

实变函数反例

1. 不满足任何阶的 Lipschitz 条件的绝对连续函数

$\text{Lip} \Rightarrow$ 绝对连续
~~且~~

e.g. 在区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 上, 令

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x}, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x}, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

即 f 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上处处可微. 由数学分析知识得

f' 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上 Riemann 广义可积

又 $f' \geq 0$. 故 $f' \in L([0, \frac{1}{2}])$

从而 f 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上绝对连续

但由于

$$\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \frac{\frac{1}{|\ln x|}}{|x|^\alpha} \rightarrow \infty (x \rightarrow 0)$$

故 f 不满足任何 $\alpha > 0$ 阶的 Lip 条件

• α 阶 Lipschitz 条件指: 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的函数, L 为一正常数, 若对于 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|^\alpha$$

2. 设 $\{f_n\}$ 是可测集上的非负有界可测函数序列, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$,
但 f_n 却无处收敛到零.

e.g. 注意到, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 可以将 n 唯一地表示成

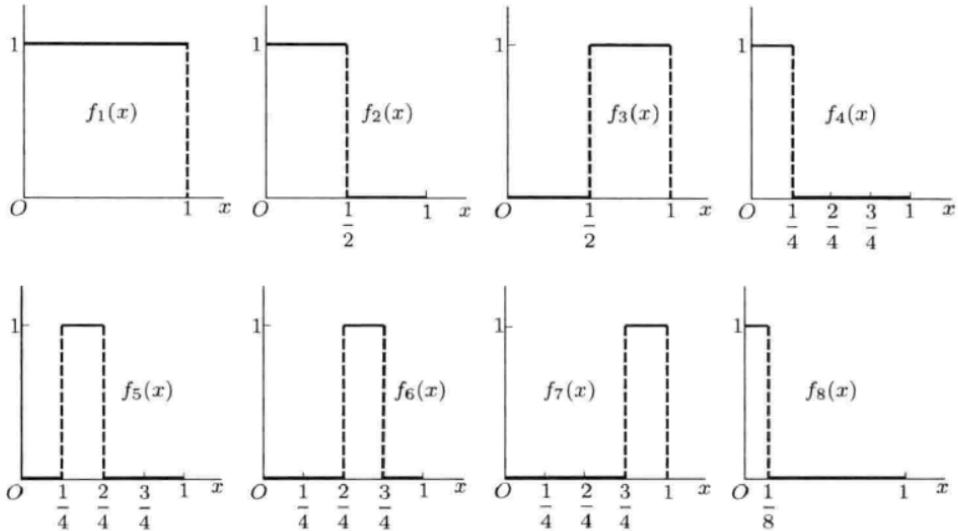
$$n = 2^k + i$$

$$\text{其中 } k=0, 1, 2, \dots; 0 \leq i \leq 2^k - 1$$

现今令 f_n 为：当 $n = 2^k + i$ 时，设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{2^k} \leq x < \frac{i+1}{2^k} \\ 0, & [0, 1] \text{ 中的其他点} \end{cases}$$

画出示意图：



显然有

$$\int_{(0,1)} f_n(x) dm = \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2^k}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $k \rightarrow \infty$ ，故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

但是 f_n 在 $[0, 1]$ 上的无论哪一点都不趋于零。

□

3. $f_n \xrightarrow{\text{强}} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$
 $f_n \xrightarrow{m.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$

这两个反例都可以是这个：

$E = [0, 1] \cdot f \equiv 0$. 令

$$f_1(x) = \psi_E(x).$$

$$f_2(x) = \psi_{[0, \frac{1}{2}]}(x), f_3(x) = \psi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

$$f_4(x) = \psi_{[0, \frac{1}{4}]}(x), \dots f_7(x) = \psi_{[\frac{3}{4}, 1]}(x) \dots$$

.....

$$\text{则 } \int_E |f_n - f|^p dm = \int_E |f_n|^p dm \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

这是因为

$$\int_E |f_1|^p dm = 1, \int_E |f_2|^p dm = \frac{1}{2}, \int_E |f_3|^p dm = \frac{1}{3}$$

$$\int_E |f_4|^p dm = \frac{1}{4}, \dots \int_E |f_n|^p dm = \frac{1}{2^k}. \quad (n = 2^k + i)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $k \rightarrow \infty$ 此有 $\int_E |f_n|^p dm \rightarrow 0$.

由 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f$. (讲义 P156)

往证推不出 $f_n \xrightarrow{a.e} f$

$\forall x \in E, f_n(x) \rightarrow f(x)$. 实际上, $\forall x \in E, \exists \{n_k^{(1)}\}$ 和 $\{n_k^{(2)}\}$ 满足
 $f_{n_k^{(1)}}(x) = 1, f_{n_k^{(2)}}(x) = 0$.

这就找到了 $\{f_n(x)\}$ 的两个子列. 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^{(1)}}(x) = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k^{(2)}}(x) = 0. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ 不存在}$$

即不满足 $f_n \xrightarrow{a.e} f$.

□

4. (1) (L) 可积而不(R) 可积

(2) 广义(R) 可积而不(L) 可积

(3) (L) 可积而不广义(R) 可积

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

若 f 有界且在 $[a, b]$ 上 (R) 可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上必 (L) 可积

(2) 书 P114 有一例, 这里再给出一个:

在开区间 $(0, 1)$ 上定义 f :

$$f(x) = \begin{cases} 2n+1, & \frac{1}{2n+2} < x < \frac{1}{2n+1} \\ -(2n+2), & \frac{1}{2n+3} \leq x \leq \frac{1}{2n+2} \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ 易见 f 在 $(0, 1)$ 上的广义 (R) 积分存在, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1) \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) - (2n+2) \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\end{aligned}$$

但 $\int_0^1 |f(x)| dx = +\infty$
故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非 L 可积

注：若干非负且广义 (R) 可积，则子亦必 (L) 可积。
“非负性”不能去。

(3) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 是收敛的正项级数，在 $[0,1]$ 上定义 f ：

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{|x-b_n|^{\frac{1}{2}}}, \quad x \neq b_n, \quad f(b_n) = 0 \\ \text{其中 } \{b_n\} &\text{ 为 } [0,1] \text{ 中的可数稠密子集。易知 } f \text{ 在 } [0,1] \text{ 上非负可积。} \\ \text{且 } \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\int_0^{b_n} \frac{dx}{(b_n-x)^{\frac{1}{2}}} + \int_{b_n}^1 \frac{dx}{(x-b_n)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2\sqrt{b_n} + 2\sqrt{1-b_n}) \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty\end{aligned}$$

即 $f \in L([0,1])$ ，但 f 在 $[0,1]$ 上并不广义 (R) 可积。

5. 在每个子集上都 (L) 可积，但在并集上并不一定 (L) 可积

eg. 易证：若 f 是 E 上的可测函数，则 f 也是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 上的可测函数。
然而，对于 (L) 积分而言，相应的命题并不成立。如。

$$\text{令 } E_n = \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

则 E_n 两两不交，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0,1]$ 。令

$$f(x) = \begin{cases} n, & \frac{2n}{4n^2-1} < x \leq \frac{1}{2n-1} \\ -n, & \frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{2n}{4n^2-1} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

则 f 在每个 E_n 上都是有界可测的。从而 $f \in L(E_n)$ 。其积分值为

$$\int_{E_n} f(x) dm = \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2n}{4n^2-1}} (-n) dx + \int_{\frac{2n}{4n^2-1}}^{\frac{1}{2n-1}} n dx$$

$$= -n \left(\frac{2n}{4n^2-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2n}{4n^2-1} \right)$$

$\approx 0.$

但是 $\int_E |f(x)| dm = \int_0^1 |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} |f(x)| dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$$

可见 $|f|$ 在 E 上并不是 (L) 可积的. 从而 f 也不是 (L) 可积的.

□