Laboratorium Algorytmów i Struktur Danych			
Kierunek:Informatyka	Specjalność: -	Rok: I	Grupa: I2
Algorytmy z powracaniem *(16.05.2017r.)*			Nr 4
Kinga Karasiewicz (*132247*)			
Uwagi:			Ocena:

1. Cel ćwiczenia

Celem laboratorium było zbadanie właściwości i skuteczności obliczania cykli Eulera (Eu), pojedynczego cyklu Hamiltona (H1) i wszystkich cykli Hamiltona w grafie nieskierowanym. Ćwiczenie polega na zmierzeniu czasu obliczania tych cykli od liczby wierzchołków (N) i gęstości połączeń (d), a także ilości tych cykli w zależności od liczby wierzchołków i gęstości.

2. Podstawy teoretyczne

Cykl Eulera - to taki cykl w grafie, który zawiera każdą krawędź tego grafu dokładnie raz. Warunkiem istnienia cyklu są:

- graf musi być spójny.
- dla grafu skierowanego należy sprawdzić czy stopień krawędzi wejściowy wierzchołka jest równy stopniu krawędzi wyjściowych z wierzchołka.
- dla grafu nieskierowanego z każdego wierzchołka stopień krawędzi musi być parzysty.

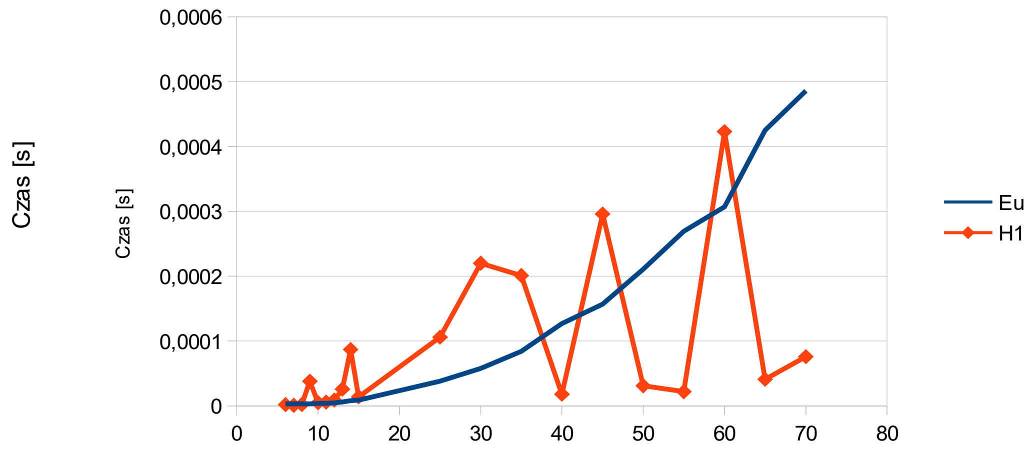
Cykl Hamiltona - jest cyklem, który odwiedza każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz. Znalezienie cyklu Hamiltona w grafie jest bardzo trudne obliczeniowo, jego złożoność obliczeniowa wynosi (*n!*). Jeśli ustawimy flagę, by algorytm zatrzymał się po odnalezieniu jednej ścieżki Hamiltona może on przyśpieszyć, jednak jeżeli w tym grafie nie ma cyklu Hamiltona to w najgorszym przypadku jego złożoność wynosi (*n!*). Aby graf mógł posiadać cykl Hamiltona, musi być spójny.

3.1 Ćwiczenie pierwsze

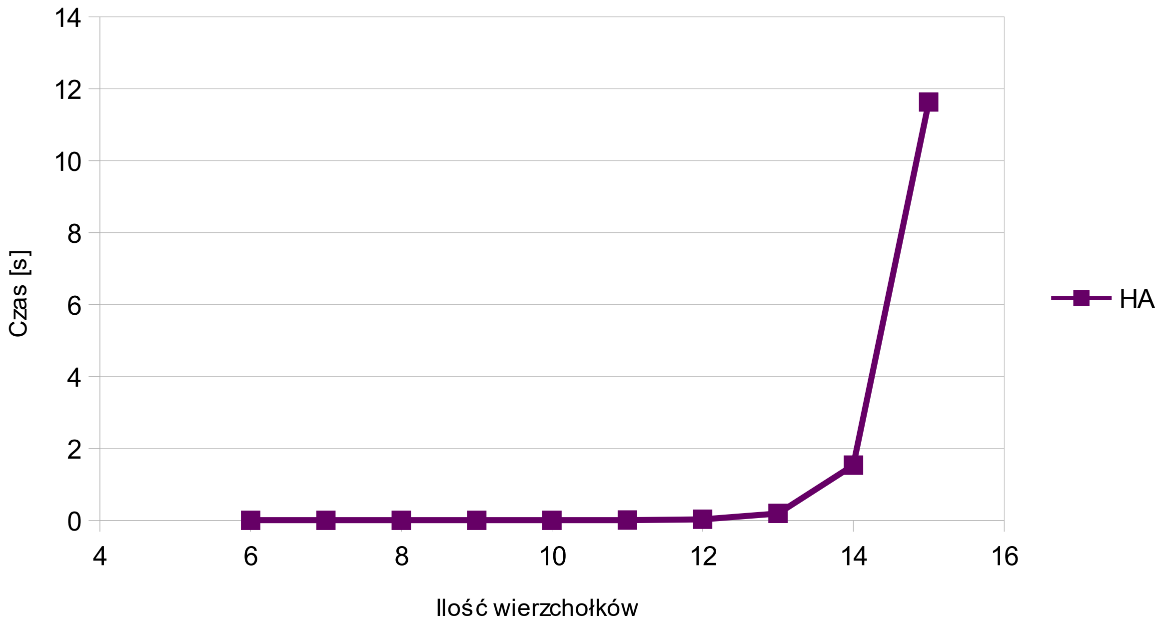
Ćwiczenie to polegało na zbadaniu czasu trwania wyszukiwania cyklu Eulera (Eu), pojedynczego cyklu Hamiltona (H1) i wszystkich cykli Hamiltona (HA) dla gęstości d = 0,6. Gdy czas dla wszystkich cykli Hamiltona będzie za długi ćwiczenie zostanie przerwane i dla pozostałych algorytmów wykonane zostaną dodatkowe pomiary z większym krokiem.

N	Eu	H1	HA
6	0,000003	0,000002	0,000017
7	0,000003	0,000001	0,000027
8	0,000003	0,000002	0,000095
9	0,000003	0,000038	0,000243
10	0,000004	0,000005	0,000714
11	0,000004	0,000006	0,006375
12	0,000005	0,000009	0,027994
13	0,000006	0,000026	0,191079
14	0,000008	0,000087	1,533170
15	0,000009	0,000014	11,628300
25	0,000038	0,000106	X
30	0,000058	0,000220	X
35	0,000084	0,000201	X
40	0,000127	0,000018	X
45	0,000157	0,000296	X
50	0,000211	0,000031	X
55	0,000269	0,000022	X
60	0,000307	0,000423	X
65	0,000425	0,000041	X
70	0,000486	0,000076	X

Tabela 1: Tabela przedstawia czas trwania obliczania cykli w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,6



Ilustracja 1: Wykres przedstawia czas trwania obliczania cykli w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,6



Ilustracja 2: Wykres przedstawia czas trwania obliczania cykli w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,6

3.2 Wnioski

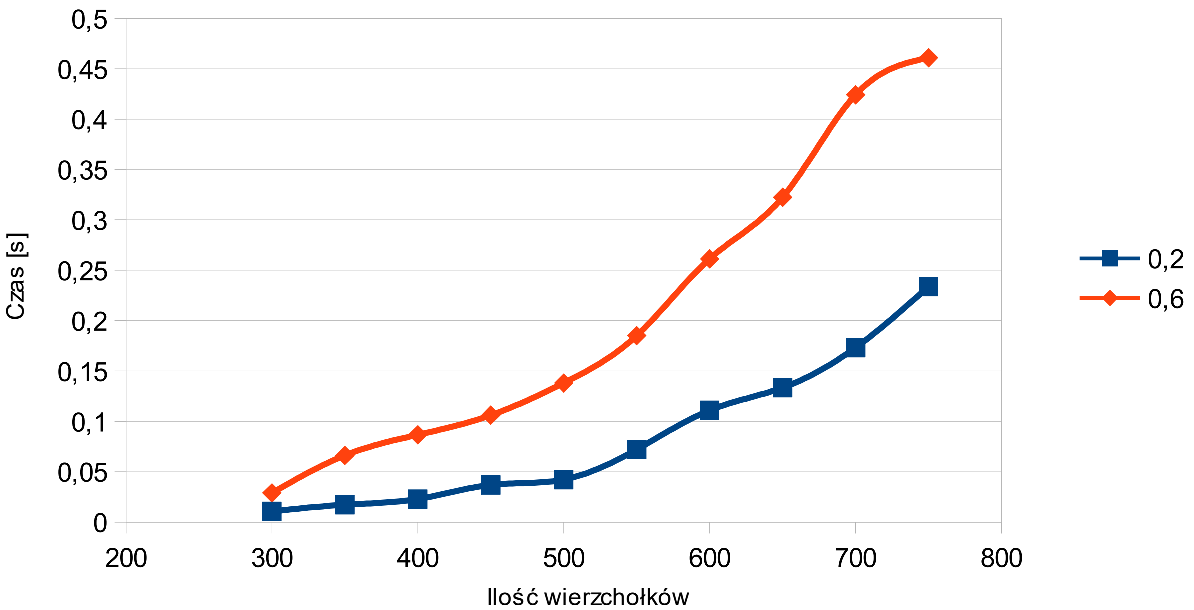
Mimo iż obydwa problemy brzmią podobnie ich algorytmy znacznie bardzo się różnią. Cykl Eulera należy do klasy P (*deterministic polynomial*), czyli jest możliwy do rozwiązania w czasie wielomianowym. Jego złożoność wynosi O(*m*), gdzie w naszym algorytmie m = N*(N-1)*d/2 (jego złożoność zależy też od zastosowanej metodzie realizacji grafu). Zaś cykl Hamiltona należy do problemów NP - zupełnych. Oznacza to, że nie znamy na ten moment algorytmu o wielomianowej złożoności do rozwiązania tego problemu. Możemy łatwo sprawdzić, czy podane rozwiązanie jest prawdziwe. By znaleźć wszystkie możliwe ścieżki Hamiltona złożoność tego algorytmu wynosi O(*n!*), zaś dla znalezienia pojedynczego cyklu Hamiltona złożoność jest taka sama, lecz jego czasu nie można określić.

3.3 Ćwiczenie drugie

Ćwiczenie polegało na zbadaniu czasu trwania wyszukiwania cyklu Eulera w grafie w zależności od gęstości.

N	d = 0,2	d = 0,6
300	0,010487	0,028839
350	0,017205	0,066122
400	0,022842	0,086644
450	0,036826	0,106023
500	0,042158	0,138041
550	0,072020	0,185075
600	0,110877	0,261312
650	0,133412	0,322424
700	0,173068	0,424249
750	0,233833	0,461034

Tabela 2: Tabela przedstawia czas trwania obliczania cyklu Eulera w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości (d)



Ilustracja 3: Wykres przedstawia czas trwania obliczania cyklu Eulera w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości (d)

3.4 Wnioski

Metoda poszukiwania cyklu Eulera oparta jest na algorytmie przeszukiwania grafu w głąb (DFS), jednak w tym wypadku nie przeszukujemy wierzchołków, a krawędzie. Te krawędzie, które zostały już odwiedzone są usuwane z grafu.

Warunkiem koniecznym, a zarazem dostatecznym istnienia cyklu Eulera jest spójność grafu i parzystość stopni wszystkich jego wierzchołków (w przypadku grafów skierowanych stopień wejściowy musi być równy stopniowi wyjściowemu).

Przy tym ćwiczeniu została wykorzystana macierz sąsiedztwa. Najlepszą strukturą byłaby lista następników, jednak w grafie nieskierowanym krawędzie należałoby zapamiętać dwukrotnie, a ich usuwanie byłoby trudniejsze. Przy tworzeniu grafów najpierw tworzony był losowy graf nieskierowany, bez pętli własnych, o m krawędziach i n wierzchołkach. Następnie dla każdego kolejnego wierzchołka obliczano jego stopień i jeśli był on nieparzysty łączono go krawędzią z losowym wierzchołkiem o wyższym indeksie (jeśli wylosowana krawędź już istniała usuwano ją). Następnie był sprawdzany przez DFS i jeżeli okazał się niespójny jego tworzenie rozpoczynano od początku. Utworzone w ten sposób grafy miały n wierzchołków i w przybliżeniu m krawędzi.

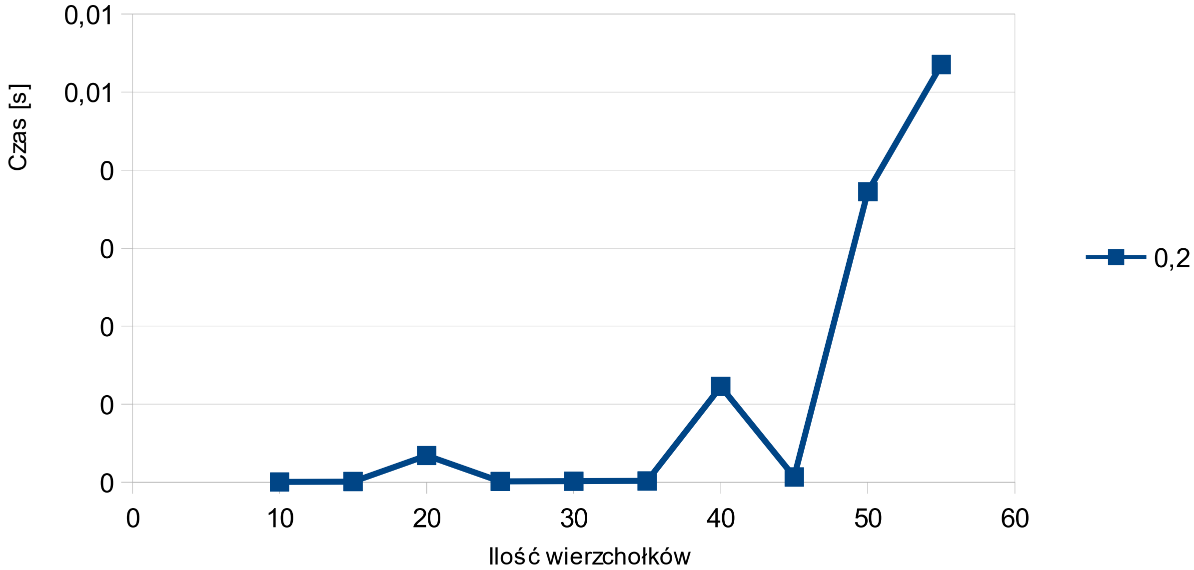
Algorytm poszukujący cyklu Eulera przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie raz (usuwając je za sobą) zatem jego złożoność wynosi minimum $O(m)$, zakładamy, że znajduje i usuwa odwiedzone krawędzie w tym samym czasie. Dla różnych reprezentacji grafu czas ten będzie jednak różny. W macierzy sąsiedztwa wyszukanie wszystkich następników analizowanego wierzchołka wymagała wykonania n operacji i będzie ono wykonane co najmniej raz dla każdego wierzchołka, dlatego też złożoność osiągnie $O(n^2+m)$, dla tej reprezentacji grafu. Im większa gęstość grafu, tym dłuższy czas obliczeń.

3.5 Ćwiczenie trzecie

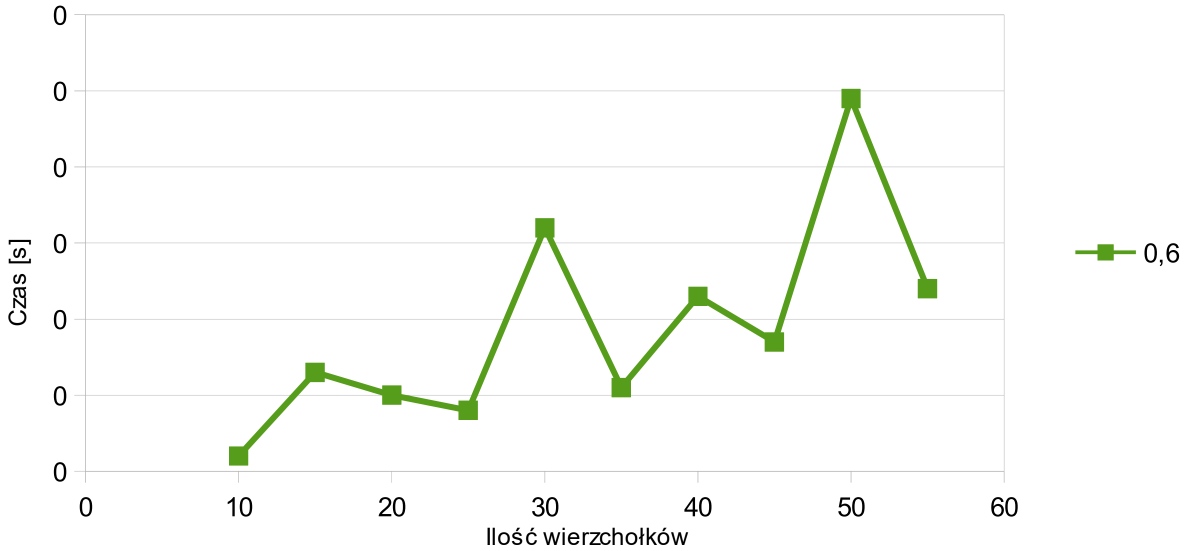
Ćwiczenie polegało na zbadaniu czasu obliczania cyklów Hamiltona dla jednego cyklu (H1) i wszystkich cyklów (HA) w zależności od liczby wierzchołków i gęstości. Obliczono także liczbę tych cyklów w zależności od liczby wierzchołków i gęstości grafu.

N	d = 0,2	d = 0,6
10	0,000004	0,000002
15	0,000008	0,000013
20	0,000342	0,000010
25	0,000011	0,000008
30	0,000014	0,000032
35	0,000017	0,000011
40	0,001227	0,000023
45	0,000068	0,000017
50	0,003722	0,000049
55	0,005351	0,000024

Tabela 3: Tabela przedstawia czas trwania obliczania pojedynczego cyklu Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości (d)



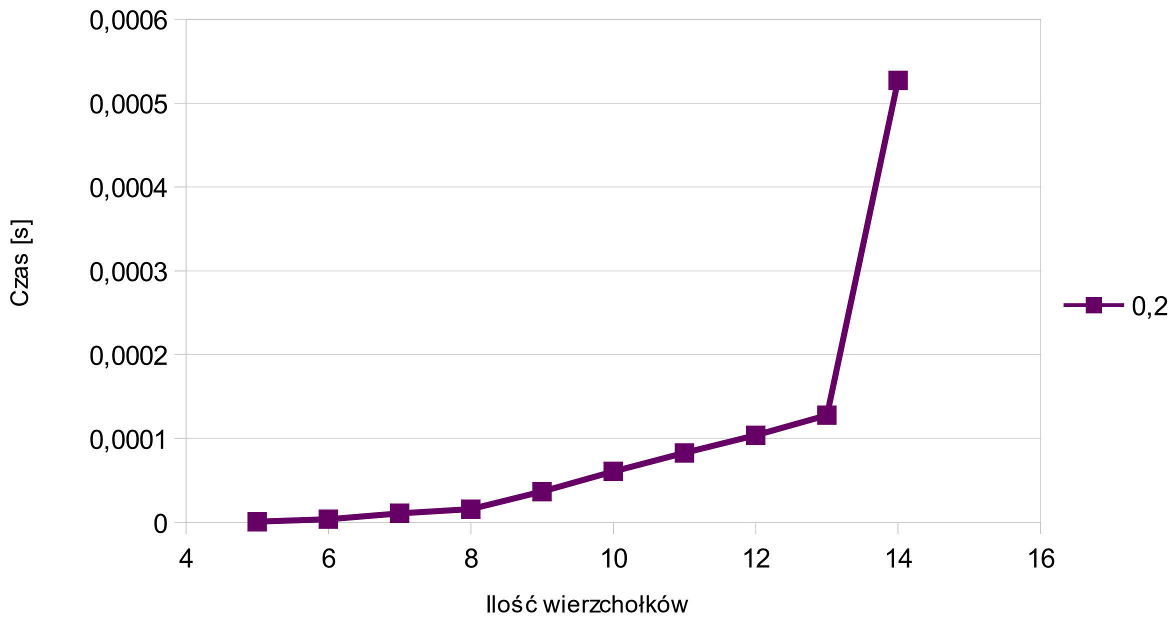
Ilustracja 4: Wykres przedstawia czas trwania obliczania pojedynczego cyklu Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,2



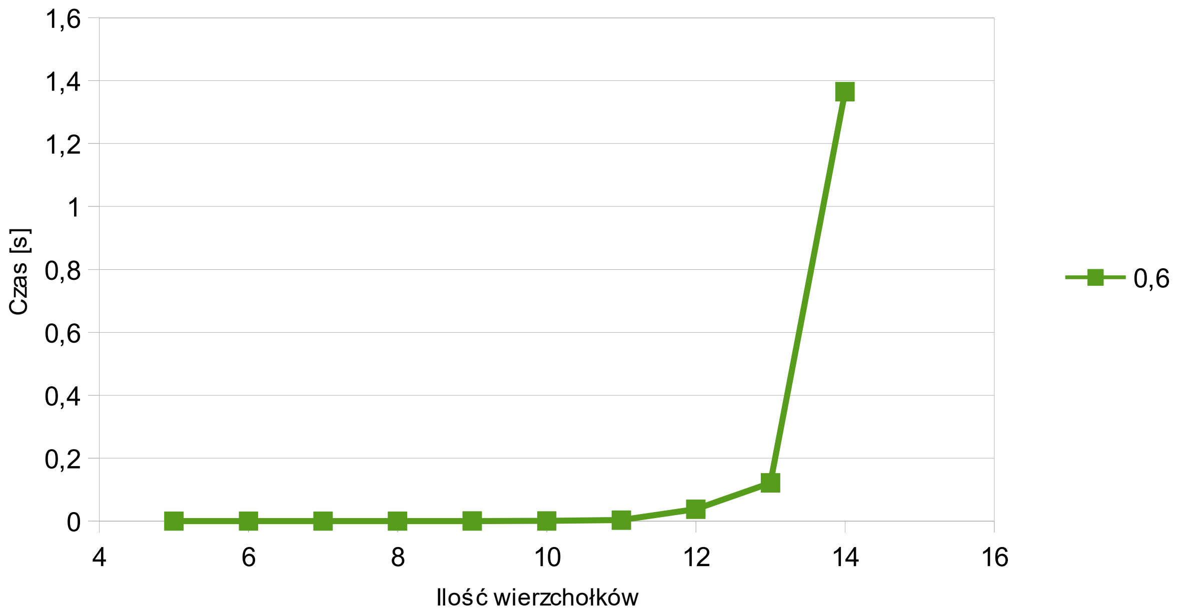
Ilustracja 5: Wykres przedstawia czas trwania obliczania pojedynczego cyklu Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,6

N	d = 0,2	d = 0,6
5	0,000001	0,000013
6	0,000004	0,000017
7	0,000011	0,000027
8	0,000016	0,000095
9	0,000037	0,000243
10	0,000061	0,000534
11	0,000083	0,003177
12	0,000104	0,037734
13	0,000128	0,121425
14	0,000527	1,365190

Tabela 4: Tabela przedstawia czas trwania obliczania wszystkich cykli Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości (d)



Ilustracja 6: Wykres przedstawia czas trwania obliczania wszystkich cykli Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,2



Ilustracja 7: Wykres przedstawia czas trwania obliczania wszystkich cykli Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości d = 0,6

N	d = 0,2	d = 0,6
5	0	1
6	0	27
7	0	17
8	1	52
9	5	75
10	2	148
11	32	294
12	191	26326
13	109	62553
14	5	662473

Tabela 5: Tabela przedstawia ilość cykli Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków(N) i gęstości (d)

3.6 Wnioski

Do wyszukiwania cykli Hamiltona w grafie zastosowano algorytm z powracaniem. Algorytm ten nie wyszukuje konkretnego rozwiązania, a generuje możliwe przypadki rozwiązania jednocześnie odrzucając te, które nie spełniają jego założeń. Ten algorytm użyć dla wielu problemów, jednakże jest on nieefektywny. Ten typ algorytmu stosuje się do problemów NP – zupełnych. Dla wyszukiwania wszystkich cykli Hamiltona złożoność obliczeniowa algorytmu jest wykładnicza i wynosi O(n!), gdzie n! stanowi liczbę permutacji wierzchołków grafu, taka sama jest złożoność obliczeniowa dla pojedynczego cyklu. Jednakże algorytm z powracaniem może działać znacznie szybciej niż pełen, jednak czasu nie jesteśmy w stanie określić.

Algorytm, który wyszukuje pojedynczy cykl i wszystkie cykle działa tak samo, jednakże dla pojedynczego cyklu zatrzymuje się zaraz po jego znalezieniu, więc zazwyczaj jest szybszy. Od budowy grafu zależy czy właściwy układ wierzchołków okaże się pierwszym czy ostatnim z analizowanych. Wyszukiwanie wszystkich cykli Hamiltona wykonuje się w bardziej stabilnym, czasie, choć jest on wykładniczy.

Duży wpływ na czas wykonywania algorytmu ma liczba wierzchołków grafu. Jednakże czas obliczeń jest zależny również od krawędzi. Im graf jest rzadszy tym więcej ścieżek może zostać odrzuconych, więc czas wyszukiwania wszystkich cykli Hamiltona także zmaleje. Jednakże zwiększy się czas na wyszukiwanie pojedynczego cyklu Hamiltona, gdyż tych cyklów będzie znacznie mniej, co zmniejszy prawdopodobieństwo jego szybkiego wykrycia.

Im większa gęstość tym więcej cykli Hamiltona w grafie. Jednak ich faktyczna liczba jest zależna od budowy danego grafu.

4. Bibliografia

- Wiadomości podane na ćwiczeniach z Algorytmów i Struktur Danych
- Informacje ze strony: http://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/0136.php (dostęp z dnia 15.05.2017 r.)
- Informacje ze strony: http://www.algorytm.org/algorytmy-grafowe/cykl-eulera.html (dostęp z dnia 15.05.2017 r.)