3.15 **Menerapkan operasi matriks dalam menyelesaiakan masalah yang berkaitan dengan matriks**

1**. Definisi Matriks**

- ❖ Matriks adalah susunan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom berbentuk persegi panjang serta susunan elemen diletakan dalam suatu kurung atau kurung siku'
- ❖ Matriks dinotasikan dalam huruf Kapital seperti A, B, C dan sebagainya, sedangkan elemen(entri) matriks berupa huruf (yang ditulis dengan huruf kecil) atau angka.
- ❖ Ordo mattriks atau ukuran matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

  Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Baris 1} \\ \longrightarrow \text{baris 2} \\ \longrightarrow \text{Baris 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textbf{Kolom}\text{ 1} & \text{kolom 2} & \text{kolom 3} & \text{kolom 4} \end{array}$$

Matriks A terdiri 3 baris dan 4 kolom

Matriks A berordo 3 x 4 atau matriks A dapat ditulis A_{3x4}

Secara umum matriks dapat ditulis dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\,a\,)_{m\,x\,n}$$

Dalam hal ini a_{ixj} disebut elemen matriks pada baris ke *i* dan kolom ke *j*

2**. Jenis – Jenis Matriks**

a. Matriks Baris yaitu matriks yang terdiri dari satu baris

Contoh ; $A_{1x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

$B_{1x3} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$C_{1x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

b. Matriks Kolom yaitu matrik yang terdiri dari satu kolom

contoh : $P_{2x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$Q_{3x1} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$R_{4x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c. Matriks Persegi yaitu matriks yang terdiri dari banyak baris sama dengan banyak kolom

Contoh: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & -7 \\ 1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$

d. Matriks Nol, dinotasikan 0, merupakan matriks yang semua elemenya nol

Contoh: $0_{1x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$0_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. Matriks identitas (satuan), dinotasikan dengan I, yaitu matriks persegi yang elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainya nol.

Contoh: $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. **Kesamaan Dua Matriks**

Dua matriks A dan B dikatakan sama jika ordo kedua matriks sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) sama.
Contoh :
Misalkan A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$
Jadi, matriks A = B.

4. **Operasi pada Matriks**
a. **Penjumlahan dan Pengurangan dua matriks**
Matriks A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika kedua matriks tersebut berordo sama. Hasil penjumlahan atau pengurangan dua matriks yang berordo sama adalah sebuah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Jika A = $(a)_{m \times n}$ dan B = $(b)_{m \times n}$

Maka A + B = $(a)_{m \times n}$ + $(b)_{m \times n}$ = $(a + b)_{m \times n}$
A - B = $(a)_{m \times n}$ - $(b)_{m \times n}$ = $(a - b)_{m \times n}$

Contoh:

A = $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- A + B = $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  = $\begin{bmatrix} 9+3 & 2+6 & 3+1 \\ 4+2 & 7+1 & 8+0 \end{bmatrix}$

  = $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

- A - B = $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  = $\begin{bmatrix} 9-3 & 2-6 & 3-1 \\ 4-2 & 7-1 & 8-0 \end{bmatrix}$

  = $\begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Secara umum, untuk setiap matriks A, B, dan Cyang berordo sama, berlaku sifat-sifat berikut:

1. Komutatif, A + B = B + A
2. Asosiatif, (A + B) + C = A + (B + C)
3. Penjumlahan dengan matriks nol, menghasilkan matriks itu sendiri, A + 0 = 0 + A

b**. Perkalian Skalar dengan Matriks**

Jika skalar dikalian dengan matriks akan dapat diperoleh sebuah matriks yang elemen-elemenya merupakan perkalian skalar tersebut dengan setiap elemen matriks.

Jika **A = $(a)_{m \times n}$** maka **k. A = k, $(a_{ij})_{m \times n}$ = $(ka_{ij})_{m \times n}$**

Contoh:

Jika A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, maka 2A = 2$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2.4 & 2.3 & 2.2 \\ 2.1 & 2.5 & 2.6 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

c. **Perkalian Dua Matriks**

Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B, jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B.

Misal $A_{m \times n}$ dan $B_{n \times k}$

$A \times B = C_{m \times k}$ dengan elemen – elemen C merupakan penjumlahan dari hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B yang bersesuaian.

Contoh:

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Maka A x B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 + 2.7 & 1.6 + 2.8 & 1.9 + 2.0 \\ 3.5 + 4.7 & 3.6 + 4.8 & 3.9 + 4.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 & 9 \\ 43 & 50 & 27 \end{bmatrix}$$

Secara umum, pada perkalian dua matriks untuk setiap matriks A, B dan C berlaku sifat-sifat :

1. Asosiatif, A(BC) = (AB)C
2. Distributif terhadap penjumlahan , A(B+C) = AB + AC dan (B+C)A = BA +CA
3. Perkalian suatu matriks dengan matriks identitas ***(I)*** menghasilkan matriks itu sendiri, A*I* = *I*A = A

3.16 Menetukan nilai determinan, invers dan tranpos pada ordo 2 x 2 dan nilai determinan dan tranpos pada ordo 3 x 3

d. **Transpos Matriks**

Transpos dari suatu matriks merupakan pengubahan susunan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Transpos dari matriks A dinotasikan dengan A^T atau A'.

Contoh:

1). Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ maka A^T = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Jika matriks A = A^T , maka matriks A disebut **matriks simetri.**

Contoh:

2). Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, maka A^T = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Jadi A = A^T, maka A adalah matriks simetri.

e**. Determinan dan Inveers Mstriks**

1). Ordo matriks 2 x 2

Misal diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan A/det A = |A| = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = **ad – bc**

Invers A = $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan |A| ≠ 0

Contoh:

Carilah invers matriks A = $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Det A = 7.1 – 3.2 = 7 – 6 = 1

Maka invers A = $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

2). Matriks ordo 3 x 3

Misal diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka determinanya dengan metode *SARRUS* ;

Det A =|A| = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ =(a.e.i + b.f.g + c.d.h) – (c.e.g + a.f.h + b.d.i)

Minor, Kofaktor dan adjoin

Minor dari matriks A dinyatakan oleh minor a_{ij} atau $|M_{ij}|$, yang didefinisikan sebagai determinan submatriks setelah baris ke *I* dan kolom ke *j* pada matriks A dihilangkan.
Jika minor a_{ij} atau $|M_{ij}|$ menyatakann minor ke *ij* dari matriks A, maka kofaktor ke *ij* dari matriks A dinyatakan dengan C_{ij} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{C_{ij} = (-1)^{I+j}\,|M_{ij}|}$$

Adjoin (A) atau adj (A) adalah trnspos dari matriks kofaktor.
Invers matrik A ordo 3x3 adalah $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$ **x adjoin A**, dengan det A ≠ 0

Contoh:

Hitunglah determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Cara sarrus:

|A | = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$

Det A = (2.1.1 + 0.4.3 + 3.2.2) + (3.1.3 + 2.4.2 + 1.2.0)
= (2 + 0 + 12) – (9 + 16 + 0)
= 14 – 25
= -11

TUGAS (LATIHAN)

1. Hitung matriks berikut :

   Diketahui : p = 2, matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, dan B = $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

   a. P (A.B)
   b. (P.A)B
   c. A.B

2. Jika matriks P = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, Q = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, dan R = $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, Hitung :

   a. Q + R
   b. R – Q
   c. P.Q
   d. P.R

3. Diketahui matriks : A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,, B = = $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, Hitung :

   a. Invers A (A^{-1})
   b. Determinan B (det B)
   c. Transpos B (B^T)

f. System Persamaan dengan menggunakan matriks (*dengan determinan / aturan Crammer)*

Missal:

ax + by = c $\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ r \end{pmatrix}$

px + qy = r

Contoh :

Tentukan nilai x dan y pada persamaan : 5x + 3y = 4 dengangan menggunakan matriks ?
3x + 2y = 3

Jawab :

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 3 \end{array}\right\}$$ jika disajikan dalam bentuk matrik adalah

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Perkalian matriks tersebut berbentuk AX = B , dengan

A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan B = $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5(2)-3(3)}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-9 \\ -12+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi , nilai x = -3 dan y = 3

TUGAS 3 (LATIHAN)

Dengan menggunakan aturan Crammer/ matriks, Tentukan nilai x dan y pada persamaan

1. X + 3y = 5
5x + 2y = -14

2. -2x + y – 3 = 0
-7x - 2y - 17 = 0

3. Adi, Bayu dan Candra membeli kemeja dan kaos di Toko pakaian, Adi membeli 3 kemeja dan 2 kaos seharga Rp 280.000,- . Bayu membeli 1 kemeja dan 3 kaos dengan harga Rp 210.000,. Jika Candra membeli 6 kemeja dan 5 kaos. Tentukan besar uang yang dibayarkan Candra ?
Jawab:
Permasalahan tersebut dapat diterjemahkan ke dalam bentuk model matematika dengan

hargamisalkan harga xx

memisalkan harga setiap kemeja adalah x rupiah dan harga setiap kaos adalah y rupiah, sehingga diperoleh system persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 280.000 \\ x + 3y = 210.000 \end{cases}$

system persamaan tersebut jika dibuat ke dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280.000 \\ 210.000 \end{pmatrix}$

Perkalian matriks tersebut berbentuk AX = B dengan A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 280.000 \\ 210.000 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{3(3)-2(1)}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots. \end{pmatrix}$

= . . . .

= . . . .

QUIZ MATRIKS

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ maka hasil matriks 3AB adalah . . .

a. $\begin{bmatrix} -27 & 27 \\ 30 & -27 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -27 & 27 \\ 33 & -37 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -27 & 27 \\ 33 & -27 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -21 & 27 \\ -21 & 27 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -21 & 27 \\ 33 & -37 \end{bmatrix}$

2. Diketahu matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, dan C = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Maka matriks 4A – 3B + 2C adalah . . .

a. $\begin{bmatrix} -3 & 26 \\ 19 & -33 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 19 & 33 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 19 & 33 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 15 & 26 \\ 19 & -33 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 15 & 26 \\ 19 & 3 \end{bmatrix}$

3. Diketahui matriks K = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, L = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$, dan M = $\begin{bmatrix} 8 & a \\ b & 14 \end{bmatrix}$, Nilai a dan b yang memenuhi persamaan 3K + L = M berturut-turut adalah . . .
   a. -8 dan -18
   b. -2 dan -4
   c. 2 dan 4
   d. 8 dan – 14
   e. 8 dan 14

4. Diketahui matriks P = $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, Q = $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & k \end{bmatrix}$, dan R = $\begin{bmatrix} 36 & -46 \\ -28 & 18 \end{bmatrix}$, jika PQ = R, maka nilai k adalah . . .
   a. -6
   b. -1
   c. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{10}{3}$
   e. 6

5. Diketahui persamaan matriks : $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ P = $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, maka matriks P adalah . . .
   a. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. Jika determinan matriks K = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah 4, determinan dari matriks 2K adalah . . .
   a. 4
   b. 8
   c. 14
   d. 16
   e. 32

7. Matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai nilai determinan sama dengan -2, determinan dari matriks

$\begin{bmatrix} a & b \\ c-2a & d-2b \end{bmatrix}$ adalah . . .

a. 8
b. 6
c. 4
d. 0
e. -2

8. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & -8 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, nilai $a_{22} + a_{41} + a_{32}$ = . . .

a. -5
b. -4
c. -3
d. -1
e. 3

9. Determinan matriks P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah . . .

a. -13
b. -11
c. 12
d. 13
e. 16

10. Invers dari matriks A = $\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ adalah A^{-1} = . . .

a. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$