

# 机器人控制理论基础

---

机器人控制技术

2023-下学期

- **控制系统数学模型**
- **平衡点定义**
- **稳定性理论**
- **李雅普诺夫稳定性定理**
- **小增益定理及全局稳定性定理**
- **线性控制器设计**

# 1、控制系统数学模型

机器人控制：控制其运动以及机器人与其环境之间的相互作用力和扭矩。

控制通常需要可用的数学模型。一方面，从控制器运动的基本物理定理中获得，另一方面，智能需要感知能力和对感知变量采取行动和做出反应的方法。常见的数学模型包括：

**传递函数，微分方程：**线性系统

**脉冲响应传递函数，差分方程：**离散系统

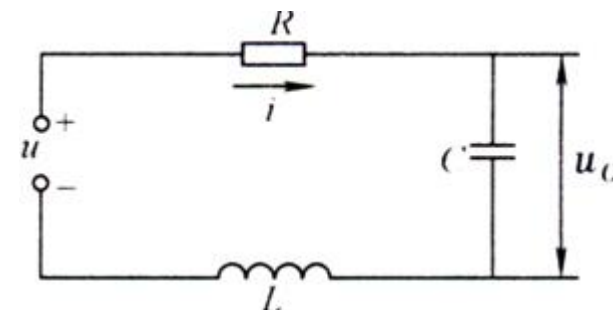
**状态空间模型：**可以用于描述一般控制系统

# 1、控制系统数学模型

## 1.1 状态变量及状态空间表达式

用图一所示的  $R-L-C$  网络，说明如何用状态变量描述这一系统。

根据电学原理，容易写出两个含有状态变量的一阶微分方程组：



$R-L-C$  电路

图一

$$C \frac{du_C}{dt} = i$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u$$

亦即

$$\begin{aligned} \dot{u}_C &= \frac{1}{C}i \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \end{aligned} \quad (1)$$

令  $x_1 = u_C$ ,  $x_2 = i$ ;

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u$$

或

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \text{状态方程}$$

$$y = u_C \quad \text{或} \quad y = x_1 \quad \text{输出方程} \quad (3)$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.1.1 状态变量

状态变量是既足以完全确定系统运动状态而个数又是最小的一组变量，当其在 $t=t_0$ 时刻的值已知时，则在给定 $t \geq t_0$ 时刻的输入作用下，便能完全确定系统在任何 $t \geq t_0$ 时刻的行为。

## 1.1.2 状态矢量

如果  $n$  个状态变量用  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  表示，并把这些状态变量看作是矢量  $x(t)$  的分量，则  $x(t)$  就称为状态矢量，记作：

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

## 1.1.3 状态空间

以状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  坐标轴所构成的  $n$  维空间，称为状态空间。

# 1、控制系统数学模型

## 1.1.4 状态方程

由系统的状态变量构成的一阶微分方程组称为系统的状态方程。

## 1.1.5 输出方程

在指定系统输出的情况下，该输出与状态变量间的函数关系式，称为系统的输出方程。

## 1.1.6 状态空间表达式（状态空间模型）

状态空间表达式：状态方程+输出方程

# 1、控制系统数学模型

## 状态变量的特点

经典控制理论中，指定某个输出量的高阶微分方程来描述系统的动态过程。如图一所示的系统，在以  $u_c$  作输出时，得到二阶微分方程为：

$$\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u \quad (5)$$

其相应的传递函数为：

$$\frac{u_c(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (6)$$

式 (5) 或式 (6) 的二阶系统，若改选  $u_c$  和  $\dot{u}_c$  作为两个状态变量，即令  $x_1 = u_c$ ， $x_2 = \dot{u}_c$ ，则得一阶微分方程组为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{LC} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u \quad (7)$$

# 1、控制系统数学模型

## 状态变量的特点

- (1) 独立性：状态变量之间**线性**独立
- (2) 多样性：状态变量的选取并不唯一，实际上存在无穷多种方案
- (3) 等价性：两个状态**向量**之间只差一个非奇异变换
- (4) 现实性：状态变量**通常取为**含义明确的物理量
- (5) 抽象性：状态变量**可以没有**直观的物理意义



# 1、控制系统数学模型

## 状态空间表达式的一般形式

设单输入—单输出定常系统，其状态变量为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，  
则状态方程的一般形式为：

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu$$

输出方程式则有如下形式：

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

用矢量矩阵表示时的状态空间表达式则为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

(9)

# 1、控制系统数学模型

多输入—多输出系统状态空间表达式的矢量矩阵形式为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (10)$$

式中， $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 对于单输入系统，分别为 $n$ 维状态矢量和 $n \times n$ 系统矩阵；

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \text{ 为 } r \text{ 维输入 (或控制) 矢量； } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ 为 } m \text{ 维输出矢量；}$$

为了简便，下面除特别申明，在输出方程中，均不考虑输入矢量的直接传递，即令 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 。

# 1、控制系统数学模型

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为  $n \times n$  的系统矩阵；

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ 为 } n \times r \text{ 输入（或控制）矩阵；}$$

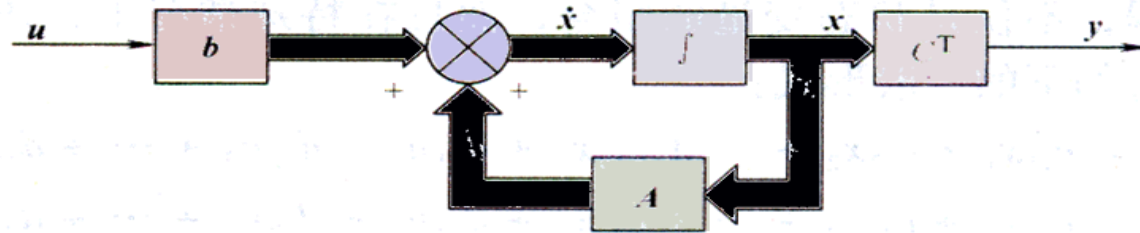
$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times n \text{ 输出矩阵；}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times r \text{ 直接传递矩阵。}$$

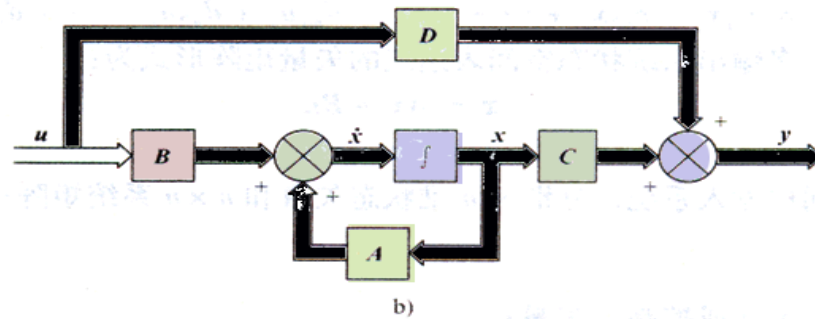
# 1、控制系统数学模型

## 1.1.7 状态空间表达式的系统框图

和经典控制理论相类似，可以用框图表示系统信号传递的关系。对于式(9)和式(10)所描述的系统，它们的框图分别如图a和b所示。



(a)



(b)

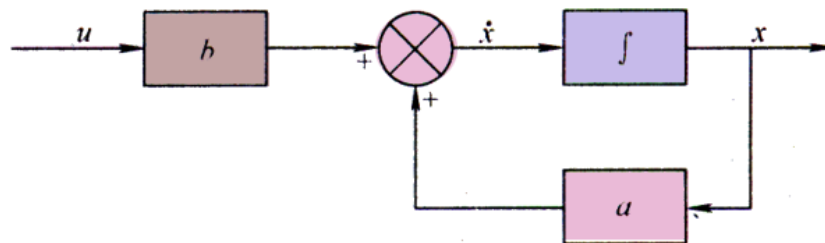
# 1、控制系统数学模型

## 1.2 状态变量及状态空间表达式的模拟结构图

状态空间表达式的框图可按如下步骤绘制：积分器的数目应等于状态变量数，将它们画在适当的位置，每个积分器的输出表示相应的某个状态变量，然后根据所给的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和比例器，最后用箭头将这些元件连接起来。

对于一阶标量微分方程： $\dot{x} = ax + bu$

它的模拟结构图示为：



一阶标量微分方程的模拟结构图

# 1、控制系统数学模型

## 1.2 状态变量及状态空间表达式的模拟结构图

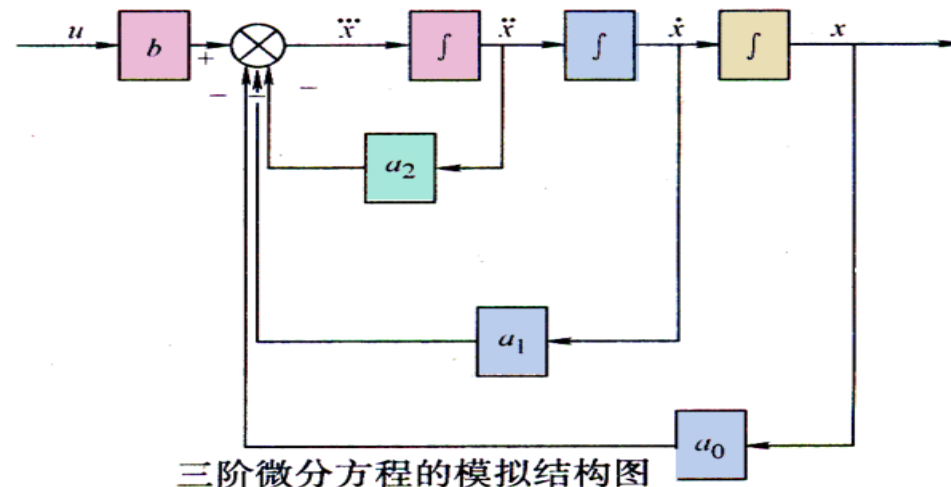
再以三阶微分方程为例：

$$\ddot{\ddot{x}} + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = bu$$

将最高阶导数留在等式左边，上式可改写成

$$\ddot{\ddot{x}} = -a_0 x - a_1 \dot{x} - a_2 \ddot{x} + bu$$

它的模拟结构图示为：



# 1、控制系统数学模型

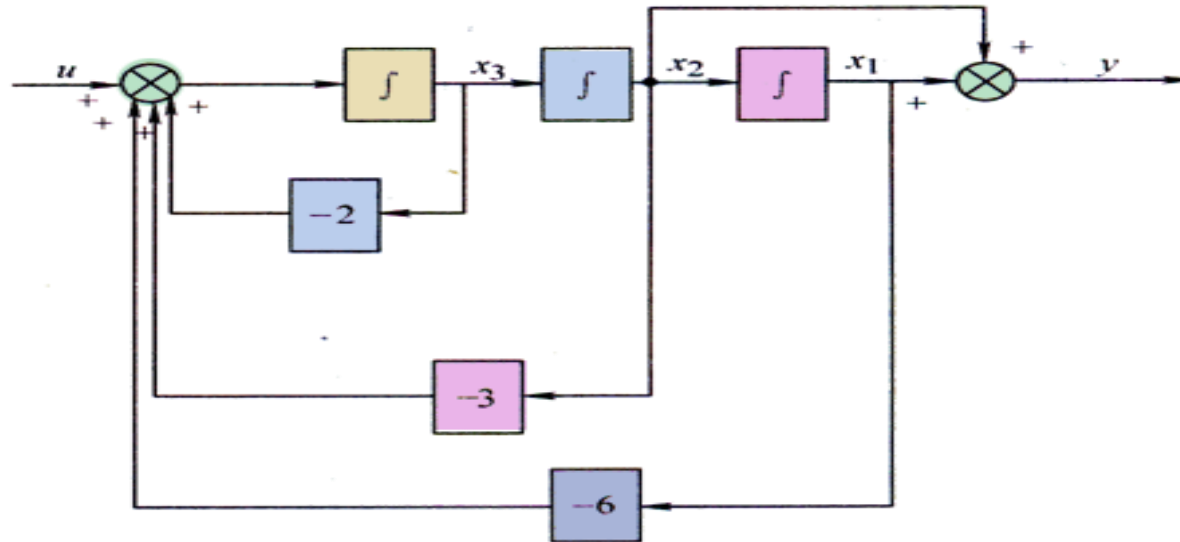
同样，已知状态空间表达式，也可画出相应的三阶系统的模拟结构图。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$



系统模拟结构图

# 1、控制系统数学模型

## 1.3 状态变量及状态空间表达式的建立(一)

### 1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

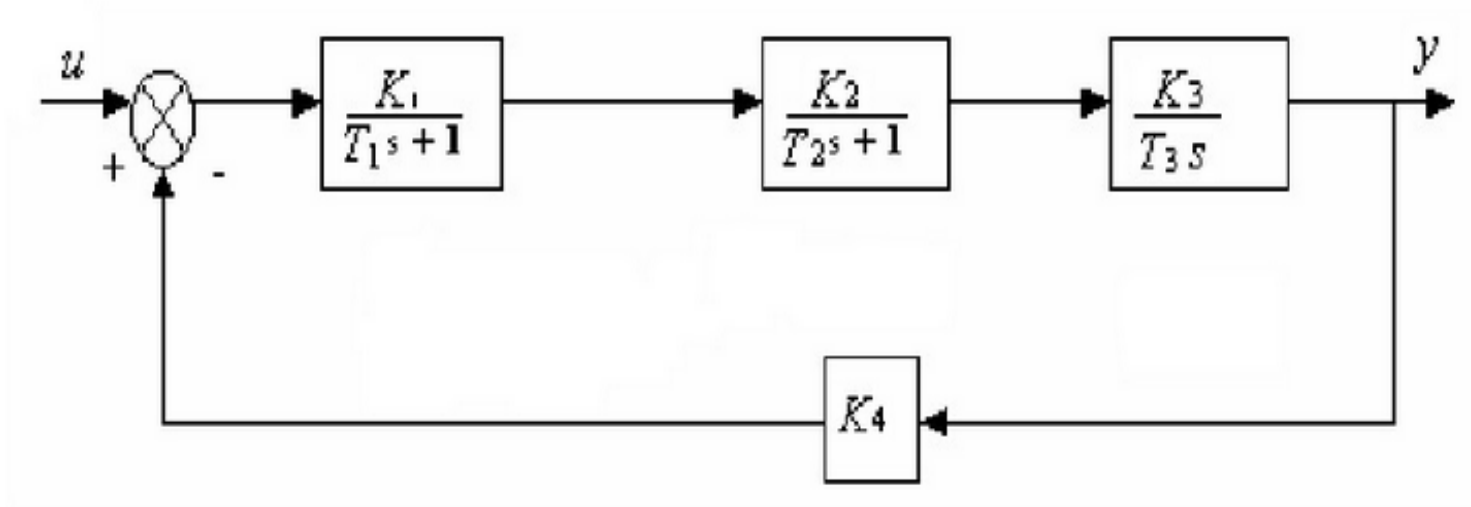
- 将系统传递函数方框图的各个环节变换成相应的模拟图；
- 把每个积分器的输出选作为一个状态变量  $x_i$ ，其输入便是相应的  $\dot{x}_i$ ；
- 根据系统的实际连接，写出相应的状态空间表达式。



# 1、控制系统数学模型

## 1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

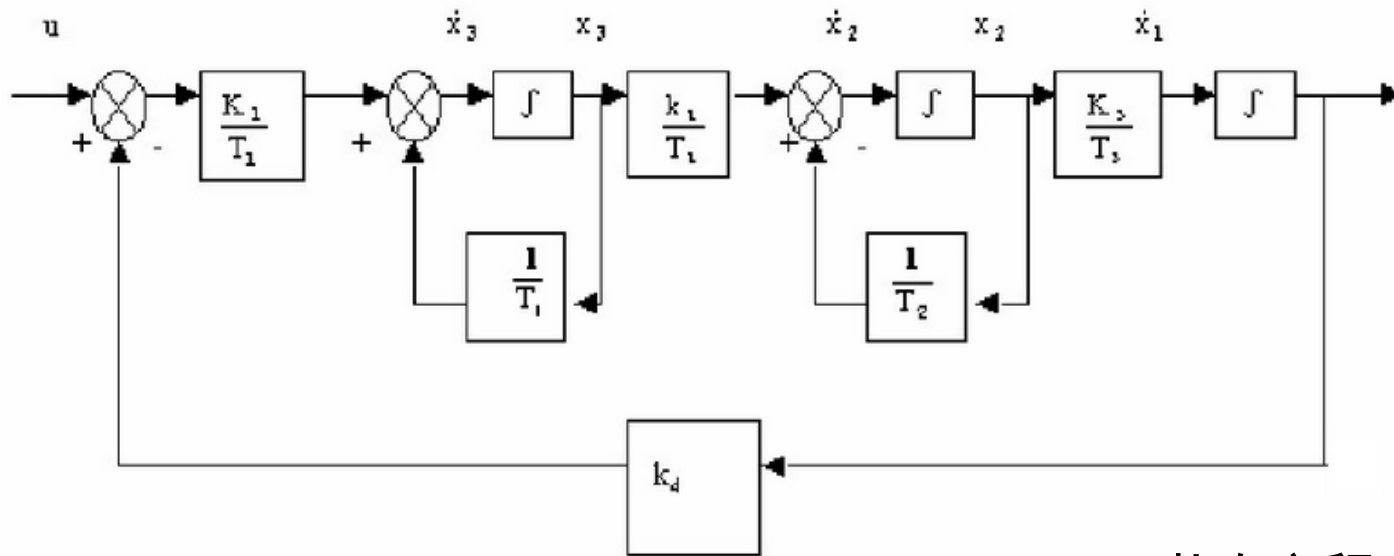
例：系统传递函数方框图如图所示，输入为  $u$ ，输出为  $y$ 。试求其状态空间表达式。



# 1、控制系统数学模型

## 1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

解：各环节的模拟结构图如图所示：



由图可知：

状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} x_3 - \frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 + \frac{K_1}{T_1} u \end{cases}$$

输出方程

$$y = x_1$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

写成向量形式，系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1 K_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.4 状态变量及状态空间表达式的建立(二)

$n$  阶线性常系数微分方程（单输入单输出）：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

相应的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n$$

**问题：将上式转换成状态空间表达式**

# 1、控制系统数学模型

## 1.4.1 传递函数中没有零点时的实现

在这种情况下，系统的微分方程为：
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u(t)$$

相应的系统传递函数为 
$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

将图中每个积分器的输出取作状态变量，有时称为相变量，它是输出  $y$ （或  $y/b_0$ ）的各阶导数。  
至于每个积分器的输入，显然就是各状态变量的导数。

从图（a），容易列出系统的状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + u$$

输出方程为：
$$y = b_0x_1$$

# 1、控制系统数学模型

系统输出方程

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

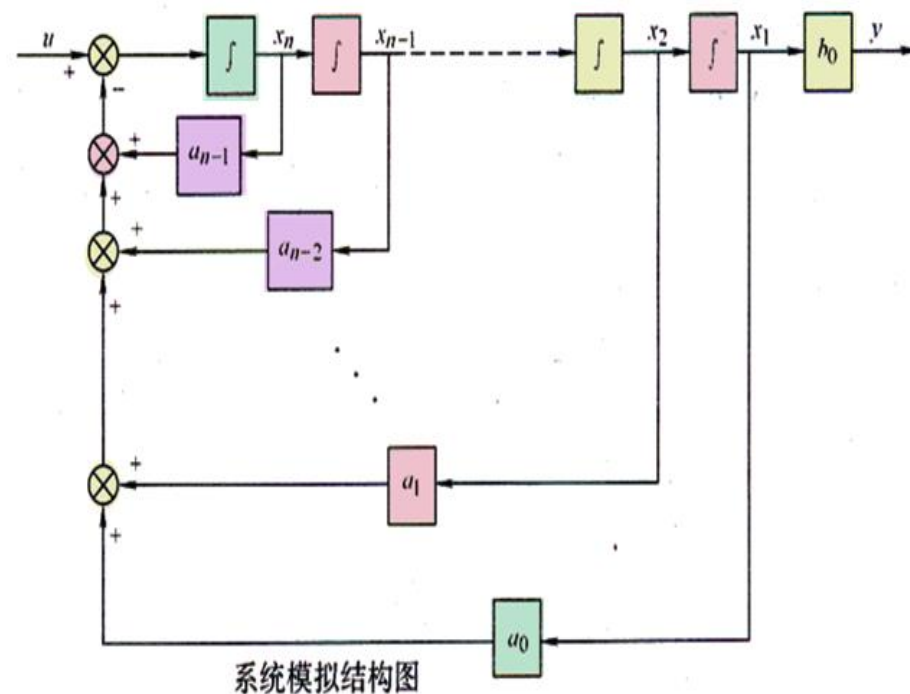
$$y = CX \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

表示成矩阵形式，则为：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u$$

$$y = \underbrace{(b_0, 0, 0, \cdots, 0)}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}$$



# 1、控制系统数学模型

## 1.4.1 传递函数中没有零点时的实现

例：系统微分方程为  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$ ，求系统的状态空间表达式

解：选取  $x_1 = \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y$

$$x_2 = \dot{y} + 6y$$

$$x_3 = y$$

状态方程：  $\dot{x}_1 = 6u - 16x_3$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 11x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - 6x_3$$

输出方程：  $y = x_3$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.4.2 传递函数中有零点时的实现

此时，系统的微分方程为：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

相应地，系统传递函数为：

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n \quad (26)$$

设待实现的系统传递函数为：

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad n = m = 3$$

因为  $n = m$ ，上式可变换为

$$W(s) = b_3 + \frac{(b_2 - a_2b_3)s^2 + (b_1 - a_1b_3)s + (b_0 - a_0b_3)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$



# 1、控制系统数学模型

令 
$$Y_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}U(s)$$

则

$$Y(s) = b_3U(s) + Y_1(s) \left[ (b_2 - a_2b_3)s^2 + (b_1 - a_1b_3)s + (b_0 - a_0b_3) \right]$$

对上式求拉氏反变换，可得：  $y = b_3u + (b_2 - a_2b_3)\ddot{y}_1 + (b_1 - a_1b_3)\dot{y}_1 + (b_0 - a_0b_3)y_1$

每个积分器的输出为一个状态变量，可得系统的状态空间表达式：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + u$$

$$y = b_3u + (b_2 - a_2b_3)x_3 + (b_1 - a_1b_3)x_2 + (b_0 - a_0b_3)x_1$$

或表示为：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = ((b_0 - a_0b_3), (b_1 - a_1b_3), (b_2 - a_2b_3)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b_3u$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.5 状态矢量的线性变换(坐标变换)

### 1.5.1 系统状态空间表达式的非唯一性

对于一个给定的定常系统，可以选取许多种状态变量，相应地有许多种状态空间表达式描述同一系统，也就是说系统可以有多种结构形式。所选取的状态矢量之间，实际上是一种矢量的线性变换(或称坐标变换)。

设给定系统为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \right\}$$

我们总可以找到任意一个非奇异矩阵  $T$ ，将原状态矢量  $x$  作线性变换，得到另一状态矢量  $z$ ，设变换关系为：  $x = Tz$

$$\text{即} \quad z = T^{-1}x$$

# 1、控制系统数学模型

则可得到新的状态空间表达式：

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \bar{A}z + \bar{B}u$$

$$y = CTz + Du = \bar{C}z + \bar{D}u$$

$$z(0) = T^{-1}x(0)$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT$$

$$\bar{B} = T^{-1}B$$

$$\bar{C} = CT$$

$$\bar{D} = D$$

显然，由于  $T$  为任意非奇异矩阵，所以状态表达式为非唯一。 $T$  称为变换矩阵。

# 1、控制系统数学模型

例：设系统状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} x$$

解：取线性变换阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则新状态变量为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1} x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \\ \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 \end{bmatrix}$$

# 1、控制系统数学模型

则在新状态变量下，系统状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u \\y &= CTz = [3 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} z = [3 \quad 3] z\end{aligned}$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.5.2 系统特征值的不变性及系统的不变量

### 1. 系统特征值

系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

的特征值就是系统矩阵  $A$  的特征值，即下列特征方程的根。

$$|\lambda I - A| = 0$$

$n \times n$  方阵  $A$  且有  $n$  个特征值；实际物理系统中， $A$  为实数方阵，故特征值或为实数，或为成对共轭复数；如  $A$  为实对称方阵，则其特征值都是实数。

# 1、控制系统数学模型

## 1.5.2 系统的不变量与特征值的不变性

同一系统，经非奇异变换后，得：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

其特征方程为：

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}| = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned}|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}| &= |\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}\lambda\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}| |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}| |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\end{aligned}$$

经过非奇异变换后，系统的特征值不变，系统的特征方程系数也不变。

特征方程多项式的系数称为系统的不变量。

# 1、控制系统数学模型

## 1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

### 1.6.1 传递函数(阵)

#### 1. 单输入—单输出系统

已知系统的状态空间表达式：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du \end{aligned} \right\}$$

对上式进行拉氏变换，并假定初始条件为零，则有：

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}bU(s) \\ Y(s) &= cX(s) + dU(s) \end{aligned} \right\}$$

故 $U$ — $X$  间的传递函数为：

$$W_{ux}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}b$$

它是一个  $n \times 1$  的列阵函数。

$U$ — $Y$  间的传递函数为：

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b + d$$

它是一个标量。



# 1、控制系统数学模型

## 1.6.2 多输入多输出系统

系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

式中：

$u$  — — —  $r \times 1$       输入列向量；

$y$  — — —  $m \times 1$       输出列向量；

$x$  — — —  $n \times 1$       状态向量；

$A$  — — —  $n \times n$       系统矩阵；

$B$  — — —  $n \times r$       控制矩阵；

$C$  — — —  $m \times n$       输出矩阵；

$D$  — — —  $m \times r$       直接传递矩阵。

# 1、控制系统数学模型

在初始条件为零的前提下作拉氏变换，得

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

于是得传递函数阵  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \vdots & & & \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{bmatrix}_{m \times r}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \vdots & & & \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix}$$

系统各个输入与输出之间是相互关联的，这种关系称为**耦合关系**，这是多变量系统的特点。机器人控制是一个典型的耦合多变量系统的控制。

# 1、控制系统数学模型

传递函数矩阵还可以表示为

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B + |sI - A|D}{|sI - A|} \end{aligned}$$

可以看出，传递函数的分母就是系统矩阵  $A$  的特征多项式，分子是一个多项式矩阵。  
经典控制理论中的系统性能与闭环极点相关，而闭环极点与  $A$  矩阵的特征值相关，因此控制的目的是配置  $A$  的特征值，称为极点配置。

# 1、控制系统数学模型

例：已知SISO系统的状态空间表达式如下所示，试求其传递函数阵

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解：

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} B$$

$$W(s) = \frac{1}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 3 & s+2 \end{vmatrix}} \left( [1 \quad 0 \quad 0] \text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 4 & 3 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right) = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 2s + 3) & (s + 2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

$$= \frac{s^2 + 5s + 3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

# 1、控制系统数学模型

例： 已知MIMO系统的状态空间表达式如下所示，试求其传递函数阵。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# 1、控制系统数学模型

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s + 6 & 1 \\ -6 & s(s + 6) & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 17 & -(s^2 + 5s - 6) & -(s - 1) \\ 2s^2 + 18s + 16 & s^2 + 19s + 18 & -(s^2 - s - 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} -s^2 - 4s + 29 & s^2 + 3s - 4 \\ 4s^2 + 56s + 52 & -3s^2 - 17s - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

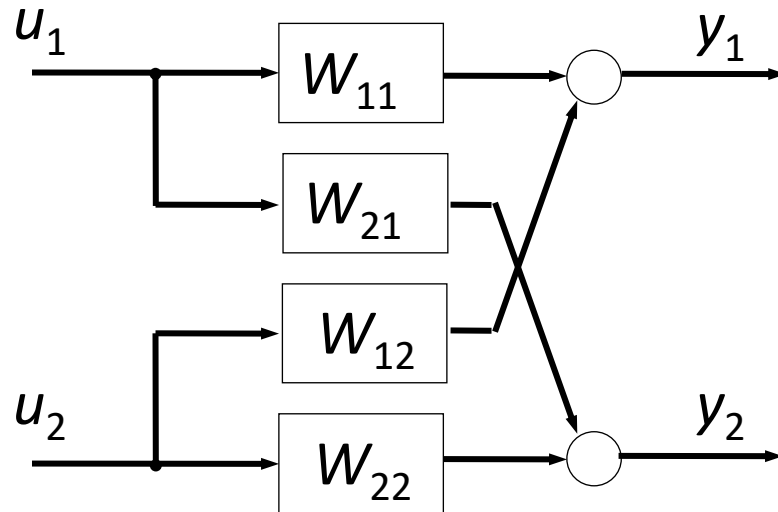
$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 56 & -17 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 29 & -4 \\ 52 & -14 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

# 1、控制系统数学模型

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{-s^2 - 4s + 29}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$W_{12} = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$



$$W_{21} = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{4s^2 + 56s + 52}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$W_{22} = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{-3s^2 - 17s - 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

# 1、控制系统数学模型

- 线性时不变系统状态空间描述为  $\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

引入状态变换  $\tilde{x} = T^{-1}x \quad x = T\tilde{x}$

则变换后系统的状态空间描述为  $\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + Du \end{cases} \quad \tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT, D = D$

其传递函数矩阵  $\tilde{W}(s) = CT(s\mathbf{I} - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = C[T(s\mathbf{I} - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}]B + D$

$$= C[T(s\mathbf{I})T^{-1} - TT^{-1}ATT^{-1}]^{-1}B + D$$
$$= C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D = W(s)$$

即同一系统，传递函数矩阵是唯一的。



# 1、控制系统数学模型

## 1.7 离散时间系统的状态空间表达式

**连续时间系统**的状态空间表达法也可以推广到**离散时间系统**。在连续时间系统中，可以从微分方程或传递函数来建立状态空间表达式。而在离散系统中，可以从差分方程或脉冲传递函数来建立离散状态空间表达式。（采样时间  $T_s$ ）。

设离散系统差分方程为：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k)$$

相应地，系统脉冲传递函数为：

$$W(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.7 离散时间系统的状态空间表达式

系统的差分方程为：

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned}$$

设：

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - h_nu(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) - h_{n-1}u(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) - h_{n-2}u(k) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - h_1u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_n = b_n \\ h_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}h_n \\ h_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1}h_{n-1} - a_{n-2}h_n \\ \dots\dots\dots \\ h_0 = b_0 - a_{n-1}h_1 - \cdots - a_1h_{n-1} - a_0h_n \end{cases}$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.7 离散时间系统的状态空间表达式

系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + h_{n-1}u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + h_{n-2}u(k) \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) + h_1u(k) \\ x_n(k+1) = -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \dots - a_{n-1}x_n(k) + h_0u(k) \\ y(k) = x_1(k) + b_nu(k) \end{cases}$$

# 1、控制系统数学模型

## 1.7 离散时间系统的状态空间表达式

相应的状态方程和输出方程矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{n-1} \\ h_{n-2} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x(k) + h_n u(k)$$

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1 李雅普诺夫关于稳定的定义

- 线性系统稳定性一只取决于系统的结构和参数，稳定的条件是特征方程的根都具有负实部(在左半根平面)，可用劳斯判据、乃奎斯特判据等方法判断。
- 非线性系统的稳定性一还与初始条件和外部扰动的大小有关。如何判断系统的稳定性？
- 线性系统属于非线性系统的特例，适合于非线性系统的方法也适用于线性系统。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1.1 系统状态的运动及平衡状态

**自治系统：**系统的齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

**状态轨线：**系统的齐次状态方程由初始状态  $\mathbf{x}_0$  引起的状态运动轨迹，称为系统的运动或状态轨线。

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad t \in [t_0, \infty)$$

**平衡状态：**状态空间中满足  $\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty)$

的一个状态。即平衡状态的各分量相对时间不再发生变化。

存在性、不唯一性。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1.1 系统状态的运动及平衡状态

稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的，线性定常系统由于只有唯一的一个平衡状态，所以才笼统地讲所谓的系统稳定性问题，对于其他系统则由于可能存在多个平衡状态，不同的平衡状态可能表现不同的稳定性，因此必须逐个分别加以讨论。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1.2 李雅谱诺夫稳定性定义

状态空间中  $x_0$  点至  $x_e$  点之间的距离用欧几里德范数表示为：

$$\|x_0 - x_e\| = \sqrt{(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2}$$

用点集  $S(e)$  表示以  $x_e$  为中心，以  $e$  为半径的超球体，那么  $x \in S(e)$  则表示为  $\|x - x_e\| \leq e$ ；

当  $e$  很小时，则称  $S(e)$  为  $x_e$  的邻域，因此若  $x_0 \in S(d)$ ，则意味着  $\|x_0 - x_e\| \leq d$ 。

同理，若状态方程的解  $F(t; x_0, t_0)$  位于球域  $S(e)$  内便有  $\|F(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq e, \quad t \geq t_0$

表明状态方程由初始状态引起的自由响应是有界的。



## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1.2 李雅普诺夫稳定性定义

#### 1. 李雅普诺夫稳定性定义：

如果齐次状态方程下述有平衡状态  $x_e$

$$\dot{X} = f(X, t) \quad X(t_0) = X_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

对于任意小的实数  $\varepsilon > 0$ ，均存在另一实数  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，当初始状态满足

$\|X_0 - X_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$  时，系统从任意初态  $x_0$  出发运动轨迹满足：

$$\|\phi(t; X_0, t_0) - X_e\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$$

则称该平衡状态  $x_e$  是李雅普诺夫意义下稳定的，简称  $x_e$  是稳定的。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1 李雅普诺夫关于稳定的定义

#### (1) 李亚普诺夫意义下一致稳定

通常时变系统的  $\delta$  与  $t_0$  有关，时不变系统的与  $t_0$  无关。只要  $\delta$  与  $t_0$  无关，这种平衡状态称为一致稳定的。

#### (2) 时不变系统的稳定属性

时不变系统李亚普诺夫意义下的稳定和一致稳定必为等价。

#### (3) 李亚普诺夫意义下稳定的实质上是工程意义下的**临界稳定**。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.1 李雅普诺夫关于稳定的定义

渐近稳定性：

- 系统的平衡状态  $X_e$  同时满足：
- ① 具有李雅普诺夫意义下的稳定性；
- ② 当  $t$  无限增长时，从  $X_e$  出发的状态轨线不仅不超出  $s(\delta)$ ，而且最终收敛于  $s(\varepsilon)$ ，  
则称此平衡状态是**渐近稳定**的。

大范围渐近稳定性：

- 当初始条件扩展至整个状态空间时系统具有渐近稳定性，称此平衡状态是**大范围渐近稳定**的。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

(1) 一致渐近稳定

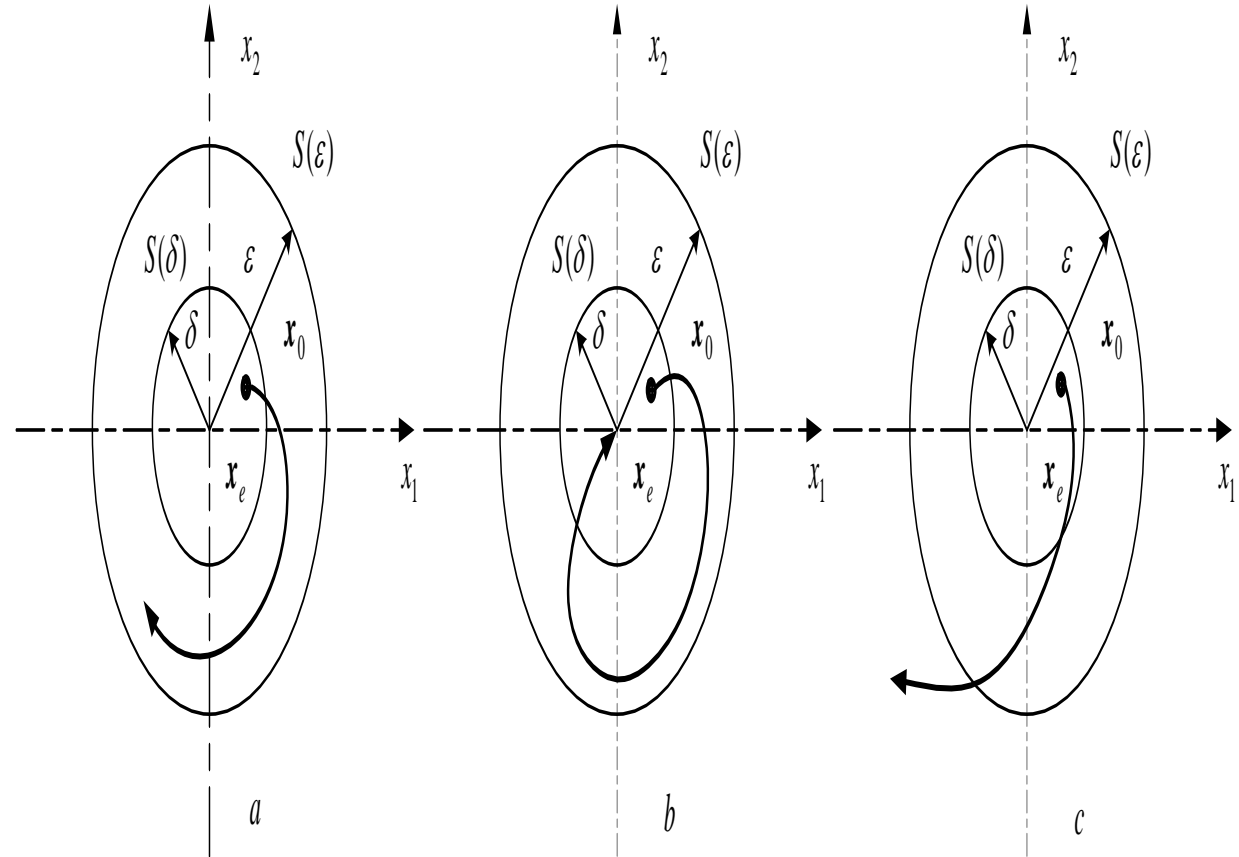
(2) 时不变系统的渐近稳定属性  
渐近稳定=一致渐近稳定

(3) 小范围和大范围渐近稳定

(4) 大范围渐近稳定的必要条件：  
 $x_e$  唯一

(5) 线性系统的渐近稳定属性  
渐近稳定=大范围渐近稳定

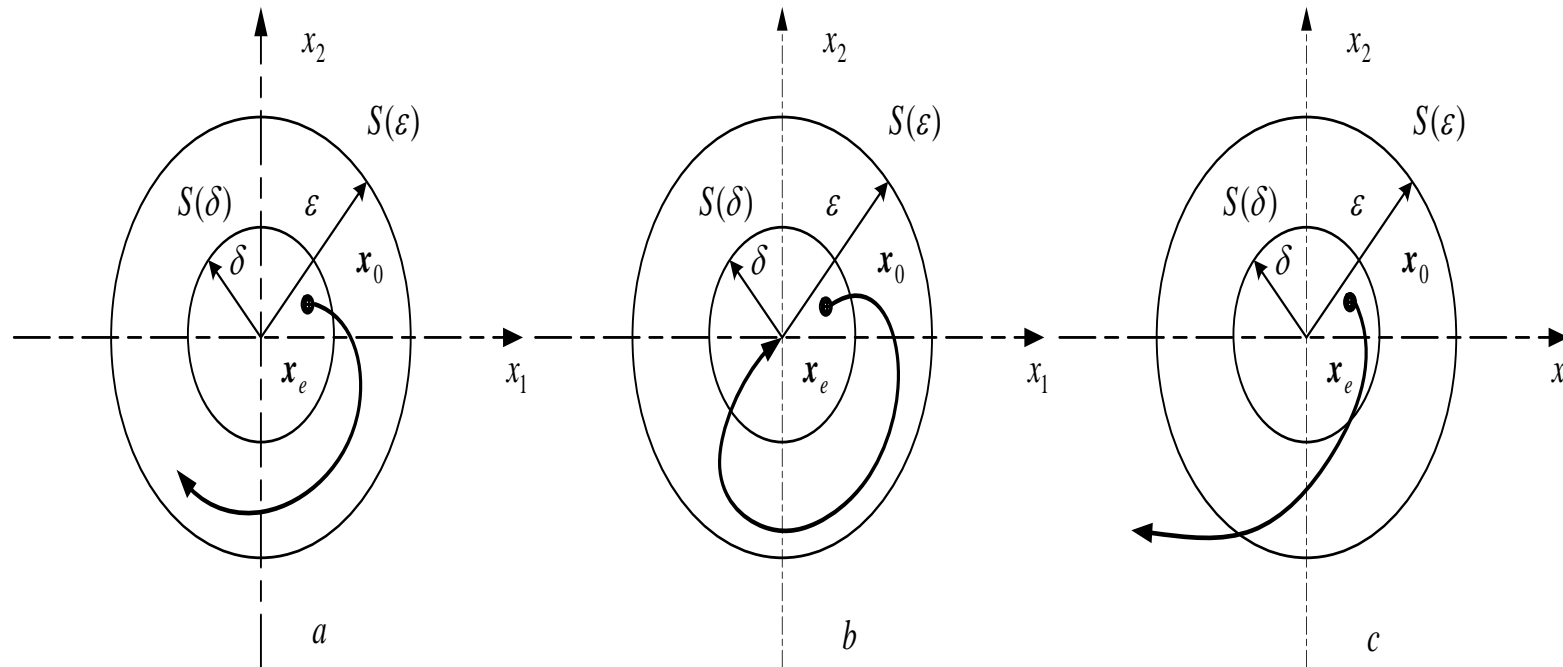
(6) 渐近稳定的工程含义  
渐近稳定=工程意义下稳定



## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 不稳定

如果对于某个实数  $\varepsilon > 0$  和任一实数  $\delta > 0$ ，不管  $\delta$  这个实数多么小，由  $S(\delta)$  内出发的状态轨线，至少有一个轨线越过  $S(\varepsilon)$ ，则称这种平衡状态  $X_e$  不稳定。



## 2、李雅普诺夫稳定性理论

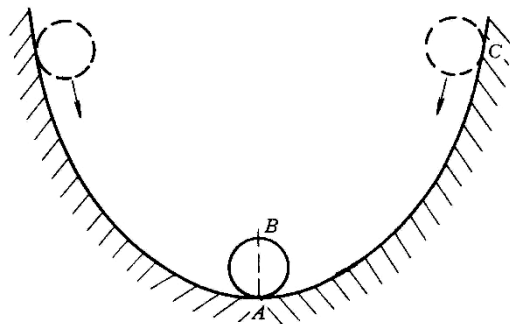
- 不管初始偏差有多大，系统总是稳定的，则称系统是**大范围稳定的**。
- 不管初始偏差有多大，系统总是渐近稳定的，则称系统是**大范围渐近稳定的**。

大范围渐近稳定的系统只能有一个平衡状态。

- 为了满足稳定条件，初始偏差有一定限制，则称系统是**小范围稳定的**。
- 对于**线性**系统，若在小范围稳定，则必大范围稳定；若在小范围渐近稳定，则必大范围渐近稳定。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法



由于实际系统的复杂性和多样性，往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系；

于是Lyapunov定义了一个**正定**的**标量**函数，作为虚构的广义能量函数，用其一阶微分的符号特征来判断系统的稳定性。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

由n维向量 $\mathbf{x}$ 定义的标量函数 $V(\mathbf{x})$

1)  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x})$  存在

2)  $V(0) = 0$

3) 当  $\mathbf{x} \neq 0$  时:

若  $V(\mathbf{x}) > 0$  ( $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ) 则称  $V(\mathbf{x})$  是正定的(半正定的);

若  $V(\mathbf{x}) < 0$  ( $V(\mathbf{x}) \leq 0$ ) 则称  $V(\mathbf{x})$  是负定的(半负定的)。



## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

例

- 1)  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  正定的
- 2)  $V(x) = (x_1 + x_2)^2$  半正定的
- 3)  $V(x) = -x_1^2 - x_2^2$  负定的
- 4)  $V(x) = -(3x_1 + 2x_2)^2$  半负定的
- 5)  $V(x) = x_1x_2 - x_2^2$  不定的

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

二次型标量函数

- 设  $X = [x_1, x_2 \cdots, x_n]^T$ ，则实二次型可记为：

$$V(X) = V(x_1, x_2 \cdots, x_n) = X^T P X$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} = p_{ji}$$

$P$  称为二次型的矩阵(实对称矩阵)。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

实二次型是  $x \in R^n$  的标量函数  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x$ ，式中， $P$  为  $n \times n$  实对称矩阵：

- ① 若  $x^T P x > 0$ ，则称二次型  $V$  为**正定**的， $P$  称为正定矩阵，记为  $P > 0$ 。
- ② 若  $x^T P x \geq 0$ ，则称二次型  $V$  为**半正定**的， $P$  称为半正定矩阵，记为  $P \geq 0$ 。
- ③ 若  $x^T P x < 0$  ( $\leq 0$ )，称  $V$  为负定的(半负定的)， $P$  称为**负定(半负定)**矩阵，记为  $P < 0$  ( $\leq 0$ )。
- ④ 若  $V$  既不是半正定又不是半负定，则称为**不定**的。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

希尔维斯特(Sylvester)判据  
二次型函数的定号性判别准则

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} = p_{ji}$$

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T P x$$

$\Delta_i (i=1,2,\dots,n)$  为其各阶主子行列式：

$$\Delta_1 = p_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \Delta_n = |P|$$

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

矩阵 $P$  定号性的充要条件是：

(1) 若  $\Delta_i > 0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), 则  $P$  为正定的。

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x \text{ 正定}$$

(2) 若  $\Delta_i \begin{cases} >0 & i \text{ 为偶数} \\ <0 & i \text{ 为奇数} \end{cases}$ , 则  $P$  为负定的。

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x \text{ 负定}$$

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

(3) 若  $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i = (1, 2, \dots, n-1) \\ = 0 & i = n \end{cases}$  , 则  $P$  为半正定的。

$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x$  半正定。

(4) 若  $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i \text{ 为偶数} \\ \leq 0 & i \text{ 为奇数} \\ = 0 & i = n \end{cases}$  , 则  $P$  为半负定的。

$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x$  半负定。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法稳定性判据

- 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x) \quad t \in [t_0, \infty)$$

$x_e=0$ 为系统平衡状态满足 $f(x_e)=0$ ,

若可构造标量函数 $V(x)$ 满足:

- ① 标量函数 $V(x)$ 对 $x$ 具有连续一阶偏导数;
- ②  $V(x)$  是正定的, 即  $V(0)=0$ , 且对状态空间中所有**非零状态**  $x$  满足  $V(x) > 0$ ;
- ③  $V(x)$ 沿状态轨迹方向计算的时间导数  $\dot{V}(x)=dV(x)/dt$ 。

## 2、李雅普诺夫稳定性理论

### 2.2 李雅普诺夫第二法

- 稳定判据

- $\dot{V}(x)$  为半负定的，则平衡状态  $x_e$  为李雅普诺夫意义下稳定；

- 渐近稳定判据

- $\dot{V}(x)$  为负定的；或者虽然  $\dot{V}(x)$  为半负定，但对任意初始状态  $x(t_0) \neq 0$ ，除了  $x=0$  外，对  $x \neq 0$ ， $\dot{V}(x)$  不恒为零，则平衡状态  $x_e$  为李雅普诺夫意义下渐近稳定的。

- 如果进一步还有  $\|x\| \rightarrow \infty$  时， $V(x) \rightarrow \infty$ ，那么平衡状态  $x_e$  为大范围渐近稳定的——渐近稳定判据；

- 不稳定判据

- $\dot{V}(x)$  为正定的，则平衡状态  $x_e$  为李雅普诺夫意义下不稳定。