。让我们证明F是V的一个势。修正了x，并考虑了一个任意的向量 $e_j$ 规范基础上的。对于一个足够小的实数t，我们有

$$\begin{aligned} F(x + te_j) - F(x) &= \int_x^{x+te_j} V_1(z) dz_1 + \dots + V_m(z) dz_m \\ &= \int_0^t \langle V(x + se_j), e_j \rangle ds \\ &= \int_0^t V_j(x + se_j) ds \\ &= \int_0^1 V_j(x + tse_j) dt \\ &= t \int_0^1 V_j(x + tse_j) dt. \end{aligned}$$

因此， $F(x + te_j) - F(x) = t(V_j(x) + o(1))$  作为  $t \rightarrow 0$ ，i. e.， $(x) = \frac{\partial F}{\partial x_j}$   $V_j(x)$ .

在路径独立的情况下，一个封闭路径上的积分消失了（回想一下，如果一条路径的两个端点重合，则称为封闭路径）。然而，在一般情况下，这是不正确的。

例如，考虑力场  $V(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  定义在

“刺穿”飞机  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . 让我们沿着一个圆计算它的工作A，或者，更准确地说，沿着闭合路径  $\gamma(t) = (cost, sint)$ ，其中  $t \in [0, 2\pi]$ ：

$$A = \int_{\gamma} \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} dt = 2\pi$$

这个例子表明，非势场沿着闭合路径所做的功可能是非零的。请注意，所考虑的场对每个不包含原点的半平面的限制是潜在的。特别地，它对半平面  $x > 0$  的限制是函数  $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  的梯度场。

对于光滑场，可以很容易地建立一个简单而重要的势性必要条件。事实上，如果  $F$  是一个光滑场的势，那么  $V = (V_1, \dots, V_m)$ ，那么，根据混合导数（或 clairaut）定理，我们有

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \quad (x) =$$

□

因此，等式

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \quad (x) \quad (x \in O, j, k = 1, \dots, m)$$

是电场  $V$  成为电势的必要条件。如上示例所示，在一般情况下，这些条件是不够的。然而，在“好的”领域中，它们确实是这样的。撇开对这个问题的彻底调查不谈，我们只讨论这个结果的一个特殊情况，称为庞加莱引理。

**命题3A光滑场**  $V = (V_1, \dots, V_m)$  定义在一个凸域  $O$  中，满足条件(2)是势。

为了简化公式，我们假定  $O$  包含原点。然后对于每个点， $x = (x_1, \dots, x_m)$  在  $O$  中，直路径  $\gamma_x(t) = tx, t \in [0, 1]$ ，位于  $O$ 。设置  $F(x) = \int_{\gamma_x} V_1(z) dz_1 + \dots + V_m(z) dz_m$ ；我们将证明  $F$  是  $a$

$V$  的潜力。的确，

$$F(x) = \int_0^1 \langle V(\gamma_x(t)), \gamma'_x(t) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^m x_k V_k(tx) dt$$

对  $x$  的差别  $j$  并利用 (2)，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 V_j(tx) dt + x \sum_{k=1}^m \int_0^1 \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(tx) dt \\ &= \int_0^1 V_j(tx) + t x \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(tx) dt \\ &= \int_0^1 (t V_j(tx)) dt = V'_j(x). \end{aligned}$$

□

说明该证明没有充分利用该域的凸性。特别是，它仍然有效的星域 ( $O$  是一个星域，如果有

一个点  $x_0 \in O$ ，使线段  $\{x_0 + t(x - x_0) \mid t \in [0, 1]\}$  位于  $O$

对于每一个  $x \in O$ 。

如果  $O$  的每个点都有一个邻域，其中该场有势，那么定义在域  $O$  上的向量场是局部势的。命题3暗示了一个明显但有用的推论。



当且仅当它满足条件(2)时，光滑场是局部势的。

上面的例子表明，局部势场可能不是全局势场，而局部势场在封闭路径上的积分可能是非零的。

### 2.5.3

表面的侧面和矢量场的流动。现在我们继续讨论案例二。考虑该形式的积分  $\int_M V(x) \cdot v(x) d\sigma(x)$ ，经常出现在物理和力学问题中。这里  $M$  是一个光滑的表面， $v(x)$  是一个在  $x$  点上垂直于  $M$  的单位，而  $V(x)$  是一个对应于所研究的问题的向量。

回想一下，光滑表面  $M \subset \mathbb{R}^m$  在点  $x \in M$  是一个与切空间  $T$  正交的非零向量  $x$ 。单位法线是单位长度的法线。在曲面的每一点上，只存在两个（相反的）法线。

光滑曲面  $M$  的一侧是定义在  $M$  上的连续单位法线族。换句话说，一个连续的家庭  $\{v(x)\}_{x \in M}$  如果  $\|v(x)\| = 1$  和  $v(x)$  是每一个  $x \in M$  在  $x$  处的  $M$  的法线，则为  $M$  的一个边。

使用我们的直观的概念的表面积值成正比所需的油漆油漆（如本章开头提到的），我们现在可以说的表面可能被认为是表面连同一层油漆，或画笔的所有位置的集合。还有一种更广泛使用的日常解释，即“可见的一面”。这是由表面对观察者“可见”的部分决定的，或者更准确地说，是由法线“朝向”视觉光线的部分（与它形成一个钝角）。

现在我们从非正式的讨论到关于表面一侧概念的必要阐述。如果  $v = \{v(x)\}_{x \in M}$  是曲面  $M$  的一侧，那么，显然，相反的族  $\{-v(x)\}_{x \in M}$  也是  $M$  的一面。在一个连通的表面上，没有其他的边（为了证明这一点，它足以几乎从字面上再现在考虑曲线上的方向时所使用的参数）。考虑到这一点，有一面的表面被称为双面的。要表示连接曲面的一侧，只要至少在一点上定义一个法线就足够了。

显然，如果一个光滑的曲面  $M$  有一个全局参数化的  $\Phi$ ，那么我们可以很容易地使用向量  $N$  构造  $M$  的一个边  $\Phi$ （见教派。2.3.4）：

$$v(x) = \frac{N_{\Phi}(\Phi^{-1}(x))}{\|N_{\Phi}(\Phi^{-1}(x))\|}$$

我们说这条边是由  $\Phi$  生成的，或者对应于  $\Phi$ 。

图  $\Gamma_{\Phi}$  光滑函数的  $\Phi$  是一个双面曲面。它的规范参数化生成了边

$$x = (u, \Phi(u))' \rightarrow \frac{(-\text{grad } \Phi(u), 1)}{1 + \|\text{grad } \Phi(u)\|^2}$$

注意，这边的所有向量都与x成锐角，因此我们要说它是图的上部，相反的一面是下。

一个双面曲面的另一个重要例子，即一个“足够好的”紧化集的边界，将在下一节中考虑。

从上面我们可以看到，每一个足够小的邻域一个光滑表面的点M有一个边。然而，这并不意味着整个表面M也有一个边。一个反例是一个曲面，叫做莫比乌斯条，可以通过对矩形“半扭曲”得到，然后把它相反的两边“粘在一起”。更正式地说，给定了a

矩形  $[-a, a] \times (-b, b)$ ，我们识别了中心对称点位于垂直边(注意，通过识别对称的点

对于y轴，我们将得到一个普通的圆柱面，这是很明显的。有两边的它可以证明，人们不能定义莫比乌斯条带的一侧。

我们鼓励读者通过涂抹一条扭曲的窄矩形纸条所获得的表面来进行实验。不能定义边的平滑曲面称为单面曲面。

已经选择了一个边  $x \in M$  对于位于定义向量场V的域内的双面曲面，我们可以考虑曲面积分

$$\int_M \langle V(x), v(x) \rangle d\sigma(x)$$

(倒反转明显改变了积分的符号)。如果所选的边是由参数化的  $\Phi \in C$  生成的  $l(G)$ ，然后将该积分的计算简化为一个多重积分的计算(见定理2.4.1和N的公式Φ在教区。2.3.4):

$$\begin{aligned} \int_M \langle V(x), v(x) \rangle d\sigma(x) &= \int_G \langle V(\Phi(u)), N\Phi(u) \rangle du_1 \dots du_m \\ &= \int_G \langle V_1(\Phi(u)) \dots V_m(\Phi(u)), \frac{\partial \Phi_1(u)}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \Phi_m(u)}{\partial u_m} \rangle du_1 \dots du_m \end{aligned}$$

现在我们转向一个导致积分(4)的物理问题。假设在一个域  $0 \subset \mathbb{R}^m$  中有一个矢量场V，我们认为它是一个静止流体流动的速度场。如何计算单位时间内流过光滑双面表面  $M \subset \mathbb{R}^m$  的流量？当解决这个问题时，人们应该记住，流体颗粒可以以不同的方向穿过表面，“从一边移动到另一边”。如果表面束缚了一个物体，这意味着流体可能流出，也可能流入物体。因此，为了使我们的问题更加明确，我们确定了一个边  $\{v(x)\}_{x \in M}$ 。

考虑一个点  $x \in M$  的一个小的邻域U。那么我们可以假设这片表面几乎是平面的，速度V是

几乎恒定。因此，在单位时间内流过U的流体充满了一个弯曲的平行六边形素

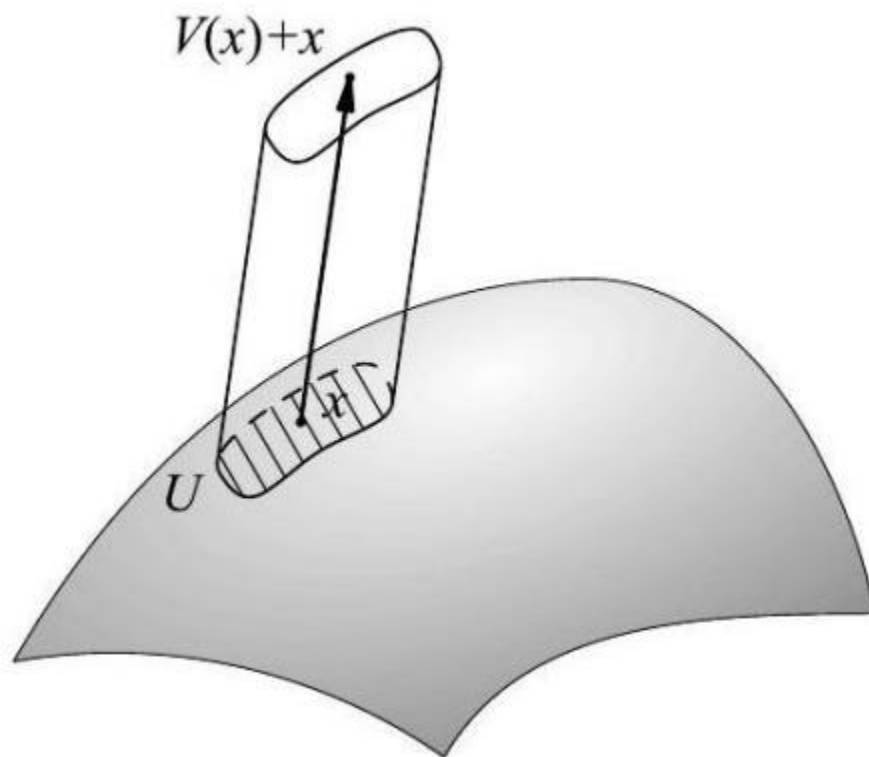


图2.2基U和边等于V(x)的平行六边素  
靠近基U的平行六边体，边等于V(x)。后者的体积等于 $\sigma(U) |V(x), v(x)|$  (见图. 2.2).

如果向量V(x)和V(x)形成锐角， $i$ ，则内积V(x)、V(x)为正。e.，如果流体“沿v(x)方向”穿过M，否则为负值。因此，这就是积分1的绝对值 $\int_U V(x) \cdot v(x) d\sigma(x)$ 等于单位时间内流经U的流体量。它的符号取决于表面的一侧的选择，并表征了流体运动的方向。考虑到这些因素，积分(4)被称为向量场V在给定方向上通过M的流动。

例如，设f是一个结构域 $0 \subset \mathbb{R}$ 上的光滑函数 $\mathbb{M}$ 这并没有任何关键点。组

$$\frac{1}{\|\text{grad } f(x)\|} v(x) = \text{grad } f(x), \quad V(x) = v(x) \quad (x \in 0) \quad \frac{1}{\|\text{grad } f(x)\|}$$

很明显，这个家庭 $x \in M_C$ 是水平面M的一侧吗 $C = \{x \in 0 \mid f(x) = C\}$   
. v在这个方向上的流动就是M的面积C.

$V$ 通过 $M$ 的流量 $C$ 也有一个简单的几何解释：它是集合 $O$ 的体积在 $u = C$ 处的导数 $u = \{x \in O \mid f(x) \leq u\}$  (见第1节中的注释(3))。2.4.3)。

#### 2.5.4

讨论了最小流形上的向量场的积分。2.5.2)和最大值。在2.5.3)维数中，有几个词是关于平面曲线上的积分的。在这种情况下，最大维数和最小维数重合（两者都等于1）。因此，一个平面曲线 $L$ 不仅有一个方向，而且也有一个边。在形式上，我们得到了一个向量场 $V = (V_1, V_2)$ 超过 $L$ 。首先，在一个定向曲线上的积分

$$\int_L V_1(x, y) dx + V_2(x, y) dy = \int_L \langle V(x, y), \tau(x, y) \rangle d\sigma_1(x, y)$$

第二，在 $L$ 上的积分对应于一个边 $v = \{v(x, y) \mid (x, y) \in L\}$ ：

$$\int_L \langle V(x, y), v(x, y) \rangle d\sigma_1(x, y)$$

我们很容易看出这两个积分之间有密切的关系。为了精确地说，考虑正交变换 $z = (x, y) \mapsto U(z) =$

$(-y, x)$ ，旋转一个向量 $z$ 由 $\pi/2$ “逆时针”（识别 $R^2$ 和复数 $C$ 的集合，我们可以简单地把它写成 $U(z) = iz$ ）。自从通过将一条法线旋转一个直角，我们得到了一个切向量，每条边 $v$ 的 $L$ 产生了一个取向 $\tau = U(v)$ 。相反地，每个方向都在 $\tau$ 上 $L$ 产生了 $v = U^{-1}(\tau)$ 。给定一个方向和一个相关的边根据 $\tau = U(v)$ 的公式，我们说它们彼此一致。显然， $\langle V, v \rangle = \langle V, U^{-1}(\tau) \rangle$ ，其中 $V = U(V)$ ，因此 $V$ 在 $v$ 方向上的流动是等于 $\langle U(V), \tau \rangle$ 在方向曲线 $(L, \tau)$ 上的积分，其中 $\tau = U(v)$ ：

$$\int_L \langle V, v \rangle d\sigma_1 = \int_L \langle U(V), \tau \rangle d\sigma_1$$

这个等式可以用这个形式来重写

$$\int_L \langle V, v \rangle d\sigma_1 = \int_L (-V_2(x, y) dx + V_1(x, y) dy) \quad (3)$$

我们将在下一节中讨论格林公式时使用这一点。2.6.7)。

## 2.6. 高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式

### 2.6.1

经典积分是基于牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$$

它用积分区间的端点的值来表示导数的积分。

在多维情况下，这个公式的模拟是什么？很自然地假设，对于几个变量的函数，应该替换 $f$ 通过一个偏导数，该区间由一个紧集 $K$ 组成，并考虑该积分

$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_m} d\lambda_m$ 。是否有可能用一个包含 $f$  on 的值的公式来表示它？只有积分域的边界吗？本节的目的是要表明，在对集合 $K$ 的边界结构进行的非常广泛的假设下，这个问题的答案是肯定的。

我们所寻找的公式的最简单的版本可以用富比尼的公式得到

定理  $\frac{\partial f}{\partial x_m}$  积分在平行六面体  $P = Q \times [a, b]$  上光滑的函数  $f$  的偏导数  $[a, b]$ ，其中  $Q \subset \mathbb{R}^{m-1}$ ，我们得到

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) dx = \int_Q \left( \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_m}(u, v) dv \right) du = \int_Q f(u, b) du - \int_Q f(u, a) du$$

（我们用这对  $(u, v)$ ， $u \in Q$ ， $v \in [a, b]$ ）。右边的积分只是平行六面体 $P$ 的顶部和底部底部的 $f$ 的积分。用符号  $\partial P$  表示 $P$ 的边界的这些部分+和  $\partial P^-$ ，，显然，人们可以写作

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) dx = \int_{\partial P^+} f(x) d\sigma_{m-1}(x) - \int_{\partial P^-} f(x) d\sigma_{m-1}(x). \quad (1)$$

下一步对我们的论点至关重要。在上面出现的情况下，我们应该思考一个事实，我们必须考虑区别，而不是，

比如说，在  $\partial P$  上的积分的和+和  $\partial P^-$ 。我们希望找到一个解释—这种现象将使人们摆脱“不对称”

在  $\partial P$  上的积分之间+和  $\partial P^-$ 。这可以用这个概念来实现

外法，这将使我们能够重写的右边

等式(1)作为平行六面体 $P$ 边界上的积分。

要做到这一点，请考虑外正规的 $v$  on  $\partial P$ 。我们将对这一概念的精确定义推迟到下一小节。然而，通过直观的考虑，我们可以说法线与向量 $e_m$ 重合在 $\partial P^+$ 上

$\partial P^+$ ，与  $(-e_m)$  在  $\partial P^-$  上，并与  $e_m$  正交在  $\partial P$ 。

因此，公式(1)可以重写为

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) dx = \int_{\partial P^+} f(x) \langle v(x), e_m \rangle d\sigma_{m-1}(x) + \int_{\partial P^-} f(x) \langle v(x), e_m \rangle d\sigma_{m-1}(x)$$

$$= \int_{\partial P^+ \cup \partial P^-} f(x) \langle v(x), e_m \rangle d\sigma_{m-1}(x)$$

$$= \int_{\partial P} f(x) \langle v(x), e_m \rangle d\sigma_{m-1}(x)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_m}$  考虑到偏导数是在  $e$  方向上的方向导数  $m$ ，将这种等式转换为

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial e_m}(x) dx = \int_{\partial P} f(x) \langle v(x), e_m \rangle d\sigma_{m-1}(x) \quad (2)$$

强调右边的被积函数与左边的微分方向之间的联系。  
因此，我们得到了经典高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式的最简单版本，这正是我们想要的牛顿-莱布尼茨公式的推广。

请注意，在一维情况下，如果将区间  $[a, b]$  视为平行六面体  $P$ ，并定义了测度  $\sigma$ ，则牛顿-莱布尼茨公式可以解释为公式 (2) 的一种特殊情况。在它的边界上是点  $a$  和点  $b$  上的两个单位点质量的和和这里的“单位法线”

点为向量  $-e$  和  $e$ ，其中  $e$  为单位向量

实线

$\frac{\partial f}{\partial e_m}$  即使是现在，读者也可以很容易地检查在等式 (2) 中，我们可以替换为对任何其他坐标的偏导数，或者更一般地说，是任何方向的方向导数。要证明我们所得到的公式不仅对平行六面体有效，而且对更一般的紧致集也是有效的。对这些集合的描述以及对相应的平等的验证是本节的主要主题。  
最终的结果将作为可接受集的类的逐步扩展过程的结果而得到。

在本节中，我们都假设  $m > 1$ 。表面积和勒贝格度量为  $\lambda_m$  将分别用字母  $\sigma$  和  $\lambda$  表示，但没有明确指定尺寸标注。

## 2.6.2

让  $C \subset \mathbb{R}^m$  让  $p \in \partial A$ 。如果在点  $p$  附近，边界  $\partial A$  与光滑表面  $M$  重合，那么点  $p$  处的正常  $N(p)$  被称为  $A$  边界的法线。

如果  $p + tN(p)$ ，则正常的  $N(p)$  被称为  $\partial A$  的外法线。

$A$  和  $p - tN(p) \in \text{Int} A$  为所有足够小的  $t$ 。  $M$  的一侧

由外法线组成的  $M$  被称为  $M$  的外侧，正好相反

内侧被称为内侧。当集合  $A$  可以由一个集合来定义时

在  $p. \in \partial A$ ,  $i$  点附近的不等式。e.,  $A \cap B(p, \delta) = \{x \in B(p, \delta) \mid F(x) \leq 0\}$ , 其中  $F$  是一个具有非消失梯度的球  $B(p, \delta)$  中光滑的函数, 边界  $\partial A$  的相应部分只不过是函数  $F$  的零水平集。在这种情况下,  $\text{grad} F(p)$  是  $\partial A$  的外正线, 因为函数  $F$  严格沿梯度方向增加。

稍后, 我们将需要一些与光滑函数的子图密切相关的特殊集。为了定义它们, 我们将识别空间  $R^m$  用笛卡尔乘积  $R^{m-1} \times R$ , 并将从  $R$  中写出一个点  $x^m$  如  $x = (u, v)$ , 其中  $u \in R^{m-1}$  和  $v \in R$ 。设  $\phi$  是一个在封闭的立方体上光滑的函数  $Q \subset R^{m-1}$ 。集合

$$\{(u, v) \mid u \in Q, c \leq v \leq \phi(u)\} \text{ 和 } \{(u, v) \mid u \in Q, \phi(u) \leq v \leq d\}$$

其中,  $c < \phi$  和,  $\phi < d$ , 将分别被称为下梁和上梁。通过重新枚举坐标而从它们中获得的集合将被称为光束。

函数  $\phi$  图的点  $(u, v)$ , 其投影  $u$  位于立方体  $Q$  的内部, 形成了光束边界的非平凡部分。边界上的其余点构成了它的平凡部分 (对于下光束, 它包含在无限平行六面体  $Q \times [c, +\infty)$  的边界中)。

如果函数  $\phi$  不是常数, 则梁边界的非平凡部分是唯一的确定的。否则, 应该显式地指定非平凡部分 (例如, 一个立方光束的每一个面都可以是它的非平凡部分)。

很明显, 光束的边界由有限多个光滑表面的紧致子集组成。边界的外正线  $v(x)$  存在于平滑的点  $x_i$  上。e., 几乎所有的地方都是关于  $\sigma$  的。

完成来自第二部分的定义。2.5.3, , 我们将称之为外法线族  $\{v(x)\}_{x \in \partial B}$  梁  $B$  边界的外侧。注意, 根据这个定义, 外部不是在各处定义, 而是在  $\partial B$  上几乎到处定义。另外, 对于每个向量  $e \in R^m$ , 函数  $x \rightarrow -v(x)$ ,  $e$  在  $\partial B$  上几乎到处都是连续的, 因此, 是可测量的。

因为, 在边界的非平凡部分的每个点附近, 较低的

光束由不等式  $F(u, v) = v - \phi(u) \leq 0$ , 梯度来描述

$\text{grad} F(u, v) = (-\text{grad} \phi(u), 1)$  是一个外正常。换句话说, 是外部的

以及属于这部分的点  $x = (u, \phi(u))$  处的单位外法线  
该边界等于

$$v(x) = \frac{(-\text{grad} \phi(u), 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad} \phi(u)\|^2}}$$

上光束边界的非平凡部分的外侧是由相反的法线组成的图的下侧。

下光束非平凡部分的一侧是图  $\Gamma$  的上部  $\phi$ ,

### 2.6.3

下一个定理构成了公式(2)推广的第一步。符号 $\nu$ 将表示光束边界的外侧。

定理假设一个函数 $f$ 在梁上是光滑的 $m$ 消失在其边界的琐碎部分上。然后是每个单位向量 $e \in R^m$ , 平等

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \int_{\partial B} f(x) \langle \nu(x), e \rangle d\sigma(x) \quad (4)$$

保存  
证明改变坐标的枚举, 如果有必要, 我们可以假设 $B$ 或者是一个下梁, 或者是一个上梁。由于在这两种情况下的论点本质上是相同的, 我们将只考虑下梁。根据定义, 它是一组表单

$$B = \{(u, v) \mid u \in Q, c \leq v \leq \phi(u)\},$$

其中 $\phi$ 是封闭立方体 $Q \subset R$ 上的光滑函数 $m-1$ 满足条件 $\phi > c$ 。注意, 由于方向导数是偏导数的线性组合, 因此当 $e$ 是向量 $e$ 之一的情况时, 它足以证明等式(4)1, ...,  $e_m$ 在 $R$ 的规范基础上 $m$ 。

首先, 考虑 $e = e$ 的情况 $m$ 。根据富比尼定理, 我们有

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial e_m}(x) dx = \int_Q \left( \int_c^{\phi(u)} \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) dv \right) du = \int_Q (f(u, \phi(u)) - f(u, c)) du$$

此外,  $f(u, c) = 0$ , 因为函数 $f$ 在光束边界的平凡部分消失了。因此

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\partial f}{\partial e_m}(x) dx &= \int_Q f(u, \phi(u)) du \\ &= \int_Q \frac{f(u, \phi(u))}{\sqrt{1 + \|\text{grad } \phi(u)\|^2}} \sqrt{1 + \|\text{grad } \phi(u)\|^2} du. \end{aligned}$$

考虑到平等性(3), 这意味着

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial e_m}(x) dx = \int_{\Gamma \cap B} f(x) \langle \nu(x), e_m \rangle d\sigma(x) = \int_{\partial B} f(x) \langle \nu(x), e_m \rangle d\sigma(x)$$

(在最后一个等式中, 我们再次在 $\partial B \setminus \Gamma$ 上使用假设 $f \equiv 0$ ).

现在让 $e = e_k$ ,  $1 \leq k < m$ . 对所有这样的 $k$ 的证明都是一样的, 所以我们可以

只考虑 $k = m-1$ 。我们可以假设 $m \geq 3$ 。在二维案例中, 读者可以很容易地检查自己的论证, 要简单得多。



将立方体Q表示为乘积 $Q = R \times [a, b]$ , 其中R是 $R^n$ 中的一个立方体 $m-2$ . 我们将从Q将u点写成 $u = (s, t)$ , 其中 $s \in R$ 和 $t \in [a, b]$ . 使用这个表示法, 我们得到

$$\int_R \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) dt ds = \int_R \int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t, v) dv dt ds \quad (5)$$

由富比尼定理. 为了变换内部积分(交换关于v的积分和关于t的微分), 我们需要推广一个基于参数的积分微分的莱布尼茨规则. 这个推广由以下引理给出.

**引理** 让 $\psi \in C^1([a, b])$ 和 $c < \psi(t)$ 为 $c \leq t \leq b$ . 如果函数f在曲线梯形的邻域上是光滑的

$$T = \{(t, v) \in R^2 \mid t \in [a, b], c \leq v \leq \psi(t)\},$$

那时

$$\frac{d}{dt} \int_c^{\psi(t)} f(t, v) dv = \int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, v) dv + f(t, \psi(t)) \psi'(t)$$

**引理放入 $F(t, \theta) = 1$ 的证明**  $\int_c^{\psi(t)} f(t, v) dv$  for  $(t, \theta)$  在梯形T的一个足够小的邻域中. 由于 $F(t, \theta) = f(t, \theta)$ , 以及根据莱布尼茨规则,  $F_t'(t, \theta) = \int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, v) dv$ , 我们可以区分组成 $F(t, \psi(t))$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_c^{\psi(t)} f(t, v) dv &= (F(t, \psi(t)))' = F_t(t, \psi(t)) + \\ &+ F(t, \psi(t)) \psi'(t) = \int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, v) dv \\ &+ f(t, \psi(t)) \psi'(t) \end{aligned}$$

这相当于我们试图证明的等式.  $\square$

让我们回到这个定理的证明上来. 取 $\psi(t) = \phi(s, t)$ , 并将引理应用于等式右侧的内积分(5):

$$\int_R \int_c^{\phi(s, t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t, v) dv dt = \int_R \int_c^{\phi(s, t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t, v) dv dt - \int_R f(s, t, \phi(s, t)) \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) dt$$

将这个等式与t进行积分, 我们得到

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_R \int_c^{\phi(s, t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t, v) dv dt \\ &= \int_R \int_c^{\phi(s, b)} f(s, t, v) dv \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \int_R f(s, t, \phi(s, t)) \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) dt \end{aligned}$$

由于点  $(s, a, v)$  和  $(s, b, v)$  属于  $f=0$  所在的光束边界的平凡部分, 因此替代项就消失了。这允许我们重写等式(5) 作为

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial e_{m-1}}(x) dx &= \int_R \int_a^b f(s, t, \phi(s, t)) (s, t) dt \frac{\partial \phi}{\partial t} ds \\ &= \int_Q f(u, \phi(u)) \langle -\text{grad } \phi(u), 1 \rangle, e_{m-1} \end{aligned}$$

采取等式(3) 考虑到, 我们可以将结果积分表示为关于测度  $\sigma$  的积分:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial e_{m-1}}(x) dx &= \int_Q f(u, \phi(u)) \langle v(u, \phi(u)), e_{m-1} \rangle \hat{1} + \\ &\quad // \text{grad } \phi(u) //^2 \text{ 杜} = \int_{\Gamma_\phi} f(x) \langle v(x), e_{m-1} \rangle d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial B} f(x) \langle v(x), e_{m-1} \rangle d\sigma(x) \end{aligned}$$

(这里我们在  $\partial B \setminus \Gamma$  上使用了条件  $f=0$  还因此, 高斯

梁B和单位向量e的奥斯特罗格拉德斯基公式  $1, \dots, e_{m-1}$  已证明,

这也证明了等式(4).  $\square$

当然, 关于  $\partial B$  的平凡部分上的  $f=0$  的假设是多余的。这只是为了简化高斯斯特罗格拉德斯基公式的初步版本的证明。最终版本(请参见Sect. 2.6.5) 不包含这样的假设。

## 6.42套标准紧凑型。

现在我们将介绍在一般高斯格拉斯基公式中使用的紧致集。我们将在不使用本小节的结果的情况下得到具有光滑边界的紧集的公式(参见定理2.6.5证明的第一阶段)。由于我们的目标是证明更一般的紧集的高斯斯特罗格拉德斯基公式, 不仅是对于具有光滑边界的紧集(所有表面积的概念都重合), 我们现在将放弃考虑任意表面积, 而只使用

与豪斯多夫测量值  $\mu$  成比例的面积  $m-1$ . 这个区域仍然是用字母  $\sigma$  表示。

**定义一个紧致的集  $K \subset \mathbb{R}^m$**  如果其边界可以表示为  $\partial K = M \cup E$ , 则称为标准紧致, 其中:

(a) 对于每一个点  $p \in M$ , 都存在一个球  $B_p$  以  $p$  为中心, 一个函数为  $F \in C^1(B_p)$ , 使  $B$  上的  $F > 0$  在  $K$ ,  $F \leq 0$  在  $B \setminus p \cap K$  和  $\text{grad } F(p) \neq 0$ ;

(b)  $\sigma(M) < +\infty$ ;

(c)  $E$  是一个紧致的集合和  $\sigma(E) = 0$ 。

条件(a) 意味着  $M$  是一个光滑的表面。我们称  $M$  为紧致  $K$  边界的正则部分,  $E$  为它的奇异部分。条件

(c) 允许我们在对  $\partial K$  进行积分时忽略奇异部分的积分，因为它消失了。

很明显，光束是一个标准的紧致的集合。通常，由一个或几个光滑曲面 (e. g., 一个球，一个环面，或一个多维环) 也是标准的紧致。在学校几何中研究的所有有界域 (多面体、截断锥等)。也是标准的紧致型套装。

很明显，该定义的条件 (a) 中的函数  $F$  在  $B$  上消失了  $p \cap M$ 。正如在第二节中已经指出的那样。8.6.2,  $\text{grad} F(p)$  是  $p \in M$  点  $\partial K$  的外正线。因此，在  $M$  的每一个点上都存在一个外正线。在该点发送任意点  $M$  到单位外法线的映射在  $M$  上是连续的，因为在局部点  $p \in M$  的邻域内，单位外法线与函数  $F$  的归一化梯度重合。因此，单位外法线族形成了表面  $M$  的一侧，这是根据部分的定义。2.6.2, 是  $M$  的外侧。由于在点  $p$  的邻域内，水平集  $F(x) = 0$  与某个光滑函数的图重合，因此存在一个足够小的开放平行六面体  $P \subset B_p$  包含  $p$  的交点  $\cap K = B \cap P$  是一束光。显然，它的边界的非平凡部分与  $M \cap P$  重合，在这部分上， $M$  的外法线也是  $\partial B$  的外法线  $p$ 。

重要的是要有一些足够简单的条件，允许我们检查条件 (c)。中的等式  $\sigma(E) = 0$  特别地，如果  $E$  是余维大于 1 的光滑流形  $L$  的子集，因为，根据 Sect 的性质 (5)。2.3.3, 我们有  $\sigma(L) = 0$ 。在接下来的内容中，我们还将使用另一个条件来确保等于  $\sigma(E) = 0$ 。为了说明它，让我们提醒读者，集合  $E$  的  $\varepsilon$  邻域是开集  $E_\varepsilon = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$  (它由所有点  $y \in R$  组成  $\text{dist}(y, E) < \varepsilon$ )。

**定义一套  $E \subset R^m$  在  $R$  中可以忽略不计** 如果它的  $\varepsilon$  邻域  $E_\varepsilon$  的体积  $\lambda(E_\varepsilon) = o(\varepsilon)$  表示为  $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

很明显，每个可忽略的集合都是有界的。由于一个集合及其闭包具有相同的  $\varepsilon$  邻域，因此每个可忽略的集合的闭包可以忽略不计。

在这条线上，只有空的集合可以忽略不计。在这个平面上，每个有限集都是可以忽略的，但不是每个离散集 (见示例 6)。读者可以很容易地检查一个可忽略集的有限族的并集是可以忽略的。在

空间  $R^m$ ,  $m > 3$ , 如果仿射子空间  $L$  的每个有界子集都可以忽略不计

$\dim L \leq m - 2$ , 下一个命题在验证条件 (c) 时是有用的  
标准紧致的定义。

**命题空间  $R$  的每个可忽略的子集  $M$  区域为零。**

**证明让  $E \subset R^m$  可以忽略不计。** 正如我们已经提到的，它是有界的。让我们检查一下  $\sigma(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(E_\varepsilon) = 0$ 。我们将把点  $x$  和点  $y \in$  称为可区分的，如果

$\|x - y\| > \varepsilon$ 。显然，一个有界集只能包含有限的多个成对集  $\varepsilon$  区分点。考虑一个由最大可能值组成的集合  $a$  属于  $E$  的  $\varepsilon$  个可区分点的数量。我们有

$$E \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$$

因为否则集合A可以再加一点 $x \in A$ ，这与它的最大性相矛盾。此外，以A的两个不同点为中心的球 $B(x, \varepsilon/2)$ 和 $B(y, \varepsilon/2)$ 是不相交的，因为这个集合中的点在它们之间的距离至少有 $\varepsilon$ 。因为根据 $\mu$ 的定义，球 $B(x, \varepsilon)$  ( $x \in A$ )构成了集合E的一个覆盖层 $\mu_{m-1}(E, \varepsilon)$ ，我们得到

$$\begin{aligned} \mu_{m-1}(E, \varepsilon) &\leq \varepsilon \sum_{x \in A} \frac{2^m}{\alpha_m \varepsilon} \sum_{x \in A} \lambda(B(x, \varepsilon/2)) = \\ &= \lambda \left( \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon/2) \right) \leq \lambda(E) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

因此 $\mu_{m-1}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{m-1}(E, \varepsilon) = 0$ .  $\square$

对于光滑曲面的紧致子集，逆语句也成立。

引理如果光滑曲面M的一个紧子集E的面积为零，则可以忽略不计。

证明曲面的每个点都有一个 $m$ 邻域，它的闭包包含在某个光滑函数的图中。很明显，集合E可以被有限的许多这样的社区 $U_n$ 所覆盖： $E \subset \bigcup_{n=1}^{N_N} U_n$ . 放

$$E_n = E \cap \bar{U}_n \quad (n = 1, \dots, N)$$

显然，集合 $E_n$ 是紧型和 $E = \bigcup_{n=1}^{N_N} E_n$ . 因此，它足以证明集E的引理的陈述 $n$ ，这允许我们在下面假设M是一个光滑函数 $\Phi \in C^1$ 的图 $\Gamma(G)$ 其中G是空间 $R^m$ 的一个开子集 $\Gamma$ .

和前面一样，我们将表示空间 $R^m$ 中的一个点 $x^m$ 如 $x = (u, v)$ ，其中 $u \in R^{m-1}$ ,  $v \in R$ ，识别 $R^{m-1}$ 与平面 $v = 0$ 。设H是集合E到 $R^m$ 的投影。通过H的 $\delta$ 邻域，我们将表示空间 $R^m$ 中的 $\delta$ 邻域 $H_\delta$ ，保留符号 $H_\delta$ 为了它选择 $\delta > 0$ 太小，以 $H_\delta$ 与闭包H一起包含在G中 $\delta$ ，并放入 $L = \max_{u \in H} \|\text{grad } \Phi(u)\|$ 。

由于图 $\Gamma$ 的规范参数化 $\Phi$ 是一个扩展和  
 $E = \Phi(H)$ , we have  $\lambda_{m-1}(H) \leq \sigma(\Phi(H)) = \sigma(E) = 0$ . Therefore,  $\lambda_{m-1}(H) = 0$  since  $\bigcap_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon = H$ , the upper semicontinuity of measure implies that

$$\lambda_{m-1}(H_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (6)$$

考虑层

$$A(\varepsilon) = \{(u, v) \in R^m \mid u \in H_\varepsilon, |v - \Phi(u)| < (L + 1)\varepsilon\}$$

在 $\Phi$ 的图周围 $\varepsilon$ 使用 $0 < \varepsilon < \delta$ 。自 $\lambda(A(\varepsilon)) = 2(L + 1)\varepsilon \lambda_{m-1}(H_\varepsilon)$ ，通过(6)，我们有 $\lambda(A(\varepsilon)) = o(\varepsilon)$ 作为 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此，为了证明这一点

$E$ 可以忽略不计, 它就足以证明  $E_e \subset A(\varepsilon)$ . 让  $x = (u, v) \in E_e$ . 让

我们检查了那个  $x \in A(\varepsilon)$ , 也就是说, 那个  $u \in H_e$  和  $|v - \phi(u)| < (L + 1)\varepsilon$ . 凭借在  $\varepsilon$ -邻域的定义中, 存在一个点  $x' = (u', v') \in E \subset \Gamma_\phi$

这样,  $\|x - x'\| < \varepsilon$ . 因为  $\|u - u'\| \leq \|x - x'\| < \varepsilon$  和  $u' \in H$ , 我们有  $u \in H_e$ . 此外,  $v' = \phi(u')$  和  $|v - v'| \leq \|x - x'\|$ . 因此

$$|v - \phi(u)| \leq |v - v'| + |\phi(u') - \phi(u)| \leq \|x - x'\| +$$

$$L\|u - u'\| < (L + 1)\varepsilon, \text{ 其中 } x' \in A(\varepsilon). \square$$

注意, 我们不能通过用有界性代替紧性来放松引理的条件. 如果假设  $E$  不包含在一个中, 而是包含在两个光滑曲面的并集中, 引理也失败.

现在, 我们将对这个引理提出一个简单但有用的推论.

协维数大于1的光滑流形的一个紧子集  $E$  可以忽略不计.

### 证明

实际上, 这样一个流形的面积等于零 (参见第10节中的属性 (5)). 此外, 它局部包含在一个余维数为1的流形中. e., 在一个表面上 (见第二节的末尾).

2.1.1). 因此,  $E$  可以被有限多个紧集覆盖, 每个紧集都包含在一个光滑的表面中, 面积为零. 它仍然需要使用引理.  $\square$

## 2.6.5

在本小节中, 我们将推广在第1节中得到的高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式的初步版本. 2.6.3用任意的标准的紧集代替光束. 我们也会把表面  $M$  的外侧  $\nu$  称为  $\partial K$  的外侧. 因此, 在  $\partial K$  上, 外侧几乎到处都是被定义和连续的. 固定任意向量  $e \in \mathbb{R}^m$ , 我们得出结论, 函数  $x \mapsto \nu(x) \cdot e$  在  $\partial K$  上几乎到处都是连续的 (相对于测度  $\sigma$ ), 因此, 是可测量的.

**定理 (高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式)** 设  $f$  是一个标准紧集  $K \subset \mathbb{R}^m$  上的光滑函数<sup>m</sup>.

然后是每个单位向量  $e \in \mathbb{R}^m$ , 一个有

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \int_{\partial K} f(x) \langle \nu(x), e \rangle d\sigma(x).$$

在我们开始证明之前, 让我们注意到它将分三个阶段进行. 具有平滑边界 (球、环面等) 在第一阶段将得到的结果就足够了. 如果紧致的边界包含一个奇异部分, 在大多数情况下, 它是一个可以忽略的集合 (因为它是多面体、半球、锥等). 这个案例将在证明的第二阶段被涵盖.

证明通过一个标准紧集的定义,  $\partial K = E \cup M$ , 其中  $M$  是  $\partial K$  的规则部分, 和  $\mu_m - 1(E) = 0$ .

(I) 假设在一个包含E的开集G上的 $f \equiv 0$  (这个对函数f的假设在光滑边界情况下是空洞的, i. e., 当 $E = \emptyset$ )。我们将构造一个特殊形式的K的覆盖物。对于每个点 $x \in \text{Int} K$ , 选择一个打开的立方体 $Q_x \subset \text{Int} K$ 以x为中心。对于每个点,  $p \in M$ , 选择一个开放的平行六面体 $R_p$ 包含p, 使得交点 $R_p \cap K$ 是位于K的内部的一束光束, 除了它的边界的非平凡部分的闭合, 它包含在M中。这样的平行六面体通过标准紧集的定义而存在。

集合G,  $\{Q_x\}_{x \in \text{Int} K}$ 和 $\{R_p\}_{p \in M}$ 形成一个开放的覆盖层。设 $G, Q_{x_1}, \dots, Q_{x_J}$ 和 $R_{p_1}, \dots, R_{p_N}$ 做一个有限的子封面。考虑该子覆盖的统一划分 (参见定理2.1.8)。它由光滑函数 $\omega, \psi$ 组成 $1, \dots, \psi_J$ 和 $\theta_1, \dots, \theta_N$  ( $\omega \equiv 0$ 外的G,  $\psi_j Q$ 外 $\equiv 0_{x_j}$ 和 $\theta_n R$ 外 $\equiv 0_{p_n}$ 对于 $j = 1, \dots, J, n = 1, \dots, N$ )。我们有

$$1 = \omega(x) + \sum_{j=1}^J \psi_j(x) + \sum_{n=1}^N \theta_n(x) \text{ 为所有的 } x \in K$$

由于G上的条件 $f \equiv 0$ , 可以得出

$$f(x) = \sum_{j=1}^J \psi_j(x) f(x) + \sum_{n=1}^N \theta_n(x) f(x) \text{ 为所有 } x \in K \quad (7)$$

因此

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_K \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial e}(x) dx + \sum_{n=1}^N \int_K \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x) dx$$

考虑到那个 $\psi_j Q$ 外 $\equiv 0_{x_j}$ 和 $\theta_n R$ 外 $\equiv 0_{p_n}$ , 我们获得

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \sum_{j=1}^J \int_{Q_{x_j}} \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial e}(x) dx + \sum_{n=1}^N \int_{K \cap R_{p_n}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x) dx \quad (8)$$

根据定理2.6.3, 第一个和中的所有项都等于零 (因为 $\psi_j$ 整个边界上的 $\equiv 0_{x_j}$ )。让我们变换第二个和中的积分。为此目的, 请注意,  $\theta_n \partial R$ 上的 $\equiv 0_{p_n}$ 因此, 函数是 $\theta_n f$ 在光束 $K \cap$ 边界的平凡部分消失 $\bar{R}_{p_n}$ 。因此, 我们也可以将光束的高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式应用于这些积分 (见定理2.6.3):

$$\int_{K \cap R_{p_n}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x) dx = \int_{\partial(K \cap R_{p_n})} \theta_n(x) f(x) \langle v_n(x), e \rangle d\sigma(x)$$

其中 $v_n$ 单位的外正线是 $\partial(K \cap R_{p_n})$ 。自 $\theta_n \neq 0$ 仅在光束 $K \cap$ 边界的非平凡部分上 $\bar{R}_{p_n}$ , i. e., 在 $M \cap R$ 上 $p_n$ , 从那部分 $v$ 开始 $n$ 与单位外法线 $v$ 到M重合, 我们有

$$\int_{K \cap R_{nn}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x) dx = \int_{M \cap R_{nn}} \theta_n(x) f(x) \langle v_n(x), e \rangle d\sigma(x) \\ = \int_{M \cap R_{nn}} \theta_n(x) f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x)$$

(最后, 我们已经考虑到了  $\theta_n$  在  $R$  外  $\equiv 0$ ). 因此, 等式(8)意思是

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_M \theta_n(x) f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x) \\ = \int_M f(x) \sum_{n=1}^N \theta_n(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x).$$

因为函数  $\psi_1, \dots, \psi_J$  在  $M$  上消失, 如果从等式上消失(7)那  $f(x) = \sum_{n=1}^N \theta_n(x)$  为  $x \in M$ . 因此

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \int_M f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x) = \int_K f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x)$$

(二) 现在让我们转向奇异部分  $E$  可以忽略不计的情况. 我们将验证这个差异

$$\Delta = \int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx - \int_K f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x)$$

在我们想要证明的公式的左边和右边之间是任意小的. 为此, 固定一个任意的正数  $\varepsilon$ , 并将定理 2.1.7 应用于光滑下降到集合  $E$  上  $\varepsilon$  (很容易看出, 它的  $\varepsilon$ -邻域与  $E$  相吻合  $2\varepsilon$ ). 我们得出结论, 存在一个函数  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  到这样的程度

- (a)  $0 \leq \theta \leq 1$  在整个空间  $\mathbb{R}^m$ ;
- (b)  $\theta = 1$  在  $E$  上  $\varepsilon$ ;
- (c)  $\theta = 0$  在  $E$  外  $2\varepsilon$ ;
- (d)  $\|\text{grad } \theta\| \leq C$  到处在  $\mathbb{R}^m$ , 其中  $C$  是某个常数, 只取决于维数  $m$ .

放  $L_0 = \max_K |f|$  和  $L_1 = \max_K \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right|$ .

因为函数  $(1-\theta)f$  在  $E$  上消失了  $\varepsilon$ , 我们可以应用于它的已经证明了这个定理的一部分. 因此

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x) dx + \int_K \frac{\partial((1-\theta)f)}{\partial e}(x) dx = \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x) dx \\ + \int_K (1-\theta(x)) f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x)$$

因此,

$$\Delta = \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x) dx - \int_{\partial K} \theta(x) f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x)$$

由于(c)的性质, 我们可以将两个积分中的积分集减少到它们与E的交集 $E_{2\varepsilon}$ . 这给了我们不平等

$$|\Delta| \leq \int_{K \cap E_{2\varepsilon}} \left( \left| \frac{\partial \theta}{\partial e}(x) \right| |f(x)| + |\theta(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial e}(x) \right| \right) dx + \int_{E_{2\varepsilon} \cap \partial K} |\theta(x) f(x)| d\sigma(x).$$

如此

$$|\Delta| \leq \int_{K \cap E_{2\varepsilon}} \left( \frac{C}{\varepsilon} L_0 + L_1 \right) dx + \int_{E_{2\varepsilon} \cap \partial K} L_0 d\sigma(x) \leq \frac{C}{\varepsilon} L_0 + L_1 \lambda(E_{2\varepsilon}) + L_0 \sigma(E_{2\varepsilon} \cap \partial K).$$

由于E是一个可以忽略不计的集合, 所以这个术语 $(\frac{C}{\varepsilon} L_0 + L_1) \lambda(E_{2\varepsilon})$ 变得任意小, 如 $\varepsilon \rightarrow 0$ . 第二学期也是如此. 的确,

$$\sigma(E_{2\varepsilon} \cap \partial K) \rightarrow \sigma(E) \text{ 作为 } \varepsilon \rightarrow 0$$

由于测度 $\sigma$ 的上半连续性(在这里, 我们使用一个标准紧集的边界面积的有限性). 我们还记得,  $\sigma(E) = 0$ . 因此,  $|\Delta| = 0$ .

(三) 现在考虑一下一般的情况. 我们将进行以下证明. 我们将首先对集合K进行扩展, 并将高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式应用到扩展集合上, 然后将辅助集合收缩到K的极限.

自 $\mu_{m-1}(E) = 0$ , 我们可以固定一个任意小的正数 $\varepsilon$  和选择球 $B_j = B(x_j, r_j)$  以便

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} r_j^{m-1} < \varepsilon^{m-1}$$

我们假设 $\varepsilon$  很小, 所以函数 $f$ 在K中是连续可微的 $2\varepsilon$ . 考虑到集合E的紧致性, 我们可以假设 $E \subset \bigcup_{j=1}^{n_N} B_j \subset E_{2\varepsilon}$ . 还要注意的, 当有限面积的曲面与同心球相交时, 我们将得到零区域的集合, 也许除了一个可数的半径集, 因为族 $\{\sigma(M \cap \partial B(a, r))\}_{r>0}$ 是可总和的. 因此, 在不丧失一般性的情况下, 我们可以假设

$$\sigma(M \cap \partial B_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

现在, 介绍集合 $K(\varepsilon) = K \cup \bigcup_{j=1}^{n_N} \bar{B}_j$ . 显然, 它的边界与E不相交, 只由属于 $\partial K$ 的正则部分的点组成



或者是球体  $\partial B_1, \dots, \partial B_N$ .  $K(\varepsilon)$  的边界只有在球的交点或集合  $M$  与球的交点上才能失去其光滑性。因此,  $K(\varepsilon)$  边界的奇异部分的面积等于零。这部分由有限的紧集组成, 每个紧集都可以忽略不计 (通过引理 2.6.4)。因此, 他们的结合也微不足道的。因此, 集合  $K(\varepsilon)$  是一个标准的紧化集, 其边界上有一个可以忽略的奇异部分, 因此高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式对于这个集合是有效的:

$$\int_{K(\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx = \int_{\partial K(\varepsilon)} f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x) \quad (9)$$

放

$$M \setminus (\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^N K \cap B_j, \quad M \setminus \setminus (\varepsilon) = \partial K(\varepsilon) / M \setminus (\varepsilon)$$

并分离了等式中的  $K$  和  $M$  上的积分 (9) 从其余的部分开始, 我们可以将它重写成以下形式:

$$\begin{aligned} & \int_{K(\varepsilon)/K} \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx + \int_{K(\varepsilon)/K} \frac{\partial f}{\partial e}(x) dx \\ &= \int_{M \setminus (\varepsilon)} f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x) + \int_{M \setminus \setminus (\varepsilon)} f(x) \langle v(x), e \rangle d\sigma(x) \\ &= \int_M \dots - \int_{M/M \setminus (\varepsilon)} \dots + \int_{M \setminus \setminus (\varepsilon)} \dots \end{aligned}$$

因为  $K(\varepsilon)/K \subset E_{2\varepsilon}$  和  $M/M \setminus (\varepsilon) \subset M \cap E_{2\varepsilon}$ , 我们有

$$\lambda_m(K(\varepsilon)/K) \leq \lambda_m(E_{2\varepsilon}), \quad \sigma(M/M \setminus (\varepsilon)) \leq \sigma(M \cap E_{2\varepsilon})$$

此外

$$\sigma(M \setminus \setminus (\varepsilon)) \leq \sum_{j=1}^N \sigma(\partial B_j) = m \alpha_m \sum_{j=1}^N r_j^{m-1} < m \alpha_m \varepsilon^{m-1}$$

这三个不等式的右边趋于零, 如  $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此, 在等式中传递到  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限 (10), 我们得到了所期望的公式。□

高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式允许人们将物体的体积表示为其边界上的积分。例如, 将这个公式应用于函数  $f(x) = x, e$ , 我们得到

$$\lambda(K) = \int_{\partial K} \langle x, e \rangle \langle e, v(x) \rangle d\sigma(x)$$

换句话说, 物体  $K$  的体积等于矢量场  $V(x) = x, ee$  通过其边界“向外”的通量。

这个结果可以推广如下。设  $L$  是  $R$  的一个子空间<sup>m</sup>, 并设  $P$  为与  $L$  的正交投影。然后  $\dim L \cdot \lambda(K) = \int_{\partial K} \langle P(x), v(x) \rangle d\sigma(x)$ ,

即，投影P通过外侧的通量与紧凑体的体积成正比，比例系数等于一个人投射到的子空间的维数。特别是，对于 $L = \mathbb{R}^m$ ，我们得到了 $\lambda(K)$

$$= \frac{1}{m} \int_K \langle v(x), v(x) \rangle d\sigma(x).$$

## 2.6.6

现在我们转换高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式来阐明它的物理意义。

设 $O$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集。设 $(x)_{x \in O}$ 是一个具有坐标函数 $V$ 的光滑向量场 $v_1, \dots, v_m$ 。根据高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式，

$$\begin{aligned} \int_K \langle V(x), v(x) \rangle d\sigma(x) &= \sum_{j=1}^m \int_K V_j(x) \langle e_j, v(x) \rangle d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_K \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(x) dx = \int_K \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right)(x) dx \end{aligned}$$

其中 $v$ 是标准基。这个方程的左边是向量场 $V$ 通过边界 $\partial K$ 的外侧的通量。积分器 $\sum_{j=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$ 在右边被称为向量场 $V$ 的散度，记为 $\operatorname{div} V$ 。使用这个符号，所得到的公式可以重写为以下形式（所谓的高斯矩阵公式的“向量形式”，或散度公式）：

$$\int_K \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial K} \langle V(x), v(x) \rangle d\sigma(x) \quad (11)$$

注意， $\operatorname{div} V(x)$ 仅仅是雅可比矩阵的迹 $\sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_k}(x)$ ，i.e.，操作符 $d$ 的跟踪 $xV$ 。由于迹不依赖于基的选择，因此在计算散度时，可以使用任何标准正交坐标系，而不仅仅是正则坐标系。

最后一个结果也可以用另一种方式来建立。根据均值定理，对于每一个 $\epsilon > 0$ 和每一个足够小的 $\epsilon > 0$ ，一个有

$$\frac{1}{\alpha_m \epsilon^m} \int_{B(a, \epsilon)} \operatorname{div} V(x) dx = \operatorname{div} V(x_\epsilon), \text{ 其中 } x_\epsilon \in B(a, \epsilon)$$

因此

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V(a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_m \epsilon^m} \int_{B(a, \epsilon)} \operatorname{div} V(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_m \epsilon^m} \int_{B(a, \epsilon)} \langle V(x), v(x) \rangle d\sigma(x) \end{aligned}$$

由此可以看出，值  $\text{div } V(a)$  并不依赖于坐标系的选择。  
如果人们将  $V$  视为不可压缩的流体速度场，那么只有当物体包含某些源（如果通量为正）或下沉（如果通量为负）时，通过物体边界的通量才能为非零。

The quantity  $\frac{1}{\alpha_m \epsilon}$   
last equality characterizes the average intensity of the sources (sinks) in the ball  $B(a, \epsilon)$  及其极限  $\text{div } V(a)$  可以解释为  $a$  点上的源（汇）的强度。

例子（阿基米德定律）让我们展示如何使用高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式从帕斯卡定律推导出阿基米德定律。让我们提醒读者，根据帕斯卡定律，液体所施加的压力一个被淹没的平坦区域沿着法线方向，等于底座与淹没区域一致的液体柱的重量它的高度是被淹没的深度。让我们计算阿基米德力

作用于身体  $K \subset \mathbb{R}^3$  浸入液体中。为此，介绍其  $oxy$  平面与液体表面重合的笛卡尔坐标系和轴  $OZ$  是指向向下的。在每一点  $(x, y, z) \in \partial K$ ，身体

$K$  受压力  $F(x, y, z) = -g \rho z v(x, y, z)$ ，其中  $v(x, y, z)$  单位外正于  $\partial K$ ， $\rho$  是液体密度， $g$  是重力加速度。  
它的合力，即阿基米德力 
$$\iint_{\partial K} (-g \rho z) v(x, y, z) d\sigma(x, y, z)$$
 has the coordinates

$$\begin{aligned} F_x &= -g \rho \iint_{\partial K} z \langle v(x, y, z), e_1 \rangle d\sigma(x, y, z), \\ F_y &= -g \rho \iint_{\partial K} z \langle v(x, y, z), e_2 \rangle d\sigma(x, y, z), \\ F_z &= -g \rho \iint_{\partial K} z d\sigma. \end{aligned}$$

将第一个等式重写为  $F_x = \iint_{\partial K} V \cdot v d\sigma$ ，其中  $V(x, y, z) = (-g \rho z, 0, 0)$ ，并，利用高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式，我们得到

$$\begin{aligned} F_x &= \iiint_K \text{div } V(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K 0 dx dy dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

同样地，它也可以证明是  $F_y = 0$ 。阿基米德力的垂直分量可以用矢量的散度来表示

$\tilde{V}$  字段  $(x, y, z) = (0, 0, -g \rho z)$ ，所以它等于

$$\begin{aligned} F_z &= \iint_{\partial K} \tilde{V} \cdot v(x, y, z) d\sigma(x, y, z) = \\ &= \iiint_K \text{div } \tilde{V}(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_K (-g \rho) dx dy dz = -g \rho \text{Vol}(K). \end{aligned}$$

因此，一个在数值上等于由身体强制排出的流体的重量的浮力在垂直方向上作用于该身体。

### 2.6.7

格林公式。让我们挑出高斯-斯托克斯公式的二维情况。设  $K$  是  $\mathbb{R}^2$  中的一个标准紧集<sup>2</sup>， $v$  是它的外部。在边界  $\partial K$  的规则部分  $L$  上，边  $v$  与  $\tau = U(v)$  的方向一致（见第二节。2.5.4）。这对  $(\partial K, \tau)$  被称为平面标准紧集  $K$  的有向边界，用符号  $\partial^+ K$  表示。

对于一个向量场  $V = (V_1, V_2)$ ，在紧致  $K$  的某个邻域上是光滑的，高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式的向量形式 (11) 产生

$$\iint_K \operatorname{div} V(x, y) dx dy = \int_{\partial^+ K} \langle V(x, y), v(x, y) \rangle d\sigma_1(x, y).$$

由等式 (5) 从教派。2.5.4，这个等式可以重写为

$$\iint_K \left( \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + (x, y) \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ K} -V_2(x, y) dx + V_1(x, y) dy.$$

将  $P = -V_2$  和  $Q = V_1$ ，我们得到了一个重要的结果，它被称为格林公式：

$$\iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

特别地，格林公式允许我们将标准紧集的面积表示为其边界上的积分：取函数  $P(x, y) \equiv 0$ ， $Q(x, y) \equiv x$  或  $P(x, y) \equiv -y$ ， $Q(x, y) \equiv 0$ ，我们得到

$$\lambda_2(K) = \int_{\partial^+ K} x dy = - \int_{\partial^+ K} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ K} -y dx + x dy$$

在教派。2.5，它注意到（例如，见第二节。2.5.2）表示局部势场在封闭方向曲线上的积分可以是非零的。另一方面，格林的公式很明显意味着以下几点。

**推论1** 设  $V = (P, Q)$  是一个局部势向量场，在某些域上是光滑的<sup>2</sup>。设  $K \subset \mathbb{R}^2$  是一个具有有向边界的标准紧化集。然后

$$\int_{\partial^+ K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

该推论给出了封闭曲线上局部势向量场的积分消失的一个简单的几何条件。如果曲线“以0为界限定一个集合”，i. e.，与0中所包含的某个标准紧集的边界重合。否则（例如，如果曲线“包围”一个不属于该域的点），就很容易在0中找到一个光滑的局部势向量场，它在这个曲线上有一个非零积分（例如，见第二节。2.5.2）。

让我们指出与全纯函数有关的推论1的一个重要特例。设  $L \subset C$  是位于连续复值函数  $f$  的域内的分段光滑定向曲线。让  $g = \operatorname{Re} f$  和  $h = \operatorname{Im} f$ 。由形式的乘法恒等式  $f(z) dz = (g + ih)(dx + idy) =$  引导

$(gdx - hdy) + i(hdx + gdy)$ ，我们定义了积分  $\int_L f(z) dz$  作为总和  $\int_L gdx - hdy + i \int_L hdx + gdy$ 。从这一点上很容易看出， $\int_L f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$  对于每一个与曲线方向一致的平滑参数化  $\gamma$  成立。

推论2 (柯西定理) 如果一个函数  $f$  在一个域  $0 \subset C$  上有一个连续的导数，而  $K \subset 0$  是一个标准的紧集，那么  $\frac{d}{dz} \int_{\partial+K} f(z) dz = 0$ 。

根据我们的假设，函数  $g = \operatorname{Re} f$  和  $h = \operatorname{Im} f$  属于  $C^1(0)$ 。此外，柯西-黎曼条件为  $g_x = h_y$ ， $h_x = -g_y$  hold，确保向量场  $(g_x - h_y)$  和  $(h_x + g_y)$  为局部势 (见教派。8.5.2，为命题3的推论)。因此，等式

$$\int_{\partial+K} gdx - hdy = 0 \text{ 和 } \int_{\partial+K} hdx + gdy = 0$$

遵循推论1。