

图论与网络

Graph theory and network

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

图论的历史

创始人

E.Euler (瑞士数学家)

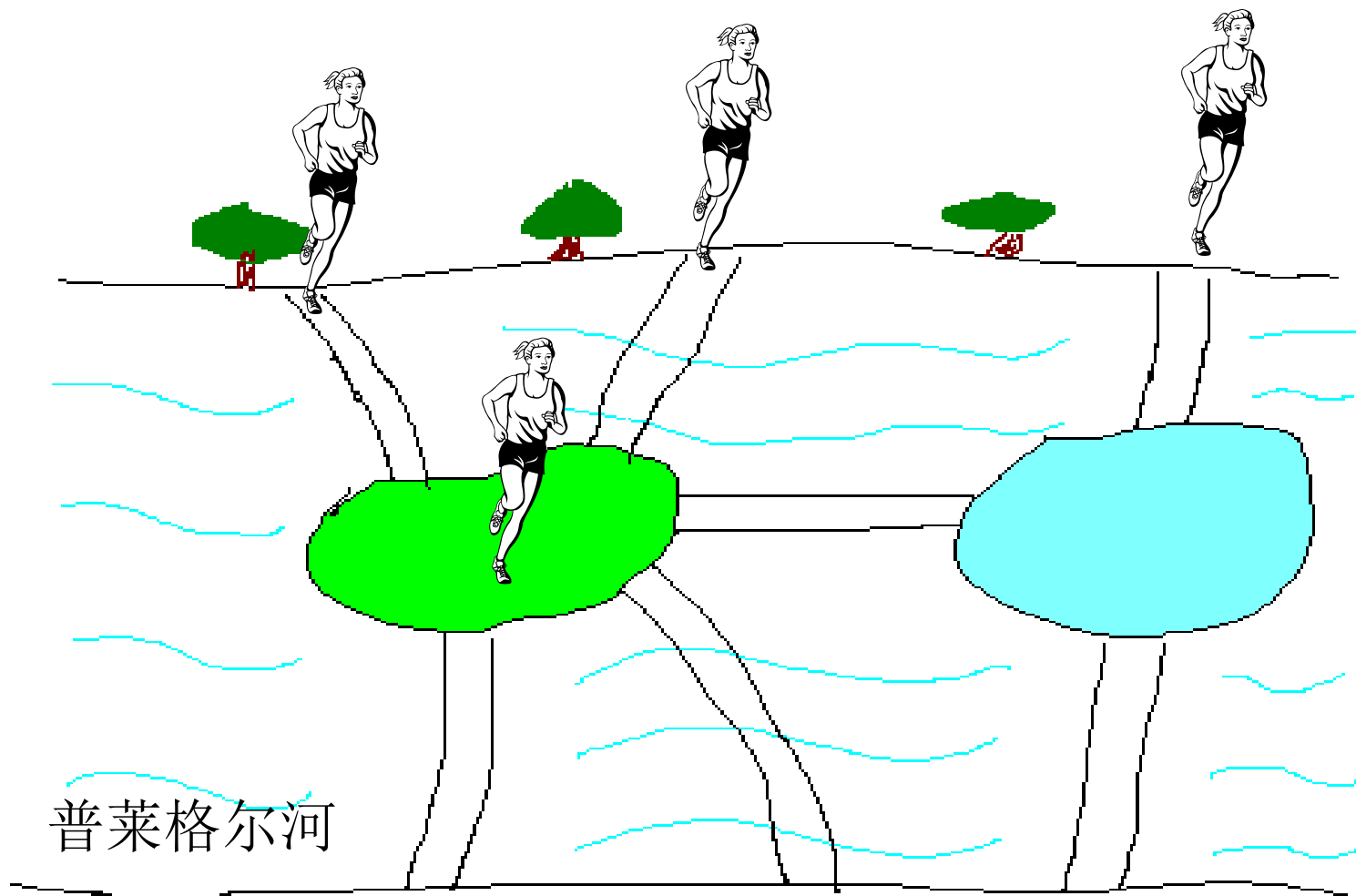
创立时间

18世纪

问题的提出

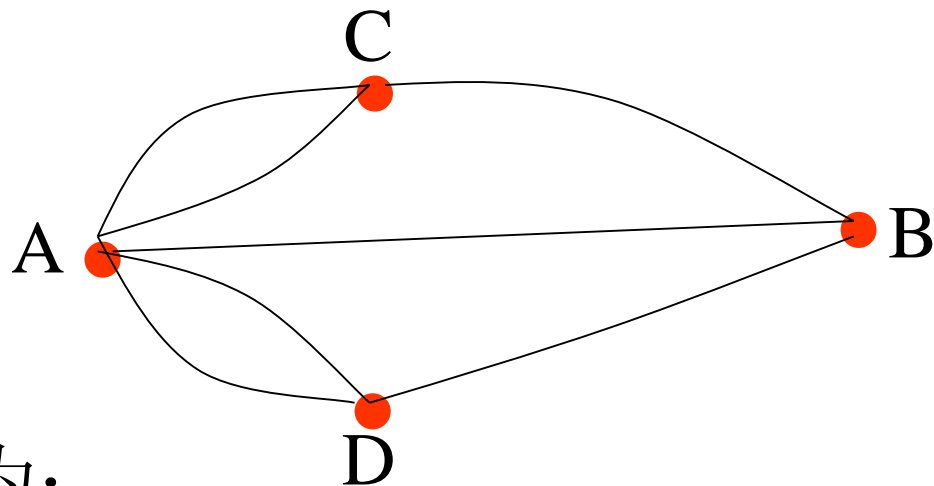
歌尼斯堡七桥难题

※ 歌尼斯堡七桥难题



七桥问题的数学模型：

用A、B表示两座小岛，C、D表示两岸，
连线AB表示A、B之间有一座桥。



问题简化为：

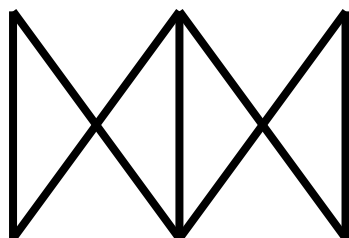
在该图中，从任一点出发，能否通过每条线段一次且仅仅一次后又回到原来的出发点

结论：不存在这样一种走法。

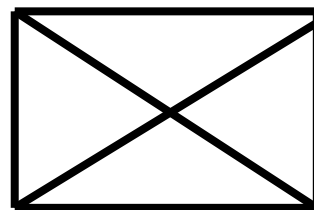
类似的问题：一笔画问题

图的一笔画：

可一笔画



不可一笔画



字的一笔画：如“中、日、口、串”等可一笔画

而：“田、目”等不能一笔画

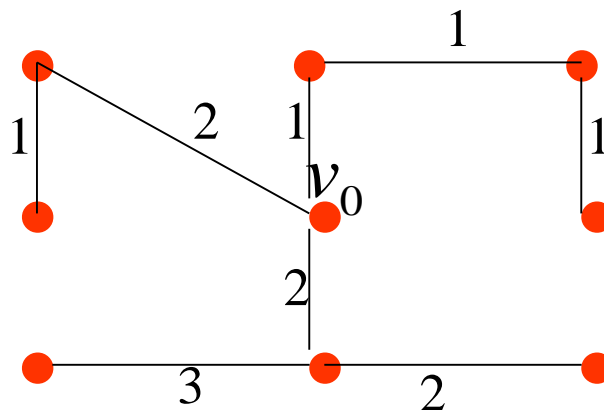
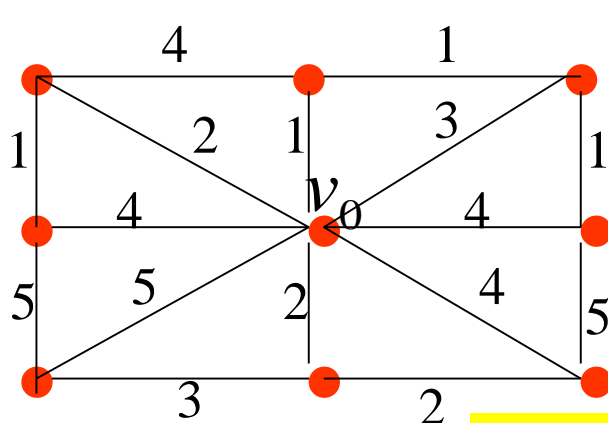
图论的应用范围:

1、中国邮路问题:

邮递员如何选择适当的投递路线, 使每条街道至少走过一次且所走的总路程最短?

2、最短路问题:

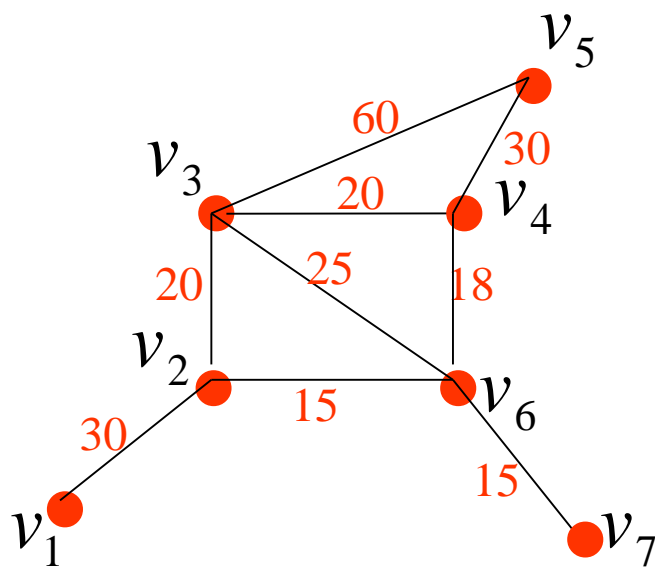
一个乡有9个自然村, 其间道路如下图所示, 要以村为中心 v_0 建有线广播网, 如要求沿道路架设广播线, 应如何架设使所用电线最短



3、选址问题

已知一个地区的交通网络如下图所示，其中点代表居民小区，边表示公路，问区中心医院应建在哪个小区，可使离医院最远的小区居民就诊时所走的路程最近？

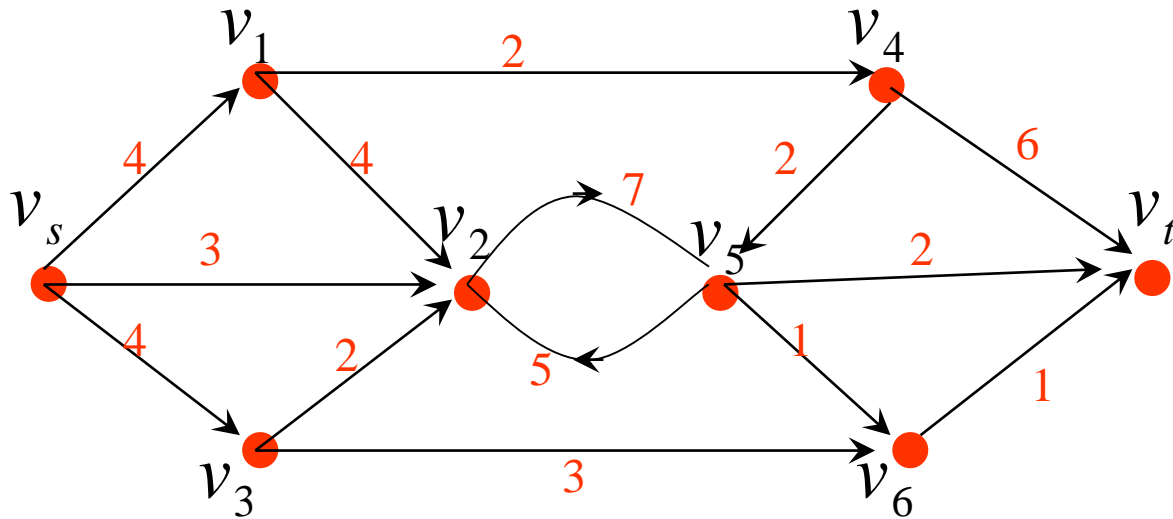
即求图的中心



结论：把医院建在 v_6 ，可使离医院最远的小区居民就诊时所走的路程最近

4、网络流问题：

例：在一个输油管道网中， v_s 为起点， v_t 为终点， v_i 为中转站 ($i = 1, 2, \dots, k$), 边上的数表示该管道的最大输油量，问应如何安排，才能使从 v_s 到 v_t 的总运输量最大？



最大
流问
题

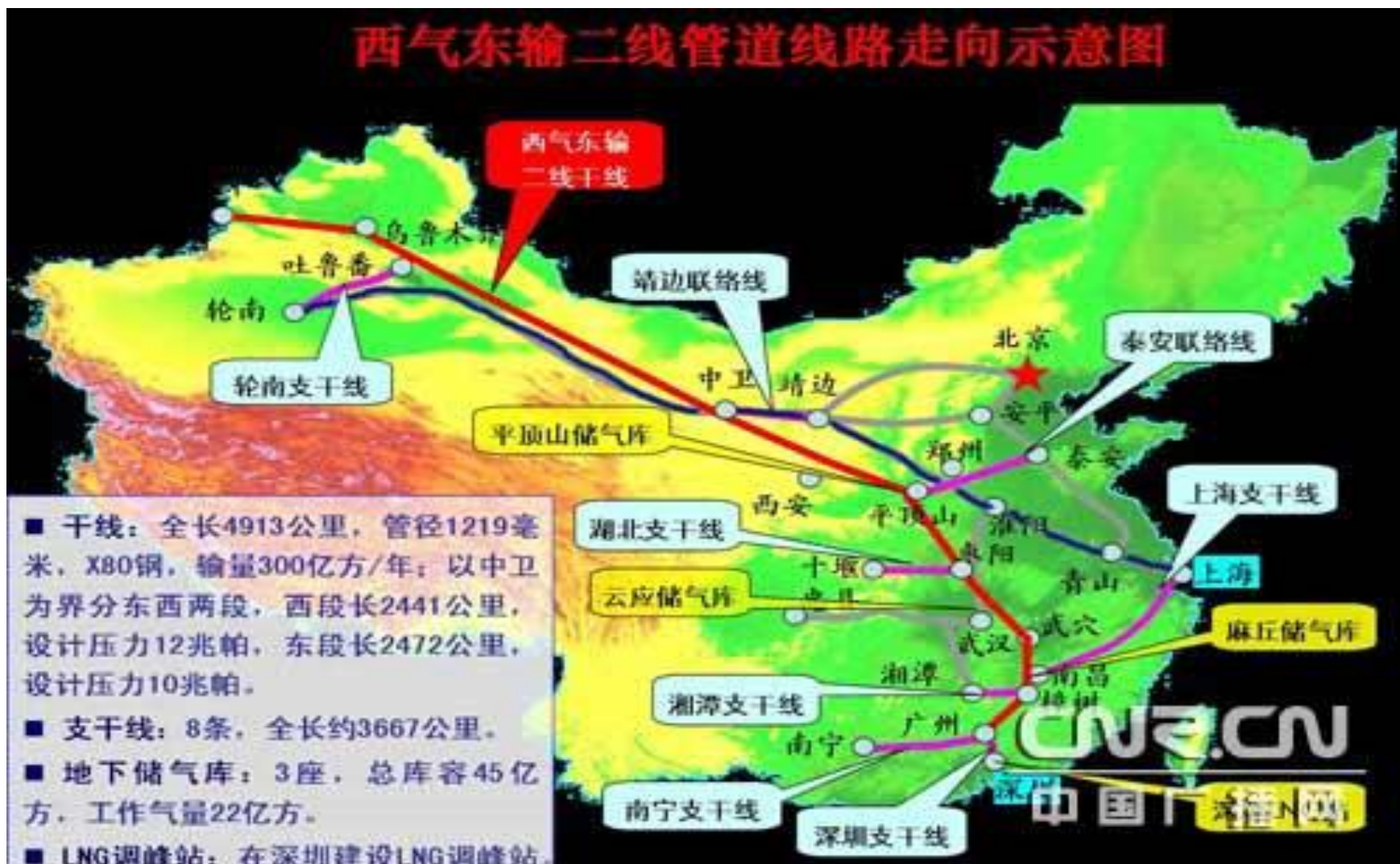
南水北调工程



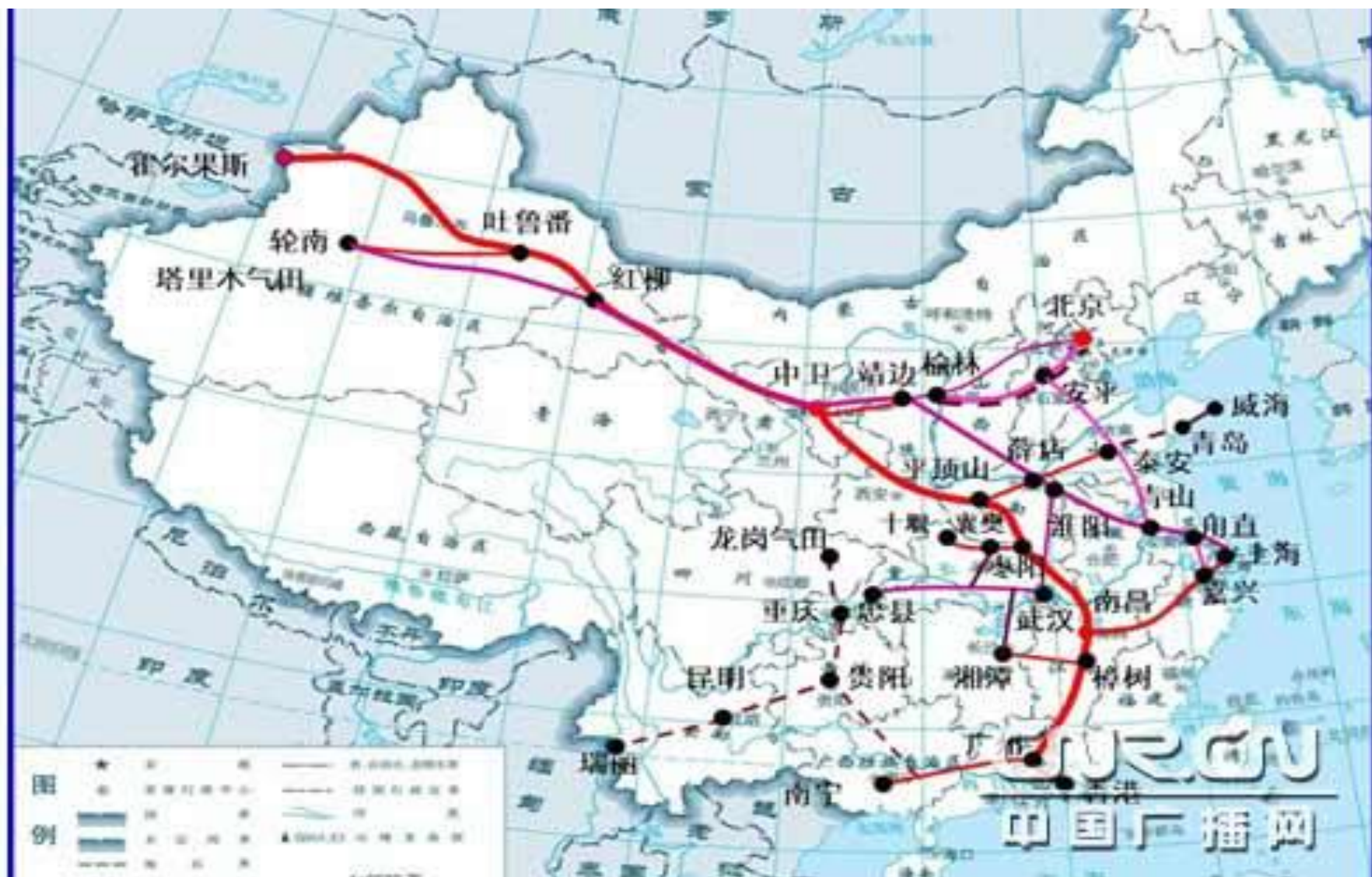
南水北调工程

线路	供水范围	工程分期	线路长度/km	调水规模		调水方式		输水方式	年用电量/亿 kW.h
				流量/ $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	水量/亿 m^3	抽水扬程/m	自流落差/m		
东线	黄、淮、海平原东部地区	第一期	660	500	70	65		扩建京杭运河	8.5
		第二期	1150	700	118	65			20
		第三期	1150	1000	186	65			35
中线	京、津、冀 豫、鄂	第一期	1390	350	75		100	立交渠道	
		第二期	1390	630	145		100	立交渠道	
		第三期	1390	800	220		100	立交渠道	
西线	青、甘、宁 蒙、陕、晋	第一期	131		45			隧洞	
		第二期	288.7		145			隧洞	
		第三期	29.8		195	458	自流 自流	隧洞	71

西气东输工程



西气东输工程



$\S 6.1$ 图的概念

6.1 基本概念

一、图的概念

图 -----由若干个点和连接这些点的某些连线所组成的图形

G ——一个图

v_i ——图中的点，称为顶点。

e_i ——图中的连线，称为边。 $e_k = (v_i, v_j)$

记 $V = \{v_i\}$, $E = \{e_i\}$,

$G = (V, E)$

$m(G) = |E|$ —— G 的边数，简记为 m

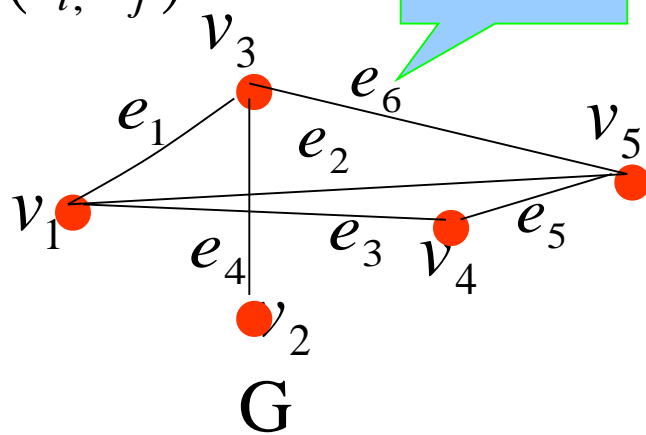
$n(G) = |V|$ —— G 的顶点数，简记为 n

代表具体事物

代表事物之间的联

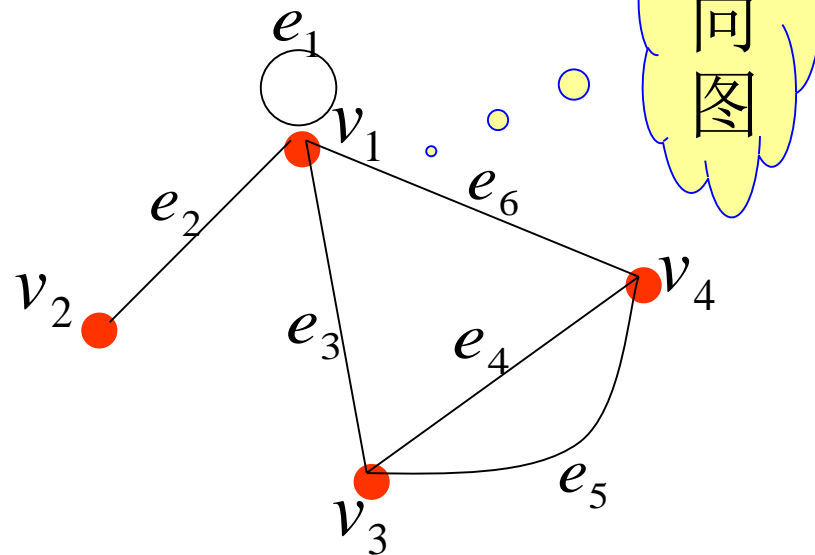
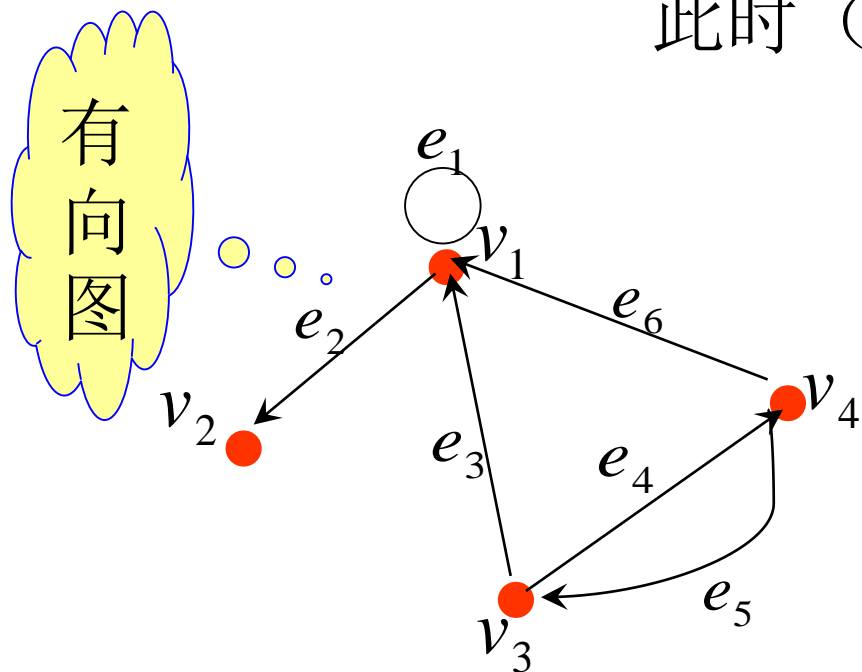
系

$= (v_3, v_5)$



$m=6, n=5$

图 {
有向图 —— 边 $e = (v_i, v_j)$ 有方向
 v_i 为始点, v_j 为终点
此时 $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$
无向图 —— 边 $e = (v_i, v_j)$ 无方向
此时 $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$



$$e_4 = (v_3, v_4) \neq (v_4, v_3)$$

$$e_4 = (v_3, v_4) = (v_4, v_3)$$

$$e_5 = (v_4, v_3) \neq (v_3, v_4)$$

$$e_5 = (v_3, v_4) = (v_4, v_3)$$

二、常用名词：

1、端点和关联边：

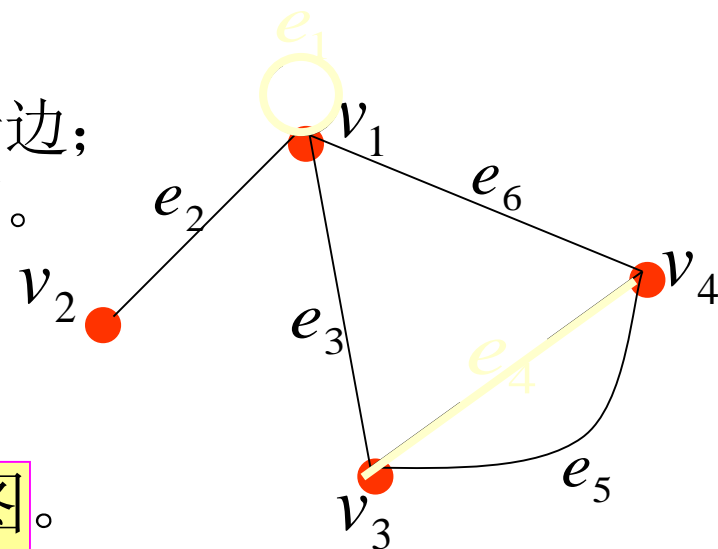
若 $e_k = (v_i, v_j) \in E$, 则称点 v_i 、 v_j 是边 e_k 的端点，边 e_k 是点 v_i 和 v_j 的关联边

2、相邻点和相邻边：

一条边的两个端点称为相邻点，简称邻点，
端点落在同一个顶点的边称为相邻边，简称邻边

3、多重边与环：

具有相同端点的边称为多重边或平行边；
两个端点落在同一个顶点的边称为环。



4、多重图和简单图：

含有多重边的图称为多重图；
无环也无多重边的图称为简单图。

5、**次**：以点 v_i 为端点的边的条数称为点 v_i 的次， $d(v_i)$

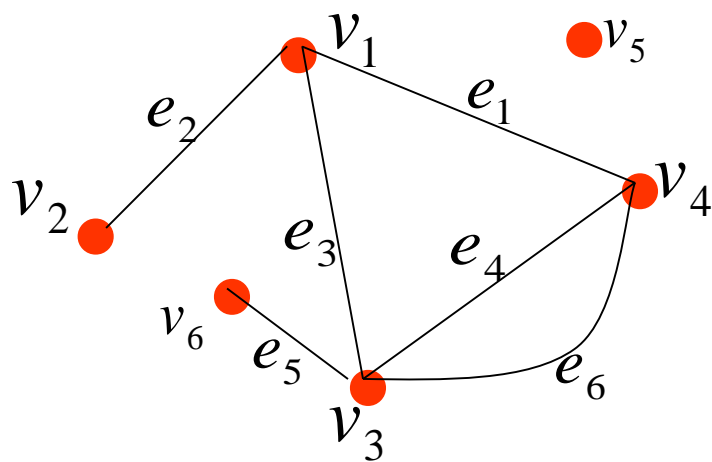
6、悬挂点和悬挂边：

次为1的点称为悬挂点，与悬挂点相联的边称为悬挂边。

7、孤立点：次为0的点称为孤立点

8、**奇点与偶点**：

次为奇数的点称为奇点，次为偶数的点称为偶点



$$d(v_1) = 3, d(v_2) = 1, d(v_3) = 4$$

$$d(v_4) = 3, d(v_5) = 0, d(v_6) = 1,$$

v_2 、 v_6 为悬挂点， e_2 、 e_5 为悬挂边， v_5 为孤立点，

v_1 、 v_2 、 v_4 、 v_6 为奇点， v_3 、 v_5 为偶点

$$\sum d(v_i) = 12, \text{ G的边数 } m = 6$$

即 $\sum d(v_i) = 2m$

哈尔滨工业大学运筹学研究所

三、次的性质

定理1 在图 $G=(V,E)$ 中，所有点的次之和是边数 m 的两倍。

证明： 由于每条边均与两个顶点关联，
因此在计算顶点的次时每条边都计算了两遍
所以顶点次数的总和等于边 数的二倍。


定理5.2 在任何图 $G=(V,E)$ 中，奇点的个数为偶数

证明： 设 V_1 和 V_2 分别是图 G 中奇点和偶点的集合

则 $V_1 \cup V_2 = V$ 且 $V_1 \cap V_2 = \Phi$

$$\sum_{i \in V} d(v_i) = \sum_{i \in V_1} d(v_i) + \sum_{i \in V_2} d(v_i) = 2m \quad (\text{定理5.1})$$

$\because V_2$ 是偶点的集合, $d(v_i)(i \in V_2)$ 均为偶数

所以 $\sum_{i \in V_2} d(v_i)$ 为偶数  $\sum_{i \in V_1} d(v_i)$ 为偶数

而 V_1 是奇点的集合, $d(v_i)(i \in V_1)$ 均为奇数

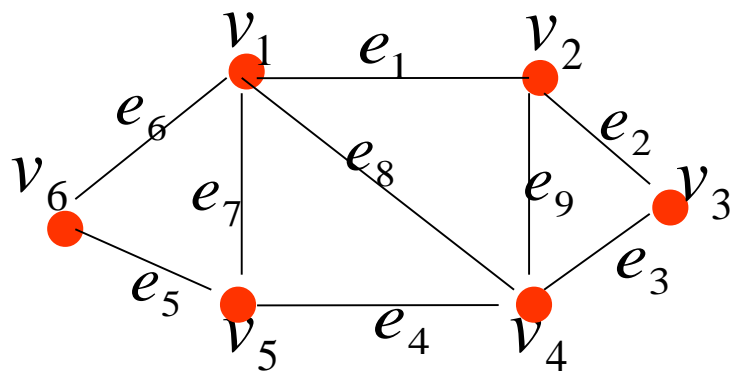
只有偶数个奇数相加才能得到偶数

所以 V_1 中的点，即奇点的个数为偶数

四、链：对无向图 $G = (V, E)$

1、链的定义：在图 $G = (V, E)$ 中，一个点与边的交错序列
 $\{v_{i0}, e_{i1}, v_{i1}, e_{i2}, \dots, v_{ik-2}, e_{ik-1}, v_{ik-1}, e_{ik}, v_{ik}\}$,
且 $e_{it} = (v_{it-1}, v_{it}) (t = 1, 2, \dots, k)$, 则称这个点边序列为
连接 v_{i0} 与 v_{ik} 的一条链, 简记为 $\mu = \{v_{i0}, v_{i1}, \dots, v_{ik-2}, v_{ik-1}, v_{ik}\}$

- 简单链：在链 μ 中，所含的边均不相同
- 初等链：在链 μ 中，所含的顶点、边均不相同



$\{v_6, e_5, v_5, e_7, v_1\}$

初等链

$\{v_6, e_7, v_1, e_8, v_4\}$

不是链

简单链

$\{v_5, e_4, v_4, e_9, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_8, v_1\}$,

连接 v_5 与 v_1 的一条链

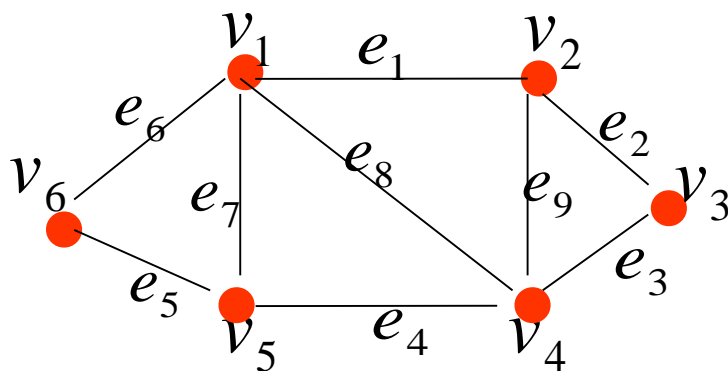
圈或回路

链 { 闭链: 链 μ 中的起点与终点重合
开链: 链 μ 中的起点与终点不同

路

简单圈 在圈 μ 中, 所含的边均不相同

初等圈 在圈 μ 中, 除起点和终点重合外, 没有相同的顶点和相同的边



简单圈

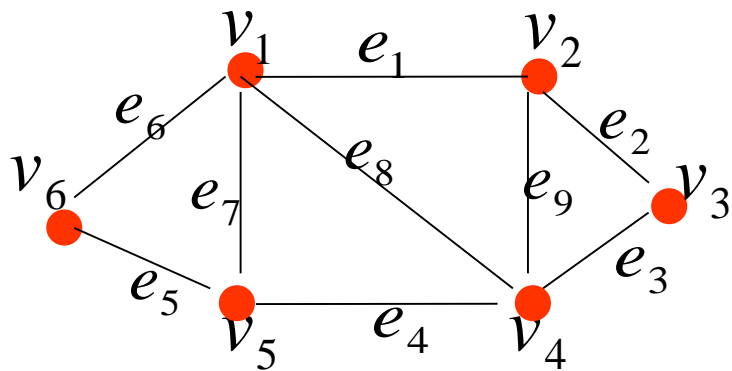
$\{v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5\}$ 为一个圈

$\{v_5, e_5, v_6, e_6, v_1, e_8, v_4, e_4, v_5\}$ 为一个圈

初等圈

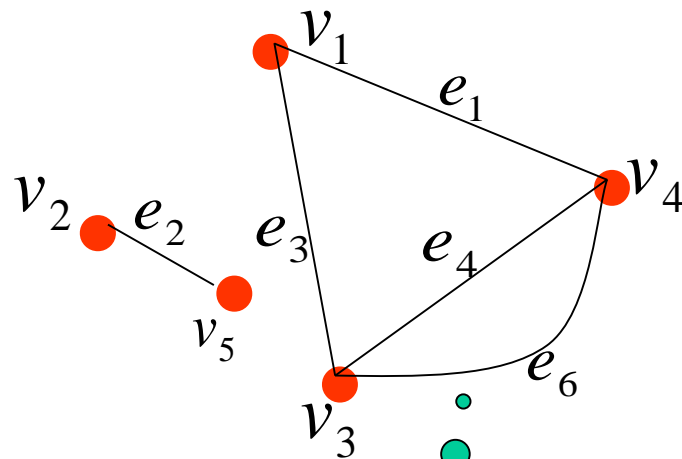
$\{v_1, e_8, v_4, e_9, v_2, e_2, v_3\}$ 为一条道路

五、连通图：图 G 中任意两点之间至少有一条链相连。



...

连通图

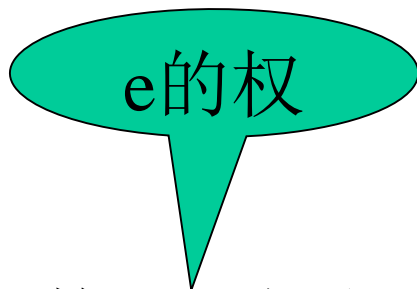


...

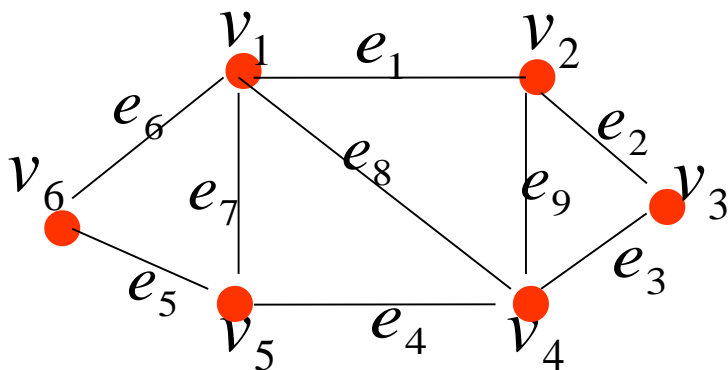
不连通图

六、赋权图（网络）

对图 $G=(V, E)$ ，
若对每一条边 e ，都有一个实数 $w(e)$ 与之对应，
则称图 $G=(V, E)$ 为赋权图，或网络
权 $w(e)$ 通常表示距离、费用、容量等



如公路交通图：



v_i 表示 城市， e_i 表示公路
 $w(e_i)$ 表示公路 e_i 的长度
如 $w(e_2) = 50$ ：

城市 v_2 到城市 v_3
的距离是50公里

七、完全图和偶图

一个简单图中若任意两点之间均有边相连，那么这样的图称为**完全图**

如果图的顶点可以分成两个互不相交的非空集合 V_1 和 V_2 ，使在同一集合中的任意两个顶点都不相邻，那么称这样的图为**偶图**。

如果偶图的顶点集合 V_1 和 V_2 的每一对不同顶点都有一条边相连，那么称这样的图为**完全偶图**。

八、子图和部分图

对于图 $G_1(V_1, E_1)$ 和 $G_2(V_2, E_2)$, 如果有 $V_1 \subseteq V_2, E_1 \subseteq E_2$,

称图 G_1 是图 G_2 的**子图**。

对于图 $G_1(V_1, E_1)$ 和 $G_2(V_2, E_2)$, 如果有 $V_1 = V_2, E_1 \subseteq E_2$,

称图 G_1 是图 G_2 的一个**部分图**。