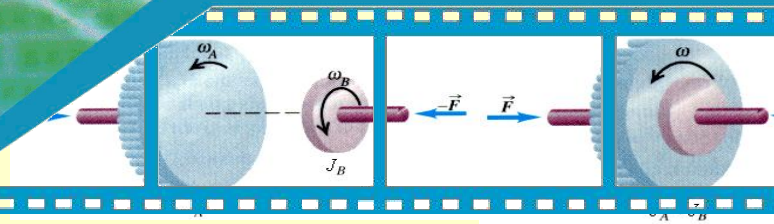
力学篇

第3章 刚体力学基础



第3章　刚体力学基础

本章任务: 研究物体的转动, 及其转动状态变化的规律.

刚体(rigid body): 在外力作用下不产生形变的物体 (无数个连续分布的质点组成的质点系——理想模型).

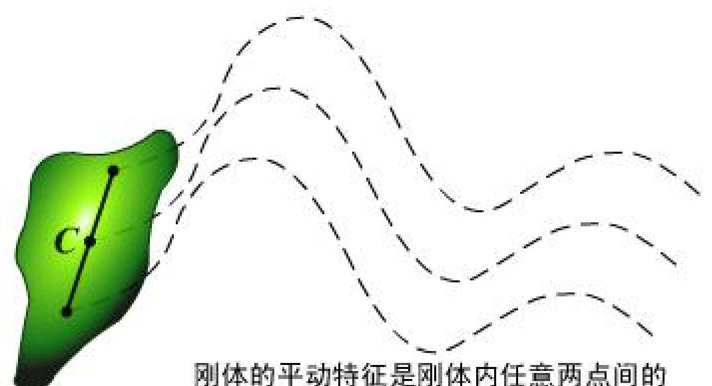
质量元(element mass): 组成刚体的每个质点. 每个质量元的运动都服从质点力学规律.

特点:

质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ 质点系 $\xrightarrow{\text{特例}}$ 刚体

任意两点间的距离始终保持不变

运动 $\begin{cases} \text{转动(特例:定轴转动)} \\ \text{平动} \\ \text{平动＋转动} \end{cases}$

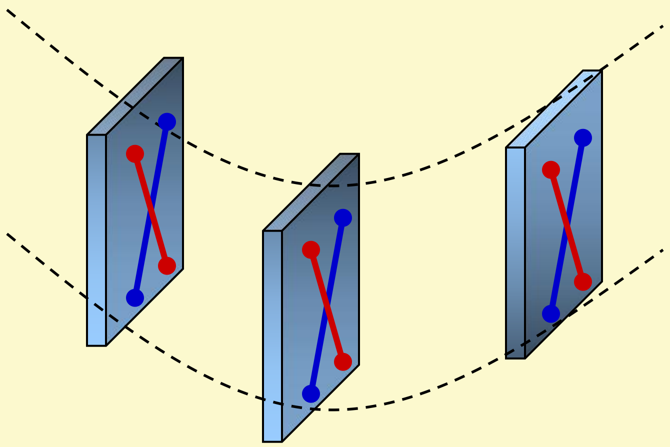


刚体的平动特征是刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线

§3-1 刚体运动的基本形式

3.1.1 平动和转动

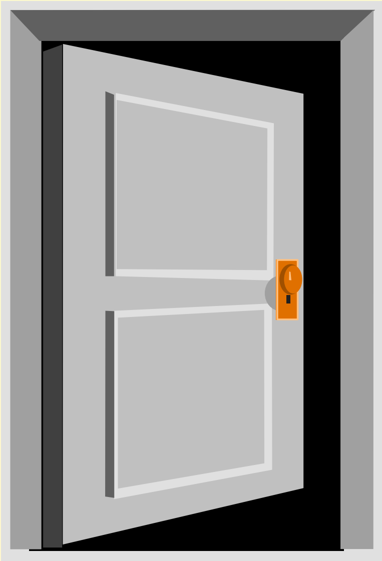
平动(translation): 刚体在运动过程中, 其上任意两点的连线始终保持平行.



转动(rotation): 刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动 —— 刚体的转动. 这条直线称为**转轴(rotation axis)**.

定轴转动:

转轴固定不动的转动.



3.1.2 描述刚体转动的物理量

为什么用角量描述定轴转动?

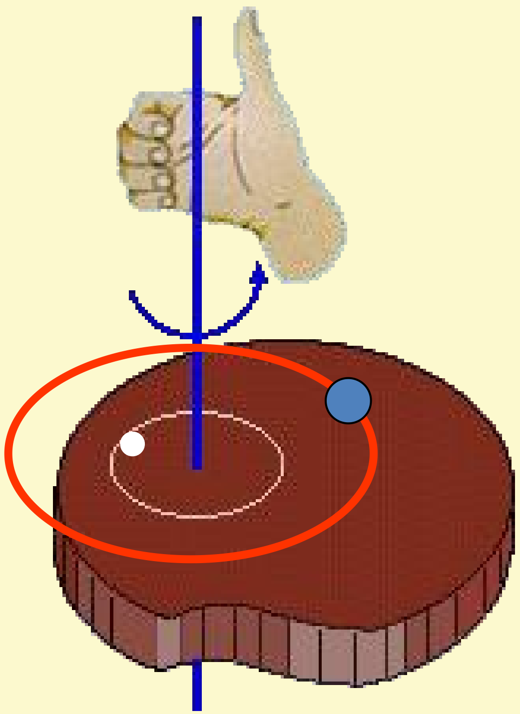
转动平面: 定轴转动刚体上各质点的运动面

刚体定轴转动的特点:

1) 转动平面垂直于转轴.

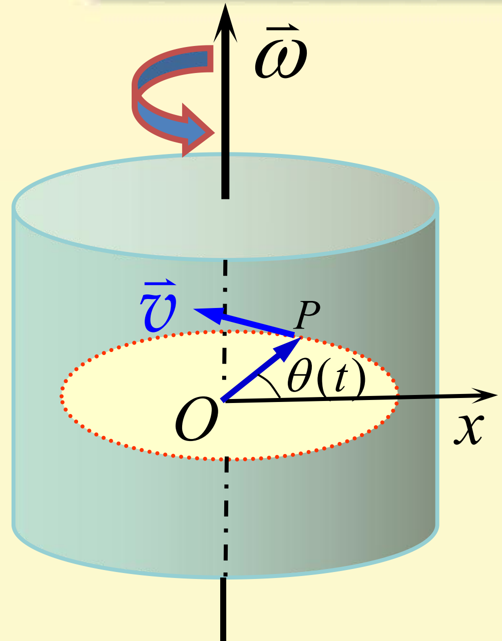
2) 转动平面上各点均做圆周运动, 角量相同, 线量不同.

3) 定轴转动刚体上各点的角速度矢量$\vec{\omega}$的方向均沿轴线.



1. 基本物理量

角位置： $\theta(t)$ **单位：弧度**(rad)

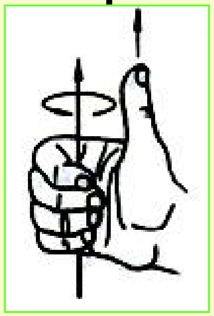


角位移： $\Delta\theta, \mathrm{d}\theta$

角速度大小： $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

单位：弧度·秒$^{-1}(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$

角速度$\vec{\omega}$**的方向：右旋前进方向**



线速度与角速度之间的关系： $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

角加速度矢量： $\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ **单位：弧度·秒**$^{-2}(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2})$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \beta r\vec{e}_{\tau} + \omega^2 r\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

2. 定轴转动中的基本关系式

刚体定轴转动的运动学中所用的角量关系及角量和线量的关系如下:

$$\theta = \theta(t), \quad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v = r\omega \quad a_\tau = r\beta \qquad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

注意: ω、β是矢量, 在定轴转动中由于轴的方位不变, 故用正负表示其方向.

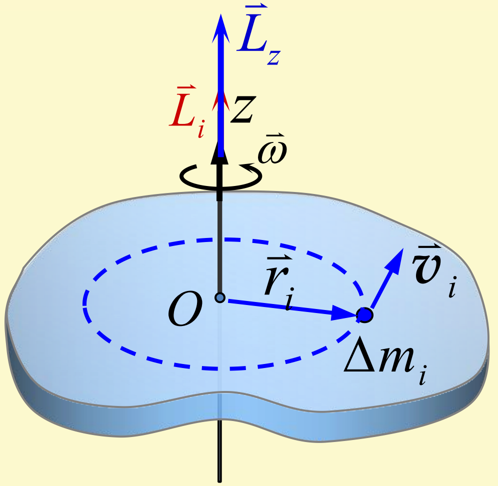
在刚体作匀加速转动时, 相应公式如下:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \beta t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$$

§3-2 定轴转动刚体的角动量 转动惯量

3.2.1 刚体对定轴的角动量



质点的角动量: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

定轴转动刚体: $m = \sum \Delta m_i$

Δm_i对z轴的角动量:

$$\vec{L}_i = r_i \times \Delta m_i \vec{v}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

刚体对z轴的角动量:

$$\vec{L}_z = \sum_i \vec{L}_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\vec{\omega} = J\vec{\omega}$$

定轴转动: $\vec{L}_z$、$\vec{\omega}$ //**轴** z

刚体对定轴z的角动量: $\boxed{L_z = J\omega}$

3.2.2 转动惯量(moment of inertia)

1. 定义 $J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 单位: $\mathrm{kg\cdot m^2}$ 量纲式: ML^2

刚体对定轴的转动惯量等于其各质点的质量与该质点到转轴距离的平方之积求和.

若质量连续分布

$$J=\int r^2\mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}m=\begin{cases}\rho\,\mathrm{d}V & \text{体分布}\\ \sigma\,\mathrm{d}S & \text{面分布}\\ \lambda\,\mathrm{d}l & \text{线分布}\end{cases}$$

2. 物理意义——描述物体转动惯性的大小

比较 $\begin{cases}\vec{p}=m\vec{v}\\ \vec{L}=J\vec{\omega}\end{cases}$

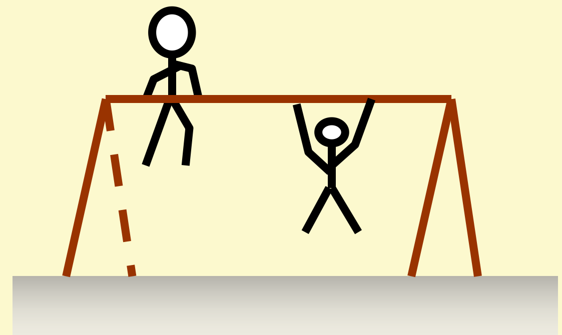
m —— 物体平动惯性的量度

J —— 物体转动惯性的量度

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad J=\int r^2\,\mathrm{d}m$$

影响 J 的因素

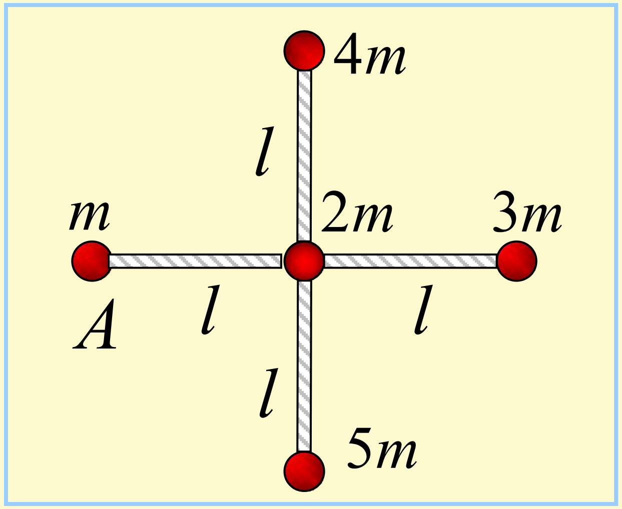
- 刚体的总质量 (同分布$M>m$, $J_M>J_m$)
- 刚体质量分布 (同m, $J_{中空}>J_{实}$)
- 转轴的位置



转动惯量取决于刚体本身的性质, 即与刚体的质量、质量分布以及转轴的位置有关.

3. J的计算 $J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$ $J=\int r^2 \,\mathrm{d}m$

例3-1 由长l的轻杆连接的质点如图所示, 求质点系对过A垂直于该平面的轴的转动惯量.



解 由定义式

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

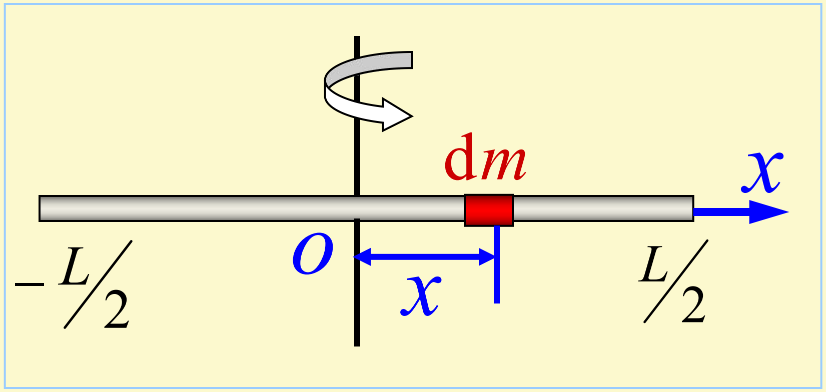
$$J=2ml^2+3m(2l)^2+(4m+5m)(\sqrt{2}l)^2$$

$$=32ml^2$$

思考: 转轴移至质量为$2m$的杆中心处 J=?

例3-2 一长为L的细杆, 质量m均匀分布, 求该杆对垂直于杆, 分别过杆的中点和一端端点的轴的转动惯量.

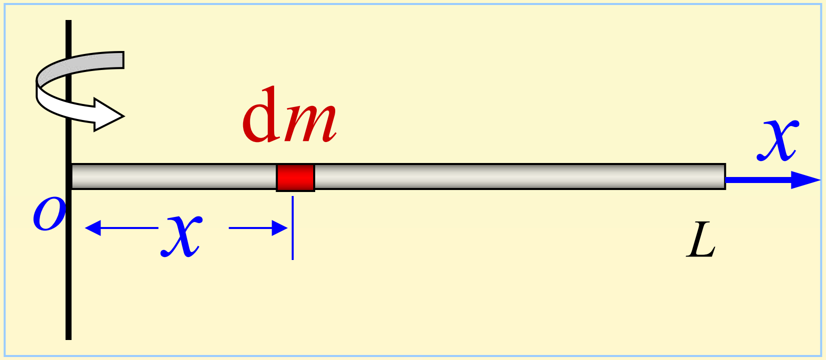
解 (1) 轴过中点



$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right)=\frac{1}{12}mL^2$$



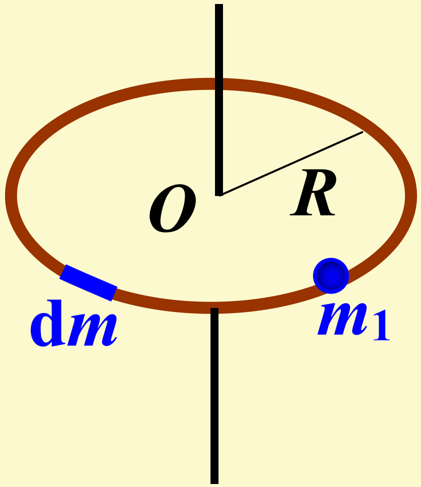
(2) 轴过一端端点

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_0^L x^2\frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

例3-3 求质量为m、半径为 R 的圆环对中心垂直轴的转动惯量.



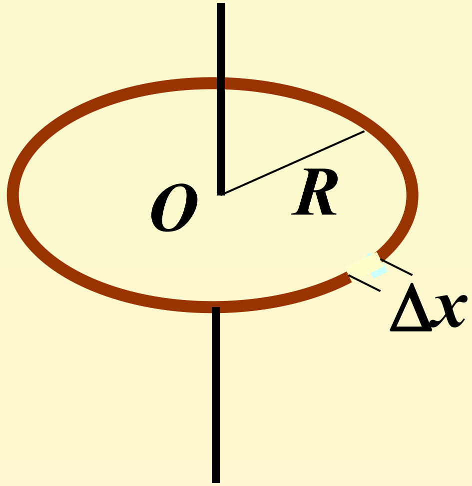
解 圆环上取微元dm

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=R^2\int_0^m \mathrm{d}m=mR^2$$

另解 $$J=R^2\int_0^{2\pi R}\frac{m}{2\pi R}\mathrm{d}l=R^2m$$

讨论1. 环上加一质量为m_1的质点, $J_1=?$ $J_1=mR^2+m_1R^2$

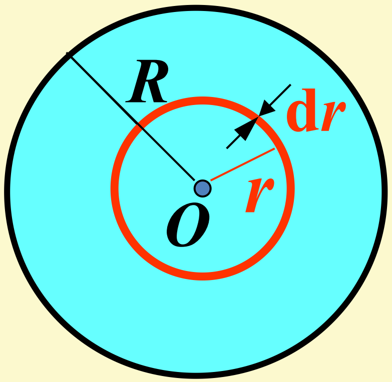
讨论2. 环上有一个Δx的缺口, $J_2=?$



$$J_2=mR^2-\frac{m}{2\pi R}\Delta xR^2$$

P.71 例3-2 求质量为 m、半径为 R 的均匀圆盘对中心垂直轴的转动惯量.

解 圆盘上取半径为r宽度$\mathrm{d}r$的圆环作为质量元$\mathrm{d}m$



$$J_{环} = mR^2 \to \mathrm{d}J = r^2\,\mathrm{d}m$$

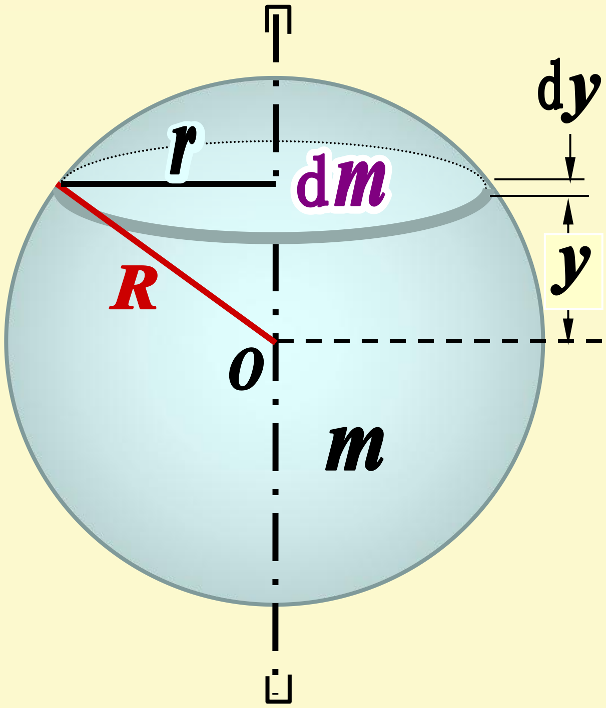
$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$J = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} mR^2$$

匀质实心球对心轴的转动惯量?

$$J_{盘}=\frac{1}{2}mR^2 \rightarrow \mathrm{d}J=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}m$$



$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho\pi r^2\,\mathrm{d}y$$

$$r^2=R^2-y^2$$

$$J=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\rho\pi(R^2-y^2)^2\,\mathrm{d}y$$

$$J=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{4\pi R^3/3}\cdot\pi\int_{-R}^{R}(R^4-2R^2y^2+y^4)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{5}mR^2$$

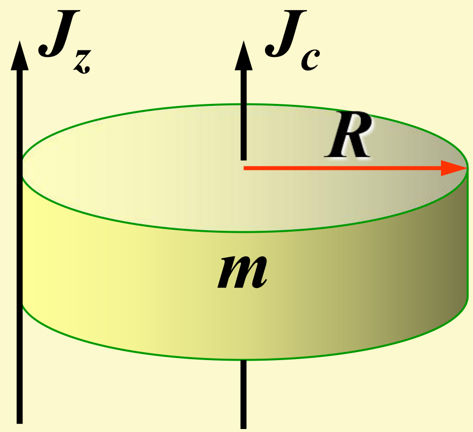
注意: 对同轴的转动惯量才具有可加减性

平行轴定理: 若刚体对过质心的轴的转动惯量为J_c, 则刚体对与该轴相距为d 的平行轴z的转动惯量J_z是

$$\boxed{J_z = J_c + md^2}$$

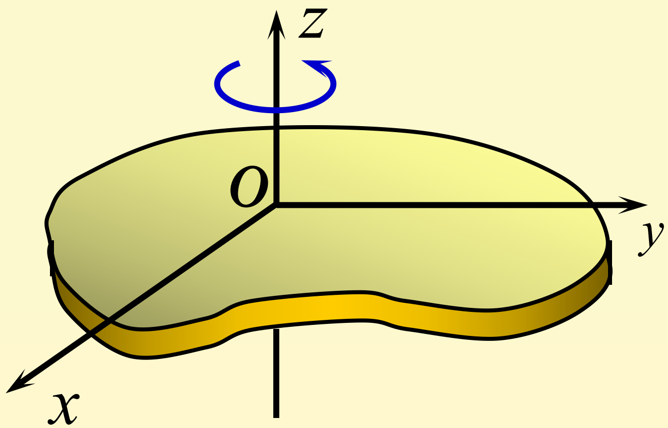
$$J_c = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$



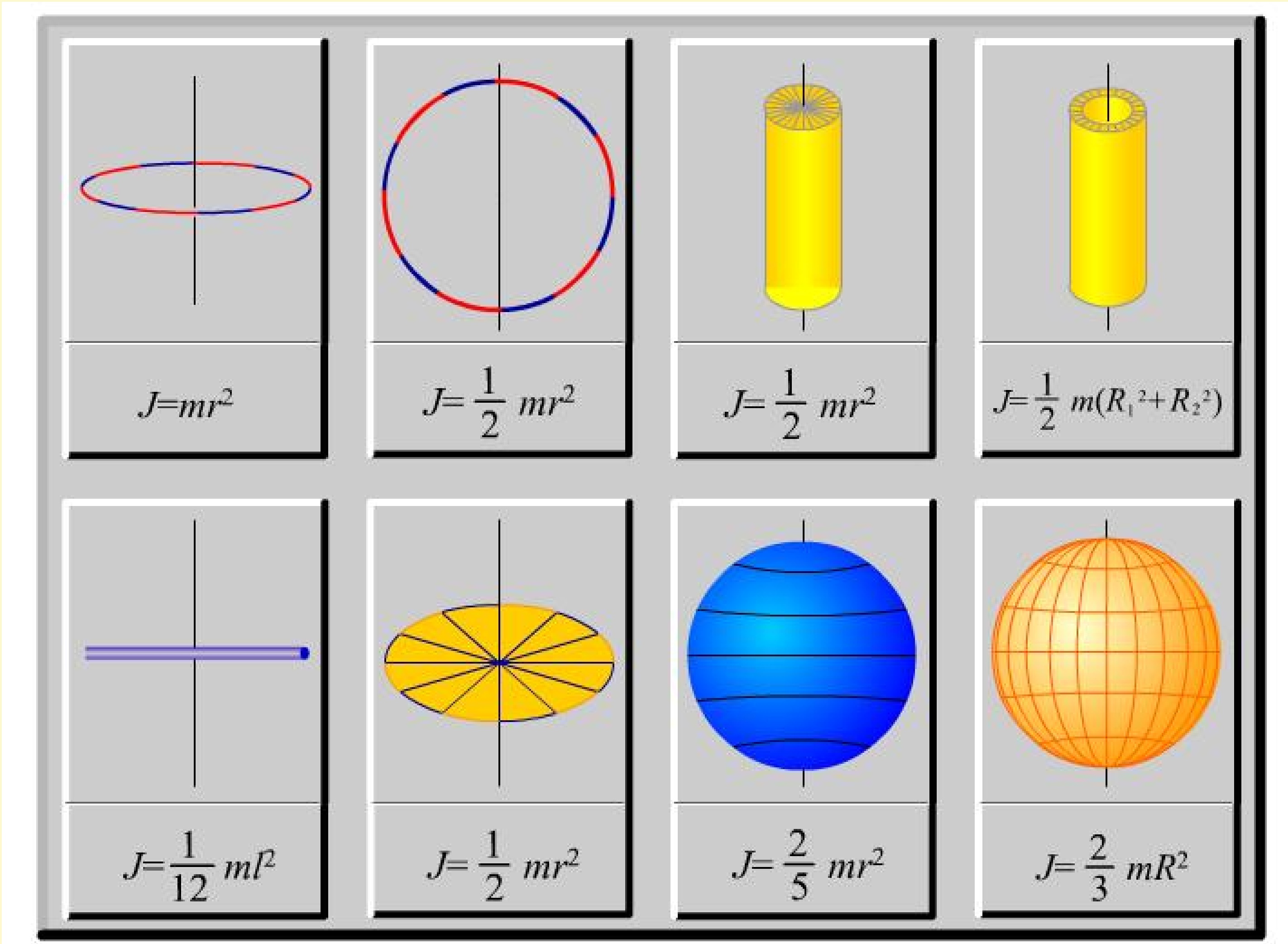
正交轴定理:

对平面刚体 $\boxed{J_z = J_x + J_y}$



几何形状不规则的刚体的转动惯量，由实验测定.

几种常见刚体转动惯量 P.72



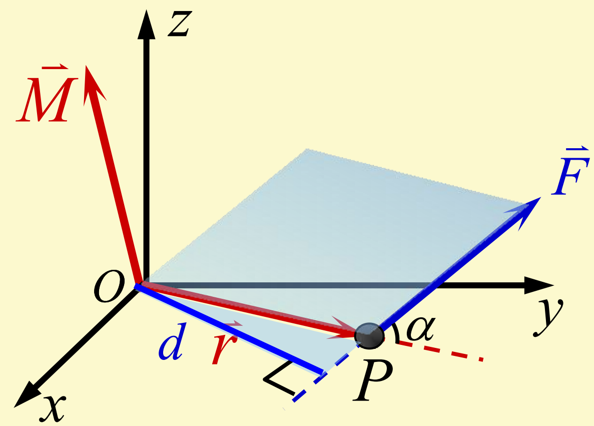
§3-3 刚体定轴转动定律

3.3.1 刚体角动量的时间变化率 对转轴的力矩

质点的角动量 $\vec{L}$ 随时间的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$

外力 $\vec{F}$ 对参考点*O*的力矩:

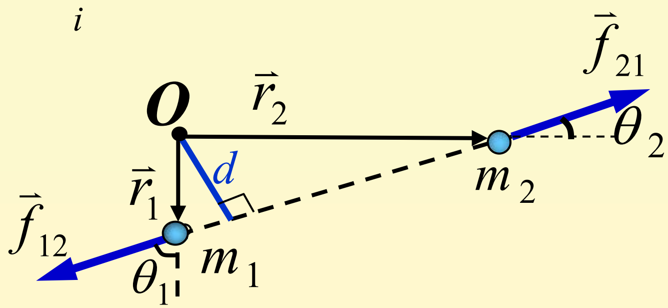
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\ \ (\mathrm{N\cdot m})$$

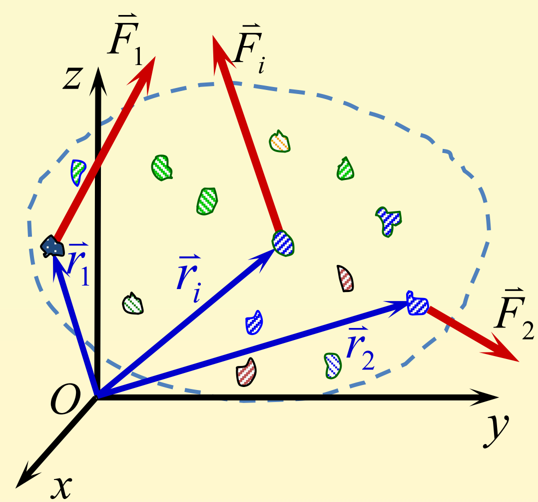


多个力对参考点*O*的力矩

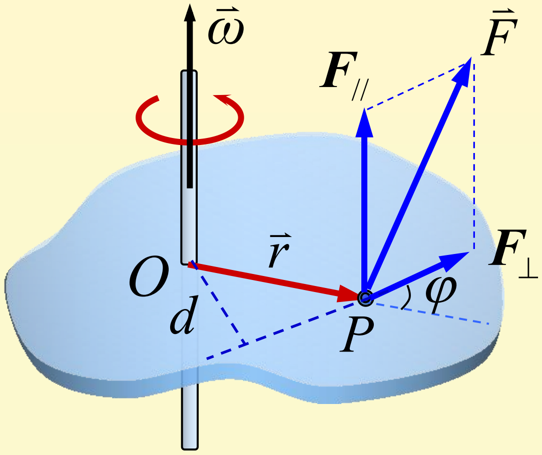
$$\vec{M}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

系统内力矩 $\sum\limits_i \vec{M}_{i内}=0$





对于刚体: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$



力对轴的力矩: $\boxed{\vec{M}_z=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}}$

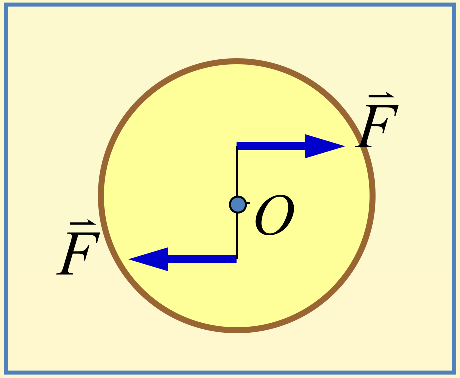
在垂直于转轴的平面内, 外力 $\vec{F}_{\perp}$ 与力臂 d 的乘积 $M_z=rF_{\perp}\sin\varphi=rd$

注意: 1) 力矩求和只能对同一参考点(或轴)进行

$$\vec{M}_O=\vec{M}_{1O}+\vec{M}_{2O}+\cdots \quad \text{矢量和}$$

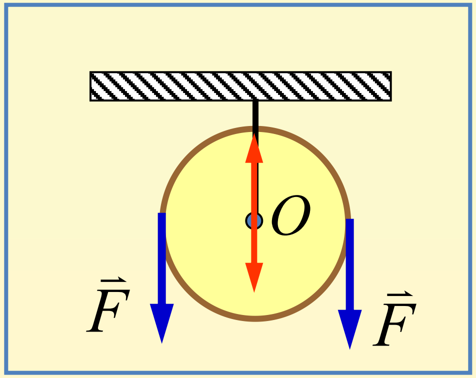
$$M_z=M_{1z}+M_{2z}+\cdots \quad \text{代数和}$$

2)



$\sum\vec{F}=0$

$\sum\vec{M}\neq0$



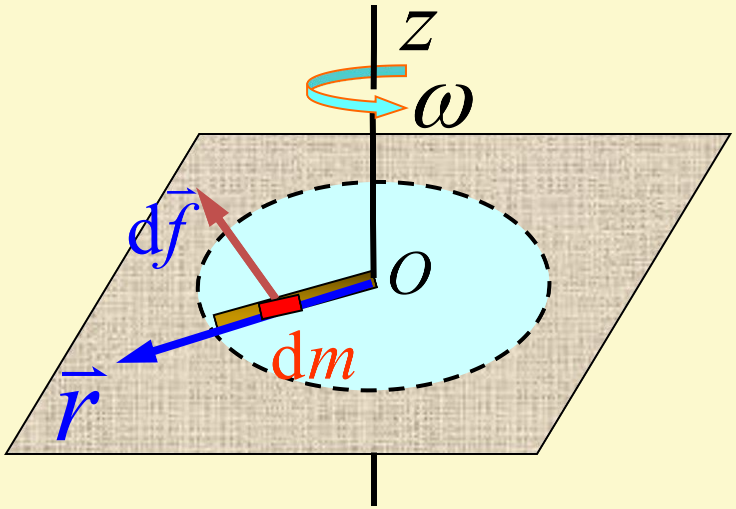
$\sum\vec{F}\neq0$

$\sum\vec{M}=0$

例3-4 质量为m、长为L的细杆在水平粗糙桌面上绕过其一端的O点旋转，杆与桌面间的摩擦系数为μ，求下列情况的摩擦力矩.

(1) 杆的质量均匀分布;

(2) 杆的密度与离轴距离成正比.



解 (1)

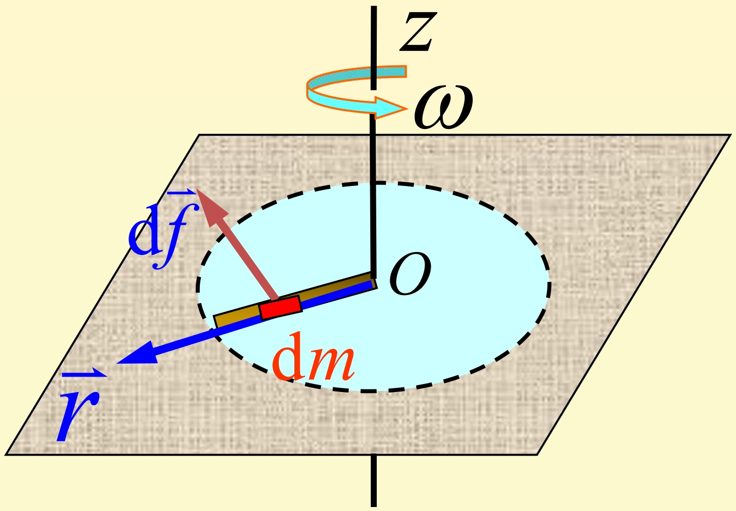
$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}mg$$

$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f$$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L r\mu\frac{m}{L}g\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mu mgL$$

解 (2) 设杆的线密度 $\lambda = kr$



$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r = kr\mathrm{d}r$$

由 $$m = \int \mathrm{d}m = \int_0^L kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kL^2$$

得 $$k = \frac{2m}{L^2}$$

$$\mathrm{d}f = \mu g \mathrm{d}m = \frac{2\mu m g}{L^2} r\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f$$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L \frac{2\mu m g}{L^2} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\mu m g L$$

对照教材P.73, 例3-3 你有什么想法?

高空骑车是否危险，
要注意哪些问题？

3.3.2 刚体定轴转动定律

刚体对定轴z的角动量: $L_z=J\omega$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta \qquad \boxed{M_z=J\beta}$$

刚体定轴转动定律(law of rotation): 刚体在作定轴转动时, 刚体的角加速度与它所受到的合外力矩成正比, 与刚体的转动惯量成反比.

比较: 力或力矩的瞬时作用规律

$$\begin{cases}\vec{F}=m\vec{a}\\ M_z=J\beta\end{cases}$$

m: 物体平动惯性的量度

J: 物体转动惯性的量度

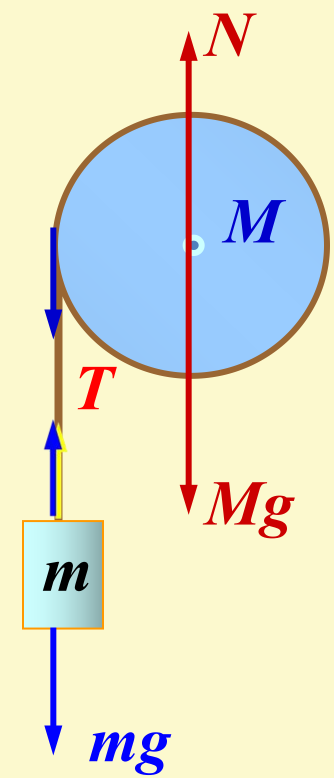
$\vec{F}$: 改变物体平动状态的原因

M_z: 改变物体绕轴转动状态的原因

例3-5 质量为M =16kg的实心滑轮, 半径为R =0.15m. 一根细绳绕在滑轮上, 一端挂一质量为m的物体. 设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动, 求:

(1) 由静止开始1秒钟后, 物体下降的距离;

(2) 绳子的张力.



解 对轮、物受力分析如图

由转动定律 $TR = J\beta = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}$

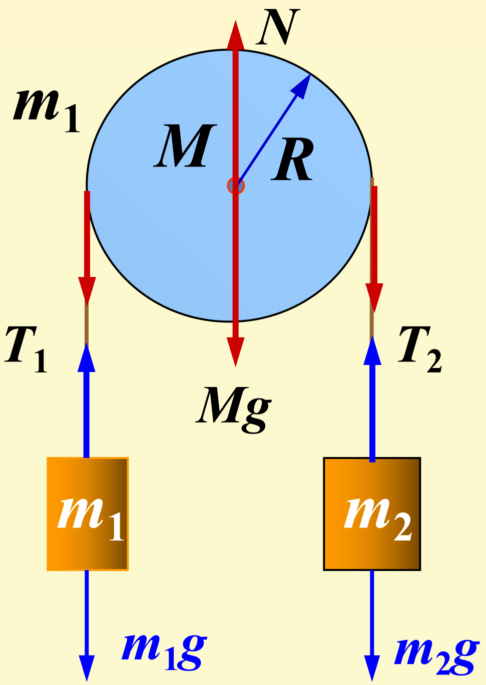
由牛顿定律 $mg - T = ma$

$$a = \frac{mg}{m + M/2} = \frac{8\times 10}{8+8} = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 1^2 = 2.5\ \mathrm{m} \qquad T = \frac{1}{2}\times 16\times 5 = 40\ \mathrm{N}$$

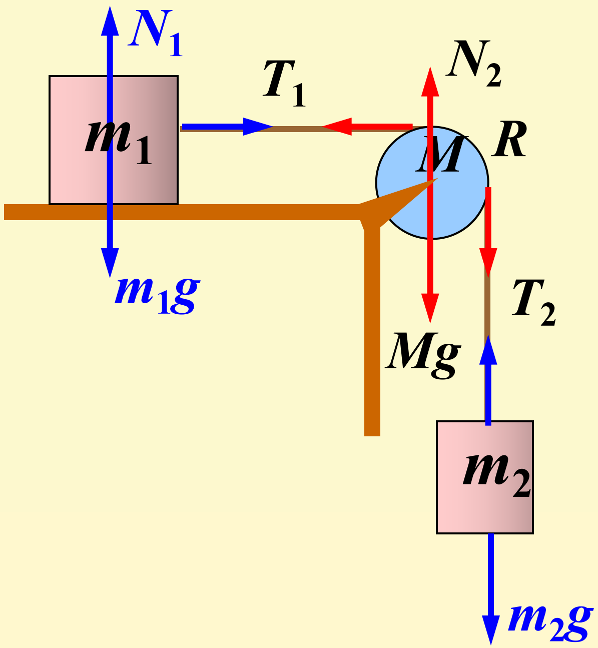
变形问题:

$m_2 > m_1$



$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$
$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$
$$T_2 R - T_1 R = J\beta$$

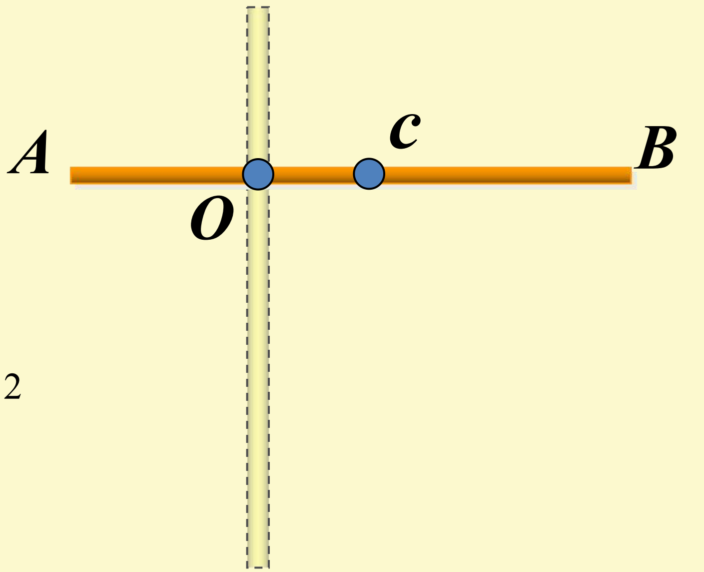
$$J = \frac{1}{2} M R^2$$
$$a = R\beta$$



$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$
$$T_1 = m_1 a$$
$$T_2 R - T_1 R = J\beta$$

$$J = \frac{1}{2} M R^2$$
$$a = R\beta$$

例3-6 一质量为m、长为l的均质细杆, 可绕垂直于平面、穿过O点的转轴转动, 转轴距A端$l/3$. 今使棒从静止开始由水平位置绕O点转动, 求: (1) 水平位置时的角速度和角加速度. (2) 垂直位置时的角速度和角加速度.



解 已知 $J_c = \frac{1}{12}ml^2$

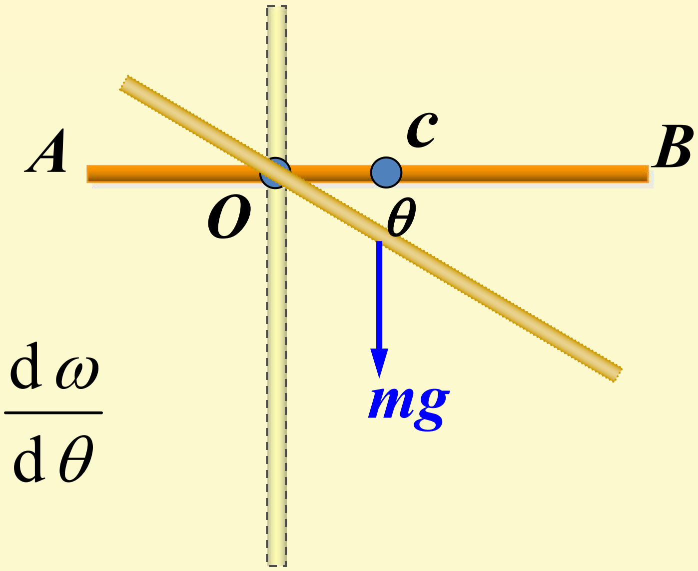
由平行轴定理 $J_O = J_c + md^2$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

(1) $\omega_0 = 0$ $\beta = \frac{M}{J_O} = \frac{mgl/6}{ml^2/9} = \frac{3g}{2l}$

(2) 求垂直位置时的角速度和角加速度

解 (2) $\beta = 0$



由转动定律 $M = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

$$mg\frac{l}{6}\cos\theta = \frac{1}{9}ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{9}ml^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi/2}\frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

§3-4 刚体的角动量定理和角动量守恒定律

3.4.1 刚体的角动量定理

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$ 微分式

冲量矩

积分式:
$$\boxed{\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t}_{\text{冲量矩}}=\vec{L}_2-\vec{L}_1=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1}$$

质点的角动量定理: 质点在$t_1\rightarrow t_2$时间内所受合外力矩的冲量矩等于该段时间内质点角动量的增量.

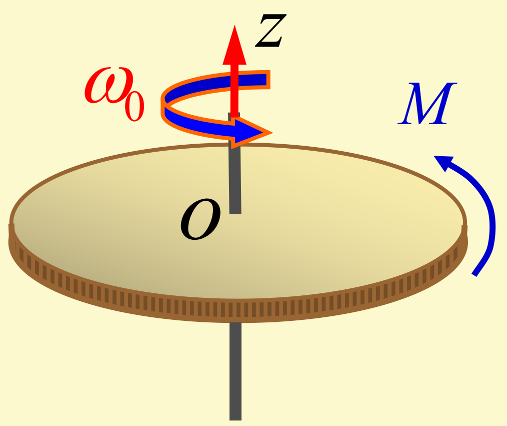
定轴刚体的角动量定理

$$M_z=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \qquad M_z\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}L$$

$$\int_{t_1}^{t_2}M_z\cdot\mathrm{d}t=L_2-L_1=J_2\omega_2-J_1\omega_1$$

例3-7 一个作定轴转动的轮子正以角速度ω_0匀速转动, 它对轴的转动惯量$J = 2.0\text{kg·m}^2$. 现对轮子施加一恒定的力矩$M = -7.0\ \text{N·m}$, 经过8秒, 轮子的角速度为$-\omega_0$, 求ω_0的大小.

解 由角动量定理



$$\int M\mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$$

$$\int_0^8 M\mathrm{d}t = -J\omega_0 - J\omega_0$$

$$\omega_0 = 14\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

阅读 P.76 例3-5 注意M, J, ω均应对同一转轴!

3.4.2 刚体的角动量守恒定律

1. 角动量守恒定律

由角动量定理 $\int \vec{M}_{外}\mathrm{d}t = \Delta\vec{L}$

当 $\vec{M}_{外} = 0$ 时， $\Delta\vec{L} = 0$ $\boxed{\vec{L} = \text{恒矢量}}$

角动量守恒定律: 刚体所受合外力矩为零，则刚体的角动量保持不变.

$$\boxed{J_2\vec{\omega}_2 = J_1\vec{\omega}_1}$$

$$\text{分量式}:\begin{cases} M_x = 0\text{时} & L_x = \text{恒量} \\ M_y = 0\text{时} & L_y = \text{恒量} \\ M_z = 0\text{时} & L_z = \text{恒量} \end{cases}$$

对定轴转动刚体，当 $M_{轴} = 0$ 时，$L_{轴} = \text{恒量}$

注: (1) 守恒条件为 $\vec{M}_{外}=0$

或 $M_{轴}=0$ 不是 $\int \vec{M}_{外}\mathrm{d}t=0$

(2) 与动量守恒定律彼此独立

当 $\vec{F}_{外}=0$ 时, $\vec{p}=$ 恒矢量

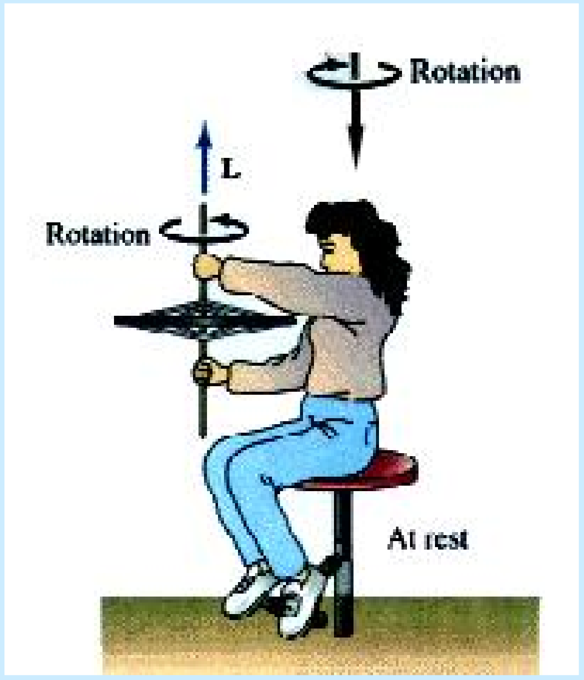
当 $\vec{M}_{外}=0$ 时, $\vec{L}=$ 恒矢量

2. 角动量守恒定律适用状况

(1) 对于系统:

J_i、$\vec{\omega}_i$ 均可以变化,

但 $\sum J_i\vec{\omega}_i$ 不变

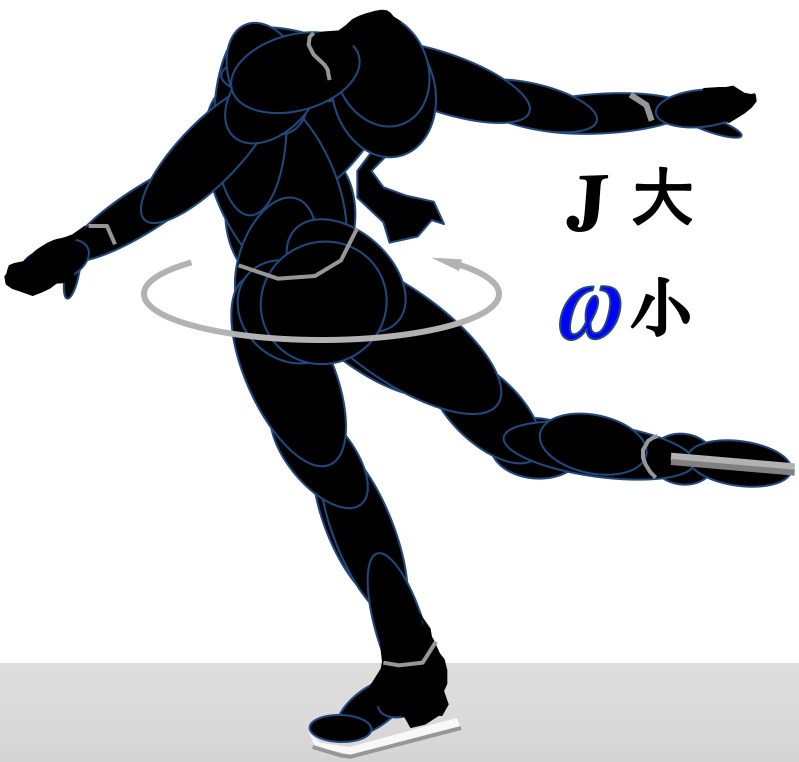


(2) 对于变形体：$J, \vec{\omega}$均可以变化，但 $J\vec{\omega}$不变

花 样 滑 冰

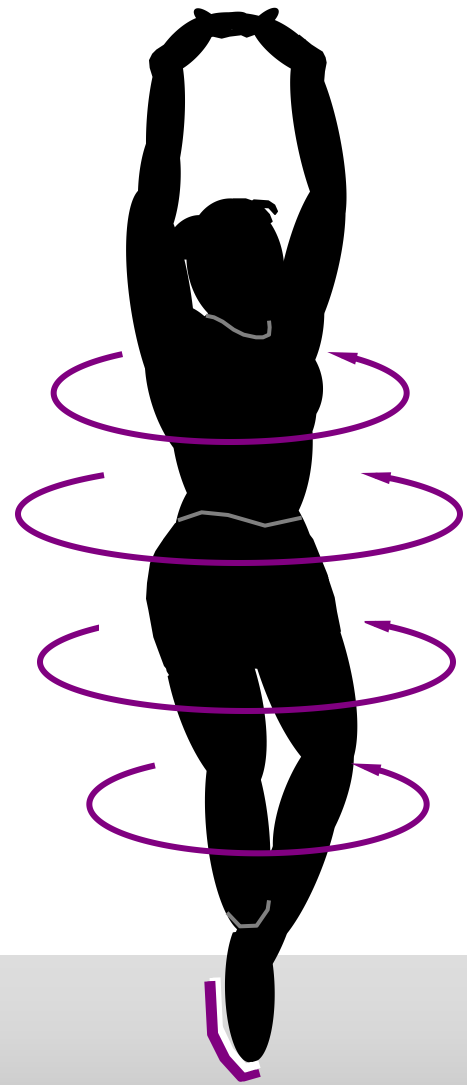
先使自己转动起来

张臂 → 收臂

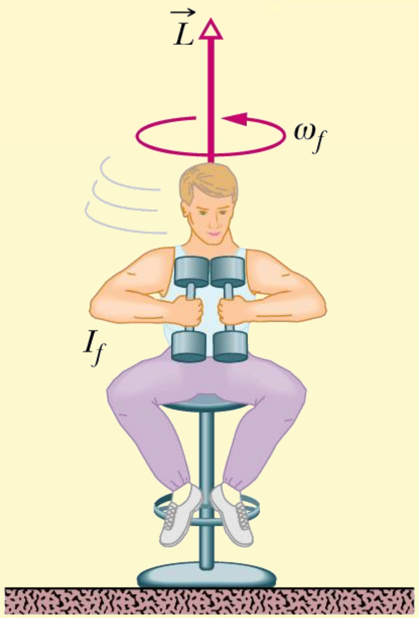


J 大 ω小

J 小 ω大



转动快慢自如:



猫尾巴的功能?

注意观察: 猫下落过程除了甩了尾巴, 还有什么过程?

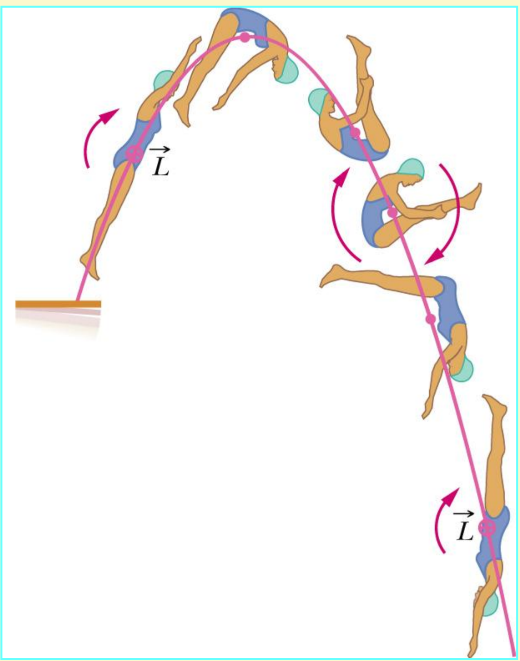
当它着地时, 四脚伸直, 通过下蹲, 缓解了冲击.

(3) 角动量定理适用于一切转动问题, 大至天体, 小至粒子、电子...

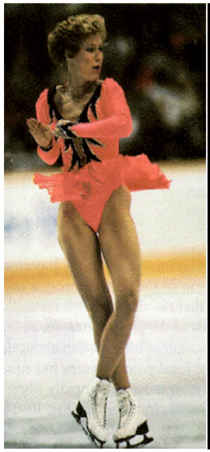
为什么银河系呈旋臂盘形结构?

为什么直升飞机的尾翼要安装螺旋桨?

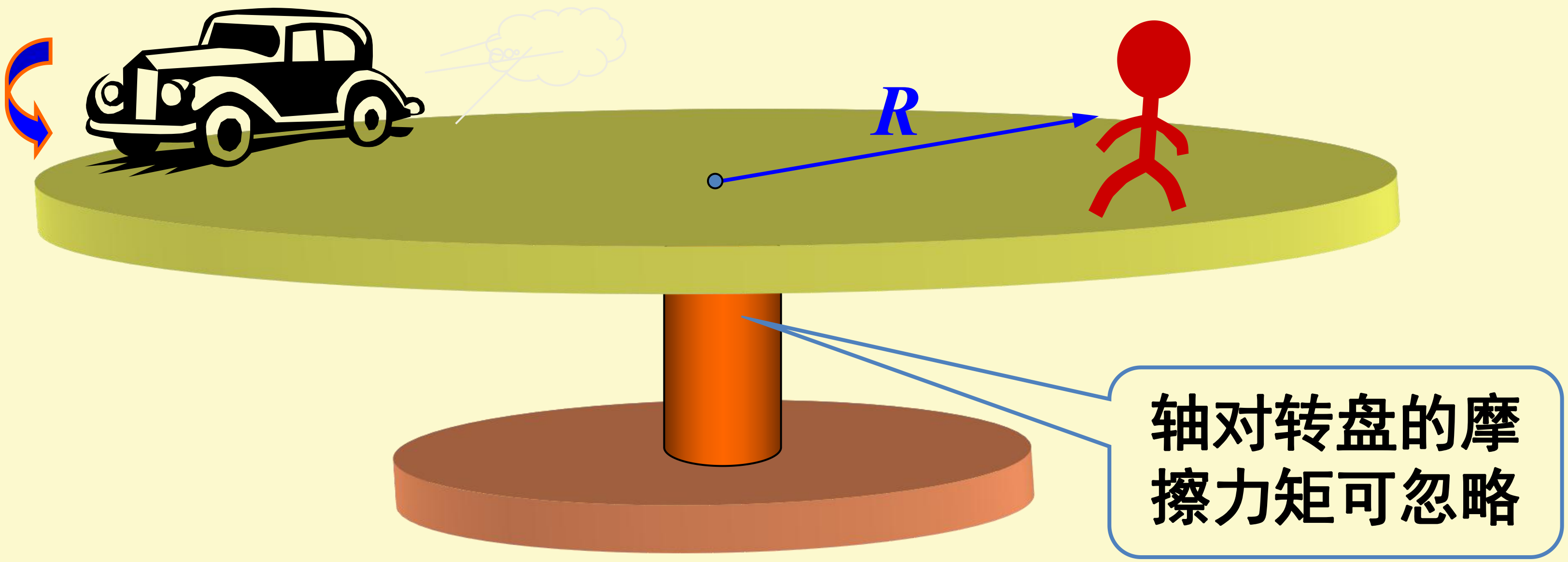
体操运动员的“晚旋”



角动量守恒现象举例



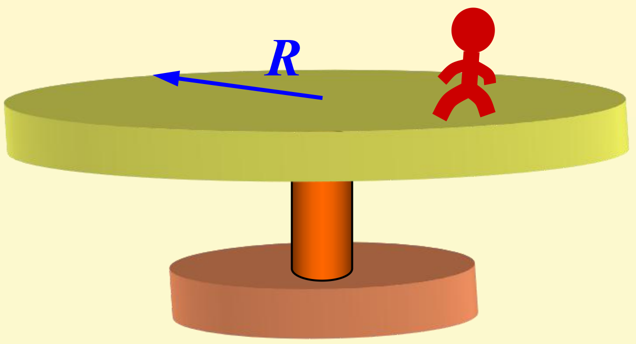
下图所示一半径为R的圆盘, 汽车沿盘边开动时出现什么现象? 什么量守恒?



例3-8 一半径为R、质量为 M 的转台, 可绕通过其中心的竖直轴转动, 质量为m 的人站在转台边缘, 最初人和台都静止. 若人沿转台边缘跑一周(不计阻力), 相对于地面, 人和台各转了多少角度?

解 选地面为参考系，设对转轴

人: J, ω; 台: J', ω'



系统对转轴角动量守恒

$$J\omega - J'\omega' = 0$$

$$J = mR^2 \quad J' = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \omega' = \frac{2m}{M}\omega$$

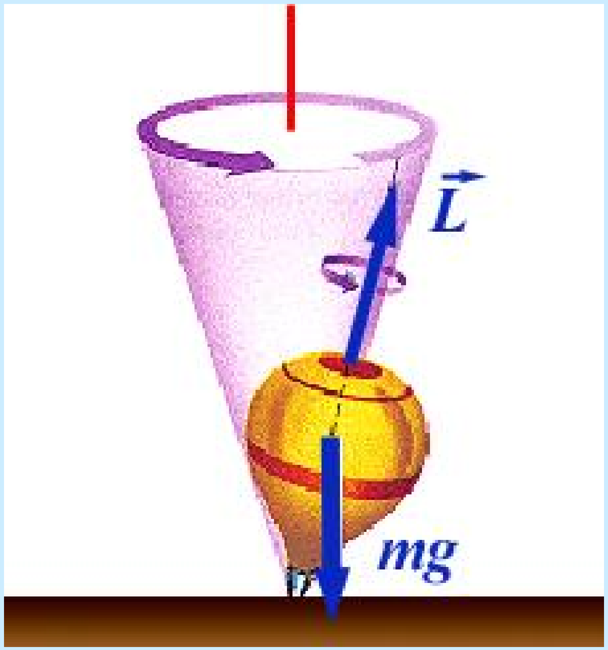
人沿转台边缘跑一周: $\int \omega \mathrm{d}t + \int \omega' \mathrm{d}t = 2\pi$

人相对地面转过的角度: $\theta = \int \omega \mathrm{d}t = \dfrac{2\pi M}{2m + M}$

台相对地面转过的角度: $\theta' = \int \omega' \mathrm{d}t = \dfrac{2\pi(2m)}{2m + M}$

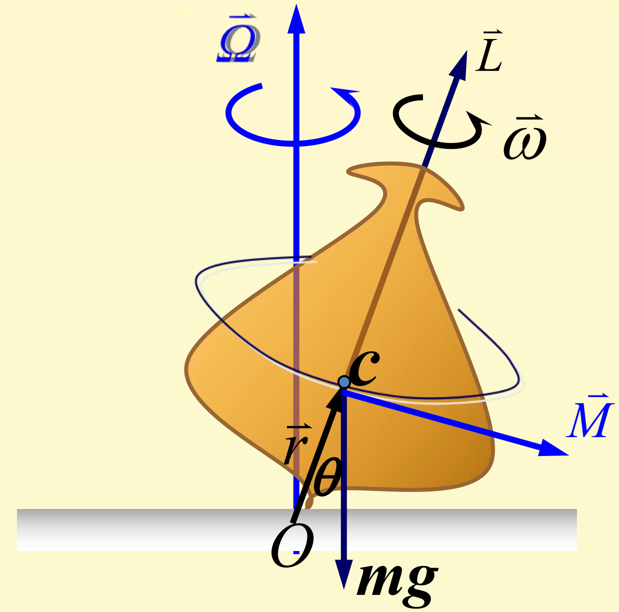
3.4.3 进动

请点击观看轮子的运动



进动(precession): 高速自转的物体其自身对称轴绕竖直轴做回旋运动. (L)

陀螺(top)运动分析:



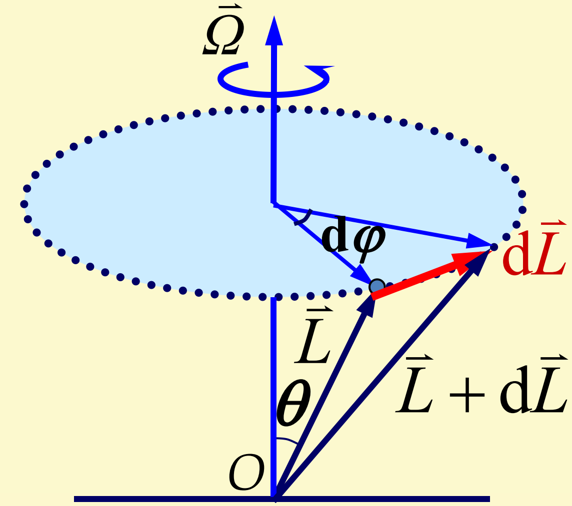
设陀螺质量为m, 以角速度ω自转

重力对固定点O的力矩: $\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$

$$\left|\vec{M}\right|=mgr\sin\theta$$ 方向沿c点切向

绕自身轴转动的角动量: $\vec{L}=J\omega\hat{r}$

角动量定理的微分式: $\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\cdot\mathrm{d}t$



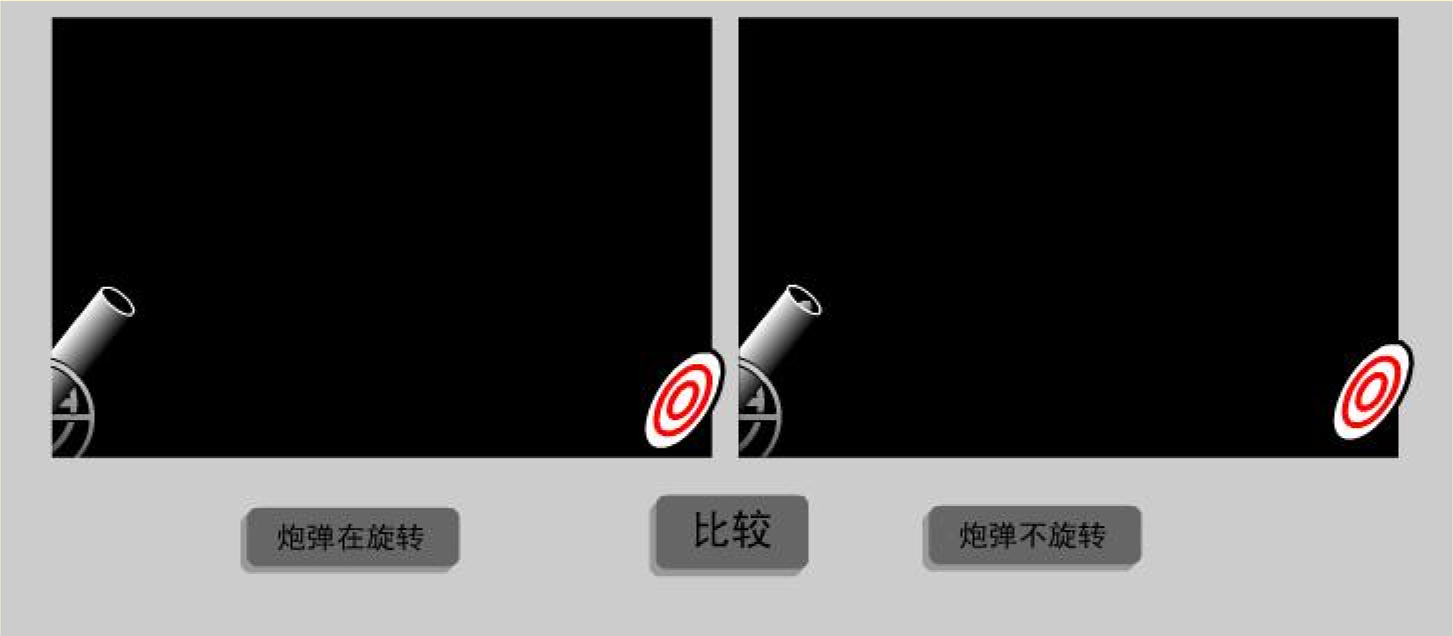
$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|=\left|\vec{L}\right|\sin\theta\cdot\mathrm{d}\varphi=J\omega\sin\theta\cdot\mathrm{d}\varphi$$

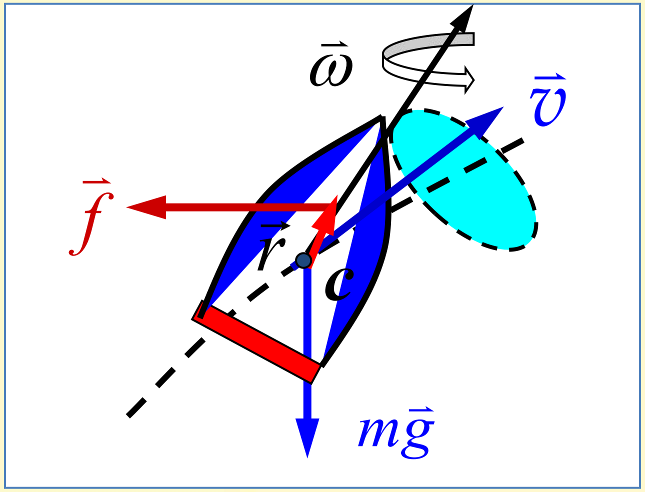
$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|=\left|\vec{M}\right|\cdot\mathrm{d}t=mgr\sin\theta\cdot\mathrm{d}t$$

进动角速度 $\Omega=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{mgr}{J\omega}$

结论: 进动现象是自旋(spin)的物体在外力距作用下, 沿外力矩方向不断改变其自旋角动量方向的结果.

炮弹的进动分析





“逆风行舟”

依据什么原理?

请您分析一下

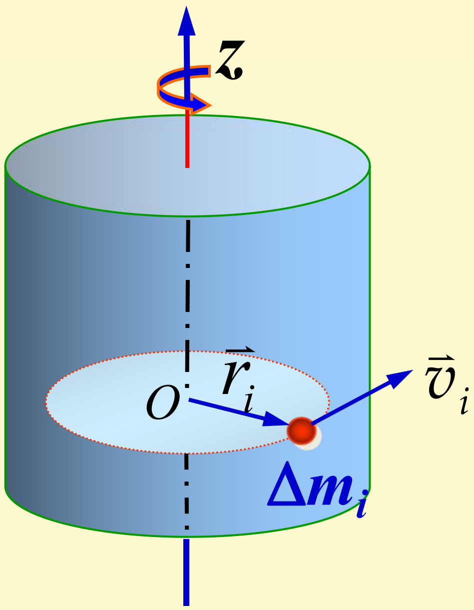
车轮的进动 (分析演示)

讨论 配重对进动的影响

- 改变 ω 的方向, 进动方向是否改变?
- 改变配重 G, 对进动有什么影响?
- 用外力矩加速(或阻碍)进动, 会发生什么现象?

§3-5 刚体定轴转动的定理和机械能守恒定律

3.5.1 刚体转动动能和势能



质元动能： $\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$

1. 刚体的总动能

$$E_\mathrm{k} = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2}$$ （对比 $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$）

2. 刚体的重力势能

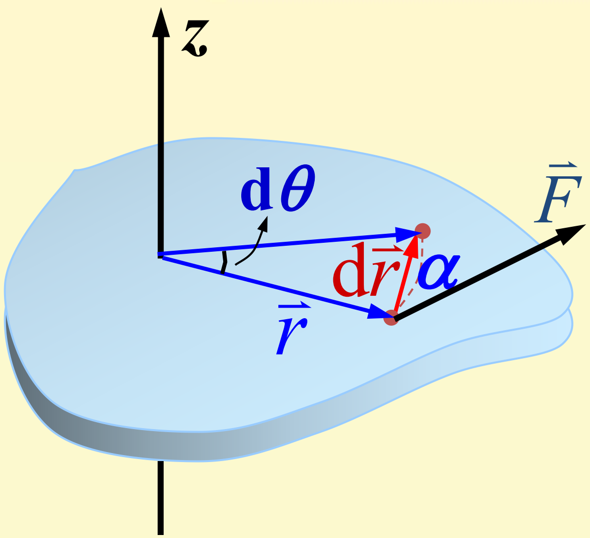
$$E_\mathrm{p} = \sum \Delta m_i g z_i = mg\frac{\sum \Delta m_i z_i}{m}$$

$$\boxed{E_\mathrm{p} = mgz_c}$$

结论： 刚体的重力势能应等于质量集中于质心的重力势能

3.5.2 力矩的功

$$\mathrm{d}A = F\cos\alpha\,\mathrm{d}r = \underbrace{F\cos\alpha\, r}_{M}\,\mathrm{d}\theta$$



力矩的功: $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

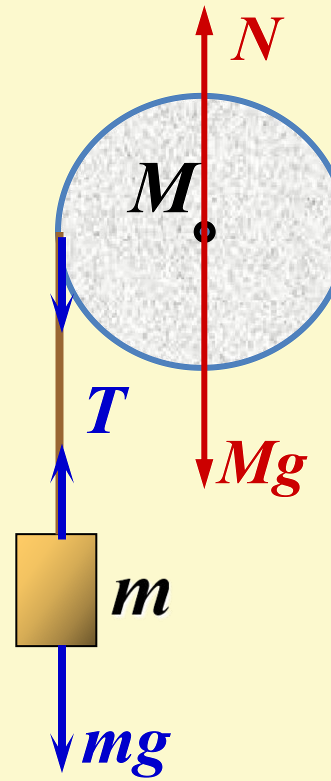
力矩功率: $P = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$

3.5.3 刚体定轴转动的动能定理

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A = \int \mathrm{d}A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

例3-9 一质量为M, 半径R的圆盘, 盘上绕由细绳, 一端挂有质量为m的物体. 求物体由静止下落高度h时的速度值.



解

$$TR\Delta\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$mgh - Th = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = R\Delta\theta \qquad v = R\omega$$

$$v_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad J = MR^2/2$$

解得:

$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$

3.5.4 刚体定轴转动中的机械能守恒定律

刚体的机械能

$$\boxed{E=\frac{1}{2}J\omega^2+mgz_c}$$

由刚体定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(M_{\text{外}}+M_{\text{非保内}}+M_{\text{重}}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

刚体定轴转动的功能原理:

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2}(M_{\text{外}}+M_{\text{非保内}})\mathrm{d}\theta=\left(mgz_{c2}+\frac{1}{2}J\omega_2^2\right)-\left(mgz_{c1}+\frac{1}{2}J\omega_1^2\right)}$$

$$A_{\text{外力矩}}+A_{\text{非保内}}=E_2-E_1$$

对于含刚体的力学系统

$$A = A_{外力} + A_{外力矩} + A_{非保内}$$

$$E = \sum \frac{1}{2}mv^2 + \sum \frac{1}{2}J\omega^2 + \sum mgh_c + \sum \frac{1}{2}kx^2$$

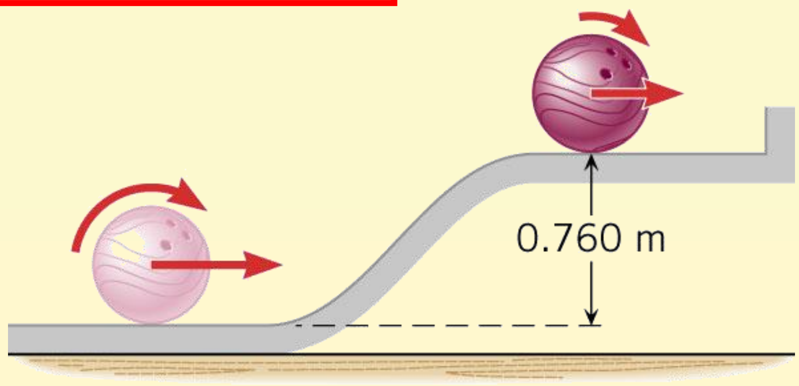
$$A_{外力} + A_{外力矩} + A_{非保内} = E_2 - E_1$$

如果 $A_{合外力}+A_{非保内}+A_{合外力矩}=0$

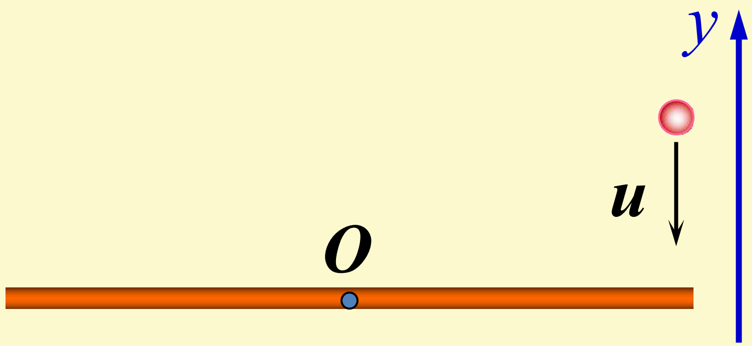
系统机械能守恒定律

$$\boxed{\sum \frac{1}{2}mv^2 + \sum \frac{1}{2}J\omega^2 + \sum mgh_c + \sum \frac{1}{2}kx^2 = C}$$

需要多大的速度才能滚上斜坡?



例3-10 质量为M、长为$2l$的均质细棒，在竖直平面内可绕中心轴转动. 开始棒处于水平位置，一质量为m的小球($m<<M$)以速度u垂直落到棒的一端上. 设为弹性碰撞，求碰后小球的回跳速度v以及棒的角速度.



解 建立如图坐标系

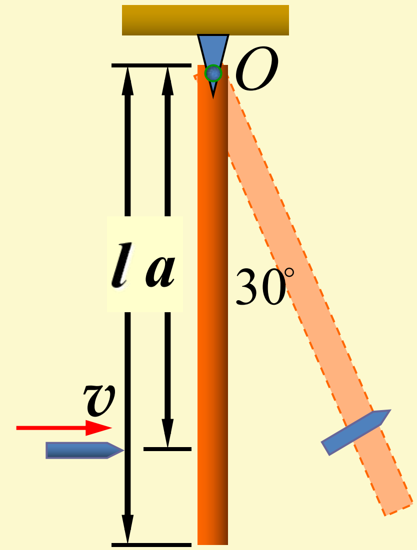
由系统角动量守恒

$$-mul = -J\omega + mvl$$

机械能守恒 $\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}J\omega^2$

$$v = \frac{u(M-3m)}{M+3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(M+3m)l}$$

例3-11 一长为l、质量为M的杆可绕支点O自由转动. 一质量为m、速度为v的子弹射入距支点为a的棒内. 若棒偏转角为30°, 问子弹的初速度是多少?



解 碰撞过程角动量守恒

$$mva = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega$$

向上偏转过程机械能守恒

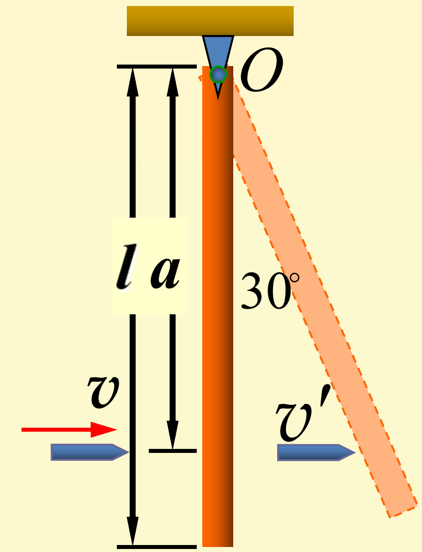
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega^2 = mga(1-\cos 30°) + Mg\frac{l}{2}(1-\cos 30°)$$

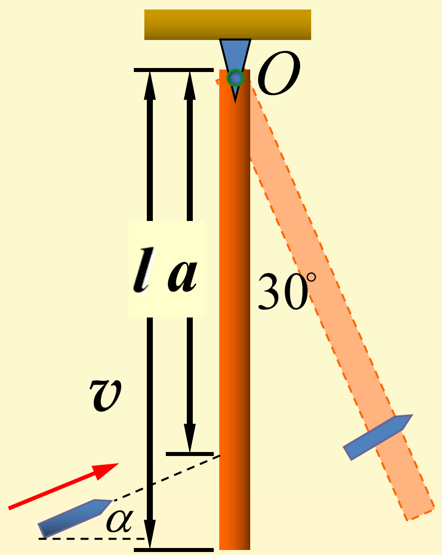
$$v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)(Ml+2ma)\left(Ml^2+3ma^2\right)}$$

变形问题:

$$mva = \frac{1}{3} M l^2 \omega + m v' a$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3} M l^2 \omega^2 = Mg\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$





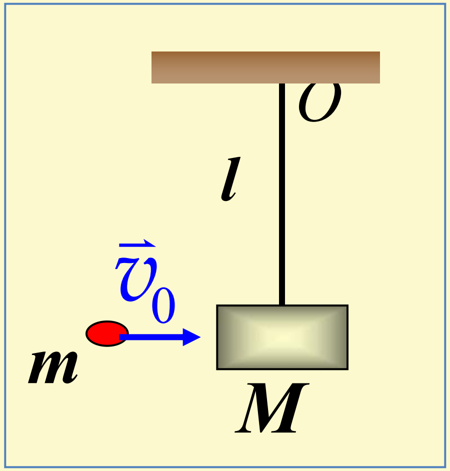
$$mva\cos\alpha = \left(\frac{1}{3} M l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M l^2 + ma^2\right)\omega^2$$

$$= mga\left(1-\cos 30^\circ\right) + Mg\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

2. 区分两类冲击摆

(1)



质点 ⟷ 质点　柔绳无切向力

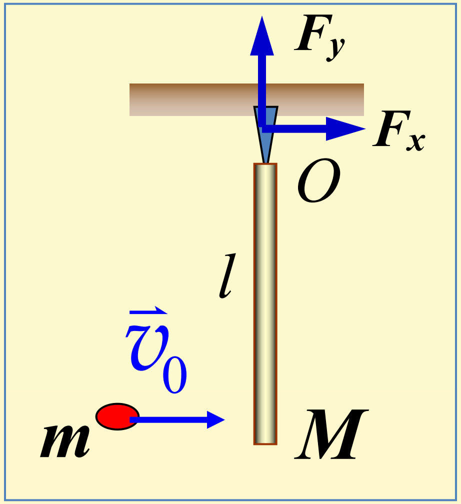
- **水平方向:** $F_x = 0$, p_x **守恒**

$$mv_0 = (m+M)v$$

- **对 O 点:** $\vec{M}=0$, $\vec{L}$ **守恒**

$$mv_0 l = (m+M)vl$$

(2)



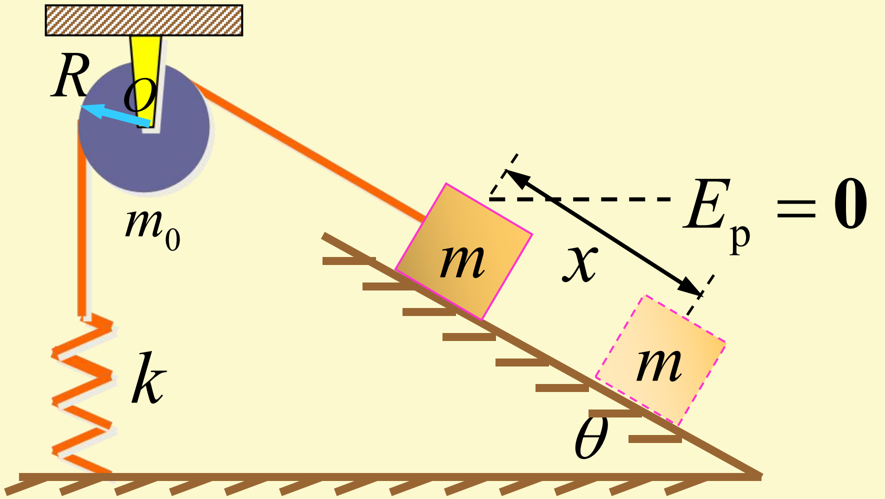
质点 ⟷ 定轴刚体(不能简化为质点)

轴作用力不能忽略, 动量不守恒, 但对 O 轴合力矩为零, 角动量守恒

$$mv_0 l = ml^2\omega + \frac{1}{3}Ml^2 \cdot \omega \qquad v = \omega l$$

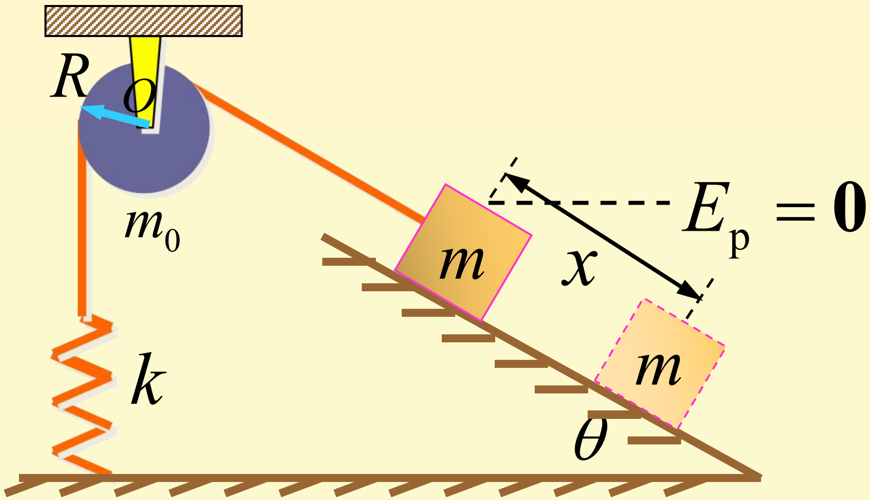
例3-12 如图, 已知滑轮的质量为m_0, 半径为R. 斜面的倾角为θ, 斜面上物体的质量为m, 物体与斜面间光滑; 弹簧的劲度系数为k. 现将物体从静止释放, 释放时弹簧无形变. 设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动, 忽略轴间摩擦阻力矩, 求物体沿斜面下滑x(m)时的速度. (滑轮视作薄圆盘)

解 选取 m、m_0、k 和地球为系统, 重力和弹性力均为系统保守内力, 其它外力和非保守内力均不做功, **系统机械能守恒**.



设 m 未释放时为初态, 此时重力势能为零. 当m下滑 x 后为终态.

设滑轮相对于零势点的重力势能为E'_{P}



初态能量:

$$E_{\mathrm{k}0}+E_{\mathrm{p}0}=0+E'_{\mathrm{P}} \quad (1)$$

终态能量:

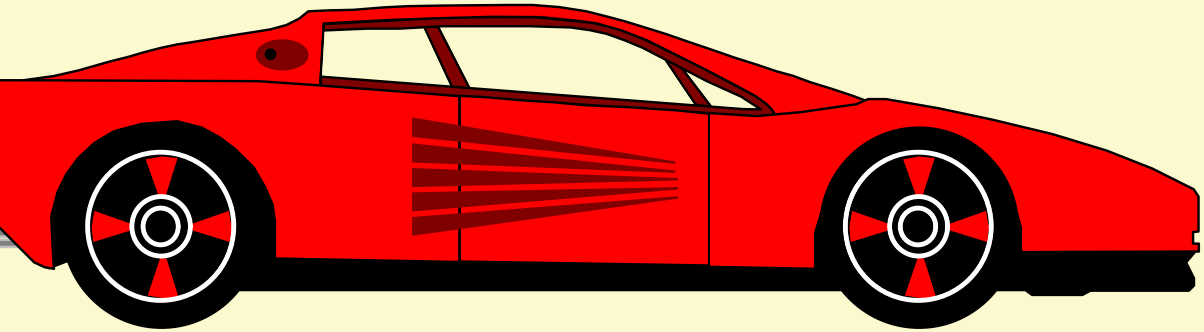
$$E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_0\omega^2\right)+\left(\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta+E'_{\mathrm{P}}\right) \quad (2)$$

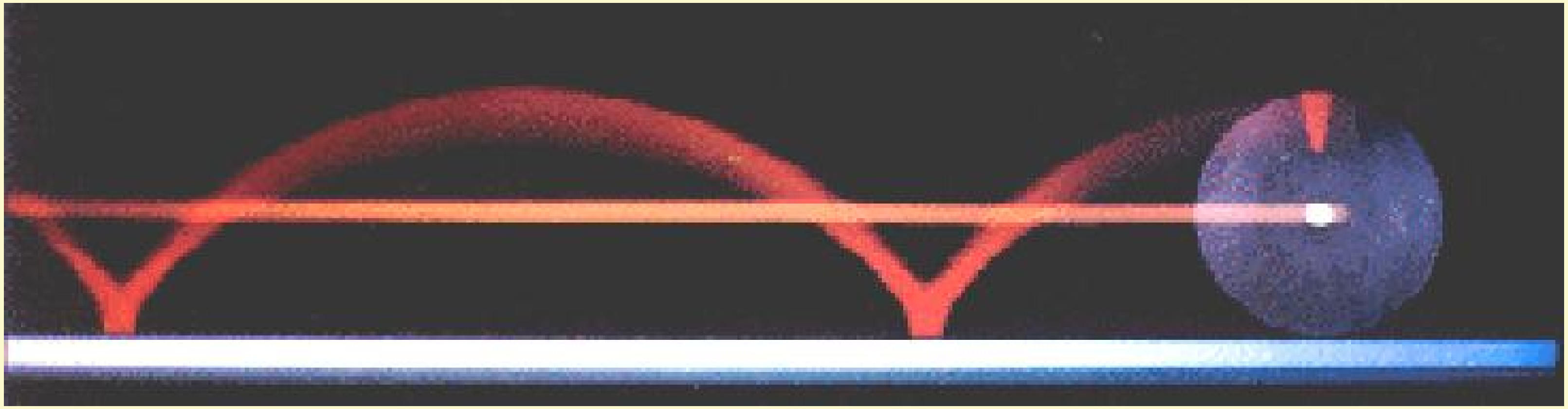
式(1)=(2), 又已知 $v=R\omega,\quad J_M=\dfrac{1}{2}m_0R^2$

解得

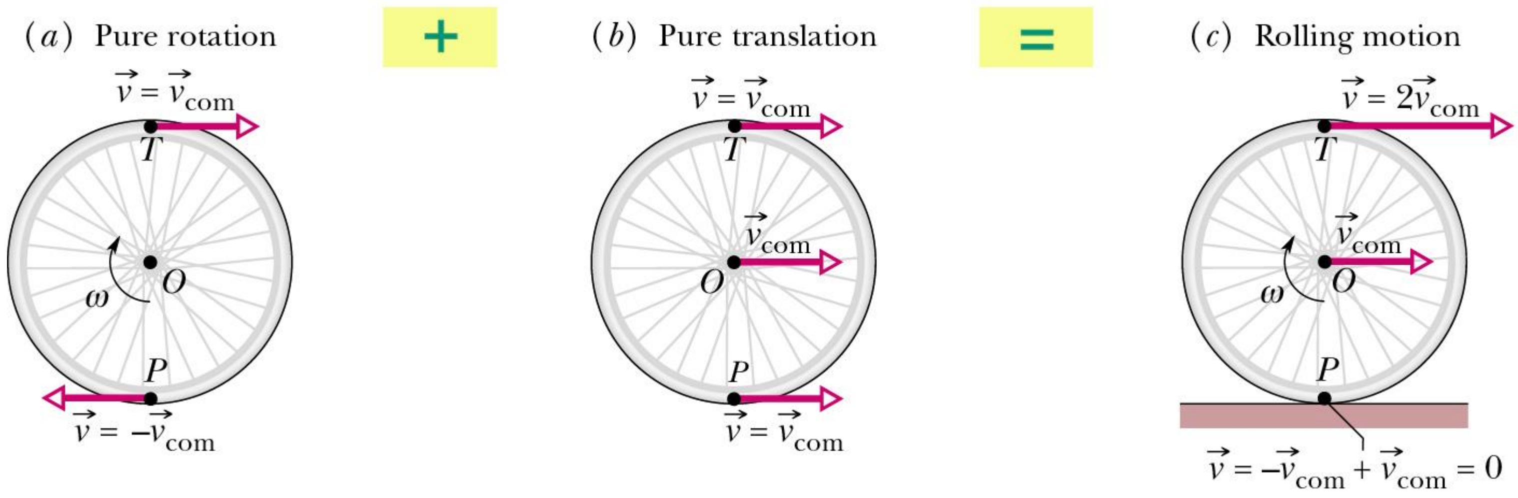
$$v=\sqrt{\frac{4(mgx\sin\theta)-\frac{1}{2}kx^2}{2m+m_0}}$$

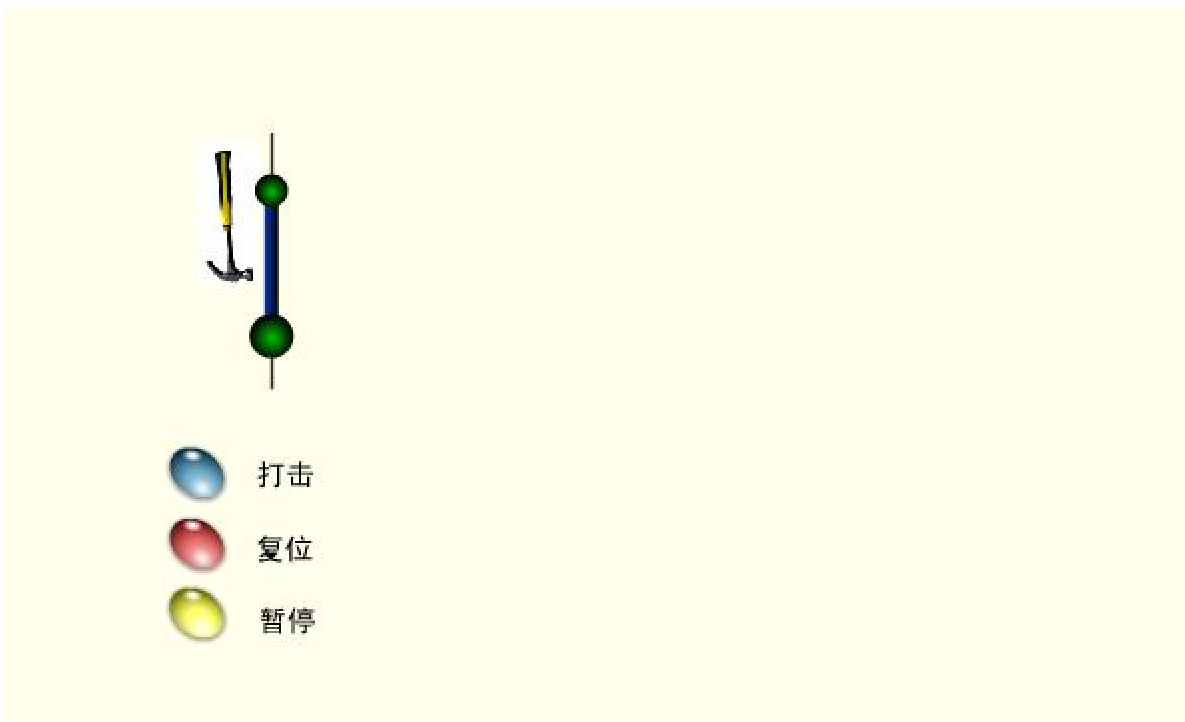
§3-6　刚体的平面平行运动





平动+转动


(a) Pure rotation
+
(b) Pure translation
=
(c) Rolling motion
$\vec{v} = \vec{v}_{com}$
T
O
ω
P
$\vec{v} = -\vec{v}_{com}$
$\vec{v} = \vec{v}_{com}$
T
$\vec{v}_{com}$
O
P
$\vec{v} = \vec{v}_{com}$
$\vec{v} = 2\vec{v}_{com}$
T
$\vec{v}_{com}$
ω
O
P
$\vec{v} = -\vec{v}_{com} + \vec{v}_{com} = 0$


打击
复位
暂停

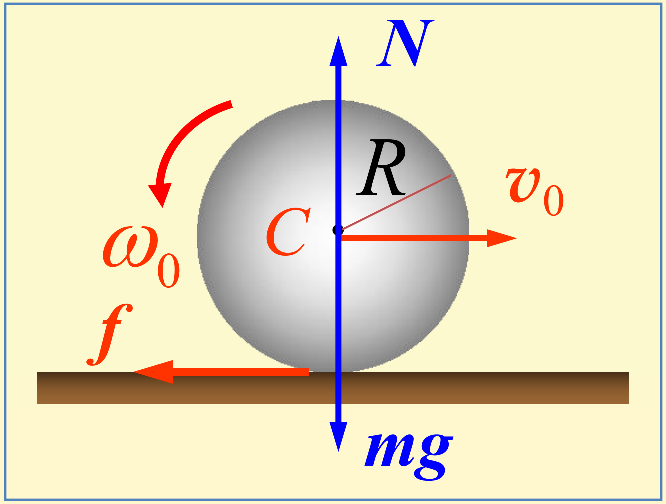
讨论乒乓球的自动回滚问题

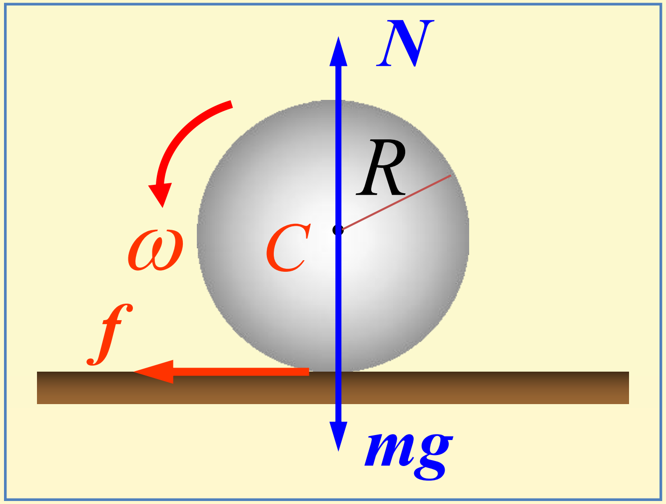
现象: 使乒乓球向前运动的同时, 以较高的转速“反转”, 则乒乓球过一段时间自动回滚.

原因:

质心平动
绕质心转动

} 当平动速度减为零时, 转动角速度尚未减为零.





条件:

$$\begin{cases} -\mu mg = ma_c = m\dfrac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} \\ -\mu mgR = J_c\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{3}mR^2\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_c = v_0 - \mu gt \\ \omega = \omega_0 - \dfrac{2\mu g}{3R}t \end{cases}$$

$v_c = 0$**时,** $t = \dfrac{v_0}{\mu g}$ $\qquad \omega = \omega_0 - \dfrac{3\mu g}{2R}\cdot\dfrac{v_0}{\mu g} > 0$

得 $\omega_0 > \dfrac{3v_0}{2R}$