2023 年春季《实变函数》期末复习题

命题人: 殷鹏飞　　建议时间: 2 小时

一. 判断题 (本题满分 60 分, 每小题 5 分, 共 12 小题. 请先判断, 再给出简要说明)

1. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的集合, $G \supset E$ 是开集, $F \subset E$ 是闭集, 且 $mG = mF$, 则 E 是可测集.

2. 设 E 是可测集, 则 E 可以写成一个 F_σ 型集与一个零测集的并.

3. 设 E_1 和 E_2 是 $\mathbb{R}$ 上的正测度集, 则存在 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $(E_1+\alpha)\cap E_2$ 是至少两点集, 其中 $E_1+\alpha := \{x+\alpha | x \in E_1\}$.

4. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的递减集合列, 则有
$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

5. 对于一有界开区间, 其不可以写成无交的闭区间的并.

6. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上单调的一致连续函数, 则 f 将可测集映为可测集.

7. 设函数列 f_n 和 f 几乎处处有限, f_n 依测度收敛于 f, 且 $mE\left(|f_n-f| > \frac{1}{n}\right) < a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$, 则 f_n 几乎处处收敛于 f.

8. 定义在 $[a,b]$ 上的实函数 f 黎曼可积的充要条件是, 存在零测度集 M, 使得 $f|_{[a,b]\setminus M}$ 连续.

9. 区间 $[a,b]$ 上的连续函数是有界变差函数.

10. 设 $\theta(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 的奇异函数, 将康托三分集的点 x 映射为
$$\theta(x) = \theta\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2x_n \cdot 3^{-n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot 2^{-n},$$
其中 $x_n \in \{0,1\}$; 将被挖去的区间映射为左端点的值. 则 $\forall x \in (0,1)$, $f(x) := \theta(x) + x$ 存在不大于 1 的 Dini 列导数.

11. 设 f_n 在 E 上可积, 则
$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}m \le \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}m.$$

12. 设 $f \in L([0,N])$, 其中 $N = 1,2,\cdots$, 又极限
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} f(x)\mathrm{d}m$$
存在且不为无穷, 则 $f \in L([0,+\infty))$.

二. (共 8 分) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 定义 $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ 的函数 $g(x) = mE(f < x)$. 若 $g(a) < +\infty$, 求证: $g(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上左连续.

三. (共 8 分) 叙述并证明下列定理中的任意一个:

1. 叶果洛夫定理;

2. 鲁津定理.

四. (共 8 分) 计算下列小题:

1. $\mathbb{R}$ 上连续函数全体构成集合的势;

2.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x \ln^2(x+n)}{ne^x}\mathrm{d}x.$$

五. (共 8 分) 设 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 是 E 上的两个可测函数列, 满足 $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m = \int_E g(x)\mathrm{d}m < +\infty,$$

若 $|f_n(x)| \le g_n(x), x \in E$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

六. (共 8 分) 证明: $f(x) \in BV([0,1])$ 当且仅当存在定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足 $f(x) = g(x) - h(x)$.