

整数规划的理论与求解

——指派问题与匈牙利算法

运筹学研究所
哈尔滨工业大学经济与管理学院

经典指派问题

n 个员工分配作 n 项工作, i 个员工做 j 项工作的成本为 c_{ij} , 要求一个人只做一项工作, 一项工作只能由一个人做, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$ 。求最佳分配方案

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

指派问题的解应对应于成本矩阵的不同行与不同列, 且总成本最小

例

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

c_{ij}

指派问题的数学模型

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 员工分配做第 } j \text{ 项工作} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

指派问题的性质

定理：对于指派问题，成本矩阵的任一行(或列)减去(或加上)一个相同的数得到的新指派问题与原问题同解

$$\begin{aligned}
z' &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n (c_{kj} \pm s) x_{kj} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj} + (\pm s) \sum_{j=1}^n x_{kj} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj} + (\pm s) \\
&= z + (\pm s)
\end{aligned}$$

匈牙利法的基本思路：

对指派矩阵 C 的行和列减去某个常数，将 C 化成有 n 个位于不同行不同列的零元素，令这些零元素对应的变量取1，其余变量取零，既得指派问题的最优解

说明：

1. 书上的算法比较繁琐, 且计算量大, 一般教材中采用本课件提供的算法.
2. 课堂上讲的算法本质上是这种算法的变形,
不再列出.

例：求费用矩阵为右表的指派问题的最优解

人\工作	A	B	C	D	E
	甲	12	7	9	7
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	12
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	6

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

第一步：每行减去最小元素，每列减掉最小元素；

第二步：对零元素画圈打×；

第三步：划线覆盖零元素；

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 \\ -6 \\ -7 \\ -6 \\ -4 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 2 & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{2} & 3 & 0 & \cancel{3} & 0 \\ \cancel{0} & 10 & 5 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & \cancel{0} & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{0} & 6 & 3 & 6 & 2 \end{array}} \quad \checkmark$$

得4个○，且不存在没打×的○

第四步：在没有被直线
复盖的元素中找出最小
元素，让打√号的列加上
这个元素，打√号的行减
去这个元素。

5	0	2	0	2
2	3	0	0	0
0	10	5	7	5
9	8	0	0	4
0	6	3	6	2

7	0	2	0	2
4	3	0	0	0
0	8	3	5	3
11	8	0	0	4
0	4	1	4	0

匈牙利法的具体步骤：

第一步：变换指派问题的费用矩阵，使其在各行各列都出现0元素：

方法：首先每行元素减去该行的最小元素，然后每列减去该列的最小元素

第二步：进行试指派（画○）

方法：从含0元素最少的行或列开始，圈出一个0元素，用○表示，然后划去该○所在的行和列中的其余0元素，用×表示，依次类推。

若矩阵中的○的个数等于n，则得最优解

若矩阵中的○的个数 < n，则进行第三步

第三步：做能覆盖所有0元素的**最小直线集合**：

- 1) 对没有○的行打√号
- 2) 对打√号的行上所有0元素的列打√号
- 3) 再对打√号的列上所有○的行打√号
- 4) 重复以上步骤直到得不出新的打√号为止
- 5) 对没有打√号的行画横线，所有打√号的列画纵线，所得到的直线既是覆盖所有0元素的最小直线集合

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。

练习

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R1} \times \frac{1}{7}, \text{R2} - 5\text{R1}, \text{R3} \times -1, \text{R4} \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

一般指派问题

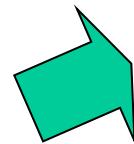
- 最大化指派问题
- 人数和工作数不等的指派问题
- 一个人可做几项工作的指派问题
- 某项工作一定不能由某人做的指派问题

最大化指派问题

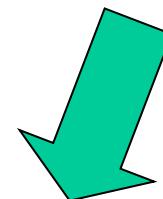
最大化指派问题

4	8	7	15	12
12	9	2	14	10
6	9	12	8	7
11	7	17	6	10
6	9	12	10	6

最大值



17-4	17-8	17-7	17-15	17-12
17-12	17-9	17-2	17-14	17-10
17-6	17-9	17-12	17-8	17-7
17-11	17-7	17-17	17-6	17-10
17-6	17-9	17-12	17-10	17-6



13	9	10	2	5
5	8	15	3	7
11	8	5	9	10
6	10	0	11	7
11	8	5	7	11

最小化指派问题

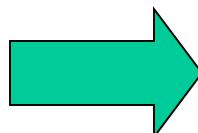
人数和工作数不等的指派问题

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 \\ 12 & 9 & 2 & 14 \\ 6 & 9 & 12 & 8 \\ 11 & 7 & 17 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\text{ }} \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 0 \\ 12 & 9 & 2 & 14 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 0 \\ 11 & 7 & 17 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

一个人可做几项工作的指派问题

A₁可同时做
三项工作

$$A_1 \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_2 \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$
$$A_3 \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$



$$A_1 \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_2 \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$
$$A_3 \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$
$$A'_1 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A''_1 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

反例1

1	1	3	0	3	3	3	3	0
1	1	0	0	1	2	2	2	0
1	2	0	3	3	1	3	2	3
1	0	0	3	0	2	0	0	1
2	0	0	0	1	1	0	2	0
0	2	0	3	1	1	2	0	2
2	3	1	0	0	0	2	2	0
2	1	3	0	2	0	3	0	1
0	3	0	1	0	3	2	0	3

反例2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

线性规划有关的英文词汇

- Operational/operations research 运筹学
- Linear programming 线性规划 Feasible domain 可行域
- Convex set 凸集 Basic feasible solutions 基础可行解
- Simplex algorithm 单纯型法 Pivot 主元 Pivoting 主元变换
- Revised, dual simplex algorithm 修正、对偶单纯型法
- Relative cost 相对成本(机会成本) Shadow price 影子价格
- Slack, Surplus, Artificial variable 松弛, 剩余, 人工变量
- Unbounded, Infeasible, Degenerate solution 无界解, 无可行解, 退化解
- Duality 对偶性 Primal, dual problem 原问题, 对偶问题
- Complementary slackness 互补松弛 Sensitivity analysis 敏感度分析
- Transportation problem 运输问题
- Assignment problem 任务分配(指派) 问题
- Bipartite matching 两部图匹配 Hungarian method 匈牙利算法

小结

- 会用分枝定界法
- 会用割平面法
- 会用0-1规划建模
- 会解指派问题