

# 动态规划

Dynamic Programming

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

# 历史

创始时间

上个世纪50年代

创始人

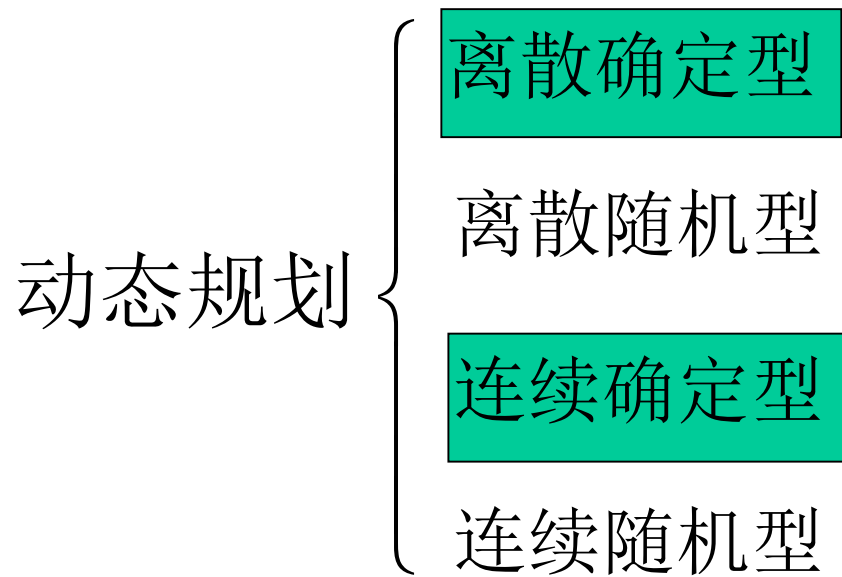
美国数学家贝尔曼  
(Richard. Bellman)

- 是运筹学的一个主要分支
  - 是解决多阶段决策过程的最优化的一种方法
- 多阶段决策过程：是一类特殊的活动过程，  
这类活动可以按时间顺序  
分解成若干个相互联系的  
阶段，每个阶段都有若干  
个方案可供选择。

多阶段决策过程的最优化的目标：

达到整个活动过程的总体效果最优

- 主要用于解决：最优路径问题，资源分配问题，  
排序问题，投资问题，装载问题  
生产计划与库存问题，生产过程的最优控制等

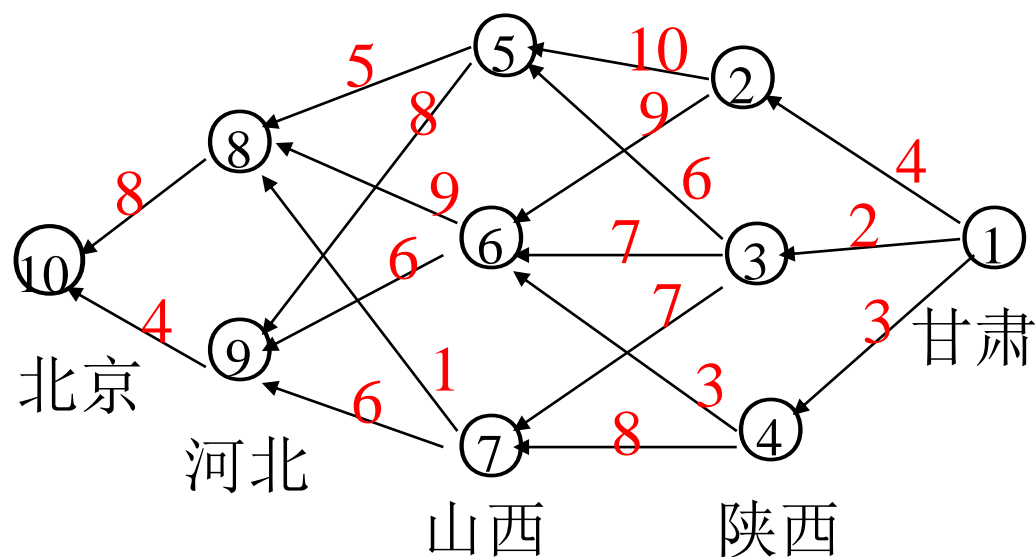


# 内 容

- 8.1 动态规划的基本概念
- 8.2 动态规划的基本原理
- 8.3 连续问题建模与求解
- 8.4 离散问题建模与求解
- 8.5 应用举例

## 8.1 动态规划的基本概念

例1 设从甘肃要铺一条煤气管道到北京，途中须经过三个省：陕西、山西、河北，每省设一个中间站。各省建站可供选择的地点及各段距离如下图，现要求选择一条甘肃到北京的铺管线路，使总距离最短。



## 问题分析:

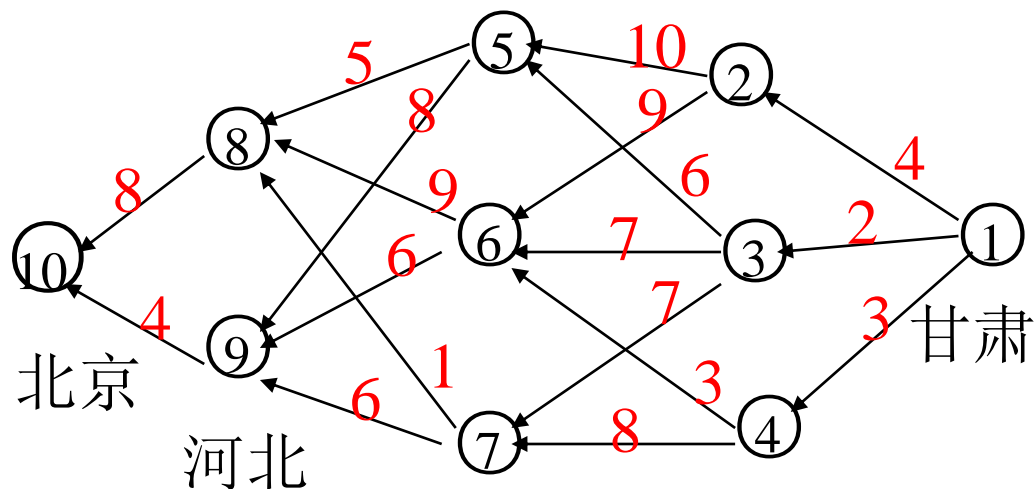
1. 从甘肃到北京的管道, 由四部分组成:

- a. 甘肃→陕西段      b. 陕西→山西段
- c. 山西→河北段      d. 河北→北京段

2. 每一段管道的铺设都有多种选择, 将有多种方案

铺设方案1: ①→③→⑤→⑧→⑩

铺设方案2: ①→④→⑦→⑧→⑩





3. 每一段管道都有一个始点和一个终点，下一段的始点必须是上一段的终点。.

铺设方案1:      ①→③→⑤→⑧→⑩

在这个方案中，事实上作了四次决策：

- a. 甘肃—陕西段：路线1—3，始点为1，终点为3
- b. 陕西—山西段：路线3—5，始点为3，终点为5
- c. 山西—河北段：路线5—8，始点为5，终点为8
- d. 河北—北京段：路线8—10，始点为8，终点为10

4. 对于不同的方案，每一段始点和终点都不是确定的。

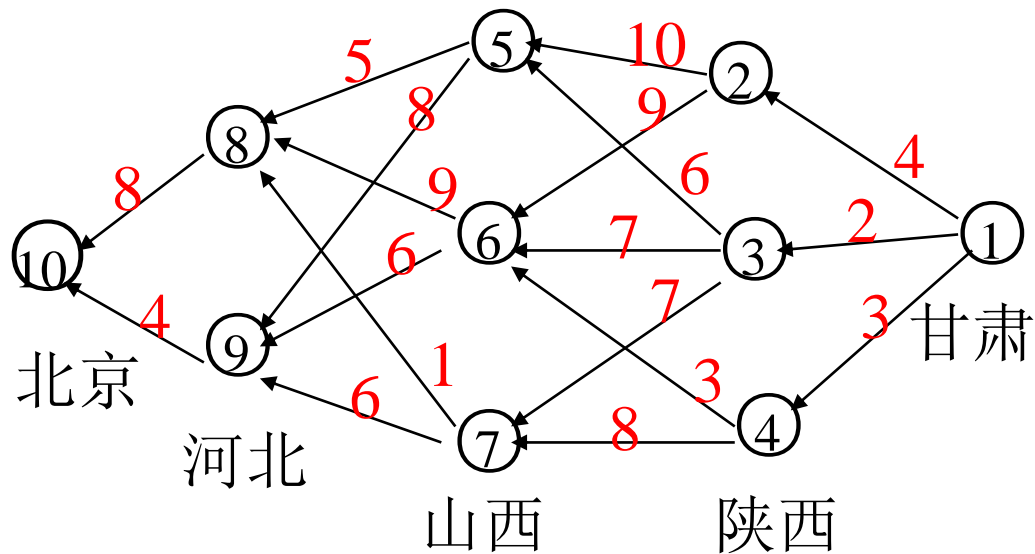
铺设方案1： ①→③→⑤→⑧→⑩

铺设方案2： ①→④→⑦→⑧→⑩

如在方案1中，陕西—山西段始点为3，终点为5，而在方案2中，陕西—山西段始点为3，终点为5

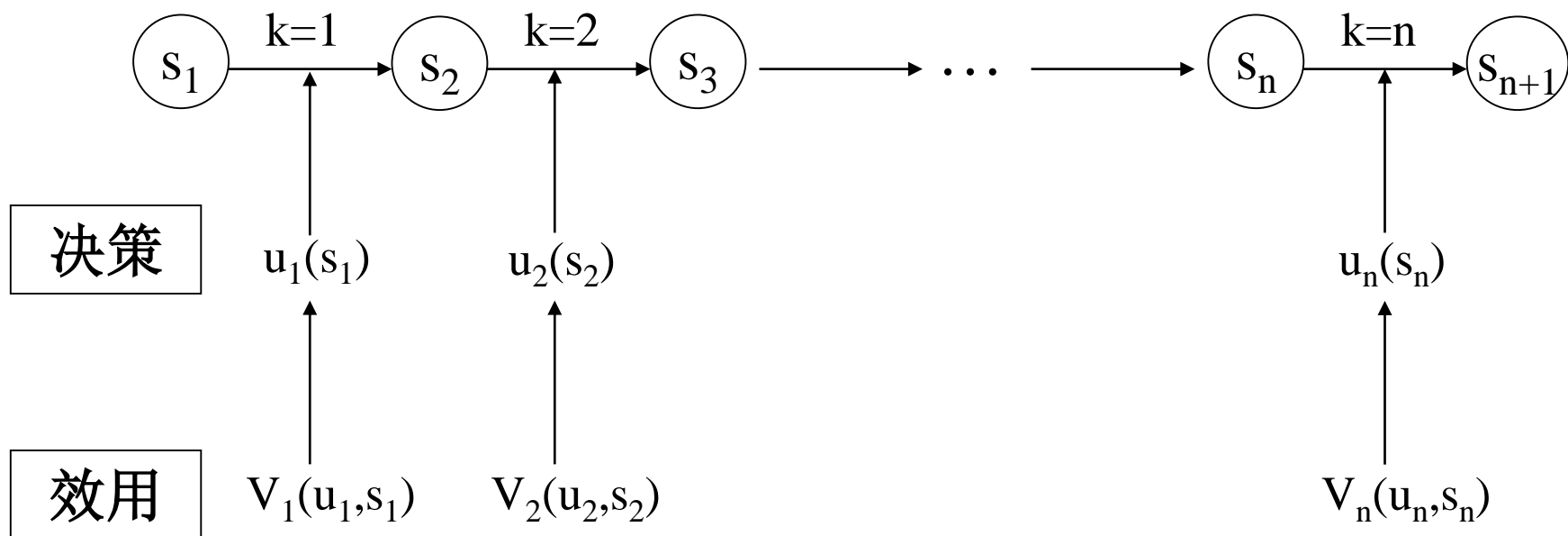
总结:

1. 一个问题有多种解决方案
2. 一个方案要经过多个阶段的决策才能形成
3. 下一阶段的决策必须以上一阶段的决策后果为基础
4. 每个阶段都有多种决策, 不同决策产生不同的终态



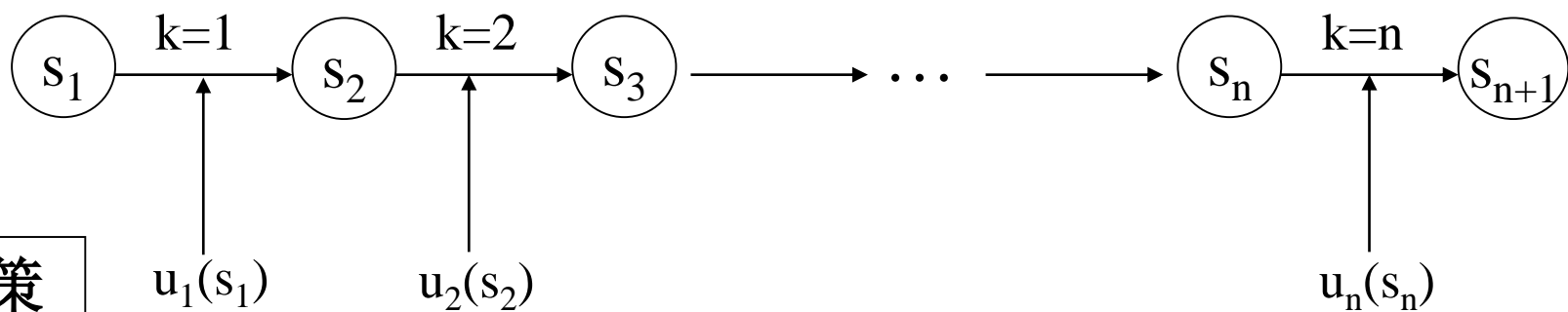
# 基本概念

- 1、阶段
- 2、状态：描述一个阶段的始态和终态
- 3、决策：每一阶段作出的决策
- 4、策略：一个解决方案
- 5、状态转移方程：上一阶段向下一阶段的演变
- 6、指标函数：全部和部分决策产生的后果或效用



状态转移方程

$$s_{k+1} = \psi(s_k, u_k(s_k)) = \psi(s_k, u_k)$$



所有决策→策略

$$\Rightarrow P_{1,n+1}(s_1) = \{u_1(s_1), u_2(s_2), \dots, u_n(s_n)\}$$

后半部分决策→后部k阶段子策略

$$\Rightarrow P_{k,n+1}(s_k) = \{u_k(s_k), \dots, u_{n-1}(s_{n-1}), u_n(s_n)\}$$

前半部分决策→前部k阶段子策略

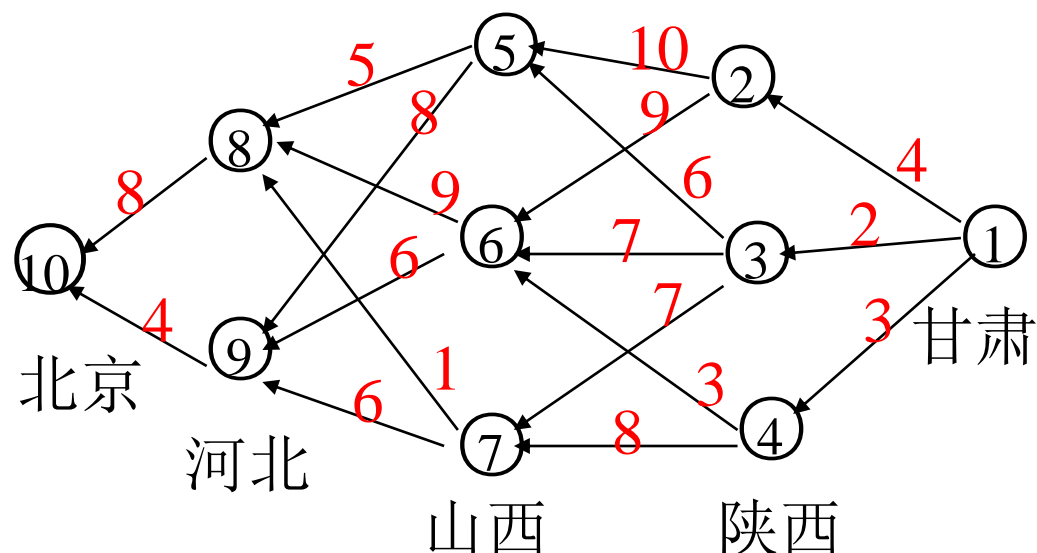
$$\Rightarrow P_{1,k+1}(s_1) = \{u_1(s_1), u_2(s_2), \dots, u_k(s_k)\}$$

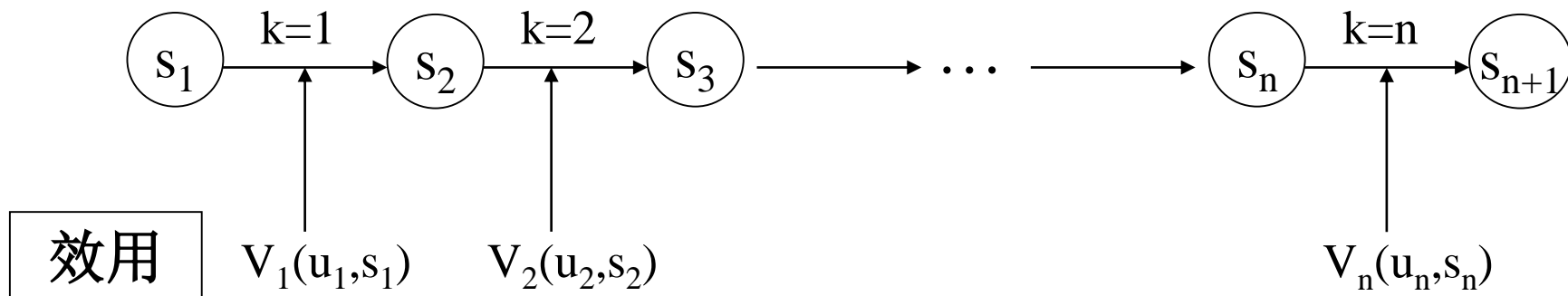
铺设方案1:  $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{8} \rightarrow \textcircled{10}$

策略1:  $\{1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 8, 8 \rightarrow 10\}$

后部2阶段子策略:  $\{3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 8, 8 \rightarrow 10\}$

前部2阶段子策略:  $\{1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5\}$





全部效用→总指标函数(和形式)

$$\Rightarrow V_{1,n+1} = V_1(u_1, s_1) + V_2(u_2, s_2) + \dots + V_n(u_n, s_n)$$

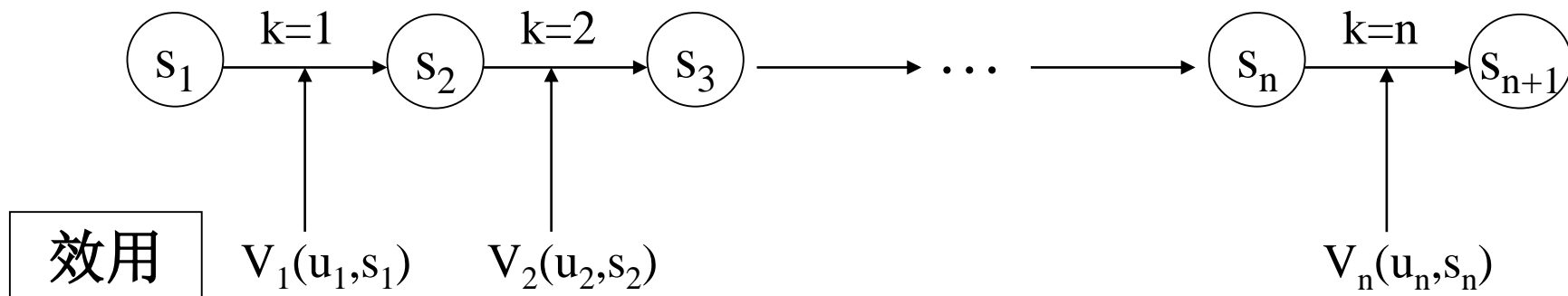
后半部分效用→后部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{k,n+1} = V_k(u_k, s_k) + V_{k+1}(u_{k+1}, s_{k+1}) + \dots + V_n(u_n, s_n)$$

前半部分效用→前部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{1,k+1} = V_1(u_1, s_1) + V_2(u_2, s_2) + \dots + V_k(u_k, s_k)$$





全部效用→总指标函数(积形式)

$$\Rightarrow V_{1,n+1} = V_1(u_1, s_1) \cdot V_2(u_2, s_2) \cdot \dots \cdot V_n(u_n, s_n)$$

后半部分效用→后部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{k,n+1} = V_k(u_k, s_k) \cdot V_{k+1}(u_{k+1}, s_{k+1}) \cdot \dots \cdot V_n(u_n, s_n)$$

前半部分效用→前部k阶段子指标函数

$$\Rightarrow V_{1,k+1} = V_1(u_1, s_1) \cdot V_2(u_2, s_2) \cdot \dots \cdot V_k(u_k, s_k)$$

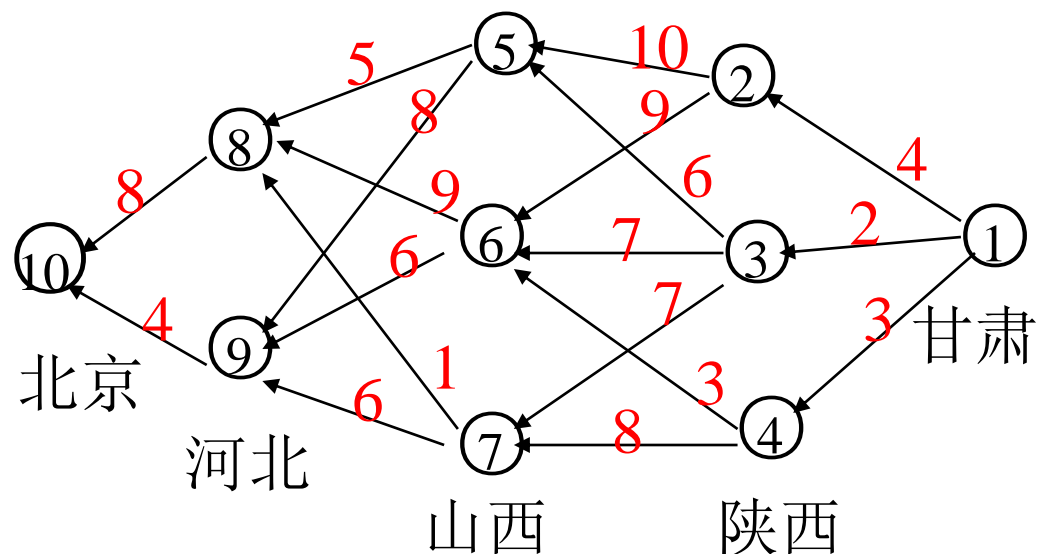
每一个方案的总指标函数值是不同的

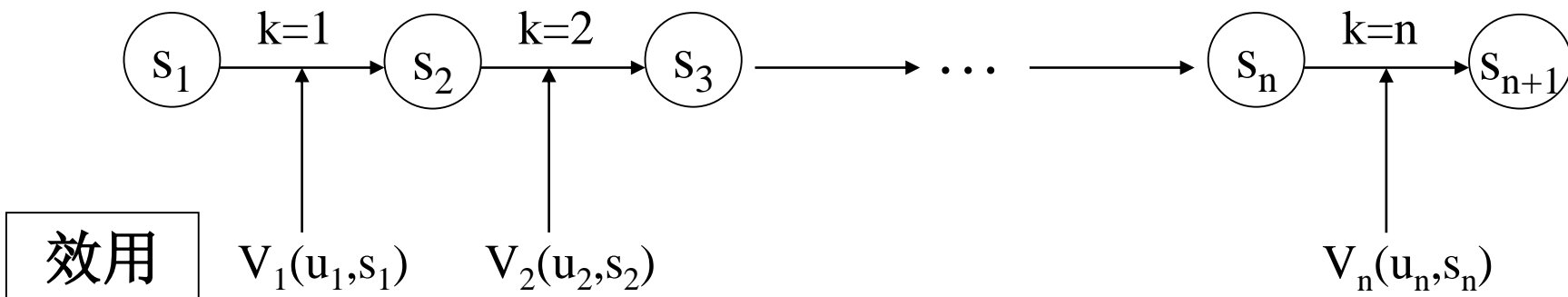
铺设方案1: ①→③→⑤→⑧→⑩

$$V_{1,4} = 2 + 6 + 5 + 8 = 21$$

铺设方案2: ①→④→⑦→⑧→⑩

$$V_{1,4} = 3 + 8 + 1 + 8 = 20$$





后部k阶段子指标函数形成的递推公式

$$V_{k,n+1} = V_k(u_k, s_k) + V_{k+1}(u_{k+1}, s_{k+1}) + \dots + V_n(u_n, s_n)$$

$$\Rightarrow V_{k,n+1} = V_{k+1,n+1} + V_k(u_k, s_k)$$

前部k阶段子指标函数形成的递推公式

$$V_{1,k+1} = V_1(u_1, s_1) + V_2(u_2, s_2) + \dots + V_k(u_k, s_k)$$

$$\Rightarrow V_{1,k+1} = V_{1,k} + V_k(u_k, s_k)$$

## 例2 （多阶段资源分配问题）

设有数量为 $y$ 的某种资源，将它分别投入两种生产方式A和B，已知收益函数分别是 $g(x)$ 和 $h(x)$ ， $x$ 为资源投入量。设这种资源用于生产后还可以回收一部分用于生产，A、B的回收率分别为 $a$ 和 $b$ （ $0 \leq a \leq 1$ ， $0 \leq b \leq 1$ ），

问：对总数量为 $y$ 的资源进行 $n$ 个阶段的生产，应如何分配每个阶段投入A、B的资源数量，才能使总收益最大？

$n$ 个阶段的决策问题

例3（投资决策问题）某公司现有资金 $Q$ 万元，在今后5年内决定给A、B、C、D四个项目投资，这些项目的投资期限、回报率均不相同，问应如何确定这些项目每年的投资额，使到第5年末拥有资金的本利总额最大。

5个阶段的决策问题

例4（设备更新问题）某企业要决定一台设备未来8年的更新计划，已预测了第 $j$ 年的购买设备的价格为 $K_j$ ， $G_j$ 为设备经过 $j$ 年后的残值， $C_j$ 为设备连续使用 $j-1$ 年后在第 $j$ 年的维修费( $j=1,2,\dots,8$ )，问应在哪一年更新设备可使总费用最小

每一年视为一个阶段，

每个阶段都须做决策：

继续使用旧设备还是购买新设备？

上一个阶段的决策直接影响下一个阶段的决策

8个阶段的决策问题

例5（生产与存储问题）某工厂生产并销售某种产品。  
已知今后四个月市场需求预测及每月生产j个单位产品的费用如下：

$$c(j)=\begin{cases} 0 & j=0 \\ 3+j & j=1,2,\dots,6 \end{cases}$$

月	1	2	3	4
需求	2	3	2	4

每月库存i个单位产品的费用 $E(i)=0.5i$ (千元)，该厂最大库存容量为3个单位，每月最大生产能力为6个单位，计划开始和计划期末库存量都是零，试制定四个月的生产计划，在满足用户需求条件下，使总费用最小。

四个阶段的  
决策问题

每个月视为一个阶段，  
每个阶段都须决定生产几个、库存几个  
上一个阶段的决策直接影响下一个阶段的决策