# 2023 年讲师团实变函数期中模拟

2023 年 4 月 10 日

## 1 判断题

1. 若 $|f|$ 可测，则 $f$ 可测。

2. 若 $E_n$ 是一个渐缩的可测集序列，则

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

3. 设 $E \subset R^n$ 为孤立点集，则 E 为至多可列集。

4. 若集列$E_k$ 互不相交，则

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_k.$$

5. 若 $f(x)$、$f_k(x)$ 在 E 上实值可测，对 $\forall \varepsilon, \delta > 0$，存在 E 中的可测子集 e 以及 k 使 m（$E\backslash e$）$< \delta$ 且 $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon(k \to \infty, x \in e)$，则 $f_k \overset{m}{\to} f$。

6. 设 $E \subset R$，若 $E^{'}$ 是可数集，则 E 是可数集。

7.$A_\lambda$ 是一族可测集，则 $\bigcap_\lambda A_\lambda$ 也是可测集。

8.$E_n \subset R(\mathrm{n} \in \mathrm{N})$，$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,$x \in E\prime$，则 $\exists n_0$ 使得 $x \in E^{'}_{n_0}$

9. 对于递减集合列 $A_k$，若 $m^* A_k < +\infty (n \in N)$，则

$$m^*(\lim A_k) < \lim m^*(A_k)$$

10. 存在 A、B $\subset R$,m(A)=m(B)=0,m(A+B)>0.

# 2 证明题

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的单调函数，证明集合

$$\{x : \forall\varepsilon > 0, f(x+\epsilon) > f(x-\epsilon)\}$$

是闭集.
2. 设 $E \subset R^n$, 则 $E$ 是紧集的充要条件是：对任意 $\{x_n\} \subset E$，存在子列 $\{x_{nk}\}$，使得 $x_{nk} \to x_0 \in E$.
3. 若 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的连续函数，证明：$E = \{(x, y) : y = f(x)\}$ 和 $F = \{(x, y) : y \leq f(x)\}$ 是 $R^2$ 中的闭集；而 $G = \{(x, y) : y < f(x)\}$ 是 $R^2$ 中的开集.