割平面法

一、基本思想

求IP：

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

松弛问题L_0：

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

L_0的最优解：

$x_1 = 3.75, x_2 = 1.5$

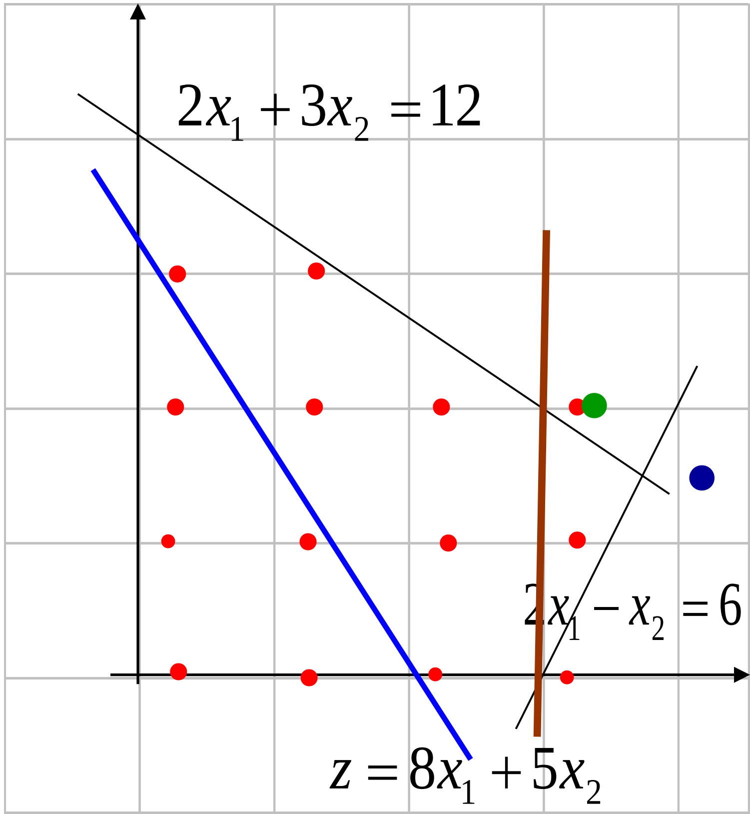
$L_0 + (x_1 \le 3)$得L_1：

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

割平面

IP的可行解 ⟷ L_0的整数解

IP的可行解 ⟷ L_1的整数解



L_1的最优解：$x_1 = 3, x_2 = 2$

⇒ 得IP的最优解：$x_1 = 3, x_2 = 2$

思想：在L_0上增加一个约束，

该约束去掉了L_0的最优解，

保留了L_0的所有整数解

即保留了IP的所有整数解

割平面法的基本思想：

若整数规划IP的松弛规划L_0的最优解不是整数解，对L_0增加一个约束条件，得线性规划L_1，此过程缩小了松弛规划的可行解域，在切去松弛规划的最优解的同时，保留松弛规划的任一整数解，因此整数规划IP的解均在L_1中，若L_1的最优解为整数解，则得IP的最优解。若L_1的最优解不是整数解，重复以上步骤，由于可行解域在不断缩小，且保留IP所有的整数解，总可以在有限次后得到IP的最优解.

问题：如何寻找割平面？

增加的约束方程须满足什么条件才能使：

1、割掉松弛规划的最优解

2、保留所有的整数解

二、割平面法

对整数规划问题

IP: $\max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题L_0

$\max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

设L_0的最优解X_0不是整数解

不妨设

$X_0 = (b_{10}, \cdots b_{i0}, \cdots b_{m0}, 0, \cdots 0)'$ 其中b_{i0}是分数

即$x_1, \cdots x_i, \cdots x_m$是基变量，$x_{m+1}, \cdots, x_n$是非基变量

设L_0的最优解$X_0=(b_{10},\cdots b_{i0},\cdots b_{m0},0,\cdots 0)'$ ，b_{i0}是分数

L_0的最优单纯形表：

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{m+j}	…	x_n	解
检	0	…	0	…	0	λ_1	…	λ_{m+j}	…	λ_n	$z-z_0$
x_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1m+j}	…	a_{1n}	b_{10}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
x_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{im+j}	…	a_{in}	b_{i0}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	b_{m0}

b_{i0}所在行的方程为：

源方程

$$x_i+a_{im+1}x_{m+1}+\cdots+a_{im+j}x_{m+j}+\cdots+a_{in}x_n=b_{i0}$$

对源方程： $x_i + a_{im+1}x_{m+1} + \cdots + a_{im+j}x_{m+j} + \cdots + a_{in}x_n = b_{i0}$

$$\Longleftrightarrow \quad x_i + \sum_{j=1}^{n-m} a_{im+j}x_{m+j} = b_{i0}$$

$[a_{im+j}] + f_{im+j}$

$0 \le f_{im+j} < 1$

$[b_{i0}] + f_{i0}$

$0 < f_{i0} < 1$

$$\Longleftrightarrow \quad x_i + \sum_{j=1}^{n-m} \left([a_{im+j}] + f_{im+j}\right)x_{m+j} = [b_{i0}] + f_{i0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_i + \sum_{j=1}^{n-m} [a_{im+j}]x_{m+j} + \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j} = [b_{i0}] + f_{i0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_i - [b_{i0}] + \sum_{j=1}^{n-m} [a_{im+j}]x_{m+j} = \boxed{f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1}x_{m+j}}$$

令 $f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j} \le 0$ ------对应于生成行i的割平面

对整数规划问题

$$IP: \max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题L_0

$$\max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

线性规划L_1 : $\max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

L_0的最优解$X_0 = (b_{10}, \cdots b_{i0}, \cdots b_{m0}, 0, \cdots 0)'$ 其中b_{i0}是分数

L_0的最优单纯形表:

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}				x_n	解
	0	…	0	…	0	λ_1				λ_n	
	1	…	0	…	0	a_{1m+1}				a_{1n}	
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮				⋮	
x_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{im+j}	…	a_{in}	b_{i0}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	b_{m0}

生成行

$[a_{im+j}] + f_{im+j}$

$0 \leq f_{im+j} < 1$

$j = 1, 2, \cdots n-m$

$[b_{i0}] + f_{i0}$

$0 < f_{i0} < 1$

非基变量

对应于生成行i的割平面: $f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \leq 0$,即$\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0}$

对IP:
$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
$$s.t \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ 0x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题L_0:
$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
$$s.t \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ 0x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

最优解$X_0 =$ 0)

$$[a_{im+j}] + f_{im+j}$$
$$0 \le f_{im+j} < 1$$
$$j = 1,2,\cdots n-m$$

$$\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \ge f_{i0}$$

$$[b_{i0}] + f_{i0}$$
$$0 < f_{i0} < 1$$

L_0的最优单纯形表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
	0	0	-0.5	0	0	-1.5	z-9	
x_2	0	1	0.5	0	0	-0.5	1	
x_4	0	0	-1.75	1	0	3.25	5.5	
x_5	0	0	-1	0	1	1	3	
x_1	1	0	-0.25	0	0	0.75	1.5	

对应第2行的割平面: $0.25x_3 + 0.25x_6 \ge 0.5$

对应第4行的割平面: $0.75x_3 + 0.25x_6 \ge 0.5$

对整数规划问题

$IP: \max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题 L_0

$\max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

最优解 X_0 不是整数

非基变量

线性规划 $L_1: \max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ \sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

定理：L_1 割去了 L_0 的最优解并保留了 L_0 的所有整数解

证：把 L_0 的最优解 X_0 代入 $\sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0}$

得 $0 \geq f_{i0}$，与 $0 < f_{i0} < 1$ 矛盾

所以 L_0 的最优解不是 L_1 的可行解

设 $X^* = (b_1^*, \cdots b_i^*, \cdots b_n^*)'$ 是 L_0 的任一整数解

整数

只需证 $\sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} b_{m+j}^* \geq f_{i0}$，即 $f_{i0} - \sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} b_{m+j}^* \leq 0$

因为 $f_{i0} < 1$，$f_{im+1} \geq 0$，$b_{m+j}^* \geq 0$，所以 $\boxed{f_{i0} - \sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} b_{m+j}^*} < 1$

所以 $f_{i0} - \sum\limits_{j=1}^{n-m} f_{im+j} b_{m+j}^* \leq 0$，即 X^* 是 L_1 的可行解

如何求解？

对整数规划问题

$IP: \max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题L_0

$\max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

最优解X_0不是整数

线性规划$L_1: \max z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

定理：L_1割去了L_0的最优解并保留了L_0的所有整数解

定理：若L_1的最优解X^*是整数解，则X^*是IP的最优解

三、解线性规划L_1：

$$\max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1}x_{m+j} + s = -f_{i0}$$

L_0的最优单纯形表：

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{m+j}	…	x_n	s	解
检	0	…	0	…	0	c_1	…	c_{m+j}	…	c_n	0	$z-z_0$
x_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1m+j}	…	a_{1n}	0	b_{10}
:	:		:		:	:		:		:	:	:
x_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{im+j}	…	a_{in}	0	b_{i0}
:	:		:		:	:		:		:	:	:
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	0	b_{m0}
s	0	…	0	…	0	$-f_{im+1}$	…	$-f_{im+j}$	…	$-f_{in}$	1	$-f_{i0}$

对偶单纯形法

四、割平面计算步骤：

第一步：用单纯刑法解整数问题IP的松弛问题L_0

若L_0没有最优解，则IP没有最优解。停止

若L_0有最优解X_0:

(1)X_0是整数解，则X_0也是IP的最优解，停止

(2)X_0不是整数解，转第二步

第二步：求割平面方程

任选X_0的一个非整数分量b_{i0},

由L_0的最优单纯型表中b_{i0}所在的行的数据，

得割平面：$\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1} x_{m+j} \geq f_{i0}$

即$-\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1} x_{m+j} + s = -f_{i0}$

第三步：将割平面加到L_0得L_1

第四步:解L_1

在L_0的最优单纯型表中增加一行一列，得L_1的单纯型表，

用对偶单纯刑法求解，

若其解是整数解，则该解也是原整数规划的最优解

否则将该解记为X_0，返回第二步

例 用割平面法求解IP

$$IP: \max z = 8x_1 + 5x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2\text{为整数} \end{cases}$$

解：IP问题的松弛规划的标准型：

$$L_0: \max z = 8x_1 + 5x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

L_0的最优解：(3.75,1.5,0,0)

对$x_1 = 3.75$，找割平面

$$0.125x_3 + 0.375x_4 \ge 0.75$$

即$-0.125x_3 - 0.375x_4 + x_5 = -0.75$

在L_0中加入割平面得L_1

L_0的最优单纯型表为：

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	0	0	-2.25	-1.75	0	Z-37.5
X_2	0	1	0.25	-0.25	0	1.5
X_1	1	0	0.125	0.375	0	3.75
X_5	0	0	-0.125	-0.375	1	-0.75

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Z	0	0	-1.667	0	-4.667	z-34
X_2	0	1	0.333	0	-0.667	2
X_1	1	0	0	0	1	3
X_4	0	0	0.333	1	-2[illegible]	[illegible]

整数

得L_1的最优解：(3,2,0,2,0)

所以，IP的最优解：$x_1 = 3, x_2 = 2$

最优值： Z=34

例： 用割平面法求解

$$IP: \max z = 7x_1 + 9x_2$$

$$s.t \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

解：IP的松弛规划的标准型

$$L_0: \max z = 7x_1 + 9x_2$$

$$s.t \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 6 \\ 7x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 35 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

L_0的最优解:$(9/2, 7/2, 0, 0)$

对$x_2 = 7/2$,找割平面

$$\tfrac{7}{22} x_3 + \tfrac{1}{22} x_4 \ge \tfrac{1}{2}$$

即$-\tfrac{7}{22} x_3 - \tfrac{1}{22} x_4 + x_5 = -\tfrac{1}{2}$

在L_0中加入割平面得L_1

L_0的最优单纯型表为:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	0	0	-28/11	-15/11	0	Z-63
X_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
X_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
X_5	0	0	-7/22	-1/22	1	-1/2

得L_1的最优单纯型表:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	0	0	0	-1	-8	Z-59
X_2	0	1	0	0	1	3
X_1	1	0	0	1/7	-1/7	32/7
X_3	0	0	1	1/7	-22/7	11/7

L_1的最优解:$(\tfrac{32}{7}, 3, \tfrac{11}{7}, 0, 0)$

非整数

L_1的最优解：$\left(\frac{32}{7},3,\frac{11}{7},0,0\right)$

对$x_1=\frac{32}{7}$，找割平面

$$\frac{1}{7}x_4+\frac{6}{7}x_5\geq\frac{4}{7}$$

即$$-\frac{1}{7}x_4-\frac{6}{7}x_5+x_6=-\frac{4}{7}$$

在L_1中加入割平面得L_2

得L_2的最优解：$(4,3,1,4,0)$

所以，*IP*的最优解：

$$x_1=4, x_2=3$$

最优值：　Z=55

整数

L_1的最优单纯型表：

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
	0	0	0	-1	-8	0	Z-59
X_2	0	1	0	0	1	0	3
X_1	1	0	0	1/7	-1/7	0	32/7
X_3	0	0	1	1/7	-22/7	0	11/7
X_6	0	0	0	-1/7	-6/7	1	-4/7

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
	0	0	0	0	-2	-7	Z-55
X_2	0	1	0	0	1	1	3
X_1	1	0	0	0	-1	1	4
X_3	0	0	1	0	-4	1	1
X_4	0	0	0	1	6	-7	4

作业：分别用分枝定界法和割平面法求解以下整数规划：

$$IP:\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2\text{为整数} \end{cases}$$

答案：最优解：$x_1 = 2, x_2 = 2$，$x_3 = 0, x_4 = 1$

最优值为：Z=4