运筹学（Operations Research）

组织资源 → 最大效率.　　横断学科

第 1 章　线性规划

例：求 $\min \sum_{1\le i\le 6} x_i$

1	2	3	4	5	6
x_1+x_6	x_1+x_2	x_2+x_3	x_3+x_4	x_4+x_5	x_5+x_6
60	70	60	50	20	30

$\Rightarrow x_{12}, x_{23}, \ldots x_{61}$.（减少建模过程中人的思维量）

$x_i \ge 0$.

建模：目标、约束、变量.

1. 资源 限制
2. 变量 限制（客观现实）.
3. 内部 限制（多阶段决策）
4. 目标 限制

△一般式：目标函数

约束条件 $\begin{cases} \text{普通约束} \\ \text{变量约束} \end{cases}$

（$x_i \ge 0$ or $x_i \le 0$ or 无.）

模型要求：1) 变量取值连续、可控　2) 线性关系

目标函数：$\min(\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

$$s.t.\begin{cases} \text{普通约束}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge\ or\ =) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge\ or\ =) b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge\ or\ =) b_m \end{cases} \\ \text{变量约束：} x_i \ge 0 (x_i \le 0\ or\ \text{无约束}) \quad i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

和

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & i = 1,2,\ldots,m \\ x_j \ge 0 & j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

min：minimize
max：maximize
s.t. --- subject to

$$\text{常量}\begin{cases} c_j \text{称为价值系数} \\ b_i \text{称为资源系数} \\ a_{ij} \text{称为技术系数和工艺系数} \end{cases}$$

矩阵.向量

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$称为价值向量

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$称为资源向量

定义A为技术矩阵，P_j为变量x_j的技术向量或列向量，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_n]$$

矩阵形式

$$\min \quad z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX \ge b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

向量形式

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n \ge b \\ x_j \ge 0; \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

线性规划的标准形式

(1) 目标函数 max
(2) 约束条件 普通 = B
(3) 约束条件 变量 ≥0
(4) 资源系数 $b_i \geq 0$.
(5) $r(A) = m$. ($A_{m\times n}$. 一般 $m \leq n$).

定理：一般形式终可以转化为标准式.

1) 约束非零：零点作仿射变换.
2) ≤ ≥ 改 = 加入新变量 (≥ －剩余变量；≤ ＋松弛变量)
3) 双边的变量约束，一边可转化为普通约束.
4) 无约束变量. $x = x' - x''$. $x' \geq 0$. $x'' \geq 0$.

线性规划模型相关概念

1) 解：

可行解：所有约束条件满足 $\xrightarrow{\text{所有}}$ 可行域

↓ 使目标函数最优

最优解

2) 基：B 为 A $m\times m$ 子矩阵. $|B| \neq 0$. (B 由 A 中 m 个列向量组成)

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0. \end{cases}$$ $A_{m\times n}$ 技术矩阵.

$A = [P_1, \dots P_n]$ $\sum P_i x_i = b$.

3) 基变量：P_k 为 B 中一个向量 (基向量) x_k 为基变量

非基：n-m 个 基 m 个

4) 基解：令所有非基变量值为 0. ⇒ m 个变量 m 个方程 ⇒ 唯一解

⇓

corr. 基可行解 and 可行基.

(基解的判断依据："令所有非基变量值为 0." 至少有 n-m 个变量 = 0)

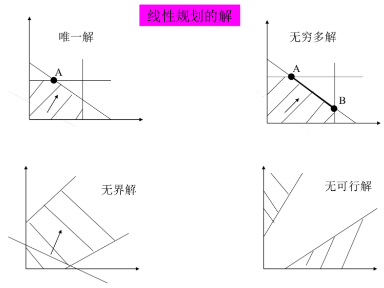
5) 退化解：∃ 基变量 = 0. 的对应基解.

△约束条件可能矛盾，可行解不一定存在

§. 线性规划的解法

一、图解法. (max variable = 3)

画可行域，"推"目标线.



最优解 $\begin{cases} \text{唯一} \\ \text{不唯一：可行域边界 // 目标线. (无穷多)} \\ \text{不存在：} \begin{cases} \text{可行域空集} \\ \text{可行域在目标线方向无界.} \end{cases} \end{cases}$

二. 单纯形法.

1. 定义 (1) 凸集：几何：集合中任意两点连线上的点也在该集合内.　　△空集. 全集 ∈ 凸集

代数：$\forall x_1, x_2 \in C \quad x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C.\ \alpha \in (0,1)$

(2) 顶点：几何：凸集中不成任意两点连线上点的点

代数：对凸集 C. $x \in C$. 不存在 x_1, x_2 s.t. $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$.

2. 基本定理：

定理1： 若线性LP模型存在可行解，则可行域为凸集。

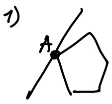
引理： 线性规划问题的可行解 $X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$ 为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的技术向量线性独立。

定理2： 线性规划模型的基可行解对应其可行域的顶点。

顶点 ~ 基可行解

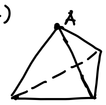
1~1 or 1~多

1)



A 1~多 (多线相交)

2)



A 1~多 (多面相交).

1~多. 出现退化解.

定理3： 若线性规划模型有最优解，则一定存在一个基可行解为最优解。

3. 解决步骤 (1) 找初始基可行解.

注：该算法是贪婪的. 不一定是最优的.

(2) 基可行解 → 另一个基可行解.

思路1：

基可行解 → 另一个基可行解.

保证新基解可行性？

基变量 1 ↓出基

基变量 2,…,m

基变量 m+1. ↑入基

思路2：

$$\max \ z = CX \qquad \text{或} \qquad \max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t. \begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

为了方便，设基可行解 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ 的前 m 个分量为正值，秩为 m，其技术矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_m & P_{m+1} & \cdots & P_j & \cdots & P_n \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

由 $AX^0 = b$ 可得 $\quad \sum_{i=1}^{m} P_i x_i^0 = b \qquad (1)$

又根据技术矩阵 A，非基技术向量 P_j 是 m 个基向量 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的线性组合，即

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i$$

设θ为正数，则有 $\quad \theta \cdot \left(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i \right) = 0 \qquad (2)$

(1)+(2)可得 $\quad \sum_{i=1}^{m} P_i (x_i^0 - \theta a_{ij}) + P_j \theta = b \qquad (3)$

令 θ 足够小便有 $x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0$

定义 $X^1 = (x_1^0 - \theta a_{1j}, x_2^0 - \theta a_{2j}, \ldots, x_m^0 - \theta a_{mj}, 0, \ldots, \theta, \ldots, 0)$

根据(3)有 $AX^1 = b$，则 X^1 是问题的一个可行解。

非零基变量数 m+1. 不是基可行解.

可令 $\theta = \min\limits_{i} \left\{ \dfrac{x_i^0}{a_{ij}} \,\middle|\, a_{ij} > 0 \right\}$.

保证 X^1 的前 m 个分量必有一为 0.

(θ规则).

(3) 最优解判别

每次 step 2) 的方向：取 $\{\sigma_j\}_{max}$ 的方向.

到最优解条件：该基可行解所有 $\sigma_j \le 0$.

变量 x_j 入基，被取到的 θ_i 对应的 x_i 出基.

a_{ij} 为主元.（利用 a_{ij} +- 使 P_j 转化为单元向量）.

对于解 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m个0})^T$

$$z^0 = CX^0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_mx_m^0$$

对于新解

$$X^1 = (x_1^0 - \theta a_{1j}, x_2^0 - \theta a_{2j}, \ldots, x_m^0 - \theta a_{mj}, 0, \ldots, \theta, \ldots, 0)^T$$

$$z^1 = CX^1 = \left\{\sum_{i=1}^{m} c_i\left(x_i^0 - \theta a_{ij}\right)\right\} + c_j\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0 + \theta\left\{c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right\}$$

$$= z^0 + \theta\left\{c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right\}\left(令\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right)$$

$$= z^0 + \theta\boxed{\sigma_j}$$

检验数（基变量 $\sigma_j = 0$）

初始表 → … → 最终表

计算表

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	2	0	1	$\boxed{4/2=2}$
检验数σ_j			2	$\boxed{3}$	0	0	

计算 θ_i 可用

主元

解的判定.

1. 唯一最优解

   规则1：最优表中，所有非基变量的检验数均小于0(非退化)

   规则2：最优表中，退化情形下对于检验数为0的非基变量，其作为入基变量时θ值总为0

2. 无穷多最优解

   规则1：最优表中，存在 一个非基变量的检验数为0(非退化)

   规则2：最优表中，退化情形下存在某非基变量检验数为0，但该变量作为入基变量时θ值大于0

3. 无界解

   规则：非优表，非基变量的技术向量≤0, 但检验数大于0

三. 一般性方法 — 大M法 (人工变量法)

问题1：技术矩阵A中没有明显的单位阵，不能使用前述的单纯形方法进行求解。

问题2：不能获得初始基可行解

解决办法：

(1) 引入人工变量，使得技术矩阵中出现单位阵，十分容易地获得初始可行解。

(2) 令人工变量的价值系数为 – M(M为任意大的正实数)，可通过人工模型来获得原模型的最优解

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 \qquad \max\ z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 - \mathrm{M}x_4 - \mathrm{M}x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

大M法的总结：

判断1：在最优表中，所有人工变量均为非基变量，则可获得原模型的最优解。

判断2：在最优表中，且不发生退化的情形下，存在一个人工变量为基变量，则判定原模型无解

判断3：求得的人工模型的最优目标函数值为负无穷大，则判定原模型无解。

缺点1：当出现退化时，尽管可以获得最优解，但可能无法得到原模型的最优基可行解。

缺点2：在计算机上M为一个足够大的数，具体多大没有定论。

四. 一般性方法 - 两阶段法.

两阶段法的总结：

判断1： 在第一阶段的最优表中，所有人工变量均为非基变量，则可获得原模型的一个基可行解。

判断2： 在第一阶段的最优表中，存在人工变量为基变量，但最优目标函数值为0，则可获得原模型的一个可行解

判断3： 第一阶段的最优目标函数值非0，则问题无解。

缺点1： 判断2情形下得不到基可行解，不能完美实现求解目的。

解决办法：

(1) 引入人工变量，使得技术矩阵中出现单位阵，十分容易地获得初始可行解。

(2) 令人工变量的价值系数为 1，原有变量的价值系数为0，可通过人工模型来获得原模型的一个基可行解 人工变量 → 非基变量后，

(3) 把获得的基可行解作为初始基可行解，再使用单纯形方法求解原模型 1)删去人工变量 2)目标函数换回

$$\max\ z=-2x_1-3x_2+0x_3$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2-x_3=3\\ x_1+2x_2=4\\ x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\ge0\end{cases}$$

➡

max $= -x_4-x_5$.

$$\min\ z=0x_1+0x_2+0x_3+x_4+x_5$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=3\\ x_1+2x_2+x_5=4\\ x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\ge0,x_4\ge0,x_5\ge0\end{cases}$$

$\max z = -2x_1-3x_2$.

$x_1+x_2+x_3 = 2$

$x_1+2x_2-x_4+x_5=3$.

max $-x_5$

			0	0	0	0	-1	θ_i
0	x_3	2	1	1	1	0	0	2
-1	x_5	3	1	2	0	-1	1	1.5
			1	2	0	-1	0.	

⇒

			-2	-3	0		
0	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
-3	x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$.
			$-\frac{1}{2}$	0	0		

初始表和其它表之间的关系

对单纯形表编号为0, 1, 2, … ，设初始表编号为0.

针对初始表和第k个表：假设初始表的资源系数向量为b，技术矩阵为A；假设第 k 个表的资源系数向量为$b^{(k)}$，相应的技术矩阵为A_k，相应的基为B_k，基的逆为B_k^{-1}

则 $A_k=B_k^{-1}A \qquad b^{(k)}=B_k^{-1}b$

对应关系： B_k在初始表中找，对应第 k 个表的单位阵；

B_k^{-1}在第 k 个表中找，对应初始表的单位阵。

初始表 $A \mid b$ ⟷ $(\ H_k\ ,\ I\ )=(B_k,\ \ N_k\ )\mid b$

第 k 表 $A_k \mid b^{(k)}$ ⟷ $(B_k^{-1}H_k,\ B_k^{-1})=(I\ ,\ B_k^{-1}N_k)\mid B_k^{-1}b$

初表

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	[2]	0	1	$\boxed{4/2=2}$
检验数σ_j			**2**	$\boxed{\mathbf{3}}$	**0**	**0**	

第2表

c_j			2	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	[1]	0	1	-1/2	$\boxed{\mathbf{2}}$
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	4
检验数σ_j			$\boxed{\mathbf{1/2}}$	**0**	**0**	**-3/2**	

$$B_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\qquad B_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1/2\\0&1/2\end{bmatrix}$$

三个公式

对于线性规划的标准模型 $\max\ z=CX \quad s.t.\begin{cases}AX=b\\X\ge0\end{cases}$ ，在实行单纯形法时，必须有单位阵存在，则

$$\begin{cases}A=(H,\ I\ )=(B,\ N)\\X=(X_H,\ X_I)=(X_B,\ X_N)\\C=(C_H,\ C_I)=(C_B,\ C_N)\end{cases}$$

其中B为基，N为非基

$$\begin{cases}X_B=B^{-1}b\\z=C_BB^{-1}b\end{cases}$$

1. 基变量值

2. 目标函数值

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_B\\\sigma_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_B-C_BB^{-1}B\\C_N-C_BB^{-1}N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\C_N-C_BB^{-1}N\end{pmatrix}$$

即 $\sigma=C-C_BB^{-1}A$

分量化 $\sigma_j=c_j-C_BB^{-1}P_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{Bi}a_{ij}^{(k)}$ 3. 检验数值.

其中 $A_k=\left[a_{ij}^{(k)}\right]_{m\times n},C_B=(c_{B1},c_{B2},\dots,c_{Bm})$

线性规划的对偶理论

生产模型（原模型）

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1 + 2x_2 \le 170\\ 2x_1 + 3x_2 \le 100\\ x_1 + 5x_2 \le 150\\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

资源租赁模型（新模型）

$$\min\ W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10\\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18\\ y_1, y_2, y_3 \ge 0\end{cases}$$

	原问题	新问题
① 目标函数	max	min
约束条件	⩽	⩾
②	资源系数	价值系数
	价值系数	资源系数
③ 技术矩阵	A	A^T
④	变量数量	约束条件个数
	约束条件个数	变量数量

①~④

(1) 具有上述特殊联系的两个线性规划问题，就称为对偶问题
其中一个称为原问题(**Prime problem**)，另外一个称为该问题的对偶问题(**Dual problem**)。对偶关系是相互的。

(2) 线性规划原问题及其对偶问题之间的关系和性质，就是线性规划的对偶理论

定理1　一个线性规划模型总存在对偶模型

(主要关注约束条件的符号).

	原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）	
	目标函数 **max**	目标函数 **min**	
约束条件	**m个**	**m个**	变量
	⩽	⩾0	
	⩾	⩽0	
	=	无约束	
变量	**n个**	**n个**	约束条件
	⩾0	⩾	
	⩽0	⩽	
	无约束	=	
	约束条件右端项	目标函数变量的系数	
	目标函数变量的系数	约束条件右端项	

矩阵形式：

$$(P)\quad \max Z = CX$$

$$\begin{cases}AX \le b\\ X \ge 0\end{cases}$$

$$(D)\quad \min W = Yb$$

$$\begin{cases}YA \ge C\\ Y \ge 0\end{cases}$$

对偶模型及其性质

性质1(对称性)　对偶问题的对偶是原问题

性质2(弱对偶性)　设原问题和对偶问题如下

(P)　$\max Z = CX$　　(D)　$\min w = Yb$

$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(1)　　$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(2)

$\bar{X}$ 是原问题的任意一个可行解, $\bar{Y}$ 是对偶问题的任意一个可行解, 那么总有

$$C\bar{X} \le \bar{Y}b \qquad (4)$$

推论 1　$C\bar{X}$ 可作为为对偶问题最优目标函数值的下界,

$\bar{Y}b$ 可作为为原问题最优目标函数值的上界

性质3(无界性)　对于线性规划的原问题和对偶问题

若原问题无界，则对偶问题无解。反之不成立

性质4(最优性)　设原问题和对偶问题如下

(P)　$\max Z = CX$　　(D)　$\min w = Yb$

$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(1)　　$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(2)

设 X^* 原问题式(1)的可行解, Y^* 是对偶问题式(2)的可行解, 当是 $CX^* = Y^*b$ 时, X^* 是原问题式(1)的最优解, Y^* 是对偶问题式(2)的最优解.

性质5(强对偶性)　设原问题和对偶问题如下

(P)　$\max Z = CX$　　(D)　$\min w = Yb$

$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(1)　　$s.t.\begin{cases}没有\\要求\end{cases}$　(2)

若原问题有可行解，对偶问题也有可行解，那么两个问题都有最优解且目标函数值相等。

推论2　若 P 和 D 的任意一个有最优解，则另一个也有最优解，且目标函数的最优值相等。

原问题和对偶问题的解关系

只能有下面三种情况之一出现:

① 都有最优解, 分别设为 X^* 和 Y^*, 则必有 $CX^*=Y^*b$

② 一个问题无界, 则另一个问题无可行解;

③ 两个都无可行解。

原问题	对偶问题
有最优解	有最优解
无界	无解
无解	无界
无解	无解

性质6（互补松弛性） 设原问题和对偶问题如下

(P) $\max Z = CX$ (D) $\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \quad (1) \qquad\qquad s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

原问题引入松弛变量，对偶问题引入剩余变量，变为

(P) $\max Z = CX + 0 \cdot X_s$ (D) $\min w = Yb$

$$s.t.\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t.\begin{cases} YA - Y_s I = C \\ Y, Y_s \ge 0 \end{cases}$$

若 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{Y}X_s = 0$ 和 $Y_s\hat{X} = 0$，当且仅当 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 为最优解。

原规划：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

($y_1=0$ $x_3=15/2$)
($y_2=1/4$ $x_4=0$)
($y_3=1/2$ $x_5=0$)

$y_1x_3+y_2x_4+y_3x_5=0$

原规划最优解：$x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{15}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0$

对偶规划最优解：$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{4}, y_3 = \frac{1}{2}, y_4 = 0, y_5 = 0$

⇒ 必有一个为0（至少一个） ⇒ 此时是最优解

松约束，取 < / >. 松约束对应的对偶问题，最优解变量 = 0.
紧约束，取 =. 其余的代入变量代入对偶问题的条件求解.

性质7（对应性） 可通过原问题的最优单纯形表中的检验数获得对偶问题的最优解

初始表

c_j			10	18	0	0	0	θ_i	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	170	5	2	1	0	0	170/2	y_1
0	x_4	100	2	3	0	1	0	100/3	y_2
0	x_5	150	1	$\boxed{5}$	0	0	1	150/5	y_3
-Z		0	10	18↑	0	0	0		

最终表

					y_1	y_2	y_3
c_j			10	18	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	540/7	0	0	1	-23/7	11/7
10	x_1	50/7	1	0	0	5/7	-3/7
18	x_2	200/7	0	1	0	-1/7	2/7
-Z		-4100/7	0	0	0	-32/7	-6/7

哈尔滨工业大学运筹学研究所

如何求Y^*，经分析得出如下结论：

$\sigma_B = 0$ 最优基变量检验数向量
$\sigma_I = C_I - C_B B^{-1}$ 初始基变量检验数向量
$\sigma_D = C_D - C_B B^{-1}D$ 非基变量检验数向量

所以， $Y^* = C_I - \sigma_I$

由上表可知： X^*=（50/7 , 200/7）, Z=4100/7
对偶问题的最优解： Y^*=（0, 32/7 , 6/7）, W=4100/7

对偶单纯形法的步骤

第 1 步　求得基可行解（$Y = C_B B^{-1}$）

第 2 步　判定基可行解是最优解(判定法则：检验数 $b \geq 0$)

第 3 步　变量交换

3.1　确定基变量 x_l 成为非基变量(x_l 为 i 行的基变量)

规则：$b_i = \min\{b_k \mid b_k < 0\}$　最小的 b_i 对应的 x_i.　先出

3.2　确定非基变量 x_j 成为基变量

后入.

规则：$a_{ij} = \min\{\frac{\sigma_k}{a_{ik}} \Big| a_{ik} < 0\}$

第 4 步　矩阵变换——新的基矩阵变成单位矩阵，同时形成新的检验数

总结:

1. 表中有单位矩阵 I，当 $b \geq 0$ 时用单纯形法　σ 可正可负　最优 $b \geq 0$，$\sigma \leq 0$
2. 表中有单位矩阵 I，当 $\sigma \leq 0$ 时用对偶单纯形法　b 可正可负　最优 $b \geq 0$. $\sigma \leq 0$
3. 二者都不满足时，引入人工变量或用两阶段法

影子价格

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

设B是原模型的最优基，z*是最优值，w*是对偶模型的最优解

$$z^* = C_B B^{-1} b = w^* = Y^* b$$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ 是对偶模型的最优解。从而

$$z^* = Y^* b = y_1^* b_1 + y_2^* b_2 + \ldots + y_m^* b_m$$

当 $b_i \to b_i + 1$，其余不变时，

$$z_1^* = y_1^* b_1 + \ldots + y_i^* (b_i + 1) + \ldots + y_m^* b_m$$

$$= z^* + y_i^*$$

$$\boxed{\Delta z = z_1^* - z^* = y_i^*} \qquad \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

影子价格的定义

1. 资源的边际利润（synonym）：增加单位资源导致的利润增加值

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^* \qquad \frac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$$

2. 资源的边际价格（synonym.）：既然边际利润是资源数量增长单位数量带来的，因而资源的边际价值可以用边际利润来衡量。

3. $C_B B^{-1}$ 也被称为拉格朗日乘子(Lagrange)，或灵敏度系数

$$z = cX = Yb$$

c：产品价格；X：产品数量；Y：影子价格；b：资源数量

影子价格的应用

例 某厂计划在下一个生产周期内生产甲乙两种产品，要消耗钢材、煤炭和设备台时三种资源。单位产品消耗资源的数量、资源的数量、单位产品的利润见下表。问如何安排生产，才能充分利用现有资源，使总利润最大？

设 x_1、x_2 为产品甲乙的数量，模型如下：

$$\max z = 10x_1 + 18x_2$$

$$s.t\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

产品 / 资源	甲	乙	资源数量
钢材	5	2	170
煤炭	2	3	100
设备台时	1	5	150
单位利润(万元)	10	18	

原问题的最优解为(50/7，200/7)，最优值为4100/7

对偶问题的最优解为(0，32/7,6/7)

(1) 判定资源稀缺程度

由对偶问题的最优解为(0，32/7, 6/7)，结合互补松弛定理，可知第2、3个资源约束条件为紧约束，也就是松弛变量取0值

⇨ 说明煤炭和设备台时得到了充分的利用，没有剩余，属于紧缺资源

⇨ 经过验证第1个约束为松约束，意味着钢材没有充分利用，有剩余，属于非稀缺资源

(2) 判定利润随资源的变化

➡ 钢材的影子价格为0

即再增加1吨钢材，利润不会增加

煤炭的影子价格为32/7

即再增加1吨煤炭，利润增加32/7万元

设备台时的影子价格为6/7

即再增加1个台时，利润增加6/7万元

(3) 判定资源的外部价值

设 x_1, x_2, x_3 为书桌、餐桌和椅子的生产数量

$$\max \quad z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 & \text{木材} \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 & \text{漆工} \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 & \text{木工} \\ x_2 \le 5 & \text{餐桌} \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

木材的影子价格 $y_1 = 0$

漆工的影子价格 $y_2 = 10$

木工的影子价格 $y_3 = 10$

餐桌的影子价格 $y_4 = 0$

若市场上1小时的木工工资 < 10元，可获得额外利润

若市场上1小时的木工工资 > 10元，将造成损失

(4) 资源的评估.

检验数公式如下

$$\sigma = C - C_B B^{-1} A = C - Y^* A$$

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - Y^* P_j$$

定义1　$Y^* P_j$为产品j的内部成本，称为隐含成本或影子成本

定义2　σ_j为产品j的内部剩余价值，称为隐含利润或影子利润

判定规则：

1. 当产品j的隐含利润值小于0，说明该产品不值得企业进行生产，带来不了更多的利润，不需改变当前生产结构；
2. 当产品j的隐含利润值等于0，且没有纳入生产体系，则说明这种产品，可以作为替代产品，取代某种纳入生产体系的产品，但也带来不了更多的利润，可改变也可不改变当前的生产结构；
3. 当产品j的隐含利润值大于0，说明该产品没有纳入生产体系，且能带来更多的利润，需要改变当前的生产结构。

影子价格总结

1. 影子价格是一种资源的虚拟价格，它不是市场实际价格
2. 影子价格是一种不稳定价格，它随着生产结构的改变而改变，随产品的市场价格改变而改变
3. 影子价格是在系统达到最优时对资源的内部估价

敏感性分析 (分析的是系数！得到系数的可变范围).

定义：问题中资源系数b_i. 价值系数c_j. 技术系数a_{ij}. 的变化对解的影响.

在单纯形法的讨论中，对

初始(表中) $A = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$　$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$　$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$

最优(表中) $A^* = [P_1^*, P_2^* \ldots, P_n^*]$　$b^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)^T$　$C_B = [c_{B1}, c_{B2} \ldots, c_{Bm}]$

有关系：成立.

$$\begin{cases} A^* = B^{-1} A \\ P_j^* = B^{-1} P_j \end{cases} \qquad b^* = B^{-1} b$$

$$\begin{cases} \sigma = C - C_B B^{-1} A = C - YA \\ \sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - Y P_j = c_j - C_B P_j^* \end{cases}$$

单纯形表：

1. 初始表：　$b \to (b + \Delta)$

   最优表：　$B^{-1} b \to B^{-1}(b + \Delta)$

2. 初始表：　$P_k \to (P_k + \Delta)$

   最优表：　$B^{-1} P_k \to B^{-1}(P_k + \Delta)$

3. 非基变量：$c_j \to c_j + \Delta$

   $$\Rightarrow \sigma_j = c_j - C_B P_j^* \to \sigma_j + \Delta$$

1. 价值系数变化.

(不影响 b. P)

	C_B	C_N	
	X_B	X_N	
C_B X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$ (最优表资源系数 / 最优解基变量的值 $X_B=B^{-1}b$)
检验数	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	

只要所有检验数仍 ≤0, 最优解 =

2. 资源系数变化

	C_B	C_N	
	X_B	X_N	
C_B X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
检验数	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	

只要 $b^*=B^{-1}b$ 仍非负. 最优基保持不变.

3. 增加一个新变量. x_k.

最优表中添加 P_k^*. 计算 $\sigma_k = c_k - \sum a_{ik} C_{Bi}$

若 $\sigma_k<0$, 最优基 =

4. 增加一个约束条件.

可能涉及到新松弛变量引入等. 在新单纯形表中检查 σ 和 b. 用单纯形法/对偶单纯形法求解.

参数规划

小结:

1. 根据原规划，写出对偶规划
2. 根据对偶问题，判定原问题有最优解、无解、有无穷大解
3. 由原问题的最优解得到对偶问题的最优解
4. 计算影子价格和隐含成本
5. 会使用对偶单纯形法
6. 能进行敏感性分析
7. 会解参数规划

运输问题的理论及其求解

产地 A_i (产量 a_i) 销地 B_j (销量 b_j)　从 $A_i \to B_j$ 单位运费 C_{ij} . 数目 x_{ij}

$i \in \{1,2,\dots m\}$　　$j \in \{1,2,\dots,n\}$

有 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ （即 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ ）.

至多有 $m+n-1$ 个 l.i. 的资源约束条件.

$r(A) \le m+n-1$

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t. 供应： $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\cdots,m$

需求： $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\cdots,n$

$x_{ij} \ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$

运输问题系数矩阵:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{m}\text{ 行} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{n}\text{ 行} \end{array}$$

size $m+n \times mn$

$$A = [P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n}, \dots, P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mn}]$$

$$P_{ij} = (0, \dots, \underset{\text{第}i\text{位}}{1}, \ \dots, \underset{\text{第}m+j\text{位}}{1}, \dots, 0) = e_i + e_{m+j}$$

1. 去掉第m+n行
2. 行(1) – 行(m+1) – 行(m+2) – … – 行(m+n-1)

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m,n-1} & x_{mn} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{m}\text{ 行} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \boldsymbol{n\text{-}1}\text{行} \end{array}$$

由于第1, 2,⋯, n-1, n, 2n, ⋯, mn列均为单位向量

故A的秩为m+n−1，**意味着运输问题有m+n-1个基变量**

运输问题的对偶问题

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

原问题：

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i=1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j=1,2,\dots,n \\ x_{ij} \ge 0 & i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$\max\ \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

对偶问题：

$$s.t.\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij} & i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n \\ u_i \in R & i=1,2,\dots,m \\ v_j \in R & j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

原问题和对偶问题之间的关系

目标函数： $\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

st. 供应： $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ ⇨ **对偶变量 u_i**

$i=1,2,\cdots,m$

需求： $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ ⇨ **对偶变量 v_j**

$j=1,2,\cdots,n$

$x_{ij} \ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n$

表上作业法

	B_1	B_2		B_n	产量
A1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A2	c_{11} x_{21}	c_{12} x_{22}	…	c_{12} x_{2n}	a_2
…	…	…	…		…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

调运表中，有数字格对应解中基变量取值；空格对应非基变量.

Step 1. 初始方案的制定.

(1) 最小元素法（就近供应).

依次找当前最小运价

一般地，基变量个数 = 有数字格数 = $m+n-1$ （填一个数，划一行或一列，除最后一个数.)

当有最小元，产量 = 销量时；划去格的任一空格中补 0.（退化解）

(2) 西北角法.

从左上角开始，填允许的最大数.

(3)* 伏格尔法 (Vogel)

计算每行，每列 max − min. 从差最大的行/列中找出最小运价， repeat.

Step 2. 最优性检验与方案的调整

(1) 位势法（u_i 和 v_j 分别是第 i 行和第 j 列的位势).

原问题变量 x_{ij} 检验数：$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j)$，$i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$.　　向量式：$\sigma = C - YA$.　$\sigma_{ij} = c_{ij} - YP_{ij}$.

⇓ 对偶问题的变量，$Y = (u_1,u_2,\dots,u_m,v_1,v_2,\dots,v_n)$

(基变量的 $\sigma=0$. 检验数均 ≥ 0. 最优)

求 u_i 和 v_j. ⇒ 由基变量 $\sigma=0$ 令 $u_i+v_j=c_{ij}$　有 $m+n-1$ 个等式，求 $m+n$ 个变量，一般先令 $v_1=1$.（相关联)

求 σ_{ij}，取 $\min \sigma_{ij}$ 对应 x_{ij} 为入基变量

(2) 闭回路法

位势法确定入基变量.

从入基变量出发，旋转 90° 找基变量，构造唯一闭回路.

定义调整数目 θ = 偶数格上最小数目. 偶数格 $-\theta$. 奇数格 $+\theta$.（入基变量编号为 1, …).

Step 3. 重复　计算新的检验数.

供需不平衡问题（转为平衡).

供 > 求. + 假想销地（新列，库存，在产地库存. $x_{i,n+1}=0$.)

供 < 求. + 假想产地（新行，$x_{m+1,j}=0$)

第四章 整数规划 (IP)

— 实际问题要求变量取值为整数.

分类 $\begin{cases} \text{纯整数规划} \\ \text{0-1 规划} \quad (\text{变量取值 } 0/1) \\ \text{混合型整数规划} \end{cases}$

$$(\text{IP})\ \max z = CX \qquad s.t \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

对应的松弛问题. (slack problem)

$$\max z = CX \qquad s.t \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对应关系有:

1) 可行域　　$IP \sqsubset SP$

2) 可行解与最优解 ① $\max Z_{IP} \leq \max Z_{SP}$.

② $\max Z_{IP} \geq Z_{SP}$. 整数可行解.

§ 分支定界法.

定界 (目标函数值) 1) $\max Z_{SP}$ 是初始上界.

2) 定义初始下界为 $-M$.

3) 若 SP 可找到整数解 $\bar{X}$. 则初始下界变为 $C\bar{X}$.

4) 上界↓　下界↑.　最终上界 = 下界.

分支 (问题. 加约束) 1) 下界 < 最优 ≤ 上界. 最优非整,分支.

2) 最优是整解 不分; 无解 不分. ; ≤ 下界 不分

$$\begin{tikzcd} & & SP_3 \\ SP_0 \arrow[r] \arrow[dr] & SP_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & SP_2 & SP_4. \end{tikzcd}$$

加约束: 若 $x_i = B_i$ 是分数.

$x_i \leq [B_i]$　　$x_i \geq [B_i]+1$

定上界: 所有叶子分支中最大的最优值.

定下界: 若分支最优值 > 下界, 且为整数最优解, 更新为下界. 关闭该支 (整解不分)

* 分支优先级选择: 1) $\max Z_j$ 先分支. (这样若 $Z_{SP_3}, Z_{SP_4} \geq Z_{SP_2}$. SP_2 可直接舍去.

2) $\max |Z_j - Z_{\text{整数}}|$ 先分支.

§ 割平面法.

思想: 求 IP 的 SP. + 约束条件. 得 L_1. (L_1 割去了 SP 的最优解, 保留了 SP 的整数解.)

使得 IP 的解均是 L_1 的解.

求 L_1.　　Repeat.

找割平面:

对整数规划问题 $IP: \max z = CX \quad s.t \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$　其松弛问题 L_0 $\max z = CX \quad s.t \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ ⟹ 线性规划 $L_1: \max z = CX \quad s.t \begin{cases} AX = b \\ \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases}$

L_0的最优解 $X_0 = (b_{10}, \cdots b_{i0}, \cdots b_{m0}, 0, \cdots 0)'$ 其中b_{i0}是分数

L_0的最优单纯形表:

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}				x_n	解
	0	…	0	…	0	λ_1				λ_n	
	1	…	0	…	0	a_{1m+1}				a_{1n}	
	:		:		:	:				:	
x_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{im+j}	…	a_{in}	b_{i0}
:	:		:		:	:		:		:	:
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	b_{m0}

生成行

$[a_{im+j}] + f_{im+j}$, $0 \leq f_{im+j} < 1$, $j = 1, 2, \cdots n-m$

$[b_{i0}] + f_{i0}$, $0 < f_{i0} < 1$

非基变量

对应于生成行i的割平面: $f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \leq 0$, 即$\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0}$ $\rightarrow -\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} + S = -f_{i0}$ ($-f_{i0} \leq 0$. 对偶单纯形法).

8. 指派问题与匈牙利算法

n个员工分配作 n 项工作，i 个员工做 j 项工作的成本为c_{ij}，要求一个人只做一项工作，一项工作只能由一个人做，$i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,n$。求最佳分配方案

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$C_{ij} \geq 0$.

$$x_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{第}i\text{员工分配做第}j\text{项工作} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

目标函数 $\text{Min } z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

（最小化指派问题）

（每行、每列都只能有一个1）.

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots,n \\ x_{ij}=0\text{或}1, & i=1,2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n \end{cases}$$

性质：**定理：**对于指派问题，成本矩阵的任一行(或列)减去(或加上)一个相同的数得到的新指派问题与原问题同解

匈牙利法：对指派矩阵C的行和列减去某个常数，将C化成有n个位于不同行不同列的零元素，令这些零元素对应的变量取1，其余变量取零，既得指派问题的最优解

第一步：变换指派问题的费用矩阵，使其在各行各列都出现0元素：

方法：首先每行元素减去该行的最小元素，然后每列减去该列的最小元素

第二步：进行试指派（画〇）

方法：从含0元素最少的行或列开始，圈出一个0元素，用〇表示，然后划去该〇所在的行和列中的其余0元素，用×表示，依次类推。

若矩阵中的〇的个数等于n，则得最优解

若矩阵中的〇的个数＜n，则进行第三步

"最优解"对应画〇的位置.

第三步：做能复盖所有0元素的最小直线集合：

1) 对没有〇的行打√号
2) 对打√号的行上所有0元素的列打√号
3) 再对打√号的列上所有〇的行打√号
4) 重复以上步骤直到得不出新的打√号为止
5) 对没有打√号的行画横线，所有打√号的列画纵线，所得到的直线既是复盖所有0元素的最小直线集合

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。 ⟶ 交叉部分不变

变形：

1. 最大化指派. （在矩阵C中找 $\max C_{ij}$. $C_{ij}' = \max C_{ij} - C_{ij}$. 转化为最小化指派问题
2. 人数 ≠ 任务数. + 虚拟任务/人. （成本 0）.
3. 人做多件事. 添相同行.
4. 某事不能由某人做. 费用系数改为大数 M.
   某人必须做事. （不能做虚拟事）虚拟任务费用系数改为大数 M.

特殊：费用系数矩阵. 每行每列有多个0. ⟹ 可能的多重最优解. （令一其中一个为独立零）.

§ 0-1规划

常见约束条件

决策变量x_i——是否做第i件事 $i=1,2,\cdots,n$

$$x_i=\begin{cases}1 & 做第i件事\\ 0 & 不做第i件事\end{cases}$$

n件事中必须做k件并只做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n=k$

n件事中最多做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\le k$

n件事中至少做k件事 $\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\ge k$

做第i件事的充要条件是做第j件事 $\Leftrightarrow x_i=x_j$

做第i件事的充要条件是不做第j件事 $\Leftrightarrow x_i=1-x_j$

只在做了第i件事前提下才考虑是否做第j件事 $\Leftrightarrow x_j\le x_i$

常规解法：隐枚举法.（变量数目不多时）

1) 找一组可行解. 根据可行解的目标函数值增加一个约束条件.（过滤条件） 根据Z值. 小于Z的直接不考虑

2) 将所有解代入约束条件，判断是否满足约束条件. 记录Z值.

3) 更新过滤条件.

（可先算上限. 按递减排. 尝试. 不可行则缩小上限.）

第五章 (多)目标规划

问题：1. 目标具有多重准则

2. 约束条件并不符合严格的刚性条件，具有一定弹性.(最好…)

处理弹性约束：

实际量 + d^- − d^+ = 目标值

负偏差变量 　 正偏差变量

最好等于： $\min\{d^- + d^+\}$

最好不大于：$\min\{d^+\}$

最好不小于：$\min\{d^-\}$

例：处理顾客访问策略

	老顾客	新顾客	正常可用访问时间
访问每一顾客所需时间	2	3	640 小时
平均可获销售利润	250	125	

目标：

- 访问时间最好不超过680小时； $\min\{d_1^+\}$
- 访问时间最好不少于600小时； $\min\{d_2^-\}$
- 销售收入尽量不少于70000； $\min\{d_3^-\}$
- 访问老顾客数最好不少于200个； $\min\{d_4^-\}$
- 访问新顾客数最好不少于120个。 $\min\{d_5^-\}$

$$Min \quad Z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 d_3^- + P_4 d_4^- + P_5 d_5^-$$

$$St \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 680 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 600 \\ 250x_1 + 125x_2 + d_3^- - d_3^+ = 70{,}000 \\ x_1 + d_4^- - d_4^+ = 200 \\ x_2 + d_5^- - d_5^+ = 120 \\ \text{所有变量} \geq 0 \end{cases}$$

优先 $\begin{cases} \text{绝对} & \frac{P_1}{P_2} = +\infty \\ \text{相对} & \frac{P_1}{P_2} = a > 1. \end{cases}$

$P_1, P_2, \ldots$ 优先因子. 　 $+d_i^- - d_i^+$ 双偏差规划(有时也用单偏差).

一般式：

目标规划的一般数学模型可表为

$$\min z = \sum_{k=1}^{K} P_k \sum_{l=1}^{L} (w_{kl}^- d_l^- + w_{kl}^+ d_l^+) \tag{5.2a}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & (i = 1, \cdots, m) & (5.2b) \text{ 刚性约束} \\ \sum_{j=1}^{n} c_{lj} x_j + d_l^- - d_l^+ = g_l & (l = 1, \cdots, L) & (5.2c) \text{ 弹性约束.} \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) & (5.2d) \\ d_l^-, d_l^+ \geqslant 0 & (l = 1, \cdots, L) & (5.2e) \end{cases}$$

式中：

P_k 为第 k 级优先因子，$k = 1, \cdots, K$；

w_{kl}^-，w_{kl}^+ 为分别赋予第 l 个目标约束的正负偏差变量的权系数；

g_l 为第 l 个目标的预期目标值，$l = 1, \cdots, L$.

(5.2c)为目标约束，(5.2b)为系统约束.

目标规划单纯形法步骤 (不考)

1. 给出单纯形表(有天然可行基)
2. 求各级目标的检验数
3. 最优解的判定
4. 确定入基变量和出基变量
5. 矩阵变换

与单纯形法对比：

1. 检验数计算方式不同
2. 最优解的判定方式不同
3. 确定入基变量方式不同

1. 检验数计算：分级 $\sigma(x_k \mid P_i)$，$i=1,2,3..$

计算第 i 级检验数时，$P_i=1$，其余 $P_j=0$.

2、判定最优解：当所有变量检验数均满足上零规则

满足上零规则的情况

检验数	情形1	情形2	情形3
P1	0	0	正数
P2	正数	0	任意实数
P3	任意实数	0	任意实数

3. 入基变量选取 (1) 不满足上零

(2) 首次出现负检验数，且优先级大

(3) 首次出现负检验数，且优先级相同，检验数小的优先

c_j			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
P_1	d_1^-	10	[1]	0	1	-1	0	0	0	0
0	d_2^-	40	2	1	0	0	1	-1	0	0
P_2	d_3^-	100	3	2	0	0	0	0	1	-1
c_j-z		P_1	-1	0	0	1	0	0	0	0
		P_2	-3	-2	0	0	0	0	0	1

c_j			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	10	1	0	1	-1				
0	d_2^-	20		1	-2	[2]	1	-1		
P_2	d_3^-	70		2	-3	3			1	-1
c_j-z		P_1			1			1		
		P_2		-2	3	-3				1

c_j			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	20	1	1/2			1/2	-1/2		
0	d_1^+	10	0	[1/2]	-1	1	1/2	-1/2		
P_2	d_3^-	40	0	1/2			-3/2	3/2	1	-1
c_j-z		P_1			1			1		
		P_2		-1/2			3/2	-3/2		1

c_j			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	10	1		1	-1				
0	x_2	20		1	-2	2	1	-1		
P_2	d_3^-	30			1	-1	-2	2	1	-1
c_j-z		P_1			1			1		
		P_2			-1	1	2	-2		1

层次算法（★计算机使用的目标规划算法，调用线性规划算法）（不考）

$$\min z = P_1(d_1^-) + P_2(d_2^- + d_2^+) + 3P_3(d_3^- + d_3^+) + P_3 d_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i=1,2,3,4) \end{cases}$$

LP1 $\min z_1 = d_1^-$

LP2 $\min z_2 = d_2^- + d_2^+$ + 约束条件 $d_1^- = 0$

LP3 $\min z_2 = 3(d_3^- + d_3^+) + d_4^+$ + 约束条件 $d_1^- = 0$, $d_2^- + d_2^+ = 0$

第六章 图论与网络

§. 图论

图 ------由若干个点和连接这些点的某些连线所组成的图形

G——一个图

v_i——图中的点，称为顶点。(节点)

e_i——图中的连线，称为边。$e_k=(v_i, v_j)$ $=(v_3, v_5)$

代表具体事物

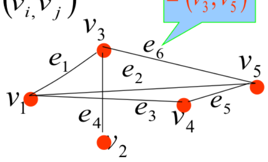
代表事物之间的联系

记V={v_i}，E= {e_i}，

G=（V，E）

m(G)=|E|——G的边数，简记为m

n(G)= |V|——G的顶点数，简记为n



G

m=6, n=5

分类

图
- 有向图 ——边e=（v_i, v_j）有方向
  v_i为始点，v_j为终点
  此时（v_i, v_j）≠（v_j,v_i）
- 无向图 ——边e=（v_i, v_j）无方向
  此时（v_i, v_j）=（v_j, v_i）

名词解释：

1、端点和关联边：

若$e_k=(v_i, v_j)\in E$,则称点v_i、v_j是边e_k的端点，边e_k是点v_i和v_j的关联边

2、相邻点和相邻边：

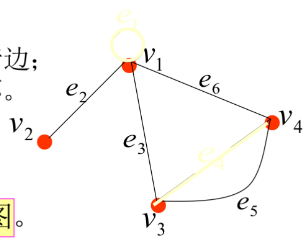
一条边的两个端点称为相邻点，简称邻点，
端点落在同一个顶点的边称为相邻边，简称邻边

3、多重边与环：

具有相同端点的边称为多重边或平行边；
两个端点落在同一个顶点的边称为环。

4、多重图和简单图：

含有多重边的图称为多重图；
无环也无多重边的图称为简单图。



5、次：以点v_i为端点的边的条数称为点v_i的次，$d(v_i)$ (度). degree.

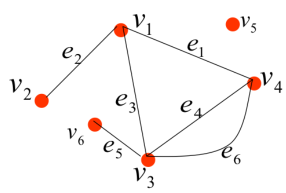
6、悬挂点和悬挂边：

次为1的点称为悬挂点，与悬挂点相联的边称为悬挂边。

7、孤立点：次为0的点称为孤立点

8、奇点与偶点：

次为奇数的点称为奇点，次为偶数的点称为偶点



$d(v_1)=3, d(v_2)=1,\ d(v_3)=4$

$d(v_4)=3,\ d(v_5)=0,\ \ d(v_6)=1,$

v_2、v_6为悬挂点，e_2、e_5为悬挂边，

v_5为孤立点，

v_1、v_2、v_4、v_6为奇点，v_5、v_3为偶点

总有 $\sum d(v_i)=2m$

次的性质：

1) 总有 $\sum d(v_i)=2m$ 成立

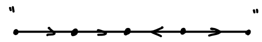
2). 在任何图 $G=(V,E)$ 中，奇点的个数为偶数.

3)* 在图 $G=(V,E)$. 当且仅当所有点均为偶点时. 可一笔画回原点
当且仅当奇点数 ≤ 2. 可一笔画.

链：对无向图$G=(V,E)$ （路径）

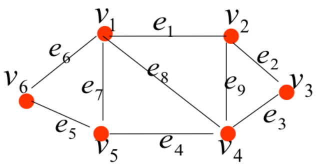
1、链的定义：在图$G=(V,E)$中，一个点与边的交错序列
$\{v_{i0},e_{i1},v_{i1},e_{i2},\cdots v_{ik-2},e_{ik-1},v_{ik-1},e_{ik},v_{ik}\}$，
且$e_{it}=(v_{it-1},v_{it})(t=1,2,\cdots k)$，则称这个点边序列为连接$v_{i0}$与$v_{ik}$的一条链，简记为$\mu=\{v_{i0},v_{i1},\cdots,\ v_{ik-2},v_{ik-1},v_{ik}\}$

* 对有向图. 定义不变.



也是连通.(但不是路径).

- 简单链：在链μ中，所含的边均不相同
- 初等链：在链μ中，所含的顶点、边均不相同



$\{v_6,e_5,v_5,e_7,v_1\}$ 初等链

$\{v_6,e_7,v_1,e_8,v_4\}$ 不是链

$\{v_5,e_4,v_4,e_9,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_8,v_1\}$，简单链；连接$v_5$与$v_1$的一条链

链$\begin{cases}\text{闭链：链}\mu\text{中的起点与终点重合} & \text{（圈或回路）}\\ \text{开链：链}\mu\text{中的起点与终点不同} & \text{（路）}\end{cases}$

简单圈 在圈μ中，所含的边均不相同

初等圈 在圈μ中，除起点和终点重合外，没有相同的顶点和相同的边

连通图：图G中任意两点之间至少有一条链相连.

有向图：强连通：任何两点都有路径；弱连通：任何两点都有链相连.

赋权图（网络）

对图G=（V，E），

若对每一条边e，都有一个实数w(e)与之对应，（e的权.）

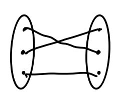
则称图G=（V，E）为赋权图，或网络

完全图和偶图

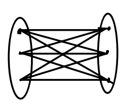
注意有向图的完全图需有 ⇄

一个简单图中若任意两点之间均有边相连，那么这样的图称为**完全图**

如果图的顶点可以分成两个互不相交的非空集合V_1和V_2，使在同一集合中的任意两个顶点都不相邻，那么称这样的图为**偶图**。



如果偶图的顶点集合V_1和V_2的每一对不同顶点都有一条边相连，那么称这样的图为**完全偶图**。



子图和部分图

对于图$G_1(V_1,E_1)$和$G_2(V_2,E_2)$，如果有$V_1\subseteq V_2$，$E_1\subseteq E_2$

称图G_1是图G_2的**子图**。

对于图$G_1(V_1,E_1)$和$G_2(V_2,E_2)$，如果有$V_1=V_2$，$E_1\subseteq E_2$

称图G_1是图G_2的一个**部分图**。

§.树和最小支撑树.

定义：无圈的连通图.

性质：

性质1　如果树T的点数不小于2，那么至少有两个悬挂点

性质2　如果一个图G具有n个顶点，那么图G是一个树的充分必要条件是图G不含圈且恰有n-1条边。

性质3　如果一个图G具有n个顶点，那么图G是一个树的充分必要条件是图G是连通图且恰有n-1条边

性质4　图G是一个树的充分必要条件是任意两个顶点恰有一条链

设*T*是一个点数大于3的树，则下列六个定义是等价的： 为n

（1）*T*连通且无回路；

（2）*T*有n-1条边且无回路；

（3）*T*连通且有n-1条边；

（4）*T*连通且每条边都是割边；

（5）*T*的任两点间都有唯一的路相连；

（6）*T*无回路，但在任一对不相邻的点间加连一条边，则构成唯一的一个回路。

图&树　**若一个图 G =（V , E）的支撑子图 T=（V , E′） 构成树，则称 T 为G的支撑树，又称生成树、部分树。**

最小支撑树：对图G=(V,E)，权最小的支撑树

计算最小支撑树：

算法1(避圈法，Kruskal法) 加边

将边按权从小到大依次添入图中，若出现圈，则删去其中最大边，直至填满n-1条边为止(n为顶点数)。

算法2(破圈法) 去边

在图中找圈，并删除其中最大边.如此进行下去, 直至图中没有圈止.

算法3(Prim法) 去点 一点一点加入最小支撑树，加入的原则是该点与已加入点中的某一点形成的边是连接已加入点和未加入点的所有边中权重最小的。

§.最短路问题(组合优化).

课程：无向/有向，正权，单源点最短路问题

Dijkstra算法 (一点到其它各点之间最短距离算法)

(单源点)

1．初始化

$(1)T(s)=0, \lambda(s)=s;$　$(2)T(x)=+\infty, \lambda(x)=M;$　$(3)S=\phi$

2．选取不属于集合 S(也就是还没有 P 标号)但具有最小 T 标号的点 y，同时令 $P(y)=T(y)$，$S=S\cup\{y\}$

3．对所有未进入集合 S 的、点 y 的邻点 x 进行 T 标号更新过程。即如果 $T(y)+w(y,x)<T(x)$，那么 $T(x)=T(y)+w(y,x)$，同时令 $\lambda(x)=y$。

4．如果所有点都进入集合 S，那么算法停止，否则转入步骤 2。

所有点间最短路问题Floyd—**Warshall**算法

1．将图中的顶点编号为 1，2，…，N，确定初始矩阵 D^0，如果点 i 和点 j 相邻则中 (i,j) 元素的值为 $d_{ij}=w(i,j)$，否则令 $d_{ij}=+\infty$，且令 $d_{ii}=0$。

2．对 $m=1,2,\cdots,N$，依次由 D^{m-1} 的元素确定 D^m，利用递归公式。

$$d_{ij}^m=\min\{d_{im}^{m-1}+d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\}$$

每确定一个元素时，就记下它所走的路。在算法终止时，矩阵 D^N 的 (i,j) 元素就表示从点 i 到点 j 的最短路径的长度。

§.最大流问题

出发点 $\xrightarrow[\text{max 流量}]{}$ 出发点

定义1 给定一个有向图D(V, A), 在V中指定一个点作为**发点**，记为V_s；指定另外一个点作为**收点**，记为V_t；其余的点称为中间点。

定义2 对于有向图D(V, A)中的每一个$\boxed{\text{弧}}$$(V_i, V_j)$, 对应有一个值$c(V_i, V_j)$, 称为弧的容量。对于赋权的有向图D(V, A, C) ,特称为网络, 记为D(V, A, C)。

定义3 网络上的**流**，是指定义在弧集合A上的一个函数$f = \{f(V_i, V_j)\}$。并称为$f(V_i, V_j)$为弧(V_i, V_j)上的**流量**。

弧流：弧上的流、方向与弧的方向相同. $f(V_i, V_j)$为弧(V_i, V_j)
(流量不能超过弧上的容量)

点流：对于点来说，有入弧也有出弧，入弧的流为负，出弧的流为正，
点的流量为所有邻边流量之和.

网络流：由所有弧的流组成，指定义在弧集合A上的一个函数
$f=\{f(V_i, V_j)\}$；流量为发点流量 $v(f)$

定义4 满足下述条件的流成为**可行流**

a. 容量限制条件。对任意一弧(V_i, V_j), 均有

$$0 \le f(V_i, V_j) \le c(V_i, V_j)$$

b. 平衡条件

1. 对于中间点：流入量等于流出量，流量为0；
2. 对于发点: 只有流出量, 流量为可行流的流量为$v(f)$
3. 对于收点: 只有流入量, 流量为可行流的流量为$-v(f)$

定义5 容量最大的可行流成为**最大流**.

定义 6 如果对于网络中弧(v_i, v_j)满足$f(v_i, v_j) = c(v_i, v_j)$，则称为**饱和弧**；满足$f(v_i, v_j) = 0$，则称为**零弧**；满足$f(v_i, v_j) > 0$，则称为**非零弧**.

定义 7 如果μ是网络中联结发点v_s和收点v_t的一条链。如果定义链的方向为从v_s到v_t，那么定义与链方向相同的为**前向弧**，否则为**后向弧**。

前向弧的全体记为μ^+，后向弧的全体记为μ^-

定义 8 设f是一个可行流，μ是网络中联结发点v_s和收点v_t的一条链，若μ满足下列条件，称之为一条**增广链**:

(1) 对于前向弧(v_i, v_j)，总满足$0 \le f(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$ (前向弧均不饱和)

(2) 对于后向弧(v_i, v_j)，总满足$0 < f(v_i, v_j) \le c(v_i, v_j)$ (后向弧非零).

☆对增广链进行流量调整，可以使得流量变大.

点集划分

对于 $S, T \subset V$，$S \cap T = \phi$，我们把始点在 S，终点在 T 中的所有弧的集合记为 (S, T)

定义 9 对于网络 $D(V, A, C)$，如果 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V}_1$，使得 始 $v_s \in V_1$、终 $v_t \in \overline{V}_1$，那么把 $(V_1, \overline{V}_1)$ 称为分离 v_s 和 v_t 的截集。

定义 10 对于截集 $(V_1, \overline{V}_1)$，把截集 $(V_1, \overline{V}_1)$ 中所有容量之和称为截集 $(V_1, \overline{V}_1)$ 的容量，简称为截量。

性质 1 连接两个互补点集的所有边的流量和恰为网络的流量

性质 2 任意可行流 f 的流量 $v(f)$ 均不会超过任一截集的容量，即

$$v(f) \le c(V_1, \overline{V}_1)$$

性质 3 若对于一个可行流 f^*，网络中有一个截集 $(V_1^*, \overline{V}_1^*)$，使得 $v(f^*) = c(V_1^*, \overline{V}_1^*)$，那么 f^* 必是最大流，$(V_1^*, \overline{V}_1^*)$ 是所有截集中容量最小的一个，即最小截集。

关于截集的定理

定理 1 最大流的流量等于最小截集的容量。

定理 2 可行流 f^* 是最大流的充分必要条件是不存在关于可行流 f^* 的增广链。

Ford-Fulkerson算法

可行流 $\xrightarrow{\text{增广链}}$ 新可行流.

Step 1. 找可行流.

Step 2. 找增广链.

(1) 初始化.

标号过程开始时，先给 v_s 标上 $(0, M)$，使得 v_s 成为第一个具有标号的点，但还没有被检查。第一个标号代表由那点得到，第二个标号，表示可调整的数量。

(2) 检查标号点. (优先检查上级标号大的).

a. 若前向弧 (v_i, v_j) 满足 $f(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$，且点 v_j 没有被检查，则给点 v_j 标号 $(v_i, \delta(v_j))$，其中

$$\delta(v_j) = \min\{\delta(v_i), c(v_i, v_j) - f(v_i, v_j)\}$$

同时点 v_j 成为具有标号但没有被检查的点

b. 若后向弧 (v_i, v_j) 满足 $f(v_j, v_i) > 0$，且点 v_j 没有被检查，则给点 v_j 标号 $(-v_i, \delta(v_j))$，其中

$$\delta(v_j) = \min\{\delta(v_i), f(v_j, v_i)\}$$

同时点 v_j 成为具有标号但没有被检查的点

2.3 点 v_i 成为具有标号且被检查的点。重复步骤 2.2，若收点 v_t 被标上号，表明就得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链，转入第三步；否则如果所有标号的点都已被检查，但标号过程不能再进行，则算法结束，这时的可行流就是最大流。

Step3. 调整

3.1 利用反向追踪法找到增广链

3.2 调整的数量为 $\theta = \delta(v_t)$，对增广链上的前向弧的流量增加 θ，后向弧上的流量减少 θ。非增广链上的弧流量不变。

3.3 转到第二步.

△ 同时获得了最小截集.

在算法结束后 最后一次标号的点，点将分为两部分，第一部分为标号点的集合 V_1，第二部分为没有标号点的集合 $\overline{V}_1$，那么截集 $(V_1, \overline{V}_1)$ 就是最小截集。

第七章 计划评审方法(PERT)与关键路径法(CPM)

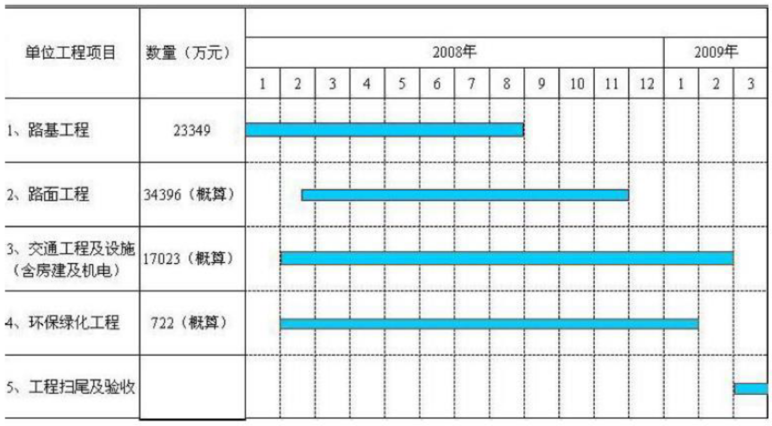
甘特图 (工程

也称横道图，或条状图(Bar chart)。是在1917年由亨利·甘特开发的，其内在思想简单，基本是一条线条图，横轴表示时间，纵轴表示活动(项目)，线条表示在整个期间上计划和实际的活动完成情况。

它**直观地**表明任务计划在什么时候进行，及实际进展与计划要求的对比。

管理者由此极为便利地弄清一项任务还剩下哪些作业要做，并可评估作业是提前还是滞后，亦或正常进行，是一种理想的控制工具。

但不同活动之间的**逻辑关系**，甘特图很难反映清楚。



概念

作业 或称为工序、活动　指任何消耗时间或资源的活动，如新产品设计中的初步设计、技术设计、工装制造等。根据需要，工序可以划分得粗一些，也可以划分得细一些。

虚工序　用来表达相邻工序之间的衔接关系，不需要时间和资源。

紧前工序、紧后工序、前道工序、后续工序

在下图中，A是B的紧前工序，C是B的紧后工序，C、D是A的后续工序但不是A的紧后工序；A、B是D的前道工序但不是 D的紧前工序。

路线　PERT 网络图中由最初事件到最终事件的各项作业连贯组成的一条路。

路线长度　完成该路上各项作业持续时间的长度和

关键路线　由最初事件到最终事件的各项作业累计时间最长的路。

PERT 网络图构件

基本原则：

原则1：作业 (i, j)用唯一箭线表示，起点事件（箭尾事件）编号小于终点事件（箭头事件）的编号。

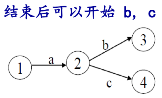
原则2：应有唯一的最初事件和最终事件

原则3：两个事件之间只能用一条箭线表示一项作业，具有相同开始和结束的不同作业，需引进虚事件和虚作业。

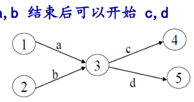
原则4：不允许出现回路

原则5：紧前作业或紧后作业有多条时的构建原则

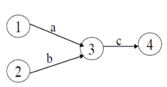
情形1：作业 a 结束后可以开始 b, c



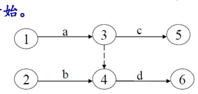
情形3：作业 a,b 结束后可以开始 c,d



情形2：作业 c 在 a, b 结束后才可以开始



情形4：作业 c 在 a 结束后即可开始， d 在 a,b 结束后才 可以开始。



原则6：事件按升序从左到右、从上到下，不能交叉

绘制网络图

(1)**作业表达**. 从第一道作业开始，以箭线代表作业，结点表示前面的作业结束和后面作业的开始，顺序为从左到右依次画下去，一直到最后一道作业为止。同时在每个箭线上（或下）方标注作业时间.

(2)**结点标号**. 按照标号规则从左到右、从上到下给结点标号。规定：箭头标号>箭尾标号

(要是有↑. 调横向↗)

(3)**网络调整**. 调整结点的“摆放”位置，使网络图美观。

网络图的计算.

思路：

- 找出关键线路
- 找出非关键线路的时差
- 网络图的优化。本着“向关键线路要时间，向非关键线路要资源”的原则，作出最优（满意）的作业计划。

参数和符号

参数	名称	符号	英文单词
工期	计算工期	T_c	Computer Time
	要求工期	T_r	Require Time
	计划工期	T_p	Plan Time
作业的时间参数	持续时间	D_{i-j}	Day
	最早开始时间	ES_{i-j}	Earliest Starting Time
	最早完成时间	EF_{i-j}	Earliest Finishing Time
	最迟完成时间	LF_{i-j}	Latest Finishing Time
	最迟开始时间	LS_{i-j}	Latest Starting Time
	总时差	TF_{i-j}	Total Float Time
	自由时差	FF_{i-j}	Free Float Time
结点的时间参数	最早时间	ET_i	Earliest Time
	最迟时间	LT_i	Latest Time

1) 时间计算：

1. **作业最早开始时间** $ES_{i-j} = \max_k \{EF_{k-i}\}$

   是它的各紧前作业最早结束时间中的最大一个值

2. **作业最早结束时间** $EF_{i-j} = ES_{i-j} + D_{i-j}$

   是它的最早开始时间加上该项作业的计划时间的值

3. **作业最迟结束时间** $LF_{i-j} = \min_k \{LS_{j-k}\}$

   是它的各项紧后作业最迟开始时间中的最小一个，各项作业的紧后作业的开始时间应以不延误整个工期为原则。

4. **作业最迟开始时间** $LS_{i-j} = LF_{i-j} - D_{i-j}$

   是它的最迟结束时间减去该项作业的时间

5. 作业的总时差或松弛时间

   $$\begin{aligned} S(i,j) &= T_{LS}(i,j) - T_{ES}(i,j) \\ &= T_{LF}(i,j) - T_{EF}(i,j) \\ &= T_{LF}(i,j) - T_{ES}(i,j) - t(i,j) \end{aligned}$$

   作业最迟开始(结束)时间与最早开始(结束)时间之差

6. 作业的单时差或自由时间

   $$F(i,j) = \min_{\varphi} \{T_{ES}(j,\varphi)\} - T_{EF}(i,j)$$

   在不影响紧后工序的最早开始时间的条件下，作业的开始时间可以推迟的时间。

7. 事件的最早时间

   $$ST_i = \min_j \{ES_{i-j}\}$$

   该结点前面作业全部完成后，以该结点为开始结点的各项作业的最早开始时刻。

8. 事件的最迟时间

   $$LT_i = \max_k \{LS_{k-i}\}$$

   在不影响计划工期的情况下，以该结点为完成结点的各项作业的最迟完成时刻

9. 项目的完成时间

   项目最后的一道工序完成的时间。

10. 关键工序

    总时差等于0的工序。最早开始时间和最迟开始时间相同没有推迟时间。

11. 关键路线

    网络图中由关键工序组成的从发点到收点的路线。

2) 优化方法（从关键路线 → 次关键路线）向关键路线要时间.

1、关键路线的持续时间决定了完成全盘计划所必需的**最少时间**；

2、关键路线上的各项作业对计划进度起决定作用，必须投入充分的人、财、物保证各作业按时完工。若想提前完工，**必须缩短关键路线上的有关作业的时间。**

3、**次关键路线可能成为关键路线**，也要注意。

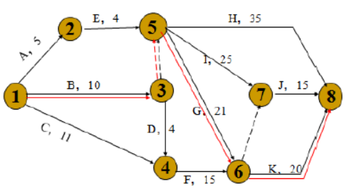
3. 优化步骤

缩短工期的步骤

1. 列出所有可缩短工期的作业
2. 计算缩短单位工时所增加的费用
3. 找出关键路线上缩短单位时间增加费用最小的作业
4. 将该项作业缩短时间的值控制。取下列三者的最小值
   (1) 工期要求需缩短的时间
   (2) 该项作业最多可缩短的时间
   (3) 到出现新关键路线时可缩短的时间
5. 计算并累计增加的费用
6. 满足要求停止，否则转到步骤3.

例：

作业（i,j）	计划完成时间	最短完成时间	缩短1天增加的费用
B (1,3)	10	8	700
C (1,4)	11	8	400
E (2,5)	4	3	450
G (5,6)	21	16	600
H (5,8)	35	30	500
I (5,7)	25	22	300
J (7,8)	15	12	400
K (6,8)	20	16 4	500



1、要缩短工期，应缩短关键路线上的 B, G, K 作业时间

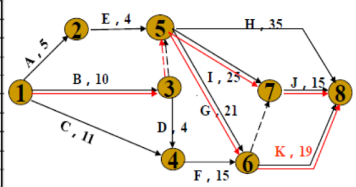
2、额外费用要最小，先考虑 K

3、缩短1天即会产生新的关键路线，故先缩短1天

Min[2,4,1]=1

计算路径 ⟹

作业（i,j）	计划完成时间	最短完成时间	缩短1天增加的费用
B (1,3)	10	8	700
C (1,4)	11	8	400
E (2,5)	4	3	450
G (5,6)	21	16	600
H (5,8)	35	30	500
I (5,7)	25	22	300
J (7,8)	15	12	400
K (6,8)	20	16	500



4、现有两条关键路线，应缩短关键路线上的 B, G, K ，或 B，I，J作业时间

5、额外费用要最小，考虑 B

6、缩短1天即会产生新的关键路线，故缩短1天。已满足要求

Min(1,2,1)=1

考点：PERT 网络图构造.

计算各个时间参数.

第八章 动态规划.

解决多阶段决策的问题

基本思路是逆序算法.

无后效性.

阶段：决策步数.

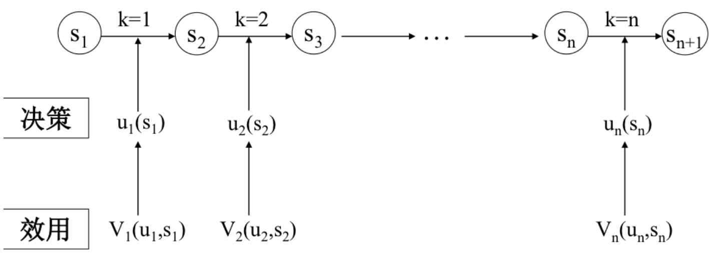
状态：描述一个阶段的始态和终态

决策：每一阶段作出的决策

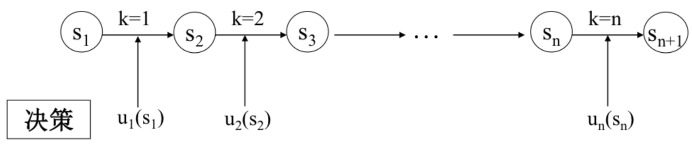
策略：一个解决方案

状态转移方程：上一阶段向下一阶段的演变

指标函数：全部和部分决策产生的后果或效用



状态转移方程 $s_{k+1}=\psi(s_k,u_k(s_k))=\psi(s_k,u_k)$



所有决策→策略

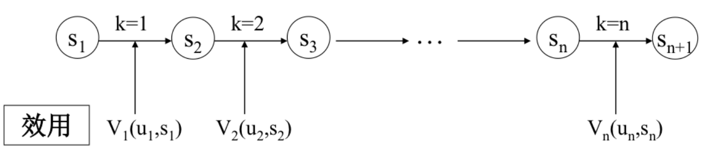
$$\Rightarrow P_{1,n+1}(s_1)=\{u_1(s_1),u_2(s_2),\ldots,u_n(s_n)\}$$

后半部分决策→后部k阶段子策略

$$\Rightarrow P_{k,n+1}(s_k)=\{u_k(s_k),\ldots,u_{n-1}(s_{n-1}),u_n(s_n)\}$$

前半部分决策→前部k阶段子策略

$$\Rightarrow P_{1,k+1}(s_1)=\{u_1(s_1),u_2(s_2),\ldots,u_k(s_k)\}$$



全部效用→总指标函数(和形式)

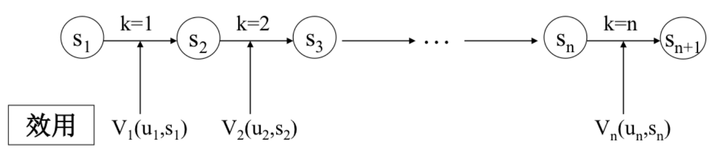
$$\Rightarrow V_{1,n+1}=V_1(u_1,s_1)+V_2(u_2,s_2)+\ldots+V_n(u_n,s_n)$$

后半部分效用→后部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{k,n+1}=V_k(u_k,s_k)+V_{k+1}(u_{k+1},s_{k+1})+\ldots+V_n(u_n,s_n)$$

前半部分效用→前部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{1,k+1}=V_1(u_1,s_1)+V_2(u_2,s_2)+\ldots+V_k(u_k,s_k)$$



全部效用→总指标函数(积形式)

$$\Rightarrow V_{1,n+1}=V_1(u_1,s_1)\cdot V_2(u_2,s_2)\cdot\ldots\cdot V_n(u_n,s_n)$$

后半部分效用→后部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{k,n+1}=V_k(u_k,s_k)\cdot V_{k+1}(u_{k+1},s_{k+1})\cdot\ldots\cdot V_n(u_n,s_n)$$

前半部分效用→前部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{1,k+1}=V_1(u_1,s_1)\cdot V_2(u_2,s_2)\cdot\ldots\cdot V_k(u_k,s_k)$$

动态规划目标

1. 有多个方案,且每个方案都有一个总指标函数值
2. 动态规划的目标是找到最优的方案,也就是找到使得总指标函数最优(最大或最小)方案,即

$$\max\{V_{1,n+1}\}=\max\{V_1(u_1,s_1)+V_2(u_2,s_2)+\ldots+V_n(u_n,s_n)\}$$

或

$$\min\{V_{1,n+1}\}=\min\{V_1(u_1,s_1)+V_2(u_2,s_2)+\ldots+V_n(u_n,s_n)\}$$

在总指标函数中，一般来说s_1是给定的，其它的变量都是不确定的，这样一来总指标函数有2n−1个变量，直接求极值非常困难。动态规划的最优化原理提供了另外一种求解思路。

动态规划的求解.

- 离散型　分段穷举法
- 连续型　解析方法.

- 顺序　已知最初态 s_1
- 逆序　已知最终态 s_{n+1}

求解范围：目标函数具有某种可分离性
相邻两个阶段的变量之间存在递推关系.

$$V(x_1,s_1,\dots,x_k,s_k)=V_1(x_1,s_1)+V_2(x_2,s_2)+\dots+V_k(x_k,s_k)\qquad s_{k+1}=\psi(s_k,x_k)$$

$$g(x_1,x_2,\dots,x_k)=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\dots+g_k(x_k)\qquad s_{k+1}=s_k+x_k$$

动态规划（连续性求解）.

Step 1. 划分与构造

1. 分阶段，$k=1,2,\dots,n$
2. 确定决策变量 u_k。u_k 表示第 k 阶段所做出的决策。
3. 构造状态变量 s_k。s_k 表示第 k 阶段的初始状态，s_{k+1} 表示第 k 阶段的最终状态。
4. 给出状态方程

$$s_{k+1}=T(s_k,u_k) \text{ 或 } s_k=T(s_{k+1},u_k)$$

Step 2. 构造指标函数.

- 总指标函数

$$V_{1,n+1}=V_1(s_1,u_1)+V_2(s_2,u_2)+\dots+V_n(s_n,u_n)$$

- 前部指标函数

$$\begin{aligned}V_{1,k+1}&=V_1(s_1,u_1)+\dots+V_{k-1}(s_{k-1},u_{k-1})+V_k(s_k,u_k)\\&=V_{1,k}(s_1)+V_k(s_k,u_k)\end{aligned}$$

- 后部指标函数

$$\begin{aligned}V_{k,n+1}&=V_k(s_k,u_k)+V_{k+1}(s_{k+1},u_{k+1})+\dots+V_n(s_n,u_n)\\&=V_k(s_k,u_k)+V_{k+1,n+1}(s_{k+1})\end{aligned}$$

Step 3. 求解.

- 用前部指标函数求解——正向法

$$\begin{aligned}opt\{V_{1,k+1}\}&=opt\{V_1(s_1,u_1)+V_2(s_2,u_2)+\dots+V_k(s_k,u_k)\}\\&=opt\{V_{1,k}+V_k(s_k,u_k)\}\\&=opt\{opt\{V_{1,k}\}+V_k(s_k,u_k)\}\end{aligned}$$

先求出 $opt\{V_{1,2}\}$，再求出 $opt\{V_{1,3}\}$，最后求 $opt\{V_{1,n+1}\}$

> 由于 $opt\{V_{1,t}\}$ 仅仅与状态 s_{t+1} 有关，因而也称 $opt\{V_{1,t}\}$ 为前部最优值函数，用 $f_t\{s_{t+1}\}$ 来表示，则上式可表示为
>
> $$\begin{cases}f_1(s_2)=opt\{V_1(u_k,s_1)\}\\f_k(s_{k+1})=opt\{f_{k-1}(s_k)+V_k(u_k,s_k)\}(k\ge 2)\end{cases}$$

- 用后部指标函数求解——反向法

$$\begin{aligned}opt\{V_{k,n+1}\}&=opt\{V_k(s_k,u_k)+\dots+V_{n-1}(s_{n-1},u_{n-1})+V_n(s_n,u_n)\}\\&=opt\{V_k(s_k,u_k)+V_{k+1,n+1}\}\\&=opt\{V_k(s_k,u_k)+opt\{V_{k+1,n+1}\}\}\end{aligned}$$

先求出 $opt\{V_{n,n+1}\}$，再求出 $opt\{V_{n-1,n+1}\}$，最后求 $opt\{V_{1,n+1}\}$

> 由于 $opt\{V_{t,n+1}\}$ 仅仅与状态 s_t 有关，因而也称 $opt\{V_{t,n+1}\}$ 为后部最优值函数，用 $f_t\{s_t\}$ 来表示，则上式可表示为
>
> $$\begin{cases}f_n(s_n)=opt\{V_n(u_n,s_n)\}\\f_k(s_k)=opt\{f_{k+1}(s_{k+1})+V_k(u_k,s_k)\}(1\le k\le n-1)\end{cases}$$

例：

$$\min\quad z=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=c\\x_i\ge 0, i=1,2,3\end{cases}$$

正向求解：

状态方程

$$\begin{cases}s_1=0\\s_2=s_1+x_1=x_1\\s_3=s_2+2x_2=x_1+2x_2\\s_4=s_3+3x_2=x_1+2x_2+3x_3=c\end{cases}$$

指标函数.

$$\begin{cases}V_{1,2}=x_1^2\\V_{1,3}=V_{1,2}+x_2^2=x_1^2+x_2^2\\V_{1,4}=V_{1,3}+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2\end{cases}$$

求解

$$\min\{V_{1,2}\}=\min\{x_1^2\}=s_2^2\qquad(s_2=s_1+x_1=x_1)$$

$$\begin{aligned}\min\{V_{1,3}\}&=\min\{V_{1,2}+x_2^2\}\\&=\min\{\min\{V_{1,2}\}+x_2^2\}\\&=\min\{s_2^2+x_2^2\}\qquad(s_3=s_2+2x_2)\\&=\min\{(s_3-2x_2)^2+x_2^2\}\\&=s_3^2/5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min\{V_{1,4}\}&=\min\{V_{1,3}+x_3^2\}\\&=\min\{\min\{V_{1,3}\}+x_3^2\}\\&=\min\{s_3^2/5+x_3^2\}\qquad(s_4=s_3+3x_3)\\&=\min\{(s_4-3x_3)^2/5+x_3^2\}\\&=s_4^2/14=c^2/14\qquad(s_4=c)\end{aligned}$$

从而 $x_1=c/14, x_2=c/7, x_3=3c/14$（由 $\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{c^2}{14}\\x_1+2x_2+3x_3=c\end{cases}$ 递推）.

9题　7计算 2建模　　易 84-88 分.

第1、2章作业.

第1章.

一般型 → 标准型

线性规划　图解；大M；两阶段（选一）.

线性规划　两个单纯形法之间.　第一个和第k个.

公式
$$\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ Z = C_B B^{-1} b \\ \sigma = C - C_B B^{-1} A \\ \sigma_j = C - C_B B^{-1} P_j = C - YP_j \end{cases}$$

第2章.

给出对偶模型

对偶单纯形法

灵敏度分析（3+5小）

第3章

表上作业法.（初始基可行解
计算检验数
确定入、出基变量.

第4章

分支定界法、思路，不求解

指派问题　匈牙利法（大题）

第5章

无计算

第6章

支撑树　最大流、最短路（计算题）

第7章

画图．　PERT．综合．（例7-3）

第8章

简单连续动态规划

建模：线性规划

0/1 规划