

整数规划的理论求解

——指派问题与匈牙利算法

运筹学研究所

哈尔滨工业大学经济与管理学院

经典指派问题

n 个员工分配作 n 项工作， i 个员工做 j 项工作的成本为 c_{ij} ，要求一个人只做一项工作，一项工作只能由一个人做， $i = 1, \dots, n$;
 $j = 1, \dots, n$ 。求最佳分配方案

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

指派问题的解应对应于成本矩阵的不同行与不同列，且总成本最小

例

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6



c_{ij}

指派问题的数学模型

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第} i \text{员工分配做第} j \text{项工作} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

指派问题的性质

定理： 对于指派问题，成本矩阵的任一行(或列)减去(或加上)一个相同的数得到的新指派问题与原问题同解

$$\begin{aligned}
 z' &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n (c_{kj} \pm s) x_{kj} \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj} + (\pm s) \sum_{j=1}^n x_{kj} \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj} + (\pm s) \\
 &= z + (\pm s)
 \end{aligned}$$

匈牙利法的基本思路：

对指派矩阵 C 的行和列减去某个常数，将 C 化成有 n 个位于不同行不同列的零元素，令这些零元素对应的变量取1，其余变量取零，既得指派问题的最优解

说明:

1. 书上的算法比较繁琐, 且计算量大, 一般教材中采用本课件提供的算法.
2. 课堂上讲的算法本质上是这种算法的变形, 不再列出.

例：求费用矩阵为右表的指派问题的最优解

费用 \ 工作 人		A	B	C	D	E
甲		12	7	9	7	9
乙		8	9	6	6	6
丙		7	17	12	14	12
丁		15	14	6	6	10
戊		4	10	7	10	6

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$



第一步：每行减去最小元素，每列减掉最小元素；

第二步：对零元素画圈打×；

第三步：划线覆盖零元素；

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 \\ -6 \\ -7 \\ -6 \\ -4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the steps of the Hungarian method for finding an optimal assignment. The matrix is transformed by subtracting row and column minima. The resulting matrix shows zeros circled (○) and crossed out (×). Blue checkmarks (✓) indicate the final assignment: (1,2), (2,5), (3,1), and (5,3).

得4个○，且不存在没打×的0

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。

$$\begin{pmatrix}
 \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} \\
 \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
 0 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
 \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} \\
 \sqrt{0} & 6 & 3 & 6 & \textcircled{2}
 \end{pmatrix}$$

√ √

$$\Rightarrow
 \begin{pmatrix}
 7 & \textcircled{0} & 2 & \cancel{8} & 2 \\
 4 & 3 & \textcircled{0} & \cancel{0} & \cancel{8} \\
 \textcircled{0} & 8 & 3 & 5 & 3 \\
 11 & 8 & \cancel{0} & \textcircled{0} & 4 \\
 \cancel{8} & 4 & 1 & 4 & \textcircled{0}
 \end{pmatrix}$$

匈牙利法的具体步骤:

第一步: 变换指派问题的费用矩阵, 使其在各行各列都出现0元素:

方法: 首先每行元素减去该行的最小元素, 然后每列减去该列的最小元素

第二步: 进行试指派 (画○)

方法: 从含0元素最少的行或列开始, 圈出一个0元素, 用○表示, 然后划去该○所在的行和列中的其余0元素, 用×表示, 依次类推。

若矩阵中的○的个数等于 n , 则得最优解

若矩阵中的○的个数 $< n$, 则进行第三步

第三步：做能复盖所有0元素的最小直线集合：

- 1) 对没有○的行打√号
- 2) 对打√号的行上所有0元素的列打√号
- 3) 再对打√号的列上所有○的行打√号
- 4) 重复以上步骤直到得不出新的打√号为止
- 5) 对没有打√号的行画横线，所有打√号的列画纵线，
所得到的直线既是复盖所有0元素的最小直线集合

第四步：在没有被直线复盖的元素中找出最小元素，
让打√号的列加上这个元素，打√号的行减去这个元素。

练习

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{green arrow}} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 7 & \textcircled{0} & 1 \\ 5 & \textcircled{0} & 4 & 3 \\ 5 & \textcircled{\times} & 3 & 4 \\ \textcircled{0} & 3 & 2 & \textcircled{\times} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{✓} \\ \text{✓} \\ \text{✓} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{green arrow}} \begin{bmatrix} 1 & 10 & \textcircled{0} & 1 \\ 2 & \textcircled{\times} & 1 & \textcircled{0} \\ 2 & \textcircled{0} & \textcircled{\times} & 1 \\ \textcircled{0} & 6 & 2 & \textcircled{\times} \end{bmatrix}$$

一般指派问题

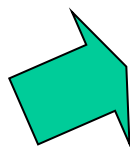
- 最大化指派问题
- 人数和工作数不等的指派问题
- 一个人可做几项工作的指派问题
- 某项工作一定不能由某人做的指派问题

最大化指派问题

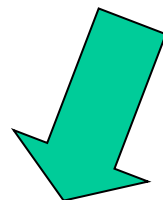
最大化指派问题

4	8	7	15	12
12	9	2	14	10
6	9	12	8	7
11	7	17	6	10
6	9	12	10	6

最大值



$17-4$	$17-8$	$17-7$	$17-15$	$17-12$
$17-12$	$17-9$	$17-2$	$17-14$	$17-10$
$17-6$	$17-9$	$17-12$	$17-8$	$17-7$
$17-11$	$17-7$	$17-17$	$17-6$	$17-10$
$17-6$	$17-9$	$17-12$	$17-10$	$17-6$



13	9	10	2	5
5	8	15	3	7
11	8	5	9	10
6	10	0	11	7
11	8	5	7	11

最小化指派问题

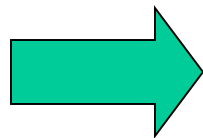
人数和工作数不等的指派问题

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 \\ 12 & 9 & 2 & 14 \\ 6 & 9 & 12 & 8 \\ 11 & 7 & 17 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 0 \\ 12 & 9 & 2 & 14 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 0 \\ 11 & 7 & 17 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

一个人可做几项工作的指派问题

A_1 可同时做
三项工作

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A'_1 \\ A''_1 \end{array} \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

反例1

1	1	3	0	3	3	3	3	0
1	1	0	0	1	2	2	2	0
1	2	0	3	3	1	3	2	3
1	0	0	3	0	2	0	0	1
2	0	0	0	1	1	0	2	0
0	2	0	3	1	1	2	0	2
2	3	1	0	0	0	2	2	0
2	1	3	0	2	0	3	0	1
0	3	0	1	0	3	2	0	3

反例2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

线性规划有关的英文词汇

- **Operational/operations research** 运筹学
- **Linear programming** 线性规划 **Feasible domain** 可行域
- **Convex set** 凸集 **Basic feasible solutions** 基础可行解
- **Simplex algorithm** 单纯型法 **Pivot** 主元 **Pivoting** 主元变换
- **Revised, dual simplex algorithm** 修正、对偶单纯型法
- **Relative cost** 相对成本(机会成本) **Shadow price** 影子价格
- **Slack, Surplus, Artificial variable** 松弛, 剩余, 人工变量
- **Unbounded, Infeasible, Degenerate solution** 无界解, 无可行解, 退化解
- **Duality** 对偶性 **Primal, dual problem** 原问题, 对偶问题
- **Complementary slackness** 互补松弛 **Sensitivity analysis** 灵敏度分析
- **Transportation problem** 运输问题
- **Assignment problem** 任务分配(指派) 问题
- **Bipartite matching** 两部图匹配 **Hungarian method** 匈牙利算法

小结

- 会用分枝定界法
- 会用割平面法
- 会用0-1规划建模
- 会解指派问题