第十章　机械波

常见的波:

(1) 机械波 (机械振动的传播)

(2) 电磁波（交变电场、磁场的传播）

在微观领域中还有物质波。

波的分类:

按波面形状

- 平面波（plane wave ）
- 球面波（spherical wave ）
- 柱面波（ cylindrical wave ）

按复杂程度

- 简谐波（simple harmonic wave ）
- 复波（ compound wave ）

按持续时间
- 连续波（continued wave ）
- 脉冲波（pulsating wave ）

按质元之间联系的力是否是弹性力
- 弹性波（elastic wave ）
- 非弹性波（non-elastic wave ）

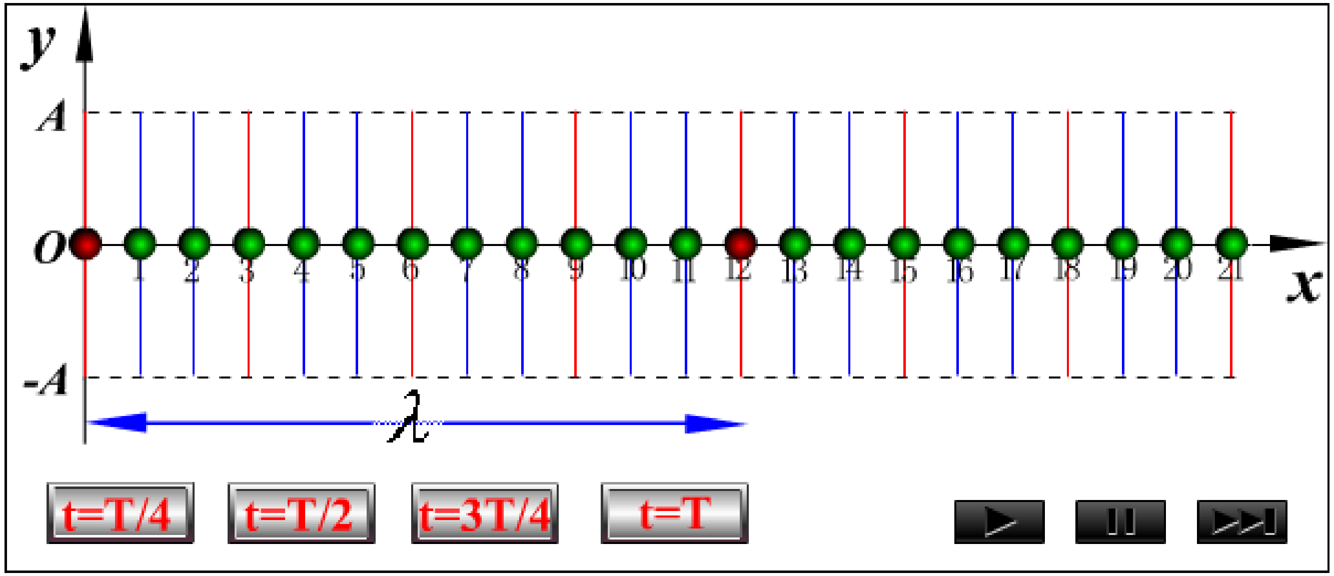
按波形是否传播
- 行波（ travelling wave ）
- 驻波（stading wave ）   …………

10-1 机械波的产生和描述

形成条件： ❶ 波源 ❷ 弹性媒质

形成机制： 质元间的弹力作用

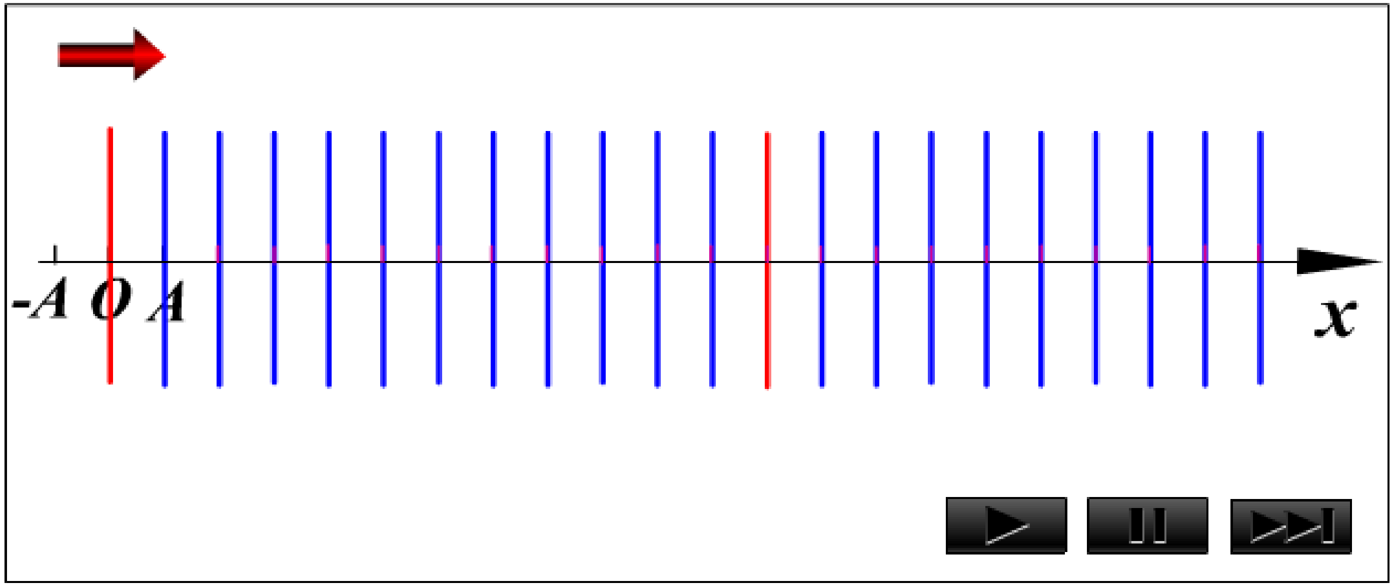
“上游”质元的振动状态将在较晚的时刻于“下游”出现

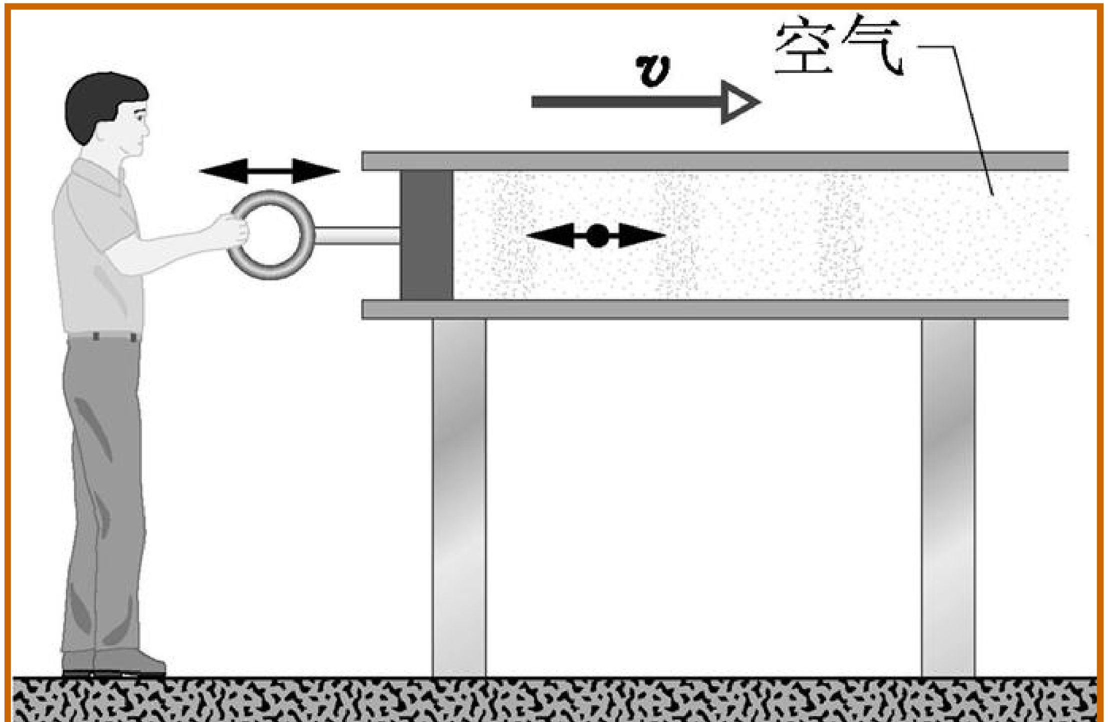


波动是振动状态（即相位）的传播，不是媒质的传播。

- 横波：质元振动方向⊥波的传播方向
- 纵波：质元振动方向 // 波的传播方向

- 横波：质元振动方向⊥波的传播方向
- 纵波：质元振动方向//波的传播方向





注意

横波、纵波都是行波。

均满足波的叠加原理，均可产生干涉、衍射等。

一 . 波的几何描述

波线（wave line）——

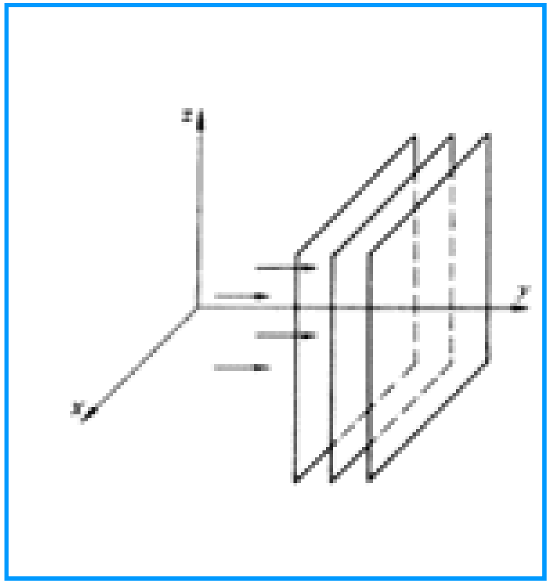
表示波的传播方向的射线（波射线）

波面（wave surface）——

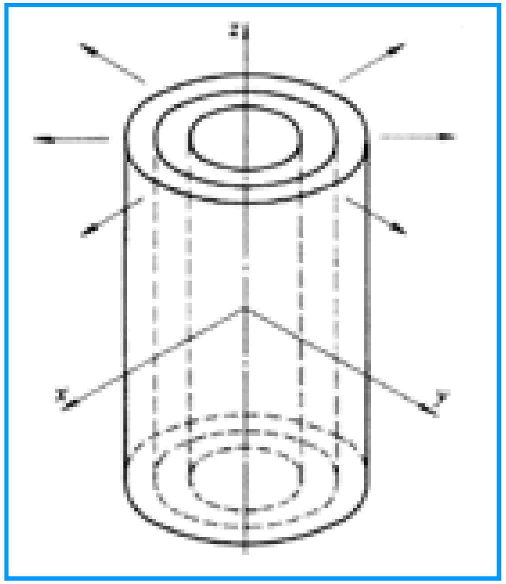
振动相位相同的点构成的面（同相面）

波阵面（wave front）——

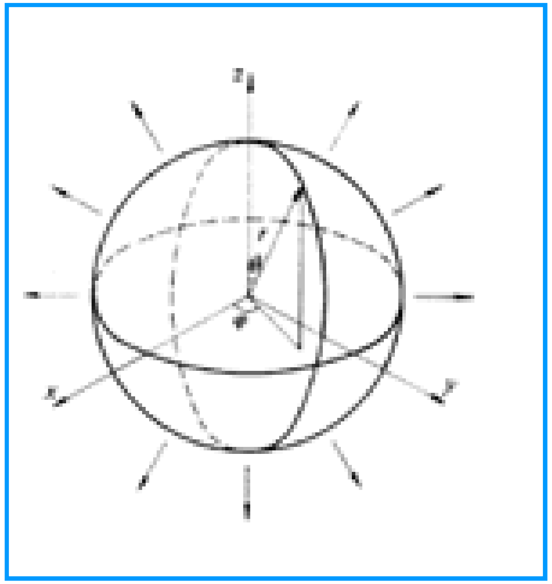
某时刻处于最前面的波面（波前）



平面波



柱面波



球面波

在各向同性均匀介质中:波线垂直波面

二. 描述波动的物理量

1. 周期、频率、角频率

周期T：一个完整的波通过波线上的某点所需的时间。

由波源决定（波源、观测者均不动时）

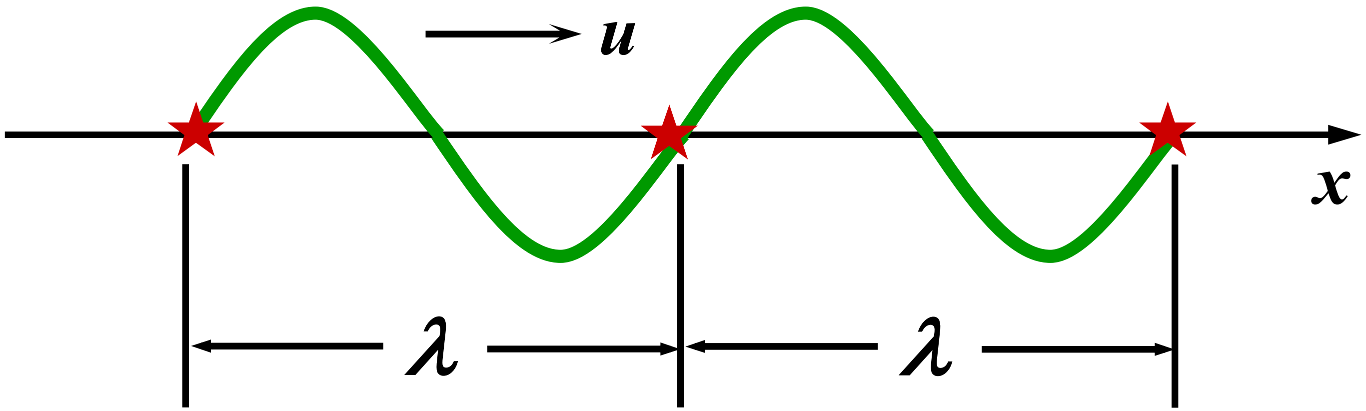
频率 $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$　　角频率 $\boxed{\omega = 2\pi\,\nu}$

2. 波速 u　　振动状态传播的速度

一般由介质的性质和波的类型决定

3. 波长λ ：

波线上相邻的振动状态相同两点间(相位差为2π）的距离。



应用程序

$\boxed{\lambda = uT}$ 波长是波的“空间周期”。

波数：单位长度包含的完整波的数目 $\dfrac{1}{\lambda}$ （空间频率）

角波数：表示2π长度包含的完整波的数目（简称波数） $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

（空间角频率）

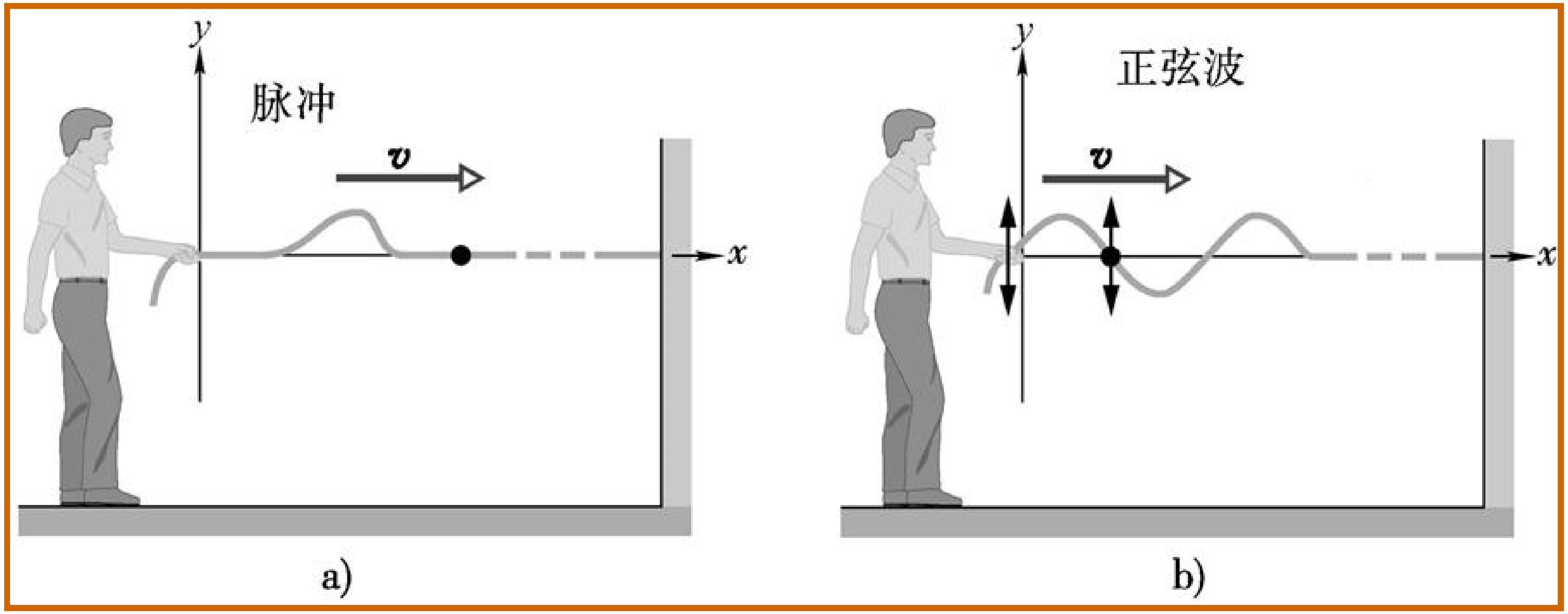
$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

$$\boxed{\omega = ku}$$

10-2 平面简谐波

简谐波: 简谐振动的传播(余弦波或正弦波，单色波（单一波长））

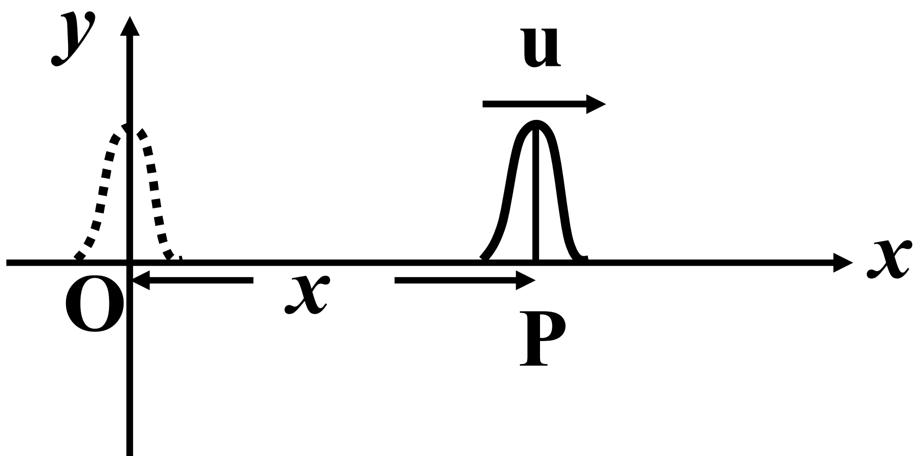
平面简谐波：　波面为平面 （一维简谐波）------可按一维问题处理



一. 行波与波函数

O点位移　　$y_O = f(t)$

O点状态经过　$\Delta t = \dfrac{x}{u}$　传到P点



O点位移 $y_O = f(t)$

O点状态经过 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$ 传到P点

即P点处质元的状态落后O点 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

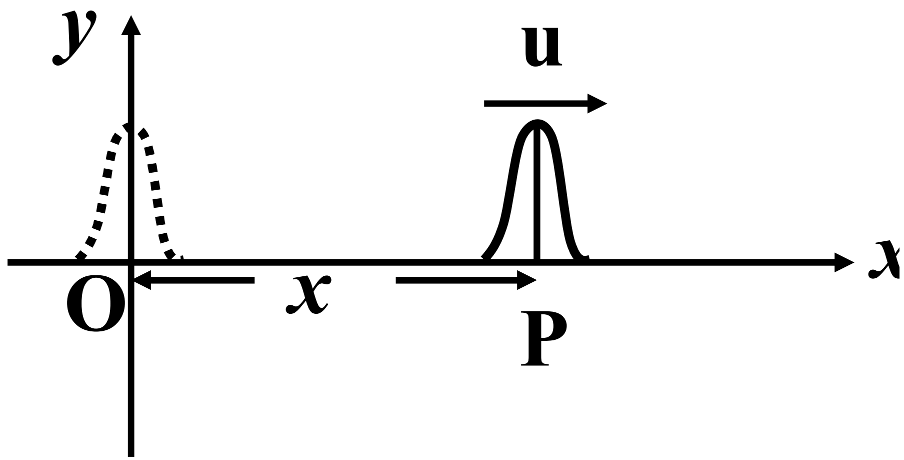
$$y(x,t) \Leftrightarrow y(0,t-\Delta t)$$

P点 **O点**

P点位移

$$y(x,t) = f(t - \frac{x}{u})$$

-----脉冲波的波函数



波函数：波传播时，任意质元的运动函数。

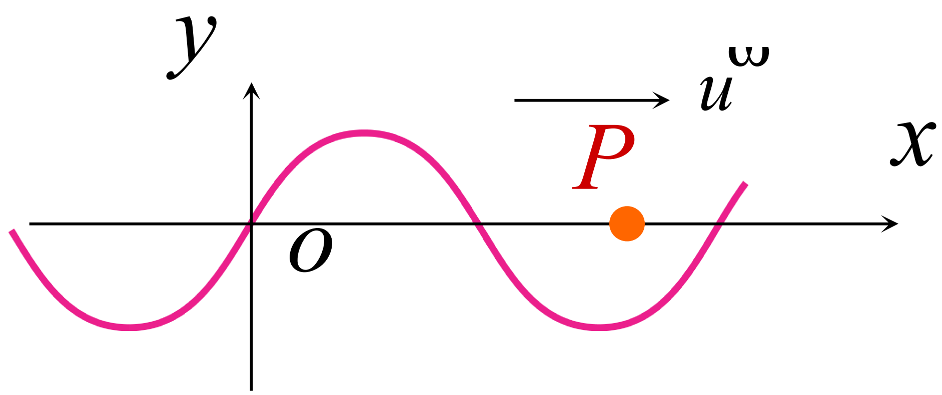
二.平面简谐波的波函数

1. 波函数

以机械横波为例，

媒质：均匀、无限大，无吸收

（无反射、折射，A不变）



t时刻　波形图

设$x=0$处质元振动方程为：

$$y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$y(x,t)\Leftrightarrow y(0,t-\Delta t)\qquad \Delta t=\frac{x}{u}$$

P点　　　　O点

P 点的振动位移为:

$$\boxed{y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]}$$

--平面简谐波的波函数

2. 平面简谐波函数的另几种常用的表示

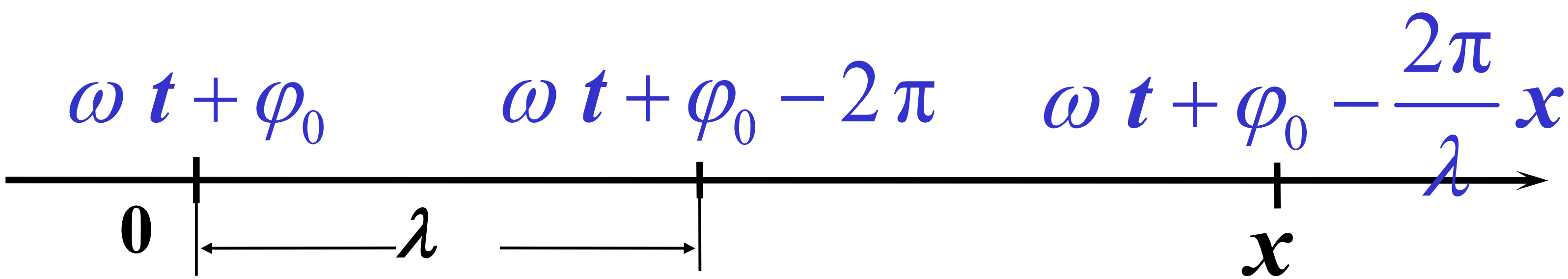
$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$\boldsymbol{u=\frac{\lambda}{T}} \qquad \boldsymbol{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

有

$$\boxed{\boldsymbol{y(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)}}$$

说明：



沿波传播方向每增加λ的距离，相位落后2π。

∴ 下游质元的相位滞后 $\boxed{\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=-k\Delta x}$

平面简谐波的常见表达式（波函数）

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$= A\cos(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}+\varphi_0)$$

$$= A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$= A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi_0] = \Lambda\ \Lambda$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

复数表示 $y = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$ (Re) (real part)

表示取实部

数学上处理方便，有直接物理意义的还是实部

$$\boxed{y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)}$$ （沿+x 方向传播）

沿 **Ox 轴负方向**传播的波函数

P点比O点超前 $\Delta t=\dfrac{x}{u}$

$$y(x,t)\Leftrightarrow y(\mathrm{O},t+\Delta t)$$

P点 **O点**

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$\boxed{y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)}$$ （沿$-x$ 方向传播）

定义 波矢 $\vec{k}=k\vec{e}_n$ $\vec{e}_n$ 表示波的传播方向

$$\Longrightarrow \boxed{\xi(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0)}$$

三. 波函数的物理意义

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$ 15

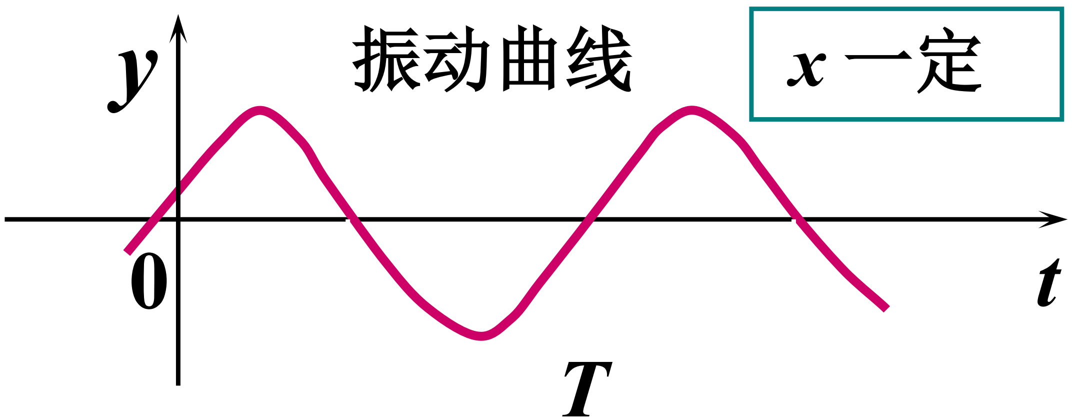
1. 当 $x = x_0$ 一定

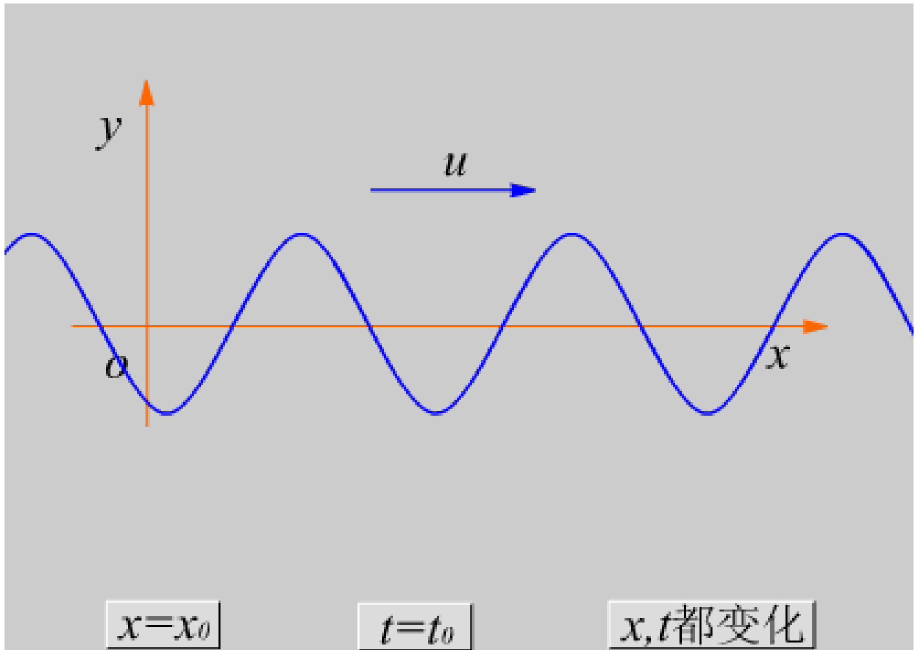
表达式变成 $y—t$ 关系

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_0}{u}\right)+\varphi_0\right]$$ 令常数 $\alpha = -\omega\frac{x_0}{u}$， $\alpha+\varphi_0=\varphi_1$

$$\Longrightarrow y = A\cos(\omega t+\varphi_1)$$

---- x_0处质元的振动方程 (初相是φ_1)





$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

2. 当 $t=t_0$ 一定时

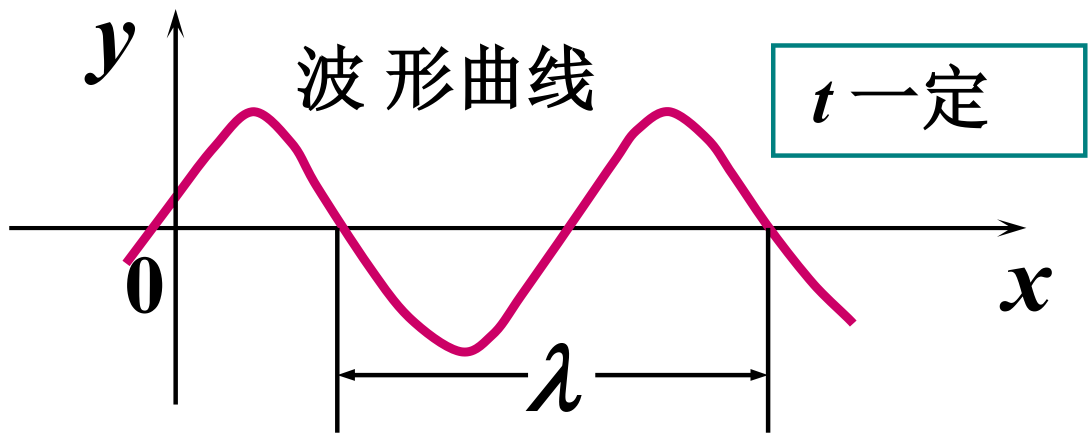
表达式变成 y-x 关系

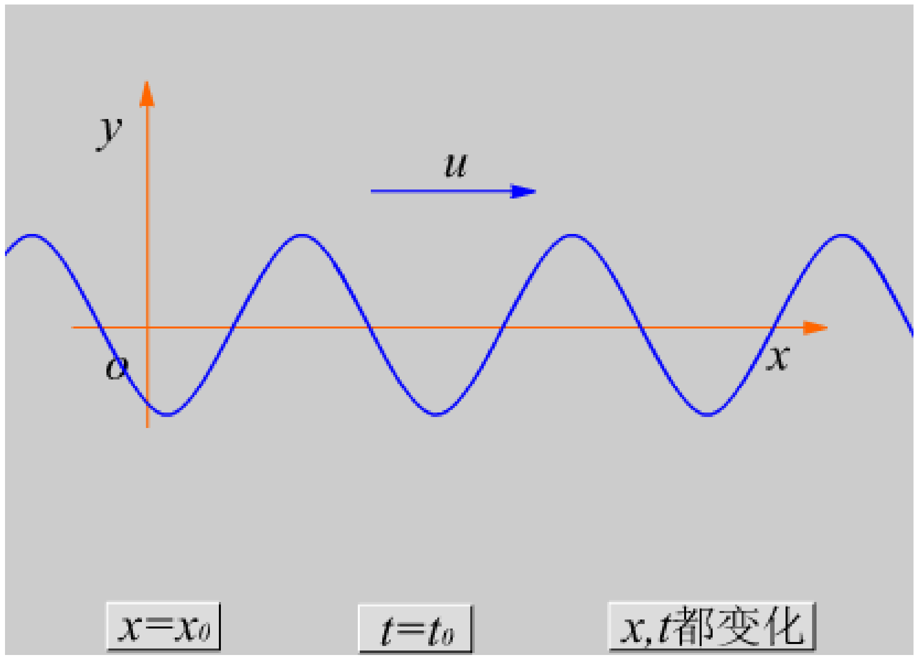
$$y=A\cos\left[\omega t_0-\omega\frac{x}{u}+\varphi_0\right]$$

令 $\omega t_0+\varphi_0=\varphi_1$

$$\Longrightarrow\quad y=A\cos(\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

------ t_0时刻空间各点位移分布





3. x , t 都变时

表示波射线上不同时刻，不同质点的位移分布

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

时间滞后

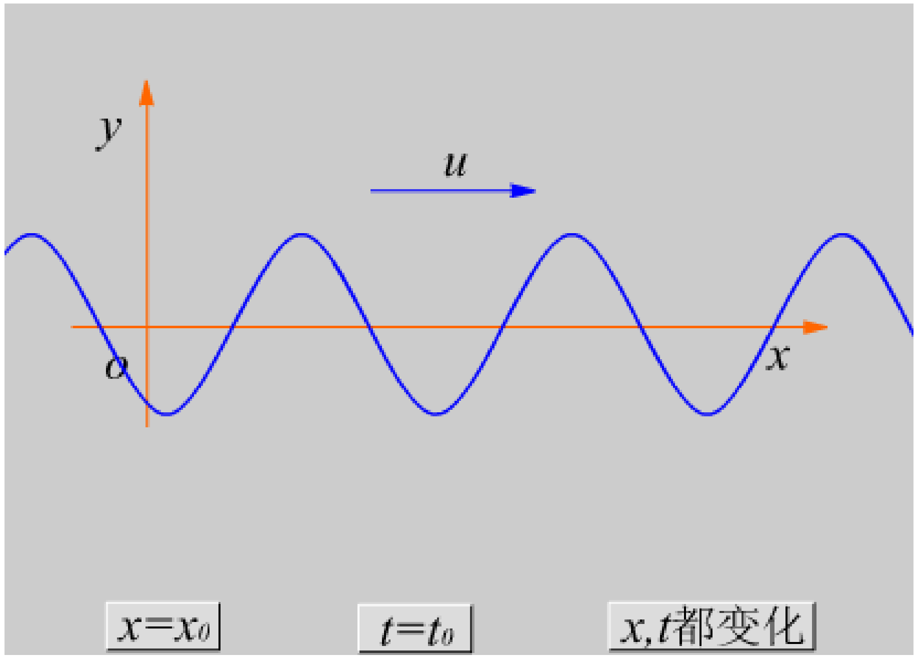
$$= A\cos\left[(\omega t + \varphi_0) - \frac{2\pi}{\lambda}x\right]$$

相位滞后

反映出沿波的传播方向的“滞后效应”

再由 $y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$

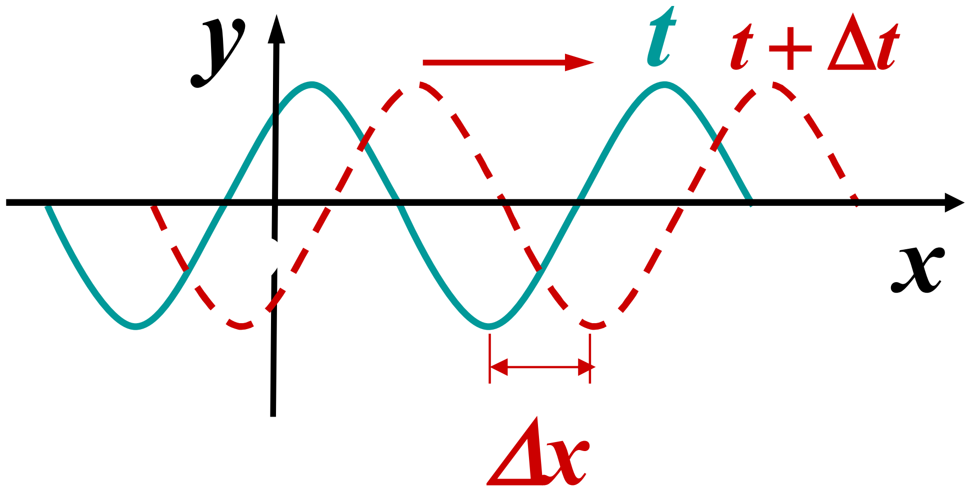
反映了波动的
时间和空间双重周期性。



每经一个T，波形推进一个λ---- 动态特性

Δt内波形沿波的传播方向推进Δx

$\Delta x = u\Delta t$ 行波



总之：

波函数不仅表示出

波射线上给定点的振动情况 $y(x_0, t)$，某时刻的波形 $y(x, t_0)$

还能够反映振动 状态的传播 波形的传播 能量的传播.

行波的特征

平面简谐波重点内容讨论

如何写出平面简谐波的波函数？

$$y = y(x, t)$$

各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

♦ 抓住概念：某时刻某质元的振动状态

将在较晚时刻于“下游”某处出现。(时间角度)

或：沿波的传播方向，

各质元的相位依次落后。（相位角度）

♦ 须知三个条件：

1. 某参考点的振动方程(A, ω, ϕ)

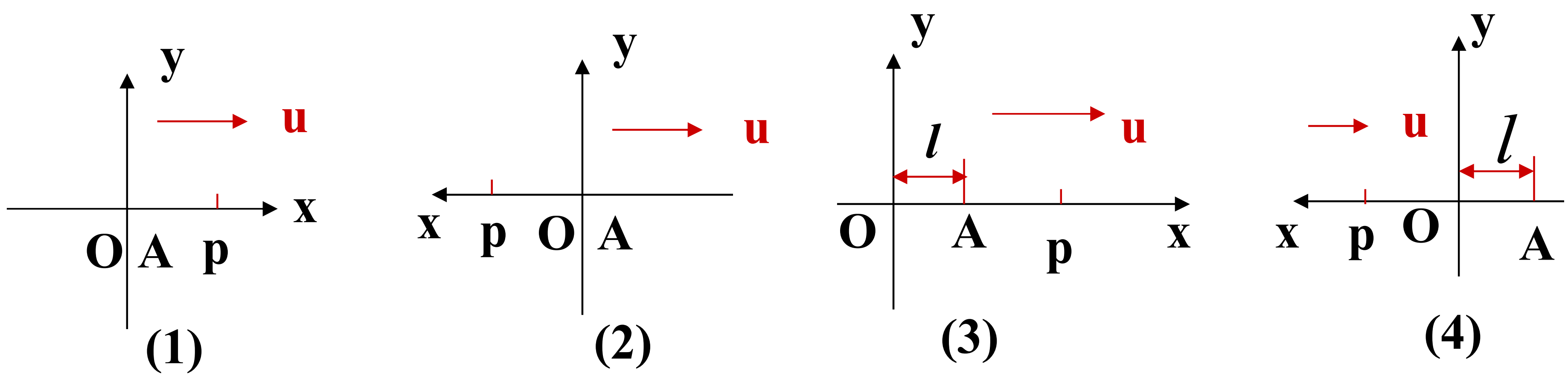
2. 波长λ (或 u)

3. 波的传播方向

练习． 一波长为 λ 的平面简谐波，已知 A 点的振动方程为

$$y=A\cos(\omega t+\varphi)$$

试求在图中四种坐标选择情况下此简谐波的表达式。



解:

（1） $y=A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]$ （2） $y=A\cos\left[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi\right]$

（3） $y=A\cos\left[\omega(t-\frac{x-l}{u})+\varphi\right]$ （4） $y=A\cos\left[\omega(t+\frac{x+l}{u})+\varphi\right]$

[例1]　一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，已知波函数为

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\text{m}$$

求：（1）波的振幅、波长、周期及波速；

（2）质点振动的最大速度。

解（1）　比较法

标准形式：$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

将波函数写成标准形式：

$$y = 0.04\cos 2\pi(\frac{50}{2}t - \frac{0.10}{2}x)$$

比较可得：

$$A = 0.04m \qquad T = \frac{2}{50} = 0.04s$$

$$\lambda = \frac{2}{0.10} = 20m \qquad u = \frac{\lambda}{T} = 500m/s$$

$$A = 0.04m \qquad T = \frac{2}{50} = 0.04s$$

$$\lambda = \frac{2}{0.10} = 20m \qquad u = \frac{\lambda}{T} = 500m/s$$

（2）质点振动速度：

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\text{m}$$

$$\upsilon = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04 \times 50\pi \sin\pi(50t - 0.10x)$$

$$\upsilon_{max} = 0.04 \times 50\pi = 6.28\, m/s$$

注意区分

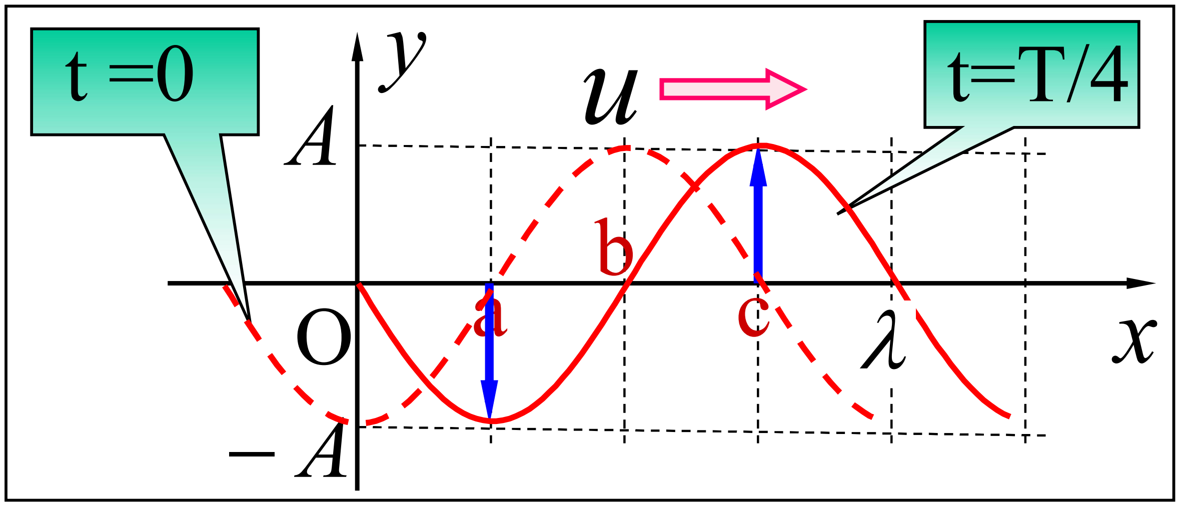
讨 论 1）给出下列波函数所表示的波的**传播方向**和 $x=0$ **点的初相位.**

$$y=-A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\text{向}x\text{轴正向传播}, \quad \varphi_0=\pi)$$

$$y=-A\cos\omega\left(-t-\frac{x}{u}\right) \quad (\text{向x轴负向传播}, \quad \varphi_0=\pi)$$

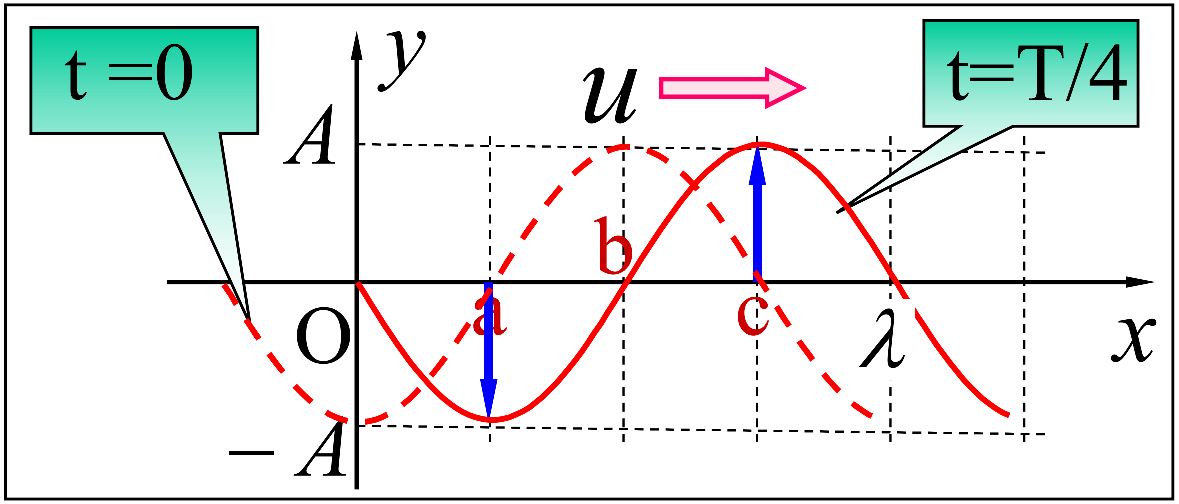
2）如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动**初相位.**

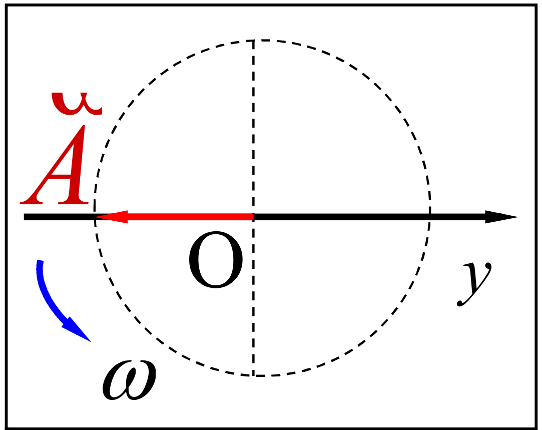
$$\varphi(-\pi \sim \pi)$$



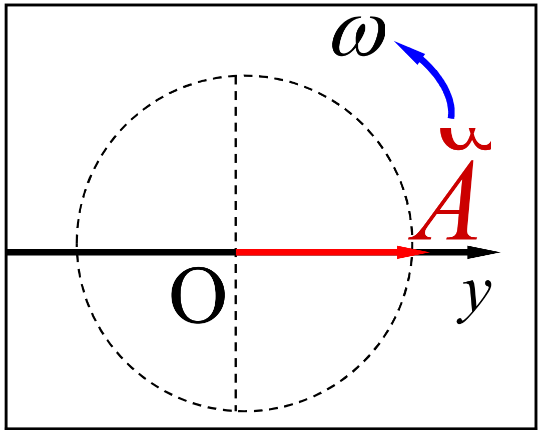
2） 如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动**初相位**.

$\varphi(-\pi \sim \pi)$

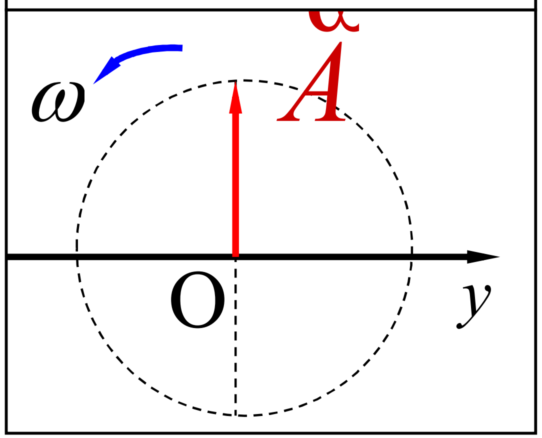




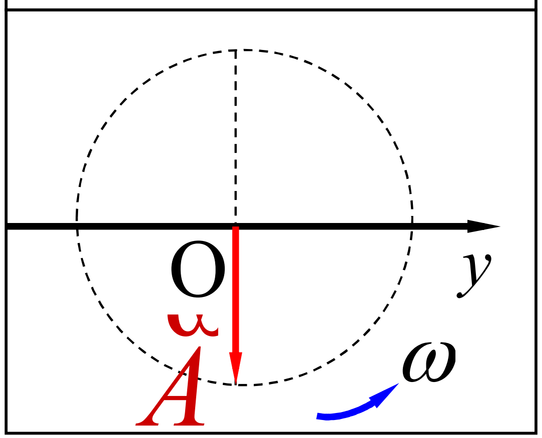
$$\varphi_o = \pi$$



$$\varphi_b = 0$$

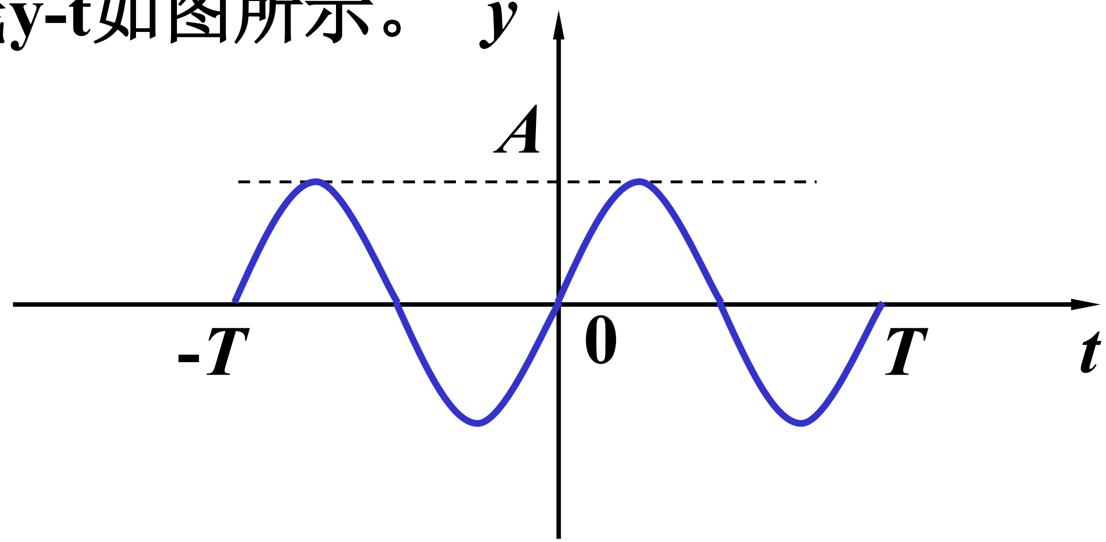


$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



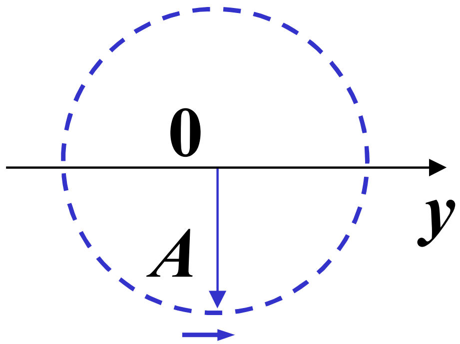
$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

[例2] 已知：一个向x正方向传播的波在 $x=0$点的振动曲线y-t如图所示。

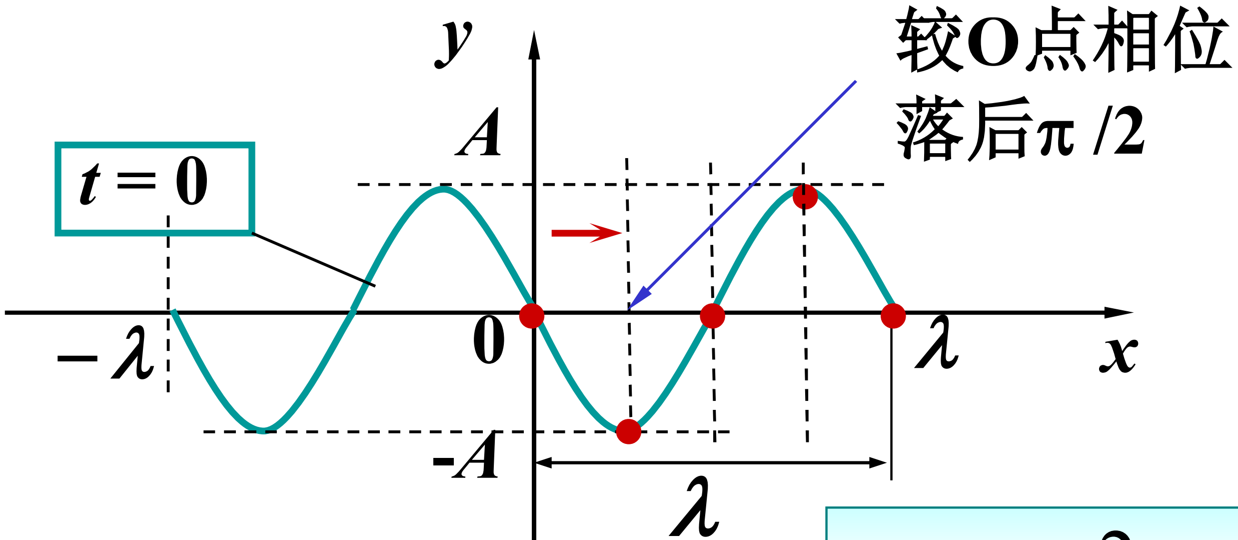


要求： 画出该波在 $t=0$ 时的波形y-x曲线。

解：



O点初相为$-\pi/2$

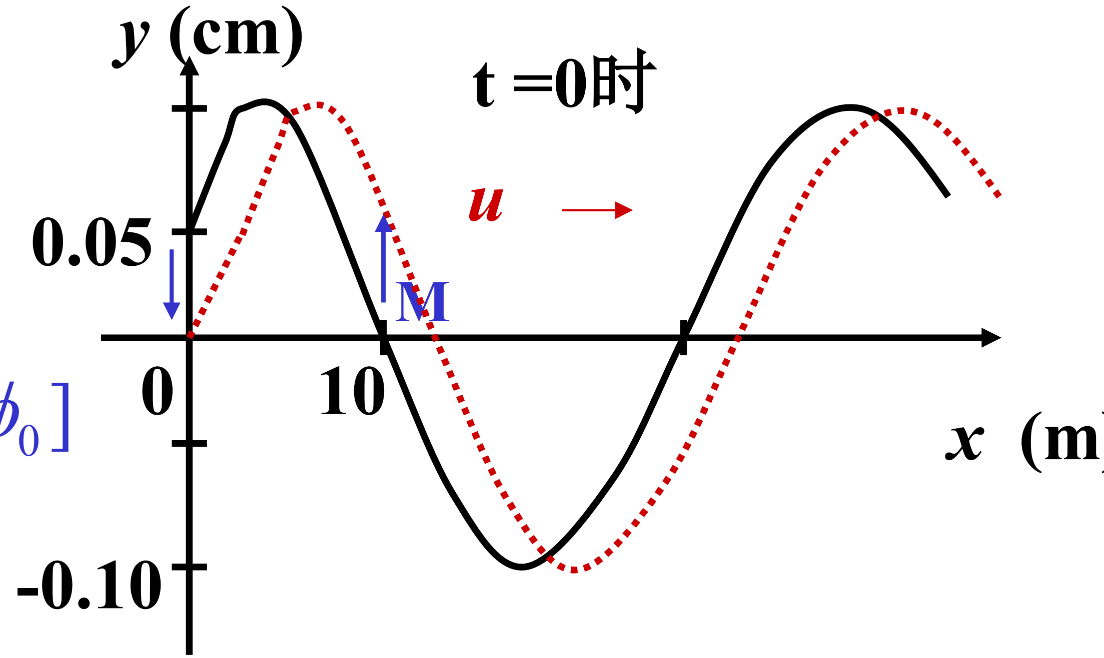


$$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$$

[例3] 正向波在t =0时的波形图

波速u=1200m/s

求： 波函数和波长



解： 设 $y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$

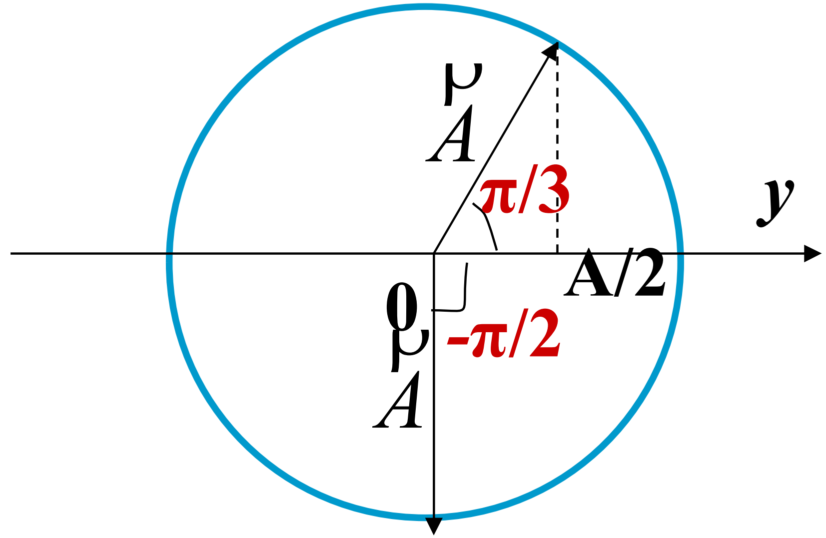
由图 $A = 0.10(cm)$

ω φ_0 ？

t =0 $\begin{cases} \text{O点：} y_0=A/2,\ v_0<0 \Rightarrow \varphi_0=\pi/3 \\ M\text{点：} y_M=0,\ v_M>0 \end{cases}$

$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\pi/3]$

t =0 O点



t=0 M点

$$0 = A\cos[\omega(0-\frac{10}{1200})+\pi/3]$$

$$\pi/3-\frac{1}{120}\omega = \cancel{\pi/2}$$ 或 $-\pi/2$

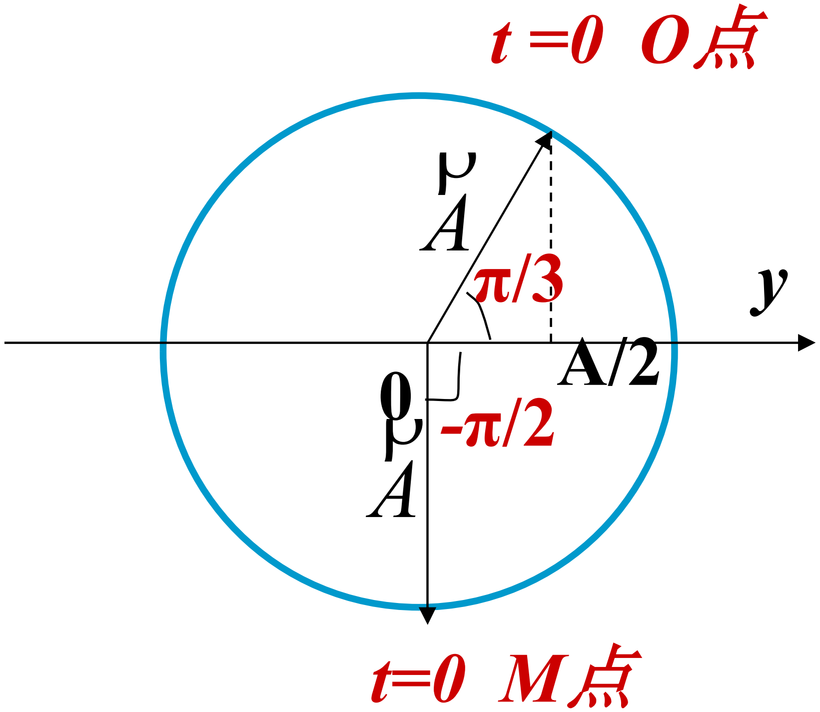
$$\therefore \omega = 100\pi$$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \pi / 3]$$

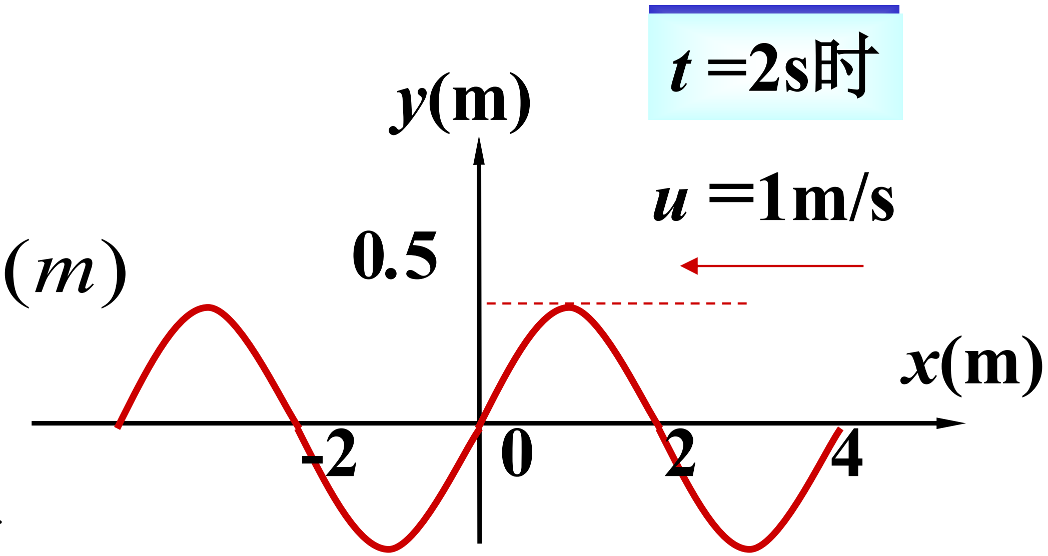
$$\therefore \omega = 100\pi$$

$$y = 0.10\cos[100\pi(t - \frac{x}{1200}) + \frac{\pi}{3}]$$

$$\lambda = uT = u\frac{2\pi}{\omega} = 24(m)$$



【例4】 已知一沿 x 轴负向传播的平面简谐波在 $t=2\text{s}$ 时的波形曲线如图所示,写出原点的振动表达式。



【解】 1. 画波形图法:

由题图可知 $A=0.5\,\mathbf{m} \quad \lambda=4(m)$

$u=1\text{m/s}$

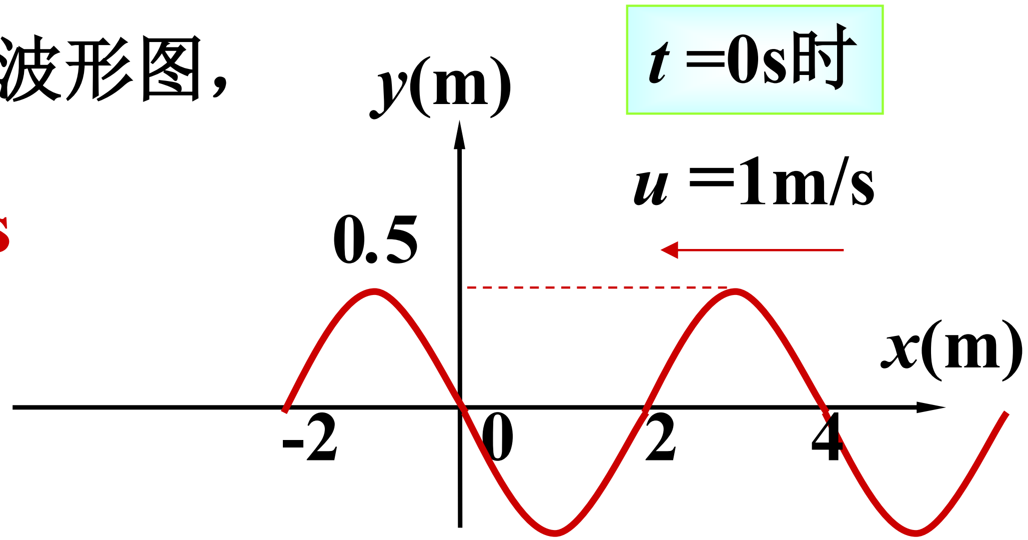
$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{u}{\lambda}=\frac{\pi}{2}$$

有人说原点的 $\phi=-\dfrac{\pi}{2}$ 对不对?

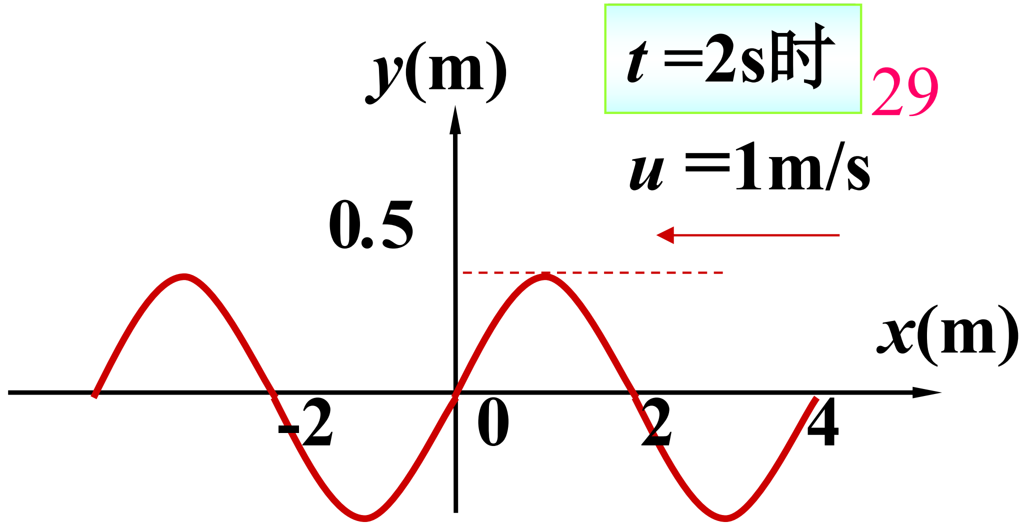
答:不对。这是 $t=2\text{s}$ 时的波形图,

由于 $T=\dfrac{\lambda}{u}=\dfrac{4}{1}=4\ \text{s}$

$t=0$时的波形应比上图倒退半个波长,

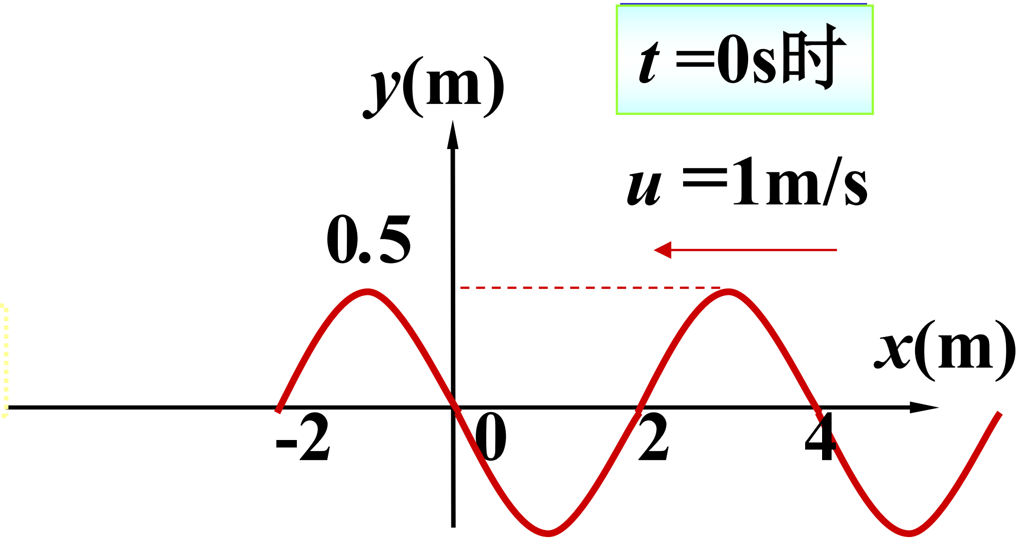


由于 $T=\frac{1}{\nu}=\frac{\lambda}{u}=\frac{4}{1}=4\ \text{s}$



t =0s时的波形应比上图倒退半个波长，

所以原点的 $\phi=+\frac{\pi}{2}$

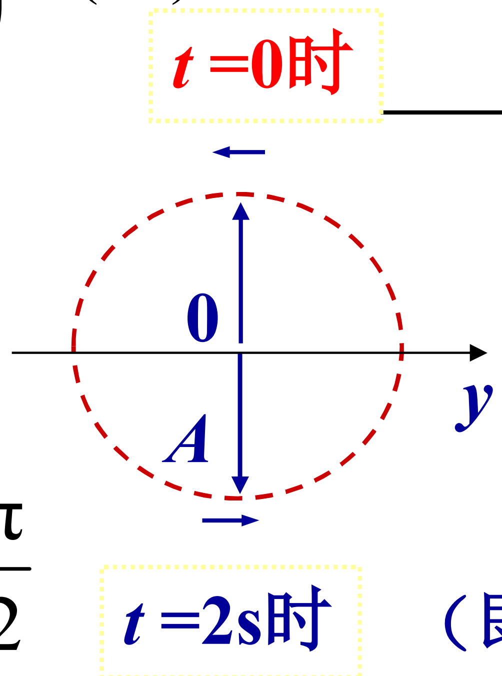


所以原点的振动表达式为

$$y=0.5\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{(SI)}$$

2. 旋转矢量法:

由题图可知（t=2s）



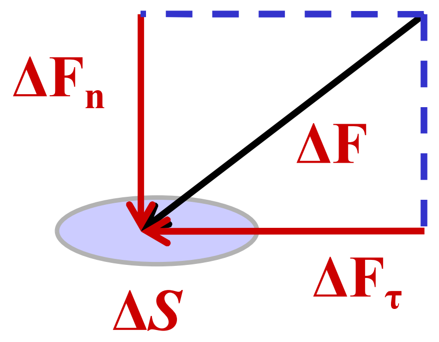
则 t =0时，旋转矢量应倒退半个周期、即垂直向上位置，

所以原点的 $\phi=+\frac{\pi}{2}$ （即 $t=T/2$时）

10-3 波动方程与波速

一. 弹性体与弹性形变*

应力 $\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta S}$



剪切力（切应力） $\tau = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta F_\tau}{\Delta S}$

正应力 $\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta F_n}{\Delta S}$

应用程序

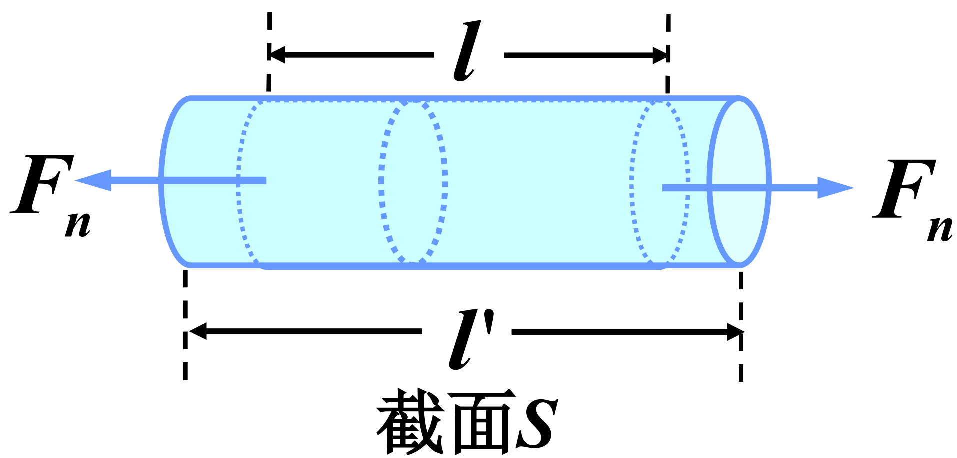
讨论三种弹性形变:

(1)长变(线变)

$$\boxed{\frac{F_n}{S} = Y \frac{\Delta l}{l}}$$

(正应力)　　(线应变)

Y – 杨氏(弹性)模量

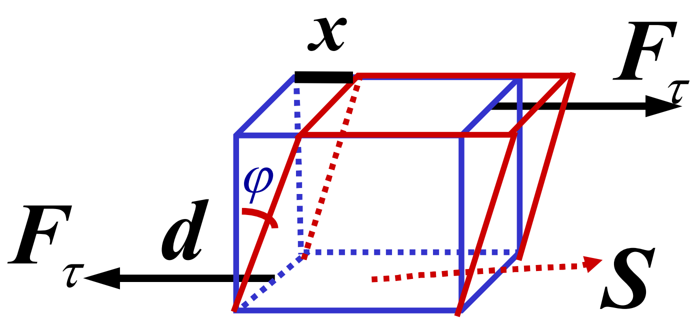


(2) 切变

$$\frac{F_\tau}{S} = G\frac{x}{d}$$

(切应力)　　(切应变)

G - 切变（弹性）模量



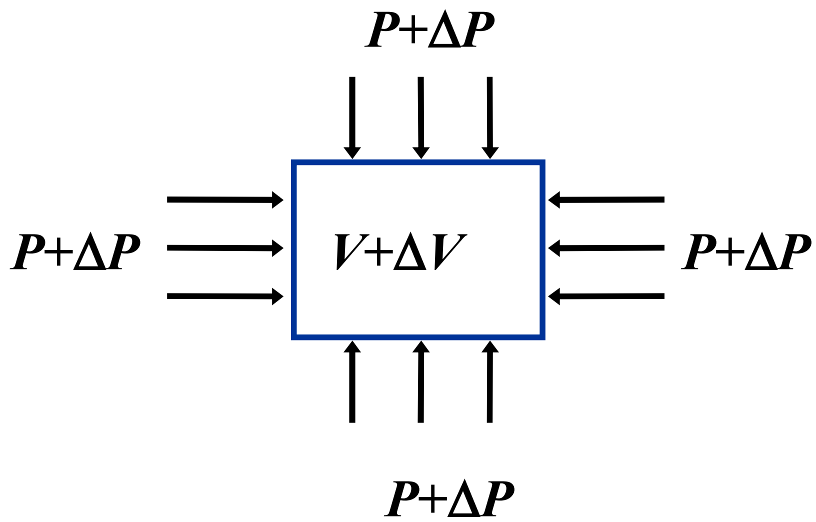
$$\frac{x}{d} = tg\varphi \approx \varphi$$ 剪切角

(3) 体变(容变)

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V}$$

(体应力)　　(体应变)

K - 容变弹性模量（体弹模量）



容变

总之： 应力和应变（相对形变）成正比

应力 = 弹性模量 × 应变　-----胡克定律

二. 波动方程与波速

1. 波动方程

由平面简谐波的波函数 $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

分别对t 和 x求导得：

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{u}A\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2}A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

比较两个二阶偏导数方程得：

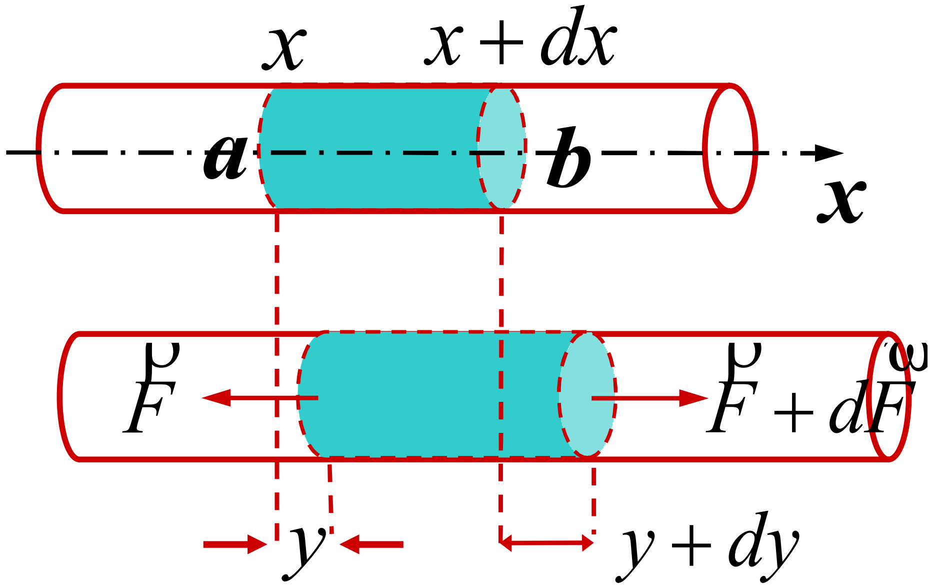
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ ------平面波的波动方程

三维情况的波动方程：

$$\nabla^2\xi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2. 波速

棒中纵波的传播



取棒元

质量为 $dm=\rho S dx$

设棒元发生拉伸形变：

$$dF = dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

由胡克定律： $\boldsymbol{\dfrac{F}{S} = Y\dfrac{\partial y}{\partial x}}$ $\quad$ Y为杨氏模量

$$\boldsymbol{F = YS\frac{\partial y}{\partial x}}$$

两边取微分

$$\therefore \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{YS}\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\boldsymbol{m}\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \rho \boldsymbol{S}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}^2}$$

$$\therefore \mathrm{d}F = YS\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

对比波动方程： $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

可得： $u = \sqrt{Y/\rho}$

固体中纵波波速为	$u_1 = \sqrt{Y/\rho}$	Y为杨氏模量
固体中横波波速为	$u_2 = \sqrt{G/\rho}$	G为切变模量
液体或气体内纵波波速为	$u_3 = \sqrt{K/\rho}$	K为体弹模量

结论：波速与介质 及 波的类型（横波 纵波）有关

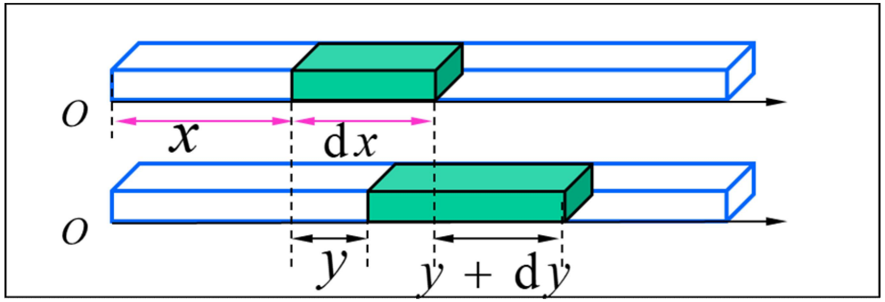
10-4　波的能量

一、波动能量的传播

①媒质质元能量有何特点?

②能量传播的规律如何?

以一个棒内简谐纵波为例来说明



$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho S \mathrm{d}x$$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

● 质元的动能

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2 = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

质元的弹性势能

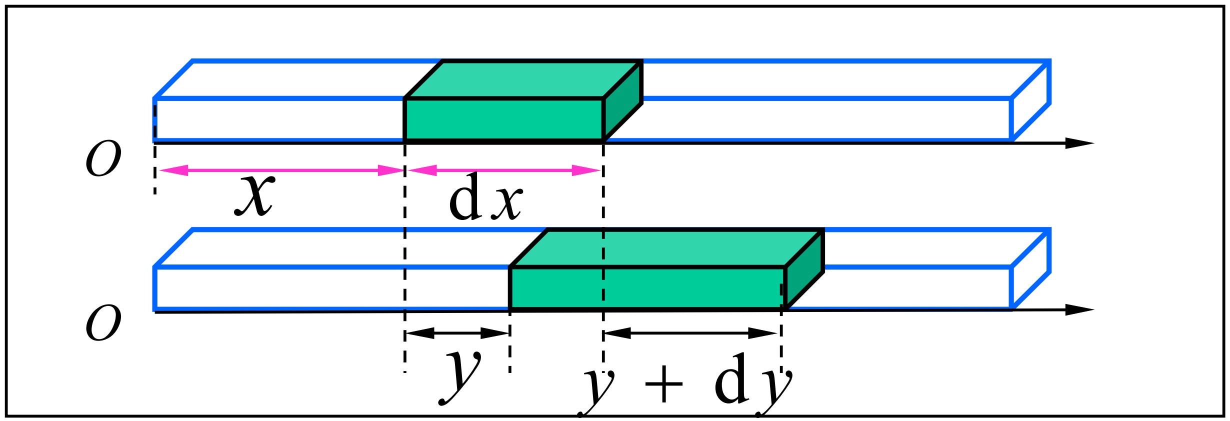
对质元dx，形变为dy时的势能： $dE_p = \frac{1}{2}k(dy)^2$

由胡克定律： $\frac{F}{S} = Y\frac{dy}{dx}$ $F = \frac{SY}{dx}\Delta l = k\Delta l$

k:劲度系数

$$dE_p = \frac{1}{2}k(dy)^2 = \frac{1}{2}\frac{SY}{dx}(dy)^2$$

$$= \frac{1}{2}SYdx(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{1}{2}YdV\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$



$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2} Y \mathrm{d}V \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

由 $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ $\quad \frac{dy}{dx} = A\frac{\omega}{u}\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2} Y \mathrm{d}V A^2 \frac{\omega^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

代入上式： $\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

$$\boxed{\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

$\mathrm{d}E_k$、$\mathrm{d}E_p$ 均随 t 周期性变化,且等大同相。

质元的总能量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \mathrm{d}\boldsymbol{E}_K + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_P \\ &= (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \end{aligned}$$

注意区分：

- **谐振子系统（孤立系统）**

系统与外界无能量交换。

$$\boldsymbol{E}_k \uparrow, \boldsymbol{E}_p \downarrow \quad ; \boldsymbol{E}_k + \boldsymbol{E}_p = \text{const.}$$

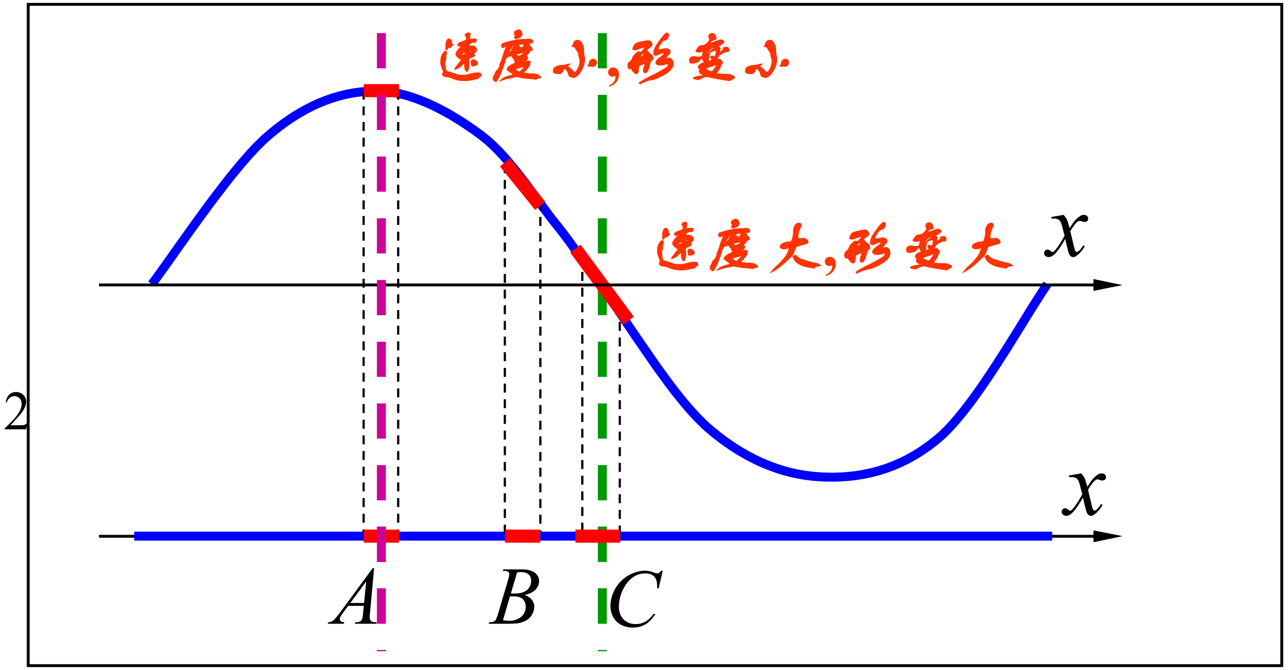
- **波动质元（非孤立系统）**

每个质元都与周围媒质交换能量。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_k = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_p \text{ ，} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{E}_k + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_p \neq \text{const.}$$

以绳波为例

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$



定量分析：

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

速度最大时：

$$\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = (2K+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$$

即质点过平衡位置（$y=0$）时动能最大。

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

速度最大时： $\omega(t - \frac{x}{u}) = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ ➡ $y = 0$

即质点过平衡位置（y =0）时动能最大。

此时的相对形变（应变）

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{u}\sin\omega(t - \frac{x}{u}) = A\frac{\omega}{u}$$ 也最大！

即质点过平衡位置（y =0）时势能也最大。

同理可证：质元动能最小时，势能也最小。

$$\boxed{\mathrm{d}E = (\rho \mathrm{d}V) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})}$$

二、能流和能流密度（波强）

波的传播 $\rightarrow$ 能量传播 $\rightarrow$ 能（量）流（动）

仍以平面简谐波为例： $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

1）**能量密度---单位体积介质中的能量**

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$$

2）**平均能量密度--- 一个周期内能量密度的平均值**

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u}) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

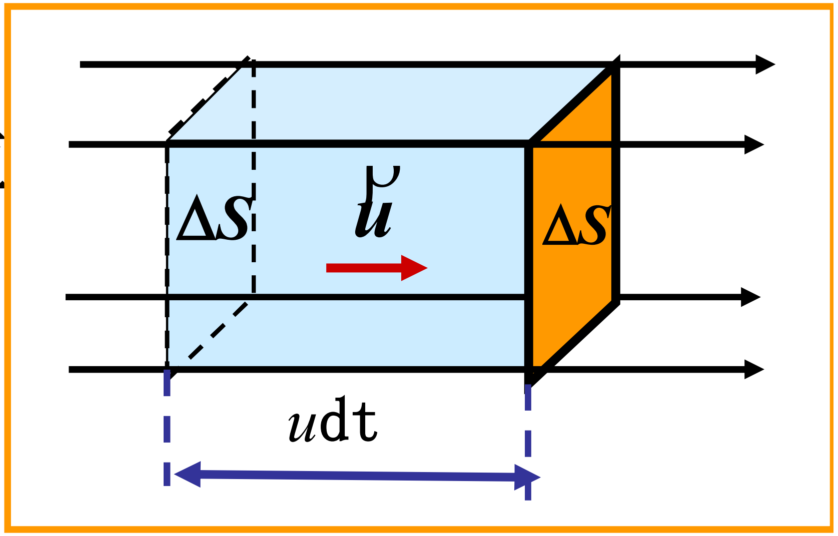
普适结论 $\boxed{\overline{w} \propto A^2}$

3）能流密度（波强）

能流------ 单位时间内垂直通过介质中某面积的波的能量

$$P=\frac{w(u\mathrm{d}t)\Delta S}{\mathrm{d}t}=wu\Delta S$$

平均能流 ----一个周期内能流的平均值



$$\overline{P}=\overline{w}u\Delta S$$

平均能流密度简称能流密度

------通过介质中单位面积的平均能流.

又称波强

$$\boxed{I=\frac{\overline{P}}{\Delta S}=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u}$$

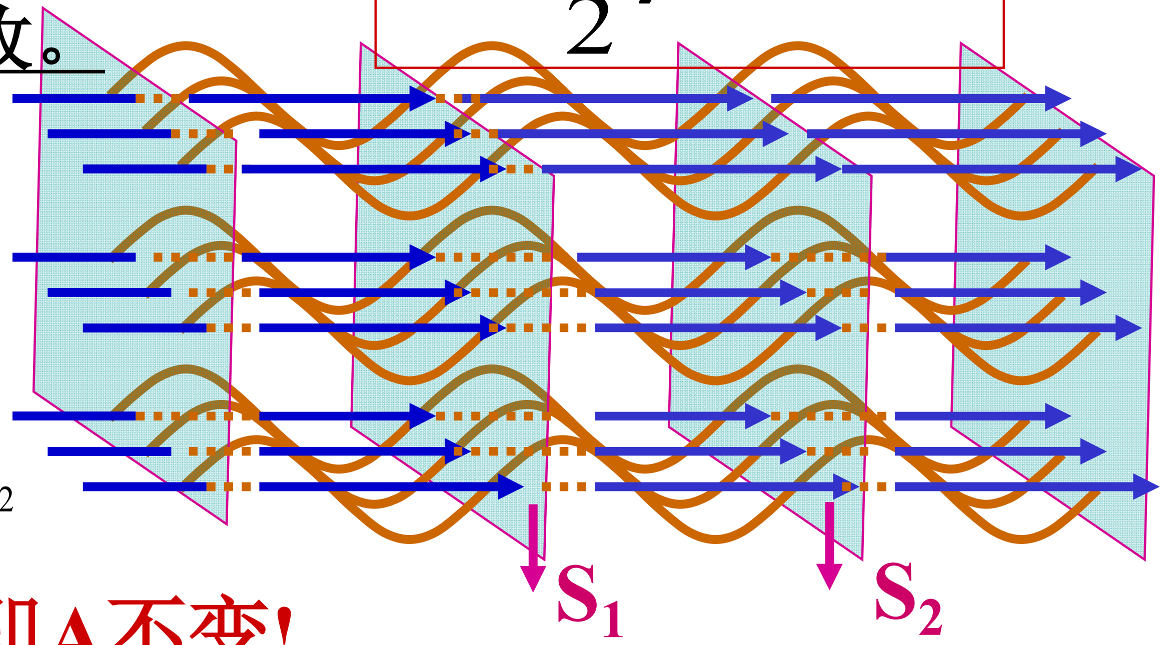
$$\boxed{I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u}$$

单位：瓦·米$^{-2}$

讨论:波在传播中振幅的变化情况

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u$$

介质：均匀、无限大，无吸收。



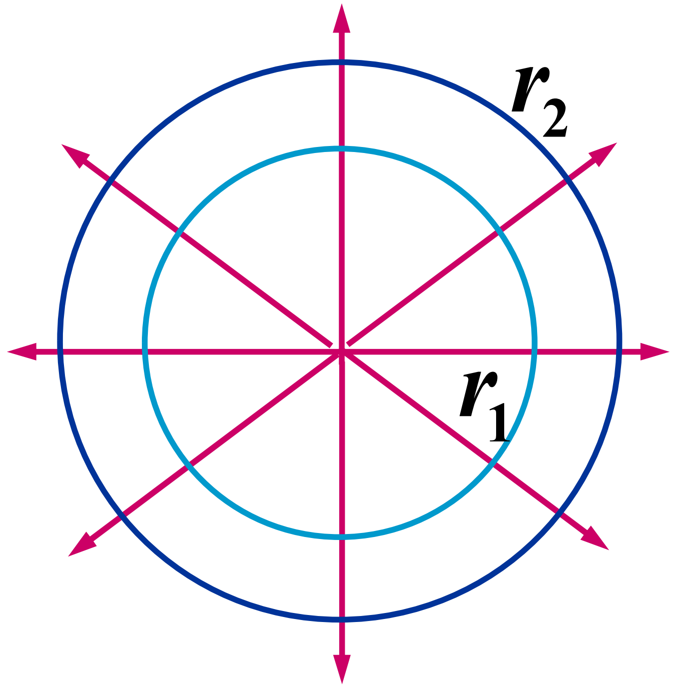
1) 平面波

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u S_1 = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u S_2$$

$\because S_1 = S_2 \qquad \therefore A_1 = A_2$ 即A不变!

2) 球面波



$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

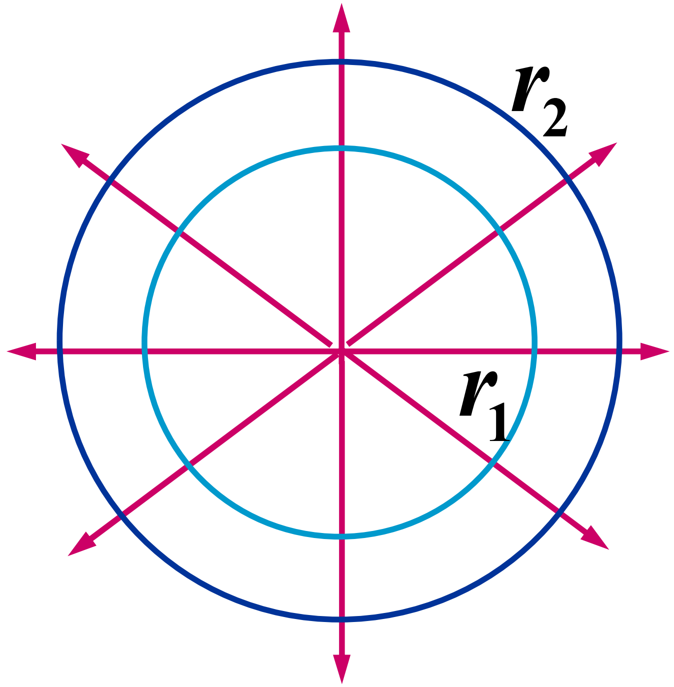
$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u S_1 = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u S_2$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2; \quad S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$\therefore A_1 r_1 = A_2 r_2$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



$$\frac{A}{A_1} = \frac{r_1}{r}$$

取r_1为单位距离

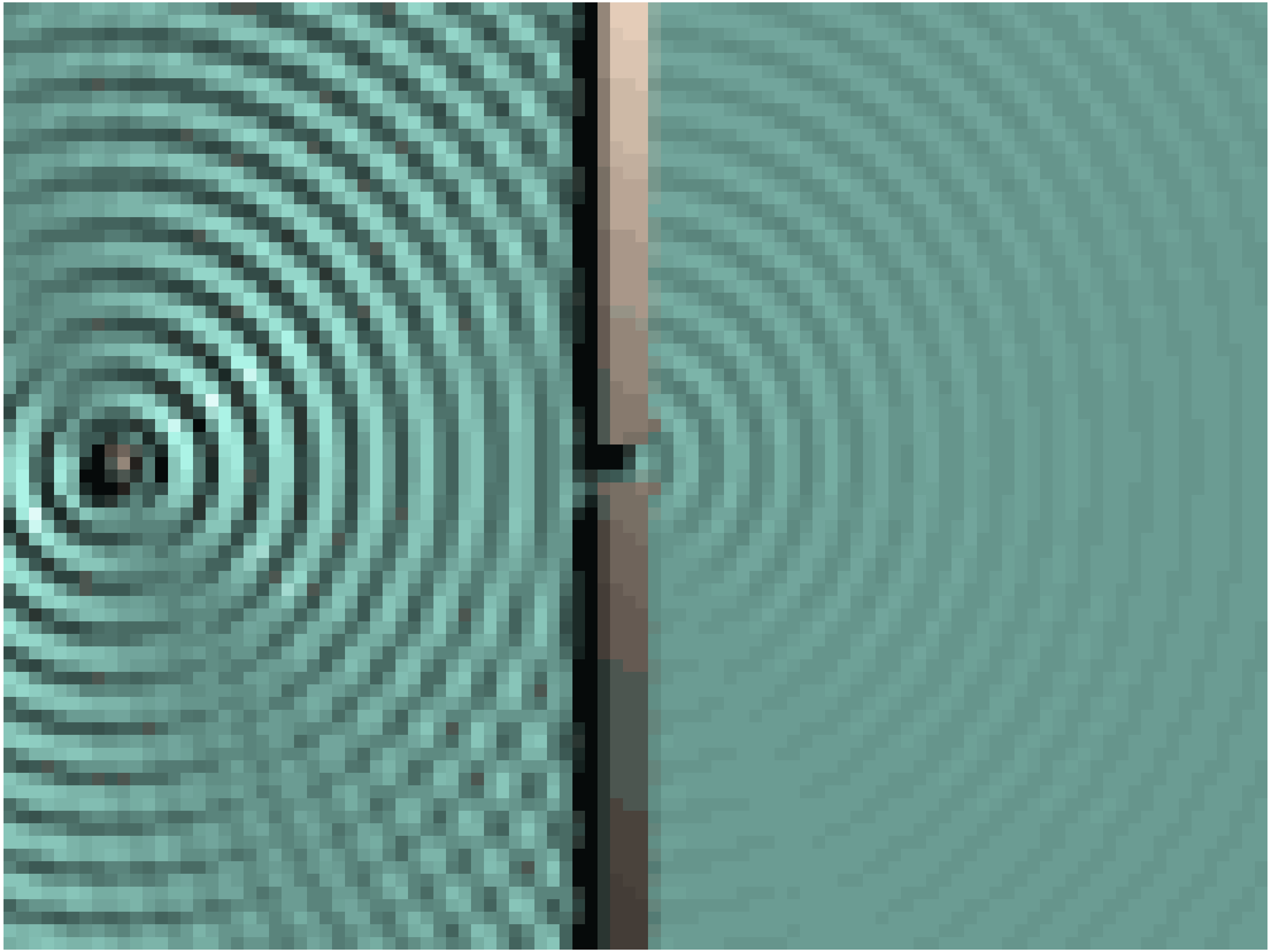
则离波源 r 处的质元的振动方程为:

$$\therefore A = \frac{A_1}{r}$$

$$\boxed{\therefore \xi = \frac{A_1}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi]}$$

发散球面简谐波的波函数

10-5　惠更斯原理与波的衍射、反射和折射



水波通过窄缝时的衍射

一、惠更斯原理（C.Huygens,1629-1695)

媒质中波动到达的各点都可看作是发射同频率子波的波源，在其后任一时刻，这些子波的包络面(包迹)就是新的波阵面。

子波概念

- 波阵面上任一点都是新的波源
  发出的波叫子波
- *t* 时刻各子波波面的公切面
  （包络面）-----该时刻的新波阵面

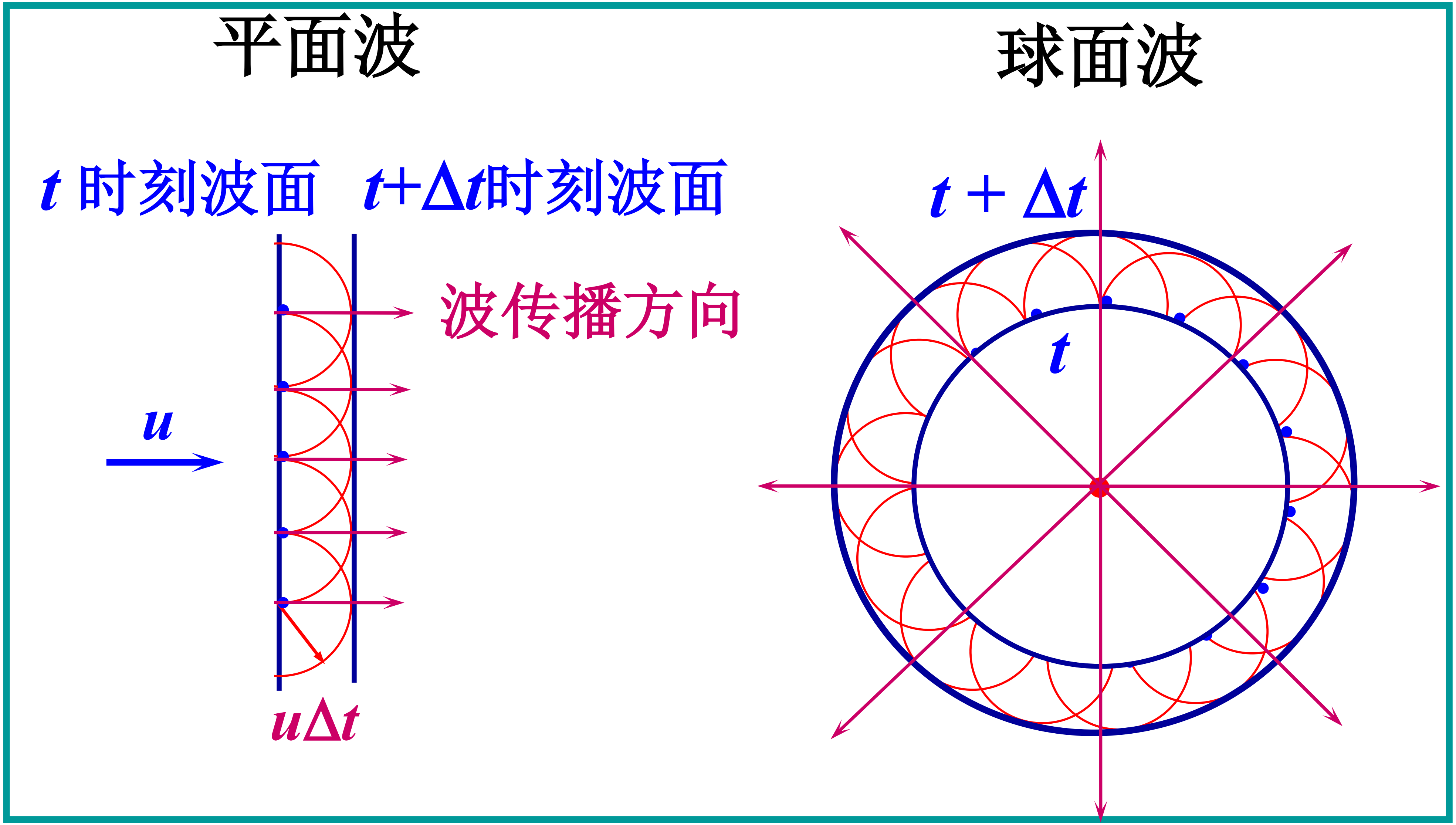
特别地:

若媒质均匀、各向同性 ,各子波都是以波速 u 向外扩展的球面波。

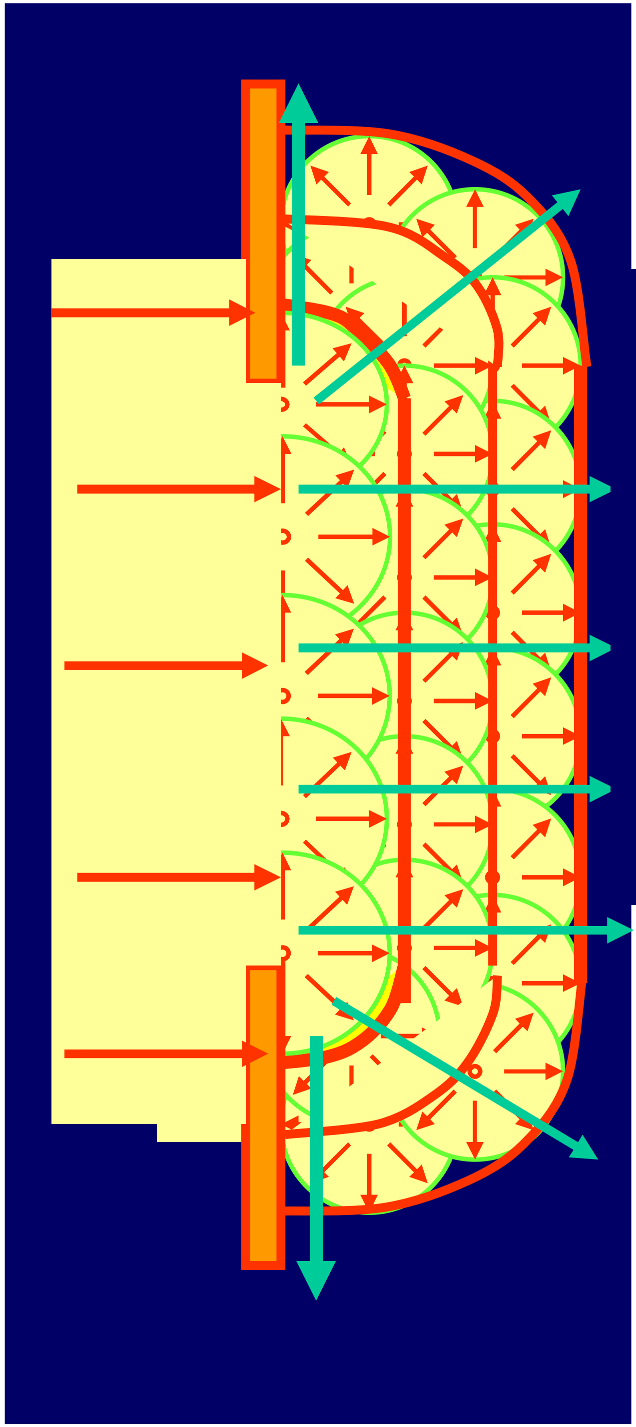
二、惠更斯原理的应用

1．已知 t 时刻的波面，得出 $t+\Delta t$ 时刻的波面，并可确定此时波的传播方向．

例如，均匀各向同性媒质中波的传播：

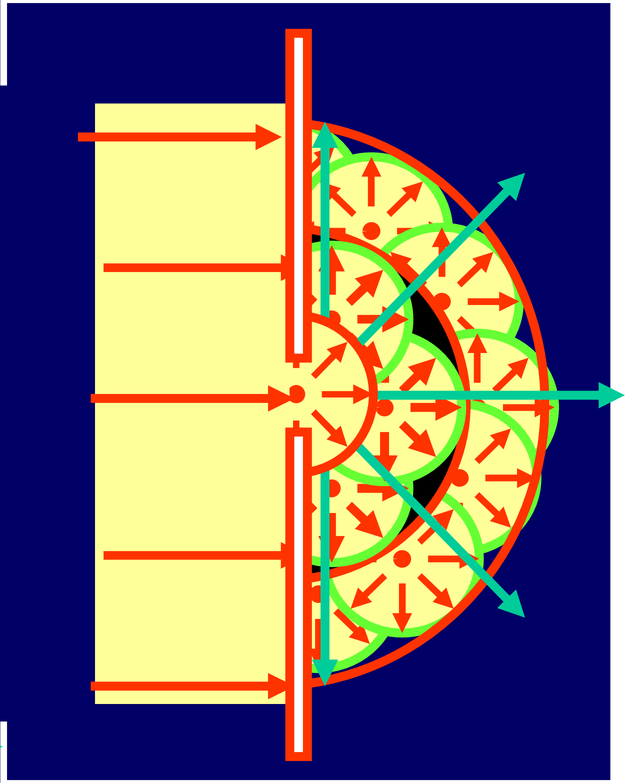


2.解释衍射现象



衍射---偏离原来直线传播的方向

波动的判据之一



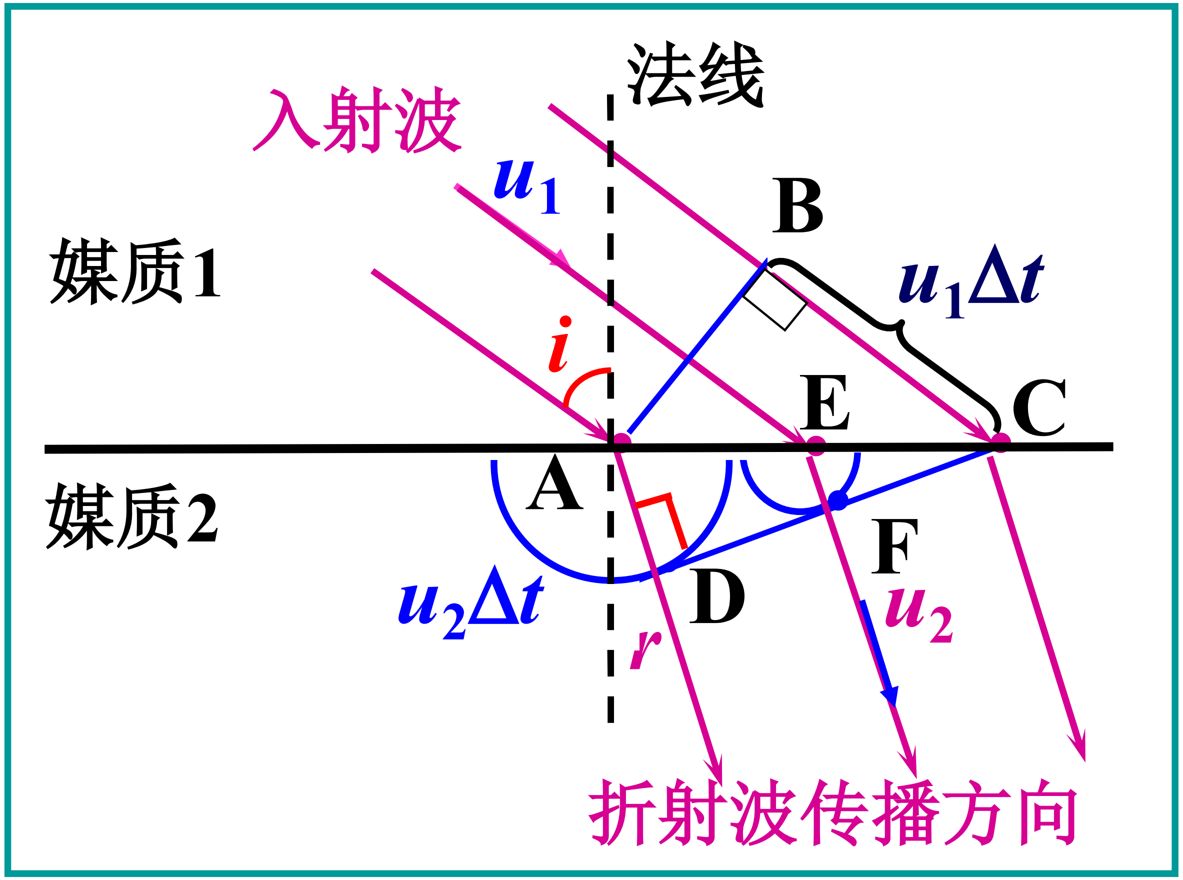
衍射是否明显？

相对波长而言衍射物线度小衍射现象明显

原理不足之处：不能解释波的强度

3. 波的反射和折射

用惠更斯作图法导出折射定律



作图法共分四步：

(1)画出入射波的波前AB

$$\overline{BC} = \boxed{u_1\Delta t = \overline{AC}\sin i}$$

(2)画子波的波面

(3)画子波波面的包络面

(4)画折射波的传播方向

$$\overline{AD} = \boxed{u_2\Delta t = \overline{AC}\sin r}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = n_{21} \text{——} \text{折射定律}$$

n_{21}称为第二种介质对第一种介质的相对折射率

10-6 波的干涉

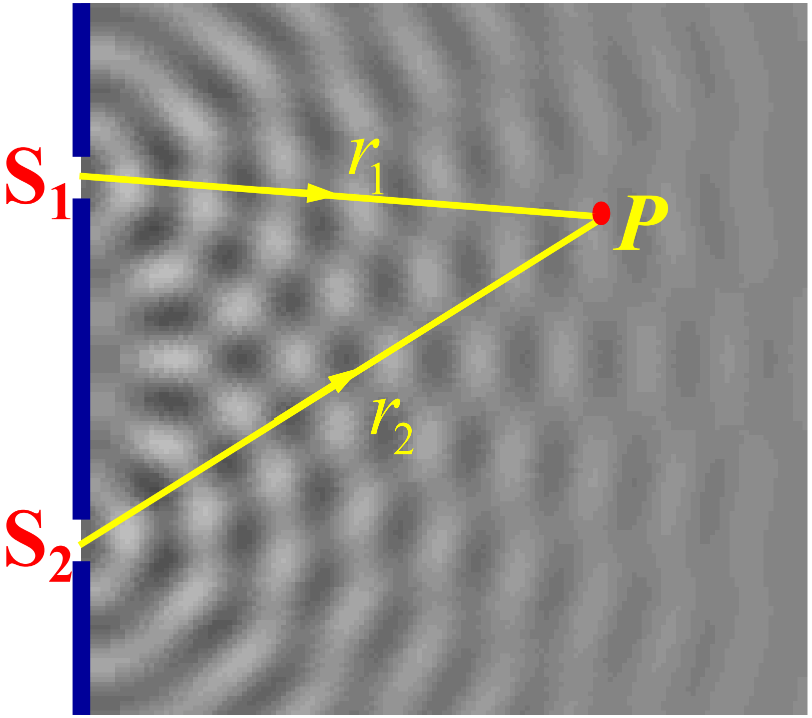
一、波的独立传播原理与叠加原理

几列波相遇时将以原有的振幅、频率和波长独立传播——————波的独立传播原理

几列波的相遇区域，某点的振动是各列波单独传播时在该点引起的振动的合成——————波的叠加原理

几列波相遇时将以原有的振幅、频率和波长独立传播——————波的独立传播原理

几列波相遇区域, 某点的振动是各列波单独 传播时在该点引起的振动的合成——————波的叠加原理



$$y_P = y_1 + y_2$$

二、波的干涉　相干条件

几列波在相遇的区域内，某些位置振幅始终加强，某些位置振幅始终减弱或完全抵消，而其它位置的振动介乎二者之间，这种振动强弱稳定分布的现象为干涉现象。

1. 相干条件

参与叠加的波，必须频率相同（简称同频率）

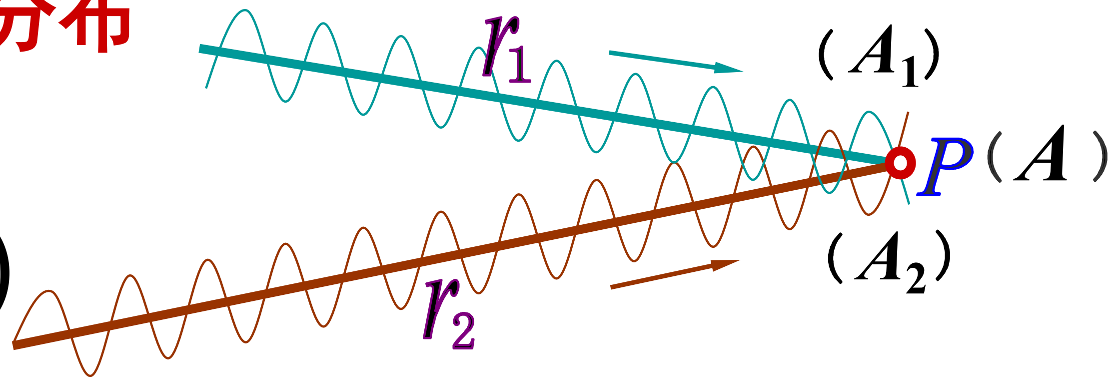
在相遇点，各分振动的

振动方向相同（简称同方向）

相位差恒定（简称相差恒定）

①同频率； ②同方向；③相位差恒定。

2.合成波的振幅和波强分布



波源 s_1 和 s_2 振动方程

$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

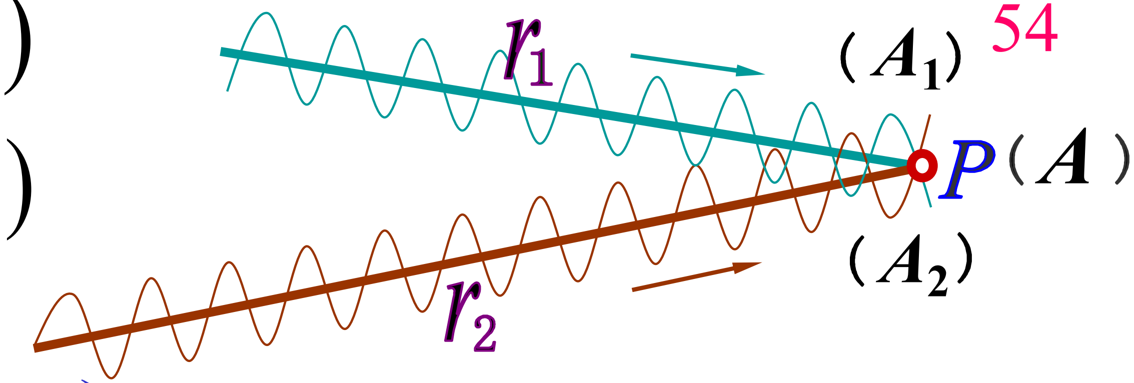
$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

P 点振动方程

$$y_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \qquad y_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)$$

$$y_{10} = A_{10}\cos\left(\omega t + \varphi_{10}\right)$$

$$y_{20} = A_{20}\cos\left(\omega t + \varphi_{20}\right)$$



P 点振动方程

$$y_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)$$

$$y_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$ 合成波的振幅

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$ 合成波的强度

$$\Delta\varphi = \left(\varphi_{20} - \varphi_{10}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right)$$ 两分振动的相差

合成的振幅 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

两分振动的相差 $$\Delta\varphi=(\varphi_{20}-\varphi_{10})-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

对空间确定点，若有恒定的$\Delta\varphi$，则合强度在空间形成稳定的分布，即有干涉现象。

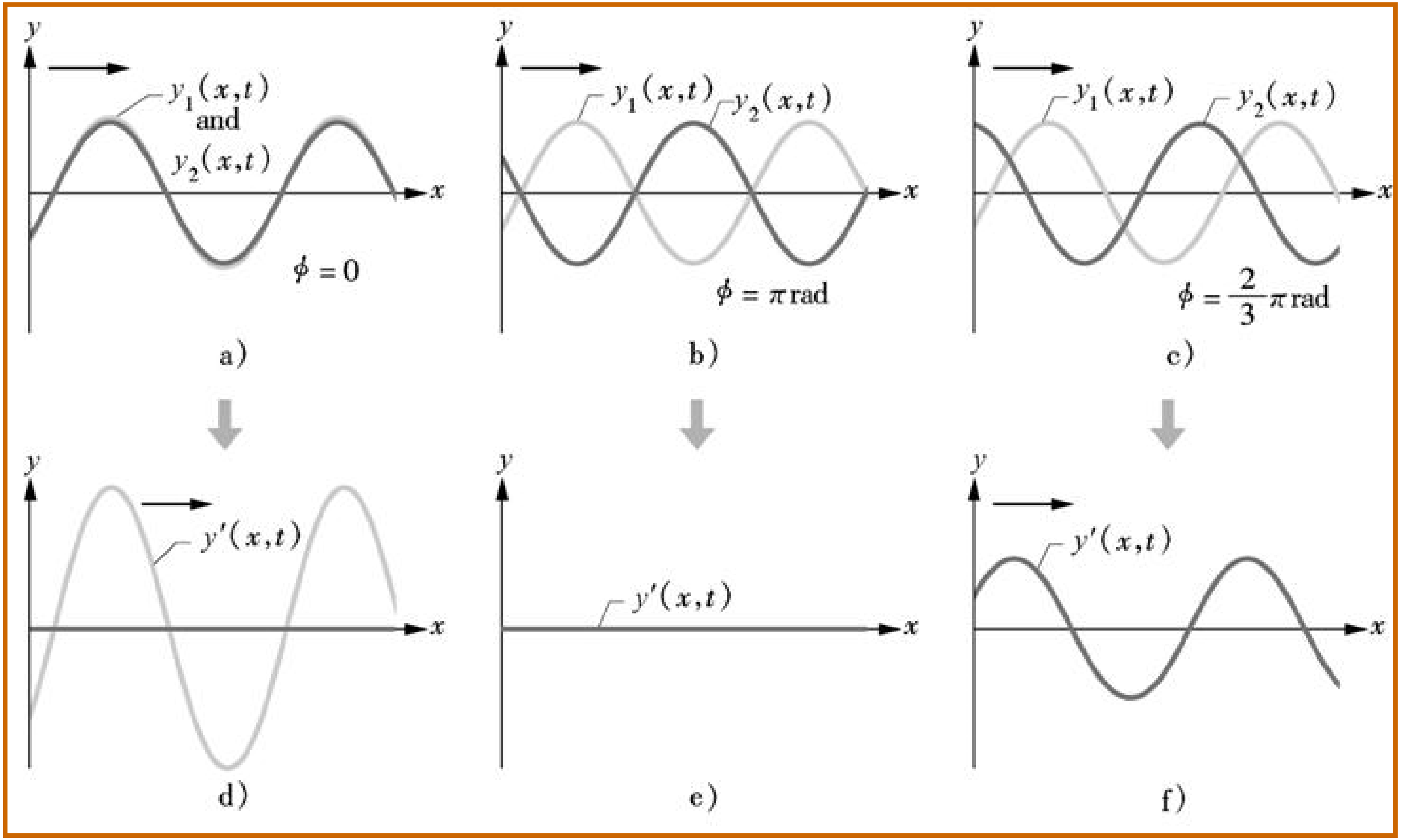
若某处：

$\Delta\varphi=\pm 2k\pi$　　$A=A_1+A_2$　　$I=A^2=(A_1+A_2)^2$

振动始终加强　　$(k=0\quad 1\quad 2\ldots)$

$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$　　$A=|A_1-A_2|$　　如果 $A_1=A_2$　$I_{\min}=0$

振动始终减弱



干涉相长　　干涉相消　　中间干涉

3．讨论

1）关于相位差恒定

$$\Delta\varphi=(\varphi_{20}-\varphi_{10})-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

在确定的场点P (r_2-r_1) 确定

干涉结果取决于波源的初相差 $\varphi_{20}-\varphi_{10}$

所谓相位差恒定就是波源初相差恒定

实现干涉的艰难任务是<u>实现波源的初相差恒定</u>

2）如果 $\varphi_{10}=\varphi_{20}$

$$\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2k\pi & \text{干涉加强}\\ \pm(2k+1)\pi & \text{干涉减弱}\end{cases}$$

$\delta=r_2-r_1$ 叫两波的波程差

2）如果 $\varphi_{10}=\varphi_{20}$

$$\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm 2k\pi & \text{干涉加强}\\ \pm(2k+1)\pi & \text{干涉减弱}\end{cases}$$

$\delta=r_2-r_1$ 叫两波的波程差

$\varphi_{10}=\varphi_{20}$ $\Rightarrow$

$$\delta=\pm k\lambda \quad I_{max}$$

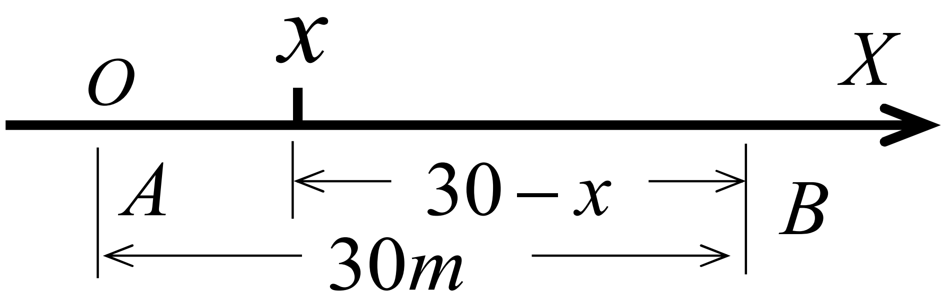
$$\delta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad I_{min}$$

$(k=0\ \ 1\ \ 2\ldots)$

例5 位于*A*、*B*两点的两个波源，振幅相等，频率都是*100*赫兹，相位差为π，其*A*、*B*相距*30*米，波速为*400*米/秒，求:*A*、*B*连线之间因相干干涉而静止的各点的位置。

解：如图所示，取*A*点为坐标原点，*A*、*B*联线为*X*轴，取*A*点的振动方程 ：

$$y_A = A\cos(\omega t + \pi)$$

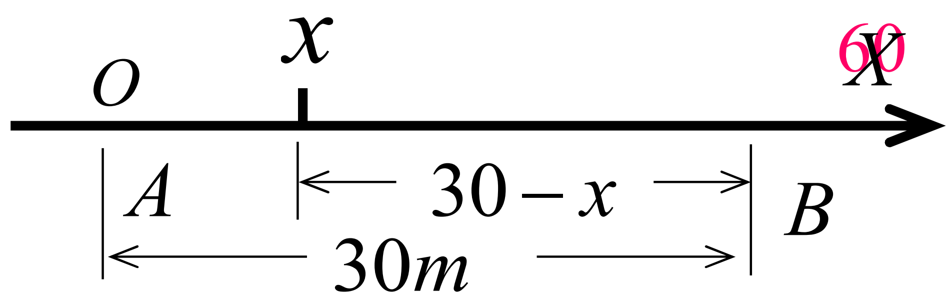


在*X*轴上*A*点发出的行波波函数：

$$y_1 = A\cos(\omega t + \pi - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

*B*点的振动方程 ： $y_B = A\cos\omega t$

$$y_1 = A\cos(\omega t + \pi - \frac{2\pi x}{\lambda})$$



B点的振动方程:

$$y_B = A\cos\omega t$$

在x轴上B点发出的行波波函数:

$$y_2 = A\cos[\omega t - \frac{2\pi(30 - x)}{\lambda}]$$

相干为静止的点满足:

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi(30 - x)}{\lambda} = (2k + 1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{2\pi \boldsymbol{x}}{\lambda} + \frac{2\pi(30-\boldsymbol{x})}{\lambda} = (2\boldsymbol{k}+1)\pi$$

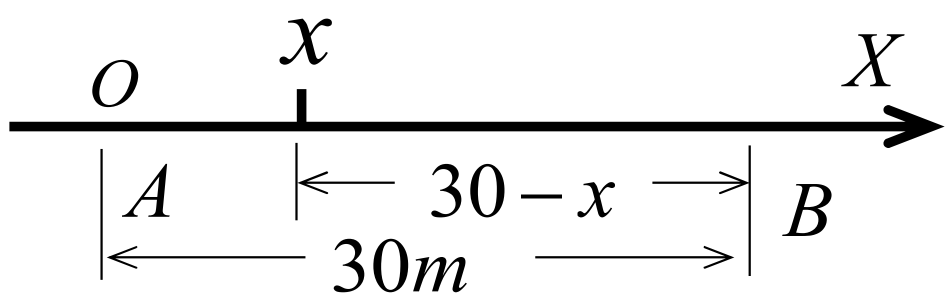
$$\boldsymbol{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

干涉相消的点需满足： $30 - 2x = k\lambda$

因为： $\lambda = \frac{u}{\nu} = 4m$

$$x = 15 - 2k$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



$$\boldsymbol{x = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots 25, 27, 29m}$$