最大流问题

The Maximum Flow Problem

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

大禹治水，黄河疏浚

古代边塞

敦刻尔克大撤退

强渡大渡河

春运

交通堵塞

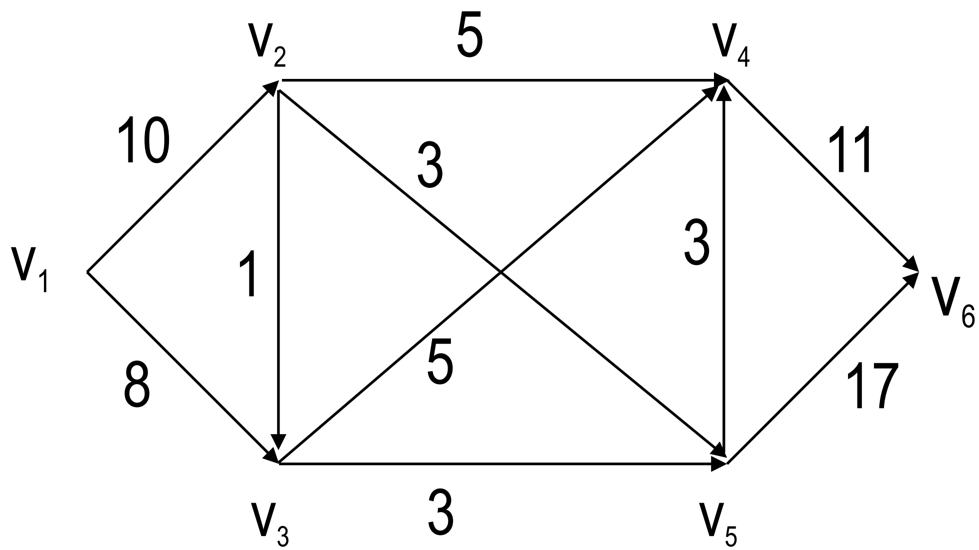
一、最大流问题(the Maximum Flow Problem)

许多系统包含了流量问题。例如，公路系统的车辆流，控制系统中的的信息流、金融系统的现金流。

最大流问题就是指一个出发点最多能发送多少流量到一个接受点。

最大流问题

- 引例：如下输水网络，南水北调工程，从v_s到v_t送水，弧旁数字为管道容量，问应当如何输水使得流量最大？



6.4.1 基本概念与基本定理

定义1 给定一个有向图D(V, A), 在V中指定一个点作为发点，记为V_s；指定另外一个点作为收点，记为V_t；其余的点称为中间点。

定义2 对于有向图D(V, A)中的每一个弧(V_i, V_j), 对应有一个值$c(V_i, V_j)$, 称为弧的容量。对于赋权的有向图D(V, A, C) ,特称为网络, 记为D(V, A, C)。

6.4.1 基本概念与基本定理

定义3　网络上的流，是指定义在弧集合A上的一个函数 $f = \{ f(V_i, V_j) \}$。并称为$f(V_i, V_j)$为弧(V_i, V_j)上的流量。

6.4.1 基本概念与基本定理

网络流的两个性质：

性质1　每个弧上的流量不能超过该弧的最大通过能力即容量。

性质2　中间点的流量为0。

6.4.1 基本概念与基本定理

定义4 满足下述条件的流成为可行流

a. 容量限制条件。对任意一弧(V_i, V_j), 均有

$$0 \le f(V_i, V_j) \le c(V_i, V_j)$$

b. 平衡条件

1. 对于中间点：流入量等于流出量，流量为0；

2. 对于发点: 只有流出量, 流量为可行流的流量为$v(f)$

3. 对于收点: 只有流入量, 流量为可行流的流量为$-v(f)$

6.4.1 基本概念与基本定理

定义5 容量最大的可行流成为最大流.

$$(1)\quad 0 \le f(v_i, v_j) \le c(v_i, v_j) \qquad (v_i, v_j) \in A$$

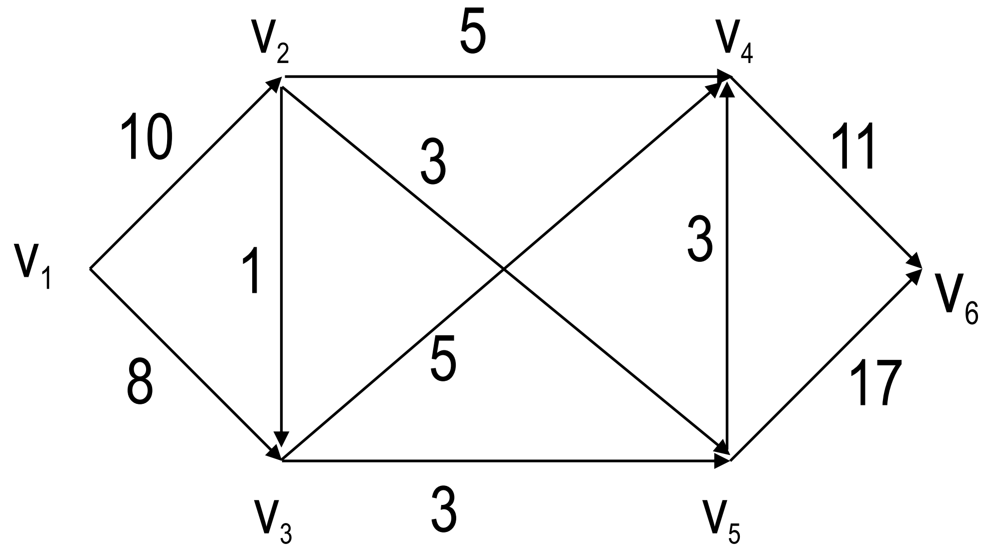
$$(2)\quad \sum f(v_i, v_j) - \sum f(v_j, v_i) = \begin{cases} v(f) & (i = s) \\ 0 & (i \neq s, t) \\ -v(f) & (i = t) \end{cases}$$

6.4.1 基本概念与基本定理

定义 6　如果对于网络中弧(v_i, v_j)满足$f(v_i, v_j) = c(v_i, v_j)$，则称为**饱和弧**；满足$f(v_i, v_j) = 0$，则称为**零弧**；满足$f(v_i, v_j) > 0$，则称为**非零弧**.

定义 7　如果μ是网络中联结发点v_s和收点v_t的一条链。如果定义链的方向为从v_s到v_t，那么定义与链方向相同的为**前向弧**，否则为**后向弧**。

前向弧的全体记为μ^+，后向弧的全体记为μ^-



在链 $\mu=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ 中

$$\mu^+=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$$

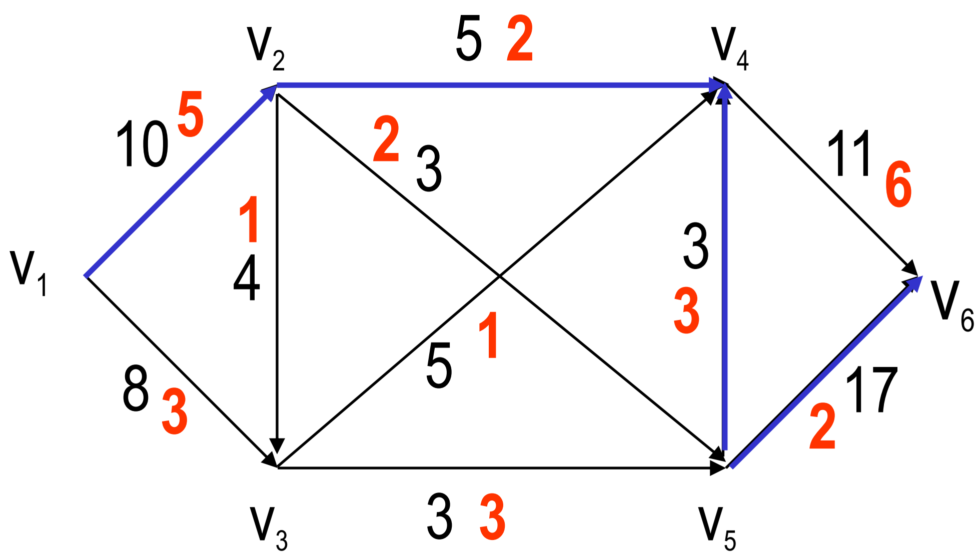
$$\mu^-=\{(v_5, v_4)\}$$

6.4.1 基本概念与基本定理

定义 8　设 f 是一个可行流，μ 是网络中联结发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，若 μ 满足下列条件，称之为一条**增广链**：

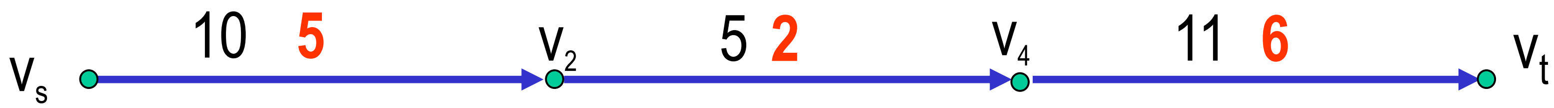
(1) 对于前向弧 (v_i, v_j)，总满足 $0 \le f(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$

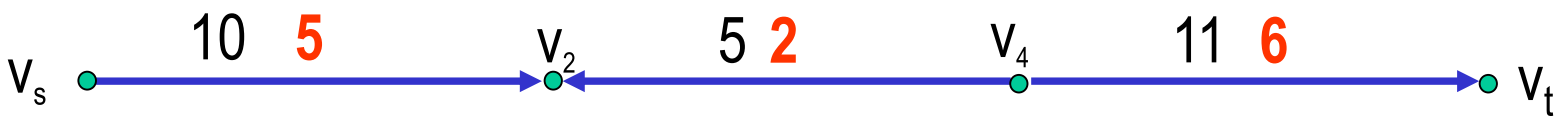
(2) 对于后向弧 (v_i, v_j)，总满足 $0 < f(v_i, v_j) \le c(v_i, v_j)$



6.4.1 基本概念与基本定理

增广链的形式

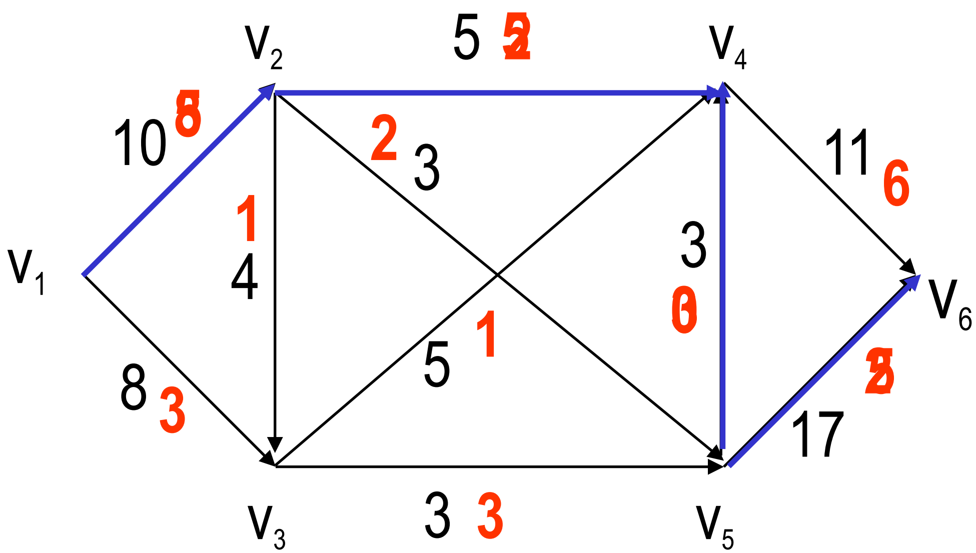




6.4.1 基本概念与基本定理

增广链的作用

对增广链的流量进行调整，可以使得流量增大。



6.4.1 基本概念与基本定理

对于$S, T \subset V$, $S \cap T = \phi$，我们把始点在S，终点在T中的所有弧的集合记为(S, T)

定义9 对于网络$D(V, A, C)$，如果V被剖分为两个非空集合V_1和$\overline{V_1}$，使得$v_s \in V_1$、$v_t \in \overline{V_1}$，那么把$(V_1, \overline{V_1})$称为分离v_s和v_t的截集。

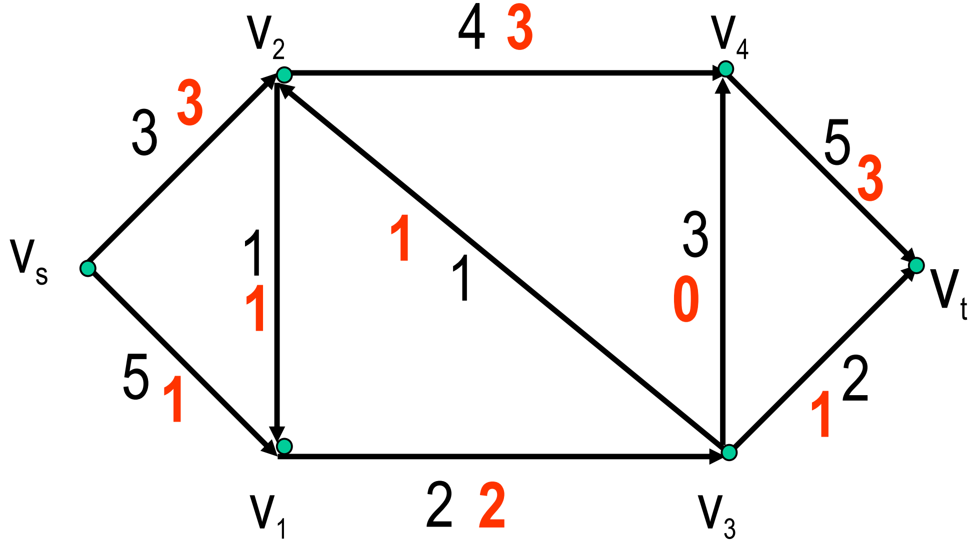
定义10 对于截集$(V_1, \overline{V_1})$，把截集$(V_1, \overline{V_1})$中所有容量之和称为截集$(V_1, \overline{V_1})$的容量，简称为截量。

6.4.1 基本概念与基本定理

性质 1　连接两个互补点集的所有边的流量和恰为网络的流量

$$V_1=\{v_s,v_1,v_2\}$$
$$\bar{V}_1=\{v_3,v_4,v_t\}$$

$$f(v_2,v_4)+f(v_1,v_3)+f(v_2,v_3)$$
$$=3+2-1=4$$



6.4.1 基本概念与基本定理

关于截集有如下性质:

性质 2 任意可行流 f 的流量 $v(f)$ 均不会超过任一截集的容量，即

$$v(f) \le c(V_1, \overline{V_1})$$

性质 3 若对于一个可行流 f^*，网络中有一个截集 $(V_1^*, \overline{V_1^*})$，使得 $v(f^*) = c(V_1^*, \overline{V_1^*})$，那么 f^* 必是最大流，$(V_1^*, \overline{V_1^*})$ 是所有截集中容量最小的一个，即最小截集。

6.4.1 基本概念与基本定理

关于截集有如下定理:

定理 1　最大流的流量等于最小截集的容量。

定理 2　可行流 f^* 是最大流的充分必要条件是不存在关于可行流 f^* 的增广链。

6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

算法思想:

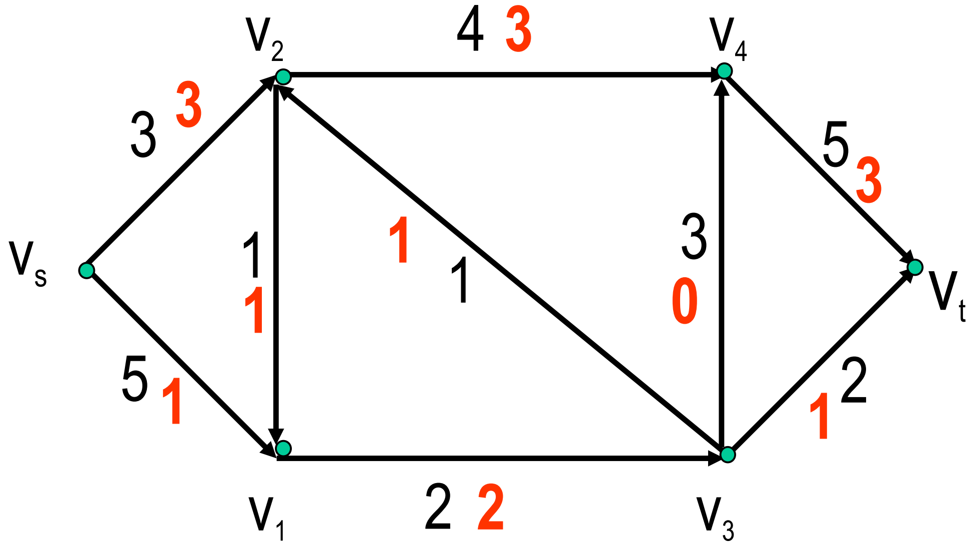
首先得到一条可行流。

然后在可行流的基础上, 寻找增广链. 如果找到, 得到新的流量更大的可行流；如果找不到，说明当前的可行流就是最大流。

由于可行流的流量不能无限增大，因而总可以得到最大流。

6.4.2　标号法(Ford-Fulkerson算法）

第一步：构建一条可行流



6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

第二步：寻找增广链——标号过程

2.1 初始化

标号过程开始时，先给v_s标上$(0,M)$，使得v_s成为第一个具有标号的点，但还没有被检查。第一个标号代表由那点得到，第二个标号，表示可调整的数量。

6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法)

第二步：寻找增广链——标号过程

2.2 对没有被检查的点 v_i 进行检查

a. 若前向弧 (v_i, v_j) 满足 $f(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$，且点 v_j 没有被检查，则给点 v_j 标号 $(v_i, \delta(v_j))$，其中

$$\delta(v_j) = \min\{\delta(v_i), c(v_i, v_j) - f(v_i, v_j)\}$$

同时点 v_j 成为具有标号但没有被检查的点

b. 若后向弧 (v_i, v_j) 满足 $f(v_j, v_i) > 0$，且点 v_j 没有被检查，则给点 v_j 标号 $(-v_i, \delta(v_j))$，其中

$$\delta(v_j) = \min\{\delta(v_i), f(v_j, v_i)\}$$

同时点 v_j 成为具有标号但没有被检查的点

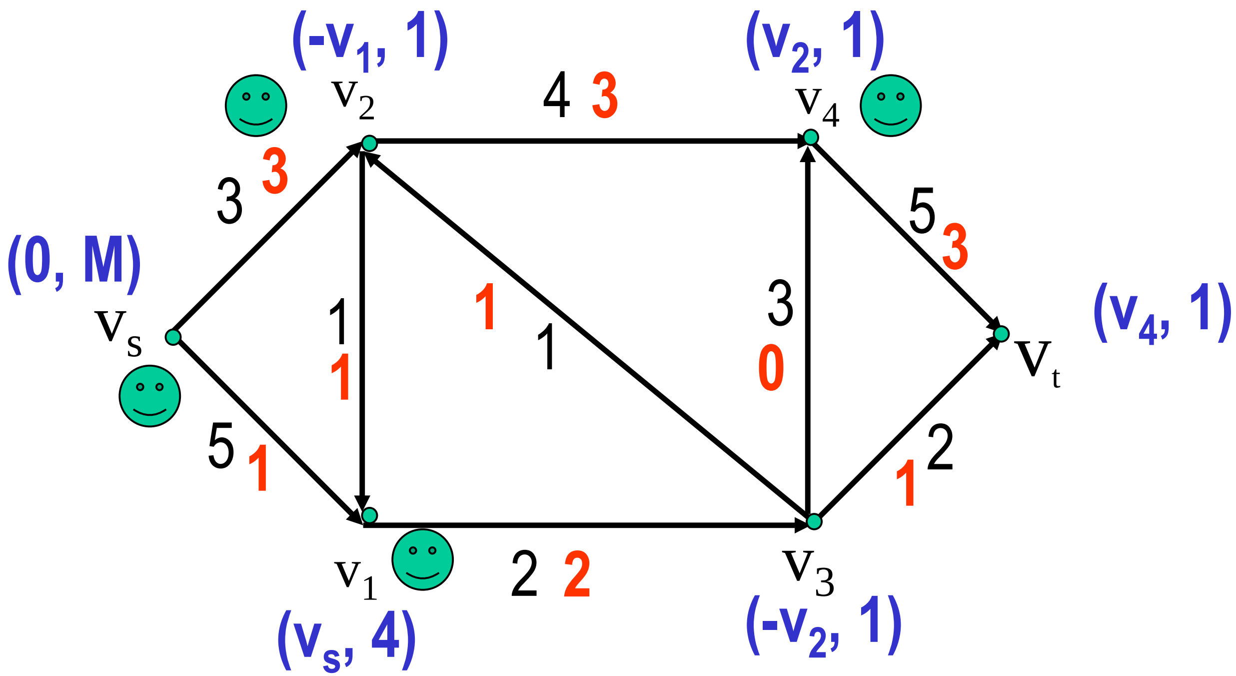
6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

第二步：寻找增广链——标号过程

2.3 点v_i成为具有标号且被检查的点。重复步骤2.2，若收点v_t被标上号，表明就得到一条从v_s到v_t的增广链，转入第三步；否则如果所有标号的点都已被检查，但标号过程不能再进行，则算法结束，这时的可行流就是最大流。

6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

第二步：寻找增广链——标号过程



6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

第三步：调整过程

3.1 利用反向追踪法找到增广链

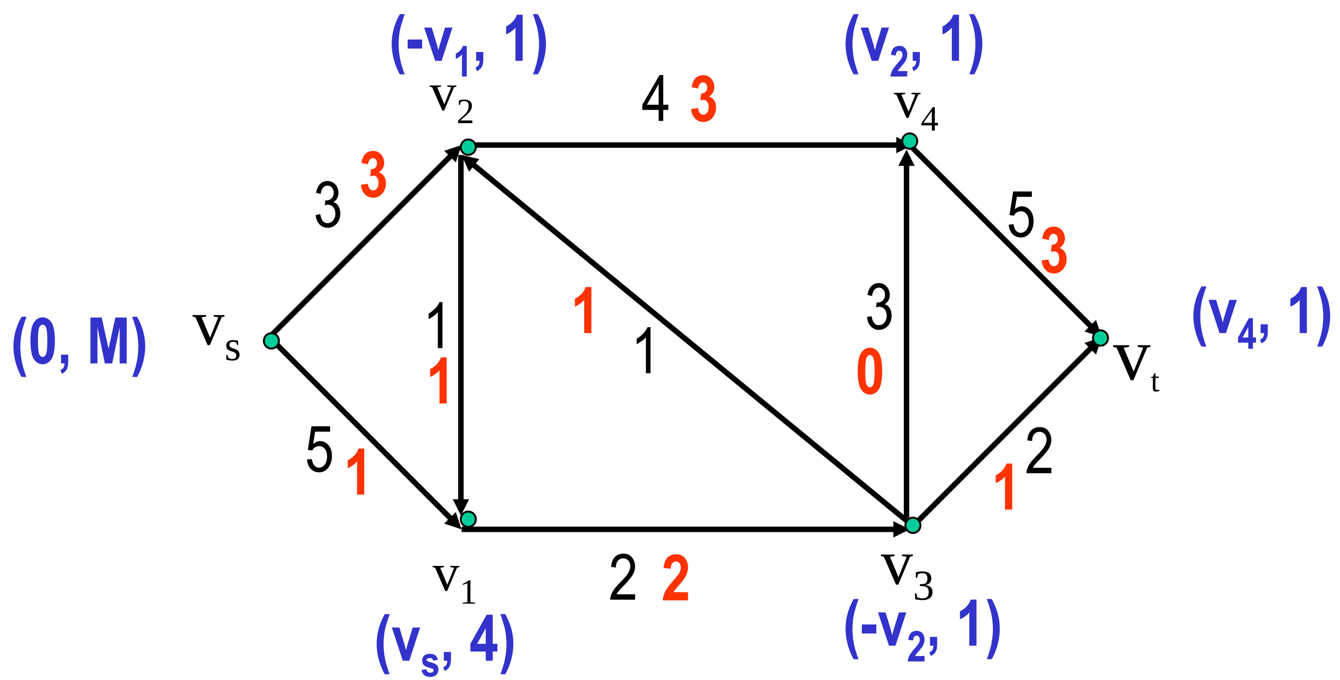
3.2 调整的数量为$\theta=\delta(v_t)$，对增广链上的前向弧的流量增加θ，后向弧上的流量减少θ。非增广链上的弧流量不变。

3.3 转到第二步.

6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

第三步：调整过程

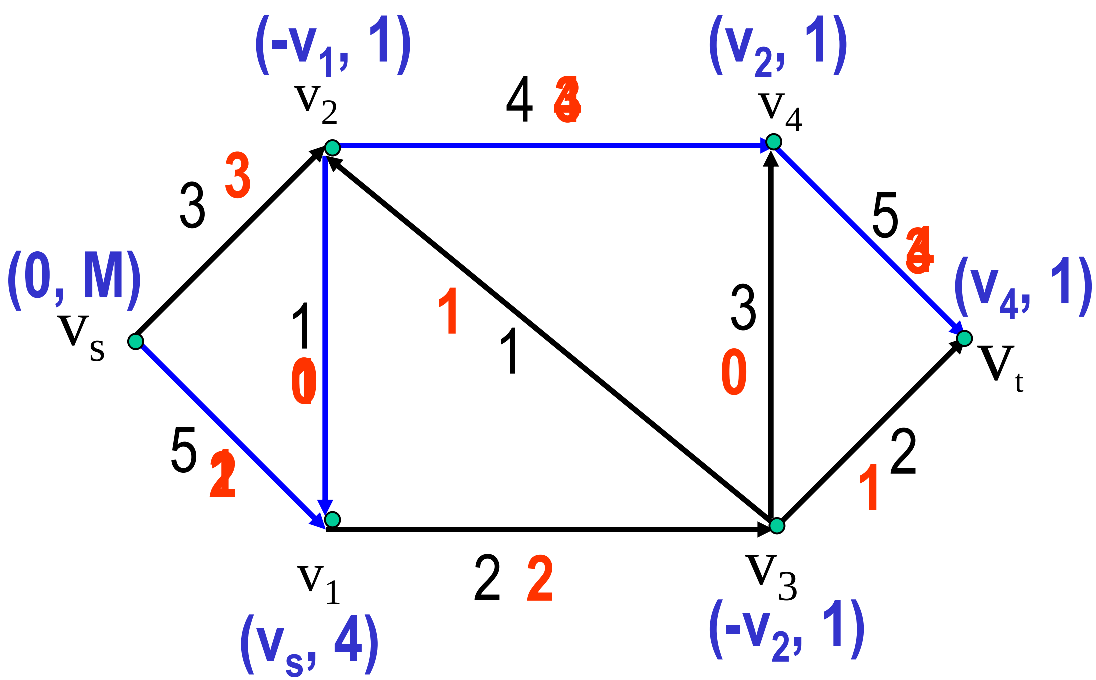
3.1 利用反向追踪法找到增广链



6.4.2 标号法(Ford-Fulkerson算法）

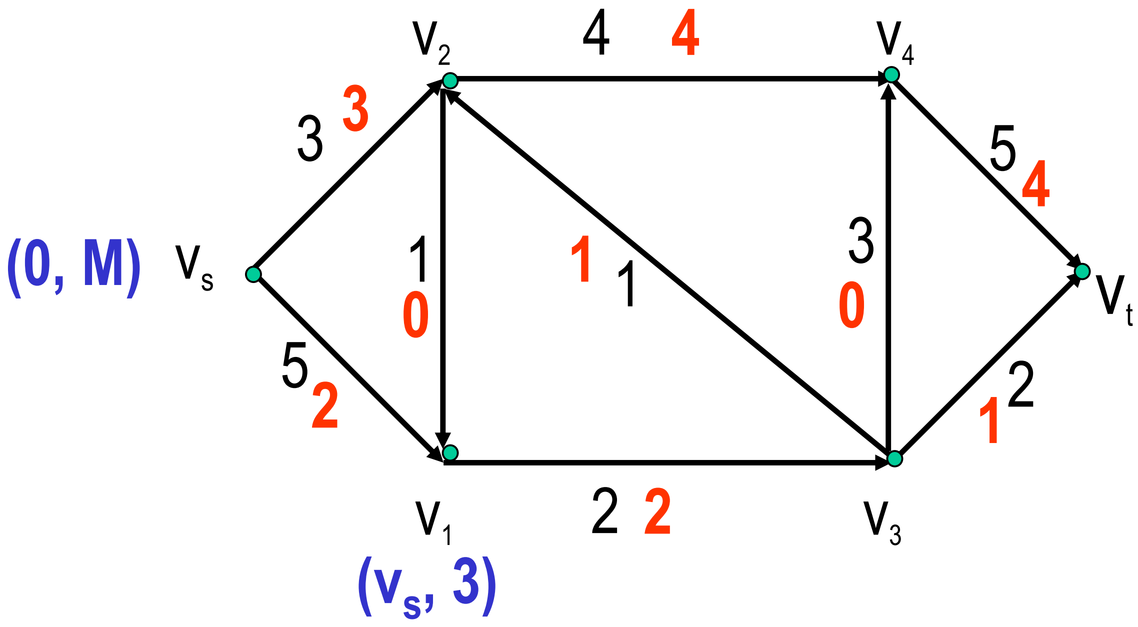
第三步：调整过程

3.2　调整的数量为 $\theta=\delta(v_t)$，对增广链上的前向弧的流量增加 θ，后向弧上的流量减少 θ。非增广链上的弧流量不变。



6.4.2　标号法(Ford-Fulkerson算法）

第二步：再标号过程

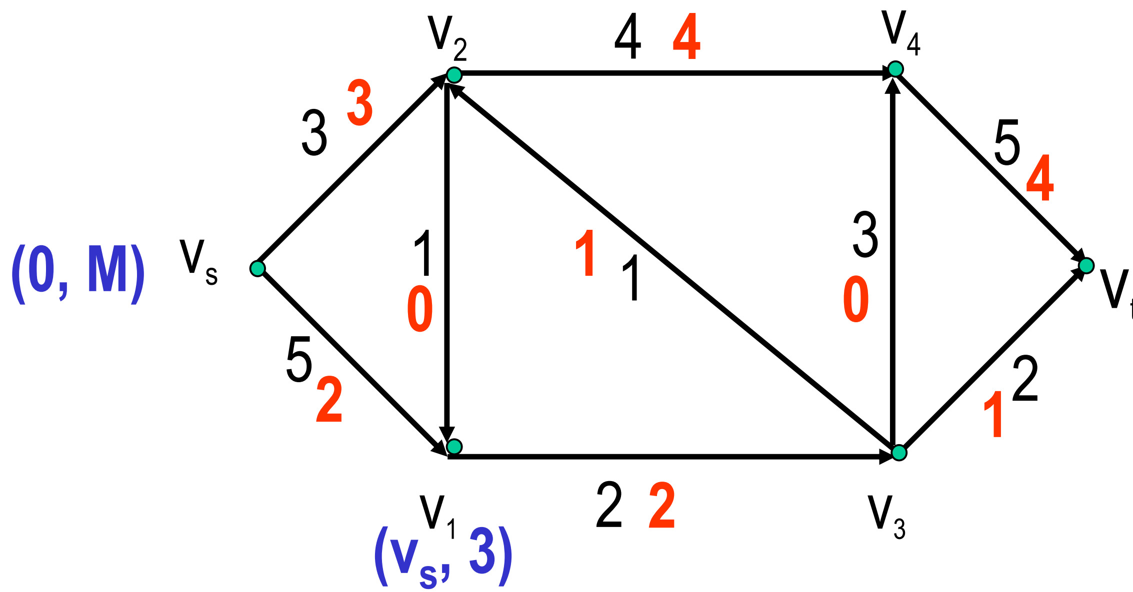


6.4.3 最小截集的获得

在算法结束后，点将分为两部分，第一部分为标号点的集合V_1，第二部分为没有标号点的集合$\bar{V}_1$，那么截集$(V_1, \bar{V}_1)$就是最小截集。

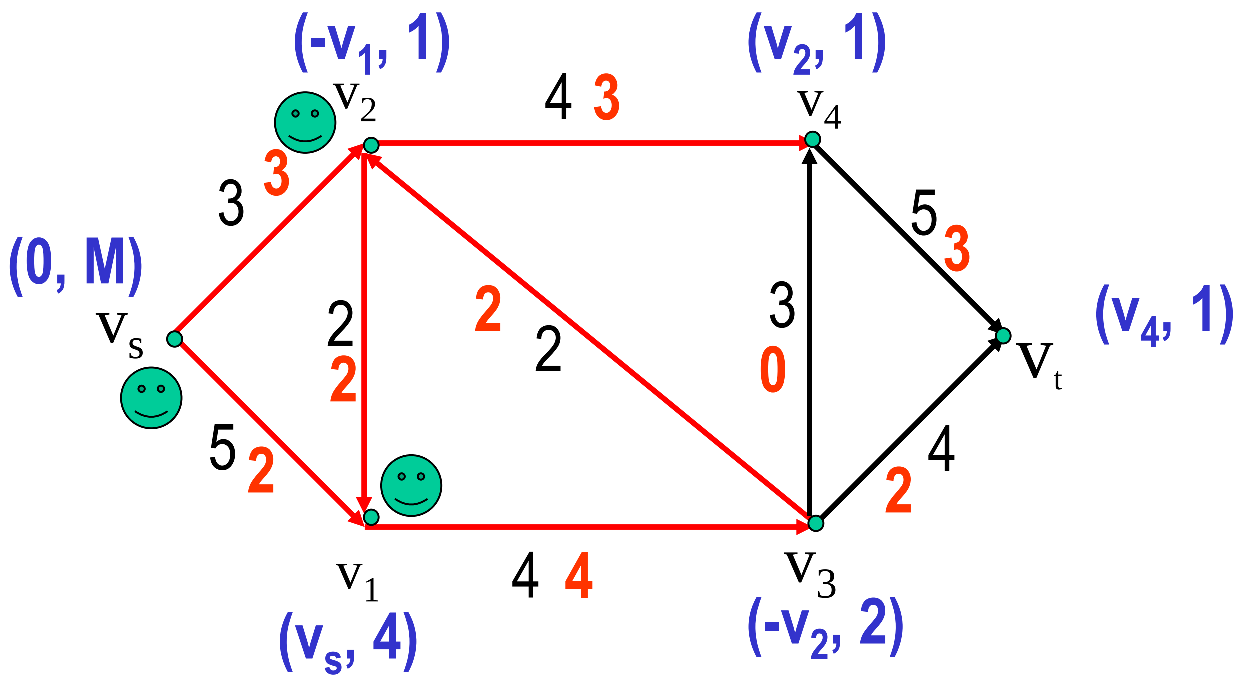
$$V_1 = \{v_s, v_1\}$$

$$\bar{V}_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_t\}$$



算法出现的问题

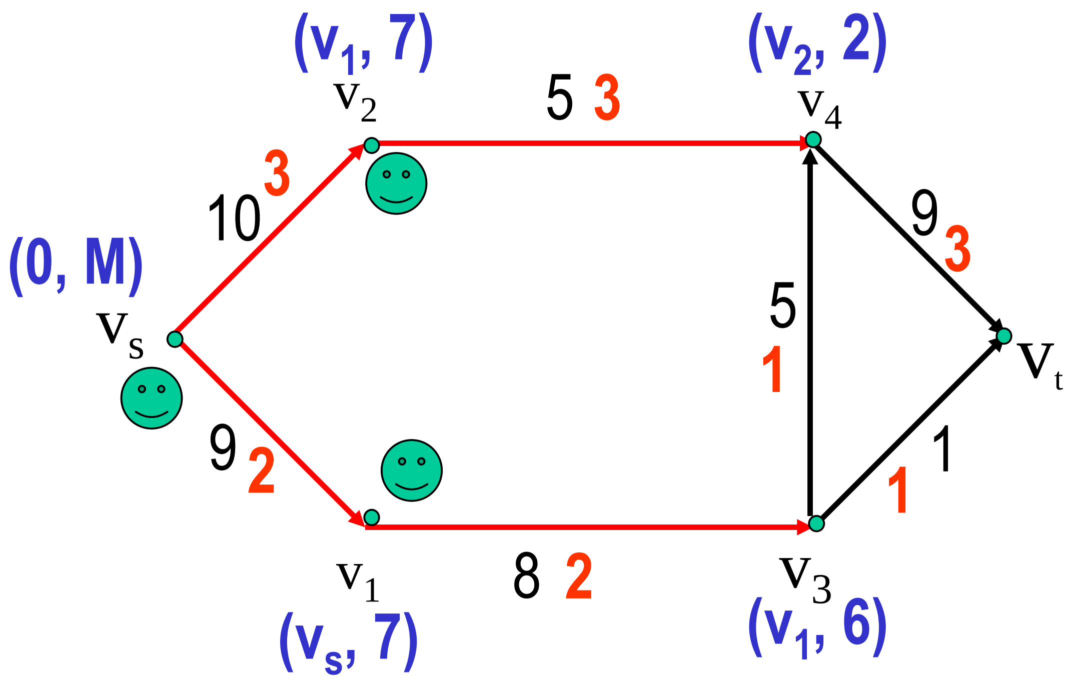
1. 哪个未检查但标号的点先被检查的问题



先检查调整数量最大的点

算法出现的问题

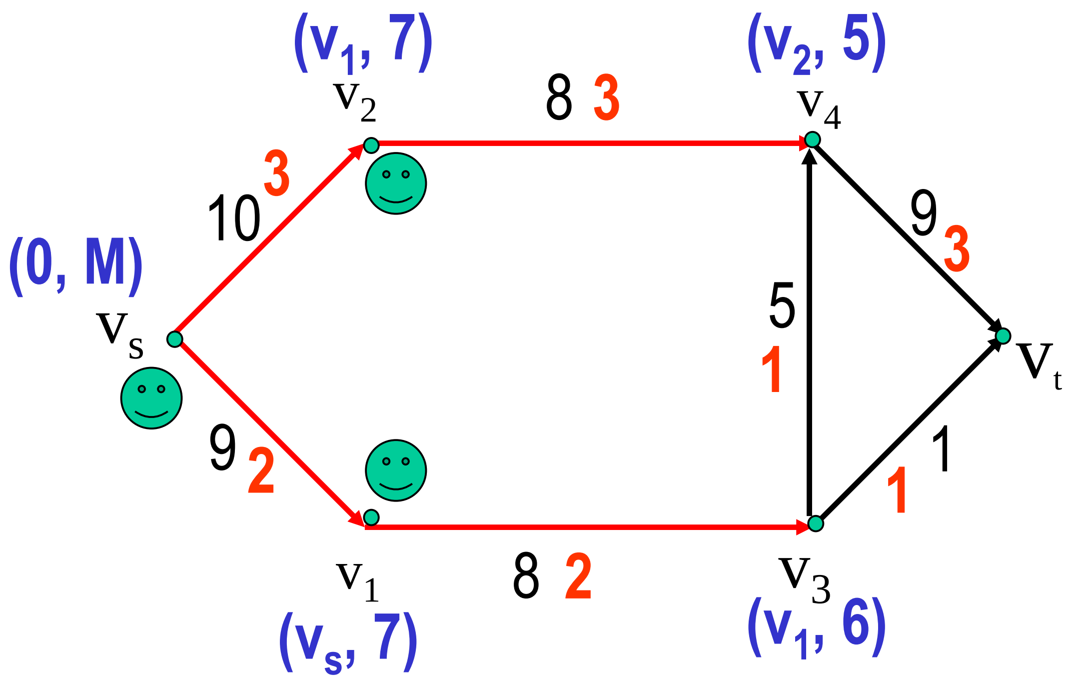
2. 一个点已被标号, 它的标号是否会改变



如果调整数量增大就改变

算法出现的问题

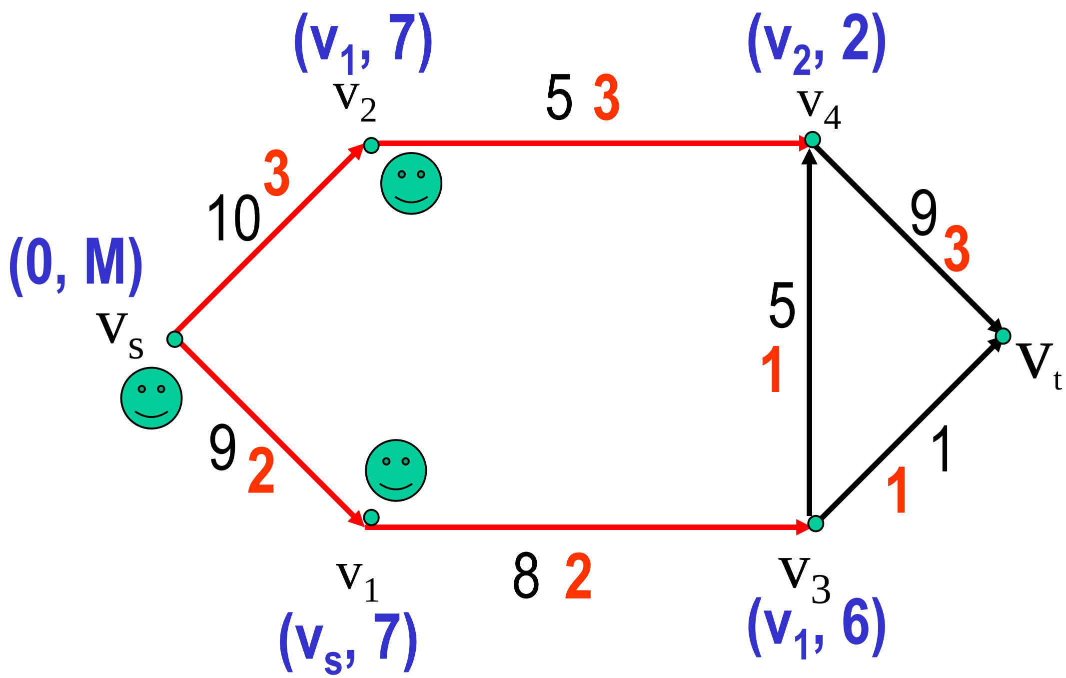
2. 一个点已被标号, 它的标号是否会改变



如果调整数量不能增大就不改变

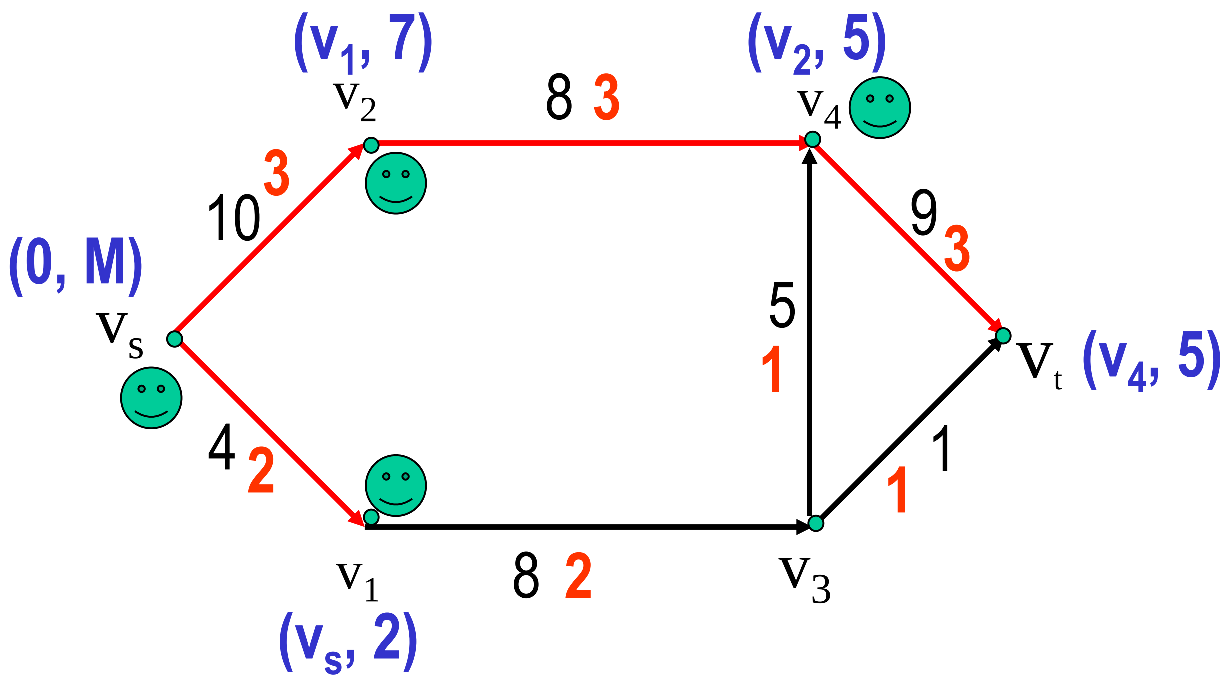
算法出现的问题

3. 对已检查的邻点不再进行标号过程



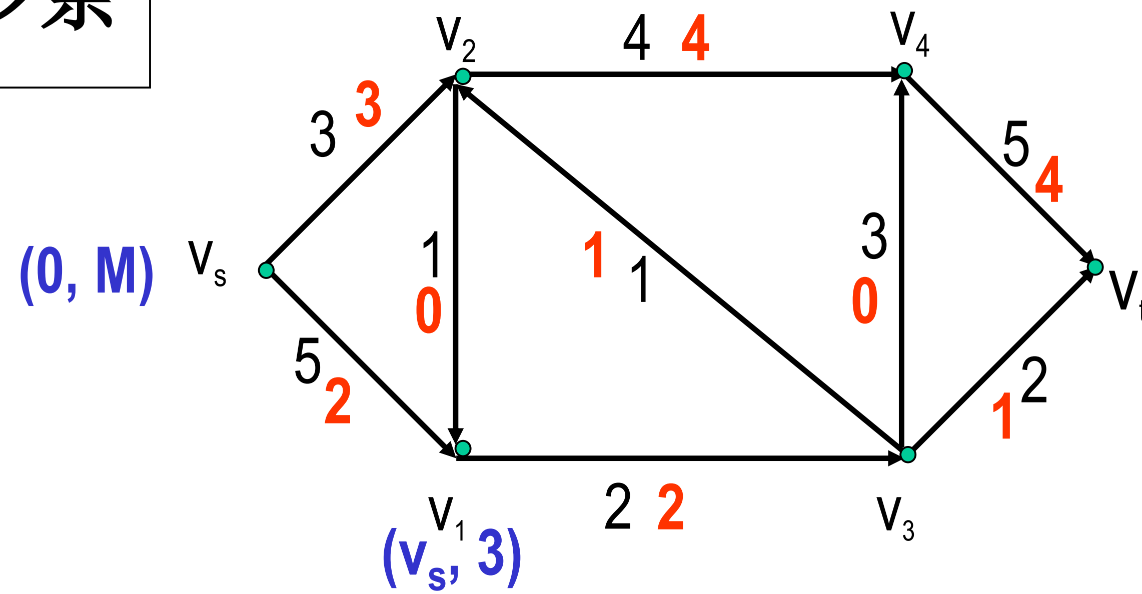
算法出现的问题

4. 收点v_t已经被标号，标号过程是否还要继续

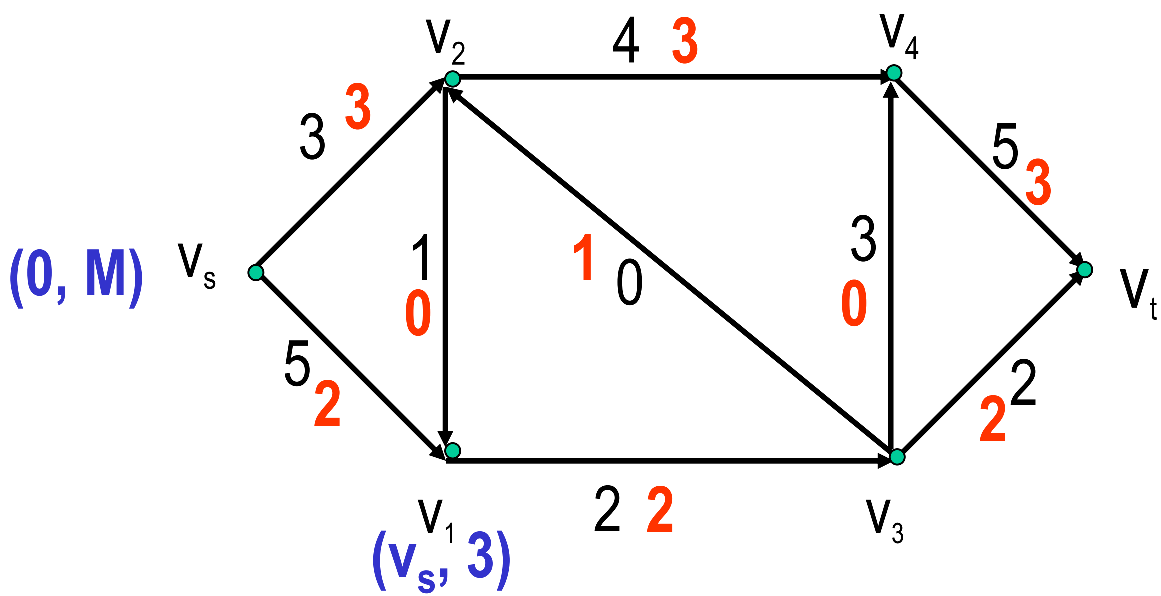


不再继续，直接进入流量调整过程

最大流可能有多条



v2
4 4
v4
3 3
5 4
(0, M)
vs
1 0
1 1
3 0
vt
5 2
2 1
v1
(vs, 3)
2 2
v3



v2
4 3
v4
3 3
5 3
(0, M)
vs
1 0
1 0
3 0
vt
5 2
2 2
v1
(vs, 3)
2 2
v3