整数规划的理论与求解

——分枝定界法

运筹学研究所
哈尔滨工业大学经济与管理学院

线性整数规划的主要求解方法

1) 分支定界法

2) 割平面方法

3) 分解方法：拉格朗日松弛分解方法

4) 分解方法：Benders分解方法

一、分枝定界法的原理

1. 分枝思想

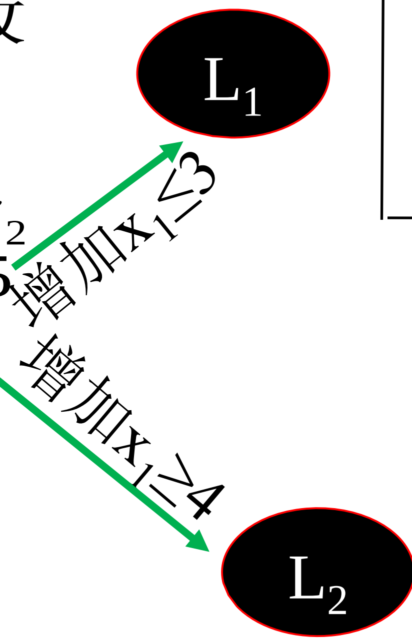
$$\max z = 30x_1 + 20x_2$$

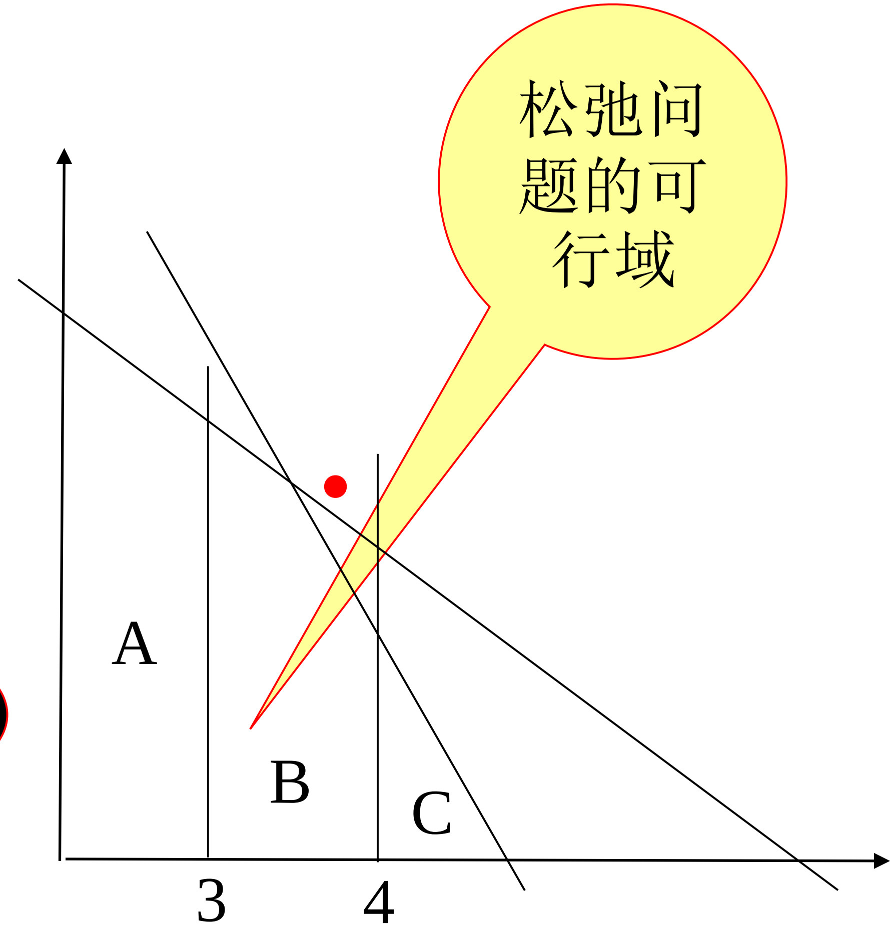
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

松弛问题(L_0):

$$\max z = 30x_1 + 20x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$





松弛问题的最优解:

$$x_1 = 3.5, x_2 = 2.5$$

对（IP）$\max z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

父问题

松弛问题(L_0):

$\max z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优解：

$x_1 = 3.5,$

$x_2 = 2.5$

$x_1 \le 3$　　$x_1 \ge 4$

(L_1) $\max z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(L_2) $\max z = 30x_1 + 20x_2$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

子问题

结论1：（IP）的最优解一定在某个子问题中

2：子问题的可行域 $\subset$ 父问题的可行域

⇒ 子问题的最优值 $\le$ 父问题的最优值

3：子问题中的整数解都是(IP)的可行解

2. 定界思想

对整数规划问题IP

$$\max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j\text{为整数} \end{cases}$$

及其松弛问题LP

$$\max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

1) LP的最优值是(IP)的最优值的初始上界

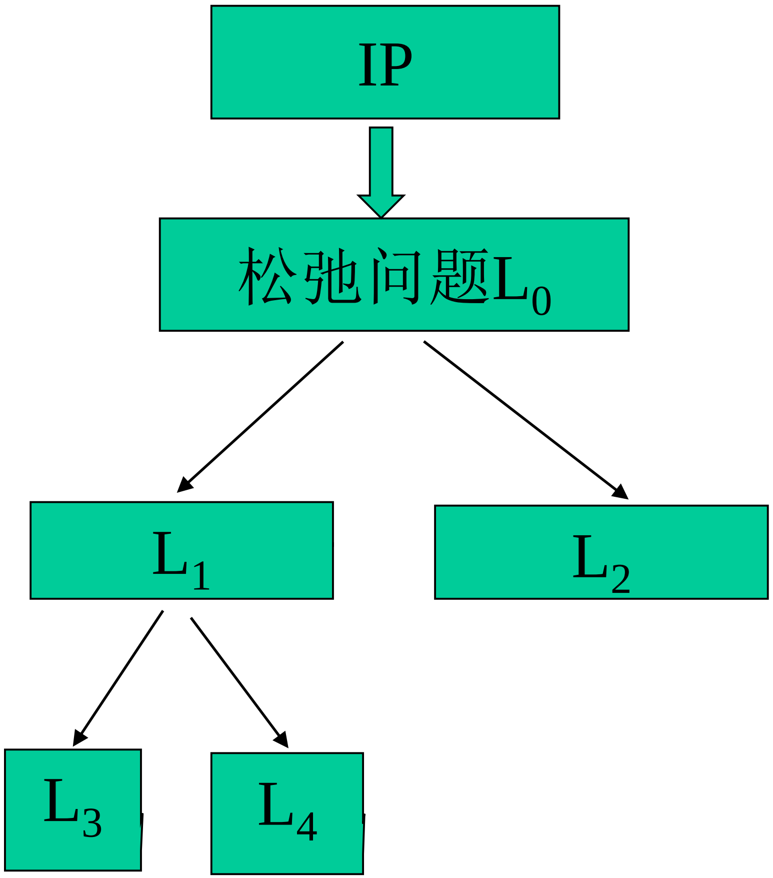
2) 定义 (IP)的最优值的初始下界为 −M

3) 若LP可以找到一个整数解$\overline{X}$，

则$C\overline{X}$是IP最优值的初始下界

4) 上界不断下降，下界不断上升，直到 上界 = 下界

3. 分支原则



1) 下界 < 最优值 ≤ 上界，且最优解不是整数解, 可进行分支

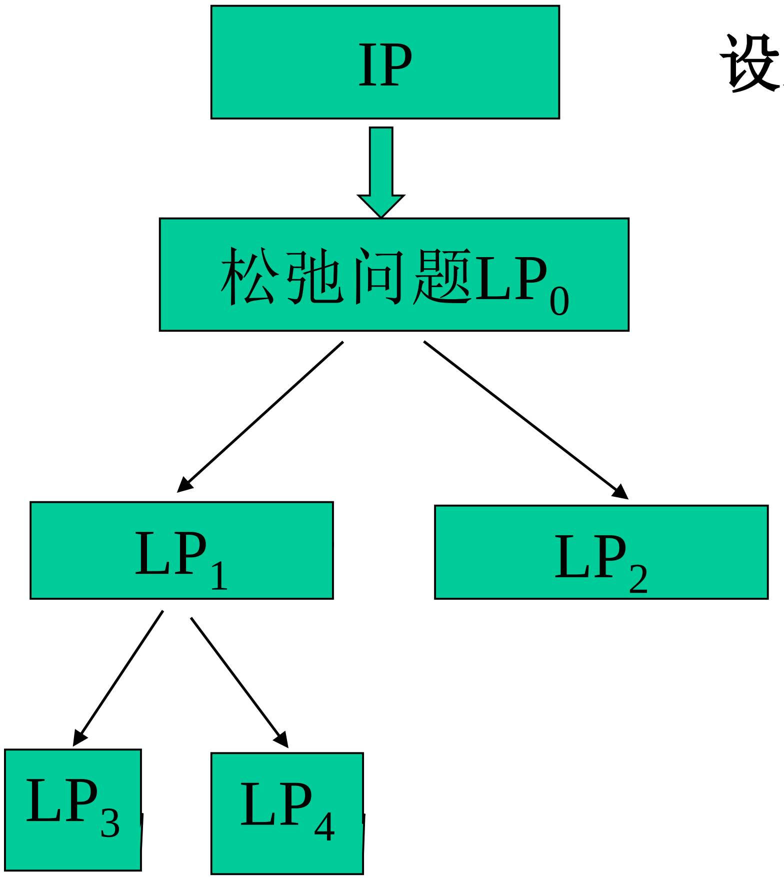
2) 最优解是整数解，不分支

3) 无解，不分支

4) ≤ 下界，不分支

5) 所要求的变量为整数，但取值却为非整数

3. 上界定界方法



设上界为*U*, 下界为*L*，IP的最优值为Z*

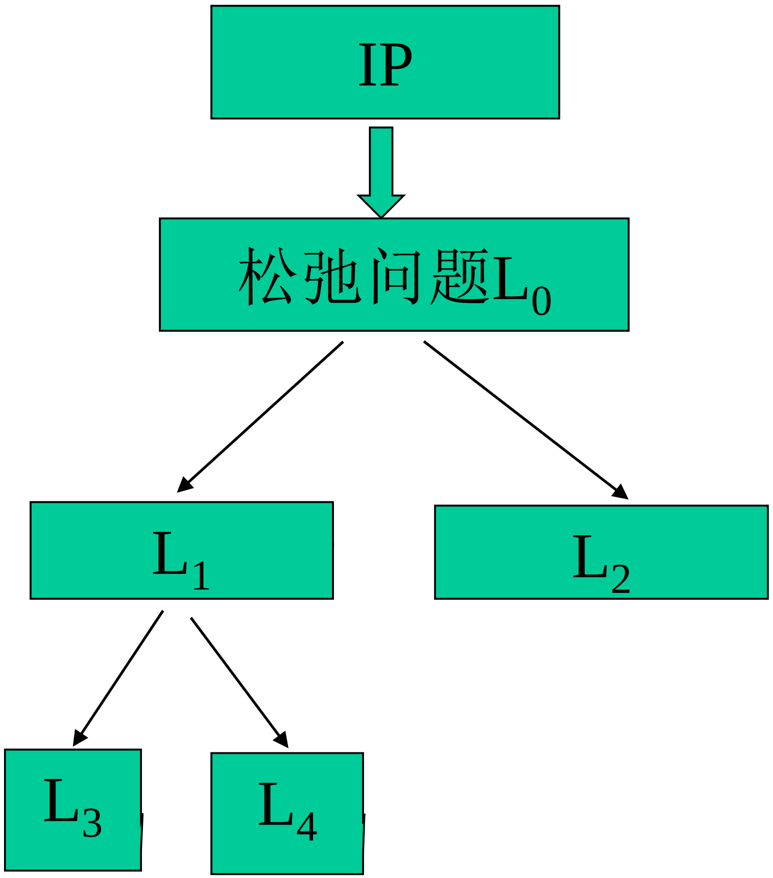
$$U_0 = Z_0$$

$$U_1 = \max\{Z_1,\ Z_2\}$$

$$U_2 = \max\{Z_2,\ Z_3,\ Z_3\}$$

上界*U*总是等于所有叶子分支中的最大最优值

3. 下界定界方法



如果一个分支的最优值大于下界，且为整数最优解，则下界更新为该最优值。

$L_0: x_1 = 3.5,\ x_2 = 2.5, z_0 = 155$

$x_1 \le 3$ | $x_1 \ge 4$

$L_1: x_1 = 3,\ x_2 = 17/6,\ z_1 = \frac{440}{3}$

$L_2: x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{2},\ z_2 = 130$ 剪枝

$x_2 \le 2$ | $x_2 \ge 3$

$L_3: x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ z_3 = 130$ 关闭

$L_4: x_1 = \frac{11}{4},\ x_2 = 3,\ z_4 = \frac{285}{2} > z_3$

$x_1 \le 2$ | $x_1 \ge 3$

$L_5: x_1 = 2,\ x_2 = \frac{7}{2}$ 剪枝 $z_5 = 130$

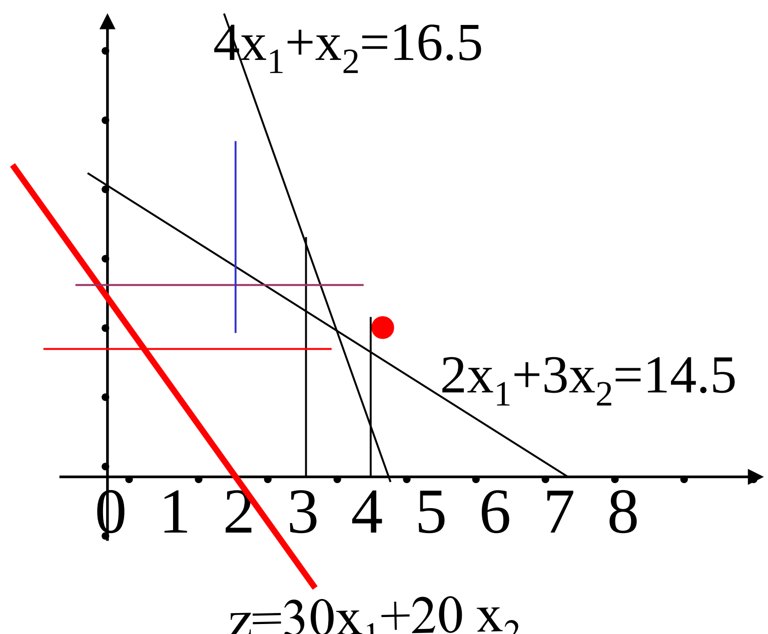
L_6 剪枝 无可行解

松弛问题L_0:

$$\max z = 30x_1 + 20x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \le 16.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(IP)的最优解：$x_1 = 3,\ x_2 = 2$
最优值：$Z^* = 130$



最优解：$x_1 = 3.5,\ x_2 = 2.5,$

4. 提高效率的举措

1) 优先选择目标函数值最大的分支进行分支

2) 优先选择与整数值相差最大的非整数变量进行分枝

3) 其它优先规则

5. 分支定界法的总结

1) 松弛问题有可行解，整数规划是否有可行解？

2) 松弛问题有可行解，整数规划是否有最优解？

3) 如何判定整数规划无解？

4) 如何判定整数规划无界？

5) 整数规划可以有无穷多最优解吗？怎么判定？