

线性规划的对偶理论

——影子价格

运筹学研究所
哈尔滨工业大学经济与管理学院

影子价格的定义

资源的合理利用问题

某厂计划在下一个生产周期内生产n种产品 B_1, B_2, \dots, B_n , 要消耗m种资源 A_1, A_2, \dots, A_m . 产品单位利润、资源数量及单位产品消耗的资源数量见下表。问如何生产使得总利润最大。

解：设 x_j 表示产品 B_j 的产量

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$s.t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

产品 资源 \	B_1	B_2	...	B_n	资源 数量
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
单位 利润	c_1	c_2	...	c_n	

投资决策依据：比较第*i*种资源增加一个单位，其余资源不增加时利润的增加值

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t & \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \end{array} \right. \end{array}$$

对于上述模型，不易根据决策依据直接测算第 i 种资源的边际利润。

$$\begin{array}{ll} \min & w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ s.t & \left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \geq c_n \\ y_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \end{array} \right. \end{array}$$

设 \mathbf{B} 是原模型的最优基， \mathbf{z}^* 是最优值， w^* 是对偶模型的最优解

$$z^* = C_B B^{-1} b = w^* = Y^* b$$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 是对偶模型的最优解。从而

$$z^* = Y^* b = y_1^* b_1 + y_2^* b_2 + \dots + y_m^* b_m$$

当 $b_i \rightarrow b_i + 1$, 其余不变时,

$$\begin{aligned} z_1^* &= y_1^* b_1 + \dots + y_i^* (b_i + 1) + \dots + y_m^* b_m \\ &= z^* + y_i^* \end{aligned}$$

$$\Delta z = z_1^* - z^* = y_i^*$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

影子价格的定义

1. 资源的边际利润：增加单位资源导致的利润增加值

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^* \quad \frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

2. 资源的边际价格：既然边际利润是资源数量增长单位数量带来的，因而资源的边际价值可以用边际利润来衡量。

3. $C_B B^{-1}$ 也被称为拉格朗日乘子(Lagrange)，或灵敏度系数



例 某厂计划在下一个生产周期内生产甲乙两种产品，要消耗钢材、煤炭和设备台时三种资源。单位产品消耗资源的数量、资源的数量、单位产品的利润见下表。问如何安排生产，才能充分利用现有资源，使总利润最大？

设 x_1 、 x_2 为产品甲乙的数量，
模型如下：

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 18x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

资源\产品	甲	乙	资源数量
钢材	5	2	170
煤炭	2	3	100
设备台时	1	5	150
单位利润 (万元)	10	18	

原问题的最优解为 $(50/7, 200/7)$ ，最优值为 $4100/7$

对偶问题的最优解为 $(0, 32/7, 6/7)$

根据对偶问题的最优解为 $(0, 32/7, 6/7)$, 可知



钢材的影子价格为0

即再增加1吨钢材, 利润不会增加

煤炭的影子价格为 $32/7$

即再增加1吨煤炭, 利润增加 $32/7$ 万元

设备台时的影子价格为 $6/7$

即再增加1个台时, 利润增加 $6/7$ 万元

影子价格的应用

——判定资源的稀缺程度

例 某厂计划在下一个生产周期内生产甲乙两种产品，要消耗钢材、煤炭和设备台时三种资源。单位产品消耗资源的数量、资源的数量、单位产品的利润见下表。问如何安排生产，才能充分利用现有资源，使总利润最大？

设 x_1 、 x_2 为产品甲乙的数量，
模型如下：

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 18x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

资源\产品	甲	乙	资源数量
钢材	5	2	170
煤炭	2	3	100
设备台时	1	5	150
单位利润 (万元)	10	18	

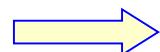
原问题的最优解为 $(50/7, 200/7)$ ，最优值为 $4100/7$

对偶问题的最优解为 $(0, 32/7, 6/7)$

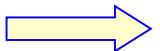
$$\max z = 10x_1 + 18x_2$$

对于原模型 s.t. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 & \text{钢材} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 & \text{煤炭} \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 & \text{设备} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}

由对偶问题的最优解为 $(0, 32/7, 6/7)$ ，结合互补松弛定理，可知第2、3个资源约束条件为紧约束，也就是松弛变量取0值



说明煤炭和设备台时得到了充分的利用，没有剩余，属于紧缺资源



经过验证第1个约束为松约束，意味着钢材没有充分利用，有剩余，属于非稀缺资源

影子价格的应用

——判定资源的外部价值

例：已知某家具公司生产书桌、餐桌、椅子三种产品。生产这些家具需要木材和两种熟练工人：漆工和木工。各种家具的资源需求如下表，且公司确信书桌和椅子的需求是无限的，但餐桌最多能卖出5个，问如何安排生产，能使总收入最大？

	书桌	餐桌	椅子	资源数
木材	8英寸	6英寸	1英寸	48英寸
漆工	4小时	2小时	1.5小时	20小时
木工	2小时	1.5小时	0.5小时	8小时
售价	60元	30元	20元	

设 x_1, x_2, x_3 为书桌、餐桌和椅子的生产数量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ s.t. \quad & \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 & \text{木材} \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 & \text{漆工} \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 & \text{木工} \\ x_2 \leq 5 & \text{餐桌} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases} \end{aligned}$$

木材的影子价格 $y_1 = 0$
漆工的影子价格 $y_2 = 10$
木工的影子价格 $y_3 = 10$
餐桌的影子价格 $y_4 = 0$

若市场上1小时的木工工资 < 10 元，可获得额外利润

若市场上1小时的木工工资 > 10 元，将造成损失

影子价格的应用

——资源的评估

检验数公式如下

$$\sigma = C - C_B B^{-1} A = C - Y^* A$$

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - Y^* P_j$$

定义1 $Y^* P_j$ 为产品j的内部成本，称为隐含成本或影子成本

定义2 σ_j 为产品j的内部剩余价值，称为隐含利润或影子利润

判定规则：

1. 当产品j的隐含利润值小于0，说明该产品不值得企业进行生产，带来不了更多的利润，不需改变当前生产结构；
2. 当产品j的隐含利润值等于0，且没有纳入生产体系，则说明这种产品，可以作为替代产品，取代某种纳入生产体系的产品，但也带来不了更多的利润，可改变也可不改变当前的生产结构；
3. 当产品j的隐含利润值大于0，说明该产品没有纳入生产体系，且能带来更多的利润，需要改变当前的生产结构。

问题：别的企业赚钱的产品是否适合自己？

例 某厂计划在下一个生产周期内生产甲乙两种产品，要消耗钢材、煤炭和设备台时三种资源。单位产品消耗资源的数量、资源的数量、单位产品的利润见下表。问如何安排生产，才能充分利用现有资源，使总利润最大？

产品 资源	甲	乙	资源 数量
钢材	5	2	170
煤炭	2	3	100
设备台时	1	5	150
单位利润 (万元)	10	18	

现在考虑生产第3种产品，即丙产品，丙产品的单位利润为12，单位产品耗费4吨钢材、3吨煤炭资源、2个设备台时。问该产品是否值得生产？

设 x_1 、 x_2 为产品甲乙的数量，原问题模型如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 18x_2 \\ s.t. \quad & \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对偶问题的最优解为 $(0, 32/7, 6/7)$ ，则产品丙的隐含利润为

$$12 - (0 \times 4 + \frac{32}{7} \times 3 + \frac{6}{7} \times 2) = -\frac{24}{7} < 0$$

故不考虑生产产品丙，需重新确定生产结构。

问题：别的企业赚钱的产品是否适合自己？

例 某厂计划在下一个生产周期内生产甲乙两种产品，要消耗钢材、煤炭和设备台时三种资源。单位产品消耗资源的数量、资源的数量、单位产品的利润见下表。问如何安排生产，才能充分利用现有资源，使总利润最大？

产品 资源	甲	乙	资源 数量
钢材	5	2	170
煤炭	2	3	100
设备台时	1	5	150
单位利润 (万元)	10	18	

现在考虑生产第3种产品，即丙产品，丙产品的单位利润为12，单位产品耗费4吨钢材、3吨煤炭资源、2个设备台时。问该产品是否值得生产？

影子价格的本质

1. 影子价格是一种资源的虚拟价格，它不是市场实际价格
2. 影子价格是一种不稳定价格，它随着生产结构的改变而改变，随产品的市场价格改变而改变
3. 影子价格是在系统达到最优时对资源的内部估价