线性规划的对偶理论

——Dual theory on linear programming

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

对 偶 理 论
(Duality Theory)

1. 什么是对偶问题？

2. 线性规划的对偶模型及其性质

3. 对偶理论的应用——对偶单纯形法

4. 对偶理论的应用——影子价格

5. 对偶理论的应用——灵敏度分析

1. 什么是对偶问题？

例1. 资源的合理利用问题

已知资料如表所示，问应如何安排生产计划使得既能充分利用现有资源有使总利润最大?

单件消耗 产品 / 资源	甲	乙	资源限制
A	**5**	**2**	**170（钢材）**
B	**2**	**3**	**100（煤炭）**
C	**1**	**5**	**150（设备）**
单件利润	**10**	**18**	

数学模型：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其中x_1和x_2为甲乙产品的数量

1. 什么是对偶问题？

下面从另一个角度来讨论这个问题：

假定：该厂的决策者不是考虑自己生产甲、乙两种产品，而是将厂里的现有资源用于接受外来加工任务，只收取加工费。试问该决策者应制定怎样的收费标准（合理的）？

问题分析：

（1）每种资源收回的费用不能低于自己生产时的可获利润；

设y_1, y_2, y_3分别为三种资源的收费单价，所以有下式

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10$$
$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

1. 什么是对偶问题？

问题分析：

（2）定价又不能太高，要使对方能够接受。

就目标而言，用下式可以表达：

$$170y_1 + 100y_2 + 150y_3 = W$$

一般而言，W越大越好，但因需双方满意，故

$$\min\ W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$ 为底线

该问题的数学模型为：

$$\min\ W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

模型对比：

生产模型（原模型）

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

资源租赁模型（新模型）

$$\min\ W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

模型对比：

	原问题	新问题
目标函数	max	min
约束条件	$\leqslant$	$\geqslant$
	资源系数	价值系数
	价值系数	资源系数
技术矩阵	A	A^T
	变量数量	约束条件个数
	约束条件个数	变量数量

1. 什么是对偶问题？

(1) 具有上述特殊联系的两个线性规划问题，就称为对偶问题其中一个称为原问题(**Prime problem**), 另外一个称为该问题的对偶问题(**Dual problem**)。对偶关系是相互的。

(2) 线性规划原问题及其对偶问题之间的关系和性质，就是线性规划的对偶理论

2. 为什么要学习对偶理论？

（1）可以为一些经典运筹学问题提供有效的算法

（2）对偶理论对经济学的发展有非常重要的贡献

★ 1975年康托罗维奇（Kantorovich）与库普曼斯（Koopmans）因为资源最优配置理论荣膺诺贝尔经济学奖。

★ 1994年纳什(Nash)、泽尔腾(Selton)与海萨尼（Harsanyi）因为博弈论分享诺贝尔经济学奖。

★ 阿罗（Arrow）、萨谬尔逊、西蒙、多夫曼和胡尔威茨等诺贝尔经济学奖获得者在线性规划领域均做出了杰出的贡献。

（3）有助于为解决问题提供新思路

对偶线性规划理论的历史发展

- 1947年美国数学家Von Neumann冯诺伊曼提出对偶理论，开创了线性规划的许多新的研究领域，扩大了它的应用范围和解题能力。
- 1954年C.莱姆基提出对偶单纯形法
- 1954年S. 加斯和T. 萨迪等人解决了线性规划的灵敏度分析和参数规划问题
- 1956年A.塔克提出互补松弛定理

3. 线性规划模型及其对偶

定理1　一个线性规划模型总存在对偶模型

<table>
<tr><td colspan="2">原问题（或对偶问题）</td><td colspan="2">对偶问题（或原问题）</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数　max</td><td colspan="2">目标函数　min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m个</td><td>m个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>≤</td><td>≥0</td></tr>
<tr><td>≥</td><td>≤0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n个</td><td>n个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>≥0</td><td>≥</td></tr>
<tr><td>≤0</td><td>≤</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
<tr><td></td><td>约束条件右端项</td><td>目标函数变量的系数</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>目标函数变量的系数</td><td>约束条件右端项</td><td></td></tr>
</table>

3. 线性规划模型及其对偶

例1　表达式形式

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$(\mathrm{P})\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

$$(\mathrm{D})\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq -3 \\ -5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \quad \text{无约束} \end{cases}$$

3. 线性规划模型及其对偶

例2、对称型对偶问题

矩阵形式：

（P） $\max Z = CX$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

（D） $\min W = Yb$

$$\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

3. 线性规划模型及其对偶

例3、和形式

$$\text{(P)} \quad \min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \max W = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

练习：

$$\min\ Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 3 \\ \qquad\quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3、x_4\text{无约束} \end{cases}$$

答案:

$$\max\ Z = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 + 2y_3 \le 3 \\ -2y_1 + \quad y_2 - 3y_3 \ge 2 \\ 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\ 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 = 4 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

4. 对偶模型及其性质

性质1(对称性)　对偶问题的对偶是原问题

$$\max Z = CX$$
$$\text{s.t.}\ \ AX \geq b$$
$$X \geq 0$$

对偶的定义

$$\min W = Yb$$
$$\text{s.t.}\ \ YA \geq C$$
$$Y \leq 0$$

$$\max W' = -Yb$$
$$\text{s.t.}\ \ YA \geq C$$
$$Y \leq 0$$

对偶的定义

$$\min Z' = -CX$$
$$\text{s.t.}\ \ -AX \leq -b$$
$$X \geq 0$$

4. 对偶模型及其性质

性质2(弱对偶性) 设原问题和对偶问题如下

(P) $\max Z = CX$ (D) $\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases}\text{没有} \\ \text{要求}\end{cases} \quad (1) \qquad s.t.\begin{cases}\text{没有} \\ \text{要求}\end{cases} \quad (2)$$

$\bar{X}$ 是原问题的任意一个可行解，$\bar{Y}$ 是对偶问题的任意一个可行解，那么总有

$$C\bar{X} \le \bar{Y}b \qquad (4)$$

推论 1 $C\bar{X}$ 可作为为对偶问题最优目标函数值的下界，

$\bar{Y}b$ 可作为为原问题最优目标函数值的上界

例4 （P）

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_{1-4} \ge 0 \end{cases}$$

$$\min W = 20y_1 + 20y_2$$

（D）

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + \quad y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

试估计它们目标函数的界，并验证弱对偶性原理。

4. 对偶模型及其性质

性质3(无界性）　对于线性规划的原问题和对偶问题

若原问题无界，则对偶问题无解。反之不成立

如：

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

（原）
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
无界

$$\min W = 4y_1 + 2y_2$$

（对）
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 2 \\ -y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$
无可行解

4. 对偶模型及其性质

性质4(最优性)　设原问题和对偶问题如下

(P)　$\max Z = CX$　　　　(D)　$\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases}\text{没有} \\ \text{要求}\end{cases} \quad (1) \qquad s.t.\begin{cases}\text{没有} \\ \text{要求}\end{cases} \quad (2)$$

设 X^* 原问题式(1)的可行解，Y^* 是对偶问题式(2)的可行解，当是 $CX^* = Y^*b$ 时，X^* 是原问题式(1)的最优解，Y^* 是对偶问题式(2)的最优解.

在例4中，可找到 **X***=(0，0，4，4)，**Y***=(1.2，0.2)，则 **Z=28**，**W=28.** 故**X***, **Y***分别是 **P**和**D** 的最优解。

4. 对偶模型及其性质

性质5(强对偶性) 设原问题和对偶问题如下

$$(P)\quad \max Z = CX \qquad\qquad (D)\quad \min w = Yb$$

$$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases} \quad （1） \qquad s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases} \quad （2）$$

若原问题有可行解，对偶问题也有可行解，那么两个问题都有最优解且目标函数值相等。

推论2 若 **P** 和 **D** 的任意一个有最优解，则另一个也有最优解，且目标函数的最优值相等。

4. 对偶模型及其性质

原问题和对偶问题的解关系

只能有下面三种情况之一出现：

① 都有最优解，分别设为X^* 和 Y^*，则必有$CX^*=Y^*b$

② 一个问题无界，则另一个问题无可行解；

③ 两个都无可行解。

原问题	对偶问题
有最优解	有最优解
无界	无解
无解	无界
无解	无解

例5 已知

(P) $\max Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

(D) $\min W = 2y_1 + y_2$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + \quad y_2 \geq 2 \\ y_1 - \quad y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明原问题无界。

解：(0,0,0)是 P 的一个可行解，而 D 的第一个约束条件不能成立（因为$y_1, y_2 \geq 0$)。因此，对偶问题不可行，原问题只能无界。

例6 已知

$$P: \max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1 \\ -x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$D: \min W = -y_1 - y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 1 \\ -y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

显然，这两个问题都无可行解。

4. 对偶模型及其性质

性质6(互补松弛性)　设原问题和对偶问题如下

(P)　$\max Z = CX$　　(D)　$\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \quad (1) \qquad s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

原问题引入松弛变量，对偶问题引入剩余变量，变为

(P)　$\max Z = CX + 0 \cdot X_s$　　(D)　$\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} YA - Y_s\mathrm{I} = C \\ Y, Y_s \ge 0 \end{cases}$$

若 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{Y}X_s = 0$ 和 $Y_s\hat{X} = 0$，当且仅当 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 为最优解。

原规划:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

对偶规划:

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 6y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

原规划：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$(y_1=0 \quad x_3=15/2)$

$(y_2=1/4 \quad x_4=0)$

$(y_3=1/2 \quad x_5=0)$

$y_1x_3+y_2x_4+y_3x_5=0$

原规划最优解：$x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{15}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0$

对偶规划最优解：$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{4}, y_3 = \frac{1}{2}, y_4 = 0, y_5 = 0$

结论：原问题有三个松弛变量，对偶问题相应也有三个变量，不仅满足一一对应的关系，而且相应变量的值存在有趣的关系。

对偶规划:

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} 6y_2 + y_3 - y_4 = 2 & (\mathrm{x}_1 = 7/2 \quad \mathrm{y}_4 = 0) \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 1 & (\mathrm{x}_2 = 3/2 \quad \mathrm{y}_5 = 0) \\ \mathrm{y}_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 & \mathrm{x}_1\mathrm{y}_4 + \mathrm{x}_2\mathrm{y}_5 = 0 \end{cases}$$

原规划最优解: $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{15}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0$

对偶规划最优解: $y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{4}, y_3 = \frac{1}{2}, y_4 = 0, y_5 = 0$

结论:对偶问题有两个松弛变量,原问题相应也有两个变量,不仅满足一一对应的关系,而且相应变量的值存在有趣的关系。

例7 已知

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

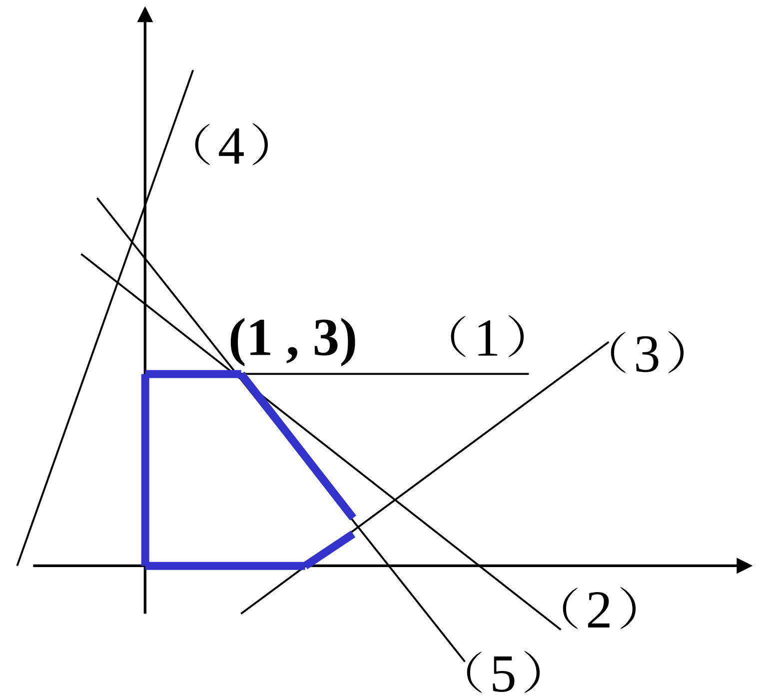
$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 + 3x_5 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ x_{1-5} \geq 0 \end{cases}$$

试通过求对偶问题的最优解来求解原问题的最优解。

解：对偶问题为

$$\max \quad W = 2y_1 + 3y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_2 \le 3 & (1) \\ y_1 + y_2 \le 4 & (2) \\ y_1 - y_2 \le 2 & (3) \\ -5y_1 + y_2 \le 5 & (4) \\ 3y_1 + 2y_2 \le 9 & (5) \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$



用图解法求出： Y^*=（1,3）， W=11。

将y^*_1=1， y^*_2=3 代入对偶约束条件，

(1), (2), (5)式为紧约束 (3), (4)为松约束。

令原问题的最优解为X^* =(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)，则根据互补松弛条件，必有$x_3 = x_4 = 0$

又由于$y^*_1>0$，$y^*_2>0$，原问题的约束必为等式，即

$$\begin{cases} x_2+3x_5=2 \\ x_1+x_2+2x_5=3 \end{cases} \quad \text{化简为} \quad \begin{cases} x_1=1+x_5 \\ x_2=2-3x_5 \end{cases}$$

此方程组为无穷多解

令 $x_5=0$, 得到$x_1=1$，$x_2=2$

即 $X^*_1=(1, 2, 0, 0, 0)$为原问题的一个最优解

$Z=11$。

再令 $x_5=2/3$，得到$x_1=5/3$，$x_2=0$

即 $X^*_2=(5/3, 0, 0, 0, 2/3)$也是原问题的一个最优解

$Z=11$。

例8 已知原问题的最优解为X*=（0，0，4），Z=12 试求对偶问题的最优解。

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：

$$\min W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 & (1) \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 & (2) \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 & (3) \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

将X^* =（0 ，0 ，4）代入原问题中，有下式:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -20 & < 2 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 6x_3 = 24 & > 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \ = 4 & = 4 \end{cases}$$

根据互补松弛条件，必有

$y^*_1 = y^*_2 = 0$，

代入对偶问题 (3)式，可得y_3 =3。

因此对偶问题的最优解为Y^*=（0, 0, 3），W=12。

课堂练习：

已知原问题

$$\min Z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 6 \\ x_3 + x_4 \ge 2 \\ x_1 + x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0 (i = 1,2,3,4) \end{cases}$$

的最优解 $X^* = (1,1,2,0)'$，试用对偶理论求对偶问题的最优解和最优值

解：对偶问题为

$$\max W = 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 2y_4$$

$$s.t\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_4 \le 8 \\ 2y_1 + y_2 \le 6 \\ y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \le 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$由\begin{cases} 3 = 3 \\ 6 = 6 \Rightarrow y_4{}^* = 0 \\ 2 = 2 \\ 3 \ne 2 \end{cases}$$

由 $x_1{}^* = 1 \ne 0, x_2{}^* = 1 \ne 0, x_3{}^* = 2 \ne 0$，得

$$\begin{cases} y_1{}^* + 3y_2{}^* + y_4{}^* = 8 \\ 2y_1{}^* + y_2{}^* = 6 \\ y_2{}^* + y_3{}^* + y_4{}^* = 3 \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $Y^* = (2, 2, 1, 0)$

最优值 $W^* = 20$

4. 对偶模型及其性质

性质7(对应性)　可通过原问题的最优单纯形表中的检验数获得对偶问题的最优解

例9

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$P\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$D\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 170 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 100 \\ x_1 + 5x_2 + x_5 = 150 \\ x_{1-5} \ge 0 \end{cases}$$

初始表

c_j			10	18	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	170	5	2	1	0	0	170/2
0	x_4	100	2	3	0	1	0	100/3
0	x_5	150	1	$\boxed{5}$	0	0	1	150/5
-Z		0	10	18↑	0	0	0	

⇓

最终表

c_j			10	18	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	540/7	0	0	1	-23/7	11/7
10	x_1	50/7	1	0	0	5/7	-3/7
18	x_2	200/7	0	1	0	-1/7	2/7
-Z		-4100/7	0	0	0	-32/7	-6/7

由上表可知： X^{*}=（50/7 , 200/7）, Z=4100/7

对偶问题的最优解： Y^{*}=（0, 32/7 , 6/7）, W=4100/7

⑵. 设原问题： max Z=CX

AX=b

X≥0

此时，矩阵A中没有现成的矩阵I，必须通过加入人工变量来凑一个单位矩阵，再用大M法或两阶段法求解。

如何求Y^{*}，经分析得出如下结论：

$\sigma_B = 0$ 最优基变量检验数向量

$\sigma_I = C_I - C_B B^{-1}$ 初始基变量检验数向量

$\sigma_D = C_D - C_B B^{-1}D$ 非基变量检验数向量

所以， $Y^{*} = C_I - \sigma_I$

例10

$$\max = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$P\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_{1-3} \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min W = 11y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$D\begin{cases} y_1 - 4y_2 - 2y_3 \ge 3 \\ -2y_1 + y_2 \ge -1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge -1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

c_j			-3	1	1	0	0	-M	-M	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
-Z			-3+6M	1-M	1-3M↑	0	M	0	0	

c_j			3	-1	-1	0	0	-M	-M
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3
-1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2
-1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3
-Z		-2	0	0	0	-1/3	-1/3	1/3-M	2/3- M

所以， X^*=（4，1，9），$Z = 2$

初始基变量的检验数

$$\sigma_4 = -1/3, \quad \sigma_6 = 1/3 - M, \quad \sigma_7 = 2/3 - M$$

$$\therefore \quad y^*_1 = (0 - \sigma_4) = 1/3$$

$$y^*_2 = (-M - \sigma_6) = -M - (1/3 - M) = -1/3$$

$$y^*_3 = (-M - \sigma_7) = -M - (2/3 - M) = -2/3$$

Y^*=（1/3 , -1/3 , -2/3） $W = 2$