2017 年实变函数期中考试试题

一．判断对错，正确,需简要证明,错误,需举反例（每题 7 分，共 70 分）

1.若可测集 E 满足 $m(E)=m(\overline{E})$，则 E 是闭集。 错 ( )

2.若 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中一列可测集，且 $m(E_n)=1(n=1,2,\cdots)$，则 $m|\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n|=1$. (对)

3.若 $A\subset[0,1]$ 且 $m(A)=0$，则 $m\left(\overline{[0,1]\setminus A}\right)=1$. (对)

4 .若 $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是可测集 E 上任何一族可测函数，记 $f(x)=\sup f_\alpha(x)$，则 $f(x)$ 也是 E 上可测函数. (错)

5 若 f 是 $E=(-\infty,+\infty)$ 上定义的连续函数，则 $E(f\geq 1)$ 是可测集. (对)

6.若 $f_n \quad ^{m} \quad f$，且 $mE<+\infty$，则存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ 满足 $f_{n_k} \quad ^{a.u} \quad f$. (对)

7. . 若 A_1, A_2 是两个可测的集合，且满足条件 $A_1 \quad A_2 \quad ,E_1 \quad A_1, E_2 \quad A_2$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*E_1+m^*E_2$

8.若 E 是可测集，$f:E\to\mathbb{R}$ 满足对 $\forall\alpha\in\mathbb{R},E(f=\alpha)$ 可测，则 f 也是 E 上可测函数。 ( ) 错

9.设 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{T}}$ 是一族可测集，且 $mE_\lambda=0,\ \forall\lambda\in\mathrm{T}$. 则 $m(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathrm{T}}E_\lambda)=0$. （ 错 ）

10 设 A_1，A_2 是 $[0,\ 1]$ 中两个可测集且 $mA_1+mA_2>1$，则：$m(A_1\bigcap A_2)>0$. (对)

二、**证明题(每题 10 分,共 30 分)**

1.设 E 是 $\mathbb{R}$ 中可测集，T 是 $\mathbb{R}$ 中任意非空集，证明：

$m^*(E\bigcup \mathrm{T})+m^*(\mathrm{T}\bigcap E)=mE+m^*\mathrm{T}$.

2.设 $\{E_n\}$ 为一列可测集，$E=\bigcup^{\infty} E_n$ 证明：f 在 E 上可测的充要条件是 f 在每个 E_n 上可测.

3. 设 $f_n, f: E\to\mathbb{R}$ 是可测函数，且 $mE(|f_n-f|>0)<\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$ ，证明：

$f_n\xrightarrow{a.e.} f$.