

傅里叶级数

$u_n(x)$ 每一项都是一个三角函数 (保证了无穷可导)

三角级数 n 个简谐运动叠加 $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) \xrightarrow{\omega x \rightarrow x} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

其中: $a_n = A_n \sin \varphi_n$ $b_n = A_n \cos \varphi_n$
(φ_n 是给定的初相角)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 由三角函数列 (系) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ (省略系数) 构成。

三角级数 (若收敛, 和函数有周期 2π)

Thm. 收敛的充分条件 级数 $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ 收敛 $\rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 绝对收敛。

Def. 正交性 $\varphi, \psi \in R[a, b], \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0$ φ, ψ 正交。

三角函数系在 $[-\pi, \pi]$ 有正交性。 (三角函数系中的任何两个函数) 注意: 三角函数系包括 "1"

定理 15.2 若在整个数轴上 (三角函数系与和函数的关系)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (9)$$

且等式右边级数一致收敛, 则有如下关系:

函数 f 关于三角函数系的傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(10) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Pf: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi$ 等式同乘 $\sin kx, \cos kx$ 再积分。 (利用正交性, 仅平方的项 $\neq 0$)

一般地说, 若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积的函数, 则按公式 (10) 计算出的 a_n 和 b_n 称为函数 f (关于三角函数系) 的傅里叶系数, 以 f 的傅里叶系数为系数的三角级数 (9) 称为 f (关于三角函数系) 的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (12)$$

若右边一致收敛于和函数, 则三角级数即傅里叶级数。 $\sim \rightarrow =$

若从左侧出发 ($T=2\pi, f \in R[-\pi, \pi]$)。可写出形式上的傅里叶级数, 是否收敛再讨论。

收敛定理

定理 15.3 若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上按段光滑, 则在每一点 $x \in [-\pi, \pi]$, f 的傅里叶级数 (12) 收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值, 即

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数。

我们知道, 若 f 的导函数在 $[a, b]$ 上连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上光滑。但若定义在 $[a, b]$ 上除了至多有 (有限个) 第一类间断点的函数 f 的导函数在 $[a, b]$ 上除了至多有限个点外都存在且连续, 在这有限个点上导函数 f' 的左、右极限存在, 则称 f 在 $[a, b]$ 上按段光滑。

推论 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上按段光滑, 则 f 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 f 。

本身可以不是周期函数, 可进行合理的延拓。 (延拓只是为了满足定义, 求系数 a_n, b_n 不需要)

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi], \\ f(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi], \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

一般地, f 的 Fourier series 即 \hat{f} 的 Fourier series

周期 2π 推广至 $2l$ 。

变量替换 $\frac{\pi x}{l} = t, \quad F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

若函数 f 在 $[-l, l]$ 上按段光滑, 则同样可由收敛定理知道

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

奇偶函数的 Fourier series. (若只要求正弦/余弦级数, 奇/偶延拓可以不实际进行 (直接用 "半段区间" 计算结果是相同的))

设 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数, 或是定义在 $[-l, l]$ 上的偶函数, 则在 $[-l, l]$ 上, $f(x)$ $\cos nx$ 是偶函数, $f(x) \sin nx$ 是奇函数。因此, f 的傅里叶系数 (4) 是

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

于是 f 的傅里叶级数只含余弦函数的项, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (\text{余弦级数}) \quad (7)$$

对定义在 $[0, l]$ 上函数, 作奇/偶延拓 (形式), 可得正/余弦展开

按段光滑性质:

1° f 在 $[a, b]$ 上可积。

2° 在 $[a, b]$ 上每一点都存在 $f(x \pm 0)$, 且有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x+0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = f'(x-0). \quad (13)$$

3° 补充定义 f' 在 $[a, b]$ 上那些至多有限个不存在点上的值后 (仍记为 f'), f' 在 $[a, b]$ 上可积。

收敛定理的证明

预备定理 1 (贝塞尔 (Bessel) 不等式) 若函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

其中 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数. (1) 式称为贝塞尔不等式.

Pf: 令 $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) f(x) dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_m^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum (a_n^2 \cos^2 nx + b_n^2 \sin^2 nx) dx$$

$$= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_m(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_m(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_m^2(x) dx$$

$$\geq 0$$

原不等式对任意 $m \in \mathbb{N}$ 成立. 左侧级数部分和数列有界, 收敛

推论 1 若 f 为可积函数, 则

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因为 (1) 式的左边级数收敛, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项 $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$, 亦即有 $a_n \rightarrow 0$ 与 $b_n \rightarrow 0$, 这就是 (5) 式. 这个推论也称为黎曼-勒贝格定理. (黎曼引理)

推论 2 若 f 为可积函数, 则

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Pf: LHS 1 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x) \cos \frac{x}{2}] \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} [f(x) \sin \frac{x}{2}] \cdot \cos nx dx$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin nx dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \cos nx dx$$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \cos \frac{x}{2}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$f_1, f_2 \in R[-\pi, \pi].$$

由推论 1 ...

预备定理 2 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则它的傅里叶级数部分和 $S_n(x)$ 可写成

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt, \quad \text{部分和积分形式.}$$

当 $t=0$ 时, 被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = n + \frac{1}{2}$$

来确定.

Pf: 仍没出部分和, 系数用积分形式代入

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k u du \right) \cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin k u du \right) \sin kx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos k u \cos kx + \sin k u \sin kx) \right] du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(u-x) \right] du. \end{aligned}$$

令 $u=x+t$, 得

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt. \quad \text{周期 } 2\pi \\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt &= \frac{1}{2} + \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} - 1 = \frac{\sin \frac{t}{2} + 2 \cos \frac{nt}{2} \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \cos \frac{nt}{2} \cos \frac{nt}{2} \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - 1 \\ &= \frac{\sin \frac{t}{2} + \sin nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - 1 = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

收敛定理证明: pre: $T=2\pi$. piecewise smooth $[-\pi, \pi]$

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

即证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x-) + f(x+)}{2} - S_n(x) \right] = 0 \iff$

证① 已知: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = 1.$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x+0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right] &= 0 \quad \textcircled{1} \\ \text{AND} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x-0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right] &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \Rightarrow \frac{f(x+)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

$$\textcircled{1} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+) - f(x+t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

令 $\varphi(t) = \frac{f(x+) - f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$, 只要有 $\varphi(t) \in R[0, \pi]$. 由推论 2, 即得证.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = - \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \cdot \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} = -f'(x+) \quad \text{令 } \varphi(0) = -f'(x+), \varphi \in R[0, \pi]$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} - \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}, & t \in (0, \pi] \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad f(x) \text{ 按段光滑.}$$

Parseval Identity

②2. 设 f 为 $[-\pi, \pi]$ 上可积函数. 证明: 若 f 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 f , 则成立帕塞瓦尔 (Parseval) 等式:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

这里 a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数.

分析 由 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 求出 $f(x)$ 的傅里叶展开式.

证明 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), x \in [-\pi, \pi)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx] dx$$

由 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积知, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有界, 由于 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛, 由第十三章 §1 习题 4 和 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx]$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛, 因此

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx] dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + b_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

FDU 教材.

有 Fourier 级数 (可计算 a_n, b_n) 条件: $f(x)$ 在周期上绝对可积.

记 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (不保证收敛且收敛主 $f(x)$)

收敛判别

Dirichlet 积分.
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

Riemann 引理 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 绝对可积

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx = 0.$$

局部性原理. $f(x)$ 绝对可积. 在 x 是否收敛只与 $(x-\delta, x+\delta)$ 性质有关