线性规划的对偶理论

———敏感性分析

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

灵敏度分析目的

所要解决的问题：

- 系数在什么范围内变化，不会影响已获得的最优基。
- 如果系数的变化超过以上范围，如何在原来最优解的基础上求得新的最优解
- 当线性规划问题增加一个新的变量或新的约束，如何在原来最优解的基础上获得新的最优解。

灵敏度分析内容

※ 价值系数c_j的改变

※ 资源系数b_i的改变

※ 技术系数a_{ij}的改变

初始表和最优表之间的关系

1. 设初始表中技术矩阵为A， 资源向量为b，价值向量为C

$$A=[P_1,P_2,\ldots,P_n] \quad C=(c_1,c_2,\ldots,c_n) \quad b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$$

2. 设最优表中技术矩阵为A^*， 资源向量为b^*， 最优基为B

$$A^*=[P_1^*,P_2^*\ldots,P_n^*] \quad b^*=(b_1^*,b_2^*,\ldots,b_m^*)^T \quad C_B=[c_{B1},c_{B2}\ldots,c_{Bm}]$$

则有

$$\begin{cases} A^*=B^{-1}A \\ P_j^*=B^{-1}P_j \end{cases} \qquad b^*=B^{-1}b$$

$$\begin{cases} \sigma=C-C_BB^{-1}A=C-YA \\ \sigma_j=c_j-C_BB^{-1}P_j=c_j-YP_j=c_j-C_BP_j^* \end{cases}$$

三个改变

1. 初始表： $b \to (b+\Delta)$

   最优表： $B^{-1}b \to B^{-1}(b+\Delta)$

2. 初始表： $P_k \to (P_k+\Delta)$

   最优表： $B^{-1}P_k \to B^{-1}(P_k+\Delta)$

3. 非基变量： $c_j \to c_j+\Delta$

$$\Rightarrow \sigma_j = c_j - C_B P_j^* \to \sigma_j + \Delta$$

基变量：检验数变化更加复杂

1. 目标函数系数c_j的改变

	C_B	C_N	
	X_B	X_N	
C_B X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
检验数	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	

基变量在目标函数中系数的灵敏度分析

非基变量在目标函数中系数的灵敏度分析

1.1 非基变量价值系数的灵敏度分析

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对价值系数 c_2 进行灵敏度分析

得到问题的最优单纯形表，如下

			-1	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	-4	0	-1	0	-2

当$c_2 \to c_2+\Delta$时，相应的单纯形表为：

			-1	**-1+Δ**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	$-4+\Delta$	0	-1	0	-2

要使原来的解仍保持最优解，只需所有检验数非正，即

$$\Delta - 4 \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \le 4$$

即当 $c_2 \le 3$ 时，最优解保持不变

1.2 基变量价值系数的灵敏度分析

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对价值系数 c_1进行灵敏度分析

得到问题的最优单纯形表，如下

			-1	**-1**	**-4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	-4	0	-1	0	-2

当$c_1 \to c_1+\Delta$时，相应的单纯形表为：

			$-1+\Delta$	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-1+\Delta$	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	$-4+\Delta/3$	0	$-1-\Delta/3$	0	$-2+2\Delta/3$

要使原来的解仍保持最优解，只需所有检验数非正，即

$$\begin{cases} -4+\Delta/3\le 0 \\ -1-\Delta/3\le 0 \\ -2+2\Delta/3\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\le 12 \\ \Delta\ge -3 \\ \Delta\le 3 \end{cases}$$

由此得到 $-3\le\Delta\le 3$，即当$-4\le c_1\le 2$时，最优基保持不变

2. 资源系数的灵敏度分析

	C_B	C_N	
	X_B	X_N	
C_B X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
检验数	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	

资源系数的灵敏度分析

2. 资源系数的灵敏度分析

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对资源系数 b_1 进行灵敏度分析

得到问题的最优单纯形表，如下

			-1	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	-4	0	-1	0	-2

容易发现初始单纯形表中，变量x_4, x_5, x_6为基变量，可得最优基的逆如下

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$b^*=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\ 6\\ 13/3\end{bmatrix}$$

当$b_1 \to b_1+\delta = 9+\delta$时，最优单纯形表中的资源系数将成为

$$b^*=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9+\delta\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3+\delta/3\\ 6\\ 13/3+\delta/3\end{bmatrix}$$

新的最优单纯形表如下

			-1	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3+δ/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3+δ/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	−4	0	-1	0	-2

要使原来的解仍保持最优解，只需所有资源系数非负，即

$$\begin{cases} 1/3+1/3\delta \geq 0 \\ 13/3+1/3\delta \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta \geq -1 \\ \delta \geq -13 \end{cases}$$

由此得到 $\delta \geq -1$，即当 $b_1 \geq 8$ 时，最优基保持不变

3. 增加一个新的变量

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

增加一个新的变量x_7，它在目标函数中的系数$c_7 = 1$，在约束条件中的系数向量为 $P_7 = (1, 1, 1)^T$

求新的最优基和最优解

得到问题的最优单纯形表，如下

			-1	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	−4	0	-1	0	-2

容易发现初始单纯形表中，变量x_4, x_5, x_6为基变量，可得最优基的逆如下

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$P_7^*=B^{-1}P_7=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\\ 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/3\\ 2\\ 2/3\end{bmatrix}$$

把x_7, c_7, P_7反映到最优单纯形表为：

			-1	-1	4	0	0	0	1
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	-1/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1	2
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3	2/3
检验数			0	−4	0	-1	0	-2	-2

最优基不变，基变量的值不变

4. 增加一个约束条件

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

增加一个新的约束：

$$-x_1+2x_2 \geqslant 2$$

求新的最优基和最优解

得到问题的最优单纯形表，如下

			-1	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	−4	0	-1	0	-2

			-1	-1	4	0	0	0
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
检验数			0	−4	0	-1	0	-2

$$-x_1+2x_2\geqslant 2 \Longleftrightarrow -x_1+2x_2-x_7=2 \Longleftrightarrow x_1-2x_2+x_7=-2$$

			-1	-1	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	0
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1	0
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3	0
0	x_7	-2	1	-2	0	0	0	0	1
检验数			0	−4	0	-1	0	-2	

			-1	-1	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	0
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1	0
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3	0
0	x_7	-2	1	-2	0	0	0	0	1
检验数			0	−4	0	-1	0	-2	

			-1	-1	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	x_1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	0
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1	0
4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3	0
0	x_7	-7/3	0	-5/3	0	-1/3	0	2/3	1
检验数			0	−4	0	-1	0	-2	