

线性规划建模

The modeling of Linear programming

内 容

- § 1 人力资源分配的问题；
- § 2 生产计划的问题；
- § 3 套裁下料问题；
- § 4 配料问题；
- § 5 投资问题。

§ 1 人力资源分配的问题

例1. 某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时间	所需人数
1	6: 00 —— 10: 00	60
2	10: 00 —— 14: 00	70
3	14: 00 —— 18: 00	60
4	18: 00 —— 22: 00	50
5	22: 00 —— 2: 00	20
6	2: 00 —— 6: 00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段一开始时上班，并连续工作八小时，问该公交线路怎样安排司机和乘务人员，既能满足工作需要，又配备最少司机和乘务人员？

§ 1 人力资源分配的问题

解：设 x_i 表示第*i* 班次时开始时上班的司机和乘务人员数

我们建立如下的数学模型：

目标函数： $\min\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\}$

满足条件： $x_1 + x_6 \geq 60$

$$x_1 + x_2 \geq 70$$

$$x_2 + x_3 \geq 60$$

$$x_3 + x_4 \geq 50$$

$$x_4 + x_5 \geq 20$$

$$x_5 + x_6 \geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

§ 1 人力资源分配的问题

例2. 一家中型的百货商场，它对售货员的需求经过统计分析如下表所示。为了保证售货人员充分休息，售货人员每周工作5天，休息两天，并要求休息的两天是连续的。问应该如何安排售货人员的作息，既满足工作需要，又使配备的售货人员的人数最少？

时间	所需人数
星期日	28
星期一	15
星期二	24
星期三	25
星期四	19
星期五	31
星期六	28

§ 1 人力资源分配的问题

解：设 x_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 表示星期一至日开始休息的人数

这样我们建立如下的数学模型。

目标函数： $\min\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7\}$

满足需要： $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 28$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 15$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 24$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 25$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 19$$

$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 31$$

$$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 28$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

§ 2 生产计划的问题

例3. 某公司面临一个是外包协作还是自行生产的问题。该公司生产甲、乙、丙三种产品，都需要经过铸造、机加工和装配三个车间。甲、乙两种产品的铸件可以外包协作，亦可以自行生产，但产品丙必须本厂铸造才能保证质量。数据如表。问：公司为了获得最大利润，甲、乙、丙三种产品各生产多少件？甲、乙两种产品的铸造中，由本公司铸造和由外包协作各应多少件？

	甲	乙	丙	资源限制
铸造工时(小时/件)	5	10	7	8000
机加工工时(小时/件)	6	4	8	12000
装配工时(小时/件)	3	2	2	10000
自产铸件成本(元/件)	3	5	4	
外协铸件成本(元/件)	5	6	--	
机加工成本(元/件)	2	1	3	
装配成本(元/件)	3	2	2	
产品售价(元/件)	23	18	16	

§ 2 生产计划的问题

解：设 x_1, x_2, x_3 分别为三道工序都由本公司加工的甲、乙、丙三种产品的件数， x_4, x_5 分别为由外协铸造再由本公司加工和装配的甲、乙两种产品的件数。

求 x_i 的利润：利润 = 售价 - 各成本之和

$$\text{产品甲全部自制的利润} \quad = 23 - (3+2+3) = 15$$

$$\text{产品甲铸造外协, 其余自制的利润} \quad = 23 - (5+2+3) = 13$$

$$\text{产品乙全部自制的利润} \quad = 18 - (5+1+2) = 10$$

$$\text{产品乙铸造外协, 其余自制的利润} \quad = 18 - (6+1+2) = 9$$

$$\text{产品丙的利润} \quad = 16 - (4+3+2) = 7$$

可得到 x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 的利润分别为 15、10、7、13、9 元。

§ 2 生产计划的问题

通过以上分析,可建立如下的数学模型:

目标函数: $\max \{ 15x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 9x_5 \}$

约束条件: $5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leq 8000$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq 12000$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 10000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

§ 2 生产计划的问题

例4. 永久机械厂生产 I、II、III三种产品，均要经过A、B两道工序加工。设有两种规格的设备 A_1 、 A_2 能完成 A 工序；有三种规格的设备 B_1 、 B_2 、 B_3 能完成 B 工序。I 可在A、B的任何规格的设备上加工；II 可在任意规格的A设备上加工，但对B工序，只能在 B_1 设备上加工；III只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。数据如表。问：为使该厂获得最大利润，应如何制定产品加工方案？

	产品单件工时			设备的有效台时	满负荷时的设备费用
	I	II	III		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料(元/件)	0.25	0.35	0.50		
售价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

§ 2 生产计划的问题

解：设 x_{ijk} 表示第 i 种产品，在第 j 种工序上的第 k 种设备上加工的数量。

建立如下的数学模型：

$$\text{满足: } 5x_{111} + 10x_{211} \leq 6000 \quad (\text{设备 A}_1)$$

$$7x_{112} + 9x_{212} + 12x_{312} \leq 10000 \quad (\text{设备 A}_2)$$

$$6x_{121} + 8x_{221} \leq 4000 \quad (\text{设备 B}_1)$$

$$4x_{122} + 11x_{322} \leq 7000 \quad (\text{设备 B}_2)$$

$$7x_{123} \leq 4000 \quad (\text{设备 B}_3)$$

$$x_{111} + x_{112} - x_{121} - x_{122} - x_{123} = 0 \quad (\text{I 产品在A、B工序加工的数量相等})$$

$$x_{211} + x_{212} - x_{221} = 0 \quad (\text{II 产品在A、B工序加工的数量相等})$$

$$x_{312} - x_{322} = 0 \quad (\text{III 产品在A、B工序加工的数量相等})$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2, 3$$

§ 2 生产计划的问题

目标函数为计算利润最大化，利润的计算公式为：

利润 = [(销售单价 - 原料单价) × 产品件数]之和 – (每台时的设备费用 × 设备实际使用的总台时数)之和。

这样得到目标函数：

$$\begin{aligned} \text{Max} \{ & (1.25-0.25)(x_{111}+x_{112})+(2-0.35)x_{221}+(2.80-0.5)x_{312} \\ & - 300/6000(5x_{111}+10x_{211})-321/10000(7x_{112}+9x_{212}+12x_{312}) \\ & - 250/4000(6x_{121}+8x_{221})-783/7000(4x_{122}+11x_{322})-200/4000(7x_{123}) \} \end{aligned}$$

经整理可得：

$$\begin{aligned} \text{Max} \{ & 0.75x_{111}+0.775x_{112}+1.15x_{211}+0.775x_{112}+1.3622x_{212}+1.9148x_{312} \\ & - 0.375x_{121}-0.5x_{221}-0.4475x_{122}-1.2304x_{322}-0.35x_{123} \} \end{aligned}$$

§ 3 套裁下料问题

例5. 某工厂要做100套钢架，每套用长为2.9 m, 2.1 m, 1.5 m的圆钢各一根。已知原料每根长7.4 m，问：应如何下料，可使所用原料最省？

解： 共可设计下列8种料方案，见下表

	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6
剩余	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

§ 3 套裁下料问题

	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6
剩余	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

模型1：设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 分别为上面 8 种方案下料的原材料根数。

目标函数： $\min\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\}$

约束条件： $2x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 100$

$$2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geq 100$$

$$x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+4x_8 \geq 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,8$$

§ 3 套裁下料问题

	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6
剩余	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

模型2: 设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 分别为上面 8 种方案下料的原材料根数。

目标函数: $\min\{0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.9x_3 + 0.2x_4 + 1.1x_5 + 0.2x_6 + 0.8x_7 + 1.4x_8\}$

约束条件: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100$

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 100$$
$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geq 100$$
$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, 8$$

§ 3 套裁下料问题

	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5
2.9 m	1	2	0	1	0
2.1 m	0	0	2	2	1
1.5 m	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
剩余料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

模型3：设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 分别为上面5种方案下料的原材料根数。

目标函数： $\min\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\}$

约束条件： $x_1+2x_2+x_4 \geq 100$

$$2x_3+2x_4+x_5 \geq 100$$

$$3x_1+x_2+2x_3+3x_5 \geq 100$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,8$$

§ 3套裁下料问题

计算结果比较

	模型(一)	模型(二)	模型(三)
计算结果	90根	150根	90根

§ 4 配料问题

例6. 某工厂要用三种原料1、2、3混合调配出三种不同规格的产品甲、乙、丙，数据如右表。问该厂应如何安排生产，使利润收入为最大？

产品名称	规格要求	单价(元/kg)
甲	原材料1不少于50% 原材料2不超过25%	50
乙	原材料1不少于25% 原材料2不超过50%	35
丙	不限	25

原材料名称	每天最多供应量	单价(元/kg)
1	100	65
2	100	25
3	60	35

解：设 x_{ij} 表示第 i 种（甲、乙、丙）产品中原料 j 的含量。这样我们建立数学模型时，要考虑：

对于甲： x_{11}, x_{12}, x_{13} ;

对于乙： x_{21}, x_{22}, x_{23} ;

对于丙： x_{31}, x_{32}, x_{33} ;

对于原料1： x_{11}, x_{21}, x_{31} ;

对于原料2： x_{12}, x_{22}, x_{32} ;

对于原料3： x_{13}, x_{23}, x_{33} ;

§ 4 配料问题

利润 = 总收入 - 总成本

= 销售单价×产品数量 - 原料单价×原料数量

目标函数

$$\begin{aligned} \text{Max} \{ & 50(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 35(x_{21}+x_{22}+x_{23}) + 25(x_{31}+x_{32}+x_{33}) \\ & - 65(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - 25(x_{12}+x_{22}+x_{32}) - 35(x_{13}+x_{23}+x_{33}) \} \end{aligned}$$

约束条件：

根据第1个表中有

$$x_{11} \geq 0.5(x_{11}+x_{12}+x_{13})$$

$$x_{12} \leq 0.25(x_{11}+x_{12}+x_{13})$$

$$x_{21} \geq 0.25(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

$$x_{22} \leq 0.5(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

根据第2个表中有：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 100$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 100$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 60$$

§ 4 配料问题

整理可得

目标函数: $\text{Max } z = -15x_{11} + 25x_{12} + 15x_{13} - 30x_{21} + 10x_{22} - 40x_{31} - 10x_{33}$

约束条件:

$$0.5x_{11} - 0.5x_{12} - 0.5x_{13} \geq 0 \quad (\text{原材料1不少于50\%})$$

$$-0.25x_{11} + 0.75x_{12} - 0.25x_{13} \leq 0 \quad (\text{原材料2不超过25\%})$$

$$0.75x_{21} - 0.25x_{22} - 0.25x_{23} \geq 0 \quad (\text{原材料1不少于25\%})$$

$$-0.5x_{21} + 0.5x_{22} - 0.5x_{23} \leq 0 \quad (\text{原材料2不超过50\%})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 100 \quad (\text{供应量限制})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 100 \quad (\text{供应量限制})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60 \quad (\text{供应量限制})$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

§ 4 配料问题

例7. 汽油混合问题。一种汽油的特性可用两种指标描述，用“辛烷数”来定量描述其点火特性，用“蒸汽压力”来定量描述其挥发性。某炼油厂有1、2、3、4种标准汽油，其特性和库存量列于下表中，将这四种标准汽油混合，可得到标号为1，2的两种飞机汽油，这两种汽油的性能指标及产量需求列于表中。问应如何根据库存情况适量混合各种标准汽油，既满足飞机汽油的性能指标，又使2号汽油满足需求，并使得1号汽油产量最高？

标准 汽油	辛烷数	蒸汽压力 (g/cm ²)	库存量 (L)
1	107.5	7.11×10^{-2}	380000
2	93.0	11.38×10^{-2}	265200
3	87.0	5.69×10^{-2}	408100
4	108.0	28.45×10^{-2}	130100

飞机 汽油	辛烷 数	蒸汽压力 (g/cm ²)	产量需求
1	不小于 91	$\leq 9.96 \times 10^{-2}$	越多越好
2	不小于 100	$\leq 9.96 \times 10^{-2}$	≥ 250000

§ 4 配料问题

解：设 x_{ij} 为飞机汽油i中所用标准汽油j的数量(L)。

目标函数为飞机汽油1的总产量： $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$

$$\text{库存量约束为: } x_{11} + x_{21} \leq 380000$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 265200$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 408100$$

$$x_{14} + x_{24} \leq 130100$$

产量约束为飞机汽油2的产量： $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 250000$

由物理中的分压定律 $PV = \sum_{j=1}^n p_j v_j$ 可得有关蒸汽压力的约束条件：

$$\begin{cases} 2.85x_{11} - 1.42x_{12} + 4.27x_{13} - 18.49x_{14} \geq 0 \\ 2.85x_{21} - 1.42x_{22} + 4.27x_{23} - 18.49x_{24} \geq 0 \end{cases}$$

辛烷数的约束条件为： $\begin{cases} 16.5x_{11} + 2.0x_{12} - 4.0x_{13} + 17.0x_{14} \geq 0 \\ 7.5x_{11} - 7.0x_{12} - 13.0x_{13} + 8.0x_{14} \geq 0 \end{cases}$

§ 4 配料问题

整理可得：

$$\begin{aligned} & \max \{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}\} \\ s.t. \quad & \left\{ \begin{array}{ll} x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 250000 \\ x_{11} + x_{21} \leq 380000 \\ x_{12} + x_{22} \leq 265200 \\ x_{13} + x_{23} \leq 408100 \\ x_{14} + x_{24} \leq 130100 \\ 2.85x_{11} - 1.42x_{12} + 4.27x_{13} - 18.49x_{14} \geq 0 \\ 2.85x_{21} - 1.42x_{22} + 4.27x_{23} - 18.49x_{24} \geq 0 \\ 16.5x_{11} - 2x_{12} - 4x_{13} + 17x_{14} \geq 0 \\ 7.5x_{21} - 7x_{22} - 13x_{23} + 8x_{24} \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0, (i=1,2; j=1,2,3,4) \end{array} \right. \end{aligned}$$

§ 4 配料问题

求解可得：

$$\max(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) = 933\,399.938$$

$$x_{11} = 261966.078$$

$$x_{12} = 265200$$

$$x_{13} = 315672.219$$

$$x_{14} = 90561.688$$

$$x_{21} = 118033.906$$

$$x_{22} = 0$$

$$x_{23} = 92427.758$$

$$x_{24} = 39538.309$$

§ 5 投资问题

例8. 某部门现有资金200万元，今后五年内考虑给以下的项目投资。

项目A从第一年到第五年每年年初都可投资，当年末能收回本利110%；项目B从第一年到第四年每年年初都可投资，次年末能收回本利125%，但规定每年最大投资额不能超过30万元；项目C需在第三年年初投资，第五年末能收回本利140%，但规定最大投资额不能超过80万元；项目D需在第二年年初投资，第五年末能收回本利155%，但规定最大投资额不能超过100万元。据测定每万元每次投资的风险指数如下表：

项目	A	B	C	D
风险指数(次/万元)	1	3	4	5.5

- 应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年末拥有资金的本利金额为最大？
- 应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年末拥有资金的本利在330万元的基础上使得其投资总的风险系数为最小？

§ 5 投资问题

解：1) 确定决策变量：连续投资问题

设 x_{ij} ($i = 1 \sim 5, j = 1 \sim 4$) 表示第 i 年初投资于 A($j=1$)、B($j=2$)、C($j=3$)、D($j=4$) 项目的金额。这样我们建立如下的决策变量：

A	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}
B	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	
C			x_{33}		
D		x_{24}			

2) 约束条件：

第一年：A当年末可收回投资，故第一年年初应把全部资金投出去，则

$$x_{11} + x_{12} = 200;$$

第二年：B次年末才可收回投资，故第二年年初有资金 $1.1x_{11}$ ，则

$$x_{21} + x_{22} + x_{24} = 1.1x_{11};$$

第三年：年初有资金 $1.1x_{21} + 1.25x_{12}$ ，则 $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1.1x_{21} + 1.25x_{12}$ ；

第四年：年初有资金 $1.1x_{31} + 1.25x_{22}$ ，则 $x_{41} + x_{42} = 1.1x_{31} + 1.25x_{22}$ ；

第五年：年初有资金 $1.1x_{41} + 1.25x_{32}$ ，则 $x_{51} = 1.1x_{41} + 1.25x_{32}$ ；

B、C、D的投资限制： $x_{i2} \leq 30$ ($i = 1, 2, 3, 4$)， $x_{33} \leq 80$ ， $x_{24} \leq 100$

§ 5 投资问题

3) 目标函数及模型:

a) $\max \{ 1.1x_{51} + 1.25x_{42} + 1.4x_{33} + 1.55x_{24} \}$

s.t. $x_{11} + x_{12} = 200$

$$x_{21} + x_{22} + x_{24} = 1.1x_{11};$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1.1x_{21} + 1.25x_{12};$$

$$x_{41} + x_{42} = 1.1x_{31} + 1.25x_{22};$$

$$x_{51} = 1.1x_{41} + 1.25x_{32};$$

$$x_{i2} \leq 30 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad x_{33} \leq 80, \quad x_{24} \leq 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

b) 目标函数为风险最小

$$\min f = (x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 4x_{33} + 5.5x_{24}$$

在 a)的约束条件基础上“第五年末拥有资金本利在330万元”的条件

$$1.1x_{51} + 1.25x_{42} + 1.4x_{33} + 1.55x_{24} \geq 330$$

好模型的标准

- 有效正确
- 思路清晰
- 模型简洁
- 求解高效
- 注释完整