最小费用最大流问题

The Minimum Cost Flow Problem

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

6.5.1 问题描述(Introduction)

如果给每条边都赋予一个权，那么网络的每一条边有两个数值，容量和权重。如果视权重为费用，我们的目的是如何找到最小费用的最大流。

6.5.2 模型(Model)

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b(v_i,v_j)f(v_i,v_j)$$

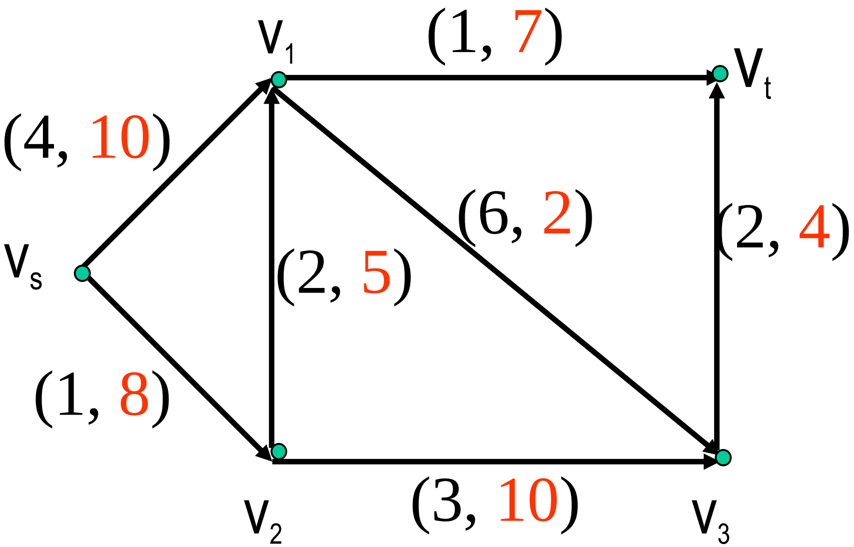
$$s.t. \quad \begin{cases} \max\{v(f)\} \\ \sum f(v_i,v_j)-\sum f(v_j,v_i)=\begin{cases} v(f) & (i=s) \\ 0 & (i\neq s,t) \\ -v(f) & (i=t) \end{cases} \\ 0\le f(v_i,v_j)\le c(v_i,v_j), \quad (v_i,v_j)\in A \end{cases}$$

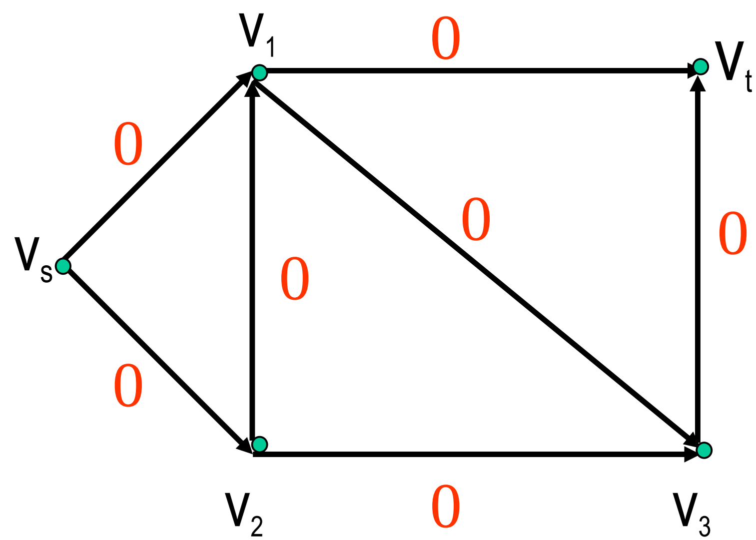
其中 $b(v_i,v_j)$ 为单位流量的费用

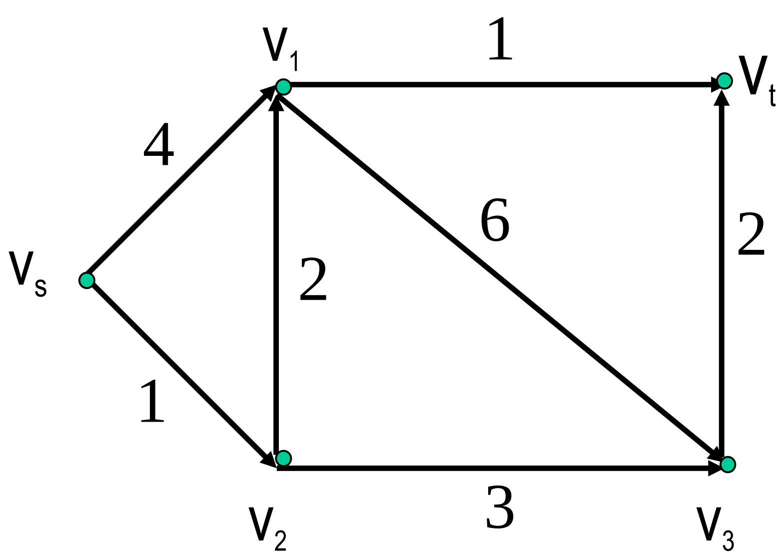
6.5.3 算法(Algorithm)

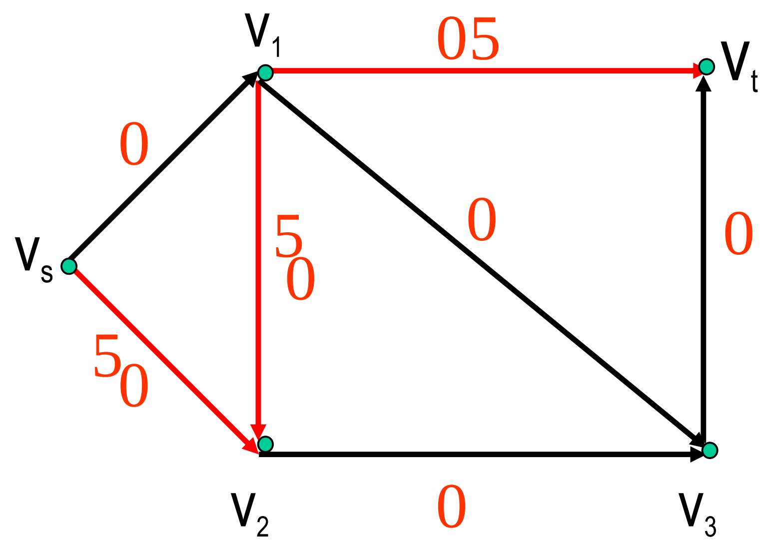
1. 令所有边的流量为 0, 以流量为权, 形成流量图 G_f^0.
2. 以费用为权构造费用图 G_b^0, 且在图 G_b^0 中求得发点到收点的最短路径；如果没有最短路，算法结束，说明不存在可行流。
3. 检查最短路径中的各边, 若边 (v_i, v_j) 的容量最小, 设为 $c(v_i, v_j)$, 那么在流量图 G_f^0 中把最短路中的各边的流量调整为 $c(v_i, v_j)$, 形成新的流量图 G_f^1。

6.5.3 算法(Algorithm)









6.5.3 算法(Algorithm)

4. 构造费用图 G_b^i。如果边 (v_i,v_j) 在流量图 G_f^i 中的流量为 $f^i(v_i,v_j)$，那么

   a. 当 $0<f^i(v_i,v_j)<c(v_i,v_j)$ 时，在图 G_b^i 加入边 (v_i,v_j) 和 (v_j,v_i)，其权分别为 $b(v_i,v_j)$ 和 $-b(v_i,v_j)$

   b. 当 $f^i(v_i,v_j)=c(v_i,v_j)$ 时，在图 G_b^i 仅加入边 (v_j,v_i)，其权 $-b(v_i,v_j)$.

   c. 当 $f^i(v_i,v_j)=0$ 时，在图 G_b^i 仅加入边 (v_i,v_j)，其权为 $b(v_i,v_j)$.

6.5.3 算法(Algorithm)

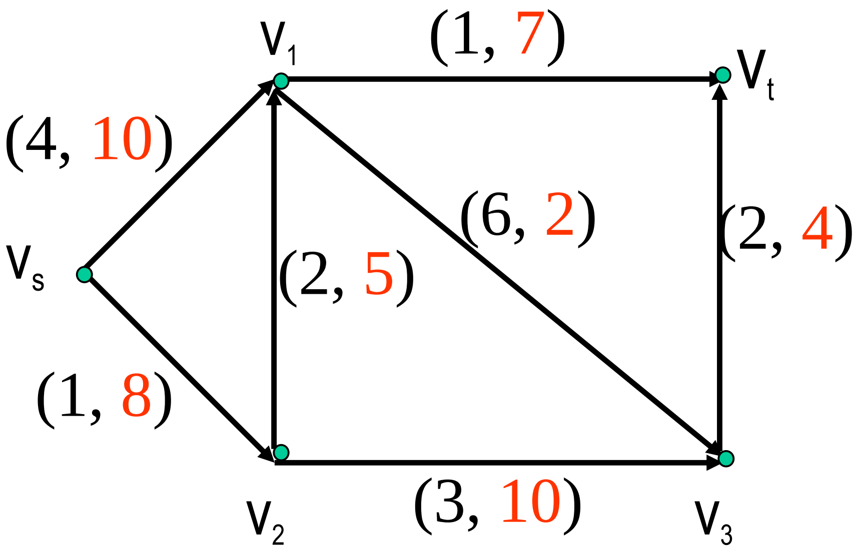
5. 在图 G_b^i 中求得发点到收点的最短路径；如果没有最短路，算法结束，说明已得到最大流。

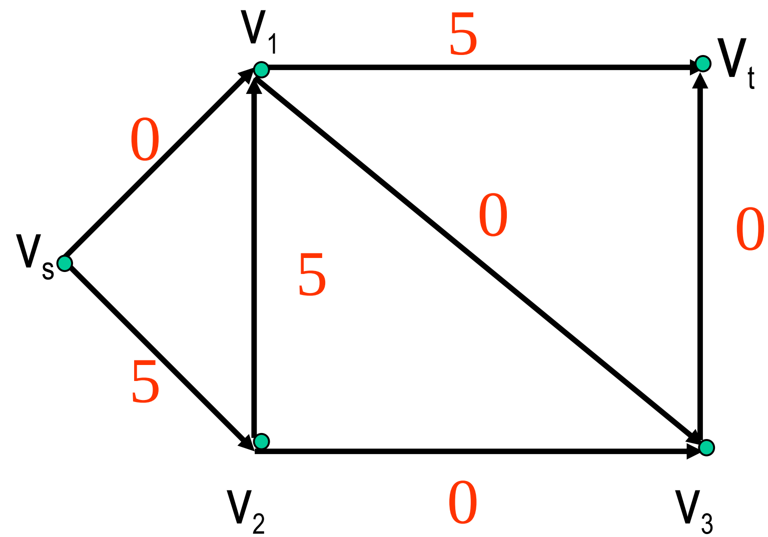
6. 形成新的流量图 G_f^{i+1}。若边 (v_i,v_j) 是 G_b^i 中的最短路上的任意一边，且

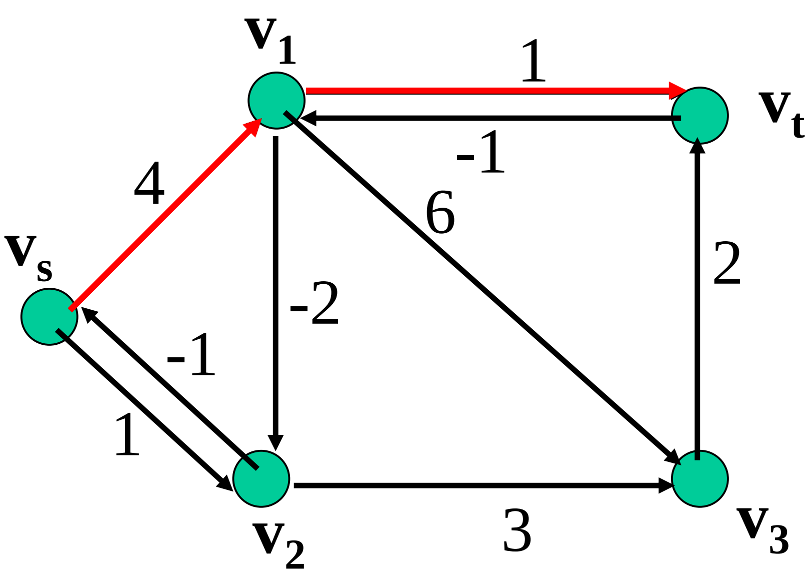
$$\theta=\min\left\{\min\{c_{ij}-f_{ij}^i \,\middle|\, b_{ij}^i\geq 0\},\min\{f_{ij}^i \,\middle|\, b_{ij}^i<0\}\right\}$$

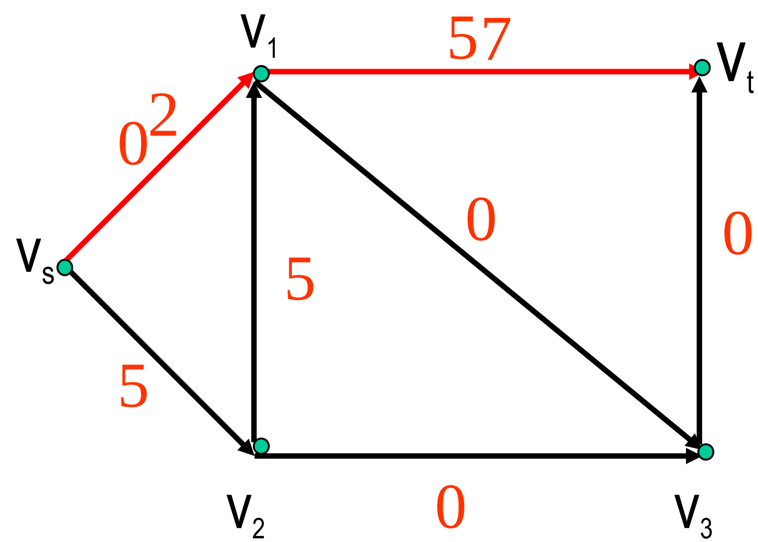
那么当 $b_{ij}^i<0$ 时，边 (v_i,v_j) 的流量减少 θ，反之增加 θ. 转入步骤 4.

6.5.3 算法(Algorithm)

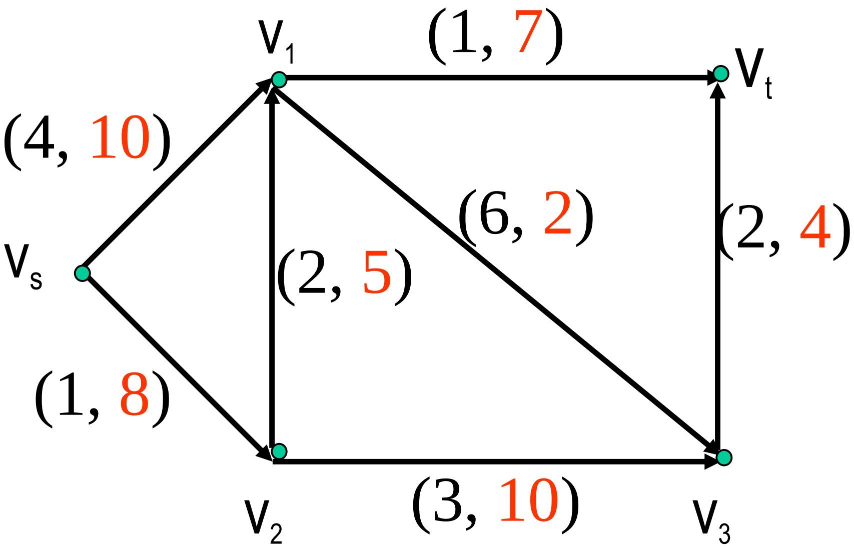


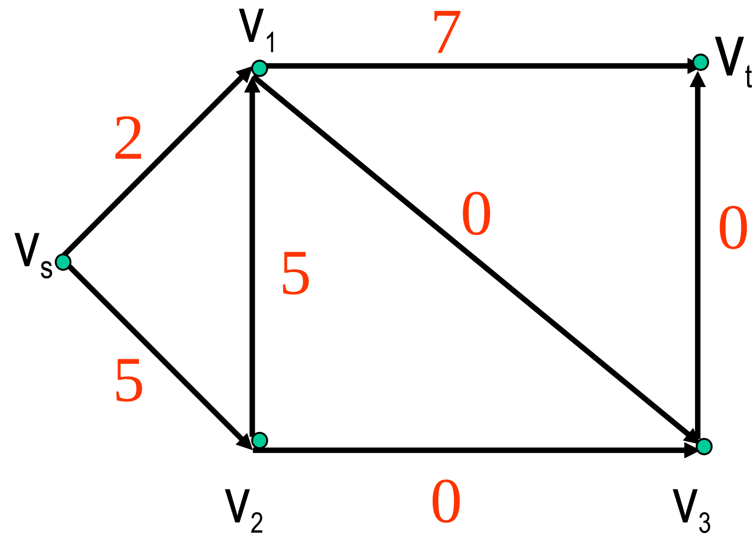


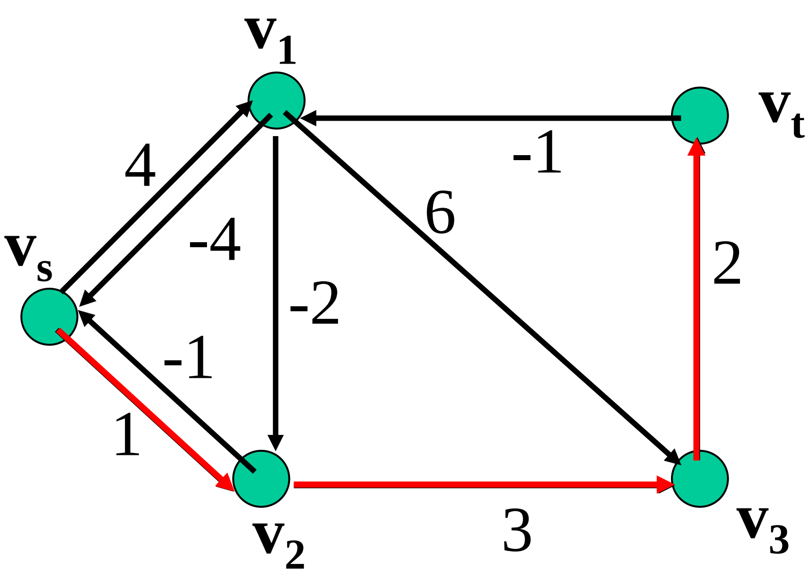


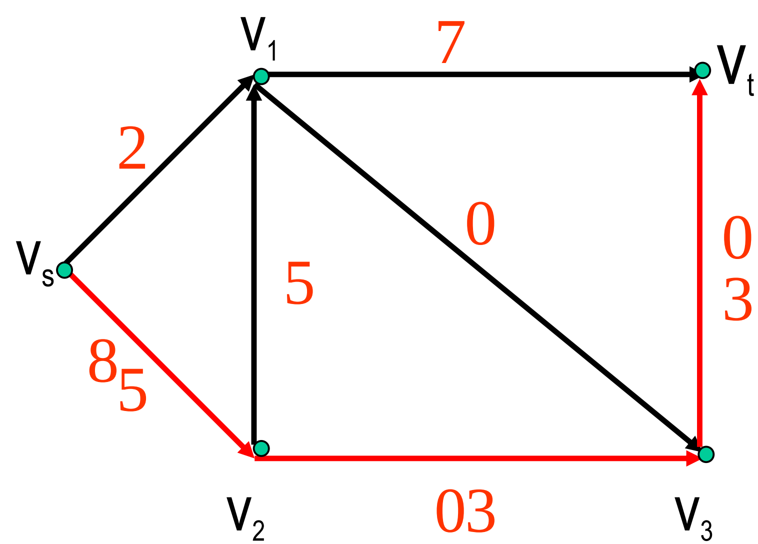


6.5.3 算法(Algorithm)

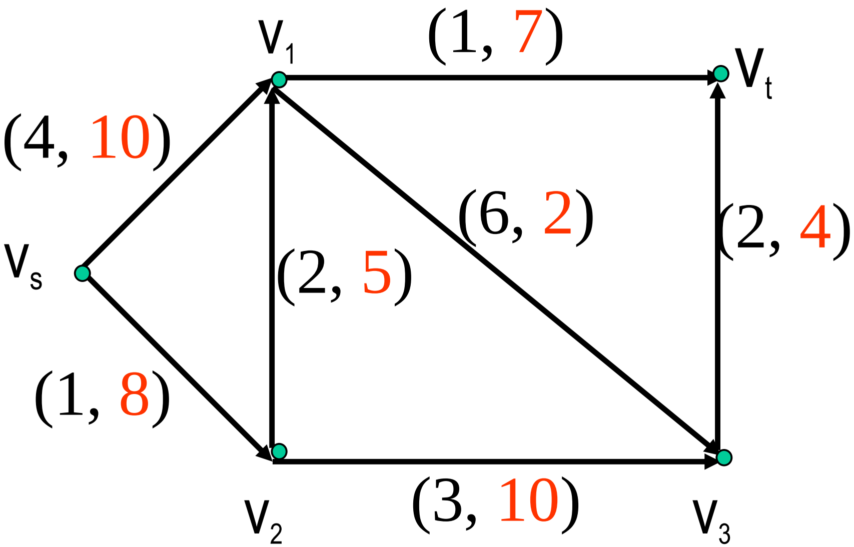


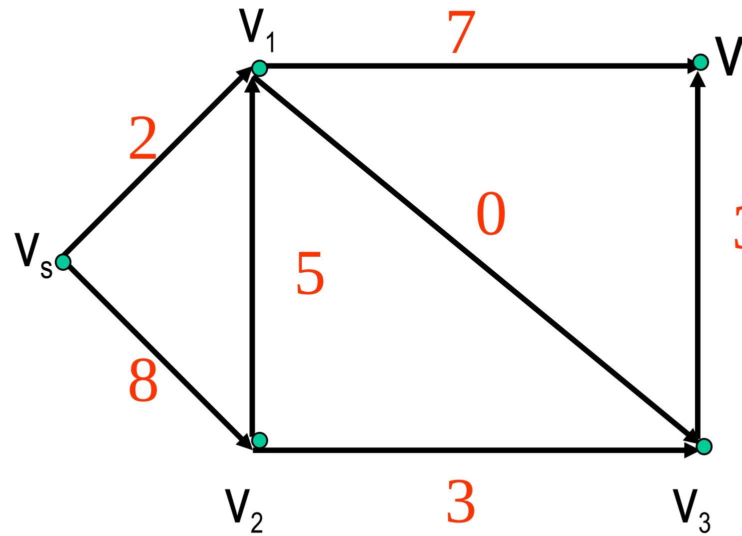


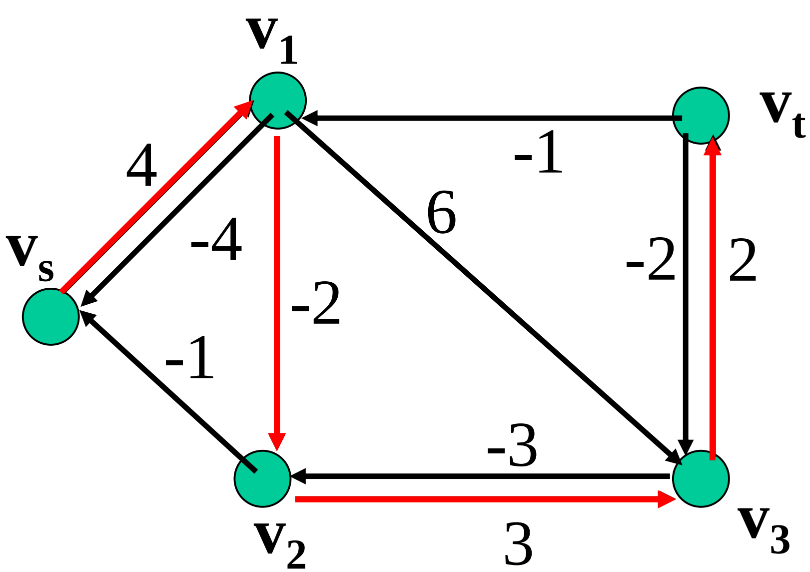


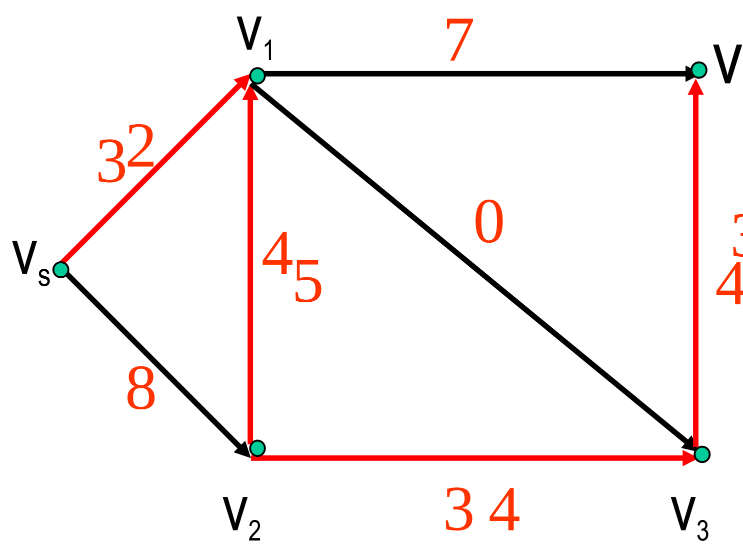


6.5.3 算法(Algorithm)

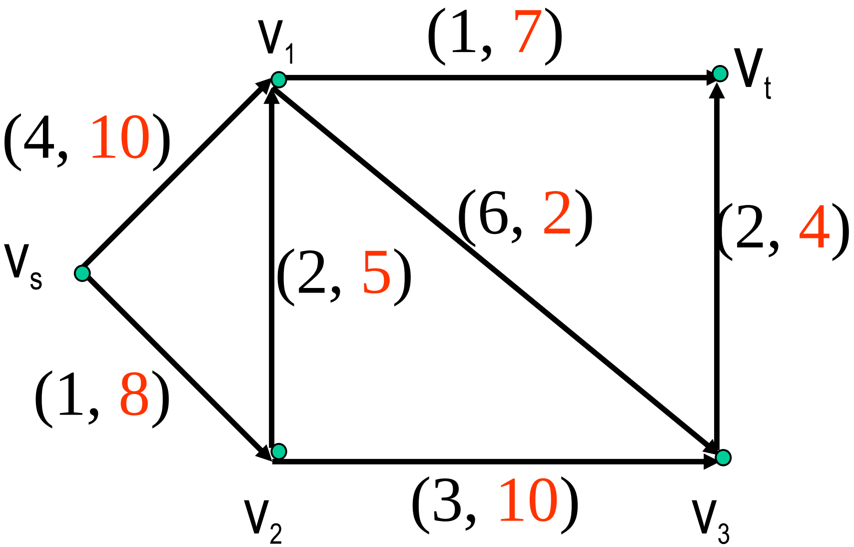


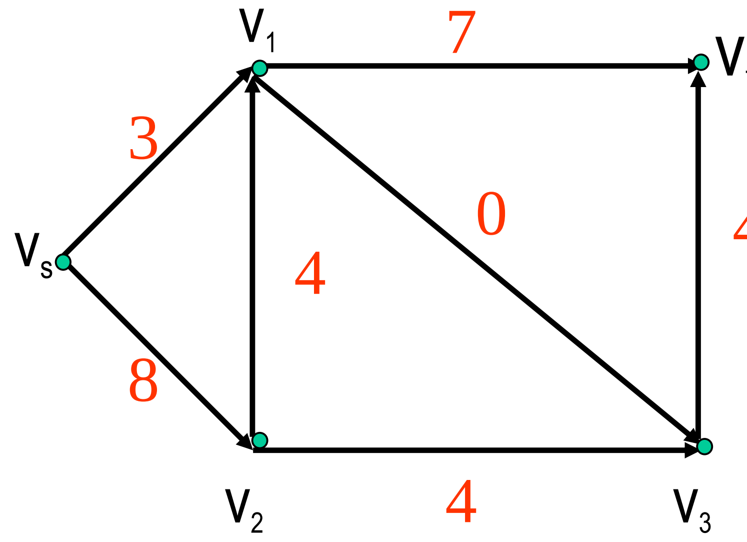


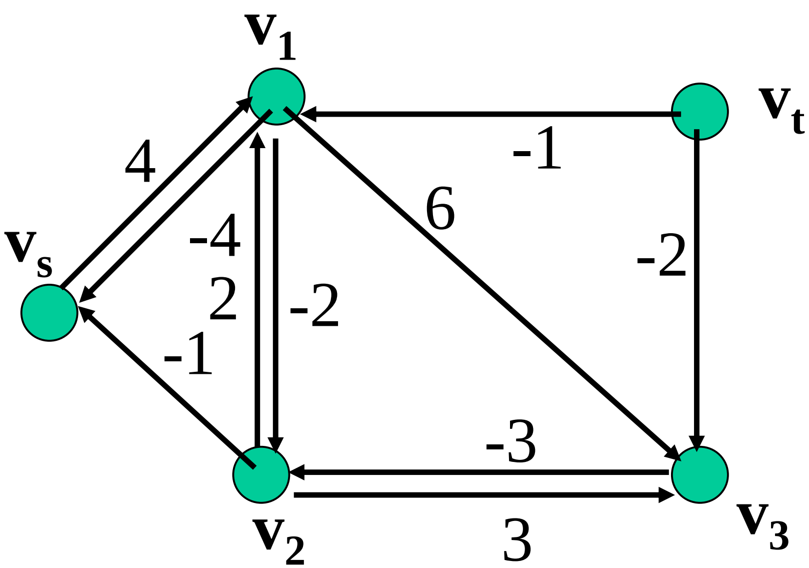




6.5.3 算法(Algorithm)







最好的算法

- Orlin算法
- J. B.Orlin. A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm. Proceedings of the 20-th ACM Symposium on the theory of computing: 377-387
- P. Kleinschmid, H. Schannath. A strongly polynomial algorithm for the transportation problem. Mathematical Programming, 1995, 68: 1-13