机械臂动力学

机器人控制技术

2023-下学期

本章内容

- □ 坐标系定义
- □ 机器人动力学研究的意义与必要性
- □ 拉格朗日法、牛顿-欧拉法建立动力学方程
- □ 机械臂动力学方程的结构和性质
- □ 动力学性能指标
- □ 驱动器动力学模型

坐标系定义

建模：需用数学符号描述刚性构件间的相对位置（position）和姿态（orientation）

坐标系定义（笛卡尔坐标系）：

参考坐标系（固定坐标系、惯性坐标系、全局坐标系）：与地（机架）固连

通常将惯性坐标系选在机器人基座处，因此也称为基坐标系。

相对坐标系（物体坐标系、局部坐标系）：与刚体固连并随之运动的坐标系。

通常相对坐标系的原点选在机器人连杆或末端执行器的某些重要参考点出，如工具中心点。

世界坐标系：当描述两台及以上机器人的相对位姿时，需定义的一个共同的参考坐标系。单台机器人的世界坐标系与基坐标系重合。

腕部坐标系：与机器人末端杆固连，原点位于手腕中心（法兰盘中心） 。

工具坐标系：与机器人末端工具固连，通常根据腕部坐标系来确定。

任务坐标系：与机器人任务相关，一般位于工作上，又称为工作台坐标系。

目标坐标系：用于描述机器人执行任务结束时的工具位姿，相对于任务坐标系定义。

本章内容

- □ 坐标系定义
- □ 机器人动力学研究的意义与必要性
- □ 拉格朗日法、牛顿-欧拉法建立动力学方程
- □ 机械臂动力学方程的结构和性质
- □ 动力学性能指标
- □ 驱动器动力学模型

机器人动力学（Dynamics）研究的意义和必要性

逆运动学部分内容在运动控制中的作用

□ 机器人操作臂慢速运动时：

速度机器人操作臂的运动控制，即末端操作器从空间中的一点移动到另一点的情况下，当运动速度非常慢的情况下，用逆运动学即根据末端操作器的位置和姿态即可求得相应的各关节角，然后对各关节进行位置控制即可实现运动控制的目的。

□ 机器人操作臂的末端受到来自作业对象的静力时：

雅克比矩阵的转置矩阵同样也可以求得各关节的力或力矩，从而控制各关节实现力控制。

【问题】基于逆运动学的方法能够用于机器人操作臂高速运动控制吗？

机器人动力学（Dynamics）研究的意义和必要性

【问题1】基于逆运动学的方法能够用于机器人操作臂高速运动控制吗？

【问题2】当机器人操作臂各杆件质量很大时在末端操作器或指尖上产生的力能控制住吗？

【答案】实验表明：高速运动或者杆件质量很大时，基于逆运动学的方法很难实现末端操作器准确的位姿控制或力控制。

【原因】高速运动时，各杆件及各关节部分的质量产生的惯性力、粘性阻力等等对于机器人操作臂运动的影响越来越大。

这个问题就像汽车遇到拐角要拐弯时因为速度过快很难拐弯一样，生活中还有其它类似例子。学习机器人操作臂高速运动控制理论，也需要从这一点上去理解动力学的必要性。

机器人动力学（Dynamics）研究的意义和必要性

【结论】**为实现机器人操作臂高速、高精度运动控制，需要考虑对机器人操作臂运动有影响的各种力的方法，动力学则成为各种控制方法的基础。动力学研究的是物体运动和受力之间的关系，其根本则是牛顿运动方程式。**

机械臂的动力学模型提供了对关节执行器力矩和结构运动之间关系的描述。涵盖：

动力学正问题：已知关节驱动力（力矩），末端外界负载，求解机器人的真实运动（参数）。用于动力学仿真，实现对机器人性能的评价。

动力学逆问题：已知机器人的运动规律（如关节轨迹点或末端轨迹点）以及末端外界负载，求解理论关节力（力矩）。用于驱动器选型与机器人控制。

机器人动力学（Dynamics）研究的意义和必要性

【结论】为实现机器人操作臂高速、高精度运动控制，需要考虑对机器人操作臂运动有影响的各种力的方法，动力学则成为各种控制方法的基础。动力学研究的是物体运动和受力之间的关系，其根本则是牛顿运动方程式。

机械臂的动力学模型提供了对关节执行器力矩和结构运动之间关系的描述。涵盖：

动力学正问题：已知关节驱动力（力矩），末端外界负载，求解机器人的真实运动（参数）。用于动力学仿真，实现对机器人性能的评价。

动力学逆问题：已知机器人的运动规律（如关节轨迹点或末端轨迹点）以及末端外界负载，求解理论关节力（力矩）。用于驱动器选型与机器人控制。

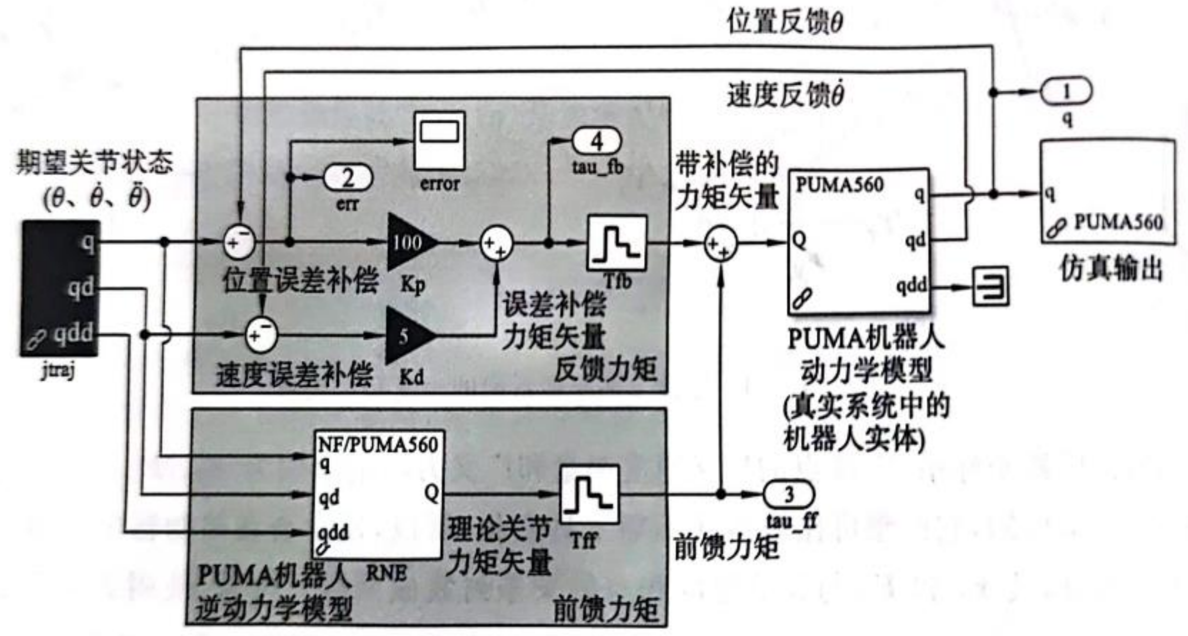


图 动力学模型在PUMA560机器人仿真控制中的应用

本章内容

- □ 坐标系定义
- □ 机器人动力学研究的意义与必要性
- □ 拉格朗日法，牛顿-欧拉法建立动力学方程
- □ 机械臂动力学方程的结构和性质
- □ 动力学性能指标
- □ 驱动器动力学模型

拉格朗日法（Lagrange Formulation）

何谓“拉格朗日法”：用能量的方法建立动力学模型

- 机器人操作臂可以看作为各杆件间通过各关节连接起来，一边相互施加位置约束一边运动的多刚体系统。

- 要考虑各杆件相互作用力，同时求得这样一个多刚体系统的运动方程式不是件简单的事。

拉格朗日方程就是可以避开上述繁琐的问题，求得容易理解和使用的运动方程式的方法之一。

拉格朗日方程是在描述物体运动的一般化的坐标系(即广义坐标系)中基于能量法推导出的运动方程式。

拉格朗日法（Lagrange Formulation）

机械系统的拉格朗日函数可在广义坐标系中定义如下：

$$L = T - U$$

其中 T 和 U 分别表示系统总的动能和势能。

拉格朗日方程表达如下：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \tau$$

- 广义坐标为q_i，是一个n维广义坐标，由关节位置变量构成
- 对应于广义坐标q_i的广义力为 τ_i ；
- 广义坐标q_i、广义力为 τ_i 下的系统运动的能量为T。

由于势能不显含 $\dot{q}_i$ ，所以动力学方程可改写为： $\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$

拉格朗日法

- **对于质点m1，笛卡尔坐标系位置和速度：**

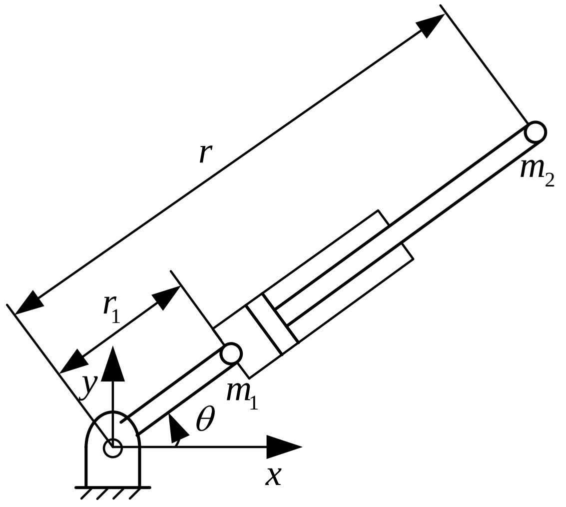
$$x_1 = r_1\cos\theta, \quad y_1 = r_1\sin\theta$$

$$\dot{x}_1 = -r_1\dot{\theta}\sin\theta, \dot{y}_1 = r_1\dot{\theta}\cos\theta$$

- **对于质点m2，笛卡尔坐标系位置和速度：**

$$x_2 = r\cos\theta, \quad y_2 = r\sin\theta$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{y}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$



R-P机械手

- **系统总动能：**

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}^2\right)$$

- **系统总势能：**

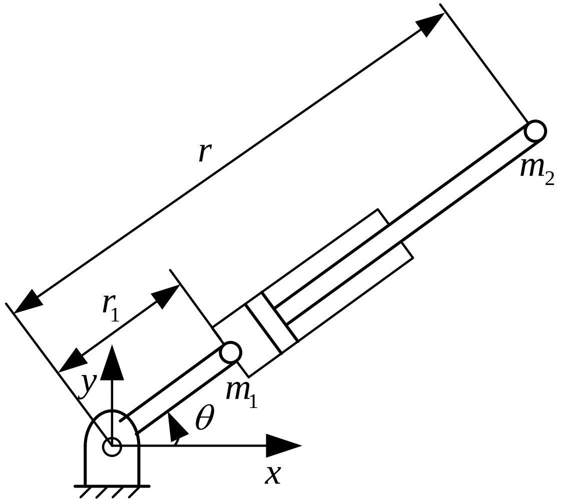
$$U = m_1 g r_1\sin\theta + m_2 g r\sin\theta$$

拉格朗日法

- **系统总动能：** $T=\frac{1}{2}m_1r_1^{\,2}\dot\theta^2+\left(\frac{1}{2}m_2\dot r^2+\frac{1}{2}m_2r^2\dot\theta^2\right)$

- **系统总势能：** $U=m_1gr_1\sin\theta+m_2gr\sin\theta$

- **首先计算** θ **关节的力矩** τ_θ **：**



R-P 机械手

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial\theta}=g\cos\theta\left(m_1r_1+m_2r\right)$$

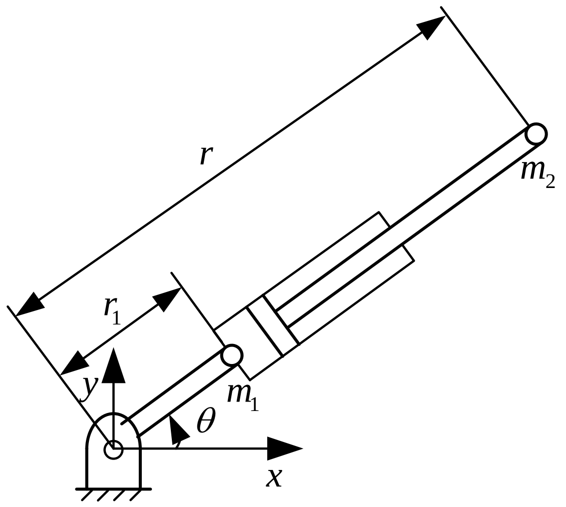
$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=m_1r_1^{\,2}\dot\theta+m_2r^2\dot\theta,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right)=m_1r_1^{\,2}\ddot\theta+m_2r^2\ddot\theta+2m_2r\dot r\dot\theta$$

$$\tau_\theta=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_i}-\frac{\partial T}{\partial\theta_i}+\frac{\partial U}{\partial\theta_i}$$

$$=m_1r_1^{\,2}\ddot\theta+m_2r^2\ddot\theta+2m_2r\dot\theta\dot r+g\cos\theta\left(m_1r_1+m_2r\right)$$

拉格朗日法

- **系统总动能：** $T=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2\right)$
- **系统总势能：** $U=m_1gr_1\sin\theta+m_2gr\sin\theta$



R-P 机械手

◆ **同理因为：**

$$\frac{\partial T}{\partial r}=m_2r\dot{\theta}^2,\quad \frac{\partial U}{\partial r}=m_2g\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m_2\dot{r},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m_2\ddot{r}$$

◆ **所以可得：**

$$f_r=m_2\ddot{r}-m_2r\dot{\theta}^2+m_2g\sin\theta$$

拉格朗日法

- **上式可写成一般形式（θ, r 分别为关节1、2）：**

$$\tau_\theta = \underbrace{D_{11}\ddot{\theta} + D_{12}\ddot{r}}_{\text{惯性力项}} + \underbrace{D_{111}\dot{\theta}^2 + D_{122}\dot{r}^2}_{\text{向心力项}} + \underbrace{D_{112}\dot{\theta}\dot{r} + D_{121}\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{科氏力}} + \underbrace{D_1}_{\text{重力项}}$$

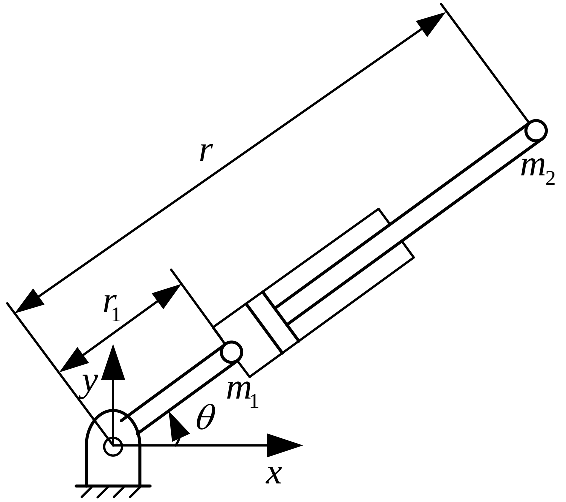
$$f_r = \underbrace{D_{21}\ddot{\theta} + D_{22}\ddot{r}}_{\text{惯性力项}} + \underbrace{D_{211}\dot{\theta}^2 + D_{222}\dot{r}^2}_{\text{向心力项}} + \underbrace{D_{212}\dot{\theta}\dot{r} + D_{221}\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{科氏力}} + \underbrace{D_2}_{\text{重力项}}$$

◆ **惯性力项：加速度有关**

◆ **向心力项：速度的平方有关**

◆ **科氏力项：不同速度乘积有关**

◆ **重力项：与速度、加速度无关**

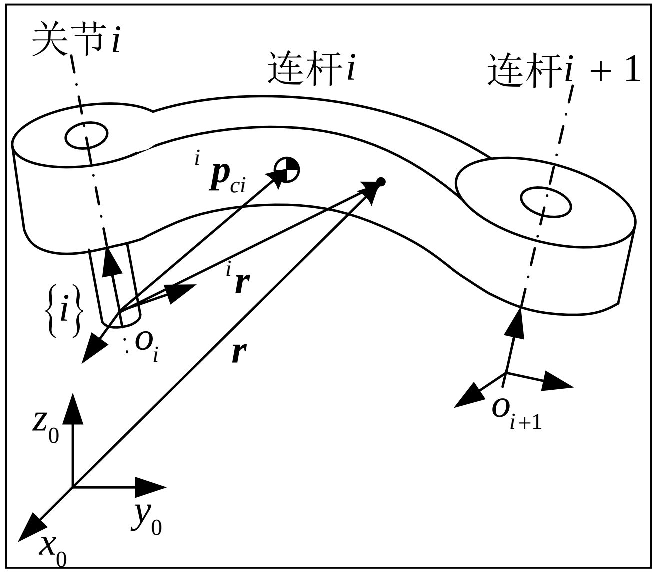


R-P 机械手

- **形式 D_{ii} 为关节i的有效惯量、$D_{ij}\,(i \neq j)$ 为关节j对i的耦合惯量**

拉格朗日法

- **拉格朗日法计算动力学方程5大步骤：**
  - ➢**计算连杆各点速度**
  - ➢**计算系统的动能**
  - ➢**计算系统的势能**
  - ➢**构造拉格朗日函数**
  - ➢**推导动力学方程**



(1) 计算速度

□ **连杆i上一点在{i}和{0}齐次坐标为${}^{i}r$ 和 r，存在：** $\boldsymbol{r} = {}_{i}^{0}\boldsymbol{T}\,{}^{i}\boldsymbol{r}$

□ **该点的速度为：**

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial\left({}_{i}^{0}\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\dot{q}_j \right){}^{i}\boldsymbol{r}$$

□ **速度的平方为：**

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}} = Tr\left(\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\right) = Tr\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial\left({}_{i}^{0}\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}{}^{i}\boldsymbol{r}\,{}^{i}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \frac{\partial\left({}_{i}^{0}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

拉格朗日法

（2） 计算系统动能

- 经推导，操作臂总动能：

$$T_i = \int_{linki} dT_i = \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)}{\partial q_j} \int_{linki} {}^i\boldsymbol{r} \, {}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} dm \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

$$= \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)}{\partial q_j} \bar{\boldsymbol{I}}_i \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

- 如果考虑驱动连杆传动机构的动能： $T_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{I}_{ai} \dot{q}_i^2$

- 操作臂总动能：

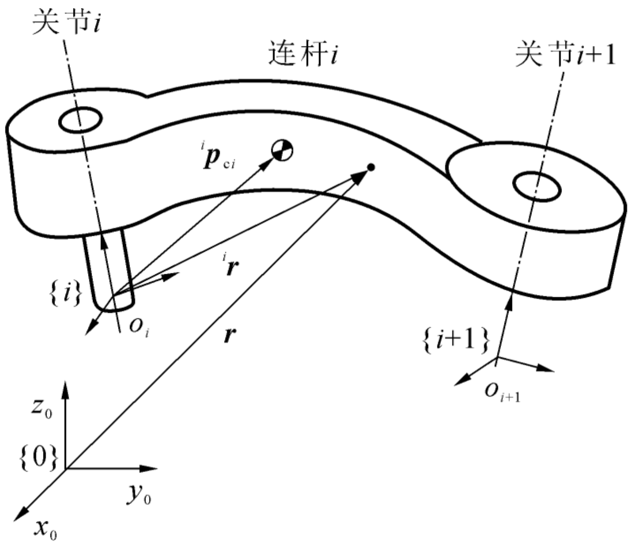
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} Tr \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)}{\partial q_j} \bar{\boldsymbol{I}}_i \frac{\partial \left({}^0_i\boldsymbol{T} \right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \boldsymbol{I}_{ai} \dot{q}_i^2 \right]$$

式中 I_{ai} 是广义等效惯量，移动关节是等效质量/转动关节是等效惯性矩。

拉格朗日法

2. 计算系统势能

- **操作臂总势能：** $U=-\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}\, {}_i^0\boldsymbol{T}\, {}^i\boldsymbol{p}_{ci}$



3. 构造朗格朗日函数L=T-U：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr\left(\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\bar{\boldsymbol{I}}_i\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+I_{ai}\dot{q}_i^2\right]+\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}_i\, {}_i^0\boldsymbol{T}\, {}^i\boldsymbol{p}_{ci}$$

4. 操作臂动力学方程：

- **具体公式为：** $\tau_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$
- **写成矩阵形式和矢量形式：**

$$\boxed{\begin{aligned}&\tau_i=\sum_{k=1}^{n} D_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m+G_i,\\&\boldsymbol{\tau}(t)=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}(t))\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}(t))\end{aligned}}$$

牛顿-欧拉法（Newton-Eular Formulation）

何谓“牛顿-欧拉法”

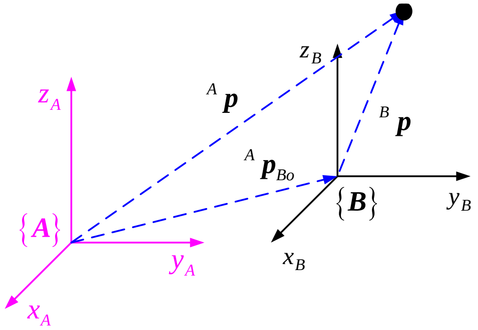
- 拉格朗日方程方法——是把机器人操作臂作为一个整体从能量的角度利用拉格朗日函数推导出运动方程式。不涉及相邻的杆件与杆件之间的作用力、力矩关系。
- 牛顿-欧拉法——是采用关于平动的牛顿运动方程式和关于回转运动的欧拉运动方程式，描述构成机器人操作臂的一个个杆件的运动。这种方法涉及相邻杆件之间互相作用的力和力矩的关系。
- 具体的方法——从基坐标系开始向末端操作器，依次由给定的各关节运动计算各杆件的运动，相反，由末端操作器侧向基坐标系，依次计算为产生关节运动所需要的、作用在各个杆件上的力和力矩。计算过程中需要前一次计算的杆件运动所需的力和力矩。

牛顿-欧拉法

连杆运动的传递：一般情况

- 已知两坐标系{A,B}，任一点的坐标描述满足：

$$^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$$



- 两边对时间求导： $^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{p}} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{p}}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{p}} + {}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$

- 结合空间角速度公式 $^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{R}} = \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$ ，上式表示为：

$$^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$$

- 公式两边求导，得加速度关系：

$$^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} + 2\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$$

特例1：{A}固定不动，刚体与{B}固接 $\quad {}^{B}\boldsymbol{p} = const,\ {}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = \boldsymbol{0}$

$$^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{Bo} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p},$$

$$^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{Bo} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$$

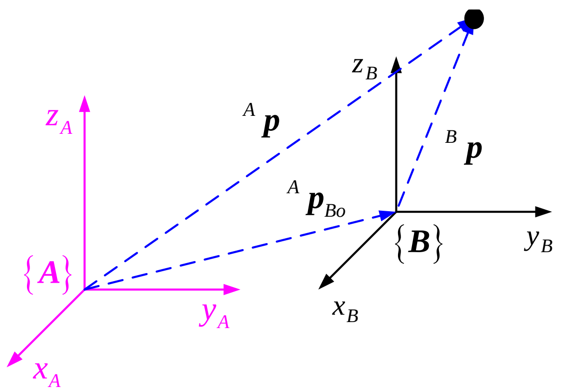
牛顿–欧拉法

特例2：{B}只相对于{A}移动

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = const,\quad {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{B} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B} = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}{}^{A}\upsilon_{p} &= {}^{A}\upsilon_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}\\ {}^{A}\dot{\upsilon}_{p} &= {}^{A}\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\upsilon}_{p} + 2\left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}{}^{A}\upsilon_{p} &= {}^{A}\upsilon_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p},\\ {}^{A}\dot{\upsilon}_{p} &= {}^{A}\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\upsilon}_{p}\end{aligned}$$



特例3：{B}只相对于{A}转动

$${}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} = const,\quad {}^{A}\upsilon_{Bo} = {}^{A}\dot{\upsilon}_{Bo} = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}{}^{A}\upsilon_{p} &= {}^{A}\upsilon_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}\\ {}^{A}\dot{\upsilon}_{p} &= {}^{A}\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\upsilon}_{p} + 2\left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\omega^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}{}^{A}\upsilon_{p} &= {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p},\\ {}^{A}\dot{\upsilon}_{p} &= {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\upsilon}_{p} + 2\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\upsilon_{p} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

牛顿-欧拉法

旋转关节的速度和加速度

- **连杆角速度递推公式：**

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}}$$

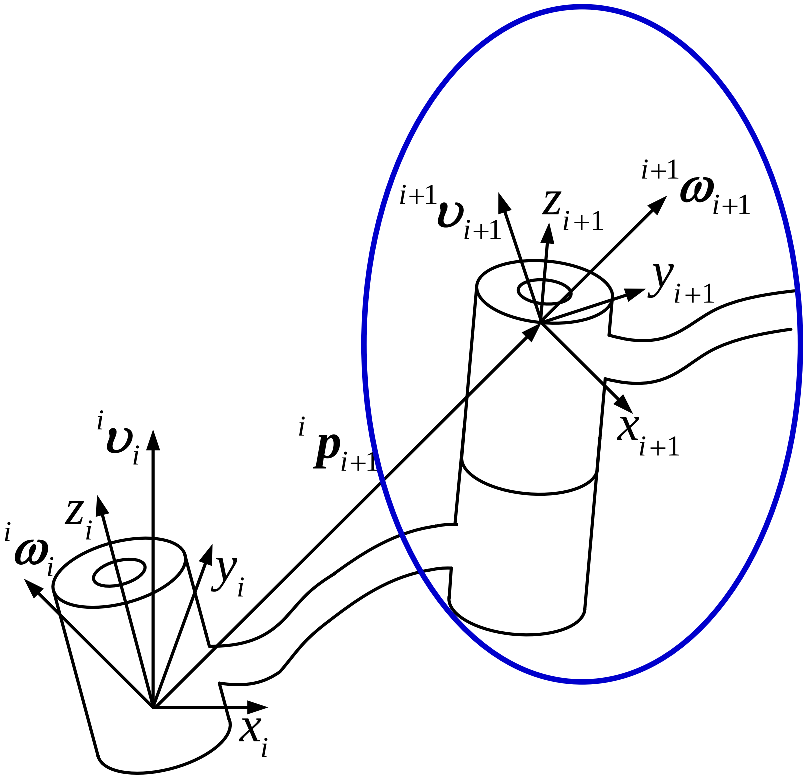
由两部分组成

$\dot{\theta}_{i+1}$ **是关节角速度，**

${}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}$ **是{i+1}的z轴单位矢量**

- **原点线速度递推公式：**

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_i + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)}$$



- **由此可得角加速度和线加速度递推公式：**

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1},$$

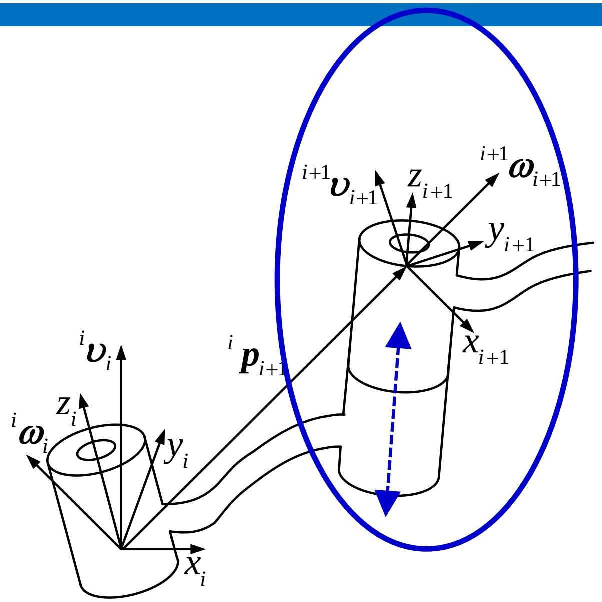
$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_i + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right]$$

牛顿-欧拉法

移动关节的速度和加速度

- **连杆角速度递推公式：**

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}} \Rightarrow \boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}}$$



- **原点线速度递推公式：**

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)} \Rightarrow \boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}}$$

- **由此可得角加速度和线加速度递推公式：**

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}, \\ {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right] \\ &\quad + 2\,{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} \end{aligned}}$$

注意 ${}^{i+1}_{i}R$ 为常量

牛顿–欧拉法

质心的线速度和加速度

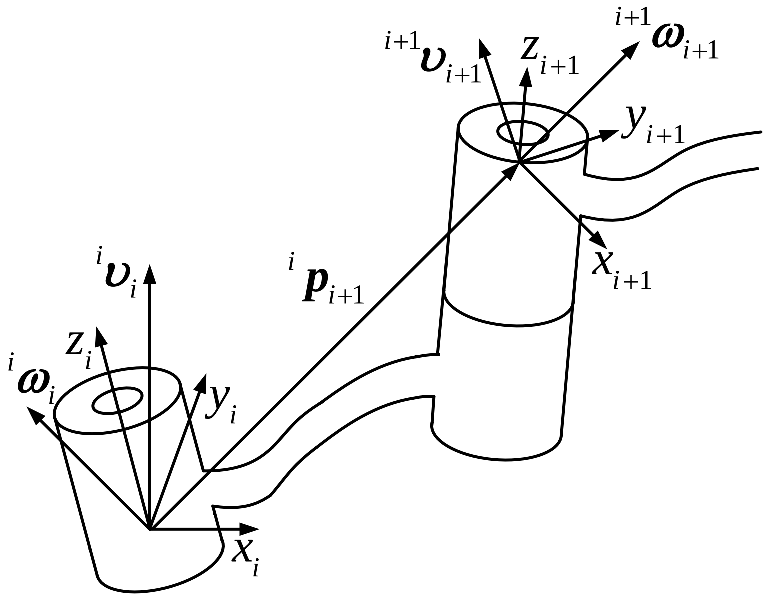
- 各连杆质心的线速度/加速度：

$$\begin{aligned} {}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{ci} &= {}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_i + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci}, \\ {}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{ci} &= {}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_i + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci} \right) \end{aligned}$$

规定： 质心坐标系$\{C_i\}$与连杆$\{i\}$固接

坐标原点位于连杆 i 的质心，

坐标方向与$\{ i \}$同向



- 注意：这样递推得到的连杆速度/角速度、加速度/角加速度都是相对连杆本身坐标系表示的。相对基坐标系描述，则：

$$\boldsymbol{\omega}_i = {}_{i}^{0}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_i;\ \boldsymbol{\upsilon}_i = {}_{i}^{0}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_i;\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

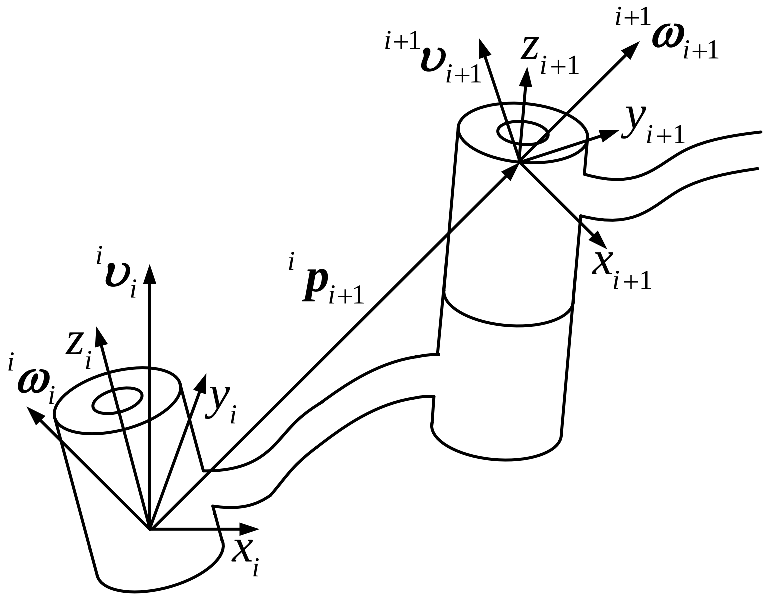
3、牛顿欧拉法

质心的线速度和加速度

- 各连杆质心的线速度/加速度：

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{i}\upsilon_{ci} &= {}^{i}\upsilon_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}p_{ci}, \\ {}^{i}\dot{\upsilon}_{ci} &= {}^{i}\dot{\upsilon}_{i} + {}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}p_{ci} + {}^{i}\omega_{i} \times \left({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}p_{ci} \right) \end{aligned}}$$

规定： 质心坐标系$\{C_i\}$与连杆{i}固接坐标原点位于连杆 i 的质心，坐标方向与{ i }同向



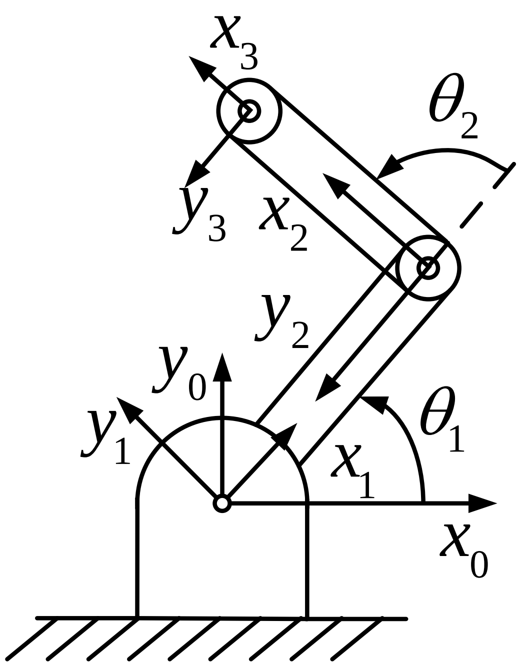
- 注意：这样递推得到的连杆速度/角速度、加速度/角加速度都是相对连杆本身坐标系表示的。相对基坐标系描述，则：

$$\omega_i = {}^{0}_{i}R\,{}^{i}\omega_i;\ \ \upsilon_i = {}^{0}_{i}R\,{}^{i}\upsilon_i;\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

牛顿-欧拉法

□ 用递推法计算手臂末端（质心）的线速度和角速度：

计算：{3}固结在手臂末端，连杆变换：



$$
{}^0_1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^1_2\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^2_3\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

因为基坐标系{0}固定不动：

$$\boldsymbol{\omega}_0=\mathbf{0};\ \boldsymbol{\upsilon}_0=\mathbf{0}$$

所以线速度、角速度递推为：

$$
{}^1\boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},\ {}^1\boldsymbol{\upsilon}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}^2\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{bmatrix},\ {}^2\boldsymbol{\upsilon}_2=\begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} l_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}^3\boldsymbol{\omega}_3={}^2\boldsymbol{\omega}_2,\ {}^3\boldsymbol{\upsilon}_3=\ldots
$$

所以：

$$
\boldsymbol{\omega}_3={}^0_3\boldsymbol{R}\,{}^3\boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\upsilon}_3={}^0_3\boldsymbol{R}\,{}^3\boldsymbol{\upsilon}_3=\begin{bmatrix} -l_1 s_1\dot{\theta}_1-l_2 s_{12}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right) \\ l_1 c_1\dot{\theta}_1+l_2 c_{12}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

牛顿–欧拉法

- **连杆处于平衡状态时，所受合力/力矩为零，平衡方程({i}中)：**

$$^{i}f_i - {}^{i}f_{i+1} + m_i\,{}^{i}g = 0$$

$$^{i}\tau_i - \underline{{}^{i}\tau_{i+1} - {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1}} + {}^{i}p_{ci} \times m_i\,{}^{i}g = 0$$

绕i轴线

连杆i+1对连杆i的支反力力矩

- **不考虑连杆重力时，质心受到的合力与合力矩分别为：**

$$^{i}f_{ci} = {}^{i}f_i - {}^{i}f_{i+1}$$

$$^{i}\tau_{ci} = {}^{i}\tau_i - {}^{i}\tau_{i+1} - {}^{i}p_{ci} \times {}^{i}f_{ci} - {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1}$$

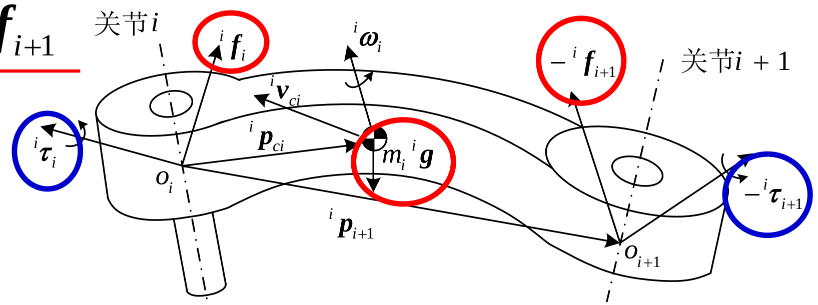
绕质心c

将上式右端力/力矩在自身坐标系表示，递推形式为：

$$^{i}f_i = {}^{i}f_{ci} + {}^{i}_{i+1}R\,\underline{{}^{i+1}f_{i+1}}$$

$$^{i}\tau_i = {}^{i}\tau_{ci} + {}^{i}_{i+1}R\,\underline{{}^{i+1}\tau_{i+1}} + {}^{i}p_{ci} \times {}^{i}f_{ci} + {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,\underline{{}^{i+1}f_{i+1}}$$

各连杆力/力矩在其坐标系中的表示



牛顿–欧拉法

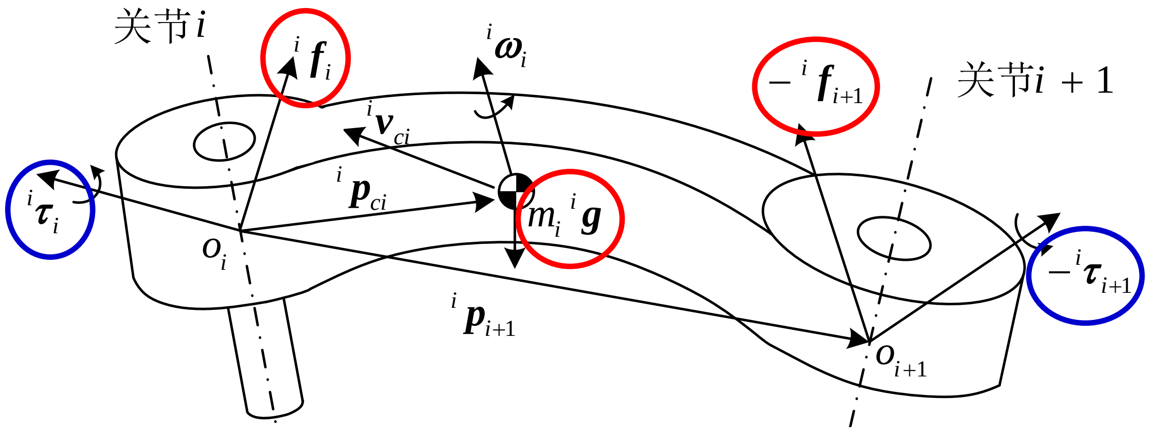
各个连杆所承受的力和力矩中，某些分量由操作臂本身的连杆结构所平衡，一部分被各关节的驱动力/力矩所平衡。

- **对于转动关节，关节驱动力矩为平衡力矩的z轴分量：**

$$\tau_i = {}^{i}\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{T}}\ {}^{i}\boldsymbol{z}_i$$

- **对于移动关节，关节驱动力为平衡力的z轴分量：**

$$\tau_i = {}^{i}\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\ {}^{i}\boldsymbol{z}_i$$



牛顿-欧拉法

□ 根据关节位移、速度和加速度：**计算所需的关节力矩或力**。

1）向外递推计算各**连杆的速度和加速度**，由牛顿-欧拉公式算出各连杆的惯性力和力矩；2）向内递推计算各连杆相互作用的**力和力矩，以及关节驱动力或力矩**。

1）向外递推：

$$(i:0\rightarrow n-1)$$

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} + {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

旋转关节i+1

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right] \\
&\quad + 2\,{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1}\times\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}
\end{aligned}
$$

移动关节i+1

牛顿–欧拉法

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{ci+1} &= {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} + {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{r}_{ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{r}_{ci+1} \right), \\
{}^{i+1}\boldsymbol{f}_{ci+1} &= m_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left(m_{i+1}\, {}^{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} \right), \\
{}^{i+1}\boldsymbol{\tau}_{ci+1} &= {}^{Ci+1}\boldsymbol{I}_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left({}^{Ci+1}\boldsymbol{I}_{i+1}\, {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \right)
\end{aligned}
$$

连杆质心

$$(i : n \to 1)$$

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\boldsymbol{f}_{i} &= {}_{i+1}^{\;\;i}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{f}_{ci}, \\
{}^{i}\boldsymbol{\tau}_{i} &= {}_{i+1}^{\;\;i}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{\tau}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\tau}_{c_i} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{c_i} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_{c_i} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}_{i+1}^{\;\;i}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1},
\end{aligned}
$$

$$
\tau_i = \begin{cases} {}^{i}\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{T}i}\boldsymbol{z}_i & (\text{旋转关节}) \\ {}^{i}\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}i}\boldsymbol{z}_i & (\text{移动关节}) \end{cases}
$$

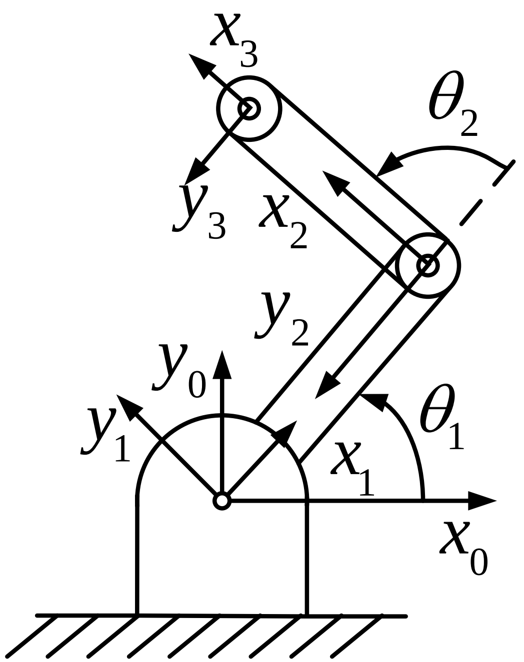
牛顿-欧拉法

- 操作臂末端所受力/力矩作为内推的初值，**自由状态**：${}^{n+1}\boldsymbol{f}_{n+1} = {}^{n+1}\boldsymbol{\tau}_{n+1} = 0$
- 只要知道各连杆质量、惯性张量、质心 ${}^{i}\boldsymbol{p}_{ci}$ 和旋转矩阵 ${}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}$，即可直接计算给定运动所需的关节驱动力和力矩；
- 为阐明动力学结构：写成封闭解，即将**关节力矩和力写成关节位移、速度和加速度** $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ **的显函数形式**。

牛顿-欧拉法

□ 如图2R机械手，质量m_1、m_2集中在末端连杆，求动力学方程

${}^{1}\boldsymbol{r}_{c1}=l_1\boldsymbol{x}_1$	${}^{2}\boldsymbol{r}_{c2}=l_2\boldsymbol{x}_2$	两连杆质心矢径
${}^{C_1}\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{0}$	${}^{C_2}\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{0}$	相对质心惯性张量为0
$\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\tau}_3=\boldsymbol{0}$	末端执行器自由
$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{0}$	$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0=\boldsymbol{0}$	基座固定
${}^{0}\dot{\boldsymbol{v}}_0=g\boldsymbol{y}_0$		考虑重力作用



求解：连杆间变换矩阵

$$
{}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

牛顿–欧拉法

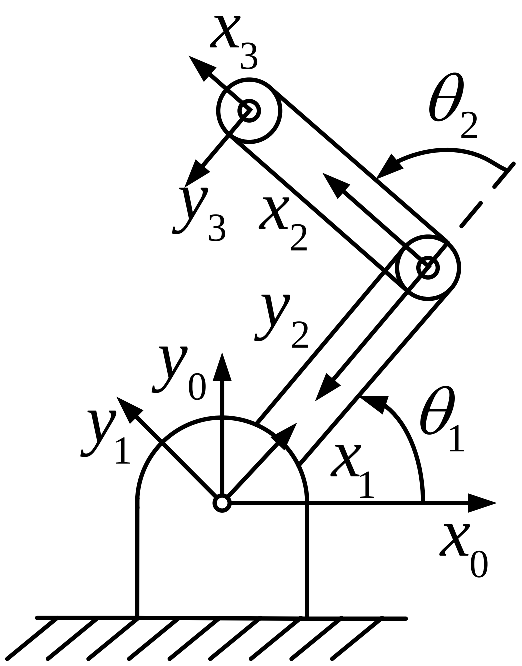
□ 外推连杆速度和加速度（连杆1）：

$$
{}^1\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\theta}_1\,{}^1\mathbf{z}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix},\qquad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1=\ddot{\theta}_1\,{}^1\mathbf{z}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^1\dot{\boldsymbol{v}}_1=\begin{bmatrix}c_1 & s_1 & 0\\-s_1 & c_1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\g\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^1\dot{\boldsymbol{v}}_{c1}=\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot{\theta}_1^2\\gc_1+l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^1\boldsymbol{f}_{c1}=m_1\,{}^1\dot{\mathbf{v}}_{c1}=m_1\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot{\theta}_1^2\\gc_1+l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix},\qquad {}^1\boldsymbol{\tau}_{c1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$



牛顿–欧拉法

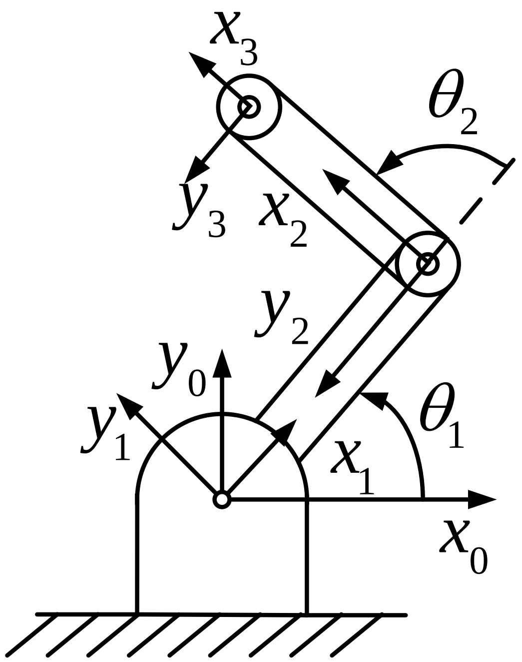
□ 外推连杆速度和加速度（连杆2）：

$$ {}^{2}\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot\theta_1+\dot\theta_2\end{bmatrix},\qquad {}^{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot\theta_1+\ddot\theta_2\end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\dot{\boldsymbol{v}}_2=\begin{bmatrix}c_2 & s_2 & 0\\-s_2 & c_2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot\theta_1^2\\gc_1+l_1\ddot\theta_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2\\gc_{12}+l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2\\0\end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\dot{\boldsymbol{v}}_{c2}=\begin{bmatrix}0\\l_2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2\\gc_{12}-l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2\\0\end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\boldsymbol{f}_{c2}=m_2\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2-l_2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2\\gc_{12}-l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2+l_2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)\\0\end{bmatrix},\qquad {}^{2}\boldsymbol{\tau}_{c2}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} $$



牛顿-欧拉法

- 内推连杆关节力和力矩（连杆2）：

$$
{}^{2}\boldsymbol{f}_2 = {}^{2}\boldsymbol{f}_{c2},\ {}^{2}\boldsymbol{\tau}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2\, g c_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

- 内推连杆关节力和力矩（连杆1）：

$$
{}^{1}\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 g s_{12} \\ m_2 l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

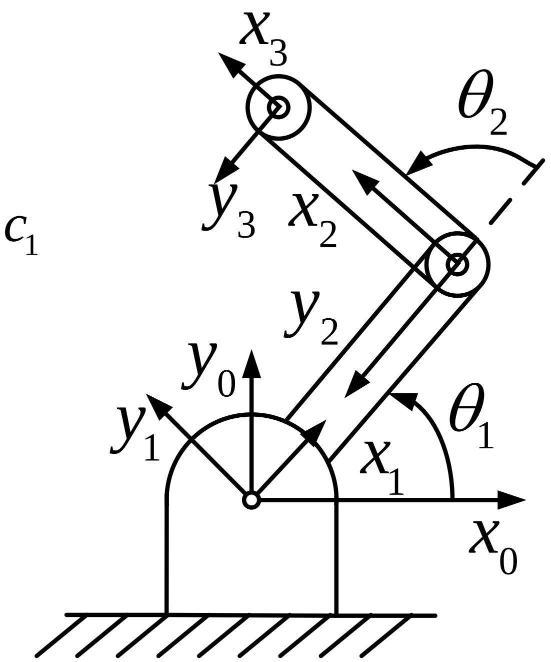
$$
{}^{1}\boldsymbol{\tau}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2\, g c_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1\, g c_1 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 c_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) - m_2 l_1 l_2 s_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 l_1\, g c_1 \end{bmatrix}
$$

牛顿–欧拉法

□ 计算z轴分量，得到两关节力矩：

$$\begin{cases}\tau_1 = m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 c_2\left(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\left(m_1+m_2\right)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\ \qquad -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \\ \tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1+m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}\end{cases}$$



□ 上式为关节驱动力矩作为关节位移、速度和加速度的显函数表达式，即为平面2R机械手动力学方程的封闭形式。

牛顿–欧拉法（Newton-Eular Formulation）

- 使用牛顿–欧拉法推导出的运动方程式计算逆动力学可以提高计算效率。

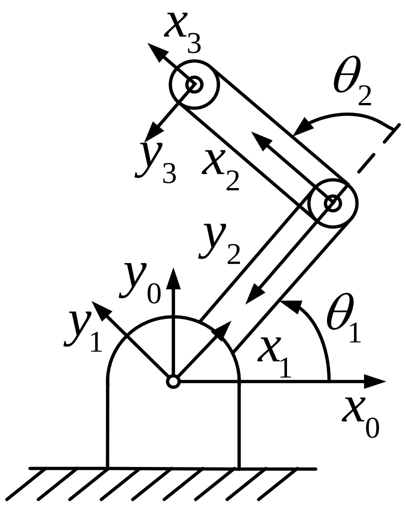
关于牛顿-欧拉法方法的解释

- 矩阵变换与矢量分析相结合方法——矩阵变换获得位姿矢量、矢量运算获得杆件运动（位置矢量、速度矢量、加速度矢量），推导获得各杆件的运动。
- 由基坐标系向末端操作器侧依次计算各杆件运动
- 由末端操作器向基坐标系依次计算各杆件的力和力矩

关节空间的动力学方程

□ 2R平面机械手动力学方程：

$$\begin{cases}\tau_1 = m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 c_2\left(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\left(m_1+m_2\right)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\ \qquad -m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \\ \tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2\ddot{\theta}_1+m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}\end{cases}$$



$$\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} m_1 l_1^2+m_2\left(l_1^2+l_2^2+2l_1 l_2 c_2\right) & m_2\left(l_2^2+l_1 l_2 c_2\right) \\ m_2\left(l_2^2+l_1 l_2 c_2\right) & m_2 l_2^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix}-m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \\ m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}\end{bmatrix}$$

关节空间的动力学方程

□ 2R平面机械手动力学方程可表示为：

$$\boxed{\tau = D(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) + G(q)}$$

◆ 状态变量为（q，$\dot{q}$），上式是在关节空间描述的动力学方程

◆ 其中 $D(q)$为n×n质量矩阵（对称、正定）、$h(q,\dot{q})$ 是n×1离心力和科氏力矢量，$G(q)$是n×1的重力矢量；

◆ 科氏力 $\left(-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right)$ 与两个关节速度的乘积有关；离心力 $\left(-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2\right)$与关节速度的平方有关；

$$h(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

◆ 故与速度有关的项可进一步表示为： $h(q, \dot{q}) = B(q)[\dot{q}\,\dot{q}] + C(q)[\dot{q}^2]$

$$B(q) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C(q) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

操作空间的动力学方程

- 与关节空间动力学方程相同，操作力F与末端加速度 $\ddot{x}$ 存在关系：

$$F = V(q)\ddot{x} + u(q,\dot{q}) + p(q)$$

$V(q),u(q,\dot{q}),p(q)$分别称为操作空间的惯性矩阵、科氏力和离心力向量、重力向量；x表示末端操作臂位姿；F是广义操作力矢量。

- 关节力与操作力之间关系：$\boxed{\tau = J^{\mathrm{T}}(q)F}$

- 操作空间速度与关节空间速度之间关系：$\boxed{\dot{x} = J(q)\dot{q}}$

- 进而可推导操作空间动力学方程与关节空间动力学方程关系：

$$V(q) = J^{-\mathrm{T}}(q)D(q)J^{-1}(q),$$
$$u(q,\dot{q}) = J^{-\mathrm{T}}(q)h(q,\dot{q}) - V(q)\dot{J}(q)\dot{q},$$
$$p(q) = J^{-\mathrm{T}}(q)G(q)$$

本章内容

- □ 坐标系定义
- □ 机器人动力学研究的意义与必要性
- □ 拉格朗日法，牛顿-欧拉法建立动力学方程
- □ 机械臂动力学方程的结构和性质
- □ 动力学性能指标
- □ 驱动器动力学模型

关节空间动力学方程的性质

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$$

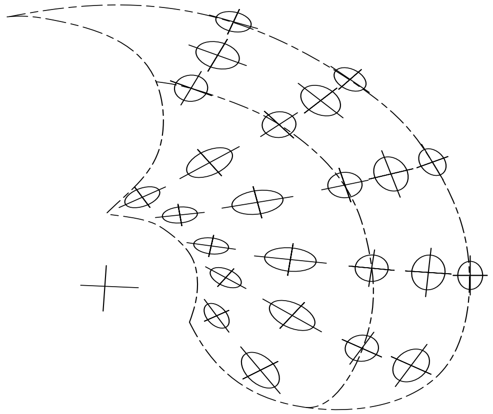
参数	D	h	G
特性	对称正定矩阵，有界 $m_1 \le \lVert D(q) \rVert \le m_2$	速度的二次项 $s(q,\dot{q}) \equiv \dot{D}(q) - 2h_m(q,\dot{q})$ 是斜对称矩阵	有上界

本章内容

- □ 坐标系定义
- □ 机器人动力学研究的意义与必要性
- □ 拉格朗日法，牛顿-欧拉法建立动力学方程
- □ 机械臂动力学方程的结构和性质
- □ 动力学性能指标
- □ 驱动器动力学模型

动力学性能指标

- 机器人在奇异点处会丧失一个或多个自由度，在奇异点附近，其动力学性能也会变差；
- 评价动力学性能：对于机器人结构设计、工作空间的选择、轨迹规划和控制方案的拟定都具有重要作用；
- Asada提出广义惯性椭球GIE：实质是利用笛卡尔惯性矩阵 $V(q)=J^{-T}(q)D(q)J^{-1}(q)$ 的**特征值度量笛卡尔各方向的加速特性**；
- 对于二次型方程：$x^{T}V(q)x=1$，表示n维空间的一个椭球，椭球主轴方向是V(q)的特征矢量方向，主轴长度是 特征值的平方根。
- 在工作空间任一点，由公式可构造一个椭球，该点动力学特性可由该点对应的椭球评估，**椭球越接近球，动力学特性越好**。



2R机械手广义GIE

动力学性能指标

- Yoshikawa提出动态可操作性椭球DME：基于m×n阶矩阵E(q)(表示机器人关节驱动力矩与操作加速度之间的关系)奇异值分解：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \\ & \sigma_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \sigma_m & \end{bmatrix}$$

- 构造动态性能指标：

$$\begin{cases} w_1 = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \\ w_2 = \sigma_1/\sigma_m \\ w_3 = \sigma_m \\ w_4 = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m)^{\frac{1}{m}} = w_1^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

- 仿照运动学灵巧度，将 w_1定义为动态可操作性度量指标：

$$w_1 = \sqrt{\det \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})}$$

本章内容

- 坐标系定义
- 机器人动力学研究的意义与必要性
- 拉格朗日法，牛顿-欧拉法建立动力学方程
- 机械臂动力学方程的结构和性质
- 动力学性能指标
- 驱动器动力学模型

执行器动力学方程

- **已得到关节空间和操作空间中刚性机械臂的动力学方程。但是机械臂需要执行器来驱动它。这些执行器通常是电机或液压马达。因此机器人系统的动力学方程需要包含执行器动力学。**

- **假设电机是电枢控制的。电枢控制电机由n个耦合方程给出：**

$$J_M \ddot{q}_M + B\dot{q}_M + F_M + R\tau = K_M v$$

其中 $q_M = vec\{q_{Mi}\} \in R^n$, q_{Mi}是第i个电机位置角

控制输入v是电机电压矢量

$J_M = diag\{J_{Mi}\}$电机转动惯量

$B = diag\{B_{Mi} + K_{bi}K_{Mi} / R_{ai}\}$; B_{Mi}电机阻尼常数;K_{bi}: 反电动势常数;K_{Mi}: 扭矩常数;R_{ai}: 电枢电阻

$R = diag\{r_i\}$; r_i: 从第i个电机到第i个臂连杆的联轴器的齿轮比;$q_i = r_i q_{Mi}$

$F_M = vec\{F_{Mi}\}$;

F_{Mi}是第i rotor的摩擦

如果第i个关节是旋转的，则ri是小于1的无量纲常数；

如果第i个关节是平移的，则ri的单位为m/rad。

驱动器动力学方程

$\mathrm{q}_i = r_i q_{Mi}$ **带入** $J_M \ddot{q}_M + B\dot{q}_M + F_M + R\tau = K_M v$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + V_m(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\mathrm{q}} + F(\dot{\mathrm{q}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$$

$$\Rightarrow \left(J_M + R^2 M\right)\ddot{\boldsymbol{q}} + \left(B + R^2 V_m\right)\dot{\mathrm{q}} + \left(RF_M + R^2 F\right) + \boldsymbol{R}^2 G = RK_M v$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M}'(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + V'(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\mathrm{q}} + F'(\dot{\mathrm{q}}) + \boldsymbol{G}'(\boldsymbol{q}) = K'v$$

机械臂+执行器的动力学模型与机械臂动力学模型具有相同的形式。具有相同的性质。

驱动器动力学方程

独立关节动力学方程：

$$\left(J_{Mi}+r_i^2 m_{ii}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}_i+B_i\dot{q}_i+r_iF_{Mi}=\frac{r_iK_{Mi}}{R_{ai}}v_i-r_i^2d_i$$

其中di是干扰：

$$d_i=\sum_{j\neq i}m_{ij}\ddot{q}_i+\sum_{j,k}V_{jki}\dot{q}_j\dot{q}_k+F_i+G_i$$

在许多商业机器人手臂中，传动比ri非常小，执行器/连杆耦合中提供了大 扭矩。此时，手臂动力学近似地由n个具有常系数的解耦二阶方程组给出。关节耦合和重力的动力学影响仅表现为 $r_i^2d_i$ 。即：机器人控制设计实际上是简单地控制执行器动力学的问题。

但是高性能机械臂使得科里奥利项和向心项变大，因此di不小。此外，具有直接驱动臂的机械臂具有接近统一的齿轮比，此时必须考虑非线性和耦合问题。

驱动器动力学方程

当电机电枢电感不可忽略时，应使用三阶微分方程描述：

$$TK'_M\dot{I} + K'_M I + B'\dot{q}_M = K_M v$$
$$J_M\ddot{q}_M + B_M\dot{q}_M + F_M + R\tau = K'_m I$$

$$T = diag\{L_i / R_{ai}\}$$
$$K'_m = diag\{K_{Mi}\}$$
$$B' = diag\{K_{bi}K_{Mi} / R_{ai}\}$$
$$B_M = diag\{B_{Mi}\}$$

其中 $I \in R^n$ **是电枢电流。T是电机电气时间常数的矩阵，相比电机机械时间常数可以忽略。**

$$D\frac{d^3}{dt^3}q + f(q,\dot{q},\ddot{q}) = RK_M v$$

驱动器动力学方程

以线性系统来描述机械臂的动力学特性，通常以关节位置和末端位置为状态变量；如果是非线性系统，则可以通过反馈线性化来进行处理。