主管领导审核签字

哈尔滨工业大学 2019 学年 春 季学期

实变函数 试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

片纸鉴心 诚信不败

授课教师 姓名 学号 院系

密 封 线

一、判断题，如果正确，请简要证明;如果错误，请举反例。(每题6分，共60分)

1.若无限集 M 的势为 $\aleph$，则存在互不相交的一列无限集 M_n，满足 $\overline{\overline{M_n}}=\aleph$ 且 $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$.（对 ）

2.设 G 是 $\mathbb{R}$ 中任意开集，则 G 是 F_σ-型集，即存在一列闭集 $F_n\subset G$，使 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$.（ ）

3.设 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一列有界连续函数，记 $f(x)=\sup_n f_n(x)$，则对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，集 $\{x\in\mathbb{R}\ |f(x)>\alpha\}$ 是 Borel 集。（ ）

4.若 $f\in L(E)$，记 $E_n=E(n\le|f|<n+1)$，$n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$ 收敛。（ ）

5. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足如下 Lipschitz 条件:

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le|x-y|$$

则对 $[0,1]$ 中任何零测度集 e，有 $mf(e)=0$ 。（ ）

6.设 $A=\{a_\lambda:\lambda\in\Gamma\}$ 是一族正数，满足对任意有限个 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Gamma$，成立

$$\sum_{i=1}^{n}a_{\lambda_i}\le1,$$

则 Γ 是至多可列集。（ ）

7.设 f 是 $[1,2]$ 上的绝对连续函数，且满足 $f(1)=1$ 及

$$xf'(x)=-f(x)\quad a.e.$$

则 $f(x)\equiv\frac{1}{x}$.（ ）

8.设 E 是可测集，$f:E\to\mathbb{R}$，$g:E\to\mathbb{R}$ 是两个实函数, 且 $f(x)+g(x)$ 是可测函数，则 f, g 也都是可测函数。（ ）

9.若可测集 $\{E_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=+\infty$，则 $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)>0$.（ ）

10. 若可测集 E 满足 $mE=0$，则 $E+E=\{x+y:x,y\in E\}$ 也是零测度集。（ ）

院系________ 学号________ 姓名________ 授课教师________

……密……封……线……

二、(10分)设 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}$ 是任意两个非空集，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，证明:

$$m_*\left(E_1\cup E_2\right)\geq m_*E_1+m_*E_2.$$

三、(10分)设 f_n，f 是可测集 E 上定义的可测函数，满足

$$mE(|f_n-f|\geq\frac{1}{n})<\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$$

证明：$f_n\xrightarrow{a.e.}f$.

四、(10分)设 $f\in L(\mathbb{R})$，记 $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ f(x)\in\mathbb{Z}\right\}$(其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集)，且 $m(A)=0$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\cos\pi f(x)\right|^{n}\cdot\left|f(x)\right|dm=0.$$

五、(10分)证明：$f(x)=x^{2}\sin\dfrac{1}{x}(0<x\le 1)$，$f\left(0\right)=0$ 是 $\left[0,1\right]$ 上绝对连续函数。

院系________ 学号________ 姓名________ 授课教师________

密 封 线