线性整数规划

Linear Integer Programming

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

模型、理论及应用

线性规划模型：

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\boxed{x_1, x_2 \cdots, x_n \geq 0}$$

实际问题要求x_i为整数！

如机器的台数，人数等

整数规划

线性整数规划 —— 简称整数规划

非线性整数规划

整数规划应用实例

例2.1 胜利家具厂生产桌子和椅子两种家具。桌子售价50元/个，椅子售价30元/个，生产桌子和椅子需要木工和油漆工两种工种。生产一个桌子需要木工4个小时，油漆工2小时。生产一个椅子需要木工3个小时，油漆工1小时。该厂每月可用木工工时为120小时，油漆工工时为50小时。问该厂如何组织生产才能使每月的销售收入最大？

解：设$x_1 =$生产桌子的数量, $x_2 =$生产椅子的数量

$z =$每月的销售收入

$$\max \quad z = 50x_1 + 30x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1, x_2为整数

纯整数规划

例（背包问题）一个旅行者，为了准备旅行的必备物品，要在背包里装一些有用的东西，但他最多只能携带b公斤的东西，而每件物品都只能整件携带，于是他给每件物品规定了一个"价值"，以表示其有用程度。如果共有m件物品，第i件件物品的重量为b_i，价值为c_i，问题就变成：在携带的物品总重量不超过b公斤的条件下，携带哪些物品可使总价值最大

解：设$x_i = \begin{cases} 1 & 带第i件物品 \\ 0 & 不带第i件物品 \end{cases}$

z 表示所带物品的总价值

$$z = \sum_{带第i件} c_i = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

$$携带物品的总重量 = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i$$

0-1规划

型：

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \le b$$

$$x_i = 0,1$$

$$i = 1, 2, \cdots m$$

例：某公司计划在几个地点建厂, 可供选择的地点有$A_1, A_2, \cdots,$ A_m, 它们生产同一种产品，生产能力分别是$a_1, a_2, \cdots$， a_m, 建设费分别是f_1，$f_2, \cdots$，f_m。又有n个地点B_1，$B_2, \cdots$，B_n需要销售这种产品, 其销售量分别为b_1，$b_2, \cdots$，b_n。从工厂A_i运往销地B_j的单位运费为c_{ij}。试决定应在哪些地方建厂，使得既满足各地的需求, 又使总建设费和总运输费最省？

解: 设x_{ij}表示工厂A_i运往商店B_j的运量

则总运费为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

设$y_i = \begin{cases} 1 & \text{在第}i\text{个地点建厂} \\ 0 & \text{不在第}i\text{个地点建厂} \end{cases}$

则总建厂费为 $\sum_{i=1}^{m} f_i y_i$

数学模型：

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & i = 1, 2, .., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j & j = 1, 2, .., n \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad y_i = 0,1$$

混合型整数规划

$$\text{整数规划}\begin{cases}\text{纯整数规划}\\ \text{0—1规划}\\ \text{混合型整数规划}\end{cases}$$

纯整数规划的数学模型：

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \cdots, x_n \geq 0$$

$x_1, x_2 \cdots, x_n$取整数

0--1规划的数学模型：

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \cdots, x_n \geq 0$$

$$x_1, x_2 \cdots, x_n = 0,1$$

例 $\max z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 & \times \quad \surd \quad \surd \\ 2x_1 + x_2 \le 9 & \quad\; \surd \quad \surd \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \quad\; \surd \quad \surd \\ x_1, x_2 为整数 & \quad\; \surd \quad \surd \end{cases}$$

不可行

取$x_1 = 3，\ x_2 = 3$

取$x_1 = 3，\ x_2 = 2$

可行

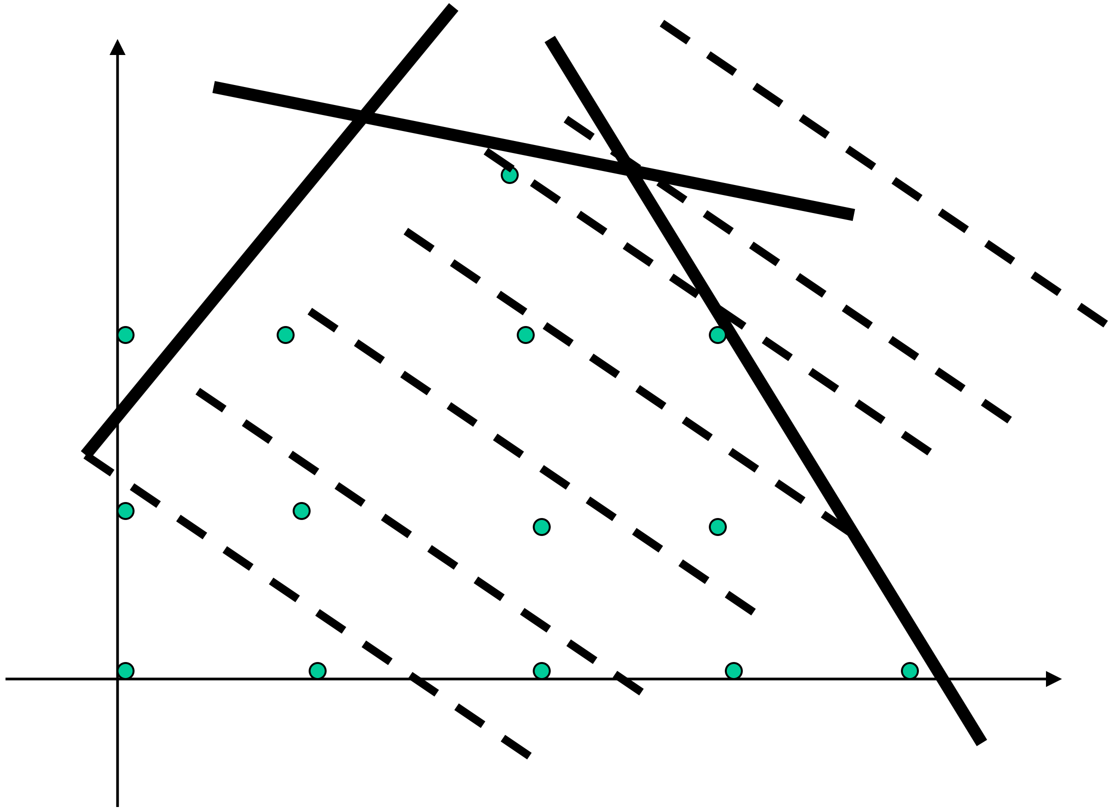
Z=130

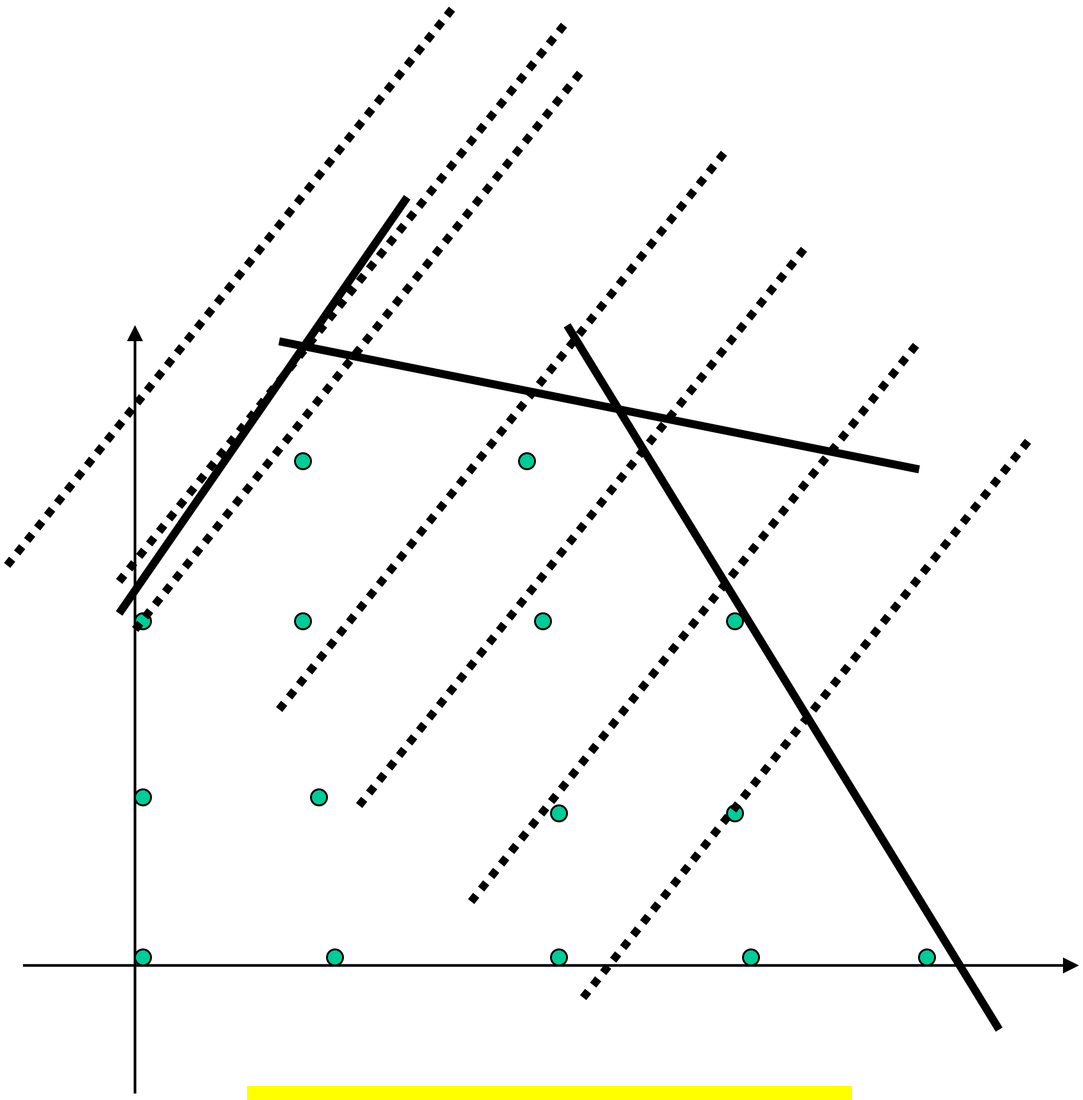
但当$x_1 = 4，\ x_2 = 1$时，可行且Z=140

$\max\ z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优解为$x_1 = 3.25，\ x_2 = 2.5$





注 释

- 最优解不一定在顶点上达到
- 最优解不一定是放松问题最优解的邻近整数解
- 整数可行解远多余于顶点，枚举法不可取

二、整数规划解的理论

对整数规划问题：

$$(\text{IP})\quad \max z = CX \qquad s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max z = CX \qquad s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

（IP）问题的松弛问题

对（*IP*）问题：

$$\max z = CX$$
$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j 为整数 \end{cases}$$

其松弛问题为：

$$\max z = CX$$
$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

① *IP*的可行解域$\subset$松弛问题的可行解域

⇒ 若松弛问题无可行解,则*IP*无可行解

② *IP*的最优值$\leq$松弛问题的最优值

⇒ 松弛问题的最优值是原整数规划的目标函数值的上界

(3)若松弛问题可以找到一个整数解$\overline{X}$,

则$\overline{X}$的目标函数值是*IP*最优值的下界

④ 若松弛问题的最优解X^*为整数解

则X^*也是*IP*的最优解