



《人工智能及应用》

第三讲：不确定性推理

授课人：张鑫 zhangxin@uestc.edu.cn

专 业：机器人工程





1、不确定性推理

1.1 不确定性推理的基本概念

- 现实世界中由于客观上存在的随机性、模糊性，反映到知识以及由观察所得到的证据上来，就分别形成了**不确定性的知识**及**不确定性的证据**。
- 因而还必须对不确定性知识的表示及推理进行研究。这就是本章将要讨论的不确定性推理。
- 重点介绍基于**概率论**的有关理论发展起来的不确定性推理方法，主要介绍可信度方法、证据理论。
- 最后介绍基于**模糊数学**发展起来的模糊推理方法。

提纲



1、不确定性推理的基本概念

2、可信度方法

3、模糊推理



1、不确定性推理

1.1 不确定性推理的基本概念

- 推理：从已知**事实（证据）**出发，通过运用相关**知识**逐步推出**结论**或者**证明某个假设**成立或不成立的思维过程。
- **不确定性推理**：从**不确定性的初始证据**出发，通过运用**不确定性的知识**，最终推出具有一定程度的不确定性但却是合理或者近乎合理的**结论**的思维过程。

1、不确定性推理

1.2 不确定性推理的基本问题：不确定性的度量

(1) 知识不确定性的表示

如果长时间咳嗽，专家认为有50%的可能患了结核。

——专家系统中，不确定性知识，一般是由领域专家给出的。

(2) 证据不确定性的表示

用户在求解问题时提供的**初始证据**：**咳嗽10天**，是长时间咳嗽的概率多大在推理中用前面推出的**中间结论**作为当前推理的证据。

(3) 不确定性的量度

- ① 能充分**表达相应知识及证据不确定性**的程度。
- ② 度量范围的指定，便于领域**专家及用户**对不确定性的估计。
- ③ 便于对不确定性的**传递**进行计算，结论的不能超出量度规定的范围。
- ④ 度量的确定应当是直观的，同时应有相应的**理论依据**。

1、不确定性推理

1.2 不确定性推理的基本问题：不确定性的匹配

(1) 推理过程是一个不断寻找和运用可用知识的过程。

一条知识：如果长时间咳嗽，专家认为有50%的可能患了结核。

(2) 可用知识

是指知识的前提条件与综合数据库中的事实能匹配的知识。

在推理中用前面推出的结论作为当前推理的证据。

(3) 不确定性匹配

不确定性知识：如果长时间咳嗽，专家认为有50%的可能患了结核

不确定事实：某患者咳嗽10天，算“长时间咳嗽”的概率是0.5、还是0.6？

知识和事实都有不确定性，用什么方法**评估**知识和事实的**匹配程度**？

(**咳嗽了10天**，跟这条知识的匹配度是多少？能不能用这条知识？)

1、不确定性推理



1.2 不确定性推理的基本问题：组合证据的计算

(1) 知识可以是单一条件，也可以是组合条件的

单一条件：如果长时间咳嗽，专家认为有50%的可能患了结核。

组合条件：如果长时间咳嗽、且肺部有剧烈刺痛，专家认为有70%的可能患了结核。

(2) 如何计算组合证据的综合不确定性？

某患者咳嗽了10天，肺部比较疼——跟上面的知识匹配度是多少？

一般采用**最大/最小法**、**概率法**和**有界法**来计算组合证据的综合不确定性

1、不确定性推理

1.2 不确定性推理的基本问题：不确定性的传导和合成

- 不确定性传导

- (1) 在每一步推理中，如何把证据及知识的不确定性传递给结论。
- (2) 在多步推理中，如何把初始证据的不确定性传递给最终结论。

- 不确定性合成

- (1) 多条知识推导出同样的结论。
 - a. 如果长时间咳嗽，专家认为有50%的可能患了结核。
 - b. 如果痰中有血，专家认为有60%的可能患了结核。
- (2) 在推理中，多条知识推导出的结论，如何得出综合的不确定性？
一般采用 贝叶斯法、可信度方法 和 证据理论

提纲



1、不确定性推理的基本概念

2、可信度方法

3、模糊推理

2、可信度方法



2.1 可信度概念

(1) 1975年肖特里菲 (E. H. Shortliffe) 等人在确定性理论 (theory of confirmation) 的基础上, 结合概率论等提出的一种不确定性推理方法。

首先在诊断传染性疾病专家系统MYCIN中得到了应用。

(2) 优点: 直观、简单, 且效果好。

- **可信度**: 根据经验对一个事物或现象为真的相信程度。
- 可信度带有较大的主观性和经验性, 其准确性难以把握。
- CF (Certainty Factor) 模型: 基于可信度表示的不确定性推理的基本方法。

2、可信度方法

2.2可信度方法



1. 知识不确定性的表示

(1) 在CF模型中，知识一般采用产生式规则表示：

IF E Then H (CF(H, E))

CF(H, E)：可信度因子 (certainty factor)，反映前提条件与结论的联系强度，取值范围是 $[-1, 1]$ 。

(2) 前提条件E, 可以是单一简单条件，也可以是复合条件；

(3) 结论H可以是一个简单结论，也可以是多结论的。

IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 (0.7)

2、可信度方法

2.2可信度方法



1. 知识不确定性的表示

- $CF(H, E)$ 的取值范围: $[-1, 1]$ 。
- 若由于相应证据的出现增加结论 H 为真的可信度, 则 $CF(H, E) > 0$, 证据的出现越是支持 H 为真, 就使 $CF(H, E)$ 的值越大。
- 反之, 证据的出现越是支持 H 为假, 则 $CF(H, E) < 0$, $CF(H, E)$ 的值就越小。
- 若证据的出现与否与 H 无关, 则 $CF(H, E) = 0$ 。

2、可信度方法

2.2可信度方法



2. 证据不确定性的表示

$CF(E)=0.6$: E 的可信度为0.6

- 证据 E 的可信度取值范围： $[-1, 1]$ 。
- 对于初始证据，若所有观察 S 能肯定它为真，则 $CF(E) = 1$ 。
- 若肯定它为假，则 $CF(E) = -1$ 。
- 若以某种程度为真，则 $0 < CF(E) < 1$ 。
- 若以某种程度为假，则 $-1 < CF(E) < 0$ 。
- 若未获得任何相关的观察，则 $CF(E) = 0$ 。

2、可信度方法

2.2可信度方法



3. 组合证据不确定性的表示

- 证据的组合形式分为**合取**和**析取**两种基本情况。

- 组合**证据合取**:

若: $E = E1 \text{ and } E2 \text{ and } E3 \dots \text{and } En$ 时

则 $CF(E) = \min \{ CF(E1), CF(E2) \dots CF(En) \}$

- 组合**证据析取**:

若: $E = E1 \text{ or } E2 \text{ or } E3 \dots \text{or } En$ 时

则 $CF(E) = \max \{ CF(E1), CF(E2) \dots CF(En) \}$

2、可信度方法

2.2可信度方法



4. 不确定性的传递计算

- CF模型中的不确定性推理：从不确定的初始证据出发，通过运用相关的不确定性知识，最终推出结论并求出结论的可信度值。
- 结论 H 的可信度由下式计算：

$$CF(H) = CF(H, E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

当 $CF(E) < 0$ 时，则 $CF(H) = 0$

当 $CF(E) = 1$ 时，则 $CF(H) = CF(H, E)$

2、可信度方法

2.2可信度方法



5. 结论不确定性的合成

- 如果由多条知识推导出一个相同的结论，并且这些知识的前提相互独立，则可以运用合成算法计算出综合可信度：

IF E1 Then H (CF(H, E1))

IF E2 Then H (CF(H, E2))

- 则，结论 H 的综合可信度计算分两步：

(1)分别对每一条知识求出 $CF(H)$ ：

$$\begin{cases} CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\} \\ CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\} \end{cases}$$

(2)求出 E1 与E2 对H的综合可信度： $CF_{1,2}(H) = \begin{cases} CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) \geq 0, CF_2(H) \geq 0 \\ CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) < 0, CF_2(H) < 0 \\ \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\}} & \text{若 } CF_1(H) \text{ 与 } CF_2(H) \text{ 异号} \end{cases}$

2、可信度方法



2.2可信度方法:一个例子

•设有如下一组知识:

r1: IF E1 Then H (0.9) ; r3: IF E3 Then H (-0.5)

r2: IF E2 Then H (0.6) ; r4: IF E4 And (E5 or E6) Then E1(0.8)

•已知证据: $CF(E2)=0.8$, $CF(E3)=0.6$, $CF(E4)=0.5$, $CF(E5)=0.6$, $CF(E6)=0.8$

•求 $CF(H)=?$



2、可信度方法

2.2可信度方法:一个例子

第一步：对每条规则，求 $CF(H)$ 。

先用规则r4

• 设有如下—组知识：

r1: IF E1 Then H (0.9) ; r3: IF E3 Then H (-0.5)

r2: IF E2 Then H (0.6) ; r4: IF E4 And (E5 or E6) Then E1(0.8)

• 已知证据： $CF(E2)=0.8, CF(E3)=0.6, CF(E4)=0.5, CF(E5)=0.6, CF(E6)=0.8$

$$\begin{aligned} CF(E_1) &= 0.8 \times \max\{0, CF[E_4 \text{ AND } (E_5 \text{ OR } E_6)]\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \text{ OR } E_6)\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.8\}\}\} \\ &= 0.8 \times \max\{0, 0.5\} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

用规则r1: $CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\} = 0.9 \times \max\{0, 0.4\} = 0.36$

用规则r2: $CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\} = 0.6 \times \max\{0, 0.8\} = 0.48$

用规则r3: $CF_3(H) = CF(H, E_3) \times \max\{0, CF(E_3)\} = -0.5 \times \max\{0, 0.6\} = -0.3$

2、可信度方法



2.2可信度方法:一个例子

第二步：利用结论的合成算法

用规则r1: $CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\} = 0.9 \times \max\{0, 0.4\} = 0.36$

用规则r2: $CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\} = 0.6 \times \max\{0, 0.8\} = 0.48$

先对 $CF_1(H)$ 和 $CF_2(H)$ 合成:

用规则r3: $CF_3(H) = CF(H, E_3) \times \max\{0, CF(E_3)\} = -0.5 \times \max\{0, 0.6\} = -0.3$

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) = 0.36 + 0.48 - 0.36 \times 0.48 = 0.84 - 0.17 = 0.67$$

再对 $CF_{1,2}(H)$ 和 $CF_3(H)$ 合成:

$$CF_{1,2,3}(H) = \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}} = \frac{0.67 - 0.3}{1 - \min\{0.67, 0.3\}} = \frac{0.37}{0.7} = 0.53$$

提纲



- 1、不确定性推理的基本概念
- 2、可信度方法
- 3、模糊推理

3、模糊推理

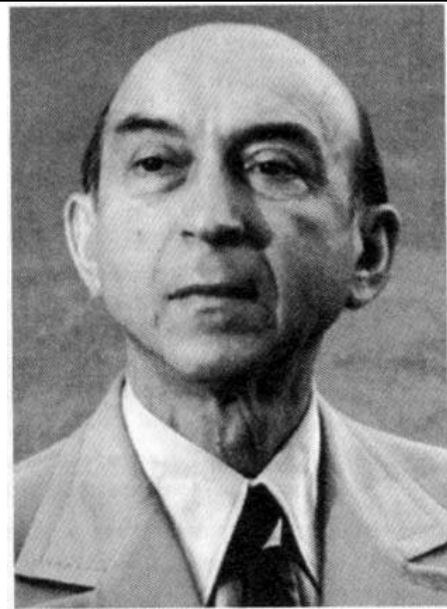


3.1 模糊数学的提出与发展

- **模糊推理**是一种基于**模糊逻辑**的不确定性推理方法。
- **模糊逻辑**由美国加州大学的**扎德 (Zadeh) 教授**于**1965年**提出，用来处理现实中因模糊引起的不确定性。
- 把**没有严格边界**划分而无法精确刻画的现象称为**模糊**现象，如“大”、“小”、“胖”、“瘦”等都属于模糊的概念。通常用**模糊集合**来表示。

2007年7月，扎德曾到中山大学访问。

- 提问：“什么契机使您对模糊逻辑与现代工业技术的结合发生了兴趣，能用您的故事来说明这个问题么？”
- 扎德回答说：“我有工程背景，对数学非常感兴趣。我们一般认为数学应当是精确的，很难和模糊概念联系在一起。但事实上在实际生活中，特别是人的问题，更多使用的是模糊思维。我觉得需要解决这个问题，应该把数学和生活联系起来，就去找一些数学家来聊。结果他们都不感兴趣，我只好自己来研究。这个研究从1964年开始，1965年发表了第一篇文章《模糊集》。就这么开始了。”



Lotfi A. Zadeh

3、模糊推理



3.1 模糊数学的提出与发展

- 从1965年到20世纪80年代，在美国、欧洲、中国和日本，只有少数科学家研究模糊理论。
- 1974年，英国Mamdani首次将模糊理论应用于热电厂的蒸汽机控制。
- 1976年，Mamdani又将模糊理论应用于水泥旋转炉的控制。



2008年10月，Zadeh在北京现代智能国际会议上做报告

3、模糊推理



3.1 模糊数学的提出与发展

- 1983年日本Fuji Electric公司实现了饮水处理装置的模糊控制。
- 1987年日本Hitachi公司研制出地铁的模糊控制系统。
- 1987年—1990年在日本申报的模糊产品专利就达319种。
- 目前，各种模糊产品充满日本、西欧和美国市场，如模糊洗衣机、模糊吸尘器、模糊电冰箱和模糊摄像机等。

在日常生活中，人们往往用“较少”“较多”“小一些”“很小”等模糊语言进行控制。例如，当我们拧开水阀向水桶放水时，有这样的经验：桶里没有水或水较少时，应开大水阀；桶里的水比较多时，水阀应开得小一些；桶快满时，应把水阀开得很小；桶里的水已满时，应迅速关上水阀。

3、模糊推理

3.2 模糊集合



- **论域**：所讨论的全体对象，用 U 或 E 等表示。
- **元素**：论域中的每个对象，常用 a, b, c, x, y, z 表示。
- **集合**：论域中具有某种相同属性的确定的、可以彼此区分的元素的全体，常用 A, B 等表示。
- **经典集合**：元素 a 和集合 A 的关系： a 属于 A 或 a 不属于 A ，即只有两个真值“真”和“假”。
- **模糊集合**：给集合中每一个元素赋予一个介于0和1之间的实数，描述其属于一个集合的强度，该实数称为元素属于一个集合的**隶属度**。集合中所有元素的隶属度全体构成集合的**隶属函数**。

3、模糊推理

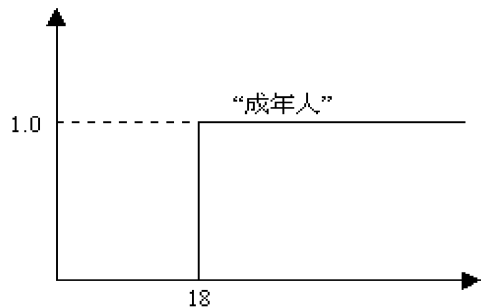
3.2 模糊集合



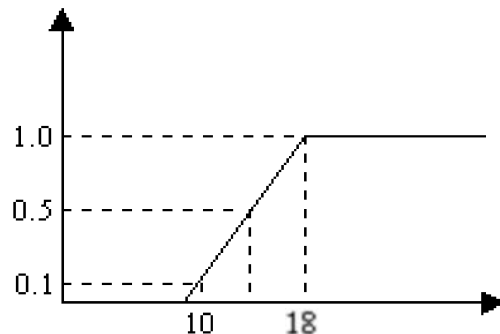
1. 模糊集合的定义

例如，“成年人”集合：

$$\mu_{\text{成年人}}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 18 \\ 0 & x < 18 \end{cases}$$



“成年人”特征函数图



“成年人”隶属度函数图

3、模糊推理

3.2模糊集合



2. 模糊集合的表示方法

- 当论域中元素数目有限时，模糊集合 A 的数学描述为

$$A = \left\{ \left(x, \mu_A(x) \right), x \in X \right\}$$

$\mu_A(x)$: 元素 x 属于模糊集 A 的隶属度, X 是元素的论域。

根据Zadeh表示法, 此时模糊集合 A 的数学描述为

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1} \mu_A(x_i)/x_i$$

$$A = \{ \mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \cdots, \mu_A(x_n)/x_n \} \quad A = \int \mu_A(x) / x$$

$$A = \{ (\mu_A(x_1), x_1), (\mu_A(x_2), x_2), \cdots, (\mu_A(x_n), x_n) \}$$

3、模糊推理

3.2模糊集合



3. 隶属函数： 把对事物认识的模糊性转化为了隶属度确定的主观性

- 常见的隶属函数有正态分布、三角分布、梯形分布等。

- 隶属函数确定方法：

- (1) 模糊统计法

- (2) 专家经验法

- (3) 二元对比排序法

- (4) 基本概念扩充法

3、模糊推理

3.2 模糊集合



3. 隶属函数

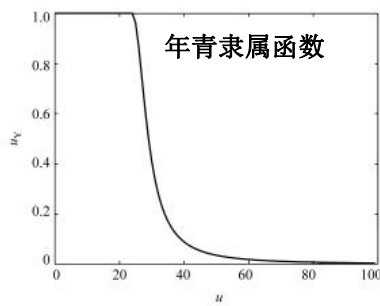
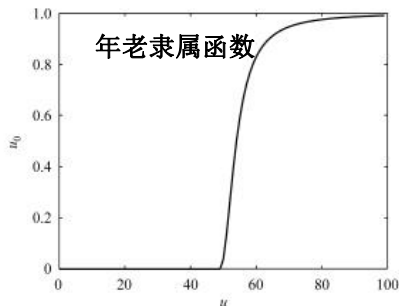
- 常见的隶属函数有正态分布、三角分布、梯形分布等。

- 隶属函数确定方法：

(1) 模糊统计法

(2) 专家经验法

- 例如：以年龄作论域，取 $U=[0, 200]$ ，扎德给出了“年老” O 与“年青” Y 两个模糊集合的隶属函数为：



$$\mu_O(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq 50 \\ \left[1 + \left(\frac{5}{u - 50} \right)^2 \right]^{-1} & 50 < u \leq 200 \end{cases}$$

$$\mu_Y(u) = \begin{cases} 1 & 0 \leq u \leq 25 \\ \left[1 + \left(\frac{u - 25}{5} \right)^2 \right]^{-1} & 25 < u \leq 200 \end{cases}$$

3、模糊推理

3.3 模糊集合的数学运算



(1) 模糊集合的包含关系

- 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$, 则 $A \supseteq B$

(2) 模糊集合的相等关系

- 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, 则 $A = B$

(3) 模糊集合的交并补运算

① 交运算(intersection) $A \cap B$ $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

② 并运算(union) $A \cup B$ $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

③ 补运算(complement) \bar{A} 或者 A^c $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

3、模糊推理



3.3 模糊集合的数学运算

■例 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ， A 及 B 是论域上的两个模糊集合，已知：

$$A = 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3 + 0.4/x_4$$

$$B = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3$$

求 $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B$

解： $\overline{A} = 0.7/x_1 + 0.5/x_2 + 0.3/x_3 + 0.6/x_4$

$$\overline{B} = 0.5/x_1 + 0.2/x_3 + 1/x_4$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \frac{0.3 \wedge 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \wedge 1}{x_2} + \frac{0.7 \wedge 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \wedge 0}{x_4} \\ &= 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \frac{0.3 \vee 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \vee 1}{x_2} + \frac{0.7 \vee 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \vee 0}{x_4} \\ &= 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3 + 0.4/x_4 \end{aligned}$$

3、模糊推理



3.3 模糊集合的数学运算

(4) 模糊集合的代数运算

① 代数积:
$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x)$$

② 代数和:
$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{AB}(x)$$

③ 有界和:
$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min \{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} = 1 \wedge [\mu_A(x) + \mu_B(x)]$$

④ 有界积:
$$\mu_{A \otimes B}(x) = \max \{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} = 0 \vee [\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$$

3、模糊推理



3.3 模糊集合的数学运算

- 例 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ， A 及 B 是论域上的两个模糊集合，已知：

$$A = 0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.9/x_3 + 0.5/x_5$$

$$B = 0.1/x_1 + 0.7/x_3 + 1.0/x_4 + 0.3/x_5$$

求 $A \cdot B$ 、 $A + B$ 、 $A \oplus B$ 、 $A \otimes B$ 。

$$A \cdot B = 0.02/x_1 + 0.63/x_3 + 0.15/x_5$$

$$A + B = 0.28/x_1 + 0.4/x_2 + 0.97/x_3 + 1.0/x_4 + 0.65/x_5$$

$$A \oplus B = 0.3/x_1 + 0.4/x_2 + 1.0/x_3 + 1.0/x_4 + 0.8/x_5$$

$$A \otimes B = 0.6/x_3$$

3、模糊推理

3.4模糊关系



1. 模糊关系

- 例4.6 某地区人的身高论域 $X=\{140,150,160,170,180\}$ （单位：cm），体重论域 $Y=\{40,50,60,70,80\}$ 。

身高与体重的模糊关系表

R \ Y	40	50	60	70	80
X					
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

- 从 X 到 Y 的一个模糊关系 R ，用模糊矩阵表示：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

3、模糊推理

3.4模糊关系



1. 模糊关系

■ 模糊关系的定义：

■ A 、 B ：模糊集合，模糊关系用叉积(cartesian product)表示：

$$R : A \times B \rightarrow [0, 1]$$

■ 叉积常用最小算子运算：

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \min \{ \mu_A(a), \mu_B(b) \}$$

■ A 、 B ：离散模糊集，其隶属函数分别为：

$$\mu_A = [\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \dots, \mu_A(a_n)], \quad \mu_B = [\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \dots, \mu_B(b_n)]$$

则其叉积运算：

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \mu_A^T \circ \mu_B$$

3、模糊推理

3.4模糊关系



1. 模糊关系

- 例4.7 已知输入的模糊集合 A 和输出的模糊集合 B :

$$A = 1.0 / a_1 + 0.8 / a_2 + 0.5 / a_3 + 0.2 / a_4 + 0.0 / a_5$$

$$B = 0.7 / b_1 + 1.0 / b_2 + 0.6 / b_3 + 0.0 / b_4$$

- 求 A 到 B 的模糊关系 R 。

- 解:

$$R = A' \circ B = \mu_A^T \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.7 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.0]$$

3、模糊推理

3.4 模糊关系



1. 模糊关系

$$R = A' \circ B = \mu_A^T \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.7 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.0]$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 \wedge 0.7 & 1.0 \wedge 1.0 & 1.0 \wedge 0.6 & 1.0 \wedge 0.0 \\ 0.8 \wedge 0.7 & 0.8 \wedge 1.0 & 0.8 \wedge 0.6 & 0.8 \wedge 0.0 \\ 0.5 \wedge 0.7 & 0.5 \wedge 1.0 & 0.5 \wedge 0.6 & 0.5 \wedge 0.0 \\ 0.2 \wedge 0.7 & 0.2 \wedge 1.0 & 0.2 \wedge 0.6 & 0.2 \wedge 0.0 \\ 0.0 \wedge 0.7 & 0.0 \wedge 1.0 & 0.0 \wedge 0.6 & 0.0 \wedge 0.0 \end{bmatrix}$$

3、模糊推理

3.4 模糊关系



2. 模糊关系的合成

设模糊关系 $Q \in X \times Y, R \in Y \times Z$, 则模糊关系 $S \in X \times Z$ 称为模糊关系 Q 与 R 的合成。模糊关系 Q 与模糊关系 R 的合成 S 是模糊矩阵的叉乘 $S = Q \circ R$ 。

■例 设模糊集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}, Z = \{z_1, z_2\}$

$Q \in X \times Y, R \in Y \times Z, S \in X \times Z$, 求 S 。

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

3、模糊推理

3.4 模糊关系



2. 模糊关系的合成: 最大最小合成法

$$\begin{aligned} S = Q \circ R &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.5) & (0.5 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.3 \wedge 0.3) \\ (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.5) & (0.7 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.3) \\ (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0 \wedge 0.5) & (0 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \\ (1 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.5) & (1 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 0.3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3、模糊推理

3.4 模糊关系



2. 模糊关系的合成:最大代数积合成法

$$\begin{aligned} S = Q \circ R &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.5 \times 0.2) \vee (0.6 \times 0.8) \vee (0.3 \times 0.5) & (0.5 \times 1) \vee (0.6 \times 0.4) \vee (0.3 \times 0.3) \\ (0.7 \times 0.2) \vee (0.4 \times 0.8) \vee (1 \times 0.5) & (0.7 \times 1) \vee (0.4 \times 0.4) \vee (1 \times 0.3) \\ (0 \times 0.2) \vee (0.8 \times 0.8) \vee (0 \times 0.5) & (0 \times 1) \vee (0.8 \times 0.4) \vee (0 \times 0.3) \\ (1 \times 0.2) \vee (0.2 \times 0.8) \vee (0.9 \times 0.5) & (1 \times 1) \vee (0.2 \times 0.4) \vee (0.9 \times 0.3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.48 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.64 & 0.32 \\ 0.45 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3、模糊推理



3.5模糊推理

1. 模糊知识表示

- 人类思维判断的基本形式：

如果（条件） \rightarrow 则（结论）

- 例如：如果 压力较高且温度在慢慢上升 则 阀门略开

$(\text{锅炉}, \text{工况}, (\text{压力}, 0.80)) \wedge (\text{锅炉}, \text{工况}, (\text{温度}, 0.3)) \rightarrow (\text{阀门}, \text{状态}, (\text{开}, 0.2))$

- 模糊规则：从条件论域到结论论域的模糊关系矩阵 R 。通过条件模糊向量与模糊关系 R 的合成进行模糊推理，得到结论的模糊向量，然后采用“清晰化”方法将模糊结论转换为精确量。

3、模糊推理

3.5 模糊推理



2. 对 IF A THEN B 类型的模糊规则的推理

- 若已知输入为 A ，则输出为 B ；若现在已知输入为 A' ，则输出 B' 用合成规则求取 $B' = A' \circ R$

其中模糊关系 R : $\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

- 控制规则库的 N 条规则有 N 个模糊关系: R_1, R_2, \dots, R_n

对于整个系统的全部控制规则所对应的模糊关系 R :

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

3、模糊推理



3.5模糊推理

2. 对 IF A THEN B 类型的模糊规则的推理

- 例9 已知输入的模糊集合 A 和输出的模糊集合 B :

$$A = 1.0 / a_1 + 0.8 / a_2 + 0.5 / a_3 + 0.2 / a_4 + 0.0 / a_5$$

$$B = 0.7 / b_1 + 1.0 / b_2 + 0.6 / b_3 + 0.0 / b_4$$

- 前面已经求得模糊关系为:

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

3、模糊推理



3.5模糊推理

2. 对 IF A THEN B 类型的模糊规则的推理

■ 当输入: $A' = 0.4 / a_1 + 0.7 / a_2 + 1.0 / a_3 + 0.6 / a_4 + 0.0 / a_5$

$$\begin{aligned} B' = A' \circ R &= \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \\ &= [(0.4 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 0.7) \vee (1.0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.0 \wedge 0.0), \\ &\quad (0.4 \wedge 1.0) \vee (0.7 \wedge 0.8) \vee (1.0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.0 \wedge 0.0), \\ &\quad (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.7 \wedge 0.6) \vee (1.0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.0 \wedge 0.0), \\ &\quad (0.4 \wedge 0.0) \vee (0.7 \wedge 0.0) \vee (1.0 \wedge 0.0) \vee (0.6 \wedge 0.0) \vee (0.0 \wedge 0.0)] \\ &= [(0.4 \vee 0.7 \vee 0.5 \vee 0.2 \vee 0.0), (0.4 \vee 0.7 \vee 0.5 \vee 0.2 \vee 0.0), \\ &\quad (0.4 \vee 0.6 \vee 0.5 \vee 0.2 \vee 0.0), (0.0 \vee 0.0 \vee 0.0 \vee 0.0 \vee 0.0)] \\ &= (0.7, 0.7, 0.6, 0.0) \end{aligned}$$

$$B' = 0.7 / b_1 + 0.7 / b_2 + 0.6 / b_3 + 0.0 / b_4$$

3、模糊推理



3.6模糊决策

- “**模糊决策**”（“模糊判决”、“解模糊”或“清晰化”）：由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，转化为**确定值**的过程。

1. 最大隶属度法：取隶属度最大的量作为推理结果

- 例如，得到模糊向量：

$$U' = 0.1 / 2 + 0.4 / 3 + 0.7 / 4 + 1.0 / 5 + 0.7 / 6 + 0.3 / 7$$

$$U = 5$$

- 如果有两个以上的元素均最大，则取它们的平均值：

$$U' = 0.5 / -3 + 0.5 / -2 + 0.5 / -1 + 0.0 / 0 + 0.0 / 1 + 0.0 / 2 + 0.0 / 3$$

$$U = \frac{-3-2-1}{3} = -2$$

3、模糊推理

3.6模糊决策



2. 加权平均判决法

$$U = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^n \mu(u_i)}$$

■ 例如 $U' = 0.1 / 2 + 0.6 / 3 + 0.5 / 4 + 0.4 / 5 + 0.2 / 6$

则 $U' = \frac{0.1 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.2 \times 6}{0.1 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.2} = 4$

3、模糊推理



3.7模糊推理应用

例 设有模糊控制规则：

“如果**温度低**，则将**风门开大**”。设温度和风门开度的论域为{1, 2, 3, 4, 5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

$$\text{“温度低”} = 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4 + 0/5$$

$$\text{“风门大”} = 0/1 + 0.0/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 1/5$$

已知事实“温度较低”，可以表示为

$$\text{“温度较低”} = 0.8/1 + 1/2 + 0.6/3 + 0.3/4 + 0/5$$

试用**模糊推理**确定**风门开度**。

3、模糊推理

3.7模糊推理应用



□ 解：（1）确定模糊关系 R

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.0 \quad 0.0 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 1.0] \\ &= \begin{bmatrix} 1.0 \wedge 0.0 & 1.0 \wedge 0.0 & 1.0 \wedge 0.3 & 1.0 \wedge 0.6 & 1.0 \wedge 1.0 \\ 0.6 \wedge 0.0 & 0.6 \wedge 0.0 & 0.6 \wedge 0.3 & 0.6 \wedge 0.6 & 0.6 \wedge 1.0 \\ 0.3 \wedge 0.0 & 0.3 \wedge 0.0 & 0.3 \wedge 0.3 & 0.3 \wedge 0.6 & 0.3 \wedge 1.0 \\ 0.0 \wedge 0.0 & 0.0 \wedge 0.0 & 0.0 \wedge 0.3 & 0.0 \wedge 0.6 & 0.0 \wedge 1.0 \\ 0.0 \wedge 0.0 & 0.0 \wedge 0.0 & 0.0 \wedge 0.3 & 0.0 \wedge 0.6 & 0.0 \wedge 1.0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3、模糊推理



3.7模糊推理应用

□ 解：

(2) 模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$
$$=(0.0, 0.0, 0.3, 0.6, 0.8)$$

(3) 模糊决策

用**最大隶属度法**进行决策得风门开度为5。

用**加权平均判决法**进行决策得风门开度为4。

3、模糊推理



参考题目

设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, A 及 B 是论域上的两个模糊集合, 已知:

$$A = 0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.9/x_3 + 0.5/x_5$$

$$B = 0.1/x_1 + 0.7/x_3 + 1.0/x_4 + 0.3/x_5$$

求 $A \cdot B$ 、 $A + B$ 、 $A \oplus B$ 、 $A \otimes B$ 。

问题求解、**逻辑推理与定理证明**、自然语言理解、自动程序设计、**专家系统**、机器学习、神经网络、模式识别、机器视觉、**智能控制**



电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

谢 谢

可选课程报告1：模糊洗衣机

已知人的操作经验是：

污泥越多，油脂越多，洗涤时间越长

污泥适中，油脂适中，洗涤时间适中

污泥越少，油脂越少，洗涤时间越短

洗衣机的模糊控制规则如表1所示：

表1 洗衣机的模糊控制规则表

污泥油脂	NG(无油脂)	MG (中等油脂)	LG (油脂多)
SD (污泥少)	VS	M	L
MD (中等污泥)	S	M	L
LD (污泥多)	M	L	VL

其中SD (污泥少)、MD (污泥中)、LD (污泥多)、NG油脂少、MG油脂中、LG油脂多、VS洗涤时间很短、S洗涤时间短、M洗涤时间中等、L洗涤时间长、VL洗涤时间很长。

(1) 假设污泥、油脂、洗涤时间的论域分别为 $[0, 100]$ $[0,100]$ $[0,120]$ ，设计相应的模糊推理系统，给出输入、输出语言变量的隶属函数图，模糊控制规则表和推论结果立体图。

(2) 假定当前传感器测得的信息为污泥=60，油脂=70，采用模糊决策，给出模糊推理结果，并观察模糊推理的动态仿真环境，给出其动态仿真环境图。