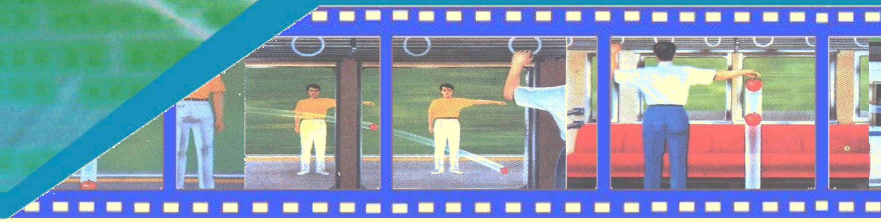
力学篇

第5章　狭义相对论



第5章　狭义相对论

主要任务: 简介狭义相对论(special relativity)产生的历史背景、实验基础、基本原理及相应的时空观.

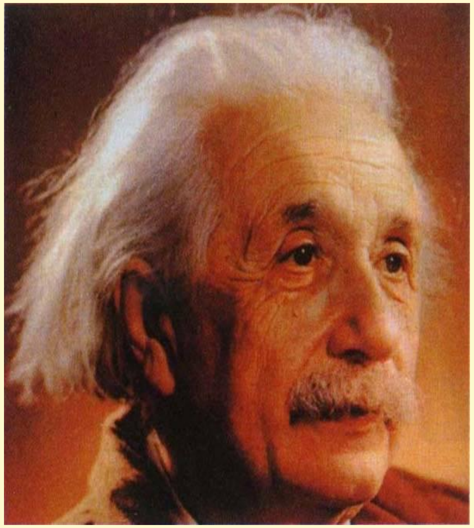
相对论
- 狭义相对论1905: 不同惯性系对事件的描述
- 广义相对论1915: 涉及到非惯性系包括引力场在内的理论

经典力学(即牛顿力学)适用范围:

宏观、低速(远小于光速)

狭义相对论适用于: 宏观、高速(可与光速比拟)

经典力学是相对论力学在低速时的近似



爱因斯坦(Albert Einstein, 1879—1955)
现代时空的创始人, 二十世纪的哥白尼

—— 公众谓之人类最高智慧的象征

理论物理学家, 创立了狭义相对论和广义相对论. 他用光量子理论说明了光电效应; 提出固体热容量的量子理论以及玻色-爱因斯坦的量子统计法; 晚年致力于宇宙学和统一场的研究.

法国物理学家朗之万(P. Langevin,1872-1946)曾这样评价爱因斯坦: 他的伟大可以与牛顿相比拟; 按我的意见, 他也许比牛顿更伟大一些. 因为他对于科学的贡献更深入到人类思想基本概念的结构中.

经典物理: 伽利略时期 —— 19世纪末

经过300年发展, 达到全盛的“黄金时代”

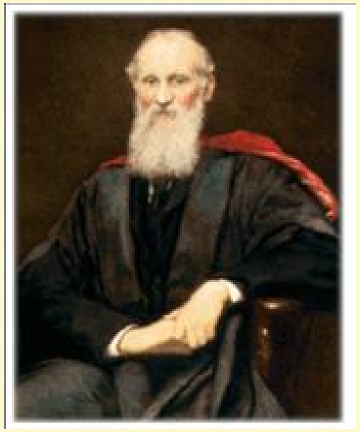
形成三大理论体系

① 以牛顿定律和万有引力定律为基础的经典力学
② 以麦克斯韦方程为基础的电动力学
③ 以热力学三定律为基础的宏观理论和以分子运动、统计物理描述的微观理论

19世纪末, 开尔文: 物理学晴朗天空有两朵令人不安的乌云

迈克尔逊—莫雷实验 → 相对论的建立

黑体辐射—紫外灾难 → 量子力学的建立



Lord Kelvin
1824—1907

两朵乌云——暴风骤雨——20世纪物理学危机

物理学正在临产中,它孕育着的新理论将要诞生了.

—— 列宁

新理论:相对论、量子力学　近代物理两大理论支柱

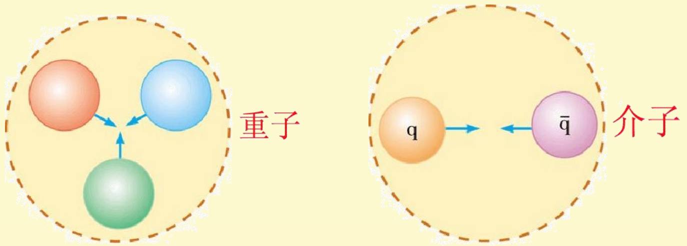
深刻影响现代科技和人类生活

当前的物理学正处于第四次大突破的前夜

20世纪末,李政道:两朵乌云

对称性破缺 —— 宇称不守恒

夸克的禁闭 —— 找不到自由的夸克



——预示着新的有重大意义的物理规律的诞生

惯性参考系: 牛顿力学适用的特殊参照系, 一个没有加速度的参考系 —— 理想化的概念.

地球参照系: 对地轴的向心加速度 $3.4\times10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

对太阳的向心加速度 $6.1\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

太阳参照系: 对银心的向心加速度 $3.0\times10^{-10}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

银河中心参照系: 还没有测到加速度

牛顿绝对时空观: 对所有的参照系, 有相同的时间和空间(二点间的距离). 即时间和空间绝对不变, 且相互独立.

认为时间与空间相互独立, 与物质的存在和运动无关.

时间间隔 = 物体运动过程中两时刻之差

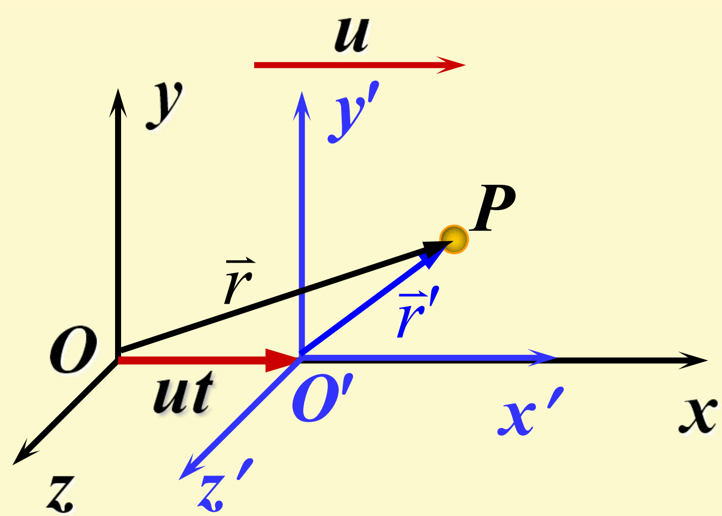
空间间隔 = 物体两端坐标值之差

注意: 当物体运动时, 两端坐标必须同时记录.

§ 5-1　狭义相对论基本原理

5.1.1 伽利略相对性原理

1. 伽利略变换



S系和S′系坐标轴相互平行, 且S′系相对于S系沿 $+x$ 方向以速率u运动, 当 O 和O 重合时, 令$t=t'=0$

坐标变换： $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}\,t$

速度变换： $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$

坐标变换分量式:

正变换 $\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$

逆变换 $\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$

速度变换分量式:

正变换
$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

逆变换
$$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

加速度变换式:

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

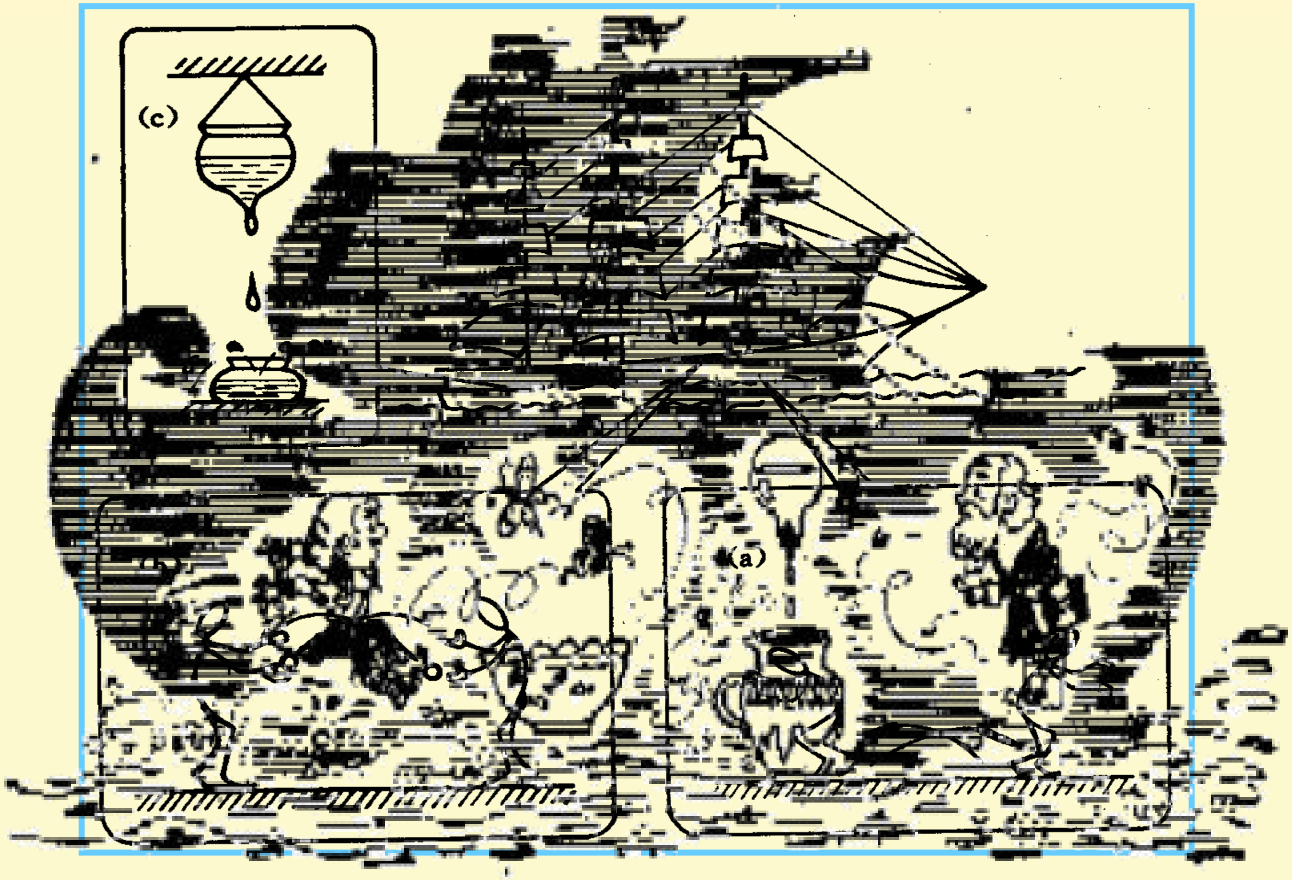
2. 伽利略相对性原理

在经典力学中, 质量也是绝对的, 与参考系的选择无关, 即$m=m'$

$$\vec{F}' = m\vec{a}' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

伽利略相对性原理(Galileo's relativity principle): 在一切**惯性系**中, 力学现象都服从相同的**力学规律**. 在描述力学现象时, 一切惯性系都等价.

舟行而不觉



1632年伽利略描述了匀速前进的萨尔维阿帝大船上的力学现象……都和地面上一样地发生.

3. 经典力学时空观----绝对时空观

$$S' \leftarrow S$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$

(1) 同时性是绝对的

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = 0$$

(2) 时间间隔是绝对的

$$\Delta t = \Delta t'$$

(3) 空间间隔是绝对的

S系 $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

S′系 $|\Delta \vec{r}'| = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}$

$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

时间和空间是彼此独立、互不相关的, 并且独立于物质和运动之外.

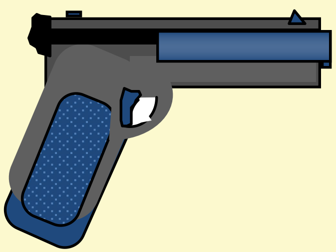
4. 伽利略变换的困难

(1) 速度合成中的问题

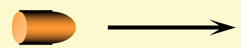
开枪

事件1

前



v



子弹

鸟死

事件2

后

开枪, 光信号传 c ; 鸟接收到时刻: l/c

子弹: $c+v$; 鸟接收到时刻: $l/(c+v)$

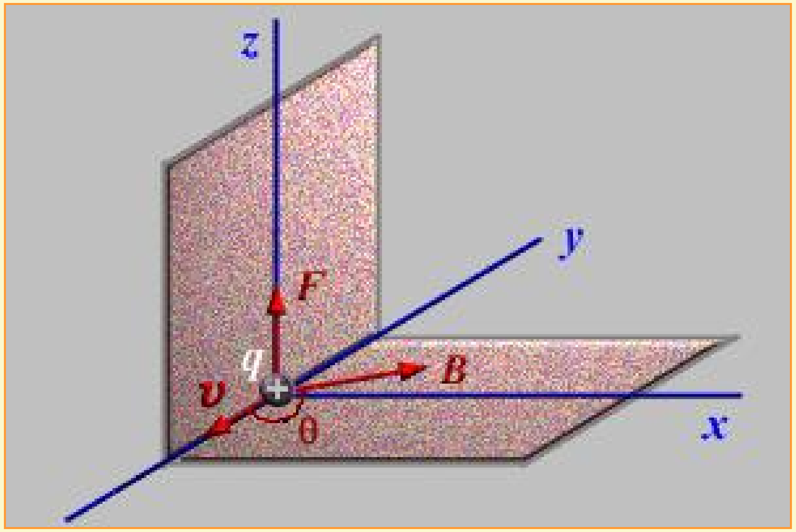
鸟还没有看见开枪, 就看见子弹飞到?

(2) 电磁现象不遵从伽利略变换

带电粒子受力:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

电场力　　　洛仑兹力



洛仑兹力: $F = qvB\sin\theta$

垂直于 $\vec{B}$, $\vec{v}$ 决定的平面

因速度 $\vec{v}$ 与参考系有关, 所以经伽利略变换后洛仑兹力将发生变化. 经典电磁定律不具有伽利略变换的不变性.

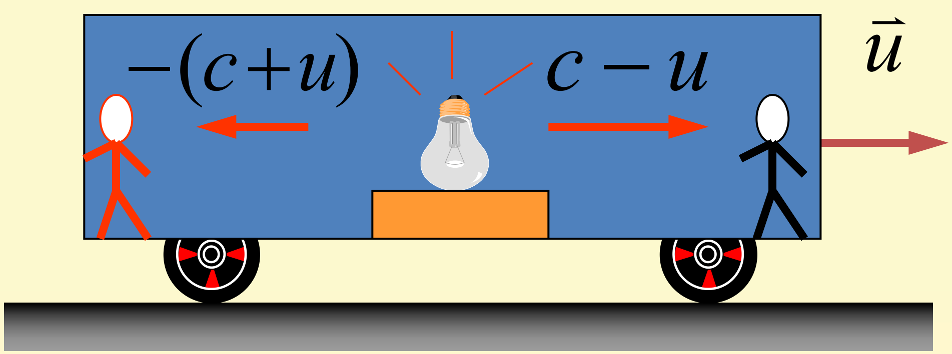
(3) 与高速运动(光的传播)的实验结果不符

真空中的光速：c

由经典电磁理论　$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 3\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

与参考系选择无关

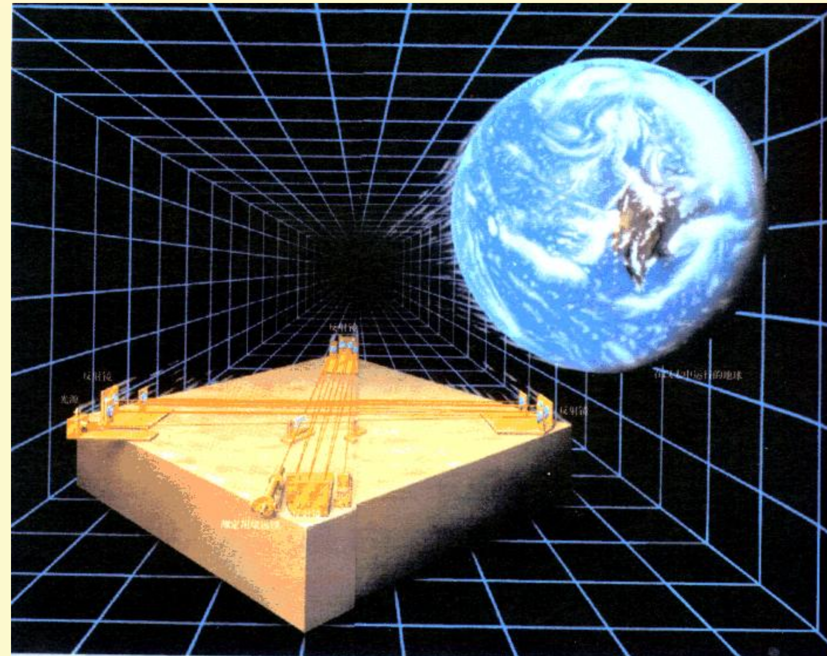
由伽利略变换, 速度与参考系选择有关.



$$\vec{v}_{光车} = \vec{v}_{光地} + \vec{v}_{地车}$$

彼此矛盾！

迈克耳孙-莫雷实验 寻找特殊惯性系——以太(aether)



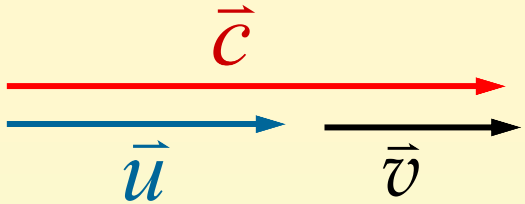
△ 麦克尔逊－莫雷实验。这个实验否定了“以太”的存在，是光速不变原理的重要实验依据

设地球(光源和干涉仪)相对于“以太”速度：$\vec{u}$

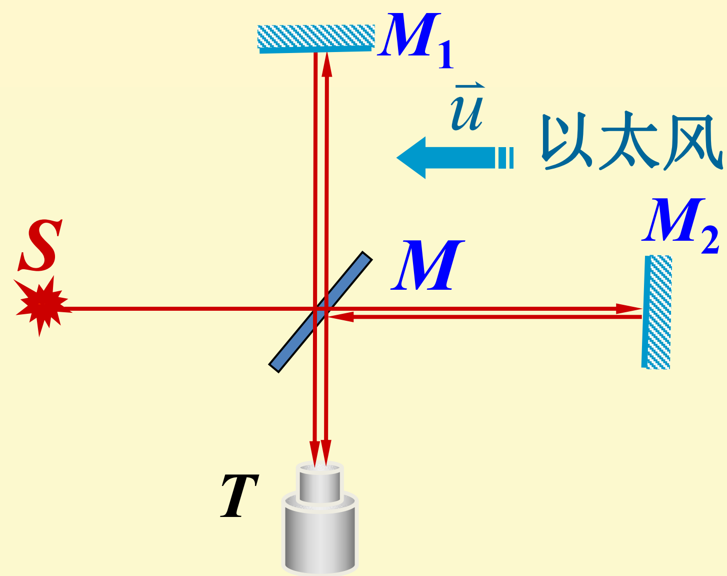
光相对于地球的速度：$\vec{v}$

光相对于“以太”的速度：$\vec{c}$ $\quad \vec{v}=\vec{c}-\vec{u}$

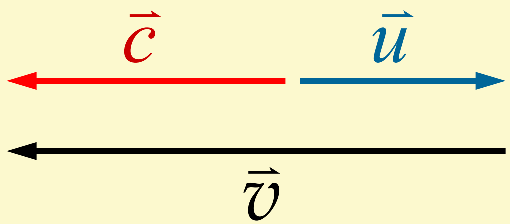
①



$$v = c - u$$

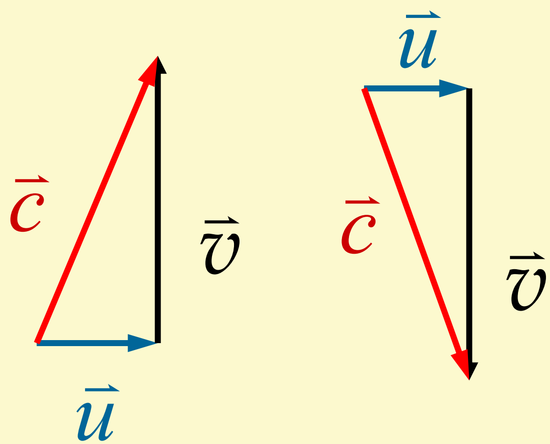


②



$$v = c + u$$

③



$$v = \sqrt{c^2 - u^2}$$

两光线间存在光程差, 出现干涉条纹. 将装置转动90°, 干涉条纹应移动(预计0.37条). 反复实验, “零结果” .

相对性原理的普遍性(对称性)

伽利略变换(经典力学)

电磁学定律

三者无法协调

解决困难的途径:

1. 否定相对性原理的普遍性, 承认惯性系对电磁学定律不等价, 寻找电磁学定律在其中成立的特殊惯性系.

2. 否定电磁学理论, 重建具有对伽利略变换不变性的电磁学定律.

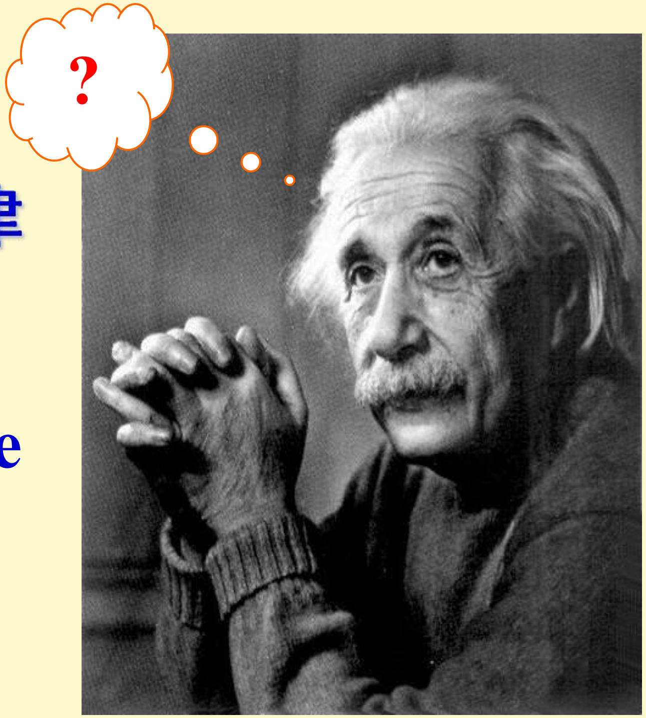
3. 否定伽利略变换, 改造经典力学, 寻求对电磁理论和改造后的力学定律均为对称操作的新变换.

1、2无一例外遭到失败, 爱因斯坦选择 3, 取得成功.

5.1.2 狭义相对论基本原理

1. 狭义相对论的相对性原理

(relativity principle of special theory relativity): 在所有惯性系中, 物理定律的表达形式都相同.



2. 光速不变原理(constant principle of velocity of light): 在所有惯性系中, 真空中的光速具有相同的量值c.

爱因斯坦的二个基本假设, 放弃了以太参考系, 又不必修改麦克斯韦方程组, 光速不变与麦克斯韦方程组在惯性系中等价是一致的.

符合这两条原理的变换是洛仑兹变换

5.1.3 洛仑兹坐标变换和速度变换

变换应满足的条件: ① 物理定律形式不变; ②光速不变; ③ 低速回到伽利略变换.

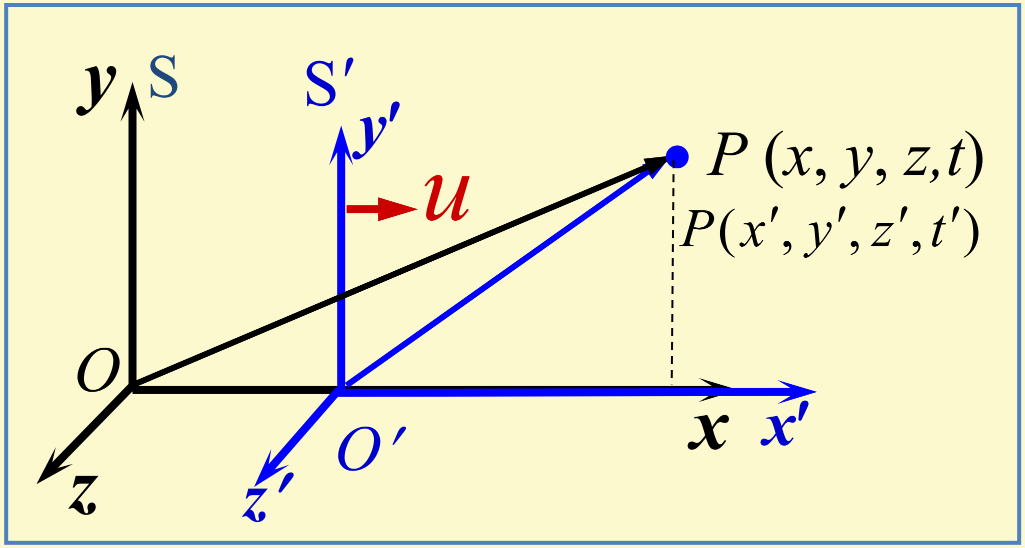
1. 坐标变换

O、O' 重合时刻

$t = t' = 0$

S: $P(x, y, z, t)$

S′: $P(x', y', z', t')$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct \qquad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct' \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

设 x 坐标变换满足线性关系:

$$\left.\begin{aligned} x' &= k(x-ut) \\ x &= k'(x'+ut') \end{aligned}\right\} k = k' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

推导见教材 P.113

洛仑兹坐标变换:

正变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+\dfrac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

令 $\beta = \frac{u}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

正变换 | **逆变换**

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{aligned}}$$

2. 速度变换

设S系速度 $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ S′ 系速度 $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$

根据速度定义： $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$

$$x' = \gamma(x - ut) \rightarrow \mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \rightarrow \mathrm{d}t' = \gamma(\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x)$$

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - u\mathrm{d}x/c^2}$$

同理可得： v'_y， v'_z

速度变换公式:

正变换

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)} \end{cases}$$

讨论:

(1) 物体相对于不同参考系的速度不仅在相对运动方向上的分量不同, 在垂直于相对运动方向上的分量也不同.

(2) 洛仑兹速度变换的近似为伽利略速度变换

$u \ll c$ 时, $$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \rightarrow v_x = v'_x + u$$

(3) 洛仑兹速度变换与光速不变原理相符

$v'_x = c$ 时 $$v_x = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2} c} = c$$

3. 洛仑兹变换的意义

(1) 洛仑兹变换是不同惯性系中时空变换的普遍公式

$$u<<c \quad \left(\frac{u}{c}\right)^2 \to 0 \qquad \gamma \to 1$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x-ut) \\ t' = \gamma(t - \dfrac{u}{c^2}x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x-ut \\ t' = t \end{cases}$$

洛仑兹变换 $\longrightarrow$ 伽利略变换, 满足对应原理

(2) 与光速不变原理、真空中光速为极限速率事实相协调.

(3) 建立了新的时空观

➢ 揭示出时间、空间彼此关联, 并与物质、运动密不可分, 形成四维时空概念: "时间~空间" (不是"时间 + 空间") 是统一体.

➢ 不同惯性系中的观察者有各自不同的时空观念, 不存在对所有观察者都相同的绝对时间和绝对空间.

例5-1 一短跑选手在地面上用10s时间跑完100m的路程, 求在另一个以0.6*c*的速度沿同一方向运动的参考系中, 测得该选手跑过的路程和所用的时间.

解 两事件为 起跑 $(x_1,\ t_1)$ 到达 $(x_2,\ t_2)$

$(x_1',\ t_1')$ $(x_2',\ t_2')$

由题意 $t_2 - t_1 = 10\mathrm{s}$ $x_2 - x_1 = 100\mathrm{m}$ $u = 0.6c$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = 12.5\mathrm{s}$$

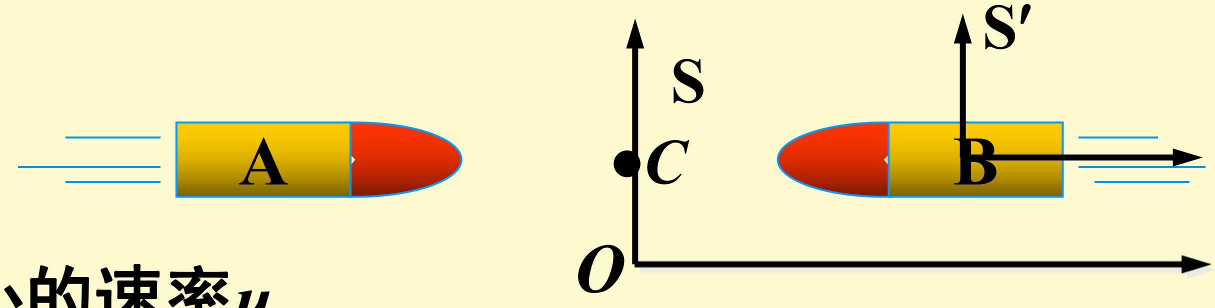
$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = -2.25\times10^9\,\mathrm{m}$$

起跑在右
到达在左

例5-2 两只完全相同的飞船A和B相向飞行. 在A中的观察者测得B接近于它的速度为$0.8c$, 问在两飞船的质心处的观察者测得每一飞船趋近于质心的速率是多少?

解 S系固定于质心

S′系固定在B上



设A、B趋近于质心的速率u

A相对S速率: $u_x=u$　　　A相对S′速率: $u'_x=0.8c$

B (S′)相对质心S速率: $v=-u$　　$u'_x=\dfrac{u_x-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x}$　　$0.8c=\dfrac{u-(-u)}{1-\dfrac{(-u)u}{c^2}}$

$$0.8=\frac{2u/c}{1+(u/c)^2}$$ 令: $x=\dfrac{u}{c}\Rightarrow 0.8=\dfrac{2x}{1+x^2}$　　合题意解: $v=0.5c$

§ 5-2　狭义相对论时空观

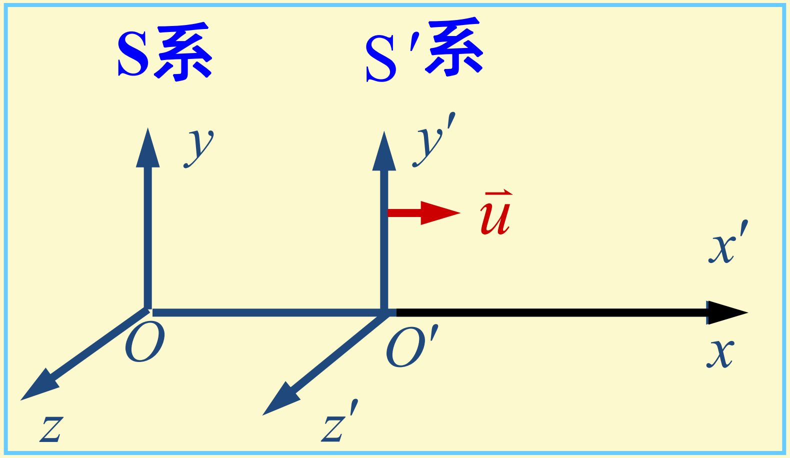
不同惯性系中观察者时空观念的关联

事件	S系 $\mathrm{I}(x_1,t_1)$ $\mathrm{II}(x_2,t_2)$	S′系 $\mathrm{I}(x_1',t_1')$ $\mathrm{II}(x_2',t_2')$
变换	$x=\gamma\left(x'+ut'\right)$ $t=\gamma\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right)$	$x'=\gamma\left(x-ut\right)$ $t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$
事件空间间隔	$\Delta x=\gamma(\Delta x'+u\Delta t')$	$\Delta x'=\gamma(\Delta x-u\Delta t)$
事件时间间隔	$\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x')$	$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x)$

§5-2 狭义相对论时空观

5.2.1 “同时性”的相对性(relativity of simultaneity)

	事件1	事件2
S系	$x_1,\ t_1$	$x_2,\ t_2$
S′系	$x'_1,\ t'_1$	$x'_2,\ t'_2$

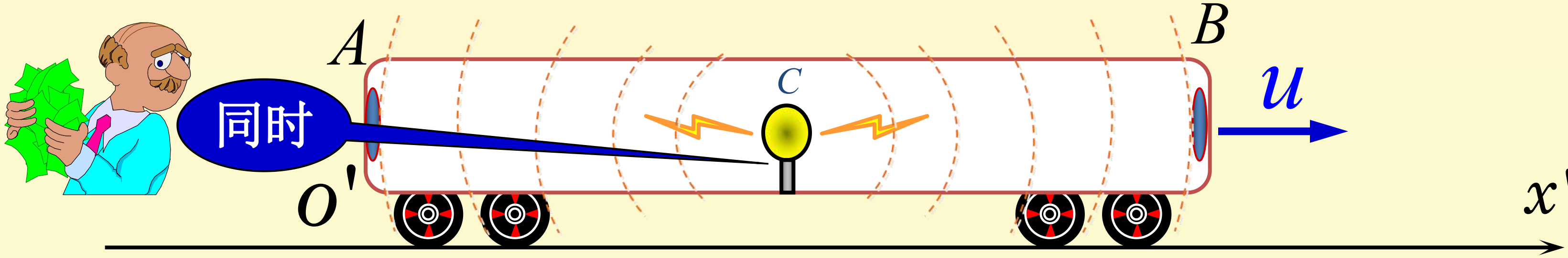


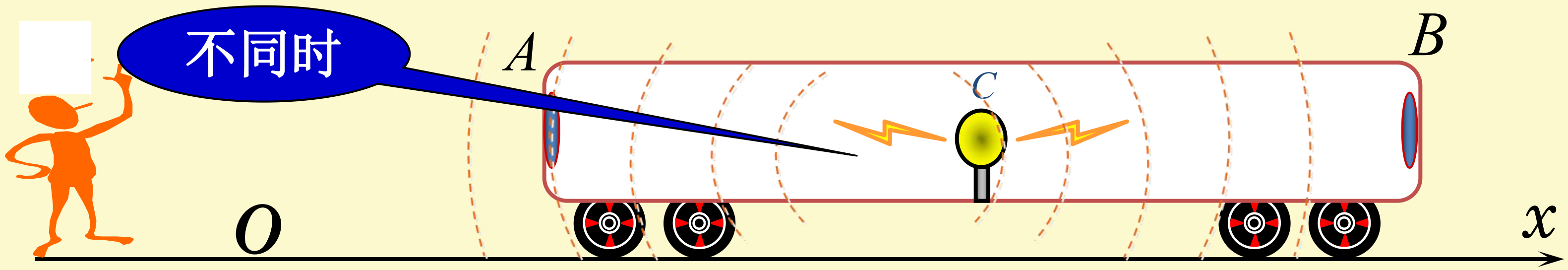
由洛仑兹变换: $$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)$$

S系同时发生的两事件, $\Delta t = 0$

S′系
- 若$\Delta x=0$, 则 $\Delta t'=0$, 两事件同时发生.
- 若 $\Delta x\neq 0$, 则 $\Delta t'\neq 0$, 两事件不同时发生.

理想实验: 爱因斯坦火车, 站台S系; 火车S′系





$t = t' = 0$ C发一光信号

事件1: A接收到光信号

事件2: B接收到光信号

问题: S系、S′系事件1、事件2是否同时发生?

结论: “同时性”具有相对性L

——光速不变原理的直接结果

讨论: (1) 在某一惯性系中的同步钟, 在另一相对其运动的惯性系中是否是同步的?

(2) 两事件发生的时序与因果律

若S系中 $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ 即事件1先发生，S′系中?

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) > 0$$

$$\Delta t > \frac{u}{c^2}\Delta x \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c^2}{u}$$

时序不变

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) \le 0$$

$$\Delta t \le \frac{u}{c^2}\Delta x \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \ge \frac{c^2}{u}$$

时序变化

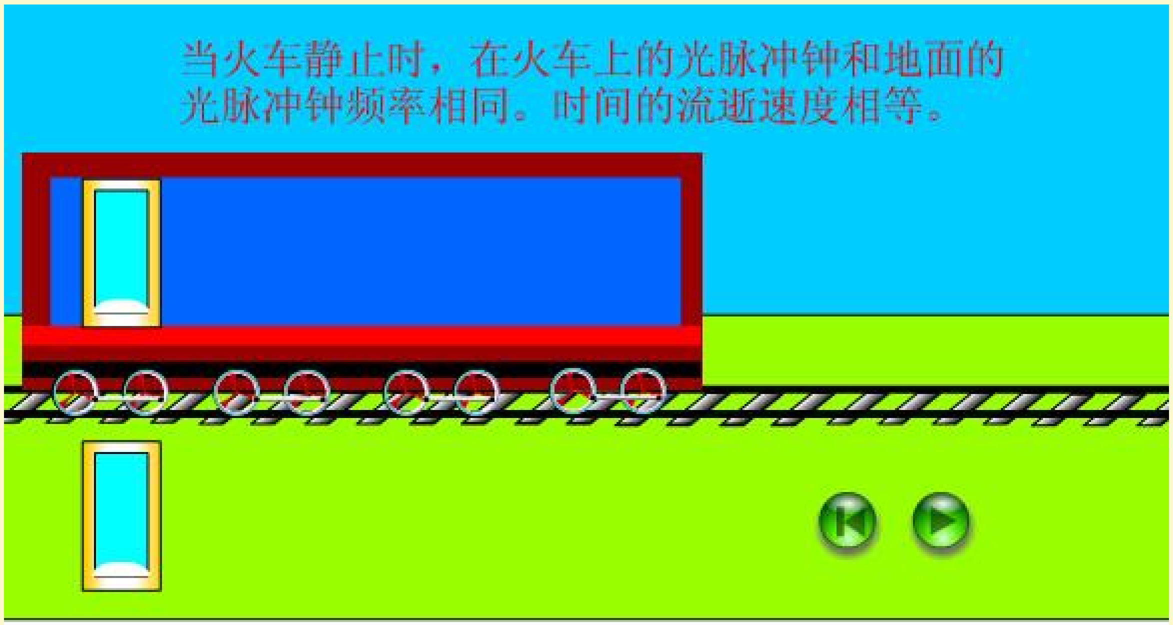
即事件1有可能比事件2先发生、同时发生、或后发生, 时序有可能倒置. 是否与因果律矛盾?

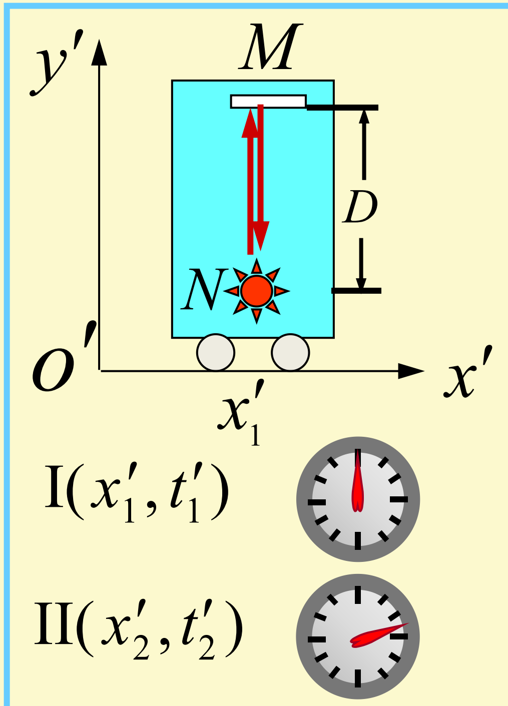
有因果关联的事件之间的信号速率 $u < c \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c^2}{u}$

满足时序不变条件

5.2.2 时间膨胀

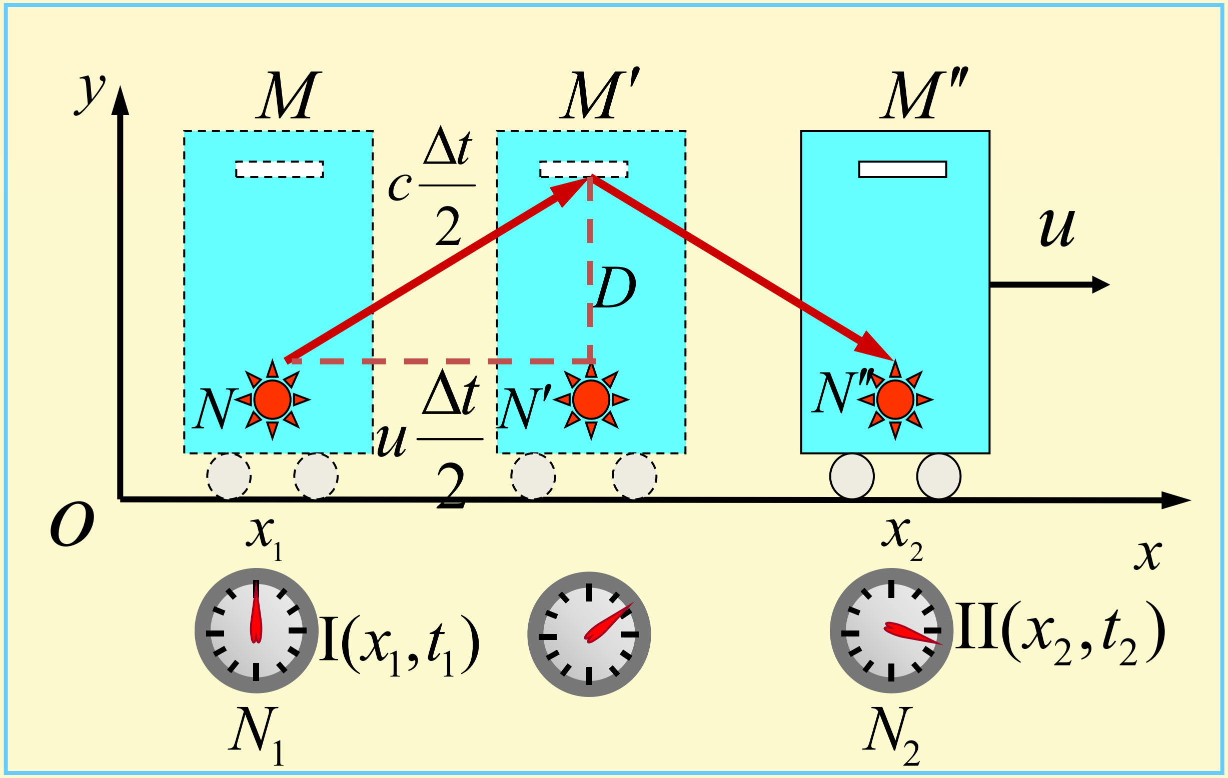
理想实验: 爱因斯坦火车 $\begin{cases} \text{站台系: S系} \\ \text{火车系: S}'\text{系} \end{cases}$





用一个相对事件发生地静止的钟测量的两个**同地**事件的时间间隔 —— **原时** **(proper time) (固有时间)** τ_0

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2D}{c}$$



站台系: S系

光信号:

$$N \to M' \to N''$$

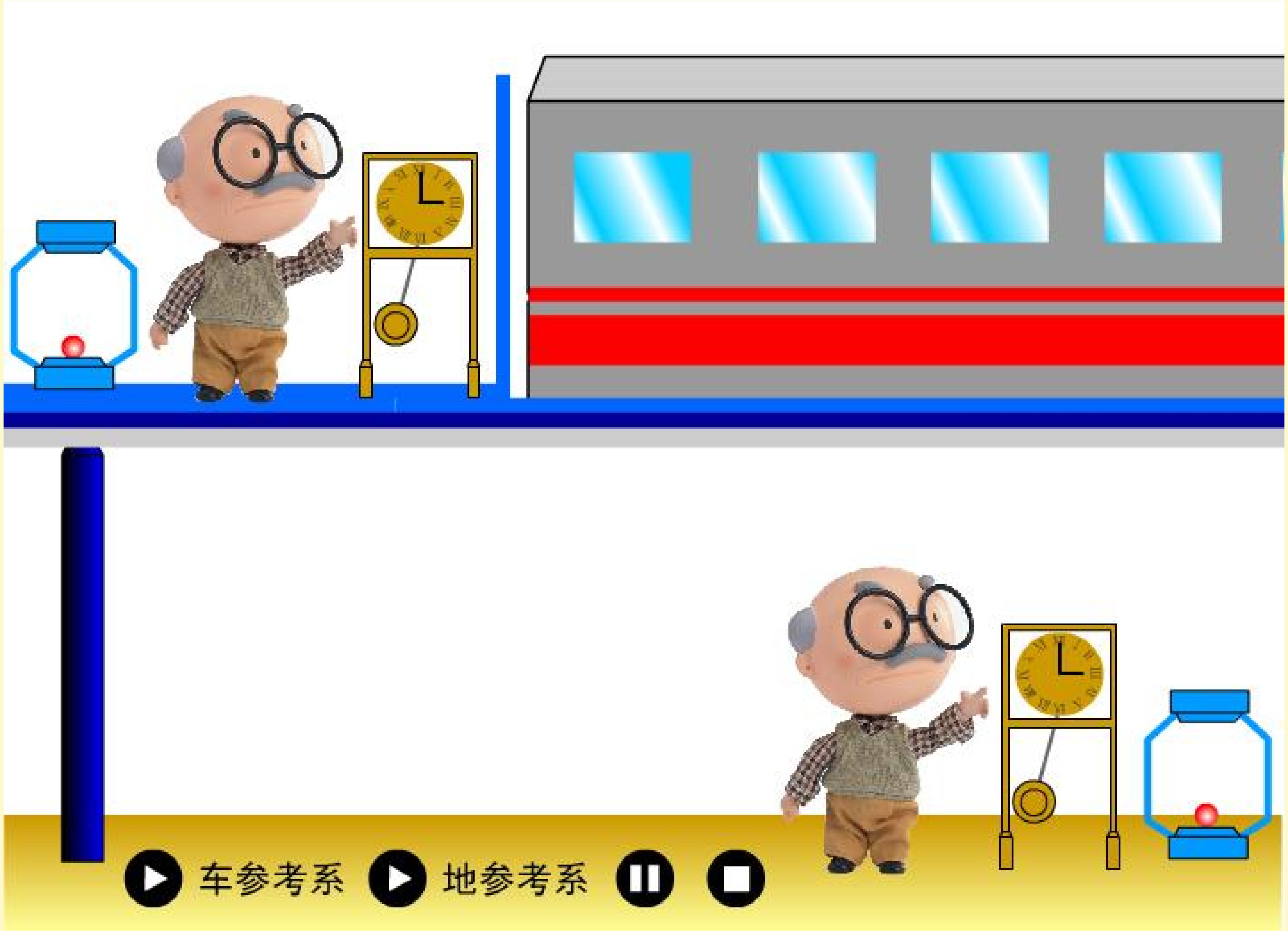
该两事件为异地事件,需用两只钟测出其时间间隔: 非原时

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(u\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \qquad \Delta t = \frac{2D}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\Delta t' > \Delta t' = \tau_0}$$

原时最短 运动时钟变慢效应——时间膨胀, 时间延缓(time expansion)

思考: 若信号系统相对于站台静止, 结果如何?

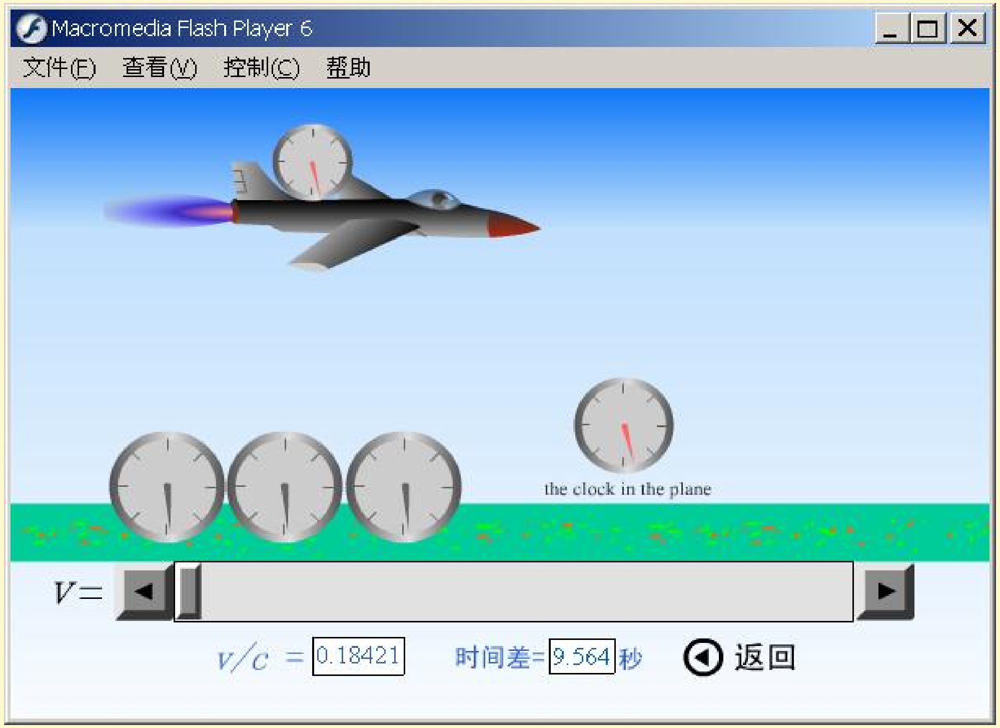


结论: 时间间隔的测量是相对的, 与惯性系的选择有关

➢ 每个参考系中的观测者都会认为相对自己运动的钟比自己的钟走得慢(动钟变慢)

若在相对事件发生地运动的参考系中，该两事件必为异地事件，需用两只钟测出其时间间隔 τ, 则:

$$\boxed{\tau = \gamma \tau_0}$$



➢ 当速度远远小于c 时, 时间间隔相同.

实验验证: 1971年飞机载铯原子钟环球航行, 地球赤道地面放置A钟, 地球赤道上空约一万米处B钟向东飞行, C钟向西飞行.

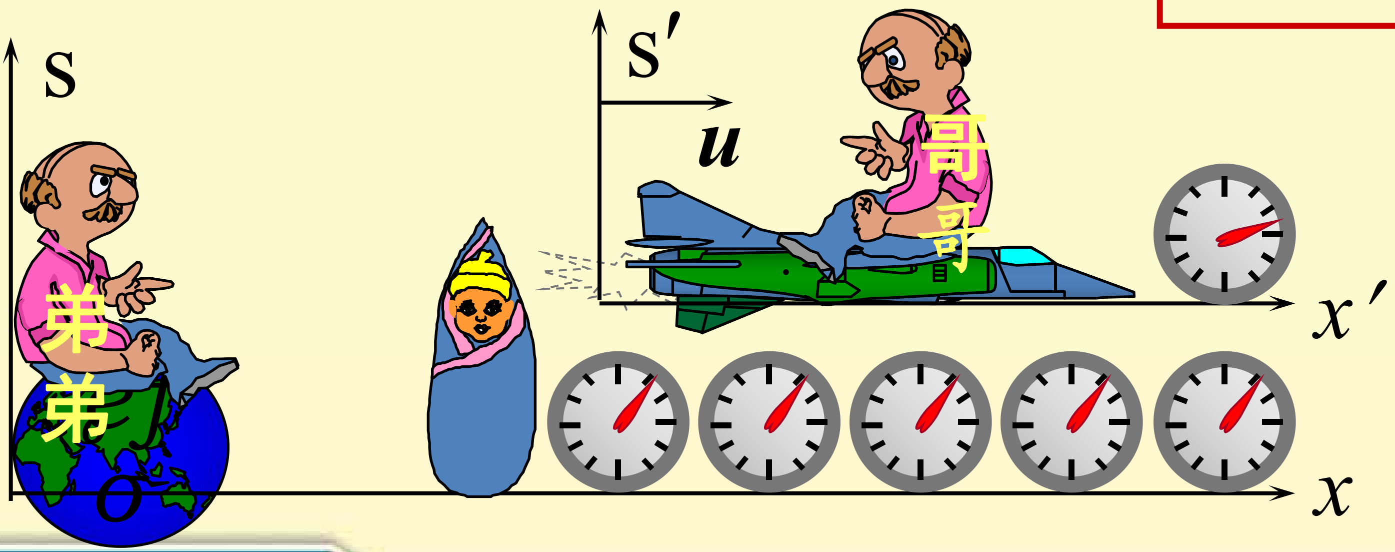
A、B、C对太阳参考系均向东: $v_B > v_A > v_C$

结果: 钟 B $\xrightarrow{\text{慢于}}$ A $\xrightarrow{\text{慢于}}$ C

验证了相对论时间膨胀效应.

孪生子效应

谁年轻?



例5-3 半人马座α星是距离太阳系最近的恒星, 它距离地球 4.3×10^{16}m. 设有一宇宙飞船自地球飞到半人马α星, 若宇宙飞船相对地球的速度为$0.999c$, 按地球上的时钟计算要用多少年时间? 如以飞船上的时钟计算, 所需时间又为多少年?

思考: 哪个时间为原时? 地球系: 非原时; 飞船系: 原时

解 按地球上的时钟计算, 飞船飞到α星所需时间为

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{4.3\times10^{16}}{0.999\times3\times10^{8}\times365\times24\times3600} = 4.55\text{年}$$

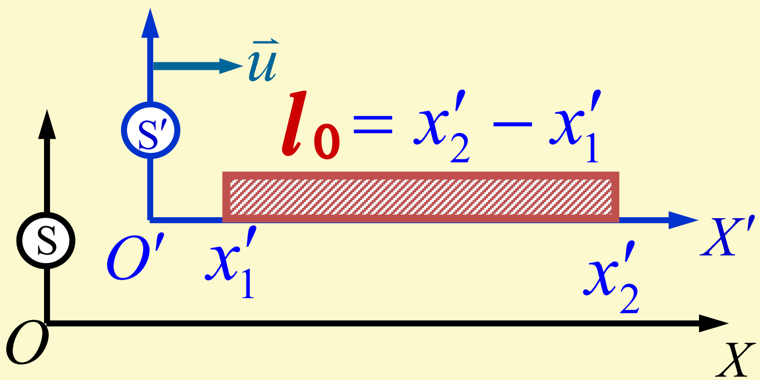
若用飞船上的钟测量, 飞船飞到α星所需时间为

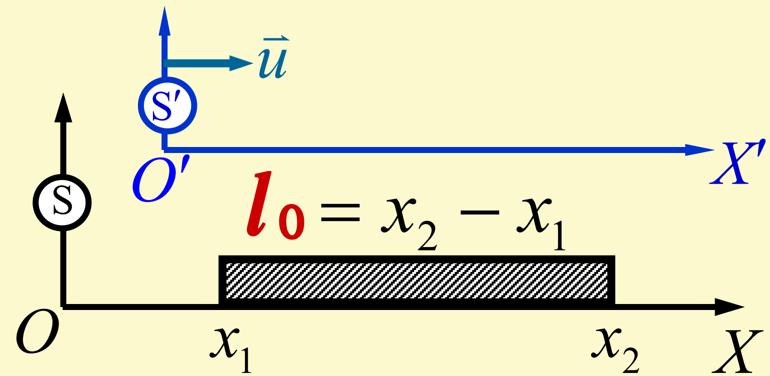
$$\tau = \gamma^{-1}\Delta t = \sqrt{1-0.999^{2}}\times4.55 = 0.203\text{年}$$

正是时间膨胀效应使得在人的有生之年进行星际航行成为可能.

5.2.3 长度收缩

原长(proper length)/固有长度l_0——相对于惯性系静止的物体的长度





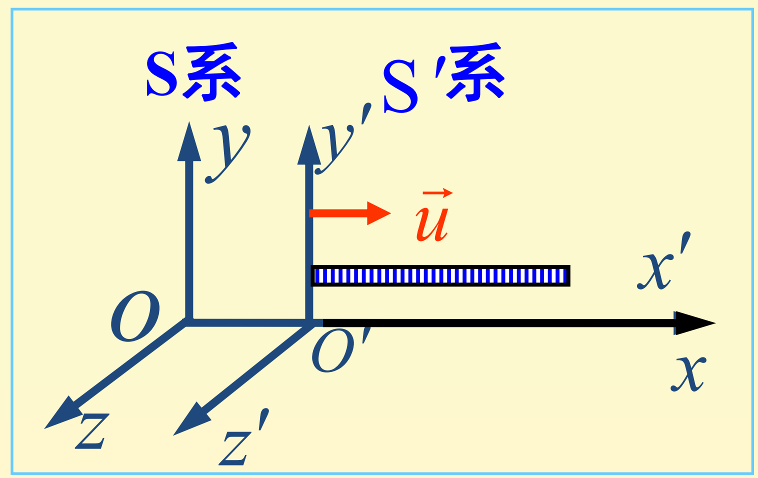
测量尺的长度

S′系中测量(不一定同时测量)l_0

$$l_0 = l' = x_2' - x_1'$$

S系中测量(一定同时测量) l

——非原长 $l = x_2 - x_1$

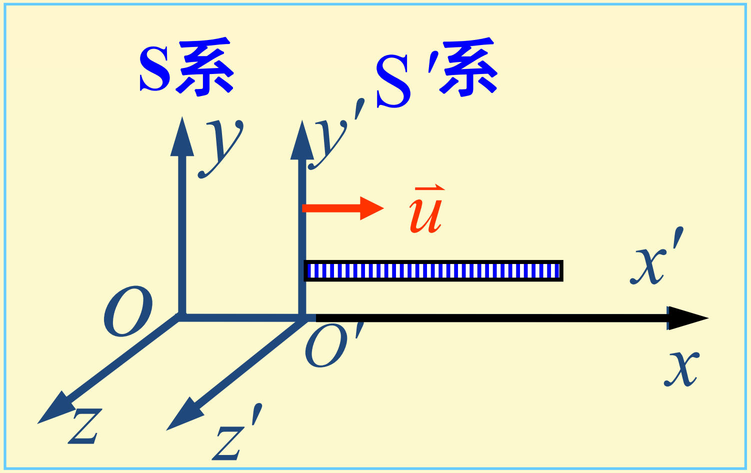


由洛仑兹变换:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$

原长　观测长度　0

$$\Delta x' = \gamma\Delta x > \Delta x$$



若尺相对于S系静止

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$

原长　观测长度(非原长)　0

$$\Delta x = \gamma\Delta x' > \Delta x'$$

原长最长!

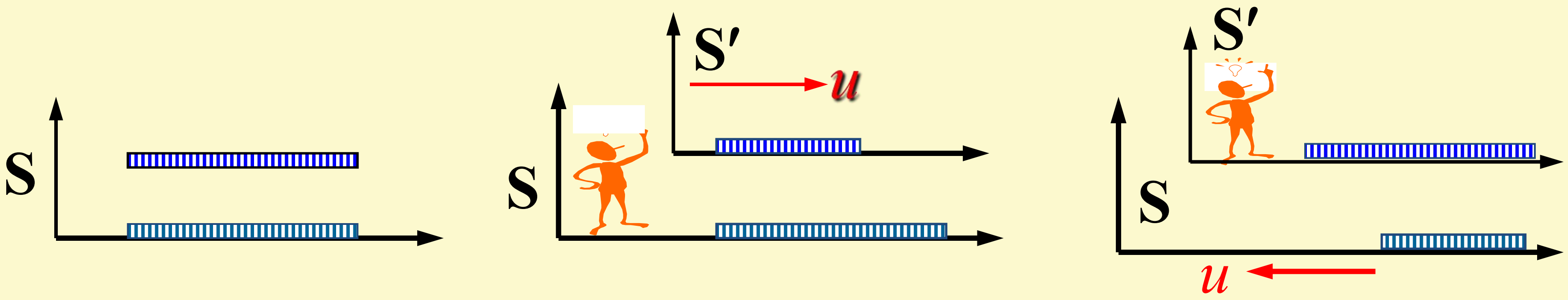
$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

结论:

(1) 相对于观察者运动物体沿运动方向长度缩短了—— **长度收缩**(contraction of length) (动尺缩短)

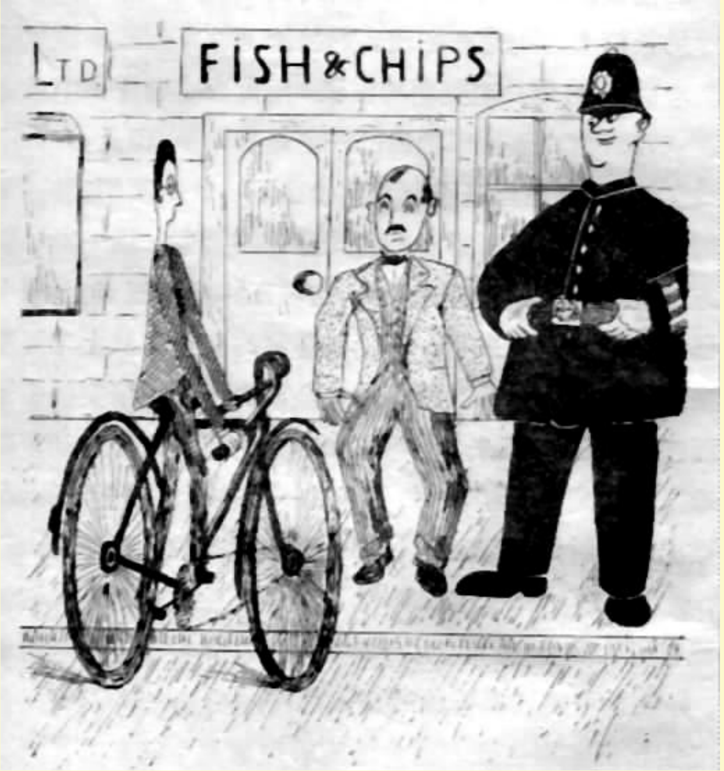
(2) 长度缩短具相对性



(3) 收缩效应与测量有关, 固有长度不变, 不表示物质内部结构的改变. 是一种物质的时空属性.

(4) 长度收缩是"测量"结果, 不是"视觉"效应.

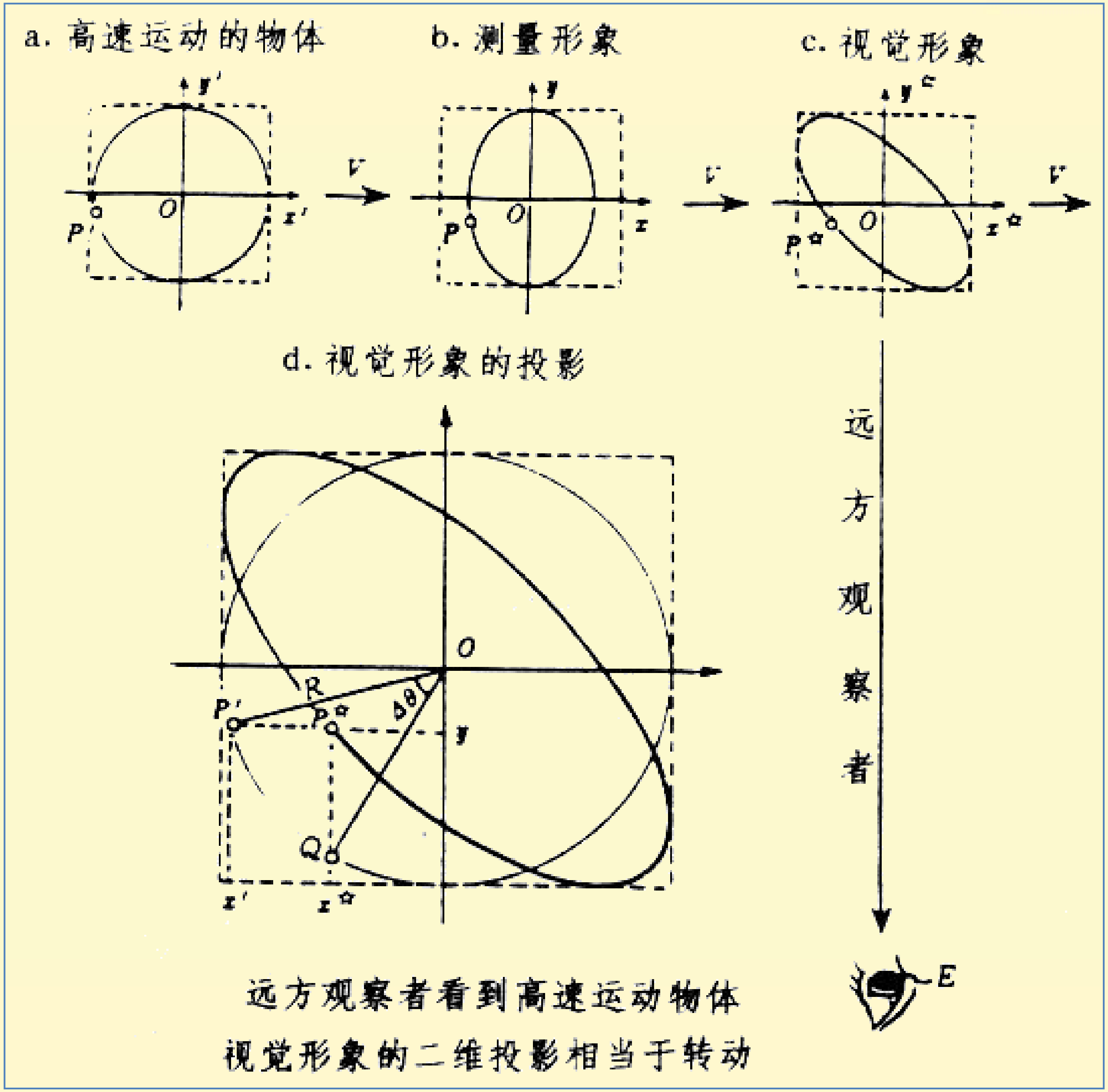
物理世界奇遇记 —— 伽莫夫



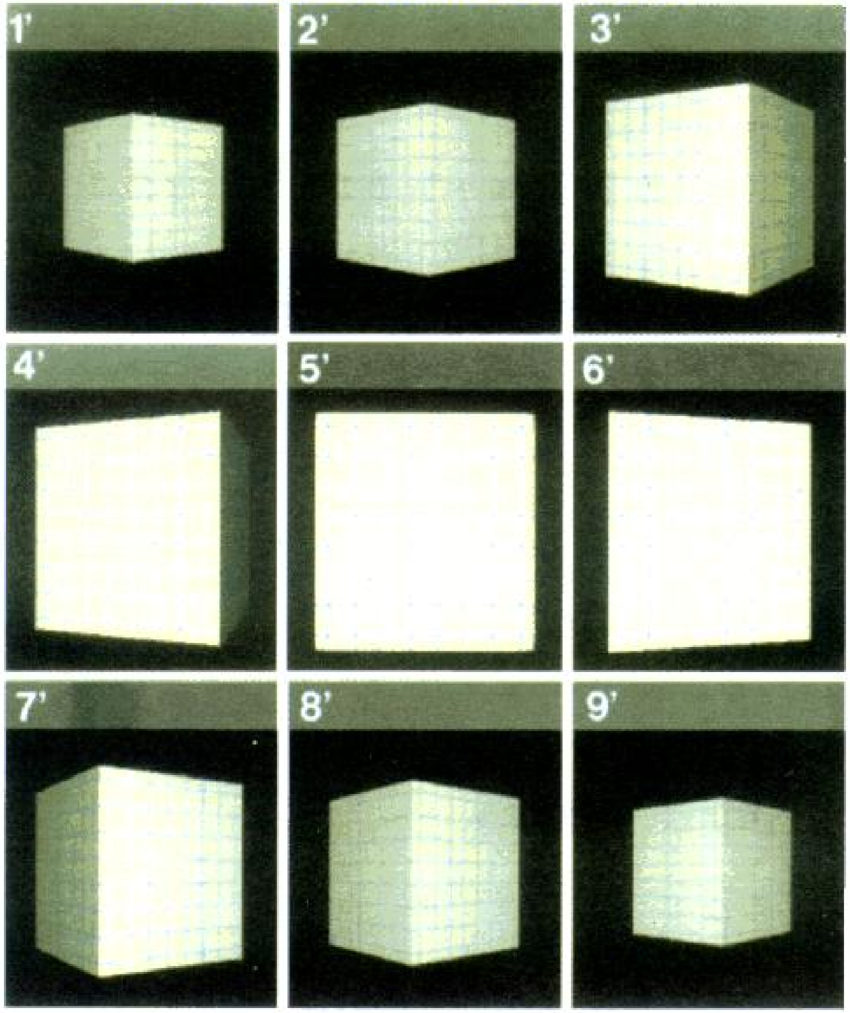
汤普金斯(c,G,h)先生的奇遇

能否真的"看"到此番景象？

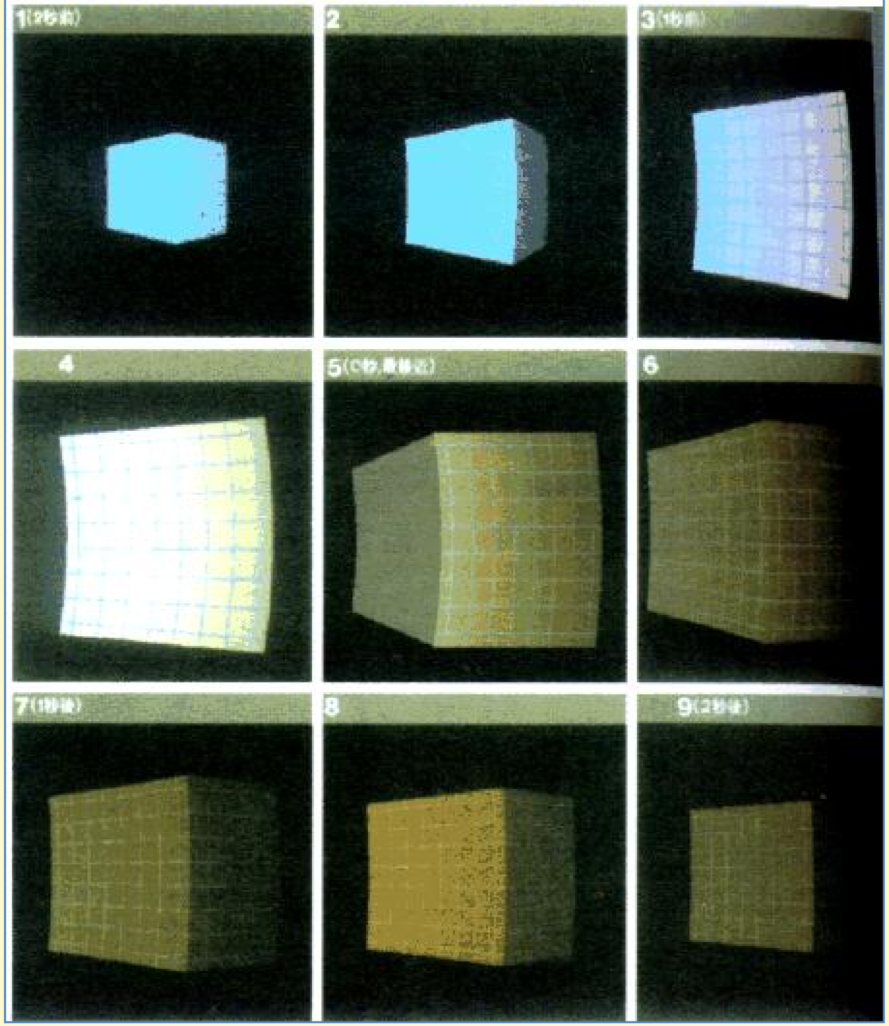
参阅赵凯华《新概念物理教程．力学》P. 410


a. 高速运动的物体
b. 测量形象
c. 视觉形象
d. 视觉形象的投影
远方观察者
远方观察者看到高速运动物体
视觉形象的二维投影相当于转动

立方体在各位置静止时的形态



一立方体以0.6c的速率相对于观察者直线运动时的形态



相对论视觉效应

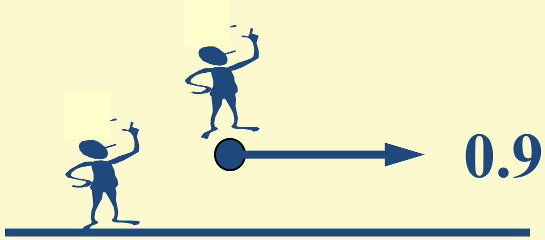
模拟演示

例5-4 静系中μ子的平均寿命为2.2×10^{-6}s. 据报导, 在一组高能物理实验中, 当它的速度为u=0.9966c时, 通过的平均距离为8km. 试说明这一现象: (1) 用经典力学计算与上述结果是否一致; (2) 用时间膨胀说明; (3) 用尺缩效应说明.

解 (1) 按经典力学

$$l = u\tau = 3\times10^{8}\times2.2\times10^{-6}\text{m} = 660\text{m}$$ 不符合事实

(2) 本征寿命: $\tau_0=2.2\times10^{-6}$s



实验室测其寿命:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.9966^2}}\text{s} = 26.7\times10^{-6}\text{s}$$

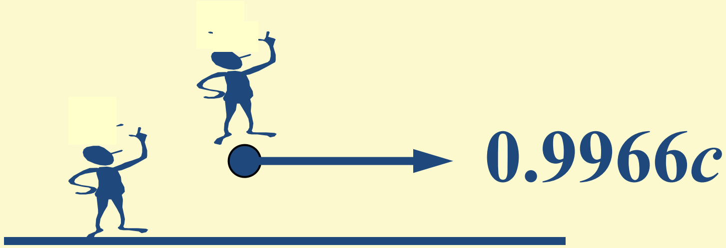
$$l = u\tau = 3\times10^{8}\times26.7\times10^{-6}\text{m} \approx 8\times10^{3}\text{m}$$

与平均距离一致

(3) μ子参考系测实验室距离:

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = 8\times10^3\times\sqrt{1-0.9966^2}\,\text{m}$$

$$=0.66\times10^3\,\text{m}$$



运动时间:

$$\tau = \frac{l}{u} = \frac{0.66\times10^3}{0.9966\times3\times10^8}\text{s} = 2.2\times10^{-6}\text{s}$$

与平均寿命一致

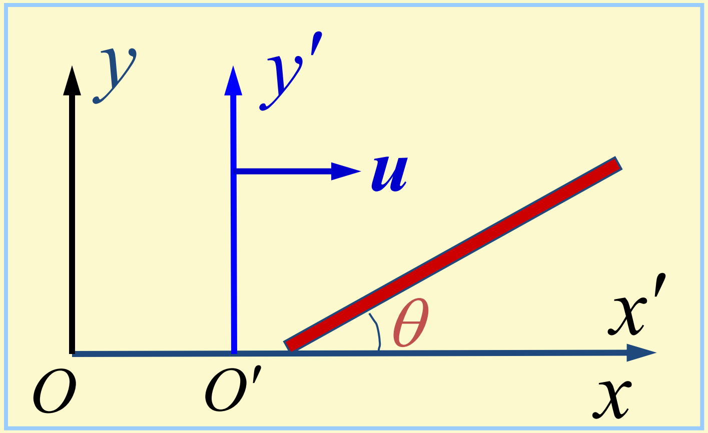
例5-5 一根米尺静止放置在S′ 系中，与$O'x'$轴成30°角. 已知S′系平行于S系的Ox轴正向匀速运动，如果在S系中测得米尺与Ox轴成45°角，问:

(1) S′ 系相对于S系的运动速度u为多大?

(2) S系中测得米尺的长度是多少?

解 由题意可知

$$\tan 30^\circ = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} \qquad \tan 45^\circ = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



由 $\Delta y = \Delta y'$ 得 $\dfrac{\Delta x}{\Delta x'} = \dfrac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}$

根据相对论“尺缩”效应，有

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} \qquad \text{即} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta x'} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

于是 $$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}$$

得 $$u=\sqrt{\frac{2}{3}}c=0.816c$$

由于 $$\Delta y=\Delta y'$$

所以 $$l'\sin 30^\circ=l\sin 45^\circ$$

测得米尺长度 $$l=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}l'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=0.707\,\mathrm{m}$$

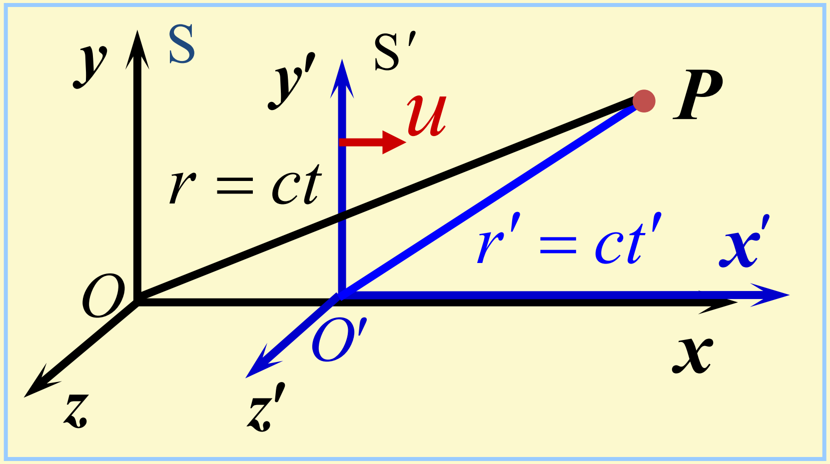
5.2.4 时空间隔不变性 闵可夫斯基四维世界

1. 洛仑兹时空间隔及其不变性

在四维空间, 对不同的参考系, 事件1和事件2的坐标为:

事件1 S_1, S_1'

事件2 S_2, S_2'



$t=t'=0$时O、O'重合, 由两原点向P发出光信号

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=ct \qquad x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=ct' \qquad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

或： $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2$

$$=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-c^2(\Delta t')^2$$

定义: 时空坐标(x,y,z,ict)

时空间隔 $(\Delta S)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2$

$$(\Delta S')^2=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-c^2(\Delta t')^2$$

洛仑兹变换下的基本不变量 —— 时空间隔

$(\Delta S)^2=(\Delta S')^2<0$ — **类时间隔(可由信号关联)**

$(\Delta S)^2=(\Delta S')^2=0$ — **类光间隔(由光信号关联)**

$(\Delta S)^2=(\Delta S')^2>0$ — **类空间隔(不能由信号关联)**

2. 四维时空——洛仑兹变换的几何化

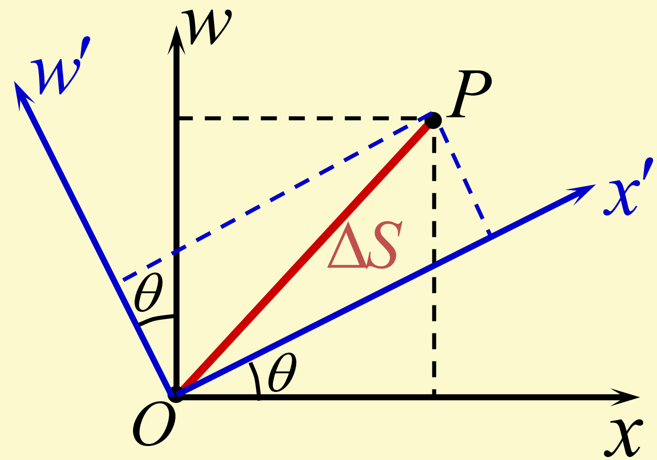
坐标变量: $x,\quad y,\quad z,\quad ict = w$

与$x, y, z,$量纲一致，并反映ΔS中的符号差异

时空间隔: $(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta w)^2$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta w$是$\Delta S$

在四维时空坐标轴上的投影



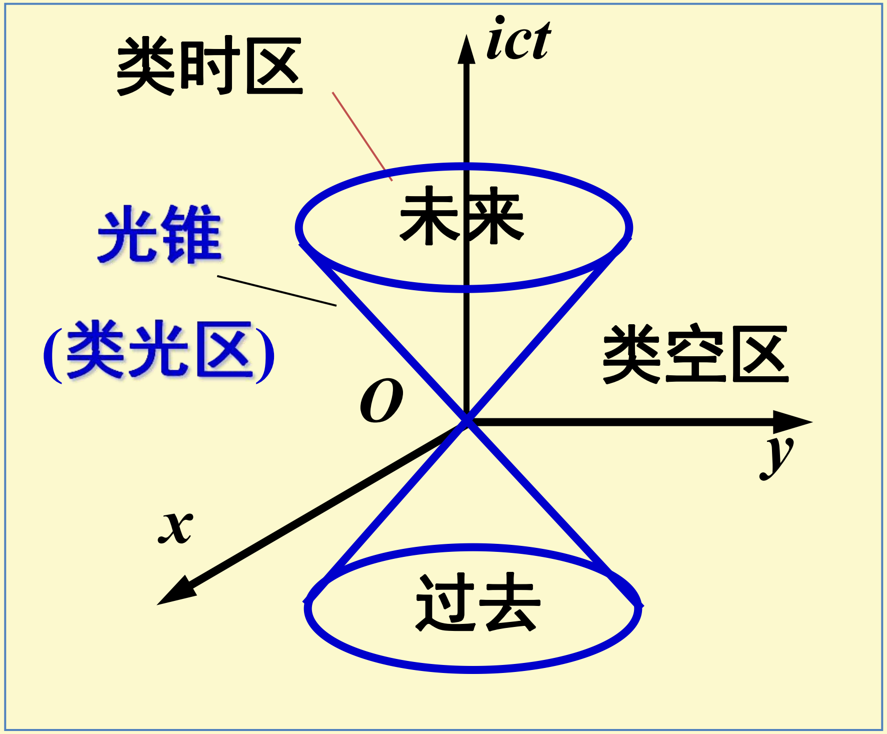
不同惯性系—对应四维时空的转动操作(投影变化, 但时空间隔不变), 其变换关系即洛仑兹变换.

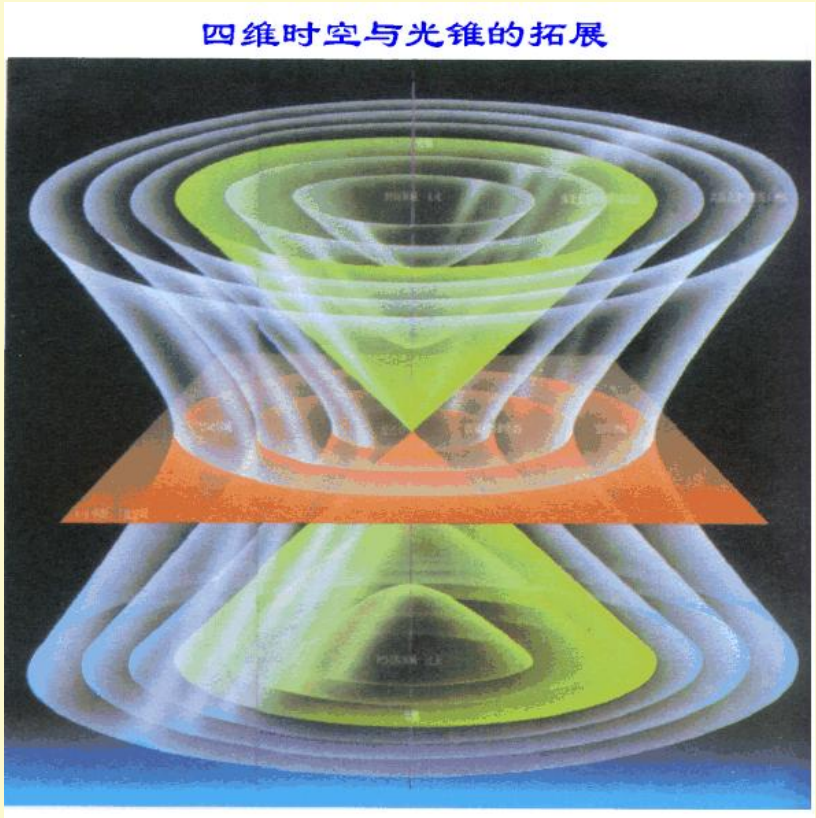
四维时空中的一点 —— 事件 —— **世界点**

四维时空中的线 —— 事件的进程 —— **世界线**

光锥: 离开和到达某世界点的所有世界线组成的三维曲面

光锥把$xy-i\,ct$曲面分成了四个区:





真空中光速不变——所有光锥倾斜程度相同

例5-6 在惯性系S中，有两事件同时发生在x轴上相距1.0×10^3 m处，从S′观察到这两事件相距2.0×10^3m. 试问由S′系测得此两事件的时间间隔为多少?

解 由洛仑兹变换得 $$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$2.0\times10^3=\frac{1.0\times10^3}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\qquad v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=-\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=-\frac{\sqrt{3}c/2}{c^2}\cdot\frac{1.0\times10^3}{1/2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3\times10^8}\times1.0\times10^3=-5.77\times10^{-6}\ (\text{s})$$

解法二

$$(\Delta S)^2 = (\Delta S')^2$$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$
$$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

$$\Delta t = 0 \quad (t_2 = t_1)$$

$$\Delta x = 1.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\Delta x' = 2.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$c^2(\Delta t')^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x)^2$$

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{(\Delta x')^2 - (\Delta x)^2}}{c}$$

$$= 5.77 \times 10^6 \text{ s}$$

§5-3 相对论动力学基础

基本思路： 相对论力学量 $\xrightarrow{u<<c}$ 经典力学量

相对论力学定律 $\xrightarrow{u<<c}$ 经典力学定律

5.3.1 质量与速度的关系

质量的表达 猜想形式?

基本事实: $\vec{F}$ 持续作用 ⟶ 动量 $\vec{p}=m\vec{v}$ 持续 ↗

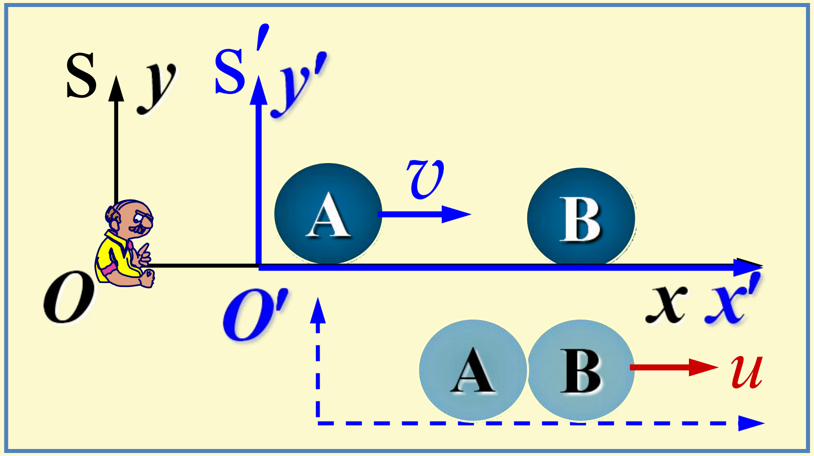
约束: ① 速度v上限是 c

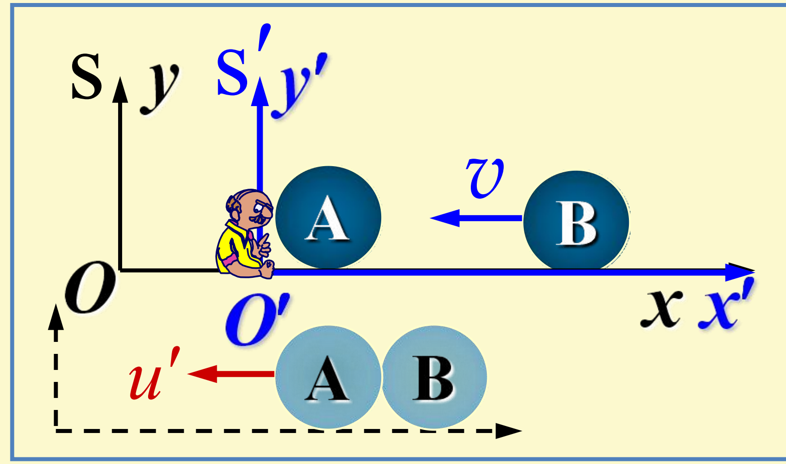
② 空间的各向同性与速度方向无关

③ 对应原理要求 $v<<c$时, $m=m_0$

$$\boxed{m=m(v)}$$

理想实验: 全同粒子的完全非弹性碰撞. 设小球A和B的静止质量均为m_0, A静止于S′系, B静止于S系.





S系动量守恒: $mv + m_0 \cdot 0 = (m + m_0)u$ $\qquad \dfrac{v}{u} = \dfrac{m+m_0}{m}$

S′系动量守恒: $m_0 \cdot 0 - mv = (m+m_0)u'$ $\qquad \dfrac{v}{u'} = -\dfrac{m+m_0}{m}$

速度变换式 $u' = \dfrac{u-v}{1-uv/c^2}$

$\boxed{u = -u'}$

$$m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{m_0^2}{m}$$

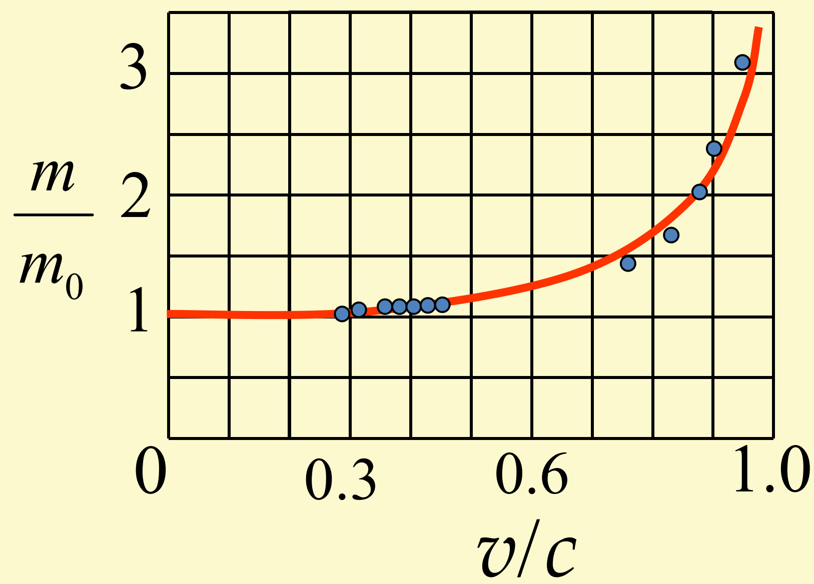
$$m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{m_0^2}{m}$$

质速关系

(mass-speed relation)

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0}$$

考夫曼实验结果:
电子质量随速度变化



讨论: ➢**普遍性:** $v \ll c$ 时, $m(v)=m_0 \Rightarrow$ 牛顿力学

$v \to c$ 时, $m \to \infty$ 在 F 作用下, $a \to 0$

$\Rightarrow c$ 是极限速度

➢**相对性:** 质量具有相对性, 反映了物质与运动的不可分割性

5.3.2 相对论动力学基本方程

1. 动量

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}}$$

当$v << c$时　$v/c \to 0$　$m = m_0$　　$\vec{p} = m_0\vec{v}$

2. 相对论基本方程

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}}$$

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{当}v << c\text{时}} \vec{F} = m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

相对论动力学方程在洛伦兹变换下具有不变性. 在低速时, 退化为 $\vec{F} = m\vec{a}$ ，相对论力学退化为经典力学.

5.3.3 相对论动能

- 经典力学

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{m_0 v^2}{2}$$

- 相对论力学

$$\xrightarrow{?} \quad E_{\mathrm{k}} = \frac{m_0}{2\sqrt{1-v^2/c^2}} v^2$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t \qquad \because \quad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \mathrm{d}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = (\mathrm{d}m)\vec{v} \cdot \vec{v} + m(\mathrm{d}\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

数学推导 $\downarrow$ 考虑 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

相对论动能: $\boxed{E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0 c^2}$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

讨论:

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$\because \quad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}m_0v^2(1 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^2}{c^2} + \cdots)$$

$v << c$ 时 $\qquad E_k \approx \dfrac{1}{2}m_0v^2$

5.3.4 质能关系

$$E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$$

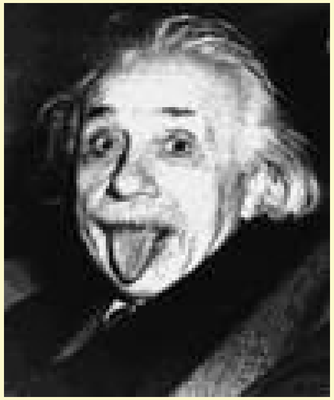
$$E = E_{\mathrm{k}} + m_0c^2 = mc^2$$

运动时的能量

静止时的能量

定义: 物体静能(rest energy) $\boxed{E_0 = m_0c^2}$

物体总能量 $\boxed{E = mc^2}$



质能关系(mass-energy relation): 反映质量与能量的不可分割性, 任何物体系统, 可以由质量或者能量来表征其数量.

静止物体所含巨大能量不引人注意, 是因为没有能量向外流出

说明:

(1) 静能 $E_0 = m_0 c^2$ 表征物体静止时的总内能

- 分子间相互作用势能
- 分子运动动能
- 原子间结合在一起的化学能
- 原子核与电子结合在一起的电磁能
- 原子核内基本粒子间的结合能

(2) 质能关系统一了质量守恒定律和能量守恒定律

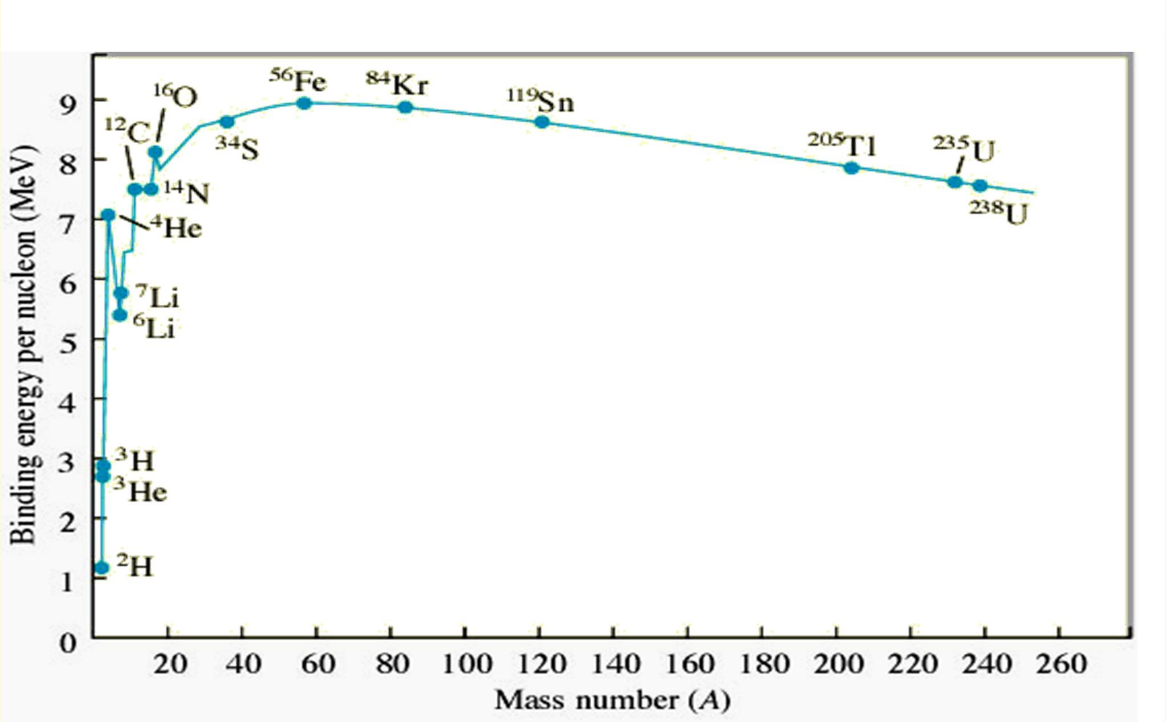
当质量发生Δm变化, 能量也有相应变化ΔE

$$\Delta E = \Delta\left(mc^2\right) = c^2 \Delta m$$

(3) 质能关系是人类打开核能宝库的钥匙

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

比结合(原子核中每个核子的平均结合能)能图的启示:



裂变: 重核分裂为中等质量的核

聚变: 轻核聚合为中等质量的核

质量亏损, 释放结合能

应用: 原子弹、氢弹、核电站 ……

例5-7 计算核聚变中释放出的能量

氘核=质子+中子

氘核: $m_D = 3.34365 \times 10^{-27}$ kg

质子: $m_p = 1.67265 \times 10^{-27}$ kg

中子: $m_n = 1.67496 \times 10^{-27}$ kg

$$\Delta m = (m_p + m_n) - m_D = 3.96 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

$$\Delta E = \Delta m c^2 = 3.564 \times 10^{-13}\ (\text{J})$$

$$= \frac{3.564 \times 10^{-13}}{1.602 \times 10^{-19}} = 2.23\ \text{MeV}$$

2克氘 (1摩尔): 6.022×10²³个氘核

释放能量:

$$\Delta E = 3.564 \times 10^{-13} \times 6.022 \times 10^{23} = 2.146 \times 10^{11}\ (\text{J})$$

核反应堆

美丽的公式: $E = mc^2$

沈致远

（摘自《解放日报》2005.12.3）

她丽质天生, 素面朝圣, 美在简约. $E = mc^2$只有三个符号和一个数字: E-能量, m-质量, c-光速, 2表示取其平方. 如此简单的公式, 学过代数的中学生都能理解.

她系出名门, 世代书香, 源远流长. $E = mc^2$包含三个物理量: 能量、质量和光速. 质量概念可以追溯到16世纪的伽利略和17世纪的牛顿, 能量-17世纪的笛卡儿和19世纪的焦耳, 光速则和19世纪创建电磁理论的麦克斯韦的名字分不开.

她现身大漠, 惊鸿一瞥, 令人惊艳. 美丽的公式"养在深闺无人识", 直到第一颗原子弹在美国新墨西哥州沙漠中试爆, 一道霞光耀目, 令全世界人惊艳.

她显示出逻辑思维之魅力. $E = mc^2$是逻辑推理的结果. 狭义相对论探究时间空间的性质, 其基本原理是光速不变原理和相对性原理, 从表面看, 这些和质能相当公式根本不搭界. 妙的是, 你只要承认这两条基本原理, 就足矣!

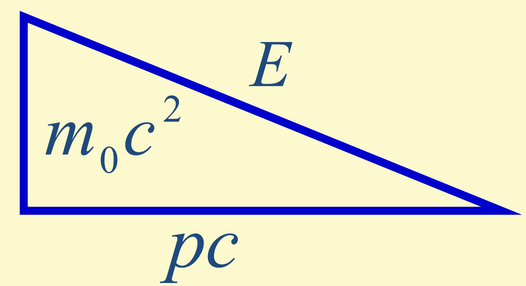
她"动如脱兔, 静若处子". 质量是静止的, 能量是运动的, $E = mc^2$将两者联系起来——动静相通. 质能相当使得原来的两个基本定律——物质不灭定律和能量守恒定律, 合二为一, 归结为一个包罗万象的能量守恒定律. 质量和能量是同一种东西的不同形式, 好比有两种货币E和m, 原先认为不能互相兑换. 爱因斯坦发现: E是流通货币, m是存款, 两者可以兑换, 兑换率是c^2. 她开辟了一个新时代——原子能时代. 就像存款可以取用一样, 既然质量是物质所存储的能量, 它就是能源, 将之取出来就是原子能.

5.3.5 动量和能量的关系

由 $\left.\begin{aligned}\vec{p} &= m\vec{v} \\ E &= mc^2\end{aligned}\right\}$ $\xrightarrow{\text{消去}m\text{得}}$ $\vec{v} = \dfrac{c^2}{E}\vec{p} \rightarrow v^2 = \dfrac{c^4}{E^2}p^2$

于是 $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{E^2}p^2}}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^{\,2}c^4}$$



讨论： 当 $v << c$ 时

$$c^2p^2 = E^2 - E_0^{\,2} = E_k(E+E_0)$$
$$= E_k \cdot E_0(\gamma+1) = 2E_k m_0 c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{p^2}{2m_0}}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

对光子: 由 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 可知

当$u = c$时， 只有$m_0 = 0$， m才能为有限值

能量 $E = pc$　　动量 $p = \dfrac{E}{c}$　　质量 $m = \dfrac{E}{c^2}$

光子的物质性: 光子无静止质量、静止能量, 但有运动质量、动量以及动能.

即: 光子在任何参考系中均以光速运动, 找不到与光子相对静止的参考系.

例5-8 一个静质量为m_0的粒子，以v=0.8c的速率运动，并与静质量为$3m_0$的静止粒子发生对心碰撞以后粘在一起，求合成粒子的静止质量. (是$4m_0$吗?)

解 设合成粒子静质量M_0、动质量M、速率为u，由动量守恒和能量守恒：

$$mv = Mu \qquad (1)$$

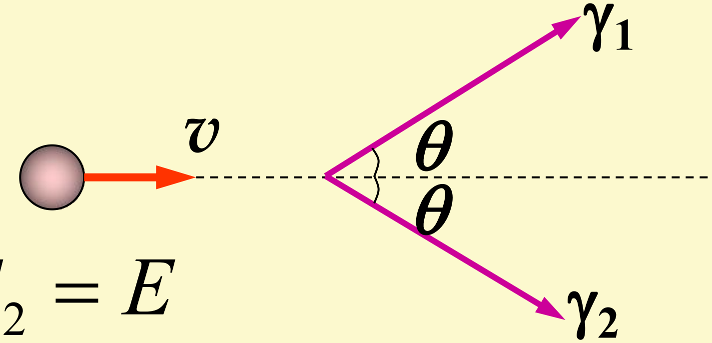
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{m_0}{0.6} \qquad (3)$$

$$3m_0c^2 + mc^2 = Mc^2 \qquad (2)$$

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad (4)$$

$$M_0 = \frac{14}{3}m_0\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2} \approx 4.47m_0$$

例5-9 一个中性π介子相对于观察者以速度$v = kc$ 运动，以后衰变为两个光子，两光子的运动轨迹与π介子原来的方向成相等的角度 θ. 试证明：(1) 两光子有相等的能量. (2) $\cos\theta = k$.



证: (1) ⊥方向动量守恒

$$\frac{E_1}{c}\sin\theta - \frac{E_2}{c}\sin\theta = 0 \qquad E_1 = E_2 = E$$

(2) //方向动量守恒

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{E_1}{c}\cos\theta + \frac{E_2}{c}\cos\theta$$

能量守恒

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-k^2}} = E_1 + E_2$$

$$\cos\theta = \frac{v}{c} = k$$

例5-10 一个电子被电压为10^6V的电场加速后, 其质量为多少? 速率为多大?

解 $$E_k = eU = 1.6\times10^{-19}\times10^{6} = 1.6\times10^{-13}(\mathrm{J})$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{E_k}{c^2} + m_0 = \frac{1.6\times10^{-13}}{(3\times10^{8})^2} + 9.1\times10^{-31} = 2.69\times10^{-30}(\mathrm{kg})$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v = \sqrt{1-m_0^2/m^2}\,c = 2.82\times10^{8}(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \approx 0.94c$$

练习: 欲将电子从0.88c加速到0.89c外界需做多少功? 从0.98c到0.99c呢?

解 由功能关系 $A = \Delta E = m_2c^2 - m_1c^2$

$$A = mc^2 - m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\right)m_0c^2$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.89^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.88^2}}\right)m_0c^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.89^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.88^2}}\right)\times 0.511\ \mathrm{MeV}$$

$$= 4.09\times 10^4\ \mathrm{eV}$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}}\right)\times 0.511\ \mathrm{MeV} = 1.13\times 10^6\ \mathrm{eV}$$

小结: 相对论动力学的三个主要关系

质速关系: $m(u) = m_0 \big/ \sqrt{1 - u^2/c^2} = \gamma\, m_0$

质能关系: 总能 $E = mc^2$ $\quad \Delta E = c^2 \Delta m$

静能 $E_0 = m_0 c^2$

动能 $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$

能量与动量的关系: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

狭义相对论的意义和局限

一、相对论把对称性思想提高到作为构建物理理论的出发点的高度

二、相对论改变了人类的时空观念和生活

三、狭义相对论不是终极理论