

# 机器人位置/轨迹追踪控制

机器人控制技术

2023-下学期

机器人控制的基本问题之一是：使机械臂遵循预先计划的期望轨迹。



机器人  
激光切  
割加工

机器人运动过程中存在摩擦力、重力等扰动项时，使其轨迹偏离预定轨迹，必须实施**轨迹控制**以提高机器人工作的质量。

# 机器人轨迹控制

## 策略一：开环控制

不实用

利用操作臂动力学方程计算该运动轨迹所需的力矩（或力）。由于设定值 $\dot{q}_d$ 、 $\ddot{q}_d$ 和 $q_d$ 已经给定，可计算出：

$$\tau = D(q_d)\ddot{q}_d + H(q_d, \dot{q}_d) + G(q_d)$$

理想条件：模型必须十分完善和绝对准确，没有噪声和干扰。

构造高性能控制系统的唯一方法是使用反馈控制，即：

## 策略二：闭环系统

由关节传感器组成闭环系统

系统的伺服误差包括两部分：位置误差 $e = q_d - q$ 和速度误差 $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$ 。然后，控制系统计算驱动器输出的力矩大小，它是伺服误差的函数。驱动器的力矩有使伺服误差减小的趋势。

设计控制系统的首要任务是使系统稳定，第二个任务是使系统的闭环性能令人满意。

- **轨迹生成**
- **机械臂的单关节传递函数及PD控制**
- **二阶线性系统控制器的分解**
- **机械臂的单关节控制规律分解**
- **机械臂的非线性控制**
- **机械臂的多关节控制**
- **基于直角坐标的控制**

**问题1：如何将给定的规定路径从笛卡尔空间转换为关节空间？**

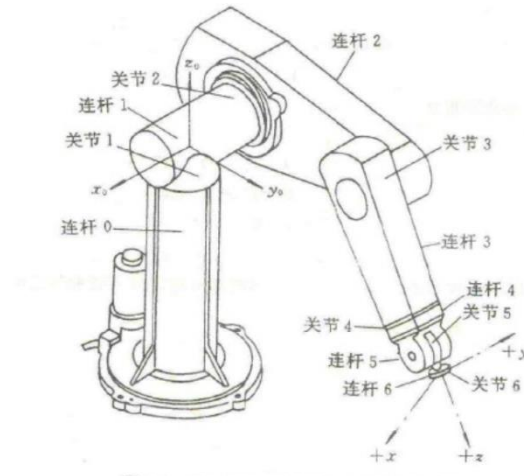
逆运动学，不唯一

**问题2：给定末端执行器应通过的点表，如何重建连续的轨迹？**

多项式插值

- 轨迹生成
- 机械臂的单关节传递函数及PD控制
- 二阶线性系统控制器的分解
- 机械臂的单关节控制规律分解
- 机械臂的非线性控制
- 机械臂的多关节控制
- 基于直角坐标的控制

# 1、单关节的建模和控制



操作臂实际上是由一系列刚体通过**关节**连接而成的运动链

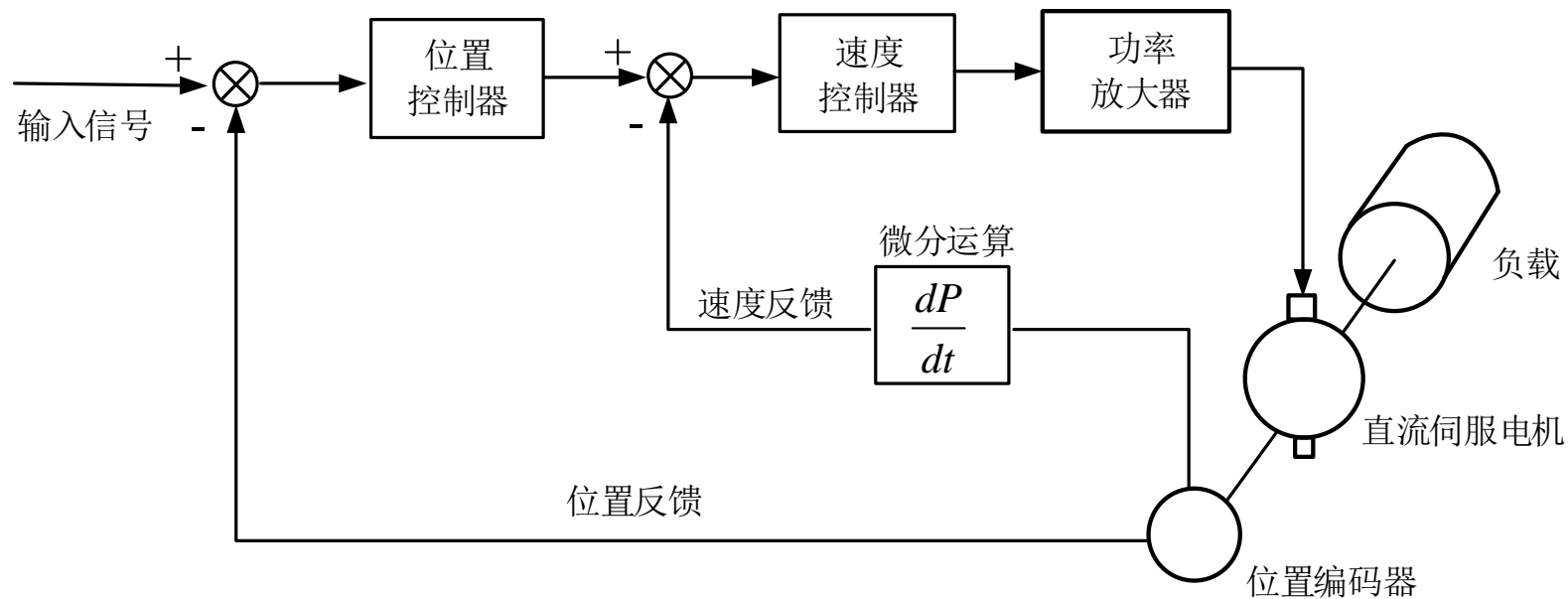


每个关节由一个单独的**驱动器（电机）**施加力和力矩



# 1、单关节的建模和控制

□ 最常见的驱动方式是每个关节用一个直流（DC）永磁力矩电机驱动。

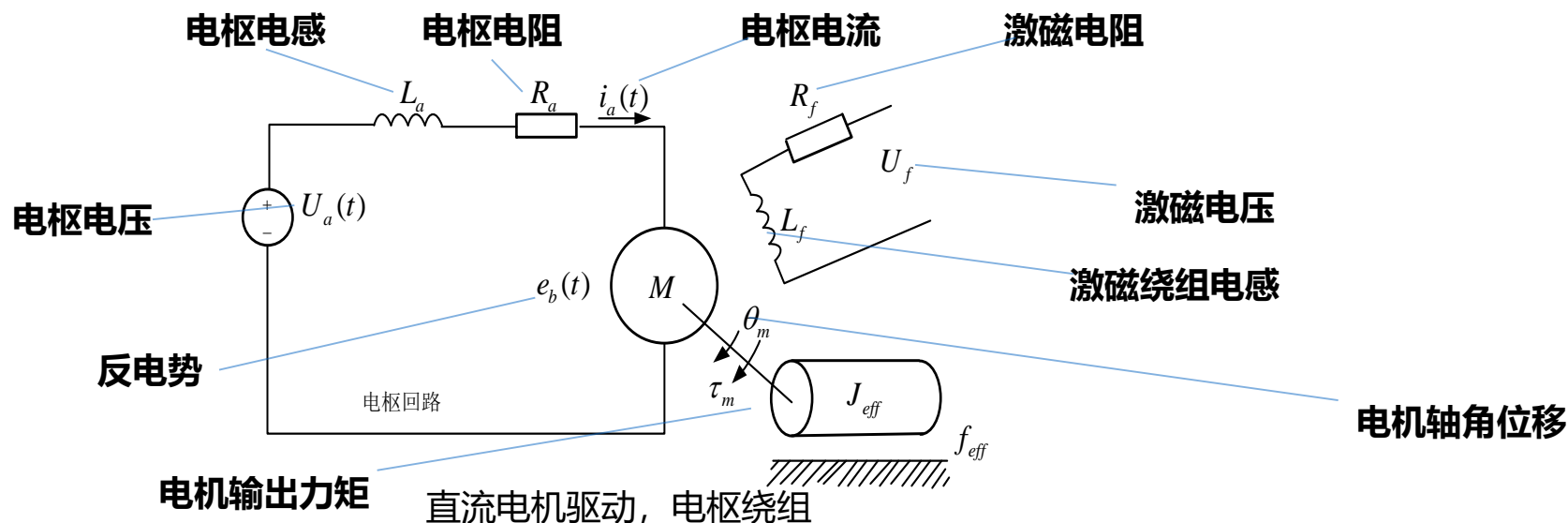


直流电机驱动原理图

**特点：**电枢激励的，可连续旋转。力矩—功率比高，性能曲线平滑，可低速运转，力矩—速度特性是线性的，时间常数小，重量轻，电动机电感小。

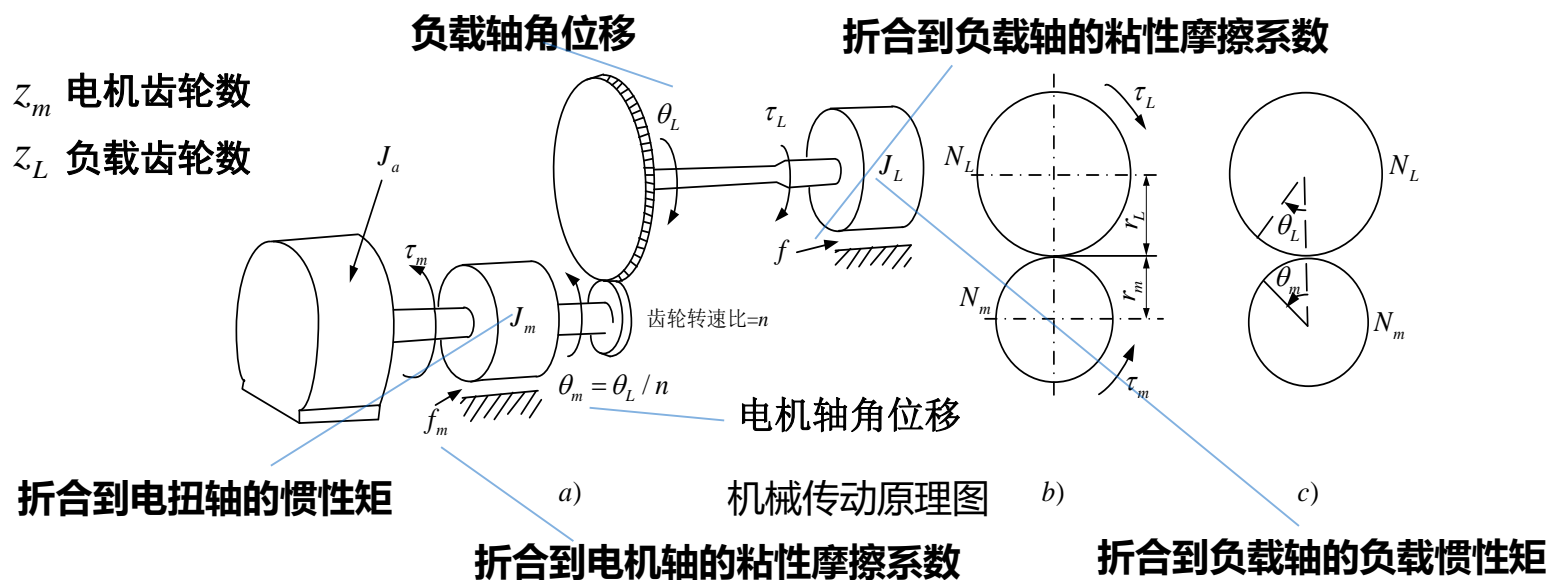


# 1、单关节的建模和控制



- 电压平衡方程:  $U_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$
- 电机轴上产生的力矩随电枢电流线性变化  $\tau(t) = k_a i_a(t)$
- 电机的反电动势与电机的角速度成正比  $e_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t)$

# 1、单关节的建模和控制



□ 力矩平衡方程:  $\tau(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m + f_{eff} \dot{\theta}_m$

□ 从电机轴到负载轴的传动比:  $n = z_m / z_L$

□ 折合到电机轴上的总的等效惯性矩  $J_{eff}$  和等效粘性摩擦系数  $f_{eff}$  为:  $J_{eff} = J_m + n^2 J_L$ ,  $f_{eff} = f_m + n^2 f_L$

# 1、单关节的建模和控制

例：如果操作臂负载惯性矩  $J_L$  在  $2 \sim 8 \text{kg} \cdot \text{m}^2$  之间变化，电机轴惯性矩  $J_m = 0.01 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,

减速比  $n = \frac{1}{40}$ , 求等效惯性矩的最大值和最小值。 求等效惯性矩的最大值和最小值。

解： 等效惯性矩的最小值为

$$J_m + n^2 J_{L\min} = \left( 0.01 + \frac{1}{40^2} \times 2 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.01125 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

最大值为

$$J_m + n^2 J_{L\max} = \left( 0.01 + \frac{1}{40^2} \times 8 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.015 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

相对于负载惯性矩的变形率，减速器使折算到电机轴的等效惯性矩变化率减小了。

# 1、单关节的建模和控制

□ 对平衡方程公式进行拉普拉斯变换得：

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - U_b(s)}{R_a + sL_a}$$

$$T(s) = s^2 J_{eff} \Theta_m(s) + s f_{eff} \Theta_m(s)$$

$$T(s) = k_a I_a(s), \quad U_b(s) = s k_b \Theta_m(s)$$

□ 将上面四式联立组合，得到从电枢电压到电机辐角位移的传递函数：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s[s^2 J_{eff} L_a + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s + R_a J_{eff} + k_a k_b]}$$

□ 由于电机的电气时间常数远小于其机械时间常数，可以忽略电枢的电感。  
简化得到：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s(s R_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)} = \frac{k}{s(T_m s + 1)}$$

其中，电机增益常数和时间常数分别为：

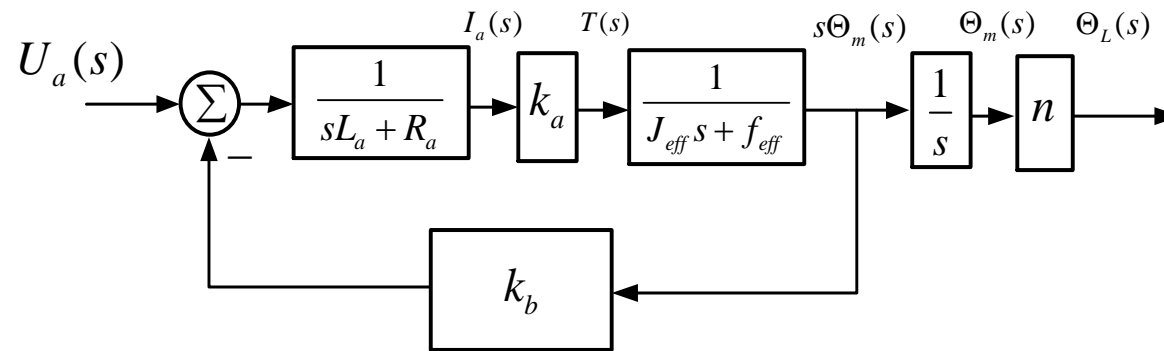
$$k = \frac{k_a}{R_a f_{eff} + k_a k_b}, \quad T_m = \frac{R_a J_{eff}}{R_a f_{eff} + k_a k_b}$$

# 1、单关节的传递函数

□ 由于控制系统的输出是关节角位移  $\theta_L(s)$ ，其与电枢电压  $U_a(s)$  之间的传递关系为：

$$\frac{\theta_L(s)}{U_a(s)} = \frac{nk_a}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)}$$

该式表示所加电压与关节角位移之间的传递函数



单关节开环传递函数

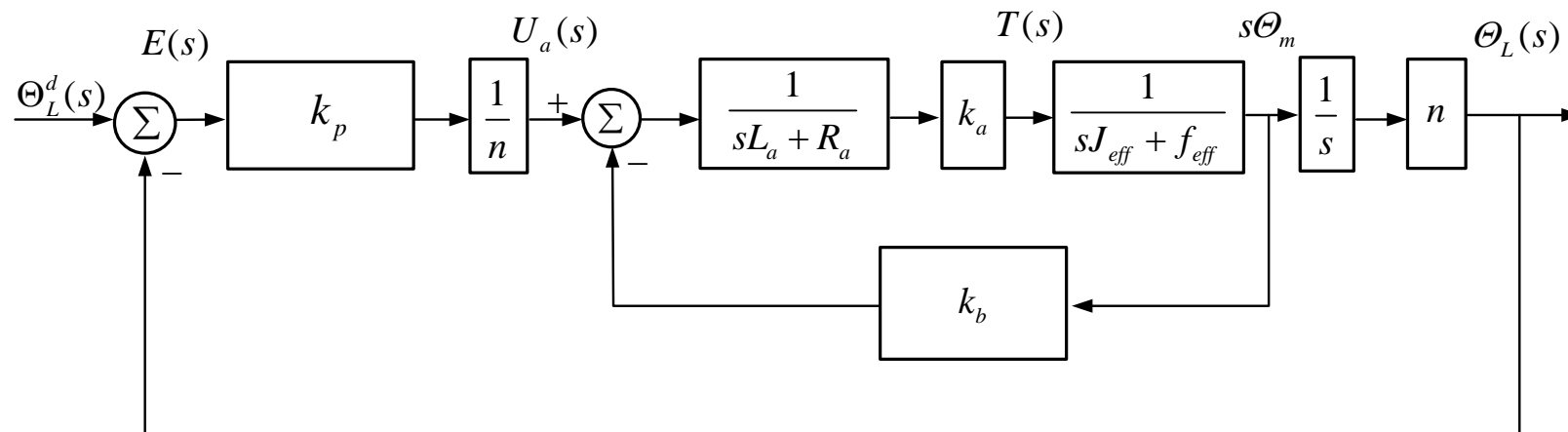
# 1、单关节的位置控制器

**作用：**利用电机组成的伺服系统使关节的实际角位移跟踪预期的角位移，把伺服误差作为电机的输入信号，产生适当的电压

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t))}{n}$$

$k_p$  是位置反馈增益,  $e(t)$  是系统误差,  $n$  是传动比。

**单关节反馈控制如下：**



# 1、单关节的位置控制器

□ 对 $U_a(t)$  表达式进行拉普拉斯变换得:

$$U_a(s) = \frac{k_p (\theta_L^d(s) - \theta_L(s))}{n} = \frac{k_p E(s)}{n}$$

□ 误差信号与实际位移之间的开环传递函数:

$$G(s) = \frac{\theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a k_p}{s(sR_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)}$$

□ 由此可得系统的闭环传递函数:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_L(s)}{\theta_L^d(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) + k_a k_p} \\ &= \frac{\frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}}{s^2 + \frac{s(R_a f_{eff} + k_a k_b)}{R_a J_{eff}} + \frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}} \end{aligned}$$

单关节的比例控制闭环系统是个二阶系统。当系统参数均为正时，总是稳定的。



# 1、单关节的位置控制器



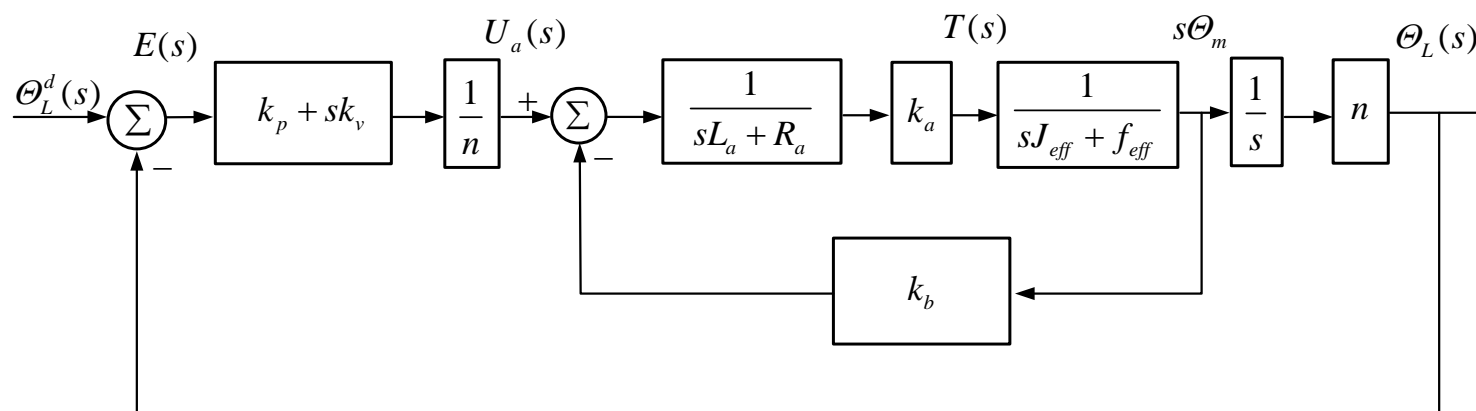
加大位置反馈增益 ( $k_p$ )  
引入速度反馈增益 ( $k_v$ )

为了改善系统的动态性能,  
减少静态误差

□ 关节电机上所加的电压与位置误差和速度误差成正比:

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t) + k_v \dot{e}(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t)) + k_v (\dot{\theta}_L^d(t) - \dot{\theta}_L(t))}{n}$$

□ 对应的闭环系统框图如下:



# 1、单关节的位置控制器

□ 此时，误差信号与实际位移之间的开环传递函数为：

$$G_{PD}(s) = \frac{\Theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a(k_p + sk_v)}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)} = \frac{sk_ak_v + k_ak_p}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)}$$

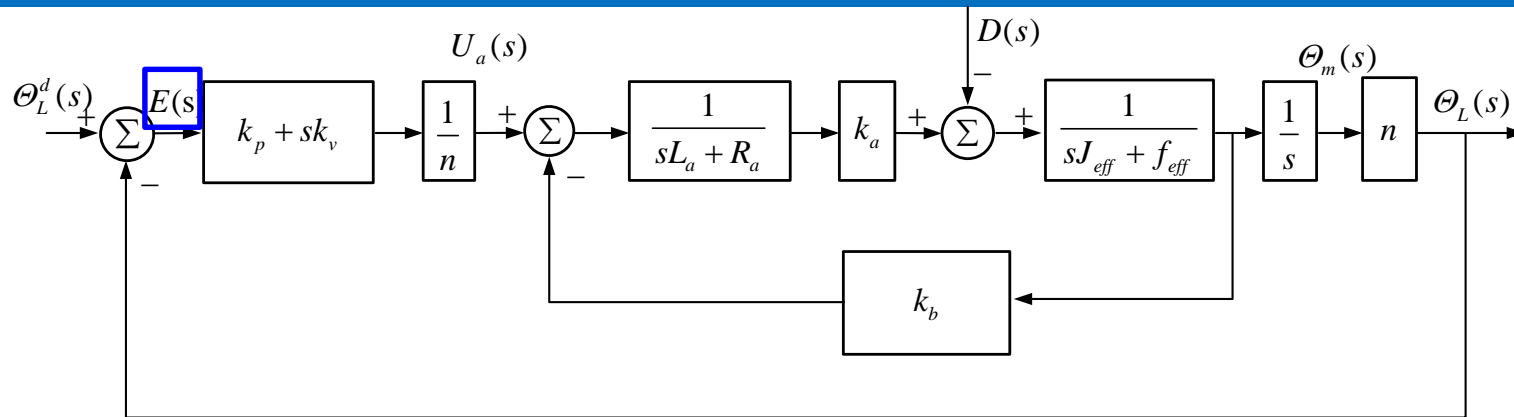
□ 由此可得系统的闭环传递函数：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_ak_v + k_ak_p}{s^2R_aJ_{eff} + s(R_af_{eff} + k_ak_b + k_ak_v) + k_ak_p}$$

□ 当  $k_v = 0$  时，上式可简化为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{k_ak_p}{s^2R_aJ_{eff} + s(R_af_{eff} + k_ak_b) + k_ak_p}$$

# 1、单关节的位置控制器



带干扰的反馈控制框图

如上图，操作臂控制系统还要受到**扰动** $D(s)$ 的影响，电机轴的输出力矩的一部分必须用于克服各种扰动力矩，由式得：

$$T(s) = (s^2 J_{eff} + s f_{eff}) \Theta_m(s) + D(s)$$

- 扰动输入与实际关节角位移的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{D(s)} \Big|_{\Theta_L'=0} = \frac{-nR_a}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

- 运用叠加原理，关节的实际位移如下：

$$\Theta_L(s) = \frac{k_a(k_p + sk_v)\Theta_L^d(s) - nR_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

# 1、单关节的位置控制器-位置和速度反馈增益的确定

- 二阶闭环控制系统的性能指标有：上升时间，稳态误差的大小（是否为零），调整时间。这些都与位置反馈以及速度反馈增益有关。

前面求得二阶闭环控制系统的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_a k_v + k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

- 二阶系统的特征方程具有下面标准形式： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

- 上式进行对照，得出： $\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{J_{eff} R_a}$

# 1、单关节的位置控制器-位置和速度反馈增益的确定

二阶系统的特性取决于它的无阻尼自然频率 $\omega_n$  和阻尼比 $\xi$

➤ 我们希望系统具有临界阻尼或过阻尼，即  $\xi \geq 1$ ，代入：

$$\zeta = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a}} \geq 1$$

因而速度反馈增益  $k_v$  为：

$$k_v \geq \frac{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$$

取等号时，系统将为临界阻尼系统；

取不等号时，为过阻尼系统。

# 1、单关节的位置控制器-位置和速度反馈增益的确定

在确定位置反馈增益  $k_p$  时，必须考虑操作臂的结构刚度和共振频率。

- 令关节的等效刚度为  $k_{eff}$ ，则恢复力矩为  $k_{eff}\theta_m(t)$ ，它与电机的惯性力矩相平衡，得微分方程：

$$J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + k_{eff}\theta_m(t) = 0$$

- 系统结构的共振频率为： $\omega_r = \sqrt{k_{eff}/J_{eff}}$
- 若在已知的惯性矩  $J_0$  之下测出的结构共振频率为  $\omega_0$ ，则在其它惯性矩  $J_{eff}$  时的结构共振频率为：

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{J_0/J_{eff}}$$

- 为了不致于激起结构振盈和系统共振，要求  $\omega_n \leq 0.5\omega_r$ ， $k_p > 0$ 。

由

$$\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a} \quad \text{得} \quad 0 < k_p \leq \frac{\omega_r^2 J_{eff} R_a}{4k_a} = \frac{\omega_0^2 J_0 R_a}{4k_a}$$

- 最终求出  $k_v$  为
- $$k_v \geq \frac{R_a \omega_0 \sqrt{J_0 J_{eff}} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$$
- ：

# 1、单关节的位置控制器-稳态误差及其补偿

□ 系统误差定义为:

$$e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t) \quad E(s) = \Theta_L^d(s) - \Theta_L(s)$$

经拉普拉斯变换最后得出:

$$E(s) = \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s) + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

对于一个幅位为 $A$ 的阶跃输入, 即  $\theta_L^d(t) = A$ , 若扰动输入未知, 则由这个阶跃输入而产生的系统稳态误差可从终值定理导出。

□在  $k_a k_p \neq 0$  的条件下, 可得稳态误差:

$$\begin{aligned} e_{ssp} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] A/s + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \end{aligned}$$

➡ 扰动的函数



# 1、单关节的位置控制器-稳态误差及其补偿

干扰函数分可确定的和无法直接确定的，把干扰力矩分别表示为：

$$\tau_D(t) = \tau_G(t) + \tau_C(t) + \tau_e$$

连杆重力产生的力矩

离心力产生的力矩

除重力和离心力之外的扰动力矩  
( $\approx$ 很小的恒值干扰  $\tau_e$ )

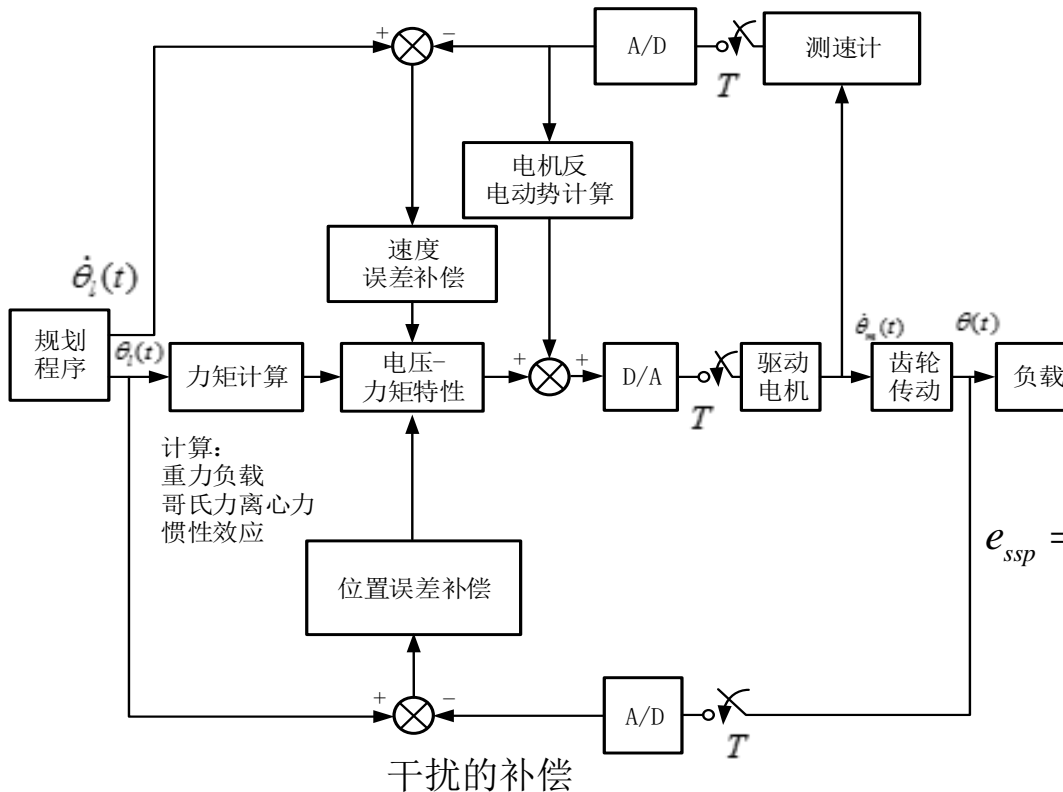
□ 经拉普拉斯变换为： $D(s) = T_G(s) + T_C(s) + T_e/s$

为了补偿重力负载和离心力的影响，可以预先算出这些力矩值，进行“前馈补偿”。（见下页干扰补偿图）

□ 令补偿力矩  $\tau_{com}$  的拉普拉斯变换为  $T_{com}(s)$ ，代入得出误差表达式：

$$E(s) = \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} + \frac{n R_a \left[ T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s) \right]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

# 1、单关节的位置控制器-稳态误差及其补偿



对于阶跃输入而言,

$$\Theta_L^d(s) = A/s$$

系统的稳态误差如下:

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{nR_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \right]$$

当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 离心力产生的扰动作用为零, 离心力是  $\dot{\theta}^2(t)$  的函数, 此时

$\dot{\theta}_L(\infty) \rightarrow 0$  , 因而不产生稳态位置误差。

# 1、单关节的位置控制器-稳态误差及其补偿

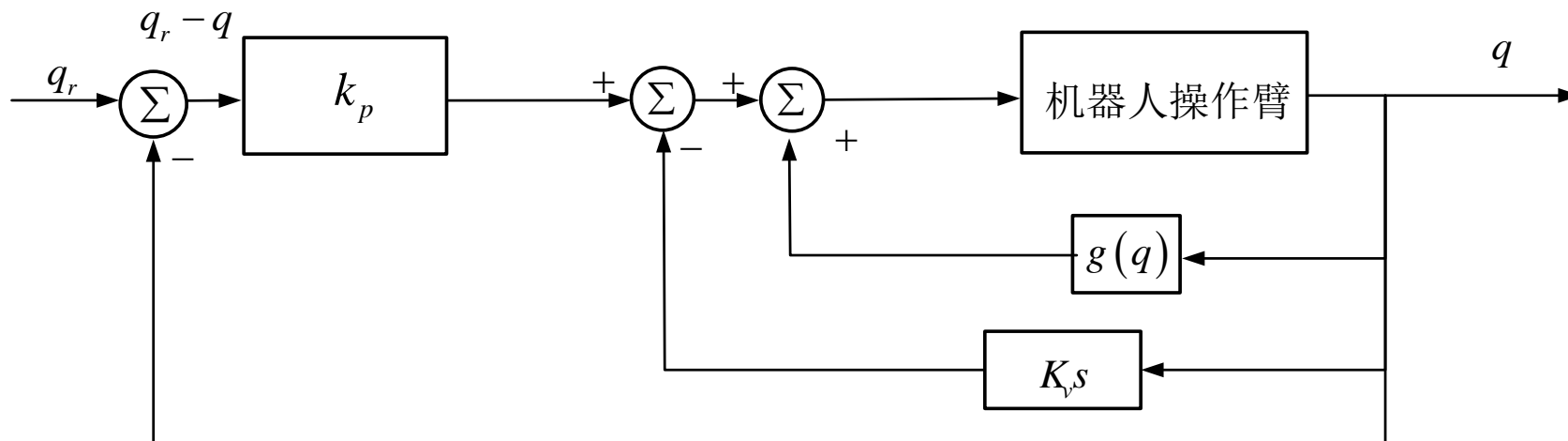
□ 如果计算出的补偿力矩  $\tau_{com}$  与连杆的重力负载相等：

$$e_{ssp} = \frac{nR_a T_e}{k_a k_p} \quad (\text{稳态位置误差仅与恒值扰动 } \tau_e \text{ 有关})$$

稳态位置误差在以下范围： $\frac{4nT_e}{\omega_0^2 J_0} \leq e_{ssp} < \infty$

位置反馈增益  $k_p$  越大，稳态误差  $e_{ssp}$  越小

因为  $\tau_e$  很小，所以稳态位置误差也很小。



# 1、单关节的位置控制器-稳态误差及其补偿

如果系统的输入是个斜坡函数： $\theta_L^d(s) = A/s^2$ 。干扰力矩： $\tau_D(t) = \tau_G(t) + \tau_C(t) + \tau_e$   
那么由斜坡输入而产生的稳态误差是：

$$\begin{aligned} e_{ssv} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \frac{A}{s^2}}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \\ &+ \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{n R_a \left[ T_G(s) + T_C(s) + \frac{T_e}{s} - T_{com}(s) \right]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \\ &= \frac{(R_a f_{eff} + k_a k_b) A}{k_a k_p} + \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{n R_a \left[ T_G(s) + T_C(s) + \frac{T_e}{s} - T_{com}(s) \right]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \end{aligned}$$

□ 为了减小稳态误差，计算的补偿力矩  $\tau_{com}(t)$  应与重力和离心力的影响相抵消，稳态速度误差为：

$$e_{ssv} = \frac{(R_a f_{eff} + k_a k_b) A}{k_a k_p} + e_{ssp}$$

- 轨迹生成
- 机械臂的单关节传递函数及PD控制
- **二阶线性系统控制器的分解**
- 机械臂的单关节控制规律分解
- 机械臂的非线性控制
- 机械臂的多关节控制
- 基于直角坐标的控制

## 2、二阶线性系统控制器的分解

- 假设摩擦阻力与运动速度成正比，在**无其它外力**作用下，物体自由运动的微分方程是：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

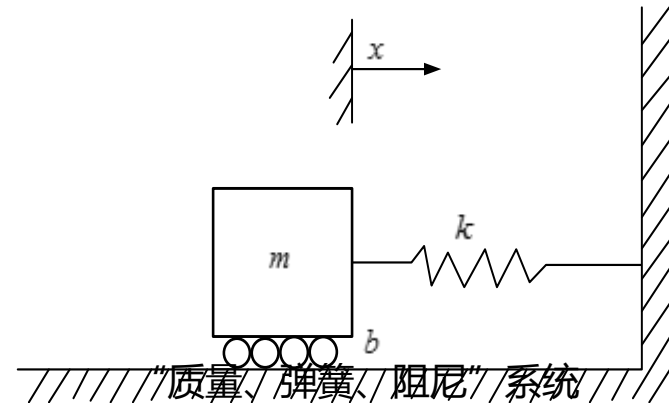
- 该二阶常系数微分方程式对应的特征方程是：

$$ms^2 + bs + k = 0$$

- 特征方程的根是：**系统的极点**

$$s_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad s_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

受控对象处于零位

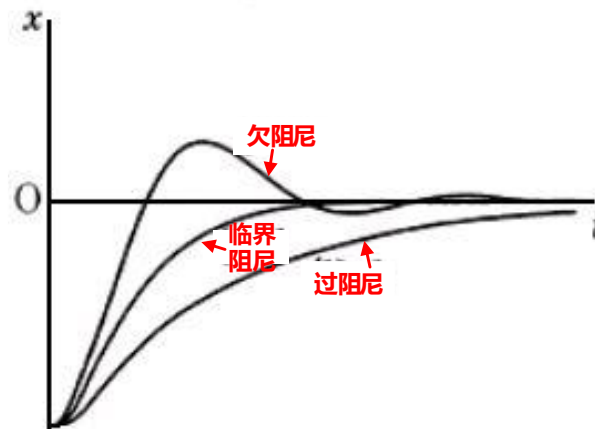


其解依赖于初始条件：  
初始位置和初始速度

## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ 系统的极点  $s_1$  和  $s_2$  在复平面上的位置决定了系统的运动状态和系统的动态品质。

□ 可分下列三种情况：



- **两不等实根**，即  $b^2 > 4mk$

系统是过阻尼的系统，阻尼占主导地位，系统响应“迟钝”。

- **两复根**，即  $b^2 < 4mk$

系统是为欠阻尼系统，刚度占主导地位，系统会产生震荡。

- **两等实根**，即  $b^2 = 4mk$

阻尼与刚度平衡，为临界阻尼情况，可以产生尽可能快的非振荡响应。



## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ 采用阻尼比和自然频率表示，将特征方程式变成：

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

阻尼比

自然频率 (无阻尼的)

其中：  $\xi = b / 2\sqrt{km}$ ,  $\omega_n = \sqrt{k / m}$

显然：  $\xi > 1$  为过阻尼情况；

$\xi < 1$  为欠阻尼情况；

$\xi = 1$  为临界阻尼情况。

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

上述二阶系统的响应并不理想，**如何改变系统的品质，使之符合要求？**

## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ **应对方式**：通过使用传感元件，驱动器和控制系统来改变系统的品质。

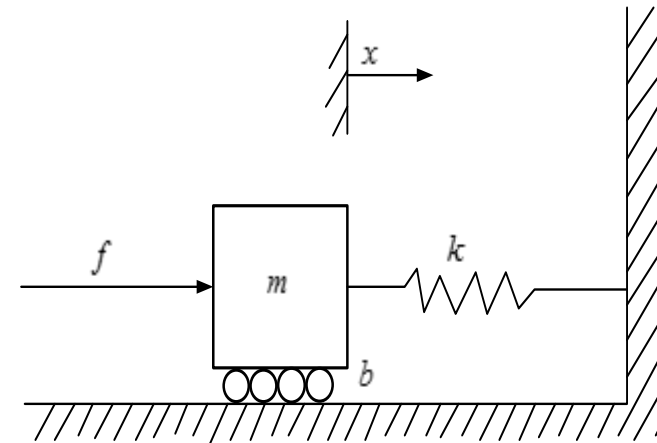
如右图，增添了一个驱动器，对受控物体施加力  $f$  的作用，物体的运动方程变为：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

假定，驱动器对于物体施加的力是根据实测的位置和速度决定的，即：

$$f = -k_p x - k_v \dot{x}$$

以此计算控制力的大小，形成反馈控制信号



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

## 2、二阶线性系统控制器的分解

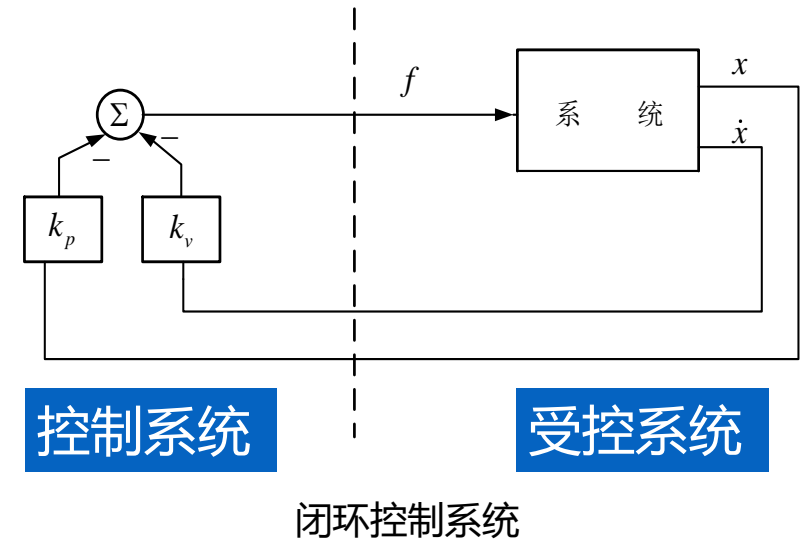
**□ 位置调节系统**——用来保持物体在一个固定的位置上，消除干扰力的影响。

推导出闭环系统的动力学方程：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x}$$

或：  $m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0$$



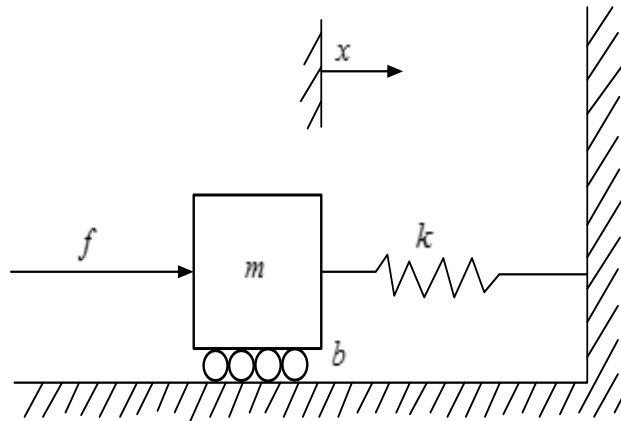
→ 适当地选择控制系统的增益（简称控制增益） $k_v$ 和  $k_p$ ，可以得到所希望的任意二阶系统的品质。

**注意：** $k_v$ 和  $k_p$ 可正可负，随受控系统的参数而定。

当  $b$ 或  $k$  变成负值时，控制系统将丧失稳定性，伺服误差将会增大。

## 2、二阶线性系统控制器的分解

**例：** 系统参数  $m = 1, b = 1, k = 1$ 。按位置调节器的控制规律，选择控制增益  $k_p$  和  $k_v$ ，使系统变成临界阻尼系统，并使闭环系统刚度为16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

因为要求闭环系统刚度  $k' = 16.0$ ，又要使系统成为临界阻尼，必须  $b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$

又因  $k=1$  和  $b=1$ ，因而  $k_p = k' - k = 15$ ， $k_v = b' - b = 7$ 。

## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ **分解方法：**将控制器分解成两部分：基于模型控制部分和伺服控制部分。

□ 系统闭环运动方程为：  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

□ 基于模型控制规律有如下形式：

$$f = \alpha f' + \beta$$

□ 联立以上式子可以得到闭环系统控制方程为：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$$

## 2、二阶线性系统控制器的分解

- 如果把  $\alpha$  和  $\beta$  选定为:  $\alpha=m, \beta=b\dot{x}+kx$ , 可得:

$$\ddot{x} = f'$$

→ 单位质量系统的运动方程

- 进一步假设上式是受控系统的开环动力学方程, 计算  $f'$ :

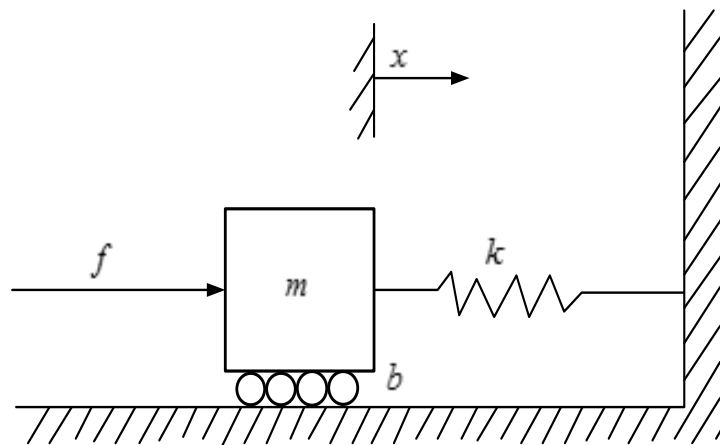
$$f' = -k_p x - k_v \dot{x}$$

- 联立则得:  $\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$

利用这种分解法则确定控制增益十分简单, 并且与系统参数无关, 即, 对于任何系统, 临界阻尼都必须满足:  $k_v = 2\sqrt{k_p}$ 。

## 2、二阶线性系统控制器的分解

例：系统参数  $m = 1, b = 1, k = 1$ 。求出位置调节器控制规律的  $\alpha$ 、 $\beta$  和增益  $k_v$  和  $k_p$ ，使得闭环系统具有临界阻尼，且刚度为16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

我们取：  $\alpha = m = 1$        $\beta = b\dot{x} + kx = \dot{x} + x$

根据规定的闭环系统刚度要求，确定增益  $k_p = 16.0$ ，

再按临界阻尼的要求确定  $k_v = 2\sqrt{k_p}$ ，得到  $k_v = 8.0$ 。



## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ 要求物体跟踪指定的目标轨迹，即物体必须按照给定的时间函数  $x_d(t)$  来运动。

假定轨迹充分光滑，定义指定的目标轨迹与实际轨迹的差为伺服误差，即：

$$e = x_d - x$$

➤ 轨迹跟踪的控制规律为： $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$

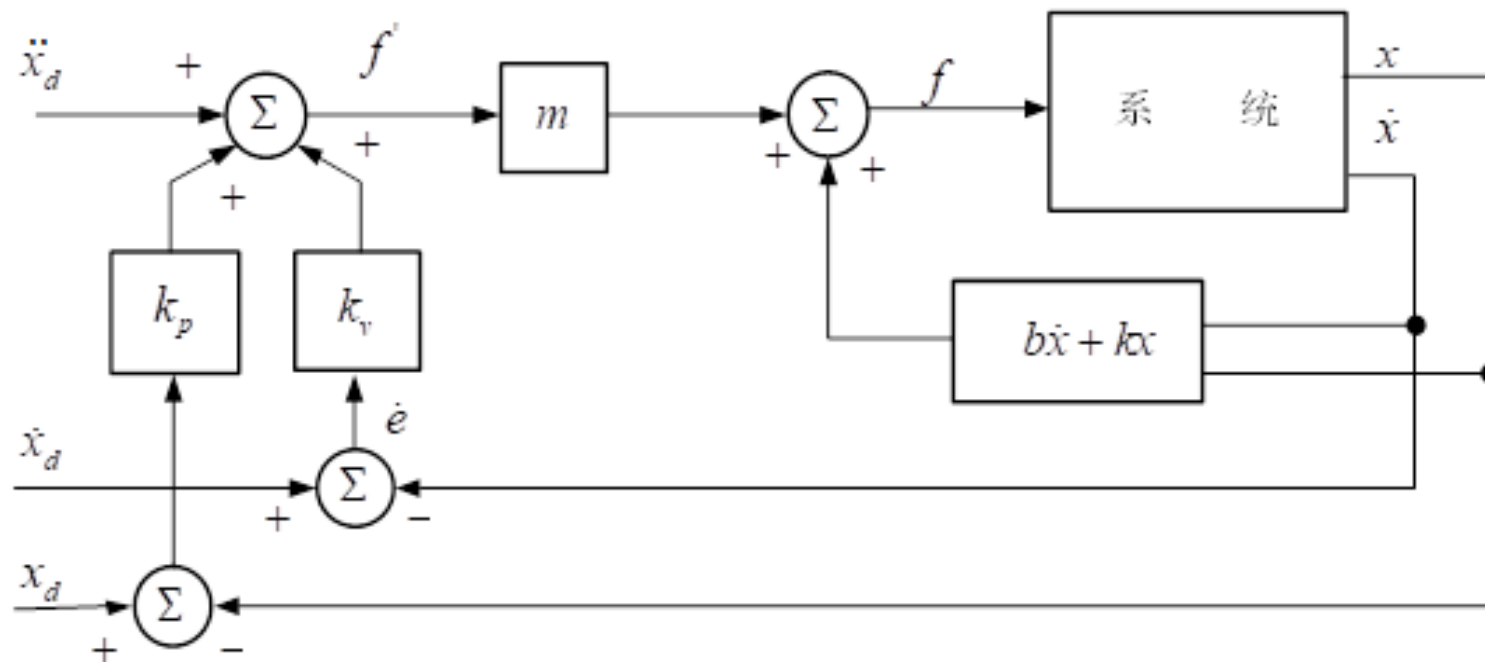
➤ 与单位质量系统运动方程式联立就可得到：

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

➤ 最终得到误差方程： $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0$

## 2、二阶线性系统控制器的分解

□ 它描述了相对于给定轨迹的误差变化规律，如下图：



如果模型十分准确，即参数 $m$ 、 $k$ 和 $b$ 的值十分准确，又没有噪声和初始误差，则物体将准确地跟踪给定的轨迹。

## 2、二阶线性系统控制器的分解

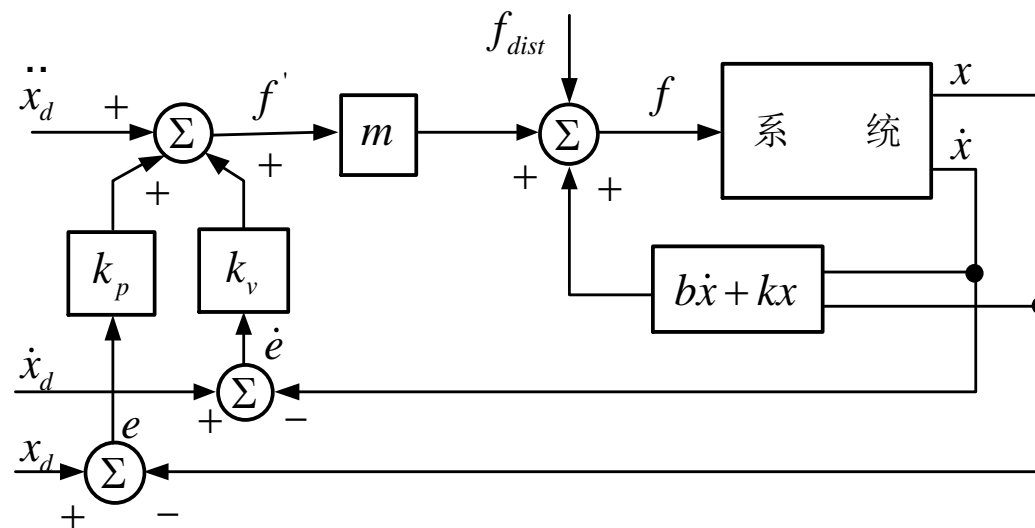
如右图，分析这一闭环系统，  
可得到误差方程为：

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist}$$

### 一、稳态误差

eg：常值干扰  $f_{dist}$

带有干扰的轨迹跟踪控制系统



对系统进行稳态分析，令系统式中的变量的各阶导数为零，得稳态方程和稳态误差为：

$$k_p e = f_{dist}, \quad e = f_{dist} / k_p$$

位置增益越大，稳态误差越小

## 2、二阶线性系统控制器的分解

### 二、增加积分项

增添积分项:  $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt$

相应的误差方程为:  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist}$

对上式两边求导:  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i e = 0 \Rightarrow k_i e = 0$

增加积分项之后, 使得系统对于恒值干扰的稳态误差为零

### 三、周期干扰

可将周期性干扰当成各种谐波分量的线性叠加。对于二阶线性系统而言, 谐波干扰所产生的稳态误差也是个谐波函数, 其频率和干扰信号的频率相同, 其幅值和相位均和频率  $\omega$  有关。

- 轨迹生成
- 机械臂的单关节传递函数及PD控制
- 二阶线性系统控制器的分解
- 机械臂的单关节控制规律分解**
- 机械臂的非线性控制
- 机械臂的多关节控制
- 基于直角坐标的控制

### 3、机械臂的单关节控制规律分解

**建模时，对操作臂的控制问题进行一系列简化处理：**

- (1) 把多输入多输出系统当成多个独立的单输入单输出系统；**
- (2) 关节驱动器的等效惯性矩  $J_{\text{eff}} = J_{\text{m}} + n^2 J_{\text{L}}$  和等效阻尼  $f_{\text{eff}} = f_{\text{m}} + n^2 f_{\text{L}}$  为常数；**
- (3) 不考虑机械臂动力学方程的非线性效果，所建立模型近似为线性模型；**
- (4) 忽略机械结构的刚度和变形；**
- (5) 忽略电机电枢的电感 $L_{\text{a}}$ 。**

基于以上假设，每个关节简化成一个质量-弹簧-阻尼系统：

$$\tau(t) = J_{\text{eff}} \ddot{\theta}_{\text{m}} + f_{\text{eff}} \dot{\theta}_{\text{m}}$$

### 3、机械臂的单关节控制规律分解

运用2节所介绍的控制规律分解方法对操作臂的单关节进行控制，令

$$\tau = \alpha \tau' + \beta \quad \alpha = J_{\text{eff}}, \quad \beta = f_{\text{eff}} \dot{\theta}_m$$

则  $\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e$

所得到的闭环系统的误差方程为  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{\text{dist}}$

其中  $\tau_{\text{dist}}$  是与干扰力矩有关的项。

为了不激起结构振盈和系统共振，必须将闭环系统无阻尼自然频率  $\omega_n$

限制在关节结构共振频率的一半之内，即  $\omega_n \leq 0.5\omega_r$

为了达到临界阻尼和避开结构自振频率，位置和速度反馈增益分别取为

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4}\omega_r^2, \quad k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_r$$

### 3、机械臂的单关节控制规律分解

例： 假设单关节系统的各参数值为  $J_{\text{eff}}=1$ ,  $f_{\text{eff}}=0.1$  。此外，已知系统未建模的共振频率为 $8\text{rad/s}$ 。求 $\alpha$ ,  $\beta$ , 以及为使系统达到临近阻尼的位置控制规律的增益 $k_p$ ,  $k_v$ 。  
在不激发未建模模态的前提下，使系统的闭环刚度尽可能大。

取  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.1\dot{\theta}_m$

此时系统在给定输入  $f'$  下呈现为一个单位质量。取闭环固有频率

$$\omega_n = 0.5\omega_r = 4\text{rad/s}$$

因此可得：

$$k_p = \omega_n^2 = 16.0$$

$$k_v = 2\sqrt{k_p} = 8.0$$



- 轨迹生成
- 机械臂的单关节传递函数及PD控制
- 二阶线性系统控制器的分解
- 机械臂的单关节控制规律分解
- 机械臂的非线性控制
- 机械臂的多关节控制
- 基于直角坐标的控制

## 4、机械臂的非线性控制

在建立机械臂模型时，对操作臂的控制问题进行了一系列简化。实际上，如果不做假设，操作臂的控制模型应是一个 $n \times 1$ 的矢量**非线性微分方程**。

仿照二阶线性系统控制器分解方法，本节来直接研究非线性运动学方程，在控制规律中**引入非线性项“抵消”系统固有的非线性，使整个闭环系统成为线性的**。

运用上述控制器分解的方法，可以实现线性化的功能。

## 4、机械臂的非线性控制

例：在质量-弹簧-阻尼系统中包含非线性弹簧。与普通线性弹簧( $f=kx$ )不同，该非线性弹簧特性曲线由 $f=qx^3$ 来描述。试确定控制规律，使系统保持临界阻尼状态，而且刚度为 $k_{CL}$ 。

系统的开环方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f$$

对于基于模型的控制部分，有：

$$f = \alpha f' + \beta$$

其中：

$$\alpha = m, \quad \beta = b\dot{x} + qx^3$$

则对于伺服控制部分，有：

$$f' = \ddot{x}_d + k_v e + k_p e$$

## 4、机械臂的非线性控制

例：在前述的质量-弹簧-阻尼系统中，摩擦力不再是线性阻尼力  $f = b\dot{x}$ ，而是非线性库仑摩擦力  $f = b_c \operatorname{sgn}(\dot{x})$ 。工业机器人的旋转关节、移动关节的轴承和导轨等处的摩擦特性都是用库仑摩擦来描述的。因此，在设计控制律时，对基于模型的控制部分应引入非线性项，使系统总是处于临界阻尼状态。系统的开环方程为：

$$m\ddot{x} + b_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = f$$

**对于基于模型的控制部分，有：**

$$f = \alpha f' + \beta$$

**其中：**  $\alpha = m, \quad \beta = b_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx$

**则对于伺服控制部分，有：**  $f' = \ddot{x}_d + k_v e + k_p e$

## 4、机械臂的非线性控制

**操作臂的非线性控制器设计步骤：**

- **计算得出一个非线性的基于模型的控制规律，用来抵消受控系统的非线性；**
- **把系统简化为线性系统，用单位质量系统相应的线性伺服控制规律进行控制；**
- **基于模型的控制部分实现前馈控制，补偿或抵消受控系统的参数和结构的影响。**

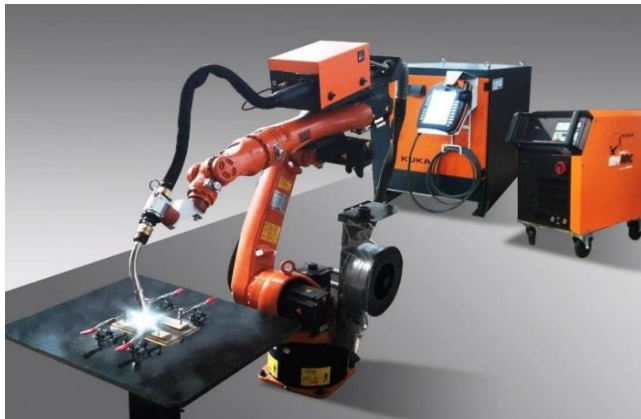
**实际应用的关键问题：获得非线性系统的参数和结构。**

**计算力矩方法：基于拉格朗日或牛顿-欧拉动力学模型，预先计算出重力负载和离心力产生的干扰力矩，进行前馈补偿。也称为逆动态模型方法。**

**根据实际控制问题的特点还可以选择线性化方法、动态线性化方法，以及后续会讲到的李雅普诺夫方法。**

- 轨迹生成
- 机械臂的单关节传递函数及PD控制
- 二阶线性系统控制器的分解
- 机械臂的单关节控制规律分解
- 机械臂的非线性控制
- 机械臂的多关节控制
- 基于直角坐标的控制

## 5、机械臂的多关节控制



操作臂的多关节控制是个**多输入多输出 (MIMO)**的系统，需要用矢量表示位置、速度和加速度，控制器计算出各关节驱动控制矢量。

□ 基于模型的控制规律，用“矩阵矢量”形式表示为：

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}' + \boldsymbol{\beta}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 是  $n \times n$  的矩阵  
作用是对  $n$  个运动方程进行解耦

如果正确地选择  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$ ，那么，系统对于输入  $\mathbf{F}'$  将表现为  $n$  个独立的单位质量系统。

→ 线性解耦控制规律

## 5、机械臂的多关节控制

$$\tau = D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q})$$

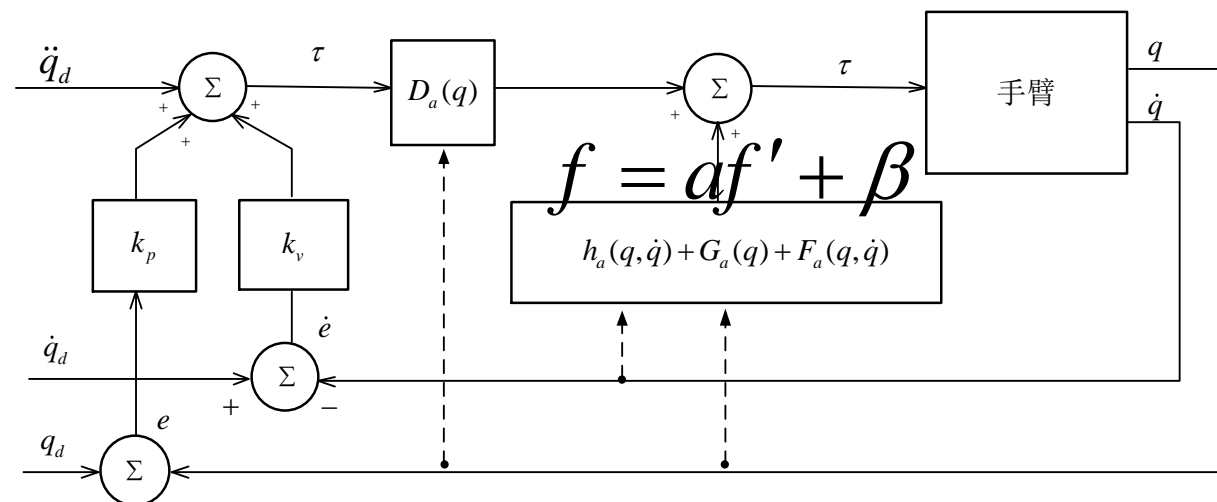
$n \times 1$  矢量

操作臂的  $n \times 1$  惯性矩阵

$n \times 1$  的离心力和科氏力矢量

$n \times 1$  的重力矢量

□ 控制规律分解法得到的控制系统方框图如下：





## 5、机械臂的多关节控制

$$\tau = D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q})$$

$n \times 1$  矢量

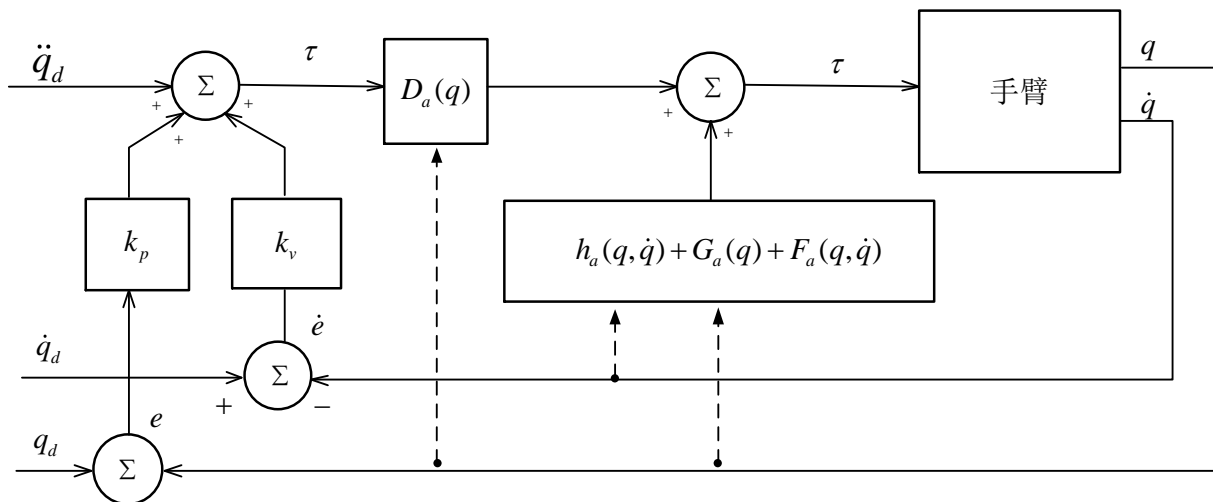
操作臂的  $n \times 1$  惯性矩阵

$n \times 1$  的离心力和哥氏力矢量

$n \times 1$  的重力矢量

$$\tau = \alpha \tau' + \beta, \tau' \text{ 关节力矩}$$

□ 控制规律分解法得到的控制系统方框图如下：



$$\alpha = D(q), \beta = h(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q})$$

$$\tau' = \ddot{q}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

$$e = q_d - q; \dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$$

## 5、机械臂的多关节控制-计算力矩方法

- 假设计算模型值等于实际值，并简化得：

$$D(q)\left[\ddot{e}(t)+K_v\dot{e}(t)+K_pe(t)\right]=0$$

其中：  $e(t)=q_d(t)-q(t)$ ，  $\dot{e}(t)=\dot{q}_d(t)-\dot{q}(t)$

- 由于是  $D(q)$  正定的，因而也是非奇异矩阵，从上式可以得到闭环系统的误差方程：

$$\ddot{e}(t)+K_v\dot{e}(t)+K_pe(t)=0$$

- 由于上述误差矢量方程是解耦的， $k_v$  和  $k_p$  是对角阵，可将矢量形式写成各个关节单独的形式：

$$\ddot{e}_i(t)+k_{vi}\dot{e}_i(t)+k_{pi}e_i(t)=0, \quad i=1,\dots,n$$

▲ 得到与线性解耦控制规律完全相同的结果

## 5、机械臂的多关节控制-计算力矩方法

### □ 计算力矩法影响因素:

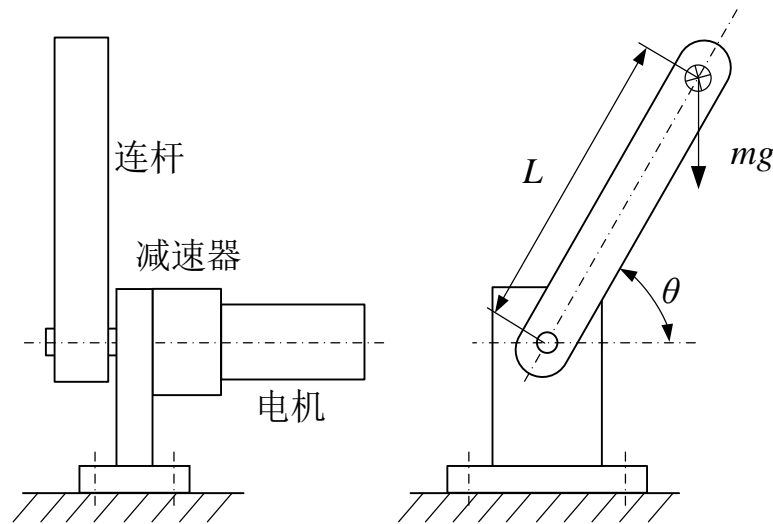
**按拉格朗日动力学方程计算关节力矩效率较低，实时闭环数字控制是相当困难的；**

**用于计算力矩的操作臂动态模型公式不准确，且十分复杂。**

# 5、机械臂的多关节控制

## ● 实例1 — 单关节机器人逆动力学方程的非线性

➤ 电机减速器传动比  $N=10$ ，忽略减速器内部传动元件的惯量，分析在机器人全工作空间 ( $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ )，驱动空间逆动力学方程中，干扰力矩的波动范围。



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	$u_r$	24	V
	额定转速	$\omega_r$	258	rad/s
	额定转矩	$\tau_r$	$8.82 \times 10^{-2}$	N·m
	额定电流	$I_r$	1.09	A
	电枢电阻	$R_a$	2.49	$\Omega$
	电枢电感	$L_a$	$6.10 \times 10^{-4}$	H
	转矩常数	$K_a$	$8.22 \times 10^{-2}$	(N·m)/A
	感应电动势常数	$K_e$	$8.24 \times 10^{-2}$	V/(rad/s)
	转子惯量	$I_r$	$1.19 \times 10^{-5}$	Kg·m <sup>2</sup>
	转子阻尼	$B_r$	$4.10 \times 10^{-4}$	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	$m$	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	$l$	0.1	m
	负载惯量	$I_l$	$5.0 \times 10^{-3}$	Kg·m <sup>2</sup>
	关节阻尼	$B_l$	$2.0 \times 10^{-2}$	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	$K_u$	3	无
	跨导增益	$K_g$	1	A/V
	重力加速度	$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例1 — 单关节机器人逆动力学方程的非线性

- 分析驱动空间逆动力学方程 线性项

• 逆动力学方程  $\tau_m = \boxed{I_m \varepsilon_m} + \boxed{B_m \omega_m} + \boxed{\tau_{md}}$

惯性力矩 阻尼力矩 干扰力矩

- 单关节机器人的干扰力矩仅包含重力矩

$$\tau_{md} = \tau_{mG} = \frac{mgL \cos \theta}{N} \quad \text{非线性项}$$

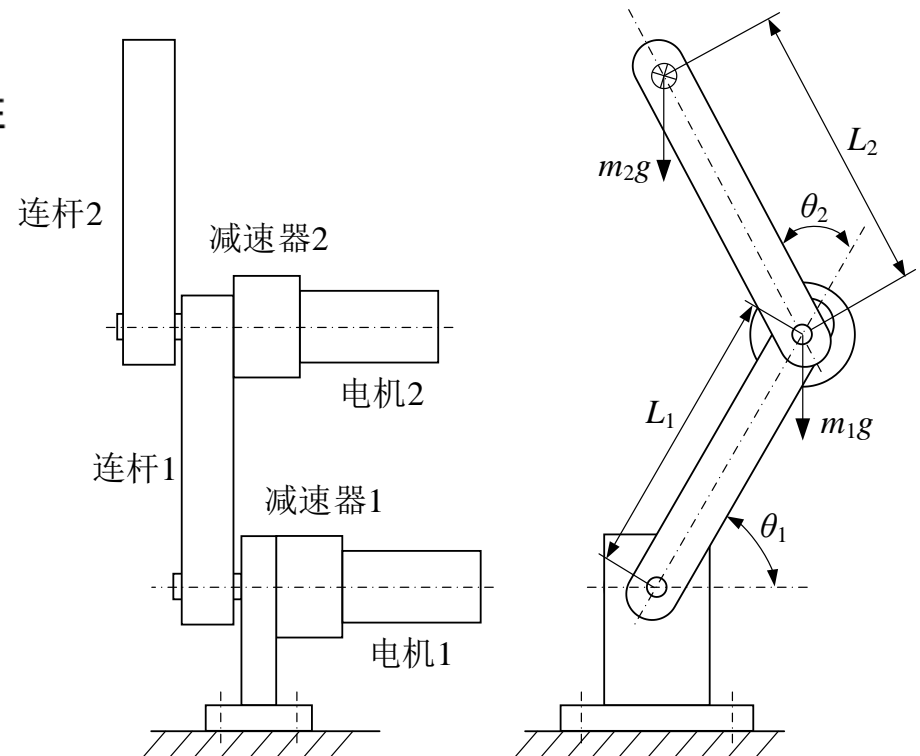
- 电机模型是线性项;
- 干扰力矩  $\tau_{md}$  随机器人关节转角非线性变化, 其波动范围为:  $-4.9 \sim +4.9 \times 10^{-2} \text{N}\cdot\text{m}$ ;
- 机器人逆动力学方程非线性。

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例2 —平面2R机器人逆动力学方程的非线性

➤  $L_1 = L_2 = L = 0.1\text{m}$ 、 $m_1 = m_2 = m = 0.5\text{Kg}$ 、 $I_{r1} = I_{r2} = I_r = 1.19 \times 10^{-5}\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ 、 $g = 9.8\text{ m/s}^2$ ，两关节减速器相同，传动比 $N_1 = N_2 = N = 10$ ，关节阻尼 $B_{l1}$ 、 $B_{l2}$ 和电机转子阻尼 $B_{r1}$ 、 $B_{r2}$ 均为常数，忽略电机和减速器质量，在**驱动空间**进行如下计算和分析。

1. 写出两关节电机的逆动力学方程，并指出其中的线性项和非线性项
2. 计算全工作空间内，重力矩的变化范围
3. 计算全工作空间内，广义质量矩阵 $M_m(\theta)$ 各元素的变化范围
4. 当两关节均以加速度 $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta} = \pi(\text{rad/s}^2)$ 运转时，计算惯性力矩的变化范围
5. 当两关节均以速度 $\dot{\theta}_{1\max} = \dot{\theta}_{2\max} = \dot{\theta} = \frac{\pi}{4}(\text{rad/s})$ 匀速运转时，离心-科氏力矩的变化范围



## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例2 — 平面2R机器人逆动力学方程的非线性

解：(1) ➤ 忽略末端力，机器人驱动空间逆动力学方程通式

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{V}_m(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{B}_m\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{G}_m(\boldsymbol{\theta})$$

➤ 其中：  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  ——加速度；  $\boldsymbol{\omega}_m$  ——速度；  $\boldsymbol{\theta}$  ——关节位置；  $\boldsymbol{\tau}_m$  ——电机电磁力矩

➤ 逆动力学方程的具体形式

$$\begin{pmatrix} \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{m1} \\ \varepsilon_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{m1} & 0 \\ 0 & B_{m2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{mG1} \\ \tau_{mG2} \end{pmatrix}$$

➤ 关节电机1和关节电机2的逆动力学方程

$$\begin{aligned} \tau_{m1} &= \boxed{M_{11}\varepsilon_{m1} + M_{12}\varepsilon_{m2}} + \boxed{V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2}} + \boxed{B_{m1}\omega_{m1}} + \boxed{\tau_{mG1}} \\ \tau_{m2} &= \boxed{M_{21}\varepsilon_{m1} + M_{22}\varepsilon_{m2}} + \boxed{V_{21}\omega_{m1} + V_{22}\omega_{m2}} + \boxed{B_{m2}\omega_{m2}} + \boxed{\tau_{mG2}} \end{aligned}$$

惯性力矩
离心-科氏力矩
阻尼力矩
重力矩

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例2—平面2R机器人逆动力学方程的非线性

广义质量矩阵:  $M_m(\theta) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{N^2} (3 + \boxed{2 \cos \theta_2}) + I_r & \boxed{\frac{mL^2}{N^2} (1 + \cos \theta_2)} \\ \boxed{\frac{mL^2}{N^2} (1 + \cos \theta_2)} & \frac{mL^2}{N^2} + I_r \end{pmatrix}$

非线性项      非线性耦合项

离心-科氏力矩阵:  $V_m(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-\frac{3mL^2 \dot{\theta} \sin \theta_2}{N^2}} \\ \boxed{\frac{mL^2 \dot{\theta} \sin \theta_2}{N^2}} & 0 \end{pmatrix}$

非线性耦合项      非线性耦合项

阻尼矩阵:  $B_m = \begin{pmatrix} B_{m1} & 0 \\ 0 & B_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_{11}}{N_1^2} + B_{r1} & 0 \\ 0 & \frac{B_{11}}{N_2^2} + B_{r2} \end{pmatrix}$

重力矩:  $G_m(\theta) = \begin{pmatrix} \tau_{mG1} \\ \tau_{mG2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2mgL \cos \theta_1 + mgL \cos(\theta_1 + \theta_2)}{N} \\ \frac{mgL \cos(\theta_1 + \theta_2)}{N} \end{pmatrix}$

非线性项



# 5、机械臂的多关节控制

## ● 实例2 — 平面2R机器人逆动力学方程的非线性

(2) 全工作空间重力矩的变化范围（单位：  $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
重力矩	-15~+15	-5~+5

(3) 全工作空间广义质量矩阵  $M_m(\theta)$  各元素的变化范围（单位：  $\times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}^2$ ）

元素	$M_{11}$	$M_{22}$	$M_{12}=M_{21}$
取值	6.19~26.19	6.19	0~10

(4) 两关节均以加速度  $\ddot{\theta} = \pi(\text{rad/s})$  运行，关节电机角加速度为：  $\varepsilon_{m1} = \ddot{\theta}_1 N_1 = \ddot{\theta} N$ ,  $\varepsilon_{m2} = \ddot{\theta}_2 N_2 = \ddot{\theta} N$ , 惯性力矩的变化范围（单位：  $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
惯性力矩	0.19~1.14	0.19~0.51

(5) 两关节均以速度  $\dot{\theta} = \frac{\pi}{4}(\text{rad/s})$  的运行，关节电机角速度为：  $\omega_{m1} = \dot{\theta}_1 N_1 = \dot{\theta} N$ ,  $\omega_{m2} = \dot{\theta}_2 N_2 = \dot{\theta} N$  , 离心-科氏力矩的变化范围（单位：  $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
离心-科氏力矩	-0.09~+0.09	-0.03~+0.03

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 机器人逆动力学方程的特点

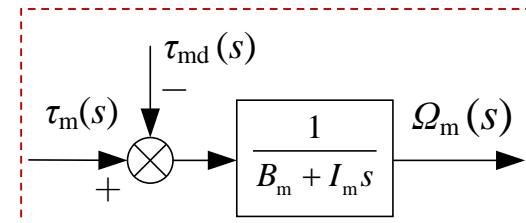
- **时变、非线性** ——  $n$  关节机器人，机器人驱动空间逆动力学方程的每一行对应着一个关节电机的逆动力学方程，其中的广义质量矩阵  $M_m$ 、离心-科氏力矩阵  $V_m$  和  $G_m$  等，都是关节位置和速度的函数
- **耦合** ——  $M_m$  的对角线元素相当于关节电机的等效转动惯量，通常是一个变量。 $M_m$  和  $V_m$  的非对角线元素会把一个关节的加速度和速度，耦合为其他关节的 **动态力矩**
- 多输入、多输出、时变、强耦合的非线性系统

### ● 设计关节电机独立PID控制器的思路

- 分解机器人关节电机逆动力学模型，获得如下形式的驱动空间逆动力学方程

$$\tau_m = \underbrace{I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m}_{\text{线性模型}} + \underbrace{\tau_{md}}_{\text{干扰模型}}$$

等价  $\longleftrightarrow$

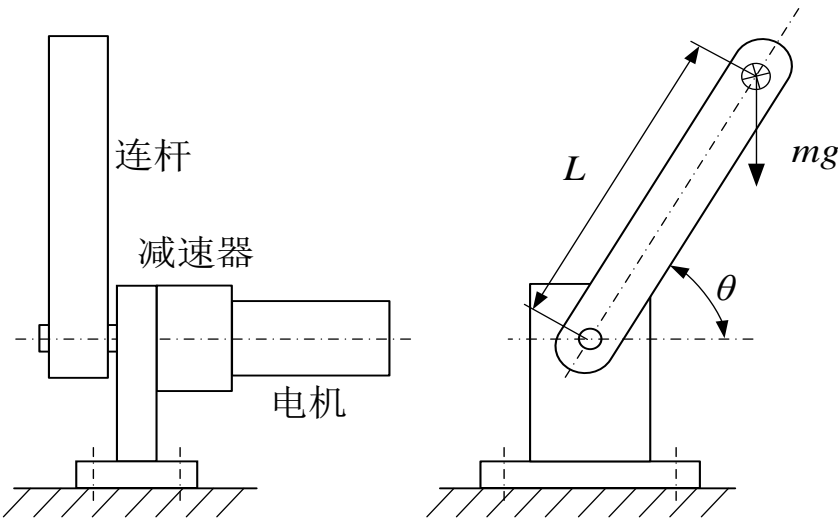


- 针对线性部分设计PID控制器
- 针对过大的干扰力矩，设计补偿控制量

# 5、机械臂的多关节控制

## ● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

- 电机减速器传动比 $N$ 可变，忽略减速器内部传动元件惯量，分析电机减速器的传动比和机器人工作状态对干扰力矩大小的影响，以决定是否需要在控制器中加以补偿。



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	$u_r$	24	V
	额定转速	$\omega_r$	258	rad/s
	额定转矩	$\tau_r$	$8.82 \times 10^{-2}$	N·m
	额定电流	$I_r$	1.09	A
	电枢电阻	$R_a$	2.49	$\Omega$
	电枢电感	$L_a$	$6.10 \times 10^{-4}$	H
	转矩常数	$K_a$	$8.22 \times 10^{-2}$	(N·m)/A
	感应电动势常数	$K_e$	$8.24 \times 10^{-2}$	V/(rad/s)
	转子惯量	$I_r$	$1.19 \times 10^{-5}$	Kg·m <sup>2</sup>
	转子阻尼	$B_r$	$4.10 \times 10^{-4}$	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	$m$	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	$l$	0.1	m
	负载惯量	$I_l$	$5.0 \times 10^{-3}$	Kg·m <sup>2</sup>
	关节阻尼	$B_l$	$2.0 \times 10^{-2}$	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	$K_u$	3	无
	跨导增益	$K_g$	1	A/V
	重力加速度	$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

(1) ➤ 分别取传动比 $N=10$ 、 $50$

➤ 把参数代入

$$I_m = I_r + \frac{I_l}{N^2} \quad B_m = B_r + \frac{B_l}{N^2}$$

➤ 得

传动比	$I_m$ $\times 10^{-5} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$	$\frac{I_r}{I_m}$	$\frac{5I_r}{I_m}$	$B_m$ $\times 10^{-4} (\text{N} \cdot \text{m}) / (\text{rad/s})$	$\frac{B_r}{B_m}$
$N=10$	6.19	19%	0.96	5.1	61%
$N=50$	1.39	86%	4.28	3.18	97%

➤ 分析

- $N=10$ 时,  $I_r$ 与 $I_m$ 之间的关系为惯量匹配要求的临界值  $I_m \leq 5I_r$
- $N=50$ 时,  $I_r$ 和 $B_r$ 是 $I_m$ 和 $B_m$ 中的主导项, 机器人模型偏差 (负载惯量 $I_l$ 和关节阻尼 $B_l$ ) 影响较小

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

(2) ➤ 取  $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = 2\pi \text{ (rad/s}^2 \text{)}$ 、 $N=10$ 或 $50$

➤ 把参数代入

$$\tau_m = I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md}$$

➤ 得

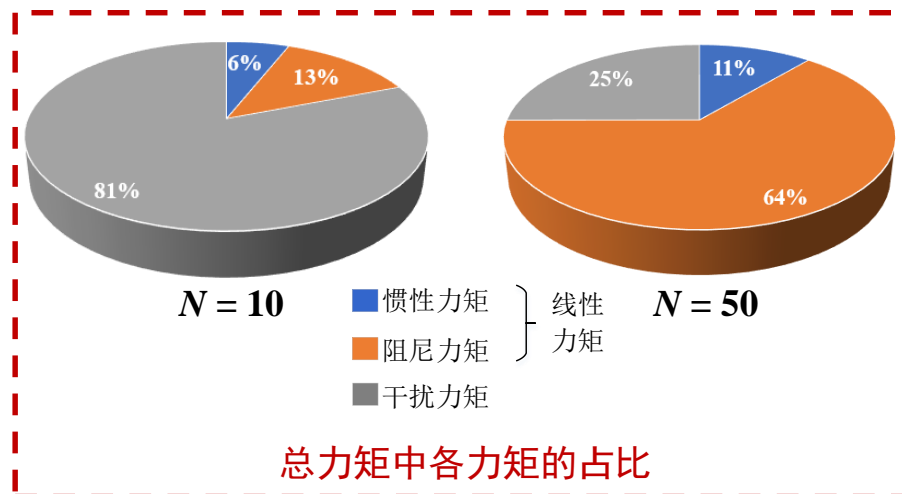
传动比	总力矩 $\tau_m$	线性力矩 ( $\times 10^{-2} \text{N}\cdot\text{m}$ )				干扰力矩波动范围		
		惯性力矩 $I_m \varepsilon_m$		阻尼力矩 $B_m \omega_m$		$\Delta \tau_{md} = \tau_{mdmax}$		
		取值	占比	取值	占比			
$N=10$	6.09	0.39	6%	0.80	13%	4.90	81%	56%
$N=50$	3.91	0.44	11%	2.50	64%	0.98	25%	11%

➤  $N = 10$

- 动态条件下，干扰力矩占电机总输出力矩的81%，是主导项，不能忽略
- 干扰力矩的波动范围是电机额定转矩的56%，不能视为小扰动

➤  $N = 50$

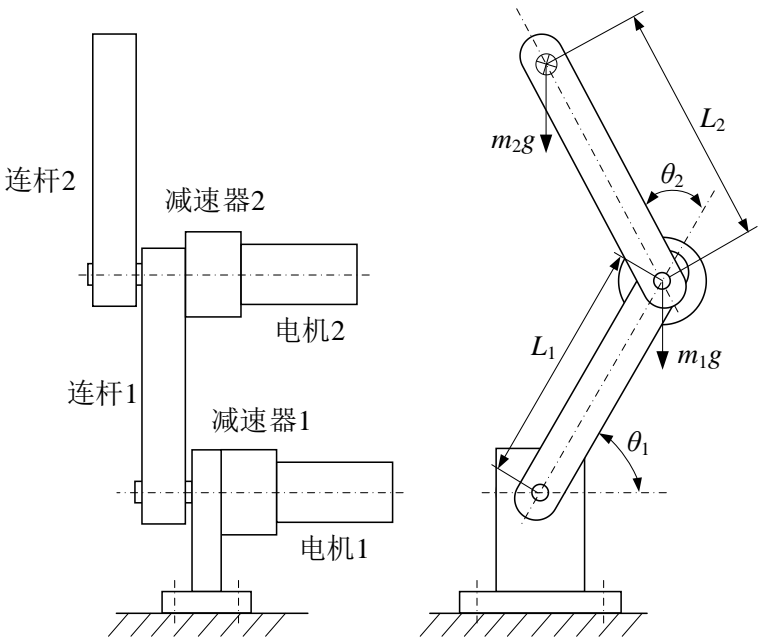
- 动态条件下，干扰力矩占比仅为25%，线性力矩是主导项
- 干扰力矩波动范围仅为电机额定转矩的11%，可被视为小扰动



# 5、机械臂的多关节控制

## ● 实例2 — 平面2R机器人力矩分析

- 两关节减速器相同，传动比  $N_1 = N_2 = N$ ，关节最高转速  $\dot{\theta}_{1max} = \dot{\theta}_{2max} = \dot{\theta}_{max}$ ，关节最高加速度  $\ddot{\theta}_{1max} = \ddot{\theta}_{2max} = \ddot{\theta}_{max}$ ，忽略电机和减速器质量



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	$u_r$	24	V
	额定转速	$\omega_r$	258	rad/s
	额定转矩	$\tau_r$	$8.82 \times 10^{-2}$	N·m
	额定电流	$I_r$	1.09	A
	电枢电阻	$R_a$	2.49	$\Omega$
	电枢电感	$L_a$	$6.10 \times 10^{-4}$	H
	转矩常数	$K_a$	$8.22 \times 10^{-2}$	(N·m)/A
	感应电动势常数	$K_e$	$8.24 \times 10^{-2}$	V/(rad/s)
	转子惯量	$I_r$	$1.19 \times 10^{-5}$	Kg·m <sup>2</sup>
	转子阻尼	$B_r$	$4.10 \times 10^{-4}$	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	$m$	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	$l$	0.1	m
	负载惯量	$I_l$	$5.0 \times 10^{-3}$	Kg·m <sup>2</sup>
	关节阻尼	$B_l$	$2.0 \times 10^{-2}$	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	$K_u$	3	无
	跨导增益	$K_g$	1	A/V
	重力加速度	$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例2 — 平面2R机器人力矩分析

解：（1） ➤ 分别取  $N=10$ 、 $50$ ，计算  $\Delta M_{11}$ 、 $\Delta M_{22}$ 、 $\bar{M}_{11}$ 、 $\bar{M}_{22}$

➤ 得

（单位： $\times 10^{-5} \text{ Nm}^2$ ，比值无量纲）

传动比	$\Delta M_{11}$	$\Delta M_{22}$	$M_{12}=M_{21}$	$\bar{M}_{11}$	$\bar{M}_{22}$	$\frac{I_r}{\bar{M}_{11}}$	$\frac{I_r}{\bar{M}_{22}}$
$N=10$	$-10 \sim +10$	0	$0 \sim 10$	16.19	6.19	7%	19%
$N=50$	$-0.4 \sim +0.4$	0	$0 \sim 0.4$	1.79	1.39	66%	86%

➤ 分析

- 大传动比时， $M_m(\theta)$ 非对角线元素 $M_{12}$ 和 $M_{21}$ 很小，可忽略
- 传动比越大，转子惯量在 $M_m(\theta)$ 主对角线元素中所占比例越大，用主对角线元素平均值代替电机总等效惯量时，误差较小

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 实例2 — 平面2R机器人力矩分析

(2) ➤ 取  $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = \pi (\text{rad/s}^2)$  或  $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = 2\pi (\text{rad/s}^2)$ ,  $N=50$

➤ 把参数代入

$$\begin{aligned}\tau_m &= \overline{M}_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md} \\ \tau_{md} &= \Delta M_m(\theta) \varepsilon_m + V_m(\theta, \dot{\theta}) \omega_m + G_m(\theta)\end{aligned}$$

➤ 得

(单位:  $\times 10^{-5} \text{Nm}^2$ , 比值无量纲)

速度			$\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$		$\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$		
加速度			$\ddot{\theta}_{max} = \pi \text{ (rad/s}^2 \text{)}$		$\ddot{\theta}_{max} = 2\pi \text{ (rad/s}^2 \text{)}$		
关节			1	2	1	2	
总力矩			5.52	2.82	9.95	5.27	
线性力矩	平均惯性力矩		0.28	0.22	0.56	0.44	
	阻尼力矩		1.25	1.25	2.50	2.50	
	合计	取值	1.53	1.47	3.06	2.93	
		占比	28%	52%	31%	56%	
干扰力矩	耦合力矩	非线性惯性力矩	0.13	0.06	0.25	0.13	
		向心力+科氏力矩	0.92	0.31	3.70	1.23	
		合	取值	1.05	0.37	3.95	1.36
		计	占比	19%	13%	40%	26%
	重力矩	取值	2.94	0.98	2.94	0.98	
		占比	53%	35%	30%	19%	

➤ 分析

- 耦合力矩不仅取决于传动比, 而且受机器人运行速度和加速度的影响
- 当机器人工作于高速、高动态时, 耦合力矩不能忽略;
- 只有当传动比很大时, 重力矩才能被视为小扰动



## 5、机械臂的多关节控制

### ● 总结

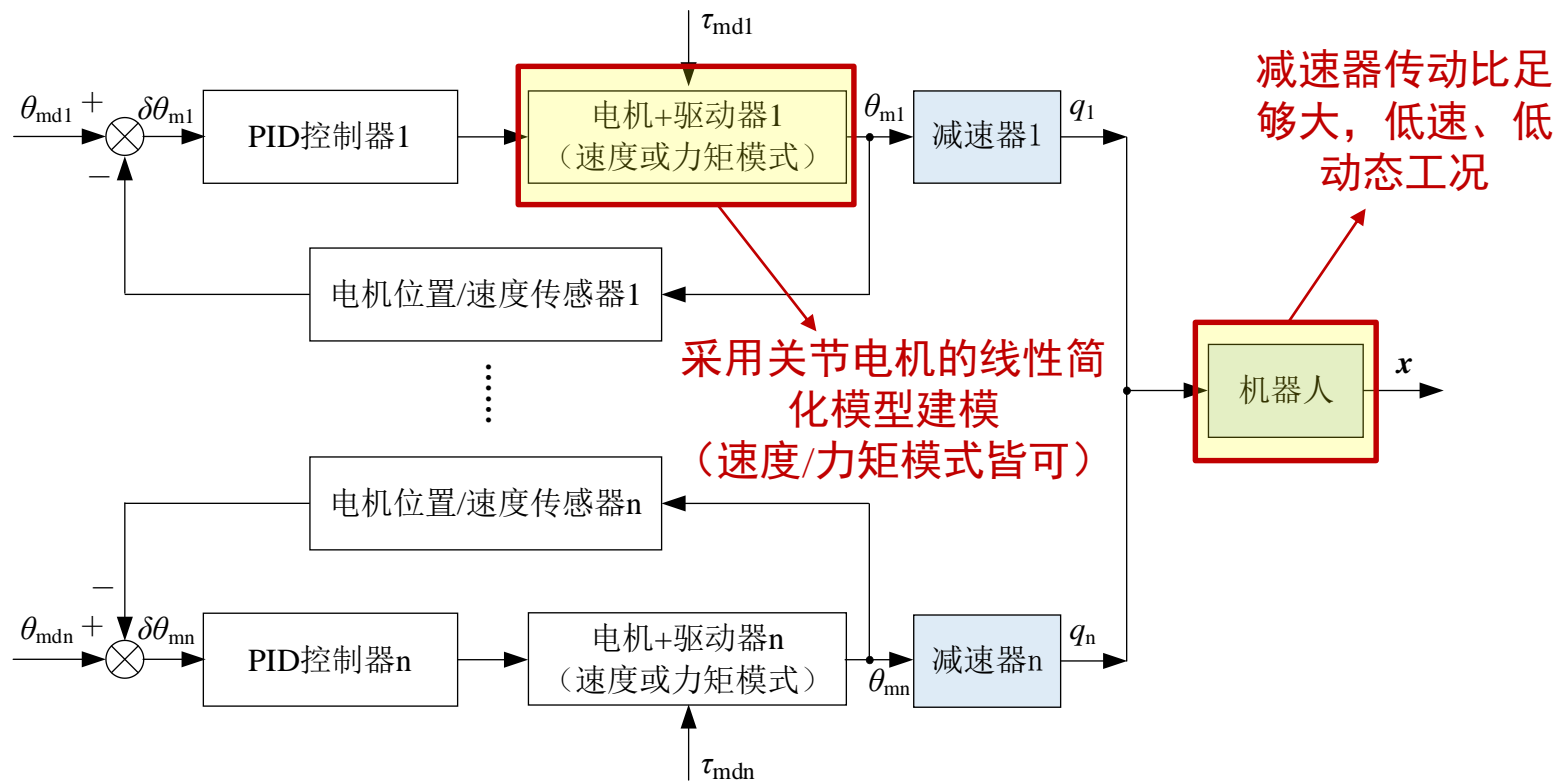
- 传动比越大，干扰力矩影响越小，提高传动比有利于简化控制器设计
- 大传动比机器人工作在低速、低动态时，耦合力矩小，可视为小扰动
- 高速、高动态时，耦合力矩在总力矩中占比明显增加，不能视为小扰动
- 只有传动比很大时，才能把重力矩视为小扰动

### ● 关节电机位置PID控制器设计思路

- 大传动比、低速、低动态机器人，可由简单的PID控制器对关节电机分别进行控制
- 小传动比或者高速、高动态机器人，可以在独立PID控制器的基础上，附加干扰力矩补偿控制量

## 5、机械臂的多关节控制

### ● 独立关节位置PID控制方案原理



#### ➤ 独立关节位置PID控制器特点

- 干扰力矩 $\tau_{md}$ 被视为小扰动, 系统对扰动的抑制能力由PID控制器参数决定
- 电机既可以工作在速度模式, 也可以工作在力矩模式
- 根据关节电机的线性简化模型和控制器参数, 可以设计速度和加速度前馈, 提高对动态信号的跟随性能
- 各控制器可独立运行在低成本单片机上, 控制系统简单