



# **Vers un système de projection icosaédral hiérarchique global sans distorsions pour cartographie Web**

**Mémoire**

**Noureddine Benamrani**

**Maîtrise en sciences géomatiques**  
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

©Noureddine Benamrani, 2015



# Résumé

Les systèmes de projection cartographique adaptés aux services de cartographie web, suscitent encore de nombreuses questions de recherche. La majorité des services de cartographie Web (ex. Google Maps, Bing Maps) utilise la Projection Web Mercator(WMP), mais cette dernière présente de grandes distorsions systématiques notamment dans les régions nordiques. Il nous est alors paru nécessaire de développer une autre méthode permettant de projeter la surface du globe avec un minimum de distorsion. Notre approche s'inspire de la projection myriahedrale qui suppose que chaque face du myriahedron est suffisamment petite de telle sorte que les distorsions soient négligeables. La méthode proposée consiste à explorer une nouvelle approche de tessellation de la surface du globe et qui permet de projeter la surface du globe sur les faces de la tessellation et à plusieurs niveaux de détails. Cela permet de compenser la faiblesse des méthodes de tessellations existantes utilisées dans la cartographie Web. Cette tessellation utilise un icosaèdre comme modèle géométrique de base avec une densité de partitionnement des faces de l'icosaèdre entre les niveaux de récursivité égale à 4. La méthodologie proposée consiste en quatre étapes successives: a) la construction d'une structure hiérarchique qui résulte de la subdivision récursive des faces de l'icosaèdre ;b) la définition d'un système de projection approprié à la tessellation icosaédrique; c) la projection des données géospatiales de la sphère terrestre sur chaque face de l'icosaèdre; d) le dépliage de la tessellation icosaédrique résultante sur un plan en utilisant des algorithmes de calcul du plus court chemin afin de maintenir le voisinage autour du point d'intérêt. Nous présenterons les étapes de développement et d'implémentation du système proposé et les résultats obtenus dans le cadre de ce projet de recherche. L'étude comparative avec d'autres systèmes de projection montre que notre approche minimise mieux les déformations par tout sur le globe et surtout dans les régions nordiques.



# **Abstract**

Map projection systems adapted to web mapping services still raise many research questions. The majority of web mapping services (ex. Google Maps, Bing Maps) use Web Mercator Projection (WMP) which introduces large systematic distortions in spatial data especially in polar regions. Therefore, it is necessary to develop an alternative method for projecting these regions with minimal distortions. Our approach is inspired of myriahedral projections which assume that each face of a myriahedron is small enough so that the distortions are negligible. Here, in this research work we propose a new approach for the tessellation of the surface of the globe and the projection of the spatial information from the globe to the faces of the tessellation at different levels of details. This compensates for the weakness of the methods used for tessellation in the existing web mapping systems. The proposed tessellation is created based on an icosahedron with a partitioning density of the faces equal to 4. The proposed methodology consists of four stages: a) constructing of a hierarchical structure resulting the recursive subdivision of the faces of the icosahedron, while maintaining topological relationships between the triangles in each level of detail; b) defining of an appropriate projection system to the icosahedral tessellation; c) projecting of geospatial data of the terrestrial sphere on each face of the icosahedron; d) unfolding the resulting icosahedral tessellation on a plane around a point of interest. Here we present different stages of development and implementation of the proposed system and the results obtained in the framework of this research project. The comparative study with other projection systems shows that our approach allows to better minimize different distortions everywhere on the globe and specially in the polar regions.



# Table des matières

Résumé.....	iii
Abstract .....	v
Table des matières .....	vii
Liste des tableaux.....	xii
Liste des figures .....	xiii
Liste des abréviations et des sigles .....	xix
Remerciements.....	xxi
 Chapitre 1: Introduction.....	1
1.1.    Mise en contexte .....	1
1.2.    La Problématique .....	4
1.2.1.    Problème général.....	4
1.2.2.    Problèmes Spécifiques .....	6
1.3.    Objectifs .....	9
1.3.1.    Objectif 1 : Conception d'une structure myriahédrale hiérarchique .....	9
1.3.2.    Objectif 2 : Définition d'un système de projection local .....	9
1.3.3.    Objectif 3 : Dépliage du maillage polyédral sur un plan.....	10
1.3.4.    Objectif 4 : Évaluation et validation de l'approche.....	10
1.4.    Méthodologie .....	10
1.4.    La structuration du document.....	12
 Chapitre 2: Revue de littérature .....	15
2.1.    Systèmes de projection utilisés pour la cartographie web.....	15
2.1.1.    Système de projection Web Mercator (WMP) .....	16
2.1.2.    Approches de réduction des distorsions causées par WMP .....	20
2.2.    Tessellation hiérarchique d'un solide.....	24
2.2.1.    Tessellation des surfaces des solides pour la génération d'une structure hiérarchique.....	25
2.2.2.    Tessellation de la sphère .....	32
2.3.    Systèmes d'indexation utilisés dans les structures hiérarchiques .....	39

2.4.	Génération de tuilage pour le cache dans les services de cartographie Web.....	43
2.5.	Dépliage des structures polyédrales .....	45
2.5.1.	Principe et définitions.....	45
2.5.2.	Algorithmes de dépliage.....	46
2.5.3.	Parcours des graphes et le calcul des arborescences couvrantes pour le dépliage 50	
2.5.3.1.	<i>Parcours en largeur (Breadth First Search) .....</i>	51
2.5.3.2.	<i>Parcours en profondeur DFS (Dirth First Search) .....</i>	52
2.5.3.3.	<i>Calcul de plus court chemin (Shortest Path) .....</i>	53
1.	<i>Calcul de l'arbre couvrant minimal (Minimum Spaning Tree) .....</i>	55
2.6.	Synopsis .....	57
Chapitre 3: Conception d'un système de projection icosaédral hiérarchique .....		59
3.1	Critères pour la conception d'un système de projection sans distorsion.....	60
3.2. 1	Critère 1 : un système de projection conforme et équivalent .....	62
3.2. 2	Critère 2 : Minimiser les interruptions .....	67
3.3.	Solution proposée .....	70
3.3.1.	Définition des éléments de base constituant l'icosaèdre .....	71
3.3.2.	Gestion de la structure hiérarchique .....	75
3.3.3.	Définition d'un système de projection local pour projeter les données géospatiales sur les faces de l'icosaèdre.....	80
3.3.4.	Dépliage dynamique de la structure icosaédrale hiérarchique .....	86
3.3.5.	Gestion du dépliage par pondération des arêtes .....	91
3.4.	Conclusion.....	93
Chapitre 4: Implémentation de la Solution et résultats obtenus.....		95
4.1.	Introduction .....	95
4.1.1.	Implémentation de la Hiérarchisation .....	96
4.1.2.	Projection des données géo-spatiales sur l'icosaèdre .....	101
4.1.3.	Algorithme de dépliage de la structure hiérarchique icosaédrale .....	103
4.1.4.	Dépliage de la structure icosaédrale avec la texture.....	111
4.1.5.	Gestion des interruptions dans la projection icosaédrale.....	112
4.2.	Élaboration d'une approche de validation.....	119
4.2.1.	Évaluation de la performance de la grille de la tessellation .....	120
4.2.2.	Évaluation de la projection de l'icosaèdre sur un plan.....	129

4.2.3.    Évaluation de temps de traitement et de calcul .....	130
4.3.    Conclusion .....	130
Chapitre 5:    Conclusions et perspectives .....	133
5.1.    Retour sur les objectifs.....	133
5.2.    Perspectives et travaux futurs.....	135
BIBLIOGRAPHIE .....	139



# Liste des tableaux

Tableau 2.1: La liste d'adjacence d'un graphe connecté par l'algorithme Dijkstra .....	55
Tableau 3.1: Caractéristiques géométriques des polyèdres réguliers [White <i>et al.</i> , 1992] ...	65
Tableau 3.2: Coordonnées cartésiennes des sommets de l'icosaèdre .....	71
Tableau 3.3: Les relations topologiques dans la structure icosaédrale. a) relations entre les faces et les vertex; b) relations entre les arêtes et les vertex; c) relations entre les arêtes et les faces.....	74
Tableau 3.4: Polyèdres réguliers vérifiants la formule d'Euler.....	75
Tableau 4.1: Relation d'Euler entre les éléments de base de la tessellation.....	99
Tableau 4.2: Matrice d'adjacence unitaire pour 10 faces de l'icosaèdre .....	112
Tableau 4.3: Matrice d'adjacence en utilisant des poids différents.....	114
Tableau 4.4: Propriétés intrinsèques de la tessellation triangulaire hiérarchique .....	122
Tableau 4.5: Calcul de la déviation maximale de la distance inter-vertex .....	125
Tableau 4.6: Calcul de la déviation maximale de la zone d'estimation d'un vertex .....	126
Tableau 4.7: Évaluation de l'approche selon la préservation des aires des surfaces .....	130



# Liste des figures

Figure 1.1: Développement des services de cartographie Web [Schmidt & Weiser, 2012] .....	2
Figure 1.2: Projection de Mercator avec les ellipses de Tissot.....	5
Figure 1.3: Les problèmes de cache dans la projection WMP au Canada [Horwood, 2011] .....	8
Figure 1.4: Diagramme d'activité en UML de la méthodologie de recherche .....	12
Figure 2.1: Tessellation quadrilatère utilisée par la projection WMP .....	16
Figure 2.2: Distorsions dans la projection WMP.....	17
Figure 2.3: Différence approximative en ordonnée pour coordonnées entre Mercator et Web [Battersby <i>et al.</i> , 2014].....	19
Figure 2.4: Différence entre la Projection WMP et Mercator conforme (Différence en ordonné des coordonnées) [Zinn, 2010]. .....	20
Figure 2.5: Tessellation de la sphère par les polyèdres réguliers [Gregory <i>et al.</i> , 2008].....	22
Figure 2.6: Tessellation de l'espace par des primitives géométriques régulières[Sammari <i>et al.</i> , 2014]. .....	24
Figure 2.7: Raffinement d'un polygone (les points de contrôle sont en noir, les points de vertex sont en jaune et les points des arêtes sont en vert, le point de face en rouge) .....	26
Figure 2.8: Trois premiers niveaux de subdivision d'un cube par l'algorithme Catmull-Clark[Cox, 2011] .....	27
Figure 2.9: Trois premiers niveaux de subdivision d'un cube par l'algorithme Doo-Sabin [Cox, 2011] .....	29
Figure 2.10: Subdivision de Loop (ratio de multiplication=4): les nœuds en rouge .....	31
Figure 2.11: Subdivision de Loop (ratio de multiplication=9) .....	32
Figure 2.12: Taxonomie des approches de tessellation pour la création des grilles globales [Kimerling <i>et al.</i> , 1999] .....	33
Figure 2.13: Subdivision de Loop sur l'icosaèdre [Fuhrmann, 2009] .....	36
Figure 2.14: Projection gnomonique: principe de fonctionnement .....	37
Figure 2.15: Projection gnomonique sur la base d'un icosaèdre [Furuti 2004].....	37
Figure 2.16: Décomposition des faces planes et sphériques[Erika E. Harrison, 2012] .....	38
Figure 2.17: Projection de Snyder équivalente sur les faces de l'icosaèdre [Furuti 2004] ...	38
Figure 2.18: Projection de Fuller « Dymaxion Map ».....	39

Figure 2.19: Les relations entre les zones UTM (A) : sous-zones et (B): les cellules (patchs) [Mark & Lauzon, 1985].....	40
Figure 2.20: Indexation par la méthode QTM sur les faces d'un octaèdre basée sur la mesure de la distance le long des axes [Dutton, 1996] .....	41
Figure 2.21: Système d'étiquetage dans la "sphère Quadtree", a) étiquetage de la face racine; b) étiquetage de la face racine en deux itérations de subdivision(1 :4) [Fekete & Treinish, 1990] .....	42
Figure 2.22: Étiquetage d'un arbre avec trois niveaux de subdivision [Lee & Samet, 2000].....	43
Figure 2.23: Recherche des voisins de taille égales, a) voisin de droite de 0011100, b) voisin de droite de 01110001, c) voisin de verticale de 10100111 [Lee & Samet, 2000] ...	43
Figure 2.24: Schéma de tuilage et d'indexation adoptée dans Bing Maps pour trois niveaux de détail [Schwartz, 2013] .....	45
Figure 2.25: Dépliage d'un cube par : a) dépliage suivant les vertex « Edge-unfolding », b) dépliage général « general-unfolding » [Demaine & O'Rourke, 2007] .....	46
Figure 2.26: Dépliage d'un polyèdre convexe par l'algorithme étoile [O'Rourke, 2008]...	47
Figure 2.27: Dépliage d'un polyèdre convexe par l'algorithme source [O'Rourke, 2008] .	47
Figure 2.28: Recherche en largeur (BFS).....	51
Figure 2.29: Recherche en profondeur (DFS).....	52
Figure 2.30: Calcul du plus court chemin avec l'algorithme Dijkstra .....	54
Figure 2.31: Arbre couvrant minimal de l'algorithme de Prim.....	56
Figure 3.1: Les propriétés des projections Myriahédrale[Wijk, 2008] .....	62
Figure 3.2: Le dépliage des cinq polyèdres réguliers [Fisher & Miller, 1944] .....	63
Figure 3.3: Attribution des poids aux arêtes de l'icosaèdre dans l'approche Myriahédrale	68
Figure 3.4: Dépliage optimal de l'icosaèdre[Wijk, 2008] .....	69
Figure 3.5: Configuration optimale du dépliage de l'icosaèdre autour d'un point d'intérêt (Province du Québec) .....	70
Figure 3.6: Icosaèdre inscrit dans une sphère de rayon unité [Popko, 2012 ].....	72
Figure 3.7: Orientations des faces voisines. a : orientations non-compatibles, b : orientations compatibles.....	73
Figure 3.8: Maillage icosaédral: subdivision des faces et étiquetage des vertex .....	76
Figure 3.9: Construction de l'arbre hiérarchique sur l'icosaèdre .....	76
Figure 3.10: système d'étiquetage des faces utilisé .....	77

Figure B.11: Subdivision polyèdrale bi-fréquence (chaque arête est subdivisée en deux) ou de Loop (1 :4) des faces de l'icosaèdre.....	79
Figure B.12: Configuration d'un icosaèdre aplati avec 20 faces et 22 vertex.....	80
Figure B.13: Transformation des coordonnées U, V de l'image raster dans le système cartésien du maillage icosaédral .....	81
Figure B.14: Principales étapes de la projection des données raster sur les faces de l'icosaèdre.....	83
Figure B.15: Principe de système de projection adopté .....	85
Figure B.16: Calcul de l'arbre couvrant d'un icosaèdre par l'algorithme BFS.....	86
Figure B.17: Dépliage de l'icosaèdre selon : a) l'algorithme de plus court chemin et b) l'algorithme de l'arbre couvrant minimal .....	88
Figure B.18: Principe de projection des faces l'une par rapport à l'autre [Liu & Tai, 2002] .....	89
Figure B.19: Transformation des coordonnées des vertex dans le repère absolu .....	90
Figure B.20: Graphe pondéré de l'icosaèdre .....	92
Figure 4.1: Positionnement du repère orthogonal par rapport à l'icosaèdre et la sphère .....	96
Figure 4.2: Définition des éléments de la structure icosaédrale .....	97
Figure 4.3: Définition des éléments de base de la structure icosaédrale .....	97
Figure 4.4: Huit premiers niveaux de raffinement d'un maillage triangulaire d'un icosaèdre .....	98
Figure 4.5: Étapes de la création d'une structure hiérarchique icosaédrale.....	100
Figure 4.6: Projection des données raster su les faces de l'icosaèdre en multi-niveaux ....	103
Figure 4.7: Arbre quaternaire calculé par l'algorithme BFS .....	105
Figure 4.8: Organigramme présentant les phases de dépliage de l'icosaèdre .....	108
Figure 4.9: Processus de dépliage d'une face dans la structure icosaèdre.....	109
Figure 4.10: Résultats de dépliage de l'icosaèdre dans quatre niveaux.....	110
Figure 4.11: Dépliage multi-niveaux de l'icosaèdre.....	111
Figure 4.12:Calcule des chemins de dépliage (cas d'une face qui partage plusieurs chemins).....	115
Figure 4.13: Dépliage de l'icosaèdre. a) poids sont égaux. b) poids sont différents .....	116
Figure 4.14: Dépliage avec pondération a) niveau 1. b) niveau 2 .....	116
Figure 4.15: Dépliage avec pondération a) niveau 3. b) niveau 4. c)niveau 5 .....	117
Figure 4.16: Gestion des interruptions en plusieurs échelles (cas d'une entité surfacique).....	118
Figure 4.17: Préservation des continents par le dépliage pondéré (niveau 1) .....	119

Figure 4.18: Variation logarithmique de l'écart type de la superficie des cellules en multi-niveau .....	123
Figure 4.19: Variation maximale de la distance inter-vertex dans les 10 premiers niveaux .....	125
Figure 4.20: Variation de la déviation de l'aire d'estimation des vertex(aires de chaque cellule pentagonale ou hexagonale) .....	127
Figure 4.21: Représentation graphique de la standard déviation de la longueur des arêtes et des angles dans le tessellation icosaédrale .....	128

***Dis : "Sont-ils égaux, ceux qui savent et ceux qui ne savent pas?" sourate 39, verset 9***



# Liste des abréviations et des sigles

**WMP:**Web Mercator Projection

**BFS:** Breadth First Search

**DFS:** Depth First Search

**WMTS:** Web Map Tile Service

**QTM:**Quaternary Triangular Mesh

**STM:** Spherical triangular Mesh

**SQT:**Spherical Quadtree

**EQT:** Ellipsoidal Quadtree

**DGGS:** Discrete Global Grid System

**MST:**Minimum Spanning Tree

**API:**Application Programming Interface

**CAD:** Computer Aided Design

**CAID:** Computer-Aided Industrial Design

**ISERM:**Iterative Strain Energy Relaxation

**IISERM:**Improved Iterative Strain Energy Relaxation

**HCE:** Hyper-Commun Edges

**ERBE:** Earth Radiation Budget Experiment



# **Remerciements**

La première personne que je tiens à remercier est mon directeur de recherche, le professeur Mir Abolfazl Mostafavi, qui m'a dirigé et m'a encouragé tout le long de ma maîtrise avec générosité.

J'aimerais remercier également, le professeur Reda Yaagoubi, pour ses conseils et ses commentaires le long de mon mémoire. Je lui considère comme mon deuxième directeur. Je ne peux pas oublier Belko Abdoul Aziz Diallo pour son aide continue tout le long de ma maitrise et dans certains casse-têtes de nature informatique. J'aimerais remercier tout le personnel du Centre de Recherche en Géomatique (CRG) de l'université Laval, pour leur disponibilité et judicieux conseils.

Enfin, ma profonde gratitude va à ma grande famille et tous mes ami(e)s qui m'ont vraiment encouragée dans mes études universitaires. Merci pour tout.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon pays l'Algérie qui m'a offert une bourse pour mener à terme ma maitrise.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à ma mère qui m'a soutenu tout au long de mes études supérieures. J'ai une pensée toute particulière pour ma fille : Acil, mes frères et leurs épouses: Ali, Mourad, Bachir, Ammar et Réda et leurs enfants et mes sœurs : Aicha, Fatiha et Hadda.

Mes remerciements vont également à tous mes amis au Centre d'Informartion Géographique en Algérie. Merci infiniment et bonne chance à tous mes collègues.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance et ma gratitude au gouvernement algérien et aussi pour mon employeur en Algérie. Ce modeste travail est dédié à la mémoire des martyrs : de la révolution Algérienne et du devoir national.



# Chapitre 1: Introduction

## 1.1. Mise en contexte

La cartographie et la diffusion des données géo-spatiales sur le web ont évolué de manière considérable. La demande en données spatiales sur le web a connu une augmentation remarquable au cours des dernières années Loechel & Schmid [2002]. La performance des services de cartographie web, qui dépend principalement de la vitesse de transfert des données entre l'utilisateur et le service après chaque requête exécutée, est fortement liée à la technique de tuilage utilisée par chaque service. La performance est par conséquent une exigence particulière pour la satisfaction des utilisateurs [Loechel & Schmid, 2002]. L'utilisation de cartographie Web a connu un succès grandissant du fait des évolutions technologiques et scientifiques, ainsi qu'aux capacités des cartes à permettre de communiquer l'information voulue et de satisfaire à l'intérêt des utilisateurs [Bucher, 1997]. Cette tendance vers l'utilisation de l'internet pour la cartographie est caractérisée par l'utilisation des nouveaux outils et des services pour le partage des données géo-spatiales comme le Google Maps<sup>TM</sup>, Bing<sup>TM</sup> Maps, MapQuest et d'autres fournisseurs de l'API commerciales, ainsi qu'un changement dans le jargon lexical avec la naissance de nouveau termes comme : *Neogeography*, *Geostack*, *Crowdsourcing* et *Mash-up*.

Ces applications donnent lieu à une nouvelle ère dans l'évolution des applications cartographiques basées sur le Web, ce qui rend les données géo-spatiales plus accessibles. Ces géo-services facilitent le partage et la visualisation des données cartographiques aux utilisateurs [Jones, 2011]. La figure suivante illustre la chronologie du développement des services et des outils cartographiques et de géo-visualisation sur le Web.

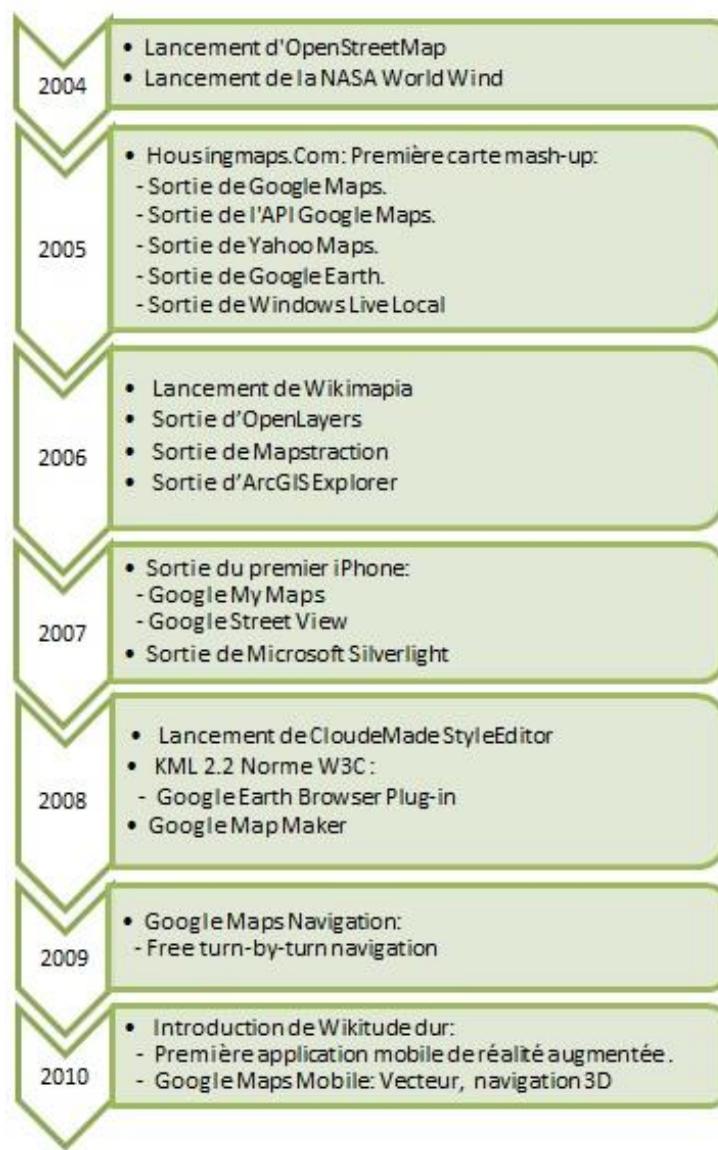


Figure 1.1: Développement des services de cartographie Web [Schmidt & Weiser, 2012]

Aujourd’hui, la cartographie basée sur le Web ou encore appelée cartographie web joue un rôle important dans l’évolution et le développement économique des pays. Pour appuyer ces services de cartographie Web, il y a eu le développement d’une industrie qui est en pleine expansion. Cette industrie présente un marché de dizaines de milliards de dollars par an et emploie des centaines de milliers de personnes dans le monde [McClendon, 2011]. Les outils de cartographie Web sont devenus des outils vitaux pour la prise des décisions et la mise en place des différents politiques et différents systèmes d’aide à la décision comme le Système Inter-organisationnel de

Connaissance de la Situation « SICS »<sup>1</sup> au Canada. Ce dernier requiert des cartes publiées sur le Web (sous forme des services cartographiques) afin de les utiliser pour la gestion des urgences dans le nord canadien [Mainville, 2011].

Les systèmes de projection actuellement utilisés dans la cartographie web tels que Google Maps et Microsoft Bing Maps présentent un problème majeur dû à la couverture mondiale limitée. Ils mettent l'emphase sur une partie du globe alors que les régions nordiques sont affichées partiellement sur la carte (manque de couverture polaire). La couverture coupe à la latitude de 85° nord et sud. Les régions polaires sont très importantes pour de nombreux projets de recherche et de développement, de sorte qu'ils doivent être mappés. En vue des nombreuses activités de recherche qui s'intéressent aux régions nordiques au regard des ressources qu'elles contiennent ainsi que le rôle important de qu'elles jouent dans les phénomène des changements climatiques, le partage des données spatiales de bonne qualité est nécessaire pour mettre en valeur ces zones nordiques. Ceci exige entre autres l'usage des systèmes de projection adaptés aux services web pour toutes ces régions.

En effet, le grand nord canadien est une région primordiale pour le gouvernement fédéral canadien. Le gouvernement a plusieurs programmes de développement et d'investissement de dizaines de milliards de dollars sur différents plans<sup>2</sup>. Une partie importante de ces investissements est dédiée aux activités de cartographie et de topographie pour la production des données spatiales.

Sur le plan économique, le gouvernement canadien prévoit d'investir des milliards de dollars dans des projets comme : le projet Gazier Mackenzie, explorations soutenues d'uranium au Nunavut et au Labrador, mines de diamants dans les territoires du Nord-Ouest et au Nunavut, le projet de pipeline et de l'autoroute de l'Alaska au Yuko, ainsi que le projet d'Investissements Stratégiques dans le Développement Économique du Nord (ISDEN). Également, il y a d'autres programmes qui touchent la recherche scientifique et technologique, comme le programme : *Chaires d'Excellence en*

---

<sup>1</sup> Système dédié à la gestion et d'intervention d'urgence d'échanger de l'information et des alertes concernant un ou des sites fixes par l'entremise de normes et d'architecture ouvertes.

<sup>2</sup><http://www.northernstrategy.gc.ca/index-fra.asp>

*Recherche du Canada* (CERC)<sup>1</sup>. Ce programme a pour objectif d'explorer le potentiel de l'Arctique canadien en utilisant les nouvelles technologies d'observation de la terre.

En outre, l'exploitation des ressources et des ressources en eaux dans l'océan Arctique, l'industrie de pêche, le changement climatique et le recul des masses importantes de glaces donnent un intérêt stratégique à la région circumpolaire; région de plus en plus accessible à la navigation commerciale intra-océanique[Rompkey & Cohchrane, 2009].

En raison de la richesse des régions nordiques en ressources naturelles et des nombreux projets dans ces régions, l'importance des données spatiales pour la prise de décision et la recherche, exige l'usage et la visualisation des données géo-spatiales précises et non déformées sur leurs périphériques nomades par les chercheurs et les géoscientifiques investis dans ces régions. À titre d'exemple, la mise en œuvre d'un cadastre marin dans le cadre de l'étude collaborative entre Ressource Naturelles Canada « RNCAN »<sup>2</sup> et Pêches et Océans Canada « POC » a nécessité l'accès à des données spatiales hydrographiques précises au large des côtes du Canada[Tétreault & al, 2012] sur des plateformes Web.

## 1.2. La Problématique

### 1.2.1. Problème général

Les distorsions dans les projections cartographiques constituent un problème très ancien, qui est apparu avec la naissance de la cartographie. La représentation de la surface de la terre sur un plan a attiré l'attention de plusieurs scientifiques et mathématiciens. En effet, il n'y a aucune méthode de projection permettant de représenter la surface du globe sur un plan sans créer des distorsions. Mathématiquement, il est impossible de projeter fidèlement le modèle de la terre sur un plan sans provoquer des déformations, car il s'agit d'une surface non développable. Dans le but de représenter les distorsions causées par une projection cartographique, l'utilisation de l'indicatrice de Tissot permet de visualiser les déformations sur la carte par la projection d'un petit cercle unitaire dessiné sur le globe. Cette indicatrice préserve sa forme de cercle ou prend la forme d'une ellipse lorsqu'il est projeté sur un plan, ceci en fonction du type de projection utilisée. Les désagréments qui peuvent être

---

<sup>1</sup><http://www.cerc.gc.ca/>

<sup>2</sup><http://www.nrcan.gc.ca/>

engendrés par ces distorsions expliquent les efforts des scientifiques et des experts en cartographie pour chercher des nouvelles approches et techniques de projection afin de minimiser les déformations dans les projections cartographiques et avoir une meilleure visualisation des données géo-spatiales.

Actuellement, la plupart des services et des technologies de cartographie Web qui fournissent les données spatiales tels que le Google Maps<sup>TM</sup> et le Microsoft Bing<sup>TM</sup> Maps utilisent la projection WMP, cette projection cause des distorsions importantes surtout dans les régions nordiques. Pour certains auteurs, la projection WMP représente un mauvais choix, notamment pour les régions de hautes latitudes (ex. Nord canadien Antarctique), à cause des distorsions énormes présentées par cette projection dans ces régions[Jenny, 2012], [Snyder, 1993],[Zinn, 2010]. Par conséquent, l'information spatiale fournit par ces services de cartographie Web ne répond pas aux normes d'exactitude et de qualité exigées des utilisateurs experts ou ordinaires. La figure suivante montre les déformations causées par la projection WMP caractérisées par l'indicatrice de Tissot.

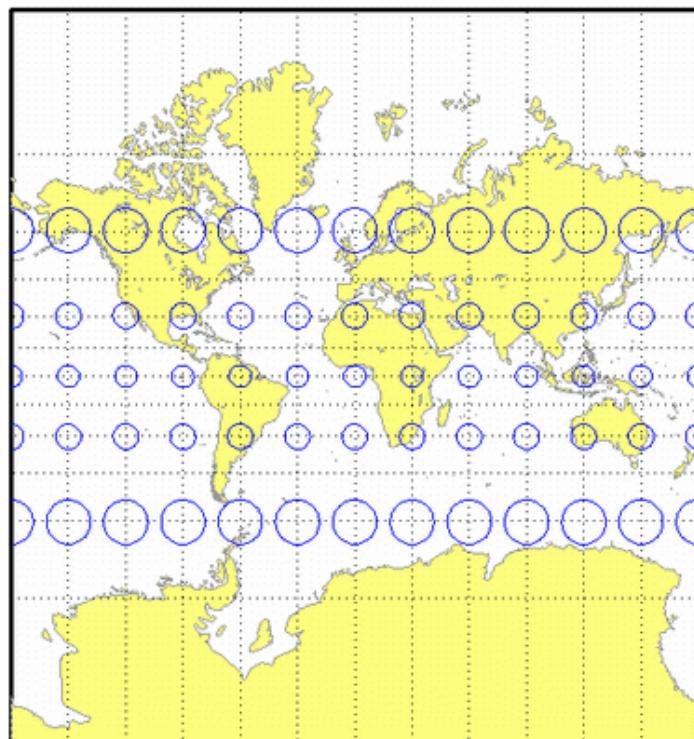


Figure 1.2: Projection de Mercator avec les ellipses de Tissot

En général, les principales déformations qui sont présentées par la projection WMP sont:

1. Grandes distorsions dans les régions de haute latitude: les déformations deviennent importantes avec l'éloignement par rapport à l'équateur.
2. Impossibilité de montrer la totalité du globe et d'avoir une vue globale, car le pôle est représenté par une ligne.
3. Les entités dans les zones à différentes latitudes ne peuvent pas être visuellement comparées, à cause de déformation surfacique induite par la projection de Mercator[Jenny, 2012].

Face aux exigences accrues en termes d'exactitude et de qualité chez les utilisateurs qualifiés et semi-qualifiés pour les données géo-spatiales (surtout dans les régions nordiques), l'utilisation des services actuels de cartographie Web ne répond pas aux attentes de nombreux utilisateurs, en raison des grandes distorsions engendrées par la projection Quasi-Mercator, «Mercator modifiée»<sup>1</sup> ou «Web Mercator Projection»[Zinn, 2010].

### 1.2.2. Problèmes Spécifiques

Comme nous avons mentionné plus haut, les distorsions dues aux systèmes de projection utilisés par différents services de cartographie web figurent parmi les inconvénients majeurs relevés par les différents types d'utilisateurs. Ces problèmes de distorsion proviennent principalement de trois sources:

#### *1) Distorsions causées par le choix de la surface développable*

Les projections cartographiques peuvent également être classées en fonction de la forme de la surface développable par laquelle la surface de la terre est projetée. Une surface développable est une forme géométrique simple capable d'être aplatie sans étirement ou déchirure[Nationalatlas, 2013], comme le cylindre, un cône, ou un plan. Certaines méthodes de projection engendrent des déformations, en raison du modèle utilisé dans ces projections comme le cylindre, le cône ou un plan tangent. Par exemple, la projection de Lambert cylindrique équivaut localement les formes au niveau

---

<sup>1</sup><http://blogs.esri.com/esri/arcgis/>

des régions équatoriales[Wijk, 2008]; par contre, les distorsions deviennent importantes avec l'éloignement par rapport aux régions équatoriales.

### *2) Distorsions causées par le choix de la méthode de projection de la surface du globe sur un plan*

Un système de projection permet de transformer une surface tridimensionnelle modélisant le globe (ellipsoïde, sphère) à une surface de deux dimensions (plan) au moyen des équations mathématiques spécifiques. Les projections cartographiques permettent d'exprimer la relation entre un point  $P_1$  et son image  $P_2$ . Dans cette transformation les coordonnées géographiques  $(\varphi, \lambda)$  sont transformées à des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  qui représentent les positions des points sur la carte plane. La transformation est définie par des fonctions de coordonnées :

$$x = f(\varphi, \lambda); y = g(\varphi, \lambda)$$

La fonction de transformation des coordonnées varie d'un système de projection à un autre, l'approximation de la réalité est à cet effet également différent. Pour cette raison, la précision des données dans les cartes résultantes est dépendante des paramètres définissant chaque équation de transformation.

### *3) Distorsions causées par le choix de la tessellation*

La majorité des méthodes de projection actuelles comme le WMP utilise une tessellation quadrilatérale régulière qui présente des déformations dans les régions polaires. Les cellules ne sont pas réparties d'une façon homogène sur la totalité du globe; elles deviennent rapidement très petites et très nombreuses avec l'éloignement par rapport à l'équateur. Par exemple, au Canada, le cache varie du 1.4x pour la latitude 45°N jusqu'à 9.6x à latitude 84°N[Horwood, 2011]. La figure suivante montre la

déformation du cache dans la projection WMP pour les latitudes supérieures à 84°N qui



devient extrême dans ces régions

Figure 1.3: Les problèmes de cache dans la projection WMP au Canada [Horwood, 2011]

Ces problèmes montrent les limites des méthodes de projection basées sur une tessellation quadrilatérale dans la cartographie globale. Bien que ces méthodes fonctionnent plus ou moins sur une grande partie du globe, elles présentent tout de même plusieurs déformations dans la cartographie globale et surtout les régions nordiques [Miller & Gaskins, 2009]; on peut présenter:

- 1) L'introduction d'une grande distorsion systématique est particulièrement dans les régions du Nord.
- 2) Les tuiles (cellules) deviennent très grandes et maigres près des pôles.
- 3) Les tuiles ont une arête qui dégénère vers un point au pôle.
- 4) Le nombre important des tuiles dans les régions polaires comparées avec les régions équatoriales.

Malgré les avancées scientifiques, les systèmes de projections actuels utilisés pour la cartographie web ne peuvent pas présenter la surface du globe sans engendrer des déformations. Ces déformations sont reliées à la forme, à la superficie ou encore les déchirures entre certaines régions du globe. La plupart des systèmes de cartographie web utilisent des surfaces développables sur laquelle la surface du globe est projetée sans déchirures. Par conséquent, ces systèmes ne peuvent pas produire des cartes

conformes et équivalentes simultanément[Wijk, 2008]. A cet effet, il est nécessaire d'introduire des déchirures permettant de produire un système de projection qui préserve une préservation de la forme et de la superficie.

### **1.3. Objectifs**

Le présent projet de recherche a pour objectif de proposer une nouvelle approche de projection permettant de minimiser les distorsions de cartographie Web. Cette approche s'inspire de l'approche Myriahédrale proposée par Wijk [2008] dans le but de minimiser les distorsions. Afin d'atteindre notre objectif général, nous avons défini les objectifs spécifiques suivants :

#### **1.3.1. Objectif 1 : Conception d'une structure myriahédrale hiérarchique**

Pour avoir un système de projection Myriahédrale, il est nécessaire de créer une tessellation hiérarchique du modèle du globe sur la base d'un développement itératif d'un polyèdre régulier. La conception d'une structure hiérarchique polyédrale consiste à générer une tessellation triangulaire présentant plusieurs niveaux de détails. La tessellation polyédrale produit des faces triangulaires qui peuvent être subdivisées récursivement. La structure spatiale de cette tessellation est définie par l'ensemble des sommets et des arêtes, avec une topologie bien déterminée afin de simplifier la recherche et assurer une rapidité de l'affichage et de la récupération des vues à différentes résolutions.

#### **1.3.2. Objectif 2 : Définition d'un système de projection local**

Dans l'approche Myriahédrale, on cherche à choisir une méthode de projection permettant de projeter la surface du globe sur la face du polyèdre en tenant compte du niveau de distorsion tolérable. À cet effet, on envisage d'utiliser des méthodes de projection locales comme la projection gnomonique ou de Snyder équivalente qui sont adaptées à la tessellation utilisée dans notre système myriahédral.

### **1.3.3. Objectif 3 : Dépliage du maillage polyédral sur un plan**

Après l'élaboration de la tessellation triangulaire qui couvre la totalité de la surface du modèle choisi, il est nécessaire d'effectuer un découpage et un dépliage de la tessellation obtenue sur un plan, en projetant toutes les faces de polyèdre sur un plan par rapport à la face de base de dépliage.

Le résultat de cette opération donne des cartes "inhabituelles" avec un grand nombre d'interruptions, mais avec des distorsions très minimes. Par la suite, il faut minimiser ces ruptures afin d'avoir une cartographie continue. Notre objectif consiste à développer des algorithmes permettant de gérer les interruptions et de définir les endroits où les déchirures sont non souhaitables et les autres endroits où ces déchirures sont acceptables. La solution que nous voulons développer permet d'avoir des cartes présentant un minimum d'interruptions et de déformation dans le champ d'intérêt de l'utilisateur.

### **1.3.4. Objectif 4 : Évaluation et validation de l'approche**

Cette partie vise à évaluer l'approche proposée en effectuant une étude comparative par rapport à la projection WMP utilisée par la plupart des services de cartographie Web. Dans cette évaluation, on se base principalement sur la comparaison des distorsions.

La méthodologie adoptée pour développer l'approche adoptée en vue de répondre à l'objectif principal et aux objectifs spécifiques de notre recherche sera présentée dans la section suivante.

## **1.4. Méthodologie**

Pour atteindre les objectifs présentés ci-dessus, nous avons adopté une méthodologie de recherche qui s'appuie principalement sur une démarche hypothético-déductive. En outre, nous avons opté les méthodes agiles comme méthodes de développement de notre modèle qui sont approuvées pour le développement des systèmes. La méthode "étude de documents "[Paillé, 2007] pour situer notre projet par rapport aux autres travaux antérieurs traitant de la présente problématique.

Afin de pouvoir répondre à nos objectifs, notre recherche sera articulée selon les phases suivantes :

- 1) Revue de littérature : pour atteindre nos objectifs, nous devons tout d'abord procéder à une revue de la littérature exhaustive qui couvre les principales méthodes de tessellation de la surface de modèle du globe terrestre. Ensuite, il faut approfondir nos connaissances par rapport aux concepts théoriques relatifs à la cartographie, notamment les divers systèmes de projection cartographique utilisés dans les applications web. En outre, il est nécessaire d'étudier en détail les méthodes de tessellation avec leurs caractéristiques afin de choisir la meilleure. La tessellation choisie nous permet d'avoir un système hiérarchique avec des cellules homogènes, et sans limites. En plus, le choix de la méthode d'indexation est important pour sélectionner la plus adaptée à la tessellation choisie.
- 2) La conception : cette phase sera consacrée à l'élaboration d'un modèle mathématique qui comporte les différentes fonctions et les matrices de transformation des coordonnées utilisées dans le processus de projection et de dépliage et de la projection. Par la suite, nous élaborerons les algorithmes nécessaires pour créer la structure hiérarchique sur la sphère, ainsi que les algorithmes qui servent à découper et à déplier ce maillage sur un plan.
- 3) Implémentation : Cette phase sera dédiée à l'implémentation et la concrétisation des aspects théoriques de l'approche. Elle consiste à implémenter les algorithmes proposés dans la phase de la conception. Les outils (logiciel et langage) qui seront utilisés pour le développement de la structure devront être déterminés.
- 4) Validation : Après avoir terminé la phase d'implémentation et le développement du modèle, ce dernier sera prêt pour la validation. La validation consiste à évaluer le système de tessellation polyédrale hiérarchique qui est la base dans la conception d'un système de projection qui peut minimiser les distorsions dans les produits de cartographie Web. Une deuxième validation consiste à comparer le système de projection développé avec le système WMP qui est utilisé dans la plupart des services de cartographie Web.

La figure suivante résume les différentes étapes de la méthodologie que nous avons adoptée afin d'atteindre les objectifs de notre recherche.

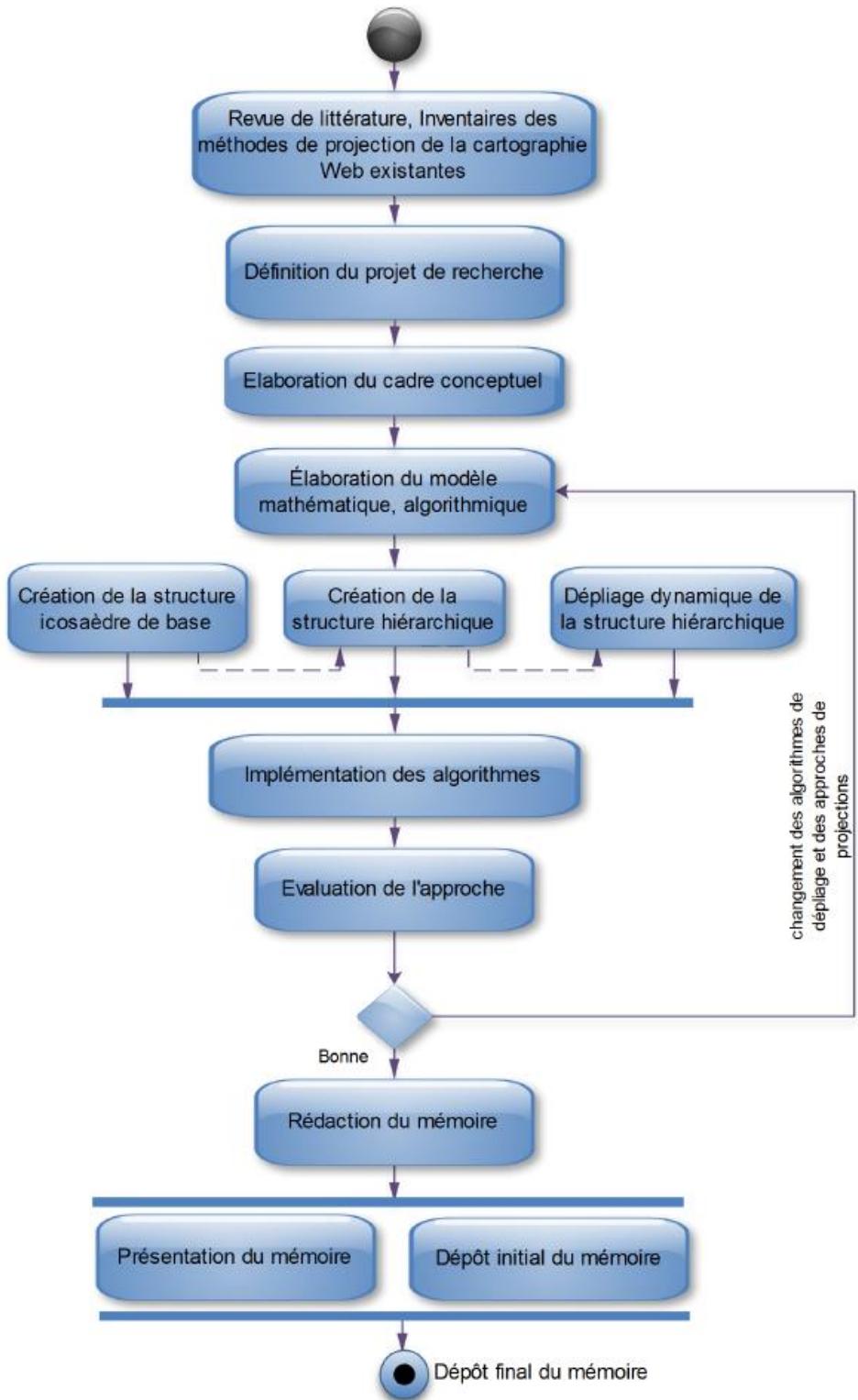


Figure 1.4: Diagramme d'activité en UML de la méthodologie de recherche

## 1.4. La structuration du document

Dans ce premier chapitre, nous avons exposé le cadre général du travail de recherche. Ce chapitre permet au lecteur de mieux comprendre la problématique de recherche, de

cerner les objectifs du présent mémoire, de présenter les grandes lignes de notre méthodologie de travail utilisée pour atteindre nos objectifs.

La suite de ce mémoire est divisée en quatre chapitres :

Le deuxième chapitre présente les détails de la problématique à travers d'une revue de littérature pertinante avec une présentation de quelques concepts fondamentaux sur lesquels s'est fondée notre recherche.

Le troisième chapitre présente le cadre conceptuel de la solution. Dans ce chapitre nous avons illustré les étapes de la mise en place de la solution proposée par l'implémentation de deux algorithmes : le premier servant à élaborer une structure polyédrale hiérarchique afin d'épouser au mieux la surface du globe terrestre et présenter les données géospatiales dans les différents niveaux de détail. Le deuxième algorithme permettant de découper et à déplier la structure résultante sur un plan. Ce chapitre décrit également le système de projection qui a été proposé.

Le quatrième chapitre de l'implémentation est consacré à la discussion des résultats obtenus suite à l'implémentation de la solution proposée. Une validation de notre structure hiérarchique en effectuant une étude analytique à partir de calcul de certaines propriétés de la tessellation polyédrale. Également, une validation de notre approche est effectuée à travers une étude comparative avec la projection WMP.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons présenté la conclusion obtenue suite aux résultats de l'implémentation de l'approche illustrée dans le chapitre 4 de ce mémoire de maîtrise. Nous discuterons également l'apport de notre travail de recherche pour l'amélioration de la qualité des produits et services cartographiques disponibles sur le Web. Suite à cela, nous présenterons les perspectives et les suggestions pour des travaux à venir.



# **Chapitre 2: Revue de littérature**

Dans le chapitre 1, nous avons exposé le cadre théorique de notre recherche qui vise à développer un nouveau système de projection (comme alternative au système WMP utilisé par la plupart des services de cartographie web) afin d'offrir une cartographie web globale qui minimise les distorsions, surtout dans les régions nordiques. Le principal objectif de notre recherche est de développer un système de projection icosaédral hiérarchique dans le but de minimiser les distorsions dans les produits cartographiques quel que soit l'échelle ou le lieu de visualisation. Nous avons présenté également les motivations, les problèmes liés à l'utilisation de système de projection WMP, ainsi que la méthodologie à suivre permettant de résoudre ce problème. Dans ce chapitre, nous présenterons un inventaire de différentes approches de projection utilisées dans la cartographie web, notamment la projection WMP la plus utilisée, afin de ressortir les avantages et les inconvénients liés à l'utilisation de chacune des méthodes. En outre, nous allons aborder les aspects liés la tessellation de la surface du globe et les approches utilisées avec leurs avantages et leurs limites. Également, nous discuterons les différentes méthodes de projection utilisées à savoir la projection de Fuller, gnomonique, Snyder, etc. Finalement, nous étalerons le principe de dépliage et les algorithmes utilisés pour projeter une structure géométrique 3d sur un plan.

## **2.1. Systèmes de projection utilisés pour la cartographie web**

Il est très important de choisir une projection cartographique adaptée pour représenter localement ou globalement la surface du globe terrestre; en vue d'assurer une certaine qualité aux données projetées. Snyder [1987] a défini la projection cartographique comme « une représentation systématique de tout ou une partie de la surface d'un modèle rond, en particulier la Terre, sur un plan ».

Face à l'évolution des outils de traitement et d'analyse des données spatiales, le traitement et la représentation des données géospatiales peuvent désormais s'effectuer à l'échelle globale (globe terrestre). Ceci en raison des moyens technologiques employés qui permettent de traiter d'importantes quantités de données en un temps

raisonnablement réduit. La présence des distorsions au sein des données obtenues reste le plus grand problème persistant dans la représentation plane du globe.

### 2.1.1. Système de projection Web Mercator (WMP)

La projection WMP est un exemple de système de projection utilisé dans la cartographie web. La plupart des services de cartographie Web tels que Google Maps ou Bing Maps utilisent la projection WMP qui est devenue la plus dominante. La projection WMP utilise un cylindre tangent à l'équateur sur la surface du globe. Par conséquent, les régions proches de l'équateur sont moins déformées par rapport aux autres régions, surtout, celles qui sont proches des pôles suite à la projection.

La projection WMP utilise une tessellation quadrilatère qui est basée sur la subdivision de la surface du globe suivant les lignes des méridiens et les parallèles. Les lignes de latitude varient de l'équateur vers les pôles. Les lignes de longitude forment de grands cercles qui divisent la terre en deux moitiés égales et traversent les deux pôles. (Voir Figure 2.1).

La distance entre deux lignes de latitude est toujours la même, par contre elle varie pour les lignes de longitude[Surveillance, 2004]. Par exemple, Un degré de longitude varie selon la latitude dans laquelle on effectue la mesure (ex. un degré de longitude à l'équateur est différente de un degré de longitude à 60° N). En outre, la taille des tuiles dans la tessellation quadrilatère diminue progressivement avec la proximité aux pôles (Nord et Sud).



Figure 2.1: Tessellation quadrilatère utilisée par la projection WMP

Les déformations engendrées par la projection WMP peuvent être remarquées par une simple analyse visuelle de certaines régions terrestres, et cela est plus remarquable dans

les régions du Nord. Par exemple, si nous prenons la province Groenland du Danemark située dans le Nord et qui s'étale sur une superficie de 2,2 millions de km<sup>2</sup> semble avoir une taille plus grande sur la carte, alors qu'en réalité l'Amérique est 8 fois plus grande que le Groenland [Peter, 1997].



Figure 2.2: Distorsions dans la projection WMP

Le WMP est différent par rapport à la projection Mercator [Zinn, 2010] . Selon cet auteur, la projection Mercator est conforme par contre la projection WMP n'est pas conforme, dans laquelle ses loxodromies ne sont pas des lignes droites. Aussi, le WMP utilise le système de référence WGS 84, en utilisant les équations de la projection Mercator sphérique (le demi-grand axe soit  $a$  est égal au rayon de la sphère soit  $R$ ). Par conséquent, ces approximations dans le WMP résultent une perte de la conformité avec d'autres propriétés fondamentales du modèle ellipsoïdale. Par exemple, dans la projection Mercator (ou Mercator sphérique) le facteur d'échelle à un point est uniforme dans toutes les directions, par contre il n'est pas uniforme dans la projection WMP.

Les formules sphériques de Mercator suivant les abscisses (x) et les ordonnées (y) selon le rapport de l'Agence nationale de l'Intelligence Géospatiale (NGA)[NGA, 2014] sont :

$$x = R(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = R \ln \tan(\pi/4 + \varphi/2)$$

$$y = R \tanh^{-1}(\sin \varphi)$$

Où  $\lambda$  : longitude en radian,  $\varphi$  latitude en radian et  $R$  le rayon de la Terre.

Le facteur d'échelle suivant les méridiens ( $h$ ) et le facteur d'échelle suivant les parallèles sont donné par l'équation:

$$h = k = 1/\cos \varphi .$$

Où  $h$  et  $k$  sont les facteurs d'échelle suivant les deux directions, les méridiens et les parallèles successivement.

Dans ce cas  $h=k$ , ce qui veut dire qu'en un point donné les facteurs d'échelles dans toutes les directions sont égaux, ce qui montre que la projection sphérique de Mercator est conforme.

Les équations de transformation par la projection WMP pour un point de coordonnées géographique  $\lambda$  et  $\varphi$  sur la base d'un modèle ellipsoïdique sont données comme suit[NGA, 2014] :

$$R = a$$

$$x = a \lambda$$

$$y = R \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2}$$

$$= a \tanh^{-1}(\sin \varphi) - ae \tanh^{-1}(e \sin \varphi)$$

Où  $a$  : demi petit axe,  $R$  le rayon de la Terre,  $e$  : excentricité (ou la 1<sup>ière</sup> excentricité)

Les facteurs d'échelle dans la projection WMP sont donnés par la relation suivante [Zinn, 2010]:

$$h = q(0.180) = a/p * \cos \varphi ;$$

$$k = q(90.270) = a/N * \cos \varphi$$

Où  $p$  est le rayon de courbure suivant le méridien,  $N$  est le rayon de courbure du premier vertical.

Par conséquent,  $h$  est différent de  $k$ , donc cette projection n'est pas conforme.

Il est difficile de distinguer la différence entre la projection Mercator et la projection Web Mercator avec une vue en perspective surtout sur une échelle globale. [Battersby *et al.*, 2014] et [Zinn, 2010] ont présenté la différence entre les deux projections en calculant la différence en ordonnée des coordonnées.

Dans la Figure 2.3présentée par Battersby *et al.* [2014]montre la différence dans l'ordonnée entre les deux projections varie selon la localisation géographique. La différence apparaît dans les régions qui sont proches des pôles. Cette différence atteint 50 km dans les coordonnées géographiques.

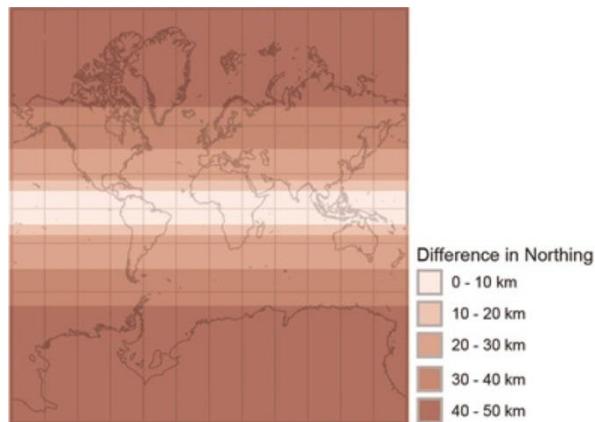


Figure 2.3: Différence approximative en ordonnée pour coordonnées entre Mercator et Web [Battersby *et al.*, 2014].

La figure suivantemontre la représentation graphique de la différence approximative entre la projection WMP et la projection Mercator sphérique dans la coordonnée y, cette différence se manifeste comme une fonction de la latitude[Battersby *et al.*, 2014].

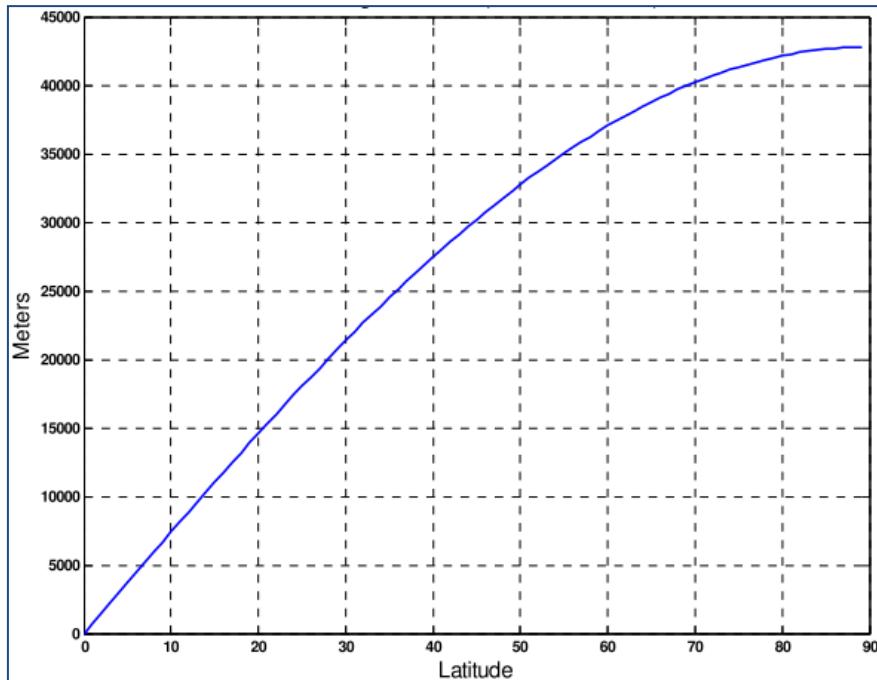


Figure 2.4: Différence entre la Projection WMP et Mercator conforme (Différence en ordonné des coordonnées) [Zinn, 2010].

À l'équateur, la coordonnée égale à 0 et augmente progressivement avec la latitude. La différence de coordonnée y entre les deux projections excède 20 km à la latitude de 30° et dépasse 40 km au-dessus de la latitude 70°. Ceci est significatif, en particulier lorsqu'on considère les cartes à grande échelle.

La projection WMP présente plusieurs limitations lors de l'utilisation des services de cartographie Web. Elle présente des distorsions systématiques majeures qui augmentent avec la latitude en particulier à proximité ou au niveau des pôles (par exemple, dans le nord du Canada, Antarctique). Un autre problème lié à l'affichage de la totalité du globe, les régions polaires qui sont situées à des latitudes supérieures à 85° ne sont pas affichées. Afin que les utilisateurs professionnels et semi-qualifiés puissent exécuter leurs missions même dans les zones nordiques en faisant usage d'une cartographie non déformée, le recours à une projection autre que le système WMP est nécessaire.

### 2.1.2. Approches de réduction des distorsions causées par WMP

La projection WMP n'est pas fiable pour représenter la totalité du globe [Jenny, 2012], deux approches principales ont été proposées pour résoudre le problème de distorsions présentées par la projection WMP : la projection adaptative de type composite et la projection Myriahédrale.

### a) Projection adaptative de type composite

Jenny [2012]a proposé une projection adaptative de type composite, intégrant diverses projections qu'il nomme « Adaptive Composite Map Projections » afin de représenter la totalité du globe avec plusieurs méthodes de projection locales. Selon cette approche, chaque zone du globe est représentée par une méthode de projection particulière qui s'adapte également à l'échelle et la région géographique affichée. À titre d'exemple, il propose d'utiliser la projection WMP pour les régions équatoriales, conique pour les régions centrales et Lambert azimutale pour les régions polaires.

La projection composite donne des résultats meilleurs que ceux obtenus par la projection WMP, mais cette projection composite présente aussi des distorsions angulaires au niveau des limites entre les projections constituant le système de projection composite. Par ailleurs, les projections utilisées dans cette approche présentent aussi des distorsions; c'est le cas de la projection Lambert azimutale équivalente qui est caractérisée par une variation de l'échelle radiale. Le temps de traitement des données au sein de la projection composite est également important du fait d'une reprojection à la volée des données par cette approche [Girin, 2014]; ceci constitue est l'une des limites de cette approche. Les projections utilisées par cette approche ne peuvent pas être efficacement combinées, il ne s'agit donc pas d'un système consistant « seamless »; le recours à la projection WMP pour des régions de plus grandes étendues ne permet non plus de résoudre le problème de non-couverture de toutes les régions polaires.

Girin [2014]a proposé un système similaire multi-projection pour avoir une cartographie globale. Ce système utilise différentes méthodes de projection (azimutale, cylindrique ou conique) dans les différents niveaux de détail. Il vise à proposer la projection qui correspond mieux à chaque niveau de détail et selon la région en cours de visualisation, ainsi que l'étendue de la zone géographique afin de fournir une visualisation globale dynamique avec un minimum de distorsions.

### b) projection Myriahédrale

Wijk [2008]a proposé une deuxième approche de projection dite « Myriahédrale » basée sur une tessellation polyédrale en vue de minimiser les distorsions dues aux systèmes de projection. Cette méthode utilise une approche de tessellation polyédrale qui consiste à

subdiviser la surface du globe sur la base de développement récursive des faces des polyèdres réguliers[Fisher & Miller, 1944],[Holden, 1971] (Figure 2.5) et la projection de la surface du globe sur ces faces. La subdivision récursive des faces de polyèdre permettant de générer une structure composée de petites facettes dont les distorsions deviennent minimes lorsqu'on atteint les niveaux plus fins[Wijk, 2008].

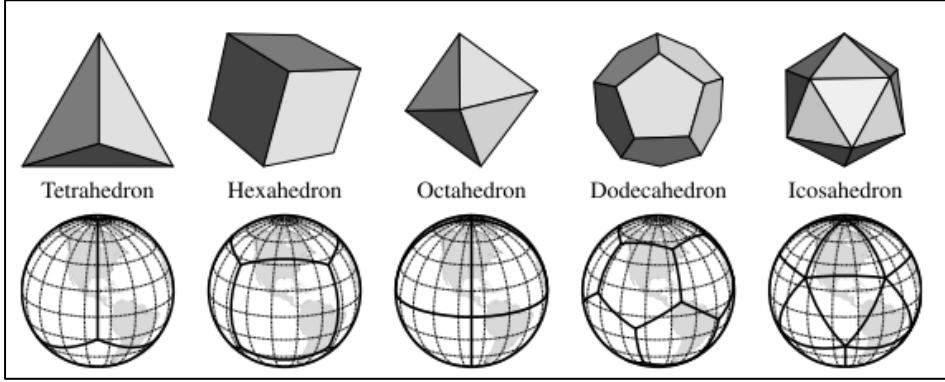


Figure 2.5: Tessellation de la sphère par les polyèdres réguliers[Gregory et al., 2008]

Après la subdivision des facettes des polyèdres, l'approche Myriahédrale consiste à projeter la surface du globe sur chaque face du polyèdre en utilisant une méthode de projection locale. Pour avoir une représentation plane de la surface du globe, après la subdivision des faces de polyèdre, on déplie la structure sur un plan en utilisant des algorithmes de dépliage adaptés à la nature de la surface développable(voir la section 2.5.2 ). Les cartes qui en résultent de dépliage ont un grand nombre d'interruptions, mais sont (presque) conformes et équivalentes.

Le problème majeur dans ce type de projections est la présence des interruptions qui sont remarquables sur les cartes établies. Ces interruptions produisent des cartes inhabituelles qui sont très différentes par rapport aux cartes qui nous sont familières et qui sont obtenues par les méthodes de projections standards. Malgré la présence des interruptions dans les cartes issues de la projection Myriahédrale, elles introduisent moins de déformations par rapport aux projections standards, car elle considère que chaque face du polyèdre doit être suffisamment petite de sorte que les distorsions deviennent négligeables. Parmi les défis à surmonter dans cette approche se distingue le développement d'algorithmes qui permettent de minimiser les impacts des interruptions dans l'ensemble de la région visualisée ceci avec un minimum de distorsions. Wijk [2008] a utilisé un algorithme qui permet de chercher le voisinage dans différents

endroits sur la base du calcul de l’arbre couvrant de poids minimum (MST). À partir de cet algorithme, les continents et les océans peuvent être préservés séparément. Cependant, cet algorithme ne tient pas en considération le voisinage autour de points d’intérêt. Aussi, Wijk [2008] a utilisé dans l’approche Myriahédrale plusieurs types de polyèdres réguliers et lui n’a pas fait un choix pour le polyèdre qui peut être le meilleur dans la modélisation de la surface du globe. En outre, il n’a pas cité quel type de projection a été utilisé pour projeter les données géospatiales sur les faces du polyèdre.

La projection de Wijk [2008] est importante car elle permet de projeter la surface du globe sur les faces d’un polyèdre qui sont considérées suffisamment petites de sorte que les distorsions soient négligeables. Par conséquent, le système de projection Myriahédrale peut vérifier simultanément conformité et l’équivalence (qui sont deux propriétés fondamentales). Cependant, le système développé par Wijk est basé sur un maillage polyédral qui n’est pas hiérarchique, car il a que les cellules dans le maillage sont très petites de telles façons les distorsions soient négligeable. Wijk n’a pas fait une étude pour choisir le meilleur polyèdre de base pour générer la tessellation à adopter. En outre, l’algorithme utilisé dans le dépliage de la structure polyédrale ne tient pas compte la zone d’intérêt. Le dépliage dans le système proposé par Wijk est appliqué sur un maillage dans un niveau plus détaillé seulement. À cet effet, le système à développer doit être basé sur une tessellation hiérarchique. Le choix de la méthode de tessellation est un élément fondamental pour la conception de notre système de projection permettant de représenter les données géo-spatiales sur un plan sans distorsion. Par conséquent, la méthode de tessellation à adopter doit remplir les conditions suivantes :

- ***Hiérarchie***: pour avoir une représentation multirésolution et de pouvoir naviguer entre les échelles afin d’explorer les données à différents niveaux de détails.
- ***Régularité des tuiles***: les tuiles doivent avoir des formes régulières et homogènes quel que soit l’endroit sur le globe ou le niveau de détail lors de l’affichage des données.
- ***S’adapter à la forme de la terre***: la méthode de tessellation doit fournir une structure géométrique qui est la plus proche possible de la sphère.

Les projections myriahédrales permet de préserver les deux propriétés importantes qui sont l’équivalence et la conformité. Ces deux propriétés sont vérifiées simultanément

seulement par ce type de projection. Comme nous avons cité précédemment que les projections myriahédrales sont basées sur la subdivision récursive des faces d'un platonique solide pour rapprocher à la surface du globe. À cet effet, la section suivante présente quelques méthodes de la subdivision des solides platoniques.

## 2.2. Tessellation hiérarchique d'un solide

En partant du fait que le partitionnement de l'espace en portions plus petites permet de le gérer d'une manière efficace, la tessellation de l'espace est importante. Selon Worboys & Duckham [2004] la tessellation d'un espace ou d'une surface est le recouvrement de cette surface par un agencement des polygones qui ne se chevauchent pas. La tessellation est classée en deux types : la tessellation régulière et non régulière. La tessellation régulière correspond au partitionnement de l'espace par des polygones réguliers et égaux (qui ont des arêtes et des angles intérieurs égaux), sinon, la tessellation sera irrégulière [Worboys & Duckham, 2004]. Il existe trois types de tessellation régulière selon les primitives géométriques régulières utilisées et la forme de l'espace à découper, à savoir : les segments de ligne de même longueur dans un espace 1D, le carré, le triangle et l'hexagone avec une même longueur d'arête dans un espace 2D, et les polyèdres réguliers dans un espace 3D [Sammari *et al.*, 2014].

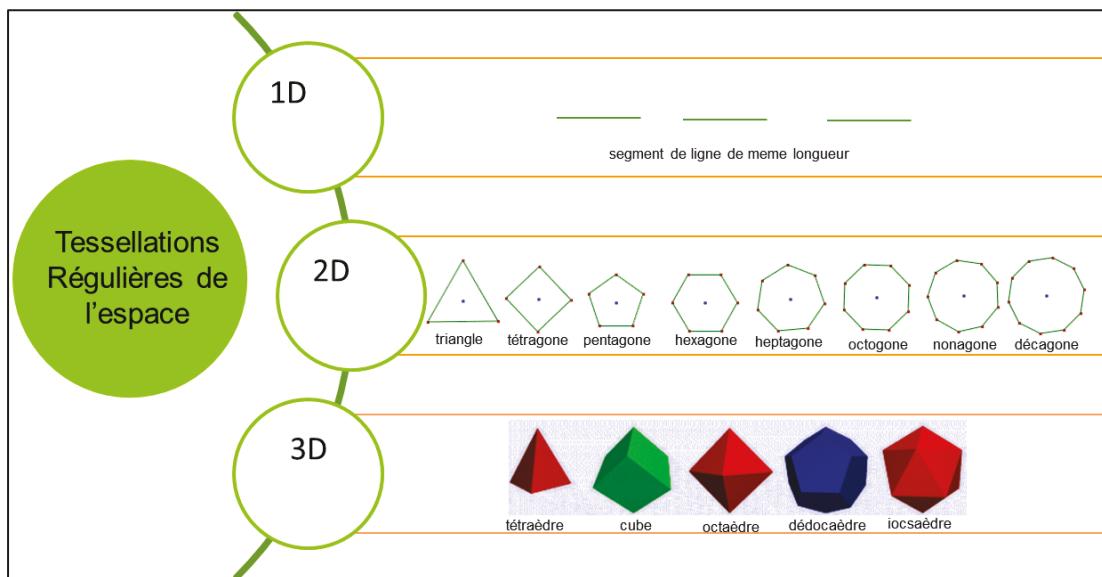


Figure 2.6: Tessellation de l'espace par des primitives géométriques régulières [Sammari *et al.*, 2014].

## 2.2.1. Tessellation des surfaces des solides pour la génération d'une structure hiérarchique

La génération d'une structure hiérarchique qui s'adapte au mieux à la surface du globe est fondamentale pour assurer une représentation multirésolution des données géospatiales selon différents niveaux de détails. Le choix d'un algorithme approprié pour une telle subdivision est un élément important pour construire une tessellation hiérarchique adéquate. Il existe plusieurs algorithmes de subdivision d'une surface permettant d'effectuer le lissage (raffinement) sur un maillage initial avec une structure topologique Lanquetin *et al.* [2002]. Ces algorithmes sont largement utilisés dans plusieurs domaines de modélisation géométrique, notamment l'infographie. Parmi ces méthodes de tessellation, on peut citer celles de Doo-Sabin[1978] et de Catmull-Clark[1978] qui sont développés en 1978. Ils sont utilisés dans plusieurs logiciels de modélisation 3D. Une autre méthode développée par Charles Loop[1987] utilisé dans la subdivision d'un maillage triangulaire seulement. Cette dernière est la plus adaptée au maillage triangulaire basé sur les polyèdres réguliers comme le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Dans les structures résultantes de la tessellation, on tient en compte les relations topologiques entre les éléments de bases constituant ces structures. Les relations topologiques sont basées sur la proximité spatiale et l'adjacence qui seront discutées dans la section 3.3.1.1 du chapitre 3.

### 2.2.1.1. Subdivision de Catmull-Clark

L'algorithme a été développé par Catmull et Clark[1978] pour construire automatiquement des surfaces lisses à partir d'un maillage grossier. Dans chaque itération, les faces du maillage sont subdivisées en petites surfaces. Par conséquent, le maillage résultant offre une meilleure approximation d'une surface lisse. Généralement, la procédure de raffinement consiste à générer une courbe de raffinement. La courbe de raffinement est composée d'un ensemble de points qui sont classés soient comme des « Points de Sommet » ou des « Points d'arête » pour chaque type de point, un algorithme spécifique qui génère la subdivision et le raffinement sur la base de ces points. Par exemple, on suppose qu'on a un polygone composé d'un ensemble des points soient  $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5]$ . À partir de ce polygone, on génère le polygone de contrôle par la subdivision binaire de la courbe d'origine qui est représenté par des lignes discontinues (voir Figure 2.7).

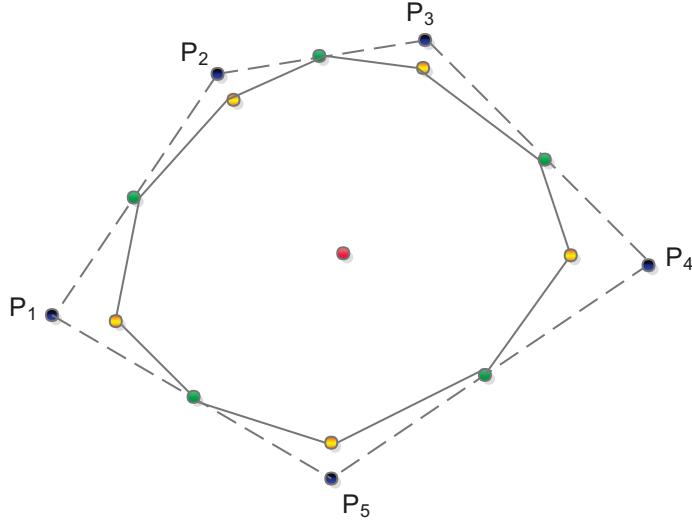


Figure 2.7: Raffinement d'un polygone (les points de contrôle sont en noir, les points de vertex sont en jaune et les points des arêtes sont en vert, le point de face en rouge)

Les points situés aux milieux des arêtes de la première courbe sont nommés « Points d’arête » et les points situés à proximité des sommets du polygone de contrôle d’origine sont appelés « Points de Sommet ».

Les étapes de l’algorithme de raffinement de Catmull-Clarck, sont comme suit :

- Calcul les « Points de Faces » à partir de tous les sommets origines (points de contrôle). Ils correspondent aux centres des faces.

soit une face de vertex :  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , le point de face FP est défini par :

$$FP(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i;$$

$$FP(Y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} y_i;$$

- Calcul des coordonnées de milieu de chaque arête E (Point d’arête (EP)). Ce nouveau vertex représente le barycentre entre le milieu de l’arête et les points des deux faces adjacentes ( $w_{f1}, w_{f2}$ ): soit une arête E de deux sommets  $v$  et  $w$  communs entre deux faces adjacentes  $F_1$  et  $F_2$ ; le nouveau point d’arête EP est donné par la relation :

$$EP(X) = \frac{x_v + x_w + x_{wf1} + x_{wf2}}{4};$$

$$EP(Y) = \frac{y_v + y_w + y_{wf1} + y_{wf2}}{4};$$

- i. Calcul de la nouvelle position de l'ancien vertex vers une nouvelle position nommée point de vertex pour assurer une meilleure finesse de la surface résultante. Le nouveau vertex sera positionné sur la base de ses sommets voisins comme:

$$VP(X) = \frac{x_F + 2x_R + (n-3)x_{FP}}{n};$$

$$VP(Y) = \frac{y_F + 2y_R + (n-3)y_{FP}}{n};$$

Où: n représente le nombre des points de faces (FP), F représente le barycentre de l'ensemble *FP* adjacents, et R représente le barycentre de l'ensemble *EP* adjacents.

- ii. Finalement, connexion de tous les points en respectant la topologie initiale.

La figure suivante présente le raffinement d'un cube par l'algorithme de Catmull-Clarck.

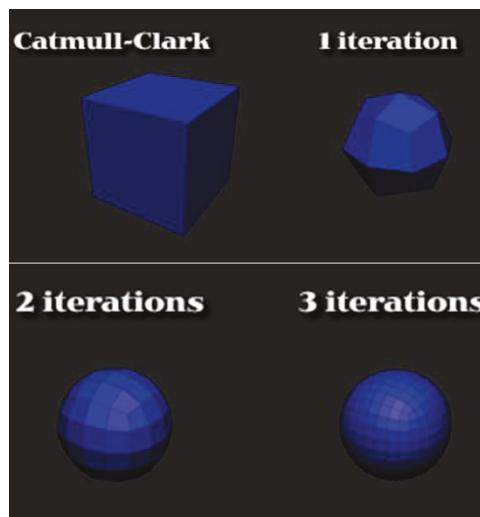


Figure 2.8: Trois premiers niveaux de subdivision d'un cube par l'algorithme Catmull-Clark [Cox, 2011]

#### 2.2.1.2. Subdivision de Doo-Sabin

En 1978, Doo & Sabin [1978] ont développé cet algorithme similaire au premier algorithme dans le principe de subdivision. Cependant, la différence est liée à la nature de la surface générée, dans l'algorithme de Catmull-Clarck la surface générée est bicubique B-splines, par contre l'algorithme de Doo-Sabin fonctionne avec des surfaces bi-quadratiques Bsplines. Aussi, l'algorithme de Catmull-Clarck utilise un schéma de subdivision d'approximation primitif, par contre Doo-Sabin utilise un schéma double.

Finn [2001] a cité les procédures de cet algorithme; en considérant un polyèdre avec des sommets  $V$ , des arêtes  $E$  et des faces  $F$ . Nous construisons une nouvelle série de sommets pour chaque face. Soit  $v_i^{(0)}$  les sommets dans une face, les vertex générés  $v_i^{(1)}$  dans la face  $f$  sont définis par la fonction de distribution des poids :

$$Xv_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Xv_j^{(0)}.$$

$$Yv_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Yv_j^{(0)}.$$

Où  $n$  : le nombre des vertex dans la face  $f$ .

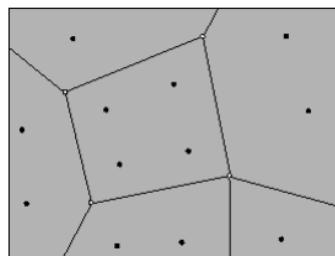
$\alpha_{ij}$ : des coefficients de pondération sont donnés en fonction de  $n$ ,  $i$  et  $j$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{3+2 \cos(\frac{2\pi(i-j)}{n})}{4n} & \text{Si } i \neq j \\ \frac{n+5}{4n} & \text{si } i = j \end{cases},$$

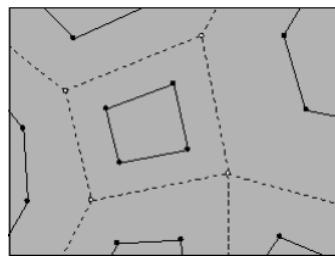
La nouvelle face est créé par la connexion entre les nouveaux vertex ( $v_i^{(1)}$ ), pour remplacer les anciens vertex ( $v_j^{(0)}$ ).

Comme les autres méthodes de subdivision de la surface, l'algorithme permet de générer et de connecter les vertex comme suit:

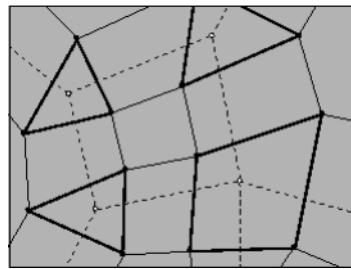
- i. Pour chaque sommet  $V_i$ , générer un nouveau point  $V_i'$  comme le moyen des coordonnées des sommets, les coordonnées des deux points de bord et les coordonnées de point de la face.



- ii. Pour chaque face  $F_i$ , connecter les nouveaux points qui ont été générés pour chaque sommet de la face.

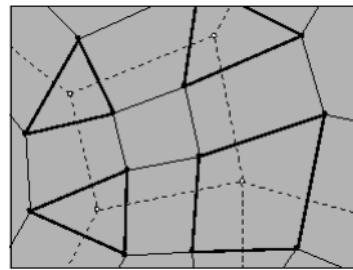


- iii. Pour chaque sommet, connecter les nouveaux points générés pour les faces adjacentes à ce sommet.



- iv. Pour chaque arête  $E_i$ , connecter les nouveaux points générés des faces qui partagent la même arête.

Les polygones générés par cette étape de raffinement deviennent l'ensemble de polygones pour l'étape suivante



Dans la connexion entre les nouveaux éléments, on respecte les relations topologiques initiales.

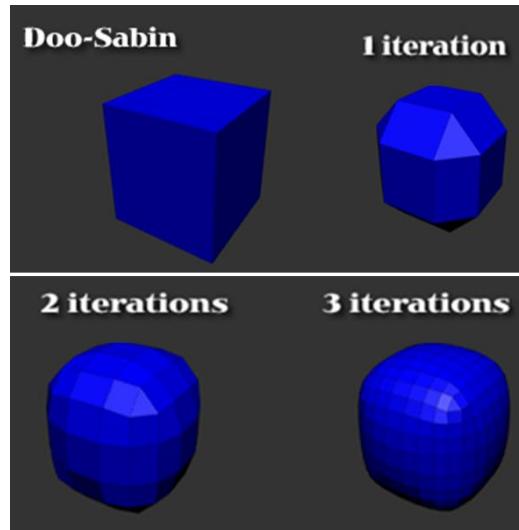


Figure 2.9: Trois premiers niveaux de subdivision d'un cube par l'algorithme Doo-Sabin [Cox, 2011]

### 2.2.1.3. Subdivision de Loop

Contrairement aux autres méthodes de subdivision, la méthode de Loop s'applique seulement dans le cas d'un maillage triangulaire. L'approche consiste à subdiviser chaque triangle en quatre, en calculant le centre de chaque arête et en connectant les milieux. Les nouvelles faces sont obtenues par la connexion entre les nouveaux et les anciens vertex de chaque triangle. Les faces résultantes sont toujours triangulaires.

Bischoff *et al.* [2000] ont résumé le principe de cet algorithme en deux étapes:

1. Fractionnement des arêtes :

Consiste à insérer des nouveaux sommets au milieu de chaque arête d'un triangle du maillage, et en les reliant entre eux pour avoir quatre nouveaux triangles générés à partir d'un ancien triangle. Avec cet algorithme, les points de milieux des arêtes sont repositionnés selon l'équation:

$$Xv_e = \frac{3}{8}(x_{v_{e1}} + x_{v_{e2}}) + \frac{1}{8}(x_{v_{f1}} + x_{v_{f2}}).$$

$$Yv_e = \frac{3}{8}(y_{v_{e1}} + y_{v_{e2}}) + \frac{1}{8}(y_{v_{f1}} + y_{v_{f2}}).$$

Où  $v_{e1}$  et  $v_{e2}$  sont les sommets délimitant le bord donné, et  $v_{f1}$  et  $v_{f2}$  sont les troisièmes sommets des deux faces voisines.

2. Repositionnement des vertex :

Consiste à utiliser un masque de Loop pour calculer et repositionner les anciens sommets en fonction du moyen pondéré de leurs voisins.

Les vertex originaux (points de contrôle) sont ajustés en fonction de l'équation :

$$Xv' = (1 - n)\beta_v + s \sum_{i=1}^n x_{v_i}.$$

$$Yv' = (1 - n)\beta_v + s \sum_{i=1}^n y_{v_i}.$$

Où  $v$  est le sommet d'origine,  $v'$  repositionné notre sommet,  $v_i$  sont les vertex voisins de la du vertex  $v$ , et  $\beta$  est notre facteur d'échelle.

Pour un sommet avec un nombre de connexions  $k$ , les coefficients du masque sont exprimés en fonction de  $\beta$ . La valeur de  $\beta$  est définie comme suit :

$$\beta = 1/k \left( \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \cos \left( \frac{2\pi}{k} \right)^2 \right) \right).$$

La méthode de tessellation de la surface la plus adaptée à notre recherche est celle qui permet de subdiviser la surface d'un polyèdre pour approximer la surface de la Terre et génère une tessellation uniforme dans tous les niveaux de subdivision. La méthode de subdivision qui peut répondre à ces critères est l'approche de Loop. La subdivision récursive des faces triangulaires d'un polyèdre comme l'octaèdre ou l'icosaèdre dans cette approche est différente selon le nombre de subdivisions de chaque arête dans chaque face en deux ou trois subdivisions. Avec la méthode de Loop, il existe deux types de partitionnement, la méthode de ratio 4 et de ratio 9 [Wen *et al.*, 2004], [Gregory *et al.*, 2008].

### 1) Subdivision de Loop (1 : 4)

Ce schéma est basé sur la subdivision des faces triangulaires en plusieurs sous-triangles. Chaque arête est subdivisée en deux, les points de bisection sont reliés par des lignes droites qui forment les arêtes des nouveaux triangles. Chaque triangle est subdivisé en quatre et les nouveaux triangles sont aussi subdivisés en quatre et ainsi de suite. En conséquence, chaque triangle est remplacé dans un niveau plus fin par quatre triangles plus petits. La figure suivante montre le principe de la subdivision récursive pour deux niveaux consécutifs en utilisant la méthode Loop avec un ratio de 1 : 4.

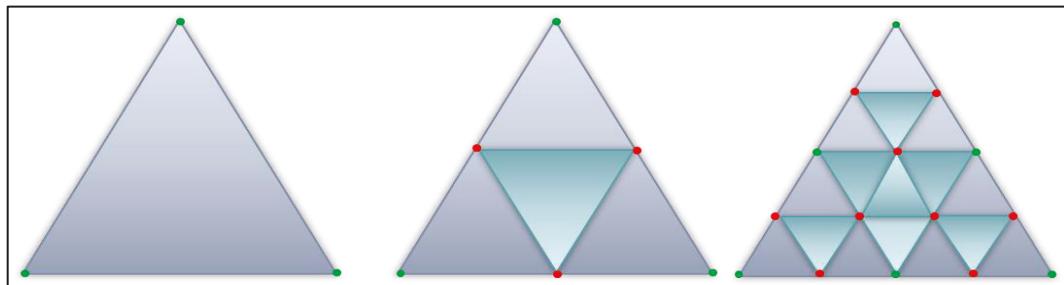


Figure 2.10: Subdivision de Loop (ratio de multiplication=4): les nœuds en rouge

### 2) Subdivision de Loop (1 : 9)

Dans ce procédé, chaque arête du triangle est subdivisée en trisection, les points de trisection sont reliés entre eux par des droites. Donc, chaque triangle donne neuf sous-triangles dans chaque niveau de récursivité (Figure 2.11).

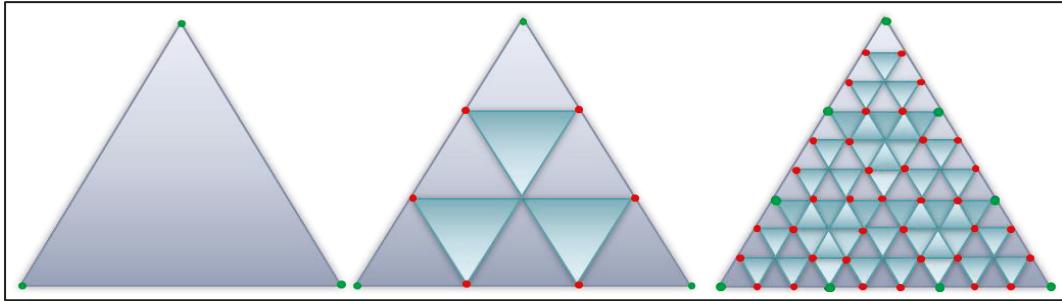


Figure 2.11: Subdivision de Loop (ratio de multiplication=9)

Plusieurs chercheurs ont utilisé la méthode de subdivision de Loop comme [Dutton, 1984],[Goodshild & Yang, 1992],[White *et al.*, 1998],[Dutton, 1999],[Song *et al.*, 2002]. L'étude comparative qui a été faite par White *et al.* [1998] pour évaluer la performance de ces deux méthodes de partitionnement de ratio 4 et de ratio 9 sur les faces de l'icosaèdre et de l'octaèdre en mesurant la distorsion dans chaque méthode montre qu'il n'existe pas une grande différence entre les deux approches de subdivisions des faces au regard de la taille des cellules obtenues dans différents niveaux de subdivision. Selon l'étude qui a été faite par Gregory *et al.* [2008] qui a comparé plusieurs grilles triangulaires obtenues à partir de la subdivision d'un icosaèdre et d'un octaèdre selon plusieurs paramètres. Parmi ces paramètres, la méthode de partitionnement des faces des polyèdres par la méthode de Loop avec un ratio de 2 et 3. Il a trouvé que la différence entre ces deux méthodes de partitionnement n'est pas considérable.

### 2.2.2. Tessellation de la sphère

Considérant que les distorsions dues aux systèmes de projections soient négligeables dans les petites surfaces, il sera très utile de générer des grilles globales qui servent à subdiviser la surface du globe en des cellules suffisamment petites pour minimiser les distorsions de projection. Certaines distorsions causées par la courbure terrestre deviennent considérables lorsque l'étendue de la surface devient de plus en plus grande. Raskin & Fellow [1994] ont défini la tessellation de la sphère comme : *une décomposition spatiale qui est exhaustive et mutuellement exclusive (sauf peut-être le long des frontières)*. D'une autre manière la tessellation de la sphère est un recouvrement de la sphère par les tuiles, qui ne se chevauchant pas et sans écart entre eux. Selon Worboys & Duckham [2004], la tessellation le plus suggérée dans la représentation sphérique est la tessellation triangulaire. La tessellation triangulaire est

simple et facile à implémenter, aussi, on peut assurer une couverture globale homogène de la sphère et sans chevauchement entre les cellules.

Les méthodes de tessellation de la surface de la sphère rapportées dans la littérature sont subdivisées en deux grandes catégories. En effet, d'après Kimerling *et al.* [1999] ces deux grandes familles sont: les méthodes de subdivision directe et les méthodes de tessellation indirectes qui sont basées sur les projections cartographiques.

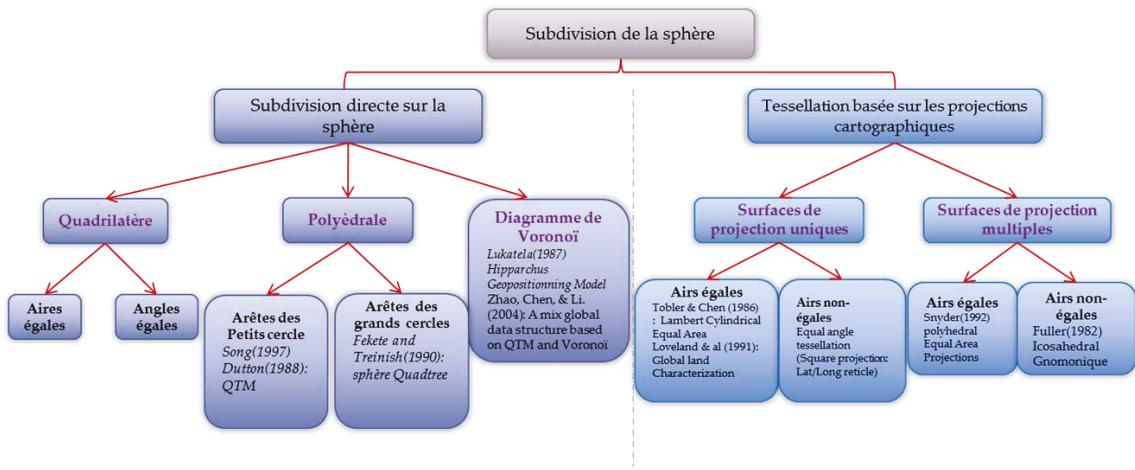


Figure 2.12: Taxonomie des approches de tessellation pour la création des grilles globales [Kimerling *et al.*, 1999]

### 2.2.2.1. Approches de subdivision directe

Tel mentionné dans la section 2.2, l'espace peut être subdivisé en utilisant des polyèdres réguliers. La présente section envisage présenter les approches utilisées pour subdiviser la surface du globe directement à partir des polyèdres réguliers. La tessellation peut être basée soit sur des tuiles triangulaires ou des tuiles quadrillatérales.

Les approches de subdivision directe permettent de générer des tessellations directement sur le globe sans avoir recours à une projection indirecte. Dans le cas où on adopte une tessellation triangulaire, les triangles sphériques des polyèdres comme l'icosaèdre ou l'octaèdre sont subdivisés récursivement. Dans cette approche, les grands cercles correspondent aux arêtes des triangles du polyèdre. la subdivision des triangles sphériques consiste à trouver le milieu de chaque arête du triangle, puis on calcule les lignes géodésiques reliant chaque paire des points milieu [Kimerling & White, 1995]. Cette approche utilisée dans d'autres travaux comme celui de Dutton [1984] qui a utilisé un octaèdre comme surface de base pour la tessellation, Fekete & Treinish [1990] qui

ont utilisé la méthode sphère quadtree SQT pour faire la subdivision directe sur la sphère. Kimerling *et al.* [1999] ont classé ces approches de subdivision directe en trois catégories :

- i. La subdivision quadrilatérale peut être divisée pour avoir des grilles avec des angles égaux et des surfaces égales. Les tessellations du globe dans des cellules quadrangulaires de mesure latitude et en longitude égale sont appelés « angle égal »[Kimerling *et al.*, 1999]. Par exemple, la grilleETOPO 5 pour un DEM de 5'et la grille de modélisation globale du programme Expériences sur le Bilan Radiatif de la Terre (ERBE) de 2.5°. ces grilles mondiales ne peuvent pas couvrir l'ensemble de la Terre sans perdre la régularité à la fois dans la surface et de la forme. La tessellation des surfaces égales commence par le choix d'une cellule à l'équateur de taille arbitraire, puis on définit les limites des cellules suivant les parallèles et les méridiens sur la totalité du globe d'une manière à obtenir des cellules avec des surfaces égales [Kimerling *et al.*, 1999].
- ii. La subdivision polyédrale est générée à partir d'un partitionnement des faces des solides platoniques inscrites dans la sphère. Cette approche utilisée dans la modélisation de la surface du globe à partir des polyèdres. Elle remonte au moins à la fin de 15<sup>ème</sup> siècle avec le mathématicien et l'artiste Piero Della Francesca (1410-1492) [Hart, 1998], le premier qui a initiée cette idée. Il a développé la construction géométrique des solides d'Archimède qui sont des solides platoniques tronqués: le tétraèdre tronqué, le dodécaèdre tronqué, l'octaèdre tronqué, le cube tronqué, et l'icosaèdre tronqué. Le mathématicien et l'artiste allemand Albrecht Dürer [Dürer, 1538] a apporté une contribution importante à la littérature polyédrale, avec des travaux de développements sur la base des polyèdres. À la fin du 19<sup>ème</sup> et le début du 20<sup>ème</sup> siècle plusieurs mathématiciens, cartographes et philosophes ont tenté de modéliser la surface du globe par plusieurs polyèdres réguliers et irréguliers comme le tétraèdre, le cube [Snyder, 1992], [Alborzi & Samet, 2000] , l'octaèdre[Dutton, 1989], [Goodshild & Yang, 1992], [Otoo & Zhu, 1993], [Dutton, 1996], [Mulcahy, 1997], [Dutton, 1996], le dodécaèdre [Wickman *et al.*, 1974], et l'icosaèdre [Williamson, 1968], [Fekete, 1990], [Thuburn, 1997], [White, 2000], [Song *et al.*, 2002].

Le principe de cette approche consiste à subdiviser chaque arête du polyèdre de base selon la méthode de subdivision en deux ou trois segments, le point milieu de chaque arête est soulevé le long d'une ligne partant du centre de la sphère. De cette manière, on obtient quatre sous-triangles, et les points médians de ces nouvelles arêtes peuvent à nouveau être soulevés de toucher la sphère. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que les sous-triangles deviennent assez petits pour se rapprocher de la sphère. Cette méthode présente des propriétés importantes comme les distorsions de formes et de surfaces qui sont minimes. Elle préserve aussi les aires dans les différents niveaux de récursivité[Song *et al.*, 2002] par rapport aux méthodes de tessellation basées sur les cellules carrées qui présentent des problèmes indésirables avec le rapprochement aux régions polaires[Ma *et al.*, 2009].

iii. La subdivision suivant le diagramme de Voronoï en utilisant le polygone de Thiessen. Le diagramme de Voronoï est une solution pertinente pour construire des modèles sphériques dynamiques de données ou « SIG dynamique » et considéré comme un moyen efficace dans l'indexation, car il permet d'augmenter la vitesse de manipulation des données spatiales[Chen *et al.*, 2003]. Cette approche consiste à calculer les points du maillage espacé à partir de laquelle les polygones de Thiessen sphérique ou sphéroïdale peuvent être construits. [Lukatella, 1989] et [Mostafavi, 2002] ont développé des méthodes pour générer le diagramme de Voronoï sur la sphère.

#### 2.2.2.2. Approches de tessellation indirecte (basées sur les projections cartographiques)

Le partitionnement se fait sur des faces planes, ensuite la projection de la tessellation sur la sphère est possible en utilisant des méthodes de projection (inverse des projections). Pour le cas des tessellations triangulaires, les méthodes de projection inverse utilisées doivent préserver les propriétés des triangles reprojetés sur la sphère (égalité de surfaces et équilatéraux).

Dans la tessellation de la sphère, les nouvelles positions des vertex sont calculées en fonction des vertex voisins et suivant la projection sur la sphère. Nous pouvons appliquer cette approche pour subdiviser les faces d'un icosaèdre afin d'avoir un modèle qui se rapproche de la surface du globe (Figure 2.13).

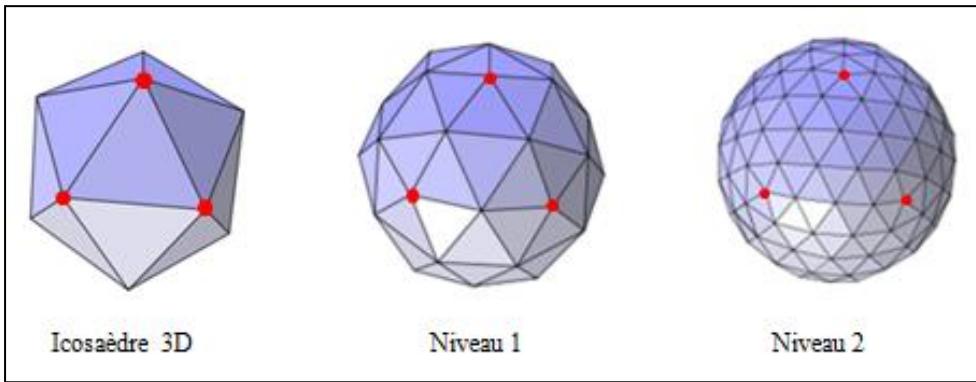


Figure 2.13: Subdivision de Loop sur l'icosaèdre [Fuhrmann, 2009]

En effet, trois projections cartographiques sont capables de transformer les triangles sphériques équilatéraux en triangles planes équilatéraux[White *et al.*, 1998] : la projection gnomonique, la projection deFuller [1982], la projection de Snyder équivalente[Snyder, 1992]. La projection gnomonique a une propriété supplémentaire par rapport aux autres méthodes, les arêtes des triangles planes correspondent exactement aux grands cercles sur la sphère.

a) Utilisation de la projection gnomonique dans l'approche myriahédrale

SelonSahr *et al.* [2003] la projection gnomonique est la projection la plus adaptée pour tous les polyèdres réguliers, car elle possède la propriété de transformation des grands cercles en lignes droites pour tous les polyèdres. Il s'agit d'une projection azimutale qui conserve les surfaces des triangles sphériques dans les différents niveaux de subdivision des triangles.Dans la projection gnomonique, le plan tangent à la sphère dans un point représente le barycentre du triangle et le centre de projection correspond au centre de la Terre. Pour chaque point sur la sphère, on prend le rayon formé par le centre de la sphère et ce point, ensuite on cherche le point d'intersection de ce rayon avec le plan tangent. Dans la Figure 2.14, le point de tangence est le pôle Sud, mais on peut changer ce point à n'importe quel point sur la sphère. Les deux points  $P_1$  et  $P_2$  ont la même image sur le plan. À cet effet, la projection gnomonique peut projeter juste un hémisphère à la fois.

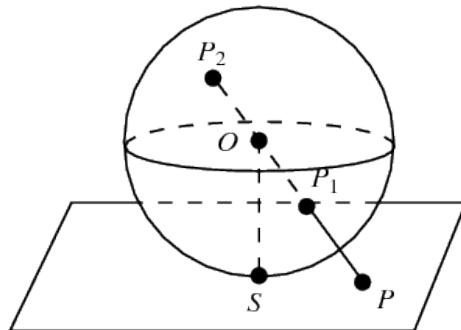


Figure 2.14: Projection gnomonique: principe de fonctionnement

Pour la projection gnomonique, les arêtes des triangles sphériques correspondent aux grands cercles sur la sphère; elles sont transformées en lignes droites et forment des triangles équilatéraux. La figure suivante montre la projection gnomonique sur les faces de l'icosaèdre en plaçant les pôles sur les arêtes. Dans certains cas, avec la même projection les pôles peuvent être placés sur les vertex de l'icosaèdre.

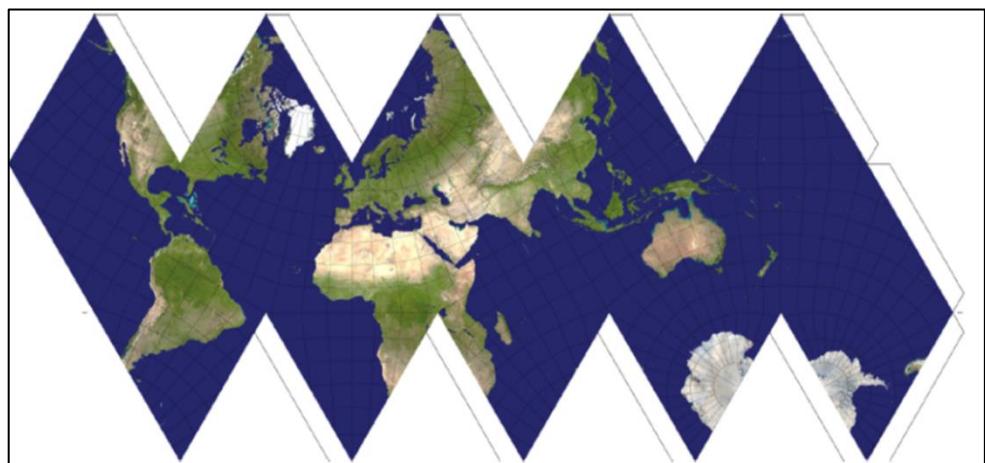


Figure 2.15: Projection gnomonique sur la base d'un icosaèdre[Furuti 2004]

b) Utilisation de la projection de Snyder équivalente dans l'approche myriahédrale

La projection équivalente de la sphère sur un globe polyédral retourne aux travaux de [Snyder, 1992], la première approche a été publiée avant plus de 50 ans. Cette approche utilise un icosaèdre tronqué obtenu en coupant ses quatre coins afin d'avoir des faces hexagonales à la place des faces triangulaires dont les 12 pentagones sont centrés sur les 12 sommets de l'icosaèdre. La projection de Snyder comme les autres approches polyédrales prend un point P sur la sphère et détermine ses coordonnées sur les faces planes du polyèdre. Elle utilise dans cette transformation la projection de Lambert

azimutale équivalente dans le but de préserver les aires des surfaces. Dans cette projection les faces de l'icosaèdre sont subdivisées en petitssub-triangles tout en gardant la propriété de la symétrie avec un angle droit comme les faces initiales de l'icosaèdre de base (Figure 2.16). Le rapport entre les superficies des deux triangles doit être assuré par un facteur d'échelle entre le rayon de la sphère et le rayon de la sphère circonscrite du polyèdre.

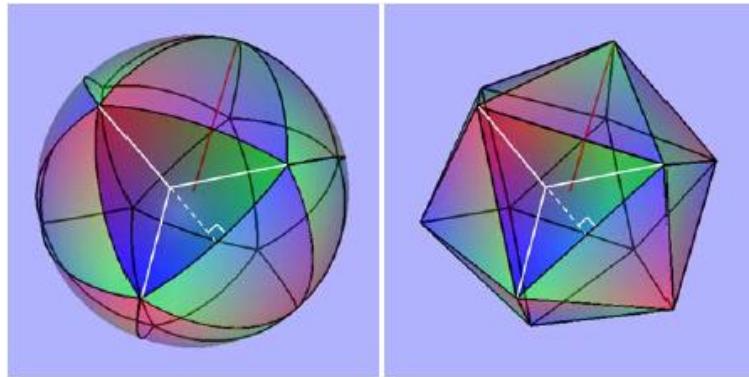


Figure 2.16: Décomposition des faces planes et sphériques[Erika E. Harrison, 2012]

Le Figure 2.17 montre la projection de Snyder équivalente sur les faces de l'icosaèdre où les pôles sont positionnés sur les faces de l'icosaèdre.



Figure 2.17: Projection de Snyder équivalente sur les faces de l'icosaèdre[Furuti 2004]

- a) Utilisation de la projection de Fuller dans l'approche myriahédrale

Comme les autres projections qui sont basées sur des polyèdres, la projection de « *Fuller* » ou « *Dymaxion* » est basée sur la projection de la surface du globe sur les

faces de l'icosaèdre. Elle est différente par rapport aux autres projections polyédrales comme la projection gnomonique dans le découpage de la surface du globe. Afin de ne pas avoir des interruptions dans les continents dans la carte, Fuller a placé les 12 vertex de l'icosaèdre dans les océans[Sahr & White, 1998]. La figure ci-dessous montre la carte Dymaxion qui représente le résultat de dépliage de l'icosaèdre avec la projection de Fuller[Sahr & White, 1998].

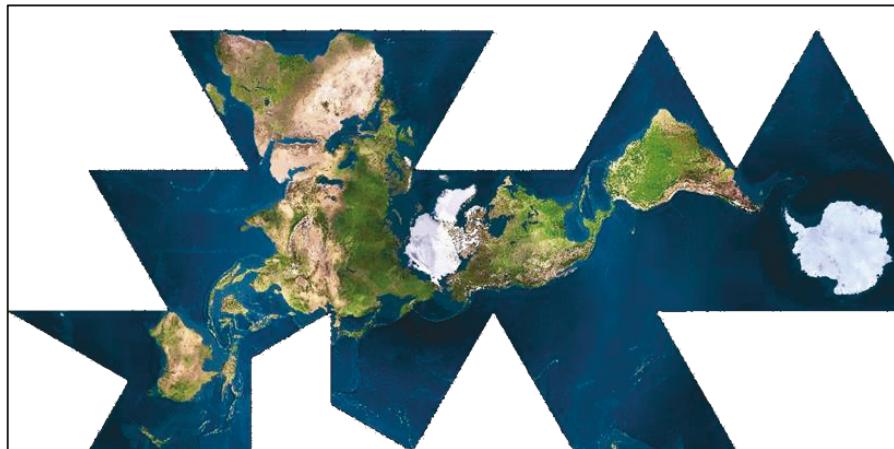


Figure 2.18: Projection de Fuller « Dymaxion Map »<sup>1</sup>

### 2.3. Systèmes d'indexation utilisés dans les structures hiérarchiques

L'approximation de la surface du globe par des polyèdres réguliers nécessite le développement des méthodes et des algorithmes permettant d'indexer les facettes obtenues par la subdivision récursive des faces du polyèdre. L'indexation des faces du polyèdre dans les différents niveaux hiérarchiques facilite, accélère et optimise l'accès aux données géographiques correspondantes aux faces du polyèdre selon les différents niveaux de détails. Plummer [2008] a défini l'indexation spatiale comme : « une technique qui permet de trouver rapidement les entités par la localisation dans l'espace, plutôt qu'une valeur de l'attribut dimensionnel ». La dimension des données est quelques fois différente de 1 ou 2; les méthodes d'indexation doivent par conséquent permettre d'interroger efficacement ces données quel que soit leur dimension.

Plusieurs algorithmes d'indexation des faces des polyèdres notamment qui sont à base triangulaire, ont été proposés dans la littérature. Ces algorithmes permettent de naviguer

---

<sup>1</sup>[http://blog.lib.umn.edu/walke541/architecture/fuller\\_1280x640.jpg](http://blog.lib.umn.edu/walke541/architecture/fuller_1280x640.jpg)

entre les faces en fonction de leurs relations topologiques. Dans ce qui suit, on présente les différentes méthodes d'indexation citées dans la littérature.

Mark & Lauzon [1985] ont proposé une méthode d'indexation qui est basée sur la subdivision de la surface sphérique en 60 zones UTM de  $6^\circ$  (de l'est à l'ouest) qui vont de  $84^\circ$  de latitude nord à  $80^\circ$  sud. Chaque zone est subdivisée en grille régulière et chaque cellule « *patch* » dans la grille est numérotée de 1 à 60 vers l'est (Figure 2.19). Cette approche n'est pas appropriée pour les données globales, car, d'une part, elle présente des limites entre les zones [Tobler & Chen, 1986]. D'autre part, la forme et la taille des cellules changent d'une région à une autre. La forme et la taille des cellules qui sont autour de l'équateur sont préservées par rapport aux cellules qui sont éloignées et proches des pôles.

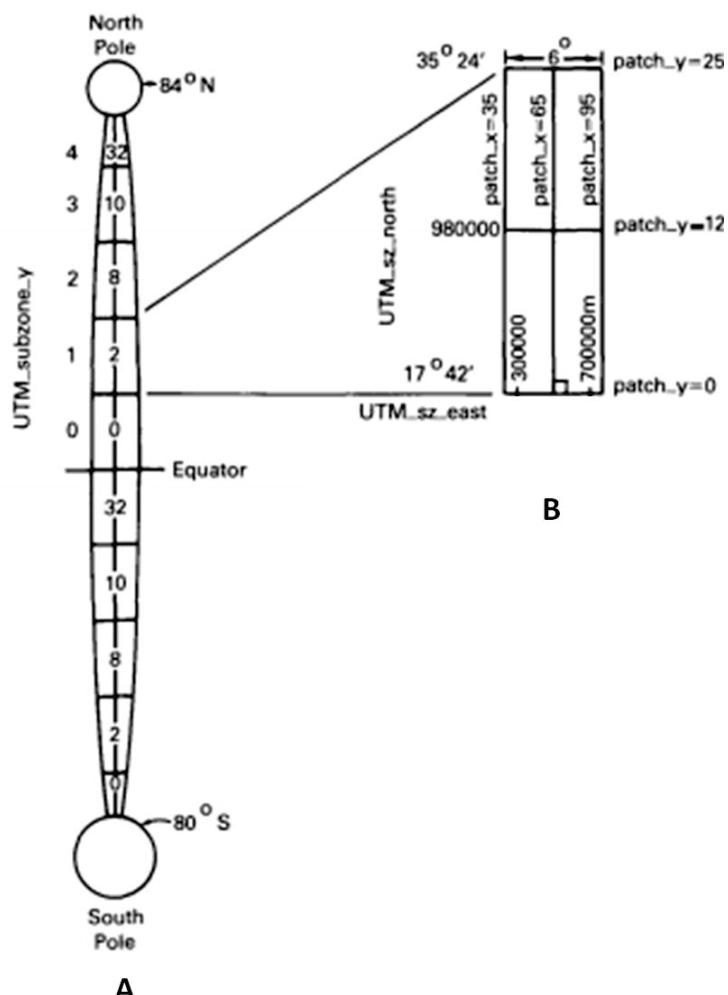


Figure 2.19: Les relations entre les zones UTM (A) : sous-zones et (B): les cellules (patchs) [Mark & Lauzon, 1985]

Dutton [1996] a proposé une solution pour subdiviser la surface sphérique en plusieurs patchs triangulaires arborescentes, ceci permet de gérer les données spatiales en plusieurs résolutions (multirésolution) et sur une échelle plus globale [Dutton, 1997]. Cette méthode provient d'un octaèdre dont chacune des huit faces est subdivisée récursivement en quatre facettes. L'indexation des cellules est basée sur la mesure de la distance entre le centre de chaque cellule du triangle père et le centre des cellules à indexer (Figure 2.20). Le centre de chaque triangle de l'octaèdre est défini par l'intersection de trois axes représentant les axes du système de coordonnées. Les axes relient les sommets de l'octant au milieu des arêtes opposées afin de définir les emplacements dans chacun des triangles sphériques.

La méthode QTM a été utilisée dans plusieurs applications comme la surveillance de l'environnement par White *et al.* [1998], la navigation globale par Lee & Samet [2000], l'indexation des données spatiales hiérarchique par Goodchild *et al.* [1991], gérer et modéliser les données d'élévation de terrain à une échelle globale par Dutton [1984].

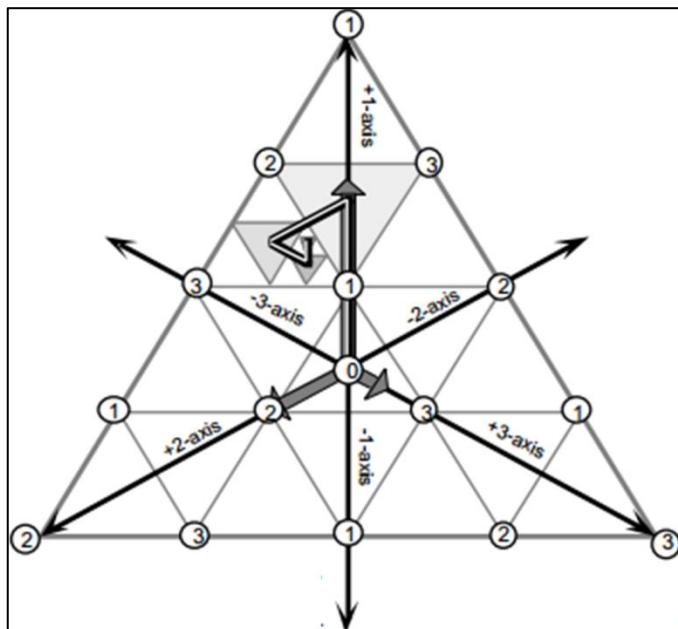


Figure 2.20: Indexation par la méthode QTM sur les faces d'un octaèdre basée sur la mesure de la distance le long des axes [Dutton, 1996]

Fekete & Treinish [1990] ont présenté la méthode « Sphère Quadtree » pour approximer la surface du globe à partir de la subdivision récursive des faces de l'icosaèdre inscrit dans une sphère. Pour indexer les données spatiales à partir des triangles sphériques, les auteurs ont utilisé le terme « trixel » comme unité de base de subdivision de la sphère.

Le terme « trixel » correspond à un pixel sur l'image plane. La Figure 2.21-a montre un étiquetage d'un trixel de base (ABC) qui est subdivisé en quatre sous-triangles qui sont étiquetés de 1 à 4. Chacun des quatre triangles sert comme un point de départ pour la subdivision pour le niveau plus détaillé. L'étiquetage des nouveaux triangles générés peut être utilisé plusieurs fois pour les niveaux plus détaillés. L'étiquetage de chaque trixel est obtenu en concaténant les étiquettes des nœuds rencontrés sur le chemin racine.

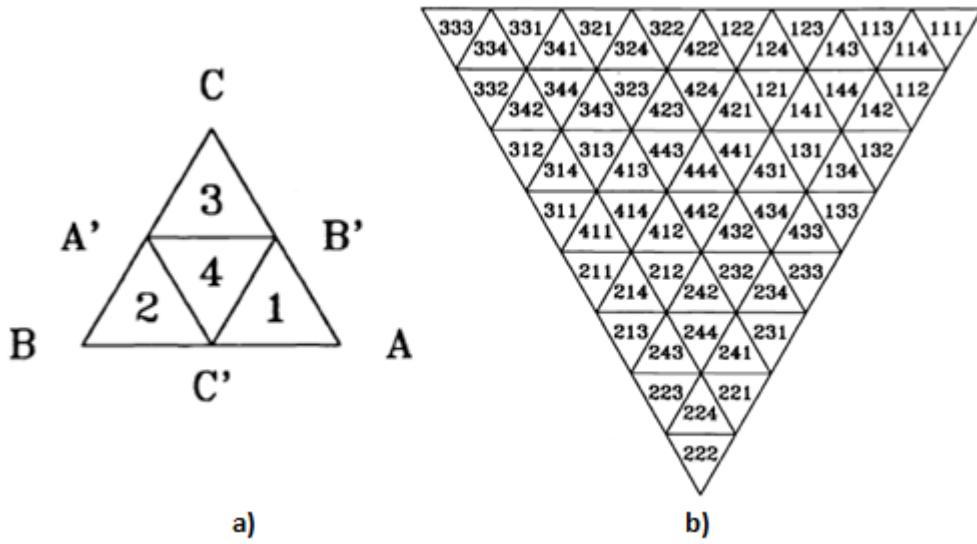


Figure 2.21: Système d'étiquetage dans la "sphère Quadtree", a) étiquetage de la face racine; b) étiquetage de la face racine en deux itérations de subdivision(1 :4)[Fekete & Treinish, 1990]

Lee & Samet [2000] ont proposé un système d'indexation qui s'articule sur la position du triangle fils dans le triangle père. Ils ont utilisé un algorithme d'étiquetage des faces définies par deux codes, le premier représente la position du triangle fils dans le triangle père et le deuxième représente l'ordre du triangle par rapport au triangle père de l'arbre quaternaire (Figure 2.22).

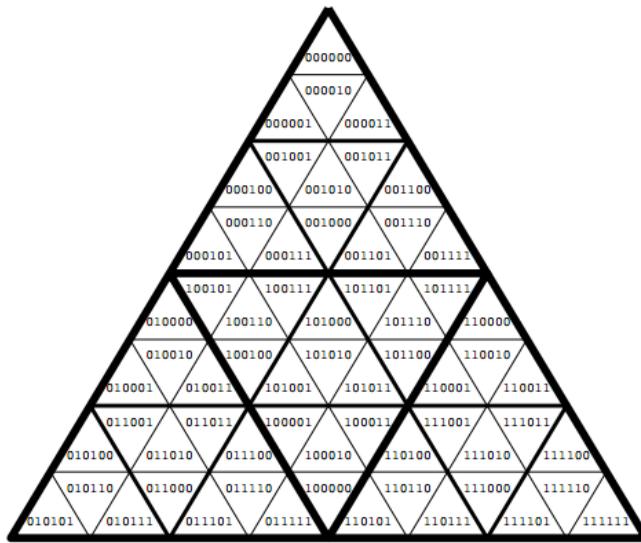


Figure 2.22: Étiquetage d'un arbre avec trois niveaux de subdivision[Lee & Samet, 2000]

Lee & Samet [2000] ont proposé des algorithmes pour la recherche de voisinage qui est basée sur une arithmétique binaire. La figure suivante montre la technique de recherche des voisins dans les l'arbre quaternaire.

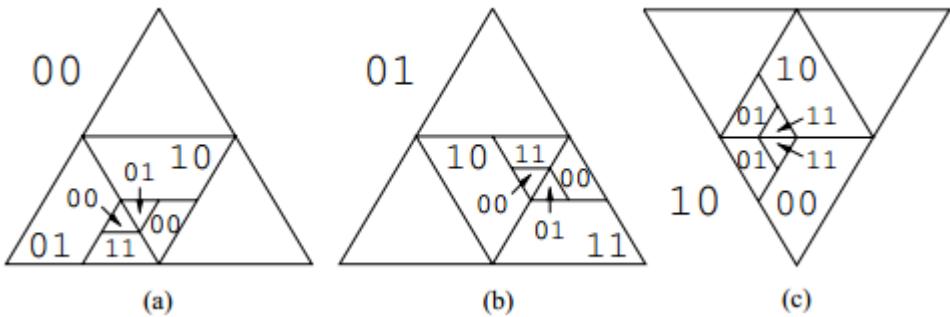


Figure 2.23: Recherche des voisins de taille égales, a) voisin de droite de 0011100, b) voisin de droite de 01110001, c) voisin de verticale de 10100111[Lee & Samet, 2000]

## 2.4. Génération de tuilage pour le cache dans les services de cartographie Web

Dans les applications déployées sur le web, la génération et l'indexation des tuiles se sont des mécanismes utilisées pour améliorer la performance de recherche et l'accès rapide aux données[Belo, 2013]. Les deux termes « tuilage » et l'indexation sont très proches, car le tuilage utilise l'indexation pour assurer une interaction plus rapide et réactive que possible entre la carte affichée par le service de cartographie Web et

l'utilisateur. Une structure de tuilage décrit comment les clients doivent se référer aux tuiles dans un cache. Le serveur de données gère le réaffichage et le déplacement des tuiles selon la région demandée par l'utilisateur. Il envoie les tuiles appropriées à chaque niveau de détail sélectionné par l'utilisateur. Par conséquent et avec cette technique l'utilisateur peut visualiser la carte de la région d'intérêt en quelques instants. Les tuiles sont stockées généralement en deux formats selon les données spatiales : JPG pour les données raster et le format PNG pour les données vectorielles. L'indexation facilite le stockage et la récupération des tuiles dans le serveur.

Le principe de mise en cache "map caching" est simple. Lorsqu'un utilisateur choisit une échelle donnée, seulement les tuiles nécessaires sont transférées et récupérées via le réseau pour les afficher sur l'écran. Le mécanisme de tuilage est rapide, car les tuiles sont déjà préparées et stockées dans le serveur pour une zone fixe et dans un niveau de détail défini [Přidal & Žabička, 2008]. Pour bien connaître le principe de tuilage, il est important de savoir les propriétés des systèmes basés sur ce principe. [Sample & Ioup, 2010] ont illustré quelques propriétés du système de tuilage :

- 1) L'affichage des cartes est basé sur plusieurs niveaux de zoom dont chacun correspond à une échelle cartographique bien définie.
- 2) L'accessibilité des tuiles est liée à l'utilisation d'une méthode d'indexation.
- 3) Les tuiles stockées dans le serveur sont récupérées par des requêtes envoyées par l'utilisateur vers le serveur dans un temps de traitement minime.

Les services de cartographie Web les plus populaires comme le Google Maps<sup>TM</sup> et Bing<sup>TM</sup> Maps ont le même système de tuilage (Quadrilatère). La génération de la structure de tuilage pour le cache du serveur de carte qui est pré-rendue à différents niveaux de détails rend la visualisation des cartes plus rapide. La diffusion des données géo-spatiales avec le tuilage via le web subit à un standard WMTS (*Web Map Tile Service*) [Belo, 2013]. La figure suivante montre le tuilage avec l'indexation des tuiles par le service Bing<sup>TM</sup> Maps. Le service Bing<sup>TM</sup> Maps utilise des tuiles quadrangulaires, dont chaque quadrant est subdivisé en quatre cellules régulières. Chaque niveau correspond à une échelle de représentation des données spatiales. L'indexation des données se fait par le code Quadtree.

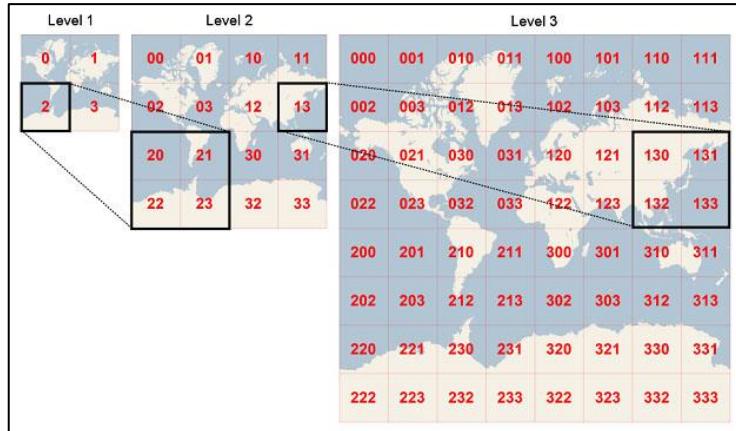


Figure 2.24: Schéma de tuilage et d'indexation adoptée dans BingMaps pour trois niveaux de détail [Schwartz, 2013]

## 2.5. Dépliage des structures polyédrales

La conception d'un système de projection Myriahédrale commence par la conception de la structure hiérarchique, ensuite la projection des données spatiales de la surface du globe sur les faces du polyèdre et enfin le dépliage de la tessellation hiérarchique polyédrale sur un plan. Le résultat de dépliage présente la carte qui va être utilisée par l'utilisateur via les services de cartographie Web.

### 2.5.1. Principe et définitions

Le terme "dépliage" retourne aux travaux d'Albrecht Dürer au début du 16<sup>ème</sup> siècle [Demaine & O'Rourke, 2007]. Le dépliage ou l'arbre coupé « *Cut Tree* » [Lucier, 2006] des surfaces 3D consiste à mettre cette structure géométrique sur un plan en gardant la connexité entre les faces.

Le dépliage joue un rôle important surtout dans les systèmes de conception assistés par ordinateur comme CAD (*ComputerAided Design*), CAID (*Computer-Aided Industrial Design*). Les types de dépliage sont classés en deux catégories selon les éléments de la structure géométrique concernés. La technique de dépliage-arête (*edge-unfolding*) est obtenue par le découpage de la surface le long des arêtes seulement et le dépliage général (*general unfolding*) dans lequel les coupes se fassent le long des arêtes et sur les faces (Figure 2.25). Le dépliage d'une structure polyédrale résulte un ensemble des faces de polyèdre connectées entre eux et formant un arbre qui s'appelle

l’arbre couvrant (*Spanning Tree*) qui couvre l’ensemble des éléments du réseau. Le dépliage prend en considération la topologie entre les faces du polyèdre.

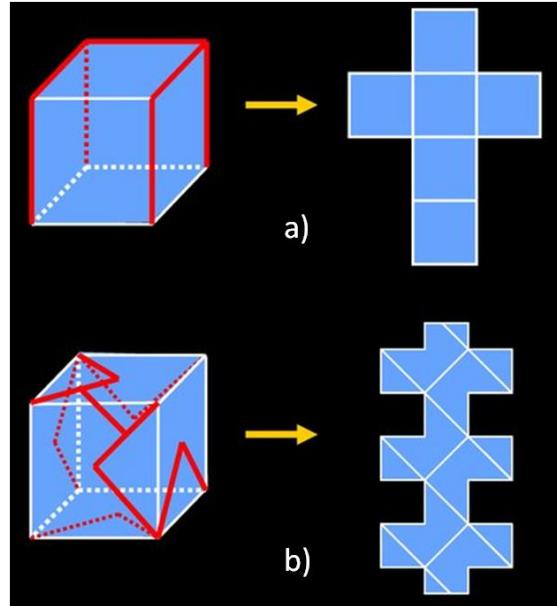


Figure 2.25: Dépliage d'un cube par : a) dépliage suivant les vertex « Edge-unfolding »,  
b) dépliage général « general-unfolding » [Demaine & O'Rourke, 2007]

### 2.5.2. Algorithmes de dépliage

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour le dépliage des polyèdres et qui sont différents d’un polyèdre à un autre. Il existe deux algorithmes de dépliage des polyèdres convexes[O’Rourke, 2008],[Demaine & O’Rourke, 2007]. Le premier algorithme est nommé « dépliage étoile » (Figure 2.26) et le deuxième est appelé « dépliage source » (Figure 2.27). L’algorithme de dépliage source respecte le dépliage sans chevauchement, par contre l’algorithme de dépliage étoile ne respecte pas toujours le dépliage sans chevauchement entre les faces du polyèdre[O’Rourke, 2008].

L’algorithme en étoile est basé sur le calcul des plus courts chemins à partir d’un point  $x$  choisi sur une face du polyèdre comme « point source ». Comme la présente la Figure 2.26, le point-source  $x$  est situé au milieu de la face inférieure du polyèdre. Ensuite, on calcule les plus courts chemins à partir de ce point vers tous les vertex du polyèdre (Figure 2.26). Le découpage se fait enfin suivant tous les chemins afin de déplier complètement le polyèdre sur un plan.

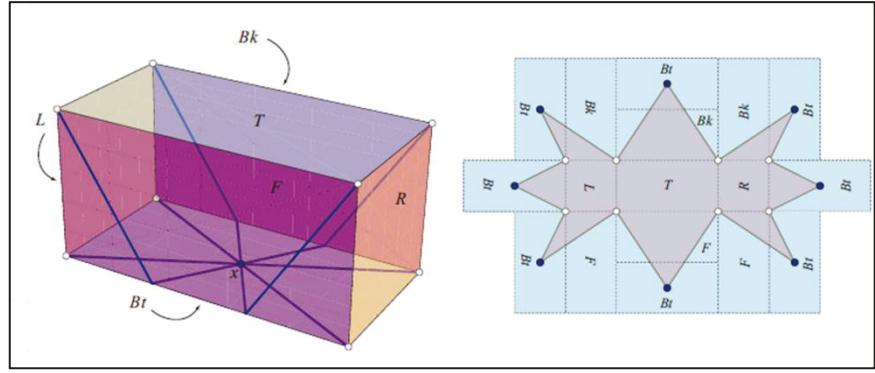


Figure 2.26: Dépliage d'un polyèdre convexe par l'algorithme étoile[O'Rourke, 2008]

Comme le premier algorithme de dépliage, le dépliage commence par un point source  $x$  à partir duquel sont calculés les plus courts chemins vers n'importe quel point appartenant au polyèdre. Le dépliage du polyèdre sur un plan avec cet algorithme, nécessite le découpage du polyèdre et la détermination des lignes « cut locus » ou les lignes de dépliage par le biais du calcul de l'arbre couvrant de tous les vertex du polyèdre.

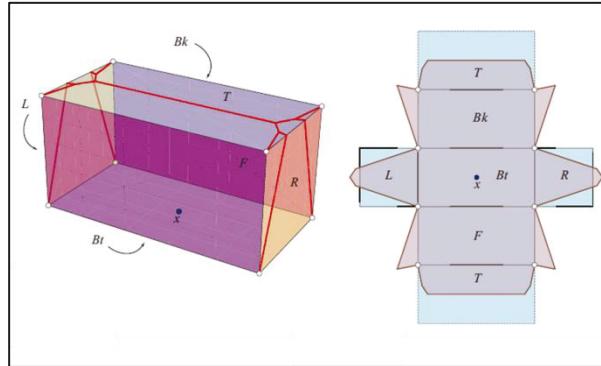
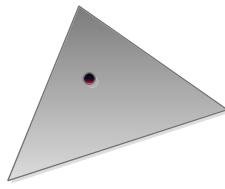


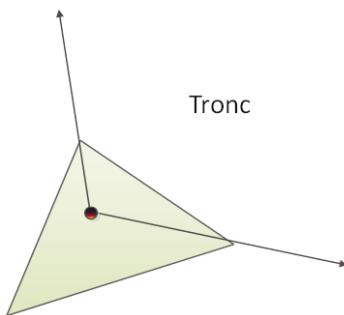
Figure 2.27: Dépliage d'un polyèdre convexe par l'algorithme source[O'Rourke, 2008]

En plus les deux premiers algorithmes proposé par Demaine & O'Rourke [2007], un autre algorithme est proposé par Crouch *et al.* [2010] afin de déplier un icosaèdre. L'algorithme utilise trois paramètres : une facette de départ, le tronc (qui est le plan de la face défini par deux extrémités d'une arête) et la transformation affine pour transformer les vertex de la face à projeter dans le plan de la face origine. Les étapes de cet algorithme sont comme suit :

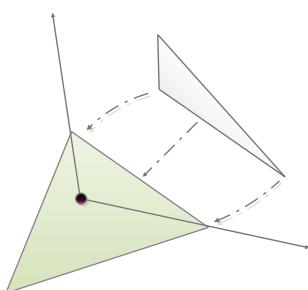
- Choisir un point dans une facette  $F_0$ ;



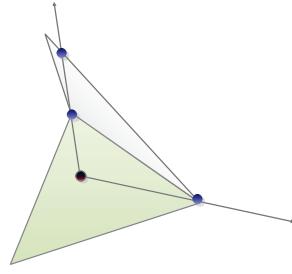
- Choisir l'arête à développer et créer un tronc à partir de ses extrémités(ses vertex);



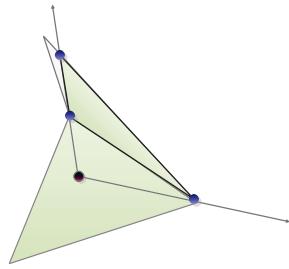
- Chercher la face adjacente (qui partage une arête avec la face origine), puis transformer le plan de cette face dans le plan de la face origine en utilisant une transformation affine. La face obtenue par la transformation du plan de la face F0 soit F1.



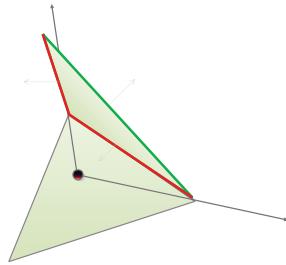
- Choisir une arête sur cette facette et créer un tronc à partir de ses extrémités avec le premier tronc;
- Chercher la face adjacente le long de cette arête, puis utiliser une transformation affine pour placer cette face dans le plan tangent de la face origine;
- Couper la nouvelle face en trouvant les sommets de l'intersection entre le tronc et la face F1.



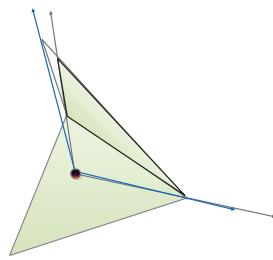
- Ajouter cette nouvelle face au dépliage;



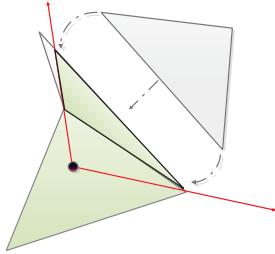
- Pour chaque arête sur  $F_1$ , calculer le produit scalaire de la normale dirigé vers l'extérieur avec le rayon de tronc qui passe par un point d'extrémité, si ce produit est négatif, jeter l'arête;



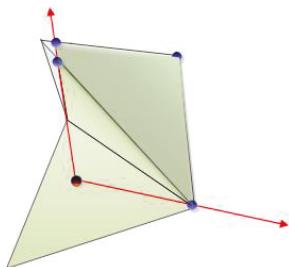
- Choisir une arête pour former le nouveau tronc;



- Croiser les deux troncs et chercher la face adjacente;



- Couper cette facette avec le nouveau tronc, ensuite ajouter cette facette coupée au dépliage et continuer le processus jusqu'à ce que le dépliage soit complet.



### 2.5.3. Parcours des graphes et le calcul des arborescences couvrantes pour le dépliage

Le dépliage d'une structure géométrique 3D comme les polyèdres consiste à mettre cette structure sur un plan en maintenant les relations topologiques entre ses éléments. Plusieurs travaux qui sont proposés pour le dépliage des structures 3D sont basés sur la génération des arbres couvrants du graphe avec des faces contiguës (le graphique qui représente la connectivité entre les faces de la structure)[Tai *et al.*, 2004]. On considère un polyèdre comme un graphedont chaque sommet du graphe représente une face, et deux sommets sont reliés si les faces correspondant sont adjacentes. Le dépliage de ce polyèdre sur un plan nécessite la définition des chemins de dépliage qui sont déterminés comme un ensemble des faces connectées entre elles. Alors, il sera nécessaire d'utiliser des algorithmes pour parcourir le graphe correspond à notre polyèdre en maintenant les relations topologiques entre les faces adjacentes du polyèdre après le dépliage.

Un graphe est une structure géométrique composée d'un ensemble de nœuds et d'arêtes permettant la représentation d'un ensemble d'objets (nœuds) et leurs relations (liens). L'utilisation des graphes joue un rôle important dans la résolution des problèmes dans diverses applications. Par exemple, le réseau routier où les graphes nous permettent de faire une analyse de réseau comme l'optimisation des réseaux de transport routiers. Plusieurs algorithmes ont été utilisés en informatique et en géomatique pour modéliser

des phénomènes concrets sous forme d'un graphique, à partir de l'établissement des liens entre les différentes composantes[Le Bot, 2006]. Dans ce cas, l'icosaèdre peut être considéré comme un graphe composé des nœuds qui sont les faces de l'icosaèdre et les liens qui sont les arêtes communes entre ces faces.

Plus formellement, un graphe "G" est défini par un couple  $(V, E)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes de ce graphe. Parcourir un graphique consiste à visiter tous les nœuds  $V_i$  suivant des chemins en commençant toujours par un nœud de départ.

Les algorithmes de parcours des graphes sont utilisés pour parcourir une structure soit en largeur BFS (Breadth First Search) ou en profondeur DFS (Depth First Search). Ils sont très utiles pour trouver le nœud désiré surtout lorsque le graphique n'est pas orienté.

#### 2.5.3.1. *Parcours en largeur (Breadth First Search)*

L'algorithme BFS traite tous les liens de même niveau à chaque fois c'est-à-dire, il traite les sommets du graphe niveau par niveau, à partir d'un sommet donné. Par exemple, si on considère le nœud B comme nœud de départ, les nœuds C, A et D sont considérés comme des nœuds de même niveau, car ils sont liés avec le point B par une arête. Dans chaque étape, un sommet est retiré de la file FIFO (First In First Out) des sommets non visités avec une exploration (visite) de ses voisins. Autrement dit, le parcours en largeur peut être utilisé pour rechercher l'ensemble des sommets accessibles depuis un sommet de départ. Il permet de déterminer les noeuds connexes d'un graphe non orienté.

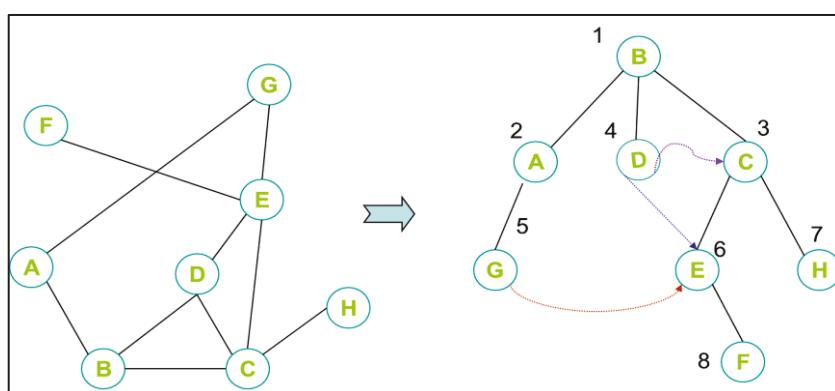


Figure 2.28: Recherche en largeur (BFS)

Les principales étapes qui suivent montrent le principe de l'algorithme BFS :

1. Prendre une face B et marquer cette face comme face visitée.
2. Pour chaque face voisine  $f_i$  de B, retirer le nœud  $B$  de la file d'attente et ajouter une face  $f_i$  à la file d'attente.
3. Retirer le nœud A de la file d'attente et mettre son enfant G qui est non examiné dans la file.
4. Retirer le nœud C de la file d'attente et mettre ses enfants E, H qui ne sont pas visités.
5. Refaire le processus jusqu'à ce que la file d'attente soit vide. On supprime à chaque fois le nœud de la file d'attente, ensuite on découvre ses enfants.

#### 2.5.3.2. Parcours en profondeur DFS (Depth First Search)

Le principe de cet algorithme est différent du premier algorithme. Il explore un sommet et tente d'aller le plus loin possible. Dans cet algorithme la visite des sommets se fait itérativement, dans chaque étape un sommet marqué et ajouté aux sommets visités de l'arbre et les enfants sont ajoutés dans la liste des sommets à visiter. La visite des sommets est commencée par le sommet d'origine. La priorité est donnée au sommet dernièrement placé dans l'ensemble des sommets à traiter « Fringe ». Donc, c'est un algorithme de type « First in Last out » dans chaque étape un sommet voisin du sommet visité est ajouté à l'arbre[Le Bot, 2006].

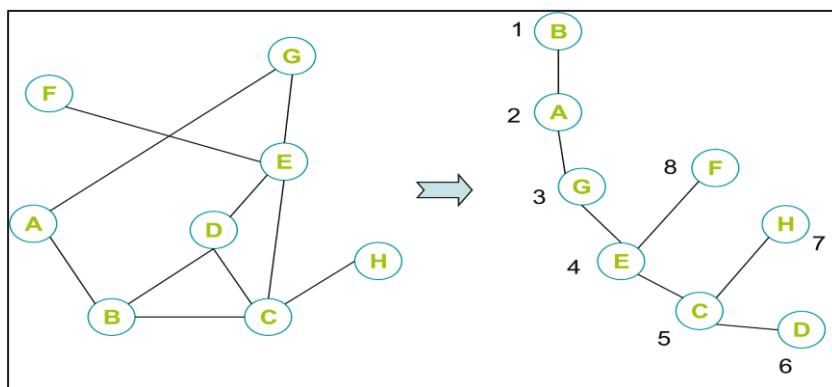


Figure 2.29: Recherche en profondeur (DFS)

Les principales étapes de cet algorithme sont :

1. Commencez par le nœud de départ. La frange ne contient que le nœud B.
2. Retirer B de la frange (l'ensemble des sommets à traiter). B est visité et ses enfants A, C et D sont mis en avant de la frange.

3. L'enfant A est poussé en face de frange
4. Gest poussé en face de frange.
5. E est poussé en avant de la frange.
6. Les enfants F et C sont poussés en face de frange.
7. F est poussé en avant de la frange.
8. C est poussé en avant de la frange.
9. Les enfants H et D sont poussés en face de frange.
10. H est poussé en avant de la frange.
11. D est poussé en avant de la frange.

#### *2.5.3.3. Calcul de plus court chemin (Shortest Path)*

Certains graphes sont métriques, c'est-à-dire qu'il y a une valeur attribuée à chaque arête qui peut être utilisée dans la détermination de la priorité de visite d'un sommet lors de parcours d'un graphe. La carte peut être considérée comme un graphe, où les villes représentent les nœuds et les routes représentent les arêtes. Si on veut passer d'un point à un autre suivant la plus courte distance et d'une ville à une autre, on doit assigner des coûts pour passer d'une ville à l'autre. À cet effet, on obtient un graphe pondéré. Pour passer entre les nœuds, on a besoin d'un algorithme qui détermine les nœuds à visiter. Les deux algorithmes BFS et DFS fonctionnent que dans le cas des graphes non pondérés. C'est-à-dire que tous les poids des arêtes du graphe sont unitaires.

La construction de l'arbre de plus court chemin « shortest path » se fait arête par arête. À chaque étape, l'algorithme de calcul du plus court chemin ajoute une nouvelle arête qui est la plus courte par rapport au nœud source. L'algorithme Dijkstra est l'un des algorithmes les plus utilisés pour cette fin. Cet algorithme s'applique pour le calcul des plus courts chemins dans un graphe pondéré (avec des poids positifs) est l'algorithme de Dijkstra. Le principe de cet algorithme est semblable à l'algorithme BFS, sauf qu'on attribue des poids aux arêtes afin d'avoir les chemins les moins coûteux à partir du nœud de départ. L'algorithme commence par un nœud de départ et inclure de manière itérative dans chaque chemin les nœuds qui ont le plus faible coût par rapport au nœud de départ. Par conséquent, la priorité des nœuds dans la file d'attente est liée à l'approximation de chaque nœud par rapport au nœud source (plus court chemin).

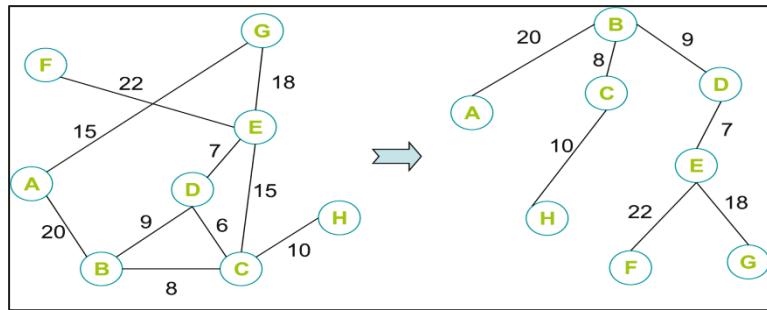


Figure 2.30: Calcul du plus court chemin avec l'algorithme Dijkstra

Worboys & Duckham [2004] ont présenté l'algorithme de Dijkstra pour calculer les plus courts chemins comme suit.

1. initialise la distance à la source est zéro  
 $\text{dist}[s] \leftarrow 0$
2. mettre toutes les autres distances à l'infini  
 for all  $v \in V - \{s\}$   
 do  $\text{dist}[v] \leftarrow \infty$
3. les sommets visités est initialement vide  
 $S \leftarrow \emptyset$
4. la file d'attente contient initialement tous les sommets  
 $Q \leftarrow V$
5. tant que la file d'attente n'est pas vide  
 while  $Q \neq \emptyset$
6. sélectionner l'élément de  $Q$  avec la distance est minimale  
 do  $u \leftarrow \text{mindistance}(Q, \text{dist})$
7. ajouter  $u$  à la liste des sommets visités  
 $S \leftarrow S \cup \{u\}$
8. Si le nouveau plus court chemin est trouvé  
 do if  $\text{dist}[v] > \text{dist}[u] + w(u, v)$
9. Mettre la nouvelle valeur du plus court chemin  
 then  $\text{dist}[v] \leftarrow \text{dist}[u] + w(u, v)$
10. si désiré, ajouter du code de retraceage  
 return  $\text{dist}$

nous pouvons montrer le calcul des plus courtes distances de l'algorithem Dijkstra dans différentes iterations (Tableau 2.1).

n( itération )	Q(file)	V(vertex)
1	[B]	{}
2	[A,C,D]	{B}
3	[A, D, E]	{B,C}
4	[A, E, H]	{B,C,D}
5	[A, H,G,F]	{B,C, D,E}
6	[H,G,F]	{B,C, D,E,A}
7	[G,F]	{B,C, D,E,A,H}
8	[F]	{B,C, D,E,A,H,G}
9	[]	{B,C, D,E,A,H,G,F}

Tableau 2.1: La liste d'ajacence d'un graphe connecté par l'algorithme Dijkstra

### 1. *Calcul de l'arbre couvrant minimal (Minimum Spaning Tree)*

Selon Roche [2014]les arbres couvrants permettent de définir de façon unique les chemins dans les graphes. C'est-à-dire entre deux points, il y a un seul chemin qui passe par tous les vertex de l'arbre.S'il y a plus d'un chemin, on obtient un cycle. À cet effet, les arbres couvrantsont deux propriétés importantes : l'absence des cycles et la couverture de tous les sommets du graphe.

Dans le calcul des arbres couvrants, parfois on s'intéresse au poids total que les distances à partir d'un certain nœud[Roche, 2014]. L'arbrecouvrant qui correspond au poids total minimal est appelé un arbre couvrant minimal ou MST «*Minimum Spaning Tree* ». Par contre, l'arbre couvrant calculé par l'algorithme plus court chemin (ex. Dijkstra)est un arbre dont les chemins sont les plus courts à partir du nœud source.

Il existe deux algorithmes permettant de calculer l'arbre couvrant minimal : l'algorithme de Prim et l'algorithme de Kruskal. Les deux algorithmes sont des algorithmes gloutons (ils suivent le principe de faire, étape par étape) qui trouve un arbre couvrant minimum d'un graphe non orienté pondéré connecté. Un arbre de recouvrement est un sous-graphe d'un graphe tel que chaque nœud du graphe est connecté par un chemin, qui est un arbre. L'arbre couvrant minimal d'un graphe G correspond est un sous ensemble des arêtes du graphe dont la somme des poids des arêtes soit minimale. Kruskal construit un arbre de recouvrement minimal en ajoutant

un bord à la fois. La branche suivante est toujours la plus courte que si elle ne crée pas un cycle. Nous avons résumé le principe de l'algorithme de Kruskal dans ce pseudo code.

1. T (l'arbre de recouvrement final) est défini comme étant l'ensemble vide;
2. Pour chaque sommet  $v$  de  $G$ , faire l'ensemble vide de  $v$ ;
3. Trier les arêtes de  $G$  dans l'ordre croissant (non décroissante) afin;
4. Pour chaque arête  $(u, v)$  dans la liste triée dans l'étape 3.

Siu et  $v$  appartiennent à différents ensembles

Ajouter  $(u, v)$  à  $T$ ;

Se Rassembleru et  $v$  dans un seul ensemble;

5. Retour  $T$

Par contre l'algorithme de Prim, il construit un arbre couvrant minimal en ajoutant un sommet à la fois. Le sommet suivant à ajouter est toujours le plus proche à un sommet déjà sur le graphe. La Figure 2.31 montre le principe de calcul de l'arbre couvrant minimal par l'algorithme de Prim.

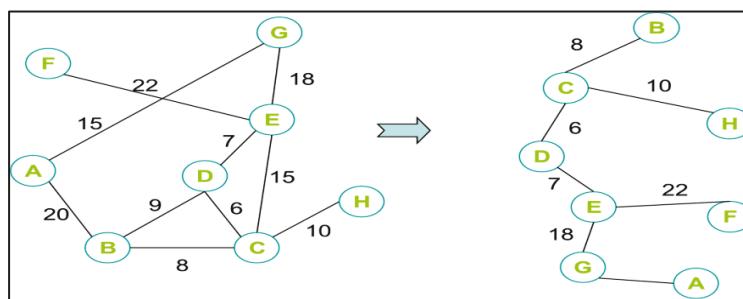


Figure 2.31: Arbre couvrant minimal de l'algorithme de Prim

Nous avons résumé le principe de l'algorithme Prim en ces étapes :

- 1 . Désigner un noeud comme noeud de départ
- 2 . Ajouter le noeud de départ dans l'arbre
- 3 . Mettre les voisin de ce sommet dans la partie des sommets non-traités (FRINGE)

- 4 . Choisir le sommet le plus proche au sommet de départ; ajouter ce nœud à l'arbre
- 5 . Ajouter les vertex voisins non-traités de ce sommet dans la partie non-traitée avec la distance entre le sommet parent et chaque'un de ses enfants(attribution des poids)
- 6 . Mettre le somet le plus proche dans la partie non-traité sur l'arbre
- 7 . Répéter les étapes 5 et 6 jusq'à ce que tous les sommets du graphe soient sur l'arbre.

## 2.6. Synopsis

Dans ce chapitre nous avons présenté les différents concepts utiles à la compréhension de la problématique de notre recherche. Nous avons présenté les différents systèmes de projection de cartographie Web. Parmi ces systèmes, la projection WMP est la plus utilisée dans les services de cartographie Web comme Google Maps. Nous avons présenté les limites de ce système avec une illustration de deux systèmes qui sont proposés pour résoudre les problèmes du premier système et qui sont : le système de projection composite et le système de projection polyédral. Nous avons montré les limites de chaque système et nous avons conclu que le système de projection Myriahédrale est le plus approprié. Pour avoir un système de projection sans distorsions, il est nécessaire de choisir une méthode de tessellation approprié. Le choix de la tessellation permet d'avoir un système de projections sans distorsion et consistant 'seamless'. À cet effet, nous avons fait une revue littérature pour avoir la meilleure pour la modélisation du globe. Parmi ces méthodes, nous avons trouvé que la tessellation polyédrale basée sur des tuiles triangulaires est la meilleure, car elle a plusieurs avantages comme l'homogénéité des cellules, adaptée à la forme de la Terre (certains polyèdres comme le dodécaèdre et l'icosaèdre). Afin de faciliter le stockage et la récupération des données géospatiales dans la structure hiérarchique, nous avons présenté les différentes techniques d'indexation et de tiling utilisées dans les services de cartographie Web. Pour aplatiser la structure hiérarchique sur un plan et avoir des cartes planes, il est nécessaire de déplier cette structure sur un plan à moyen des algorithmes de dépliage. À cet effet, nous avons présenté quelques algorithmes utilisés dans le dépliage des polyèdres en calculant les chemins de dépliage du polyèdre qui est considéré comme un graphe.



# **Chapitre 3: Conception d'un système de projection icosaédral hiérarchique**

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les approches de projection actuelles utilisées dans la cartographie web présentent des limites pour couvrir la totalité du globe avec un minimum de distorsion. En outre, l'utilisation de ces approches est très limitée dans les régions nordiques. L'une des méthodes les plus intéressantes que nous avons mentionnées dans notre revue de littérature est celle de Wijk [2008] qui consiste à développer un système de projection à la fois conforme et équivalent. Pour cela, cet auteur propose d'utiliser une approximation de la sphère en projetant sa surface sur les faces d'un polyèdre qui sont suffisamment petites ce qui permet de réduire les distorsions à l'intérieur de chaque face. Aussi, nous avons présenté les principales méthodes de la hiérarchisation qui servent à générer des structures polyédriques à partir des solides platoniques. En outre, nous avons détaillé les principales méthodes d'indexation utilisées pour optimiser l'utilisation des tessellations hiérarchiques dans la cartographie Web.

Dans le présent chapitre, nous détaillerons notre nouvelle approche de projection cartographique qui vise à remédier aux problèmes des projections actuelles adoptées dans la cartographie Web. Afin d'atteindre un tel objectif, il est primordial de bien cerner les différents critères nécessaires pour développer notre solution qui permettra de réduire les distorsions tout en assurant l'aspect consistant ‘seamless’ lors de la visualisation et l'exploitation des données géospatiales à travers le Web.

Le présent chapitre est composé de deux principales sections; la première section consiste à définir les critères nécessaires pour le développement d'un système de projection approprié. La seconde section est dédiée à l'élaboration des principales étapes à suivre pour développer la solution proposée. Notre solution présente trois principales composantes, qui sont : 1) la conception de la structure hiérarchique sur la base de développement récursive des faces d'un polyèdre régulier choisi parmi les cinq

polyèdres réguliers, 2) la définition d'un système de projection pour projeter les données spatiales sur les faces du polyèdre choisi et finalement 3) le dépliage de la structure sur un plan.

### 3.1 Critères pour la conception d'un système de projection sans distorsion

Une représentation plane idéale du globe doit être basée sur un système de projection qui est conforme, équivalent et qui ne présente aucune interruption. Cependant, il est impossible mathématiquement de représenter fidèlement la surface de la Terre sur un plan sans provoquer des déformations que ça soit dans la forme, la superficie ou encore les interruptions. Ainsi, il est impossible de respecter la propriété de l'équivalence et de la conformité simultanément sans provoquer des interruptions dans le résultat de la projection. Ceci est dû au fait que la Terre est une surface non développable et que tout système de projection requiert l'utilisation d'une surface développable (cylindre, cône, etc.) pour la définition des équations d'un tel système.

Comme nous avons évoqué dans le premier chapitre, la plupart des services de cartographie Web utilisent la projection WMP. La projection WMP présente des déformations importantes surtout dans les régions nordiques. Ces distorsions sont liées principalement à la surface développable et à la méthode de tessellation utilisée.

La tessellation quadrilatère utilisée dans le WMP présente des déformations systématiques importantes particulièrement dans les régions proches des pôles. Cette tessellation présente des problèmes à savoir :

- Les quads deviennent très maigres près du pôle, ce qui résulte un maillage non homogène sur le globe.
- Les pôles qui sont représentés par des points sur la sphère sont dégénérés à une ligne après la projection.

Pour remédier au problème de distorsion dans la cartographie Web, la solution développée doit être basée sur un système de projection avec les caractéristiques suivantes : 1) gérer en cache l'information géospatiale, 2) assurer différents niveaux de hiérarchie (multirésolution), 3) permettre une transition consistante ‘seamless’ entre les

différentes régions du globe, 4) visualiser et manipuler les données vectorielles et rasters, et 5) minimiser au maximum les distorsions.

Un système de projection idéal sans distorsion est un système qui doit respecter les trois propriétés suivantes : il doit être conforme, équivalent et ne présente pas d'interruptions. Cependant, il est impossible d'avoir un système de projection qui peut vérifier ces trois propriétés simultanément.

Les projections équivalentes conservent les surfaces de sorte que la taille d'une région sur la carte égale à celle qui est sur la terre. Elles montrent les surfaces correctement sur une étendue finie[Snyder, 1987].

Dans les projections conformes, les angles mesurés autour de n'importe quel point sur la carte sont correctes[Delmelle 2001]. Cette propriété est importante pour la navigation et pour les militaires comme le lancement des missiles où les angles à partir de deux lieux géographiques doivent être préservés. Il est à noter que la préservation des angles ne cède pas à la conservation des formes.

Les projections qui sont conformes ou équivalentes ne présentent pas des interruptions. Comme il est représenté dans la (Figure 3.1) où chaque méthode présente certaine degré de performance vis-à-vis la préservation des formes, des aires et la présence des interruptions dans le résultat de la projection. Les méthodes standards sont soit conformes, équivalentes ou ni aphyllactique (ni conforme ni équivalente), cependant, elles ne peuvent pas vérifier les deux propriétés simultanément, car la surface de la Terre est considérée comme une surface non développable (c.-à-d. ne peut pas aplatis sans causer des déchirures). À cet effet, pour avoir un système de projection qui est conforme et équivalent, il est nécessaire de provoquer des interruptions dans le résultat de la projection de la surface sur un plan.

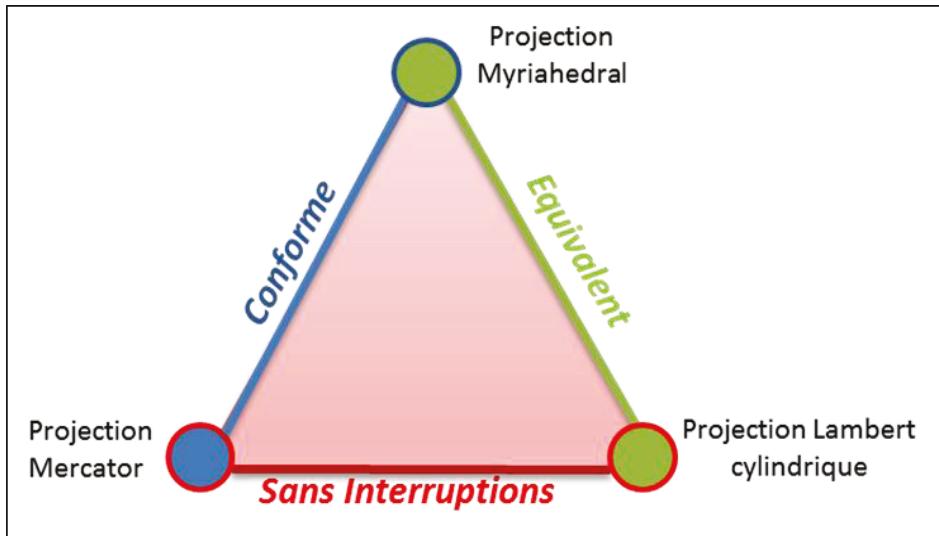


Figure 3.1: Les propriétés des projections Myriahédrale[Wijk, 2008]

Dans ce qui suit, nous allons détailler l'approche que nous avons adoptée pour prendre en considération les trois critères lors de la conception de notre solution.

### 3.2. 1 Critère 1 : un système de projection conforme et équivalent

#### 3.2.1.1. *Choix de la méthode de projection Myriahédrale*

À partir de la Figure 3.1, on remarque qu'il est impossible de définir un système de projection conforme et équivalent simultanément, et sans introduire un nombre considérable d'interruptions. La projection Myriahédrale présentée par Wijk[2008] est l'une des méthodes illustre parfaitement ce problème. En effet, cette méthode utilise une tessellation polyédrique qui permet de projeter des régions du globe sur les faces correspondre de la tessellation utilisée. La projection Myriahédrale considère que chaque face du polyèdre soit suffisamment petite de telle sorte que les distorsions suite à la projection soient négligeables. Ceci signifie que la projection correspondante à chaque face est à la fois conforme et équivalente. En effet, mathématiquement, on peut considérer que la sphère (ou tout autre objet) est équivalente à un polyèdre avec une infinité de faces suffisamment petites. Dès lors, les distorsions deviennent de plus en plus minimes avec la multiplication de nombre de faces du polyèdre. Cette multiplication du nombre de faces peut résulter de la subdivision hiérarchique d'un polyèdre régulier qui est utilisé pour représenter la surface de la Terre(ellipsoïde, etc.).

Comme nous avons cité précédemment que le nombre des interruptions dans les projections myriahédrales est important par rapport aux autres méthodes polyédriques

comme Dymaxion(1946) et Goode homolosine(1923) qui sont équivalentes et non conformes. L'utilisation des interruptions permet de maintenir les deux propriétés de conformité et d'équivalence à l'intérieur de chaque face du polyèdre utilisé[Wijk, 2008]

La figure suivante montre le dépliage des cinq polyèdres réguliers sur un plan. Le dépliage est différent d'un polyèdre à un autre. Ceci est dû à la forme des cellules, et le nombre des faces et le degré des interruptions dans le résultat de dépliage.

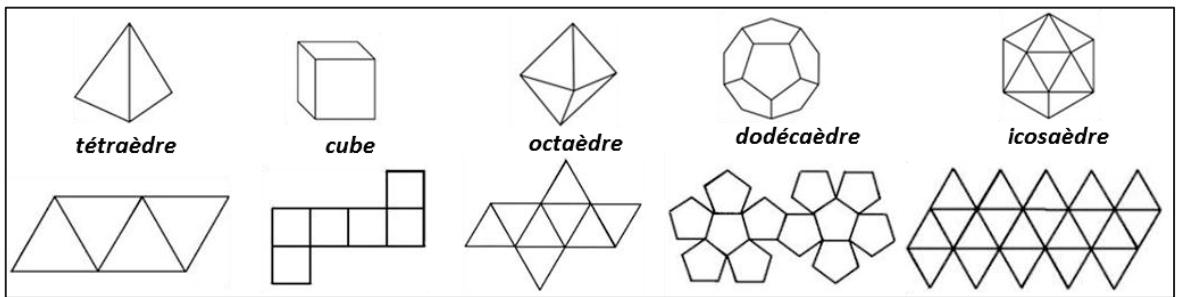


Figure 3.2: Le dépliage des cinq polyèdres réguliers[Fisher & Miller, 1944]

### 3.2.1.2. *Choix d'une approche de tessellation appropriée*

Nous avons mentionné auparavant que l'utilisation d'un polyèdre avec des faces suffisamment petites permet d'obtenir une projection conforme et équivalente dans chaque face. Cette condition peut être respectée plus facilement dans la cartographie à grande échelle. Cependant, dans la cartographie à petite échelle, le degré d'interruptions causé par le nombre important des petites facettes va rendre la solution non utile et difficilement exploitable. Par conséquent, il est nécessaire de choisir une structure polyédrale de base qui sera utilisée pour la projection des données géospatiales dans des petites échelles. Cette structure sera par la suite subdivisée afin de générer une structure polyédrale appropriée pour chaque niveau de détail.

#### a) Choix de la tessellation

Le choix de la méthode de tessellation est un élément indispensable pour avoir un système de projection de haute performance en termes de minimisation des distorsions. La méthode la plus simple pour créer une tessellation sur la surface de la sphère est d'utiliser la grille des méridiens et des parallèles. L'intersection de deux parallèles adjacents avec deux méridiens définit un quadrilatère sphérique. Le plus grand avantage de ce système est la facilité d'implémentation et d'indexation des données géospatiales.

Cependant, cette méthode présente de nombreux inconvénients dans la représentation globale des données géospatiales sur la sphère comme la dégénération des cellules quadrangulaires vers une forme triangulaire plus petite avec l'éloignement par rapport à l'équateur. Ces problèmes rendent cette méthode moins régulière et inadaptée pour couvrir la totalité du globe avec des cellules homogènes.

Selon Fekete & Treinish [1990], les méthodes de tessellation produisent des formes plus fines et différentes. Une meilleure méthode de tessellation est un compromis entre la simplicité, la régularité et la symétrie multiple. La régularité exige que la variation de la taille et de la forme des cellules soit le plus petite que possible. La symétrie multiple signifie quel'apparence de la surface développable ne change pas avec les rotations. La méthode de tessellation doit satisfaire les trois critères à savoir : la régularité des cellules, s'adapter à la forme de la terre et hiérarchique (cf. section 2.2).

Pour remplir ces trois critères, nous devons définir une méthode de tessellation permettant de décomposer la surface du globe en cellules (tuiles) de tailles égales. Cependant, le problème majeur des méthodes de tessellation standard c'est que les tuiles générées ne correspondent pas forcément à celles qui sont sur la Terre. Cela conduit à l'utilisation de la subdivision basée sur la longitude et de la latitude. Malheureusement, cette méthode cause des grandes distorsions dans les régions polaires, ce qui empêche d'utiliser des lignes équidistantes de latitude [Lee & Samet, 1998].

Tous ces problèmes ont conduit à l'utilisation d'une approximation de la surface du globe par des polyèdres réguliers. Les cinq polyèdres réguliers ont la particularité d'avoir des faces régulières et homogènes et qui deviennent de plus en plus petites avec la subdivision, permettent de réduire la distorsion [White *et al.*, 1998]. À cet effet, la tessellation doit être obtenue à partir de la subdivision des formes qui sont régulières. Par exemple, la subdivision des faces des polyèdres non réguliers produit des cellules différentes en taille et en formes [Bartholdi III & Goldsman, 2004].

### b) Choix de polyèdre de base

Le choix du modèle de base pour la tessellation de la surface du globe est un élément important pour satisfaire aux exigences relatives à la régularité des tuiles [Lee & Samet,

1998]. Cette exigence limite également le choix des polyèdres inscrits à l'un des cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, et l'icosaèdre.

Vu la simplicité de la subdivision des faces du cube en plusieurs quads, ce polyèdre a été choisi par Alborzi & Samet [2000] comme polyèdre de base. Malheureusement, cette subdivision qui est quadrilatère n'est pas appropriée pour la tessellation de la surface du globe, donc le cube est loin d'être un platonique de base. La subdivision récursive des faces des polyèdres réguliers qui ont des faces triangulaires comme : le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre permettent d'avoir des triangles quasi équilatéraux. Le tétraèdre est caractérisé par une grande taille des faces donc, il est relativement loin d'être un platonique de base pour projeter la surface de la terre avec un minimum de distorsions. Les deux structures qui correspondent le mieux à la forme de la terre sont l'icosaèdre et le dodécaèdre. Contrairement au dodécaèdre, l'icosaèdre conserve sa qualité de faces régulières avec la même forme (triangles quasiment équilatéraux) quel que soit le niveau de la hiérarchie [Gregory *et al.*, 2008].

Polyèdre	Tétraèdre	Hexaèdre	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
Types de cellules	triangle	carré	triangle	pentagone	triangle
nombre des faces	4	6	8	12	20
nombre des arêtes	6	12	12	30	30
nombre des sommets	4	8	6	20	12

Tableau 3.1: Caractéristiques géométriques des polyèdres réguliers [White *et al.*, 1992]

Il est à noter que le polyèdre le plus favorable pour approximer la surface de la sphère est le polyèdre qui a plus de faces [Lee & Samet, 1998]. Selon les propriétés de chaque polyèdre présenté dans le Tableau 3.1, l'icosaèdre semble être le meilleur polyèdre de base. L'icosaèdre est le polyèdre le plus utilisé comme un solide platonique de base, [Sahr *et al.*, 2003]. Plusieurs auteurs qui ont choisi l'icosaèdre comme solide platonique de base, car il a plus de faces, donc un meilleur rapprochement de la sphère. Le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** résume les différents systèmes de tessellation proposés dans la littérature avec le choix des éléments de la conception (le polyèdre de base, la méthode de subdivision, l'orientation de polyèdre et le système de projection utilisé). Il est clairement que l'icosaèdre est le platonique le plus utilisé parmi les autres polyèdres réguliers dans la tessellation de la sphère.

En outre, l'icosaèdre présente d'autres propriétés importantes comme :

1. Le nombre important des faces (20 faces) qui ont une taille plus petite par rapport aux autres polyèdres réguliers. En effet, les polyèdres qui ont des petites faces réduisent la distorsion introduite lors de la projection d'une région de la sphère que la face correspondante du polyèdre [White *et al.*, 1998].
2. La régularité des tuiles lors de la hiérarchisation, dont chaque face donne quatre fils homogènes (quasi équilatéraux) dans chaque niveau de subdivision. Contrairement au dodécaèdre, l'icosaèdre est un solide platonique qui maintient sa qualité en face régulière et avec la même forme dans les différents niveaux de subdivision.
3. La géométrie de l'icosaèdre est une structure qui est le mieux adaptée à la forme sphérique de la terre.
4. La similarité des cellules en forme dans les différents niveaux de subdivision c'est-à-dire les faces de l'icosaèdre sont régulières à toutes résolutions.
5. La structure triangulaire hiérarchique génère des triangles quasi équilatéraux quel que soit le niveau de subdivision. La superficie moyenne des triangles dans le niveau de base (avec 20 faces) égal à  $12604\text{km}^2$  et la variation de la superficie est de l'ordre de  $10^{-17}\text{km}^2$ . Cette différence est liée principalement à la géométrie du triangle sphérique calcul des coordonnées des points milieu de chaque arête du triangle pour générer les nouveaux triangles.

*c) Choix de la méthode de subdivision*

Une fois que nous avons choisi le polyèdre de base pour la tessellation de la surface du globe, il est nécessaire de définir la méthode subdivision des faces de ce polyèdre afin d'obtenir une structure hiérarchique (multirésolution). Cette structure hiérarchique est importante, car elle permet d'offrir une cartographie à différentes échelles. En outre, lorsqu'on atteint des échelles assez grandes, les distorsions surfaciques et angulaires deviennent négligeables, car les faces deviennent suffisamment petites.

Plusieurs méthodes sont proposées pour construire une grille basée sur la subdivision récursive des faces triangulaires de l'icosaèdre. Nous avons cité trois méthodes de subdivision : subdivision de Catmull-Clark, subdivision de Doo-Sabin et subdivision de Loop (cf. section 2.2.1). Dans le cas des polyèdres réguliers, la méthode de tessellation choisie doit préserver les propriétés des faces initiales du polyèdre (faces équilatérales et homogènes) et générer un maillage

triangulaire plus raffiné qui se rapproche mieux de la sphère. La méthode de Loop est la plus utilisée pour la subdivision des triangles, où chaque arête est subdivisée en deux ou trois segments et les nouveaux vertex sont reliés de manière à produire quatre faces qui sont homogènes et équilatérales. La méthode de Loop produit une structure hiérarchique régulière dont les polygones ont des angles et des arêtes égales [Cloche *et al.*, 1983]. En outre, la méthode de Loop donne pour chaque niveau de subdivision le même nombre de descendants [Tobler & Chen, 1986] ce qui permet d'avoir des cellules homogènes avec des aires quasi-égales dans toutes les niveaux de subdivision. Par contre, la hiérarchie générée à partir de deux autres algorithmes (Catmull-Clark et Doo-Sabin) est irrégulière (cf. section 2.2.1). Donc, les cellules obtenues dans chaque niveau de subdivision sont différentes en forme et en aire de surface par rapport au polyèdre initial [Sahr & White, 1998]. Selon les propriétés qui caractérisent chaque méthode de subdivision, on juge que la méthode de Loop est la plus appropriée pour la subdivision des faces triangulaires de l'icosaèdre.

### 3.2. 2 Critère 2 : Minimiser les interruptions

Les systèmes de projection Myriahédrales utilisent un polyèdre inscrit dans une sphère dans le but de projeter la surface de cette dernière sur chaque face de ce polyèdre, en utilisant une projection locale. Pour minimiser les interruptions dans les continents, Fuller [1975] a orienté l'icosaèdre en plaçant les sommets dans les océans. Dutton [1996] a aligné l'octaèdre avec la grille géographique formée par les méridiens et les parallèles, afin d'éviter d'avoir des interruptions dans les continents [Sahr & White, 1998]. Wijk [2008] a utilisé dans sa projection un icosaèdre orienté de sorte que les continents dans le maillage généré soient coupés orthogonalement à leurs limites. Pour gérer les interruptions dans les résultats de dépliage de l'icosaèdre, Wijk [2008] a attribué des poids aux arêtes. Ensuite, il a calculé l'arbre couvrant maximal en utilisant l'algorithme de Prim. Le calcul de l'arbre couvrant maximal consiste à commencer par un vertex, ensuite on ajoute les vertex dont leurs arêtes ont un poids élevé. Le dépliage se fait sur la base des poids affectés aux arêtes des triangles. Les poids plus forts correspondent aux régions où nous ne voulons pas avoir des interruptions dans les régions correspondantes et des poids plus faibles pour les régions où nous voulons avoir des interruptions. Pour ne pas avoir des interruptions à l'intérieur de chaque face père qui est subdivisée en plusieurs triangles, Wijk [2008] a assigné des poids plus forts aux arêtes des tringles qui sont à l'intérieur et compose les tringles fils. Il a attribué pour

chaque arête trois poids : deux pour l'extrémité de l'arête et un pour le point qui se trouve au milieu de l'arête. Le poids central est calculé par interpolation (Figure 3.3), ce poids qui va être utilisé comme poids de l'arête.

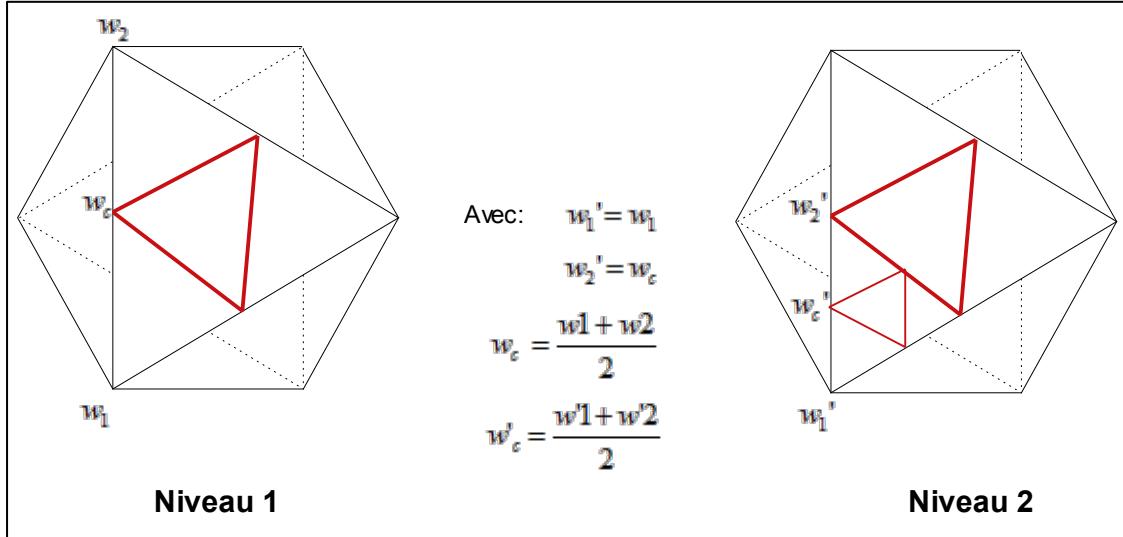


Figure 3.3: Attribution des poids aux arêtes de l'icosaèdre dans l'approche Myriahédrale

Pour avoir une configuration optimale (les coupes ne traversent pas les continents), Wijk [2008] a assigné à chaque arête des poids proportionnels à la quantité des terres traversés par l'arête. Les poids sont calculés dans plusieurs positions de l'arête (selon le nombre des partitionnements), en utilisant l'interpolation (Figure 3.3). Ensuite, le dépliage suit la somme des poids qui soit le maximum possible (pour avoir l'arbre couvrant maximal). Le dépliage se fait par rapport à une face, et les chemins de dépliage sont déterminés en basant sur le poids maximal dans chaque arête des vertex voisins (Figure 3.4).

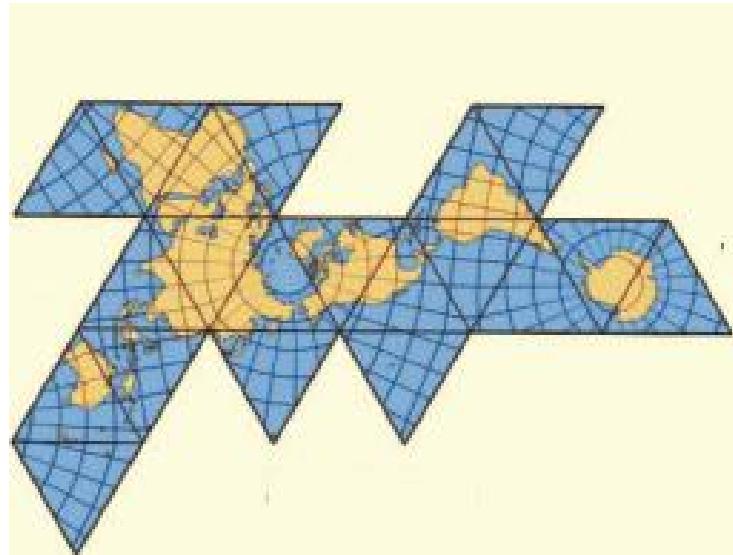


Figure 3.4: Dépliage optimal de l'icosaèdre[Wijk, 2008]

Selon le résultat de dépliage de l'icosaèdre par la solution proposée par Wijk [2008], on remarque que les continents sont préservés. Par contre, ce type de dépliage ne préserve pas les surfaces qui sont autour de point d'intérêt. Par conséquent, si on veut cartographier une zone comme les régions nordiques, il est préférable de choisir un autre algorithme qui permet de garder les surfaces les plus proches à la zone d'intérêt. À cet effet, notre objectif est de chercher un algorithme de dépliage qui permet d'organiser les faces de l'icosaèdre d'une manière à réduire les interruptions autour d'un point d'intérêt. La solution proposée est basée sur le calcul des plus courts chemins à partir d'une face choisi comme zone d'intérêt. Les poids sont attribués aux arêtes du graphe de l'icosaèdre en fonction des relations topologiques entre les faces (voisinage). On attribut des poids plus faibles pour les régions pour lequel on veut préserver la continuité et des poids plus forts pour les régions à moindre intérêt où les déchirures sont tolérables. Les détails de la solution sont présentés dans la section suivante.

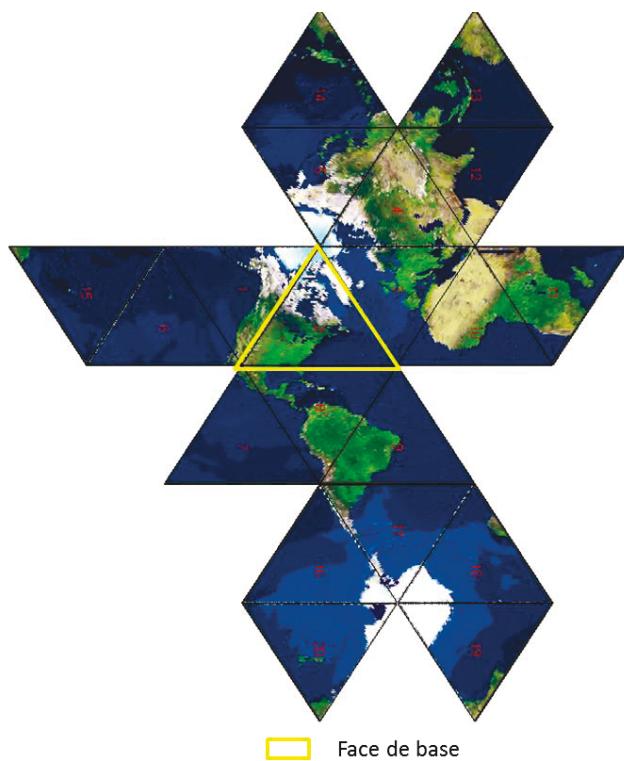


Figure 3.5: Configuration optimale du dépliage de l'icosaèdre autour d'un point d'intérêt (Province du Québec)

### 3.3. Solution proposée

La solution proposée dans le cadre de ce mémoire de maîtrise consiste à élaborer une méthode de projection qui permet de stocker et de présenter des données spatiales sur les faces d'un icosaèdre (ou le polyèdre résultant de la subdivision hiérarchique de cet icosaèdre), tout en assurant une représentation cartographique du globe avec un minimum de distorsion et d'interruptions. Notre solution est basée sur le travail de Wijk [2008] qui a présenté le principe de la projection myriahedrale. Cependant le travail présenté par Wijk n'est pas hiérarchique, donc il n'est pas adapté à l'exploration de données spatiales à différentes échelles exigés par les systèmes de cartographie Web globale. La solution proposée dans cette recherche traite plus spécifiquement le problème de la hiérarchisation et le dépliage de la structure à différentes échelles. Pour ce faire, nous avons effectué une étude plus exhaustive sur le choix de meilleure tessellation qui s'adapte aux critères d'une projection minimisant les distorsions partout sur le globe (seamless). Le dépliage que nous avons proposé se fait dépendamment de la zone d'intérêt qui est différent de dépliage utilisé dans l'approche Myriahedrale; dans l'approche Myriahedrale le dépliage ne tient pas compte la zone d'intérêt.

Notre approche consiste à projeter les régions du globe sur les faces correspondantes de la structure icosaédrale hiérarchique générée. Ainsi, il est nécessaire de définir un système de projection local approprié, pour projeter les données spatiales, en fonction de l'échelle désirée.

### 3.3.1. Définition des éléments de base constituant l'icosaèdre

Avant de procéder à l'élaboration de la structure hiérarchique, nous devons définir la structure topologique reliant les différentes faces de l'icosaèdre de base. Dans cette structure, les vertex sont définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien orthogonal dont l'origine est le centre de gravité de l'icosaèdre. Concernant les faces, elles sont définies à partir des vertex correspondants. Les arêtes, quant à elles, elles sont définies à partir des deux faces juxtaposées qui partagent la même arête.

L'icosaèdre est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Les coordonnées des sommets de l'icosaèdre sont définies dans un repère orthonormé ( $O; i, j, k$ ) dont l'origine est le centre de la sphère englobante. Ces coordonnées sont calculées en fonction du nombre d'or égal à  $(1+\sqrt{5})/2$ , elles varient de -1 à 1 dans le cas où l'icosaèdre est inscrit dans une sphère de rayon unitaire.

<b>Vertex</b>	X	Y	Z
1	0	0	1
2	s	0	c
3	s*c1	s*s1	c
4	-s*c2	-s*s1	c
5	-s*cs	-s*s2	c
6	s*c1	-s*s1	c
7	0	0	-1
8	-s	0	-c
9	-s*c1	-s*s1	-c
10	s*c2	-s*s2	-c
11	s*cs	s*s2	-c
12	-s*c1	s*s1	-c

Tableau 3.2: Coordonnées cartésiennes des sommets de l'icosaèdre

Où :

$$c_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\{[3 - \sqrt{5}]/8\}}; s_1 = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\{[5 + \sqrt{5}]/8\}};$$

$$c_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\{[3 + \sqrt{5}]/8\}}; s_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\{[5 - \sqrt{5}]/8\}};$$

$$c = 1/\sqrt{5}; s = 2/\sqrt{5};$$

- La position de l'icosaèdre dans l'espace est défini par trois rotations d'un demi-tour suivant les trois axes orthonormés qui sont orthogonaux deux à deux (Figure 3.6).
- Les sommets de l'icosaèdre forment trois rectangles orthogonaux (Figure 3.6). Chaque sommet est relié à cinq arêtes de même longueur, et par conséquent, nous pouvons associer à chaque sommet cinq triangles équilatéraux.
- Les faces et les arêtes de l'icosaèdre sont définies en fonction des sommets.

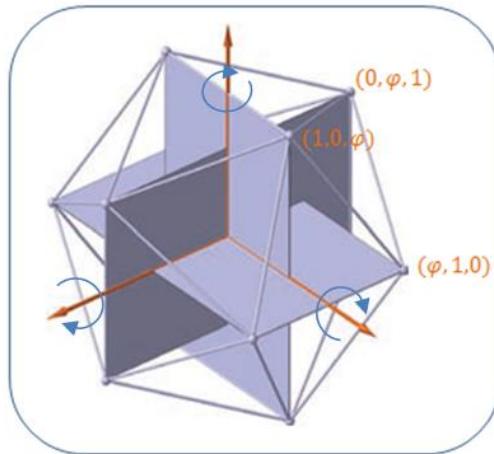


Figure 3.6: Icosaèdre inscrit dans une sphère de rayon unité [Popko, 2012 ]

Chaque face dans la structure est définie par un identifiant unique, et les index des trois nœuds constituant cette face. Cette structure permet de faciliter l'accès aux faces de façon optimisée, c'est-à-dire au lieu de reprendre les coordonnées de chaque sommet on récupère uniquement le numéro du vertex.

### 3.3.1.1. Structure topologique du maillage icosaédral

Le maillage triangulaire de l'icosaèdre est défini par un ensemble des triangles interreliés soit par une arête ou un sommet commun. Dans la plupart des maillages, la relation d'adjacence est définie par une arête commune entre deux faces. La manière la

plus simple pour gérer la structure des arêtes est de considérer le tableau des indices des sommets. Pour cela, on utilise une notation composée des indices des vertex ( $[v_1-v_2]$ ) pour les arêtes des triangles. Ces arêtes sont classées par ordre lexicographique (ex. les arêtes d'un tétraèdre sont notées par  $[1\ 2; 1\ 3; 1\ 4; 2\ 3; 2\ 4; 3\ 4]$ ). Les arêtes sont calculées à partir des faces sous Matlab en utilisant la fonction «*ComputeMeshEdges*».

La fonction «*MeshEdgeFaces*» cherche les faces qui sont voisines et qui partagent la même arête. Généralement, chaque arête aura deux faces voisines, une à gauche et l'autre à droite. Nous disons que l'orientation de deux faces adjacentes est compatible si les deux directions entre les vertex de l'arête commune entre ces faces sont opposées. L'arête qui est commune entre les deux faces suit l'orientation des deux faces (le même sens). Par exemple, on considère deux triangles adjacents  $T_1$  et  $T_2$ .  $T_1$  est défini par  $V_0V_1V_3$  et  $T_2$  par  $V_1V_2V_3$ . Dans la première figure (Figure 3.7-a) les deux triangles indiquent deux orientations différentes :  $T_1$  dans le sens horaire et le deuxième dans le sens antihoraire. Donc, ils ne sont pas compatibles. Par contre dans l'autre figure (Figure 3.7-b) les deux orientations sont compatibles (sens antihoraire).

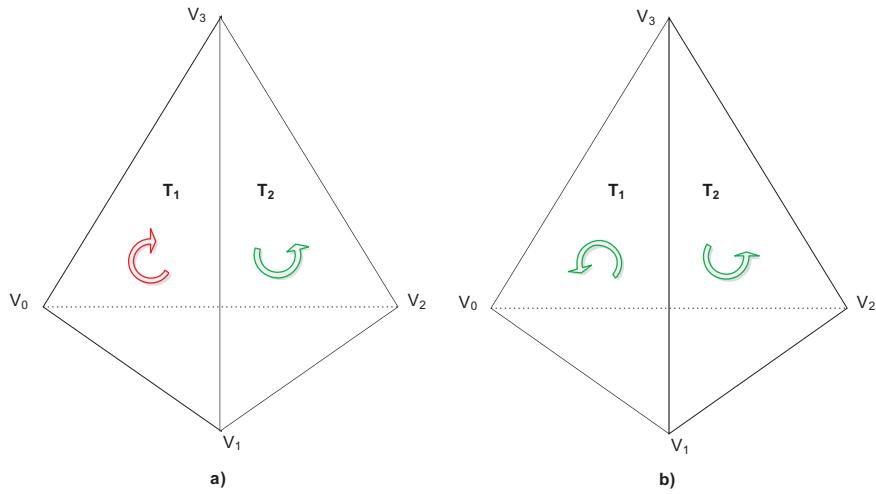


Figure 3.7: Orientations des faces voisines. a) :orientations non-compatibles, b) :orientations compatibles.

Cette orientation des faces est importante dans le dépliage des faces de l'icosaèdre, car il faut que tous les vecteurs normaux aux faces soient dirigés vers l'extérieur de la structure. Si une face a un vecteur normal dirigé vers l'intérieur, ceci va créer un problème lors de dépliage.

Les relations topologiques entre les éléments de base connectés de la structure icosaédrale (vertex, arête, face) qui sont stockées sous la forme des tableaux comme suit:

ID_Face	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>
1	1	3	2
2	1	4	3
3	1	5	4
4	1	6	5
5	1	2	6
6	2	3	7
7	3	8	7
8	3	4	8
9	4	9	8
10	4	5	9
11	5	10	9
12	5	6	10
13	6	11	10
14	6	2	11
15	2	7	11
16	7	8	12
17	8	9	12
18	9	10	12
19	10	11	12
20	11	7	12

ID_Arête	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	2	3
7	2	6
8	2	7
9	2	11
10	3	4
11	3	7
12	3	8
13	4	5
14	4	8
15	4	9
16	5	6
17	5	9
18	5	10
19	6	10
20	6	11
21	7	8
22	7	11
23	7	12
24	8	9
25	8	12
26	9	10
27	9	12
28	10	11
29	10	12
30	11	12

ID_Arête	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
1	5	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	6	1
7	5	14
8	15	6
9	14	15
10	8	2
11	6	7
12	7	8
13	10	3
14	8	9
15	9	10
16	12	4
17	10	11
18	11	12
19	12	13
20	13	14
21	16	7
22	15	20
23	20	16
24	17	9
25	16	17
26	18	11
27	17	18
28	19	13
29	18	19
30	19	20

a)

b)

c)

Tableau 3.3: Les relations topologiques dans la structure icosaédrale. a) relations entre les faces et les vertex; b) relations entre les arêtes et les vertex; c) relations entre les arêtes et les faces.

### 3.3.1.2. Relation arithmétique entre les éléments de la structure icosaédrale (formule d'Euler)

Le théorème d'Euler consiste à démontrer la relation entre les éléments de base (sommets, les faces et les arêtes) qui constituent un polyèdre. La formule d'Euler est vérifiée pour tous les types de polyèdres que ça soit concave ou convexe [Peter, 1997] (Tableau 3.4). Dans tous les niveaux hiérarchiques de l'icosaèdre, cette formule

est vérifiée. Cette formule représente la base pour voir si la topologie dans une structure est respectée (structuration topologique cohérente).

On considère les éléments d'un polyèdre convexe, où  $V$  représente le nombre des vertex,  $F$  est le nombre des faces et  $E$  est le nombre des arêtes. La formule d'Euler est définie comme suit :  $V - E + F = 2$

	$V$	$E$	$F$	Formule d'Euler ( $V-E+F=2$ )
Tétraèdre	4	6	4	2
Cube	12	30	20	2
Octaèdre	6	12	8	2
Dédocaèdre	20	30	12	2
Icosaèdre	12	30	20	2

Tableau 3.4: Polyèdres réguliers vérifiant la formule d'Euler

### 3.3.2. Gestion de la structure hiérarchique

#### 3.3.2.1. Indexation des éléments de la structure

Comme nous avons évoqué dans la section précédente, la définition de la topologie dans une structure joue un rôle important dans le dépliage de cette structure sur un plan. Également, l'indexation des arêtes et des faces est un élément clé pour gérer des masses importantes de données stockées dans les différents niveaux de subdivision. La Figure 3.8 nous avons montré le principe d'étiquetage des vertex de l'icosaèdre dans les différents niveaux de subdivision. La face  $f_1$  est la première face dans la structure icosaédrale définie par les trois vertex 1, 3 et 2. Si nous voulons avoir l'indexation de la structure dans les différents niveaux de subdivision, on procède comme suit; dans le niveau 0 (icosaèdre de base), on a 12 vertex, donc l'étiquetage dans le niveau 1 commence par le numéro 13 qui doit être affecté au vertex du milieu de l'arête [1-3] (première arête de la face  $f_1$ ). Ensuite, on doit respecter le sens antihoraire dans l'indexation des autres vertex de la même face. Par exemple, dans le niveau de subdivision  $n=3$ , le nombre des vertex dans la structure icosaédrale égal à 162. L'indexation des vertex dans ce niveau sera : le premier vertex va prendre l'indice 1, le

deuxième va prendre l'indice  $162(2-1) + 1 = 163$ ; et le dernier vertex va prendre l'indice  $162(2-1) + 2 = 165$ .

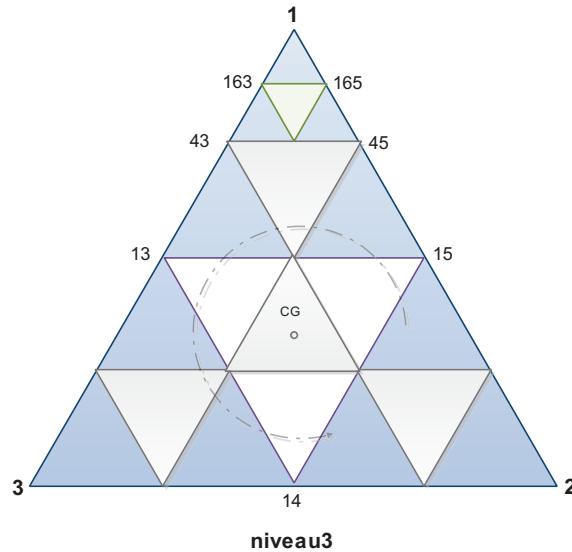


Figure 3.8: Maillage icosaédral: subdivision des faces et étiquetage des vertex

Dans notre solution, la structure hiérarchique commence par les faces de l'icosaèdre. Ensuite, chaque face est décomposée en 4 triangles quasi équilatéraux. Cette structure peut être représentée par un arbre hiérarchique dont les nœuds correspondent aux faces et les correspondent aux relations topologiques d'adjacence entre ces faces. La figure suivante présente la génération d'un réseau des faces triangulaires sur les faces d'un icosaèdre dans les différents niveaux hiérarchiques (voir Figure 3.9).

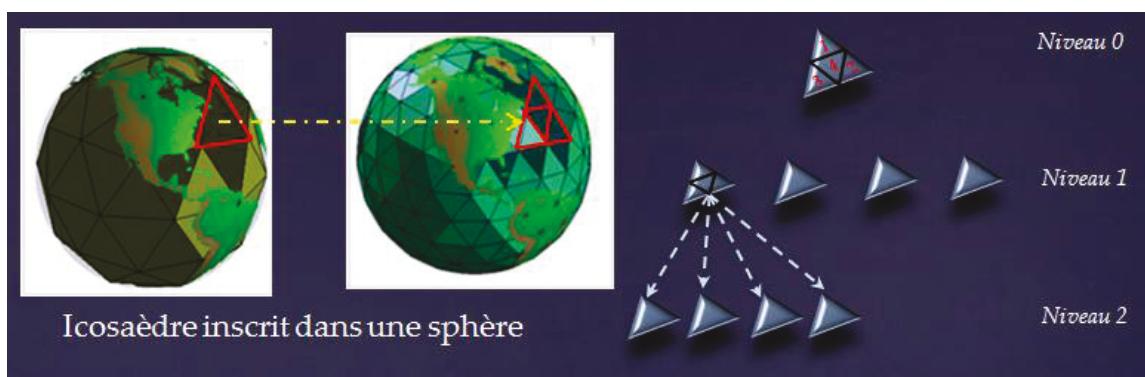


Figure 3.9: Construction de l'arbre hiérarchique sur l'icosaèdre

En plus que chaque face est stockée par son identifiant et trois autres pour les vertex constituants cette face, nous avons ajouté un nouvel indice qui permet de démontrer la relation intra-niveau et inter-niveau dans l'arbre quaternaire. À cet effet, nous avons

utilisé un système d'étiquetage des faces basé sur le niveau de subdivision et la position de triangle fils dans le triangle père. Après chaque subdivision, le codage de chaque fils dans l'arbre prend l'indice de la face père concaténé avec le niveau de la subdivision. La figure suivante montre le système d'étiquetage des faces de l'icosaèdre adopté dans notre système (voir Figure 3.10).

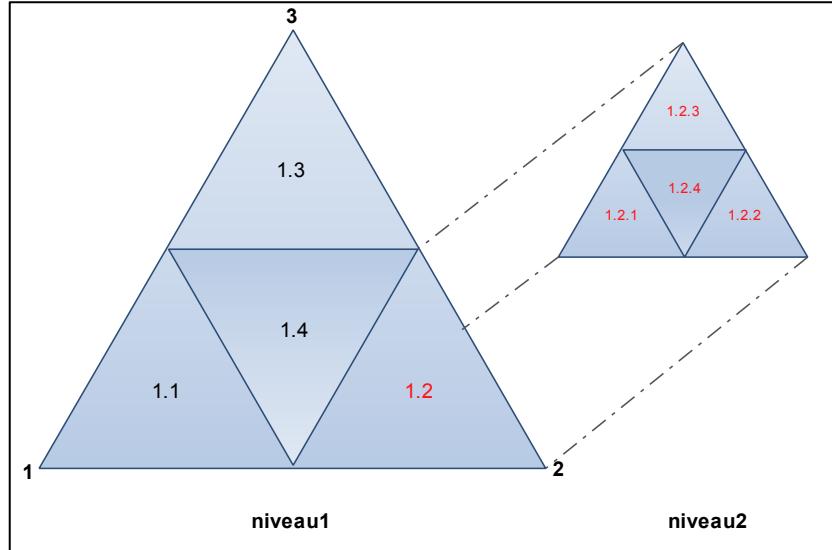


Figure 3.10: système d'étiquetage des faces utilisé

### 3.3.2.2. *Principe de la hiérarchisation*

Une fois que nous avons défini le polyèdre de base, le choix d'une méthode de subdivision des faces de ce polyèdre est nécessaire pour créer une structure en multirésolution. La subdivision des faces se fait d'une manière récursive jusqu'à ce que la résolution souhaitée soit atteinte. Avant de procéder à la subdivision des faces de l'icosaèdre, il est nécessaire de choisir la méthode de subdivision qui garde les propriétés des faces initiales. Les faces initiales sont équilatérales, régulières(une forme triangulaire) et sont égales (égalité de surface). Le choix de la méthode est lié principalement à la minimisation des distorsions dans les différents niveaux de subdivision. La méthode de subdivision de Loop (1:4) a été utilisée par plusieurs auteurs[Fekete, 1990], [Lee & Samet, 2000]dont chaque face est subdivisée en quatre faces équilatérales. Cette méthode permet de garder les faces équilatérales, c'est-à-dire les triangles générés ont des angles intérieurs égaux et de mêmes longueurs d'arêtes. En outre, elle préserve la régularité des faces (de même aire et de même forme) dans le maillage.

Pour construire notre tessellation, on commence par niveau initial basé sur un icosaèdre de base avec 20 faces inscrit dans une sphère de rayon  $r$  égale au rayon de la Terre où son centre de gravité coïncide avec le centre de l'icosaèdre. Premièrement, en se basant sur le principe de la méthode QTM qui génère une tessellation triangulaire dont chaque triangle est subdivisé en quatre. Cette méthode de subdivision a été utilisée par plusieurs auteurs [Goodshild & Yang, 1992], [White *et al.*, 1998], [Song *et al.*, 2002], [Sahr *et al.*, 2003],[Godsalve, 2008]. La méthode de subdivision de Loop (1 :4) est basée sur la subdivision récursive des faces dont chaque face génère 4 facettes et chaque arête est fractionnée en deux (bi-fréquence) dans un niveau plus détaillé (Figure 3.11). Les nouveaux vertex obtenus par la subdivision sont repositionnés sur la sphère au milieu du grand cercle correspondant à l'arête subdivisé, ce qui permet d'avoir un globe polyédral dont la forme se rapproche mieux le modèle du globe. Cette subdivision s'effectue de manière itérative en vue de multiplier le nombre de faces de la structure icosaédrale, et par ce fait minimiser les écarts entre le globe et une telle structure.

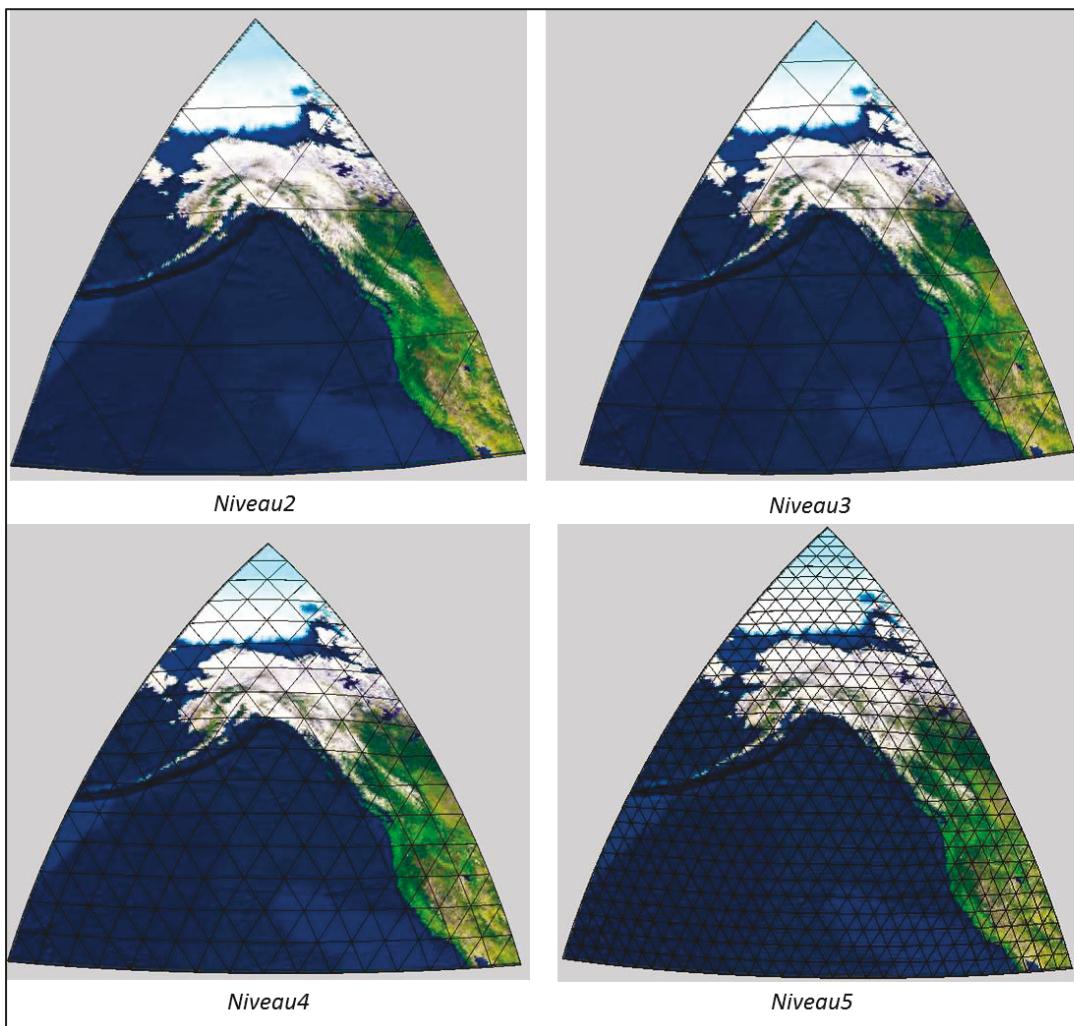


Figure 3.11: Subdivision polyèdrale bi-fréquence (chaque arête est subdivisée en deux) ou de Loop (1 :4) des faces de l'icosaèdre

Les triangles générés par la méthode de Loop de subdivision montrent certaines propriétés comme :

- 1) Le centre de gravité est situé à un tiers ( $1/3$ ) de la distance à partir de chaque sommet au point milieu du côté opposé. Ceci permet d'avoir des distances égales entre les centres de gravité des cellules voisines.
- 2) Chaque médiane divise une arête en deux segments égaux. Par conséquent, chaque triangle génère quatre nouveaux triangles dans l'autre niveau plus fin.

Les triangles obtenus sont quasi-équilatéraux et leur disposition forme une grille double (Pentagonale-Hexagonale). Ce qui donne la possibilité de générer une structure pentagonale-hexagonale à partir de la structure triangulaire.

Suite à la définition de la structure de tessellation et la méthode de subdivision, il est nécessaire de définir quel est le niveau de détails où il sera inutile de continuer la subdivision des faces triangulaires. En d'autres termes, à quel niveau les distorsions à l'intérieur de chaque face deviennent négligeables. En effet, la détermination de ce niveau de détail dépend de deux critères à savoir : 1) la longueur de l'arête, et 2) la compacité et l'isotropie de la cellule.

L'isotropie permet d'étudier la symétrie de la direction autour des nœuds (sommets) de la grille obtenue par le développement de l'icosaèdre et sa régularité. La compacité caractérise la relation d'uniformité et d'adjacence entre les nœuds qui appartiennent à la même cellule. Une valeur maximale de la compacité garantie que les points (nœuds) de triangle père sont proche possible les uns des autres [Kimerling *et al.*, 1999]. L'écart type de l'isotropie et la compacité dans une cellule par rapport à la moyenne de toutes les cellules dans le maillage doit être proche de zéro. Le niveau de détail plus fin est défini par le calcul de l'écart type de chaque facteur dans chaque niveau qui doit être inférieur à un seuil maximal défini au préalable.

### 3.3.3. Définition d'un système de projection local pour projeter les données géospatiales sur les faces de l'icosaèdre

Dans le but de projeter les données spatiales sur les faces de l'icosaèdre à partir de la sphère, nous avons besoin de définir un système de projection local pour projeter les données spatiales sur les faces planes de l'icosaèdre. Dans la procédure de la projection, nous avons proposé deux algorithmes :

- Projection des données spatiales de format ratser

Dans cette section, nous avons utilisé le module *Mapping Toolbox*<sup>1</sup> du Matlab pour implémenter cette partie qui fournit des fonctions facilitent la manipulation et la visualisation des données spatiales (raster ou vecteur). La fonction *Patcht* du Matlab permet d'appliquer la texture sur un maillage triangulaire en faisant la correspondance entre chaque triangle de l'icosaèdre et celle de l'image raster. Dans cette section, nous avons utilisé une image du globe issue de site « Views of the Solar System»<sup>2</sup> de dimension 1650\*780. Cette image est utilisée pour texturer l'ensemble des triangles. L'image utilisée est obtenue à partir de la projection de la surface du globe sur les faces de l'icosaèdre inscrit dans une sphère. Elle est découpée en 20 faces selon la configuration suivante :

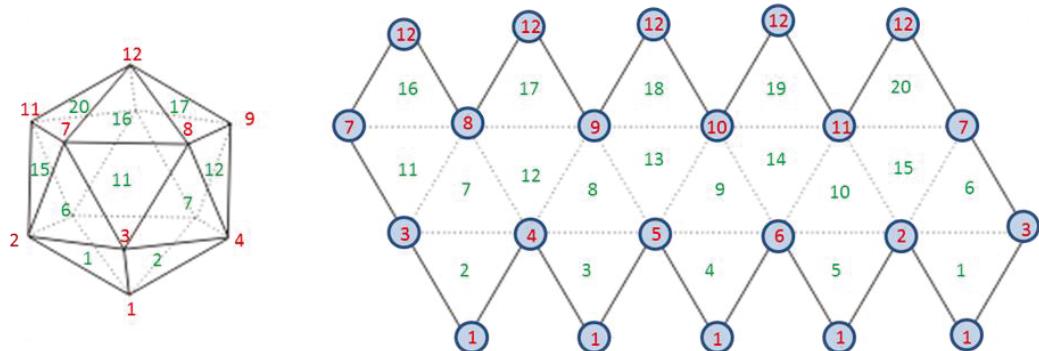


Figure 3.12: Configuration d'un icosaèdre aplati avec 20 faces et 22 vertex

La fonction *patcht* utilise les coordonnées barycentriques pour interpoler toutes les données (les valeurs) qui se trouvent à l'intérieur de chaque face de l'icosaèdre. L'utilisation des coordonnées barycentriques dans cette fonction est liée à la facilité d'établir le lien entre les coordonnées de chaque point appartenant au triangle

<sup>1</sup><http://www.mathworks.com/products/mapping/>

<sup>2</sup><http://www.solarviews.com/>

équilatéral sur l'image raster et le triangle rectangle qui est inscrit dans un espace mémoire de l'ordinateur (l'ordinateur utilise des matrices pour stocker l'information). Autrement dit, les coordonnées barycentriques de n'importe quel point dans le triangle rectangle sont les mêmes que les coordonnées barycentriques dans le triangle équilatéral.

La fonction patcht suppose que chaque sommet a une texture coordonnée qui lui est associée. Ensuite, elle utilise les coordonnées barycentriques pour chercher la correspondance de chaque point appartenant à une face de l'icosaèdre sur la texture (Figure 3.13). Pour ce faire, le calcul des coordonnées de la texture «interpolée» est nécessaire.

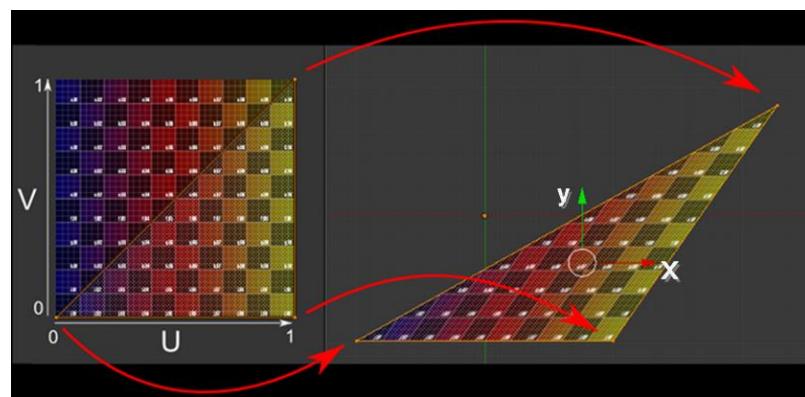


Figure 3.13: Transformation des coordonnées U, V de l'image raster dans le système cartésien du maillage icosaédral

Pour mieux saisir le processus de la projection de l'image de texture sur les faces de l'icosaèdre, nous présentons les principales étapes utilisées dans la fonction Patcht :

- 1- Introduire les éléments suivantes : les faces de l'icosaèdre avec les index de leurs vertex, les coordonnées cartésiennes des vertex de l'icosaèdre, les coordonnées des vertex des faces de la texture (exprimées en ligne et colonne), les faces de la texture exprimées en fonction des index de leurs vertex ;
- 2- Définition de la taille de l'image raster ;
- 3- Calcul des coordonnées barycentriques ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) des valeurs de chaque point de coordonnées (x, y) incluses dans chaque triangle (T) de la texture par

l'interpolation en utilisant les coordonnées des vertex ( $x_i, y_i, z_i$ ) de chaque face comme suit :

$$\lambda_1 = \frac{(y_2 - y_3)(x - x_3) + (x_3 - x_2)(y - y_3)}{\det(T)};$$

$$\lambda_2 = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)}{\det(T)};$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1;$$

Avec :  $\det(T) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}$

- 4- Définition d'une nouvelle matrice pour la texture dans le système RGB (chaque élément représente le niveau de gris);
- 5- Pour chaque face de l'icosaèdre :

- Définir les faces de l'icosaèdre comme une surface;
- Définir les coordonnées de vertex de la texture pour la surface;
- Transformer les coordonnées barycentriques ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) de tous les points qui appartiennent à chaque face de la texture en coordonnées cartésiennes ( $x, y$ );

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$$

Avec : ( $x_i, y_i, z_i$ ) sont les coordonnées des vertex de chaque face.

- Calculer l'index de chaque point de la face de texture (transformation de la grille correspondante à la texture en 2D vers une structure 1D pour améliorer la vitesse de processus d'affichage de la texture sur l'icosaèdre);
- Texturer la face de l'icosaèdre en utilisant la fonction surface du Matlab en utilisant la grille de texture calculée précédemment;

6- Répéter le processus 5 pour toutes faces de l'icosaèdre afin de mettre la texture sur toutes les faces de l'icosaèdre.

La figure ci-dessous résume les étapes de processus de projection des données raster sur les faces de l'icosaèdre en utilisant le calcul des coordonnées barycentriques.

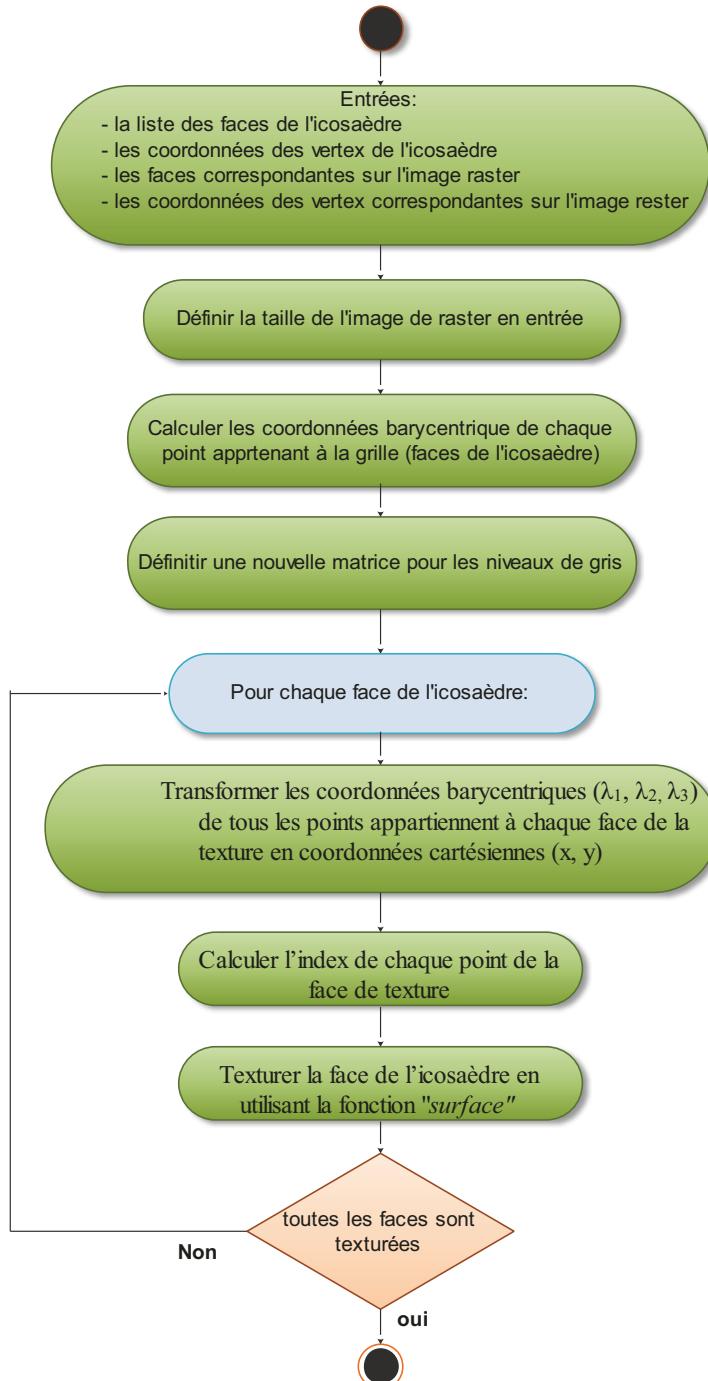


Figure 3.14: Principales étapes de la projection des données raster sur les faces de l'icosaèdre

## b. Projection des données spatiales de format vectoriel

Cet algorithme permet de projeter les données géospatiales vectorielles à partir de la surface du globe sur les faces planes de l'icosaèdre. Pour utiliser cet algorithme dans la projection des données raster, il est nécessaire de calculer les coordonnées de centre de chaque pixel de l'image. Les centres des pixels sont considérés comme des points qui vont être projetés. Pour passer d'un niveau de détail à un autre, il est nécessaire de calculer les centres de nouveaux pixels par une méthode de rééchantillonnage telles que la bilinéaire ou la bicubique. Dans cette projection locale, nous avons proposé d'utiliser la projection gnomonique, car elle permet de transformer les grands cercles sur la sphère à des lignes droites sur le plan. En outre, nous sommes basés dans notre choix de la projection gnomonique sur l'étude qui a été faite par White *et al.* [1998]. Cette étude montre que la projection gnomonique minimise les distorsions dans la tessellation polyédrale par rapport aux autres projections (ex. Snyder, Fuller, etc.). Par exemple, dans la mesure de la compacité (elle caractérise la relation d'uniformité et d'adjacence entre les noeuds qui appartiennent à la même cellule), la projection gnomonique présente une meilleure compacité par rapport aux autres méthodes (cellules sont compactées).

Afin de permettre la projection des données géo-spatiales sur la face de la structure icosaédrale, nous avons développé un système de projection local qui consiste en les étapes ci-dessous :

1. Sélectionner la face de l'icosaèdre sur laquelle on va projeter les données géo-spatiales;
2. Calculer les coordonnées du centre ( $P$ ) de la face en question;
3. Projeter le centre de la face sur la sphère ( $P'$ ) pour avoir les coordonnées ( $x, y, z$ ) du point de tangence;
4. Définir le plan tangent à la sphère dans le point ( $P'$ );
5. Projeter les vertex de la face sélectionnée sur le plan tangent, on obtient un triangle plus grand que la face sélectionnée;
6. Projeter les données spatiales incluses dans le triangle sphérique correspondant à la face de l'icosaèdre en utilisant la projection gnomonique [Weisstein].

$$x = \frac{\cos \phi \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos c},$$

$$y = \frac{\cos \phi_1 \sin \phi - \sin \phi_1 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0)}{\cos c},$$

Où :  $\cos c = \sin \phi_1 \sin \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0)$

$\lambda, \phi$  : les coordonnées du point à projeter

$\lambda_0, \phi_1$  : les coordonnées du centre de projection

7. Réduire l'échelle de la face projetée pour ramener le grand triangle (ainsi que les données géo-spatiales qu'il contient) vers la face de l'icosaèdre;
8. Répéter les mêmes opérations avec les autres faces de la structure icosaédrale;
9. Déplier le résultat de la projection sur un plan.

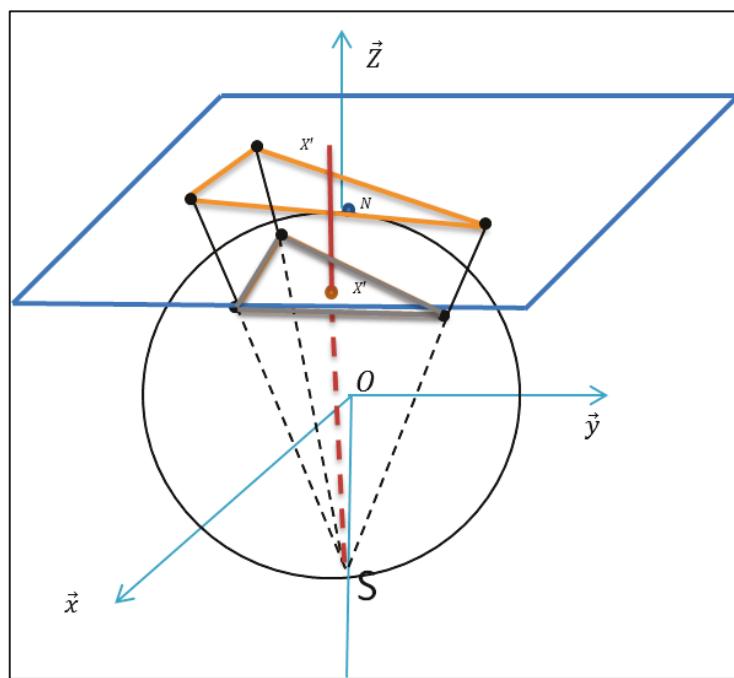


Figure 3.15: Principe de système de projection adopté

Dans cette section, nous allons proposer l'idée d'un système de projection local qui pourra être utilisée pour projeter les données géospatiales (notamment les données vectorielles) sur notre tessellation icosaédrale hiérarchique afin de minimiser les distorsions dans les produits de cartographie Web. Nous allons présenter les grandes lignes de ce système de projection, cependant, nous n'avons pas pu implémenter ce système par défaut du temps alloué à ce travail de la maitrise. On propose que l'implémentation de ce système soit le sujet de travaux futurs.

### 3.3.4. Dépliage dynamique de la structure icosaédrale hiérarchique

Dans cette section, nous allons présenter les principales étapes du processus de dépliage dynamique de la structure hiérarchique en fonction de la face d'intérêt de l'icosaèdre. Le choix des régions où les déchirures vont être introduites dans la structure icosaédrale dépend de : 1) la région d'intérêt, 2) la sémantique des objets (océan, continent) ou aussi 3) le niveau de détail (pays, ville, quartier, etc.).

#### 3.3.4.1. Détermination de la configuration optimale de dépliage

Le dépliage d'une structure géométrique 3D consiste à générer un arbre couvrant à partir de la structure initiale de l'icosaèdre (Figure 3.16) en utilisant des algorithmes appropriés. Cet arbre correspond au chemin à suivre pour faire le dépliage (voir la section 2.5.3). Nous pouvons définir de nombreux arbres couvrants utilisés dans le dépliage de l'icosaèdre. La formule de Trinajstić *et al.* [1994] permet de calculer le nombre des arbres couvrants d'une structure icosaédrale à partir de calcul de Laplacien du graphe :

$$T(Icosah) = \left(\frac{1}{12}\right) \cdot \prod_{i=2}^{12} \lambda_i(L) = 5184000. \text{ [Trinajstić *et al.*, 1994]}$$

Où :  $L = v \cdot A$  ;  $A$  représente la matrice d'adjacence et  $v$  correspond à la matrice diagonale d'ordre des sommets.  $T$  : nombre des arbres couvrants;  $\lambda_i$  : les valeurs propres non nulles de la matrice de Laplace.

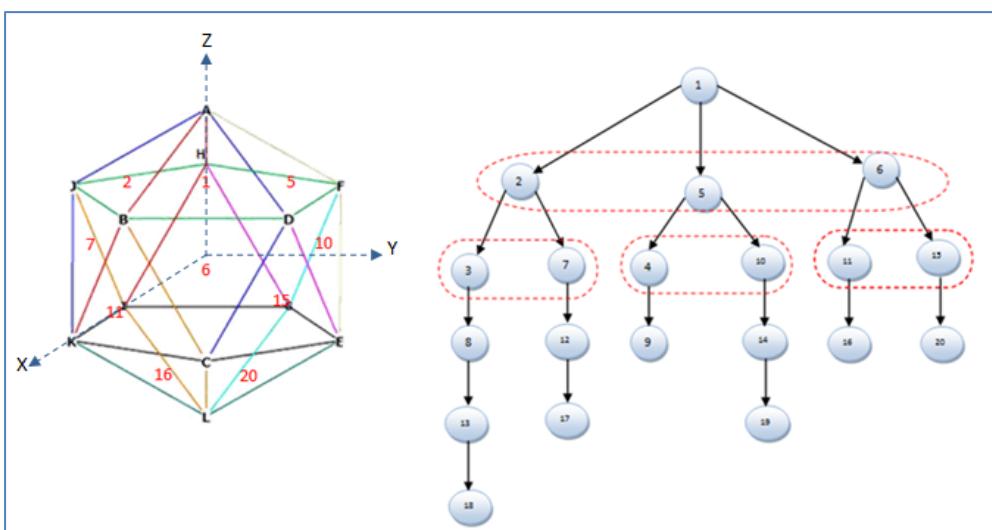


Figure 3.16: Calcul de l'arbre couvrant d'un icosaèdre par l'algorithme BFS

Il existe plusieurs algorithmes permettant de calculer les chemins de dépliage sur l’icosaèdre. Cependant, il faut choisir l’arbre couvrant qui permet d’obtenir la configuration optimale du dépliage. Certaines méthodes se basent sur le calcul du plus court chemin de toutes les faces de l’icosaèdre par rapport à une face de base. D’autres méthodes consistent en le calcul de l’arbre couvrant minimal.

L’arbre couvrant minimal d’un graphe pondéré est un arbre où un poids ou coût est associé à chaque arête. Dans l’arbre de couvrement minimal, les branches de l’arbre correspondent aux arêtes du graphe qui ont le poids minimal de sorte que le poids total des arêtes soit minimal. Alors que le plus court chemin représente l’ensemble des liens entre les vertex de sorte que pour chaque vertex, la distance entre un sommet de départ  $v$  vers tous les autres sommets d’un graphe soit la plus courte possible. L’algorithme calcule, pour chaque sommet  $u$ , la distance de  $u$  à partir du sommet  $v$ , et donc le poids d’un plus court chemin entre  $v$  et  $u$ .

Le but d’un arbre couvrant minimal est trouvé un arbre couvrant dont la somme des poids des arêtes est minimum, alors que l’objectif d’un arbre de plus court chemin est la distance la plus courte par rapport à la face racine [Khuller *et al.*, 1995].

Dans notre cas, nous avons choisi l’algorithme de plus court chemin (shortest path), car il prend la distance de la face racine à chaque face pour laquelle la distance a été plus courte et non la somme des poids des arêtes.

À partir de cet algorithme, on veut garder le maximum des faces voisines qui sont tour autour de la face de base jusqu’à certaines limites, car on ne peut pas maintenir les faces collées ensemble aux dépens de la distorsion causée par la suite.

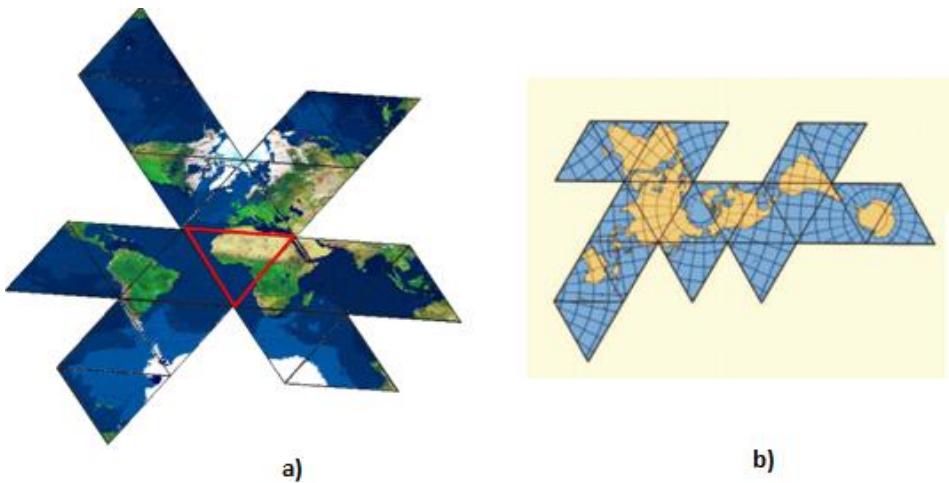


Figure 3.17:Dépliage de l'icosaèdre selon :a) l'algorithme de plus court chemin et b) l'algorithme de l'arbre couvrant minimal

Dans la Figure 3.17-a l'algorithme de calcul de plus court chemin préserve les surfaces autour de point d'intérêt. Par contre, l'algorithme de calcul de l'arbre couvrant minimal (Figure 3.17-b) conserve les surfaces dans des régions qui sont loin de la zone d'intérêt. Comme dans cet exemple, l'algorithme préserve les continents.

### 3.3.4.2. Dépliage de la structure

Le dépliage d'une structure polyédrale à 3D requiert la projection de toutes les faces sur un même plan qui est le plan de la face de base[Liu & Tai, 2002]. La face de base est la face sélectionnée par l'utilisateur comme région d'intérêt par rapport à laquelle la structure sera dépliée. L'ordre de dépliage des faces est déterminé par les relations topologiques entre eux dans la structure initiale. Le dépliage de la structure se fait d'une manière itérative, où chaque face sera projetée par rapport au plan de la face qui la précède. L'algorithme de dépliage de la structure consiste à :

- 1- Choisir une face de base pour lequel le dépliage sera déroulé par rapport à cette dernière;
- 2- Calculer les chemins de dépliage par rapport à la face de base à travers le calcul de l'arbre couvrant correspondant à la structure;
- 3- Projeter (transformer) les vertex de la face ( $f_i$ ) dans le référentiel de la face de base;

Dans notre recherche, nous avons utilisé la procédure mathématique de dépliage qui a été présenté par Liu & Tai [2002] pour le dépliage des structures polyédrale 3D.

D'une manière exhaustive, le dépliage d'une face  $f_i$  consiste à calculer les coordonnées des sommets de cette face dans un référentiel absolu  $(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)})$  (Figure 3.18), et ce en calculant la matrice de passage  $M_{R21}$  pour passer du système relatif ( $R_1$ ) de la face  $f_i$  vers un référentiel absolu ( $R_2$ ) qui correspond à la face de base. Par conséquent, chaque face passe de son plan vers le plan de la face d'origine.

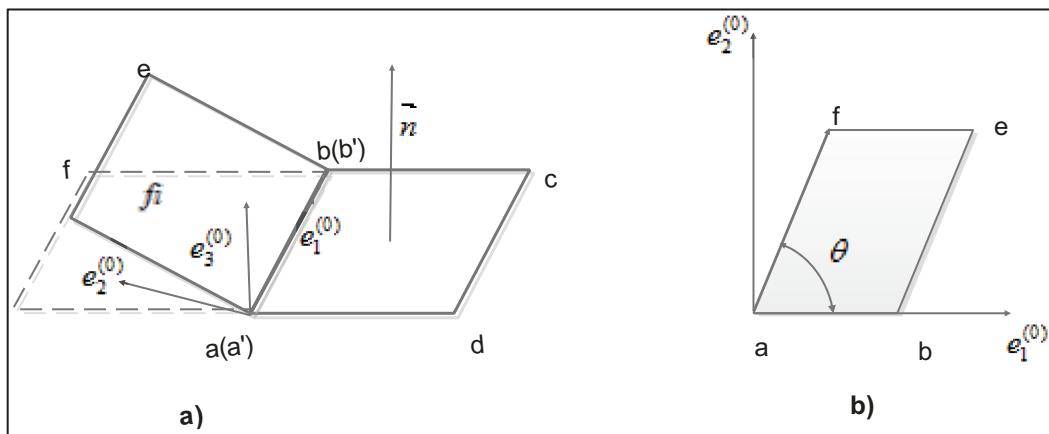


Figure 3.18: Principe de projection des faces l'une par rapport à l'autre[Liu & Tai, 2002]

Le référentiel relatif de la face  $abef$  est défini par son origine qui correspond à l'un des deux vertex de l'arête commune entre les deux faces et les vecteurs unitaires  $(e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, e_3^{(0)})$  de référentiel relatif de la face  $f_i$  et qui sont définis comme suit :

$$e_1^{(0)} = \frac{\vec{ab}}{|\vec{ab}|}; e_3^{(0)} = \frac{\vec{ab} \times \vec{be}}{|\vec{ab}| \times |\vec{be}|}; e_2^{(0)} = e_1^{(0)} \times e_3^{(0)}$$

Les trois composantes du vecteur  $\vec{of}$  ( $f_{e_1^{(0)}}; f_{e_2^{(0)}}; f_{e_3^{(0)}}$ ) dans le référentiel relatif ( $R_1$ ) de la face  $f_i$  sont calculées comme suit :

$$f_{e_1^{(0)}} = |\vec{af}| * e_1^{(0)} = |\vec{af}| \cos \theta ; \text{ avec } \theta \text{ est l'angle dièdre entre l'arête af et l'arête ab} (\text{Figure 3.18-a}).$$

$$f_{e_2^{(0)}} = |\vec{af}| * e_2^{(0)} = |\vec{af}| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$f_{e_3^{(0)}} = 0$ . Lorsqu'on considère que:  $e_3^{(0)}$  est le vecteur normale à la face  $f_i$ .

Le nouveau plan de l'ancien référentiel ( $e_1^{(0)}$ ,  $e_2^{(0)}$  et  $e_3^{(0)}$ ) est donné par les vecteurs  $e_1^{(1)}$ ,  $e_2^{(1)}$  et  $e_3^{(1)}$ . Avec:  $e_1^{(1)} = \frac{\overrightarrow{ab'}}{|ab'|}$ ;  $e_3^{(1)} = \frac{\overrightarrow{ab'} \times \overrightarrow{bc'}}{|ab'| \times |bc'|}$ ;  $e_2^{(1)} = e_1^{(1)} \times e_3^{(1)}$

Les vecteurs unitaires  $e_1^{(2)}$ ,  $e_2^{(2)}$  et  $e_3^{(2)}$  du référentiel absolu normalisé ayant les composantes suivantes :

$$e_1^{(2)} = \{1, 0, 0\}, e_2^{(2)} = \{0, 1, 0\} \text{ et } e_3^{(2)} = \{0, 0, 1\}$$

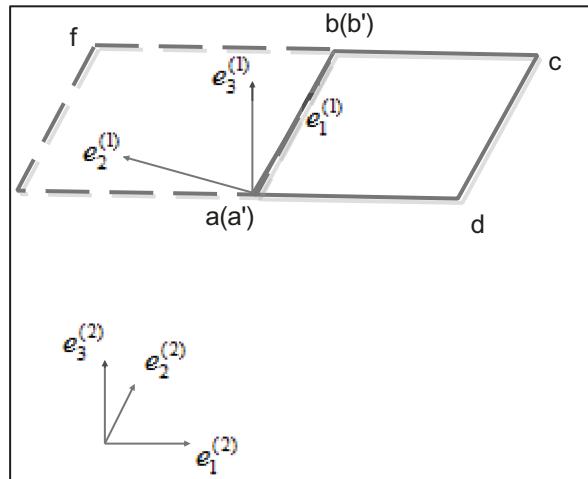


Figure 3.19: Transformation des coordonnées des vertex dans le repère absolu

En calculant la matrice de transformation ou de passage de référentiel relatif non-normalisé ( $R_1$ ) vers le système absolu normalisé ( $R_2$ ) soit  $M_{21}$  qui est défini par les éléments  $a_{ij}$ . Le repère  $R_1$  va subir des translations et des rotations pour qu'il soit confondu avec le repère absolu  $R_2$ . À cet effet, la matrice de transformation doit être de dimension 4\*4 la dernière colonne dans la matrice représente les transformations qui doivent être effectuées sur  $R_1$  (des rotations et des translations du point de référence a) avec un facteur d'échelle.

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1^{(2)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2^{(2)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ avec: } a_{ij} = e_i^{(2)} - e_j^{(1)} \text{ et } a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \text{ et } a_3^{(2)} \text{ sont les}$$

coordonnées du point P dans le repère absolu de la face racine.

À partir de cette matrice de transformation, les coordonnées ( $f_{e_1^{(2)}}; f_{e_2^{(2)}}; f_{e_3^{(2)}}$ ) du vertex f de la face fi dans le repère absolu sont calculées comme suit :

$$\begin{bmatrix} f_{e_1^{(2)}} \\ f_{e_2^{(2)}} \\ f_{e_3^{(2)}} \end{bmatrix} = M_{21} \begin{bmatrix} f_{e_1^{(0)}} \\ f_{e_2^{(0)}} \\ f_{e_3^{(0)}} \end{bmatrix}$$

- 4- Appliquer la même transformation des coordonnées pour projeter les faces prédecesseurs de la face de base de dépliage dans chaque chemin itérativement
- 5- Répéter le processus de dépliage dans tous les chemins, jusqu'à atteindre la face de base de dépliage;

### 3.3.5. Gestion du dépliage par pondération des arêtes

Les interruptions dans les projections myriahédrales sont importantes et leur minimisation lors du dépliage de la structure polyédrale présente un défi majeur. Afin d'aboutir à un tel objectif, nous avons besoin de développer un algorithme qui gère ces interruptions selon la région d'intérêt sélectionnée par l'utilisateur. Ainsi, nous avons besoin d'attribuer des poids aux arêtes du graphe afin de créer une certaine préférence entre ces arêtes. On attribue des poids plus faibles pour les régions dont on veut préserver la continuité (où les déchirures sont non souhaitables) et des poids plus forts pour les régions à moindre intérêt (où les déchirures sont tolérables). Suite à cela, on calcule l'arbre couvrant qui permet de donner une meilleure configuration tout en maintenant une continuité du voisinage autour de la région d'intérêt. Comme nous l'avons souligné auparavant dans la section 3.3.4.1, cette configuration optimale correspond aux plus courts chemins générés par rapport à la région d'intérêt (face de base) dans le graphe pondéré de la structure icosaédrale.

Plusieurs algorithmes permettent de calculer l'arbre couvrant minimal, les deux fameux algorithmes sont : l'algorithme de Prim et de Kruskal. Il existe d'autres algorithmes qui permettent de calculer les plus courts chemins comme l'algorithme de Dijkstra (avec des poids positifs) et de BellmanFord (avec des poids négatifs). Ces algorithmes sont utilisés dans le cas d'un graphe pondéré. Les deux premiers algorithmes calculent l'arbre couvrant minimal où la somme des poids de toutes les arêtes soit minimale. Cependant, la longueur d'un chemin entre deux noeuds dans l'arbre couvrant minimal (MST) qui ne peut pas être le plus court chemin entre ces deux noeuds dans le graphe original. En outre, les algorithmes de calcul de MST traitent les noeuds

de sorte que le poids total soit minimal et il ne tient pas en compte la distance par rapport à la face de base. Avec les algorithmes de calcul de l'arbre couvrant, les arêtes qui sont proches au nœud source et qui ont un poids assez élevé sont traitées en dernier. De manière générale, l'algorithme ne tient pas en considération le voisinage de nœud de départ. Cependant, l'algorithme de calcul de plus court chemin comme Dijkstra permet de définir les chemins où le coût total soit minimal par rapport au nœud source, c'est-à-dire qu'il maintient le voisinage autour de nœud de départ. Il est à noter que l'algorithme Dijkstra donne le même résultat que l'algorithme BFS lorsque les poids sont égaux.

La Figure 3.20 illustre le graphe de l'icosaèdre qui permet de définir les relations topologiques entre les faces de l'icosaèdre.

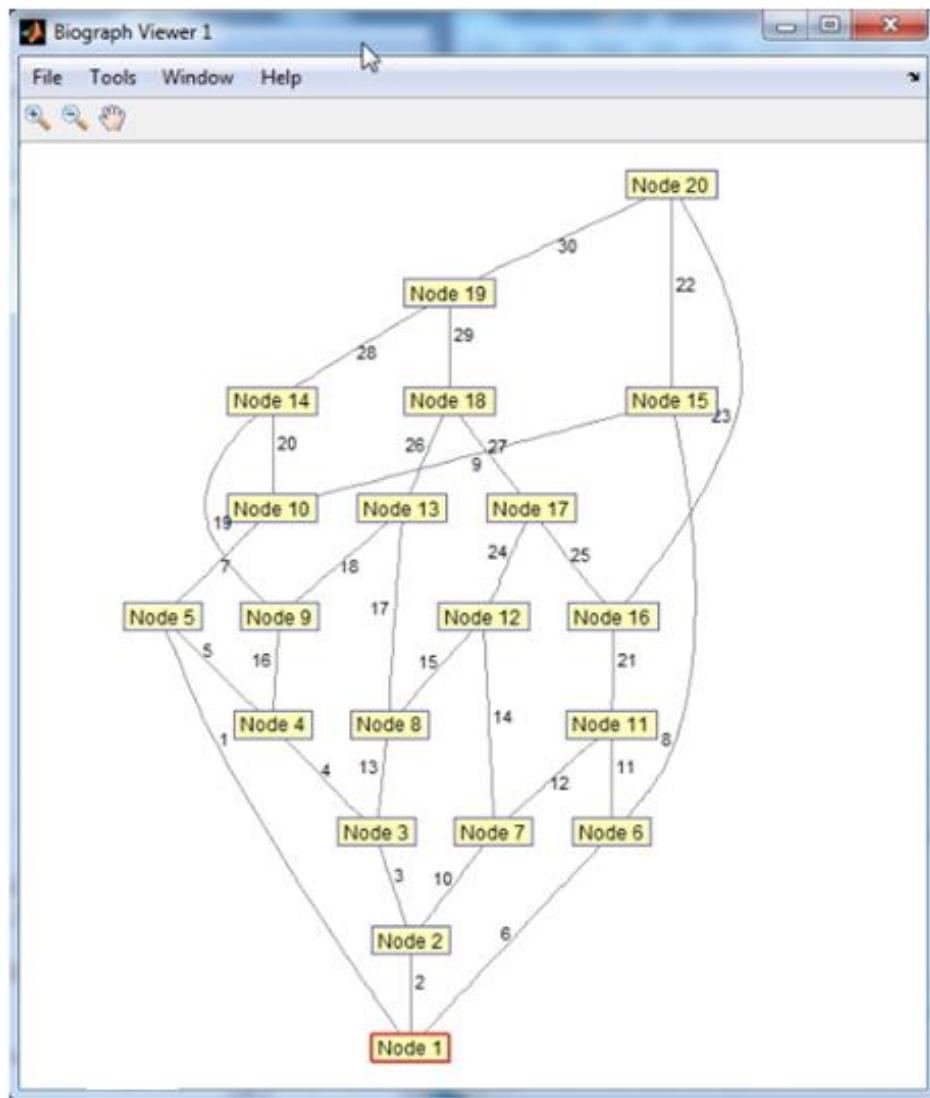


Figure 3.20: Graphe pondéré de l'icosaèdre

### 3.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé les étapes à suivre pour développer notre solution qui vise à définir une nouvelle méthode de projection pour la cartographie Web. Plus précisément, nous avons déterminé les critères du choix de la solution qui doivent être prise en considération. Parmi ces critères, on cite : 1) le choix de l'icosaèdre comme modèle de base qui se rapproche le mieux de la surface du globe, 2) la hiérarchisation de l'icosaèdre de base pour générer une tessellation multirésolution, 3) la définition de la méthode de projection utilisée dans la transformation entre le globe et la structure icosaédrale, et 4) la définition d'une méthode de dépliage qui offre une configuration optimale autour d'une région d'intérêt.

Aussi, nous avons choisi une méthode d'indexation qui permet de gérer des masses importantes des données géo-spatiales dans les différents niveaux de détail. Les indexées des faces dans la méthode d'indexation que nous avons choisie repose sur la concaténation entre le niveau de subdivision et l'ordre de la face dans le triangle père. Cette méthode permet de rechercher à quel niveau de subdivision la face se trouve d'une manière plus facile.

Il faut choisir la méthode la plus performante qui permet d'avoir une meilleure projection en termes d'atténuation des distorsions. Le choix des projections polyédrales est important pour satisfaire simultanément les deux critères; l'égalité des surfaces et la préservation des formes des objets de la surface. A cet effet, nous avons illustré les contraintes existantes pour avoir une projection de meilleure performance en termes d'atténuation des distorsions. Avec les projections polyédrales, il est important de satisfaire simultanément les deux critères; l'égalité des surfaces et la préservation des formes des objets de la surface.

Dans le but de déplier la structure hiérarchique sur un plan, tout en gardant le voisinage autour du point d'intérêt, nous avons choisi l'algorithme de Dijkstra qui satisfait ce critère. L'algorithme de Dijkstra est basé sur le calcul des plus courts chemins dans le graphe qui correspondant à notre structure icosaédrale. Donc, il cherche les faces les plus proches à la face de base.



# **Chapitre 4: Implémentation de la Solution et résultats obtenus**

## **4.1. Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le modèle mathématique développé pour notre approche de projection icosaédrale. Nous avons présenté les fondements de cette projection à savoir; le choix du solide platonique de base et la méthode de subdivision de ses faces. Ensuite, nous avons présenté le principe de dépliage des géométries 3D sur un plan.

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats de l'implémentation de notre solution tout en évaluant sa performance. Cette évaluation se fait en deux niveaux : 1) évaluation de la performance de la tessellation icosaédrale hiérarchique en utilisant les critères proposés par Goodchild [1994] et 2) évaluation du système de projection proposé.

En termes de mise en œuvre, nous avons implémenté un processus dynamique de partitionnement récursif basé sur les faces de l'icosaèdre. Chaque triangle dans l'icosaèdre est divisé en quatre petits triangles quasiment équilatéraux en subdivisant chaque arête en deux et en reliant les nouveaux points (vertex). Aussi, nous avons élaboré un algorithme de dépliage permettant de minimiser les interruptions autour de la zone d'intérêt choisi par l'utilisateur. Cet algorithme permet également la gestion des interruptions en fonction de du besoin de l'utilisateur. Cette application a été développée sous Windows 7 en utilisant l'environnement de développement Matlab version R2013a.

Nous avons subdivisé la procédure de développement en deux grands volets, la hiérarchisation et le dépliage. Dans les deux sections qui suivent, nous allons détailler les deux aspects algorithmiquement pour mieux comprendre le déroulement de chaque aspect.

#### 4.1.1. Implémentation de la Hiérarchisation

L'objectif de cette phase est de concevoir un modèle polyédral hiérarchique de visualisation globale des données spatiales. Le modèle construit utilise une tessellation triangulaire hiérarchique qui est obtenue après la subdivision récursive d'un icosaèdre inscrit dans une sphère de rayon  $r$  qui correspond au rayon de la Terre.

L'implémentation de cette partie nécessite la définition des éléments de base de la structure développable en déterminant des éléments comme les arêtes, les sommets et les faces. Ces éléments sont définis par rapport aux sommets de l'icosaèdre dans un repère orthonormé cartésien qui est défini par trois plans orthogonaux dont les sommets occupent les coins de chaque plan (Figure 4.1).

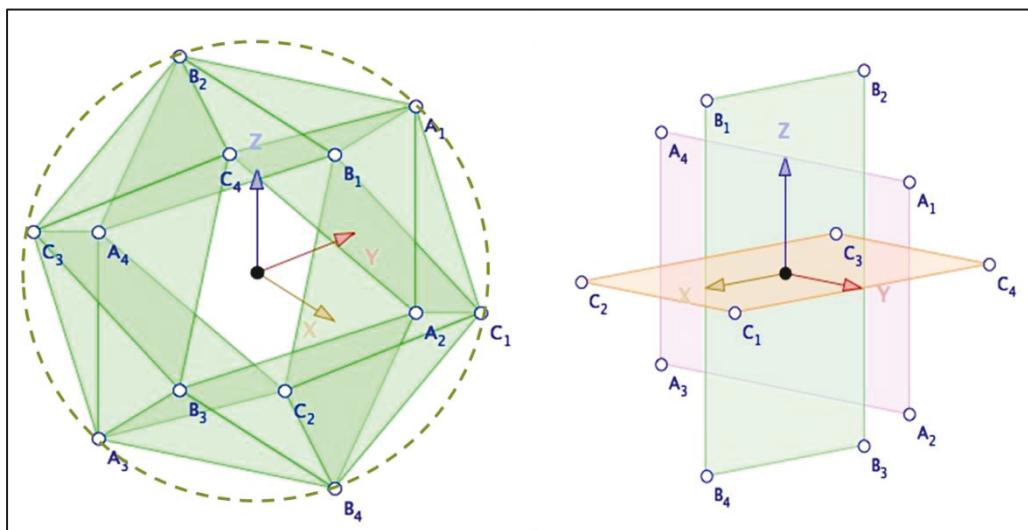


Figure 4.1: Positionnement du repère orthogonal par rapport à l'icosaèdre et la sphère

Pour ce faire, on commence par la définition d'une structure qui contient ces éléments et chaque élément correspond à une matrice (Figure 4.2). Pour passer d'un niveau à un autre plus fin, nous avons besoin de parcourir tous les triangles pour chercher le milieu de chaque arête. Ces milieux correspondent aux nouveaux vertex qu'il faut ensuite connecter pour générer un nouveau maillage avec une résolution plus fine.

Field	Value	Min	Max
vertices	<12x3 double>	-0.9511	0.9511
faces	<20x3 double>	1	12
edges	<30x2 double>	1	12
faceCentroids	<20x3 double>	-0.7423	0.7423
edgeCentroids	<30x3 double>	-0.8090	0.8090
vertexNormals	<12x3 double>	-1	1
faceNormals	<20x3 double>	-0.7947	0.5774
edgeFaces	<30x2 double>	1	20
iFaceVertices	<1x1 struct>		
iEdgeVertices	<1x1 struct>		
ifaceCentroids	<20x3 double>	-2.4102	1.6817
paths	<1x1 struct>		

Figure 4.2: Définition des éléments de la structure icosaédrale

La subdivision de chaque face de l'icosaèdre en quatre sous triangles formants un arbre quaternaire triangulaire. À partir des nouveaux sommets, nous générerons la nouvelle structure icosaédrale en face. Les faces et les vertex sont stockés dans la structure icosaédrale en incluant les relations topologiques qui lient ces éléments.

La figure suivante illustre la structuration des éléments de base de la structure icosaédrale en tenant compte les relations topologiques.

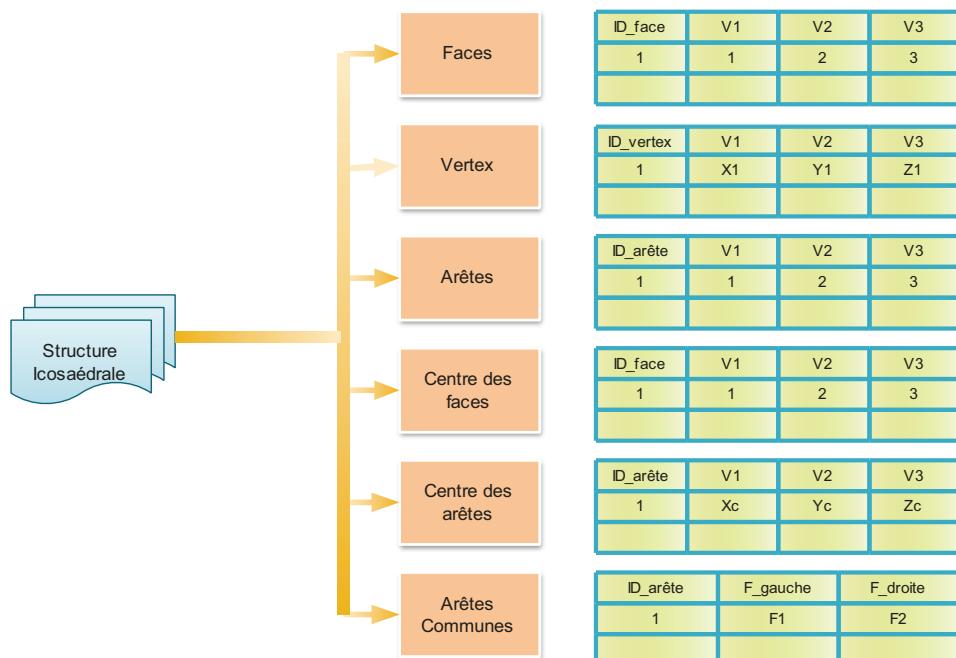


Figure 4.3: Définition des éléments de base de la structure icosaédrale

Dans cette structure, les sommets sont définis en fonction des coordonnées cartésiennes ( $x, y, z$ ), par contre, les arêtes et les faces sont déterminées par rapport aux sommets. En outre, nous avons calculé d'autres éléments tels que le centroïde de chaque face et la médiatrice de chaque arrête qui permettent de créer une grille hiérarchique. Les éléments générés après la subdivision sont stockés dans la structure icosaédrale avec leurs coordonnées cartésiennes. Le résultat de l'implémentation de l'algorithme de tessellation icosaédrale hiérarchique est présenté par la Figure 4.4. Cette figure montre le raffinement de maillage pour avoir un globe polyédral qui se rapproche de plus en plus la forme sphérique du globe.

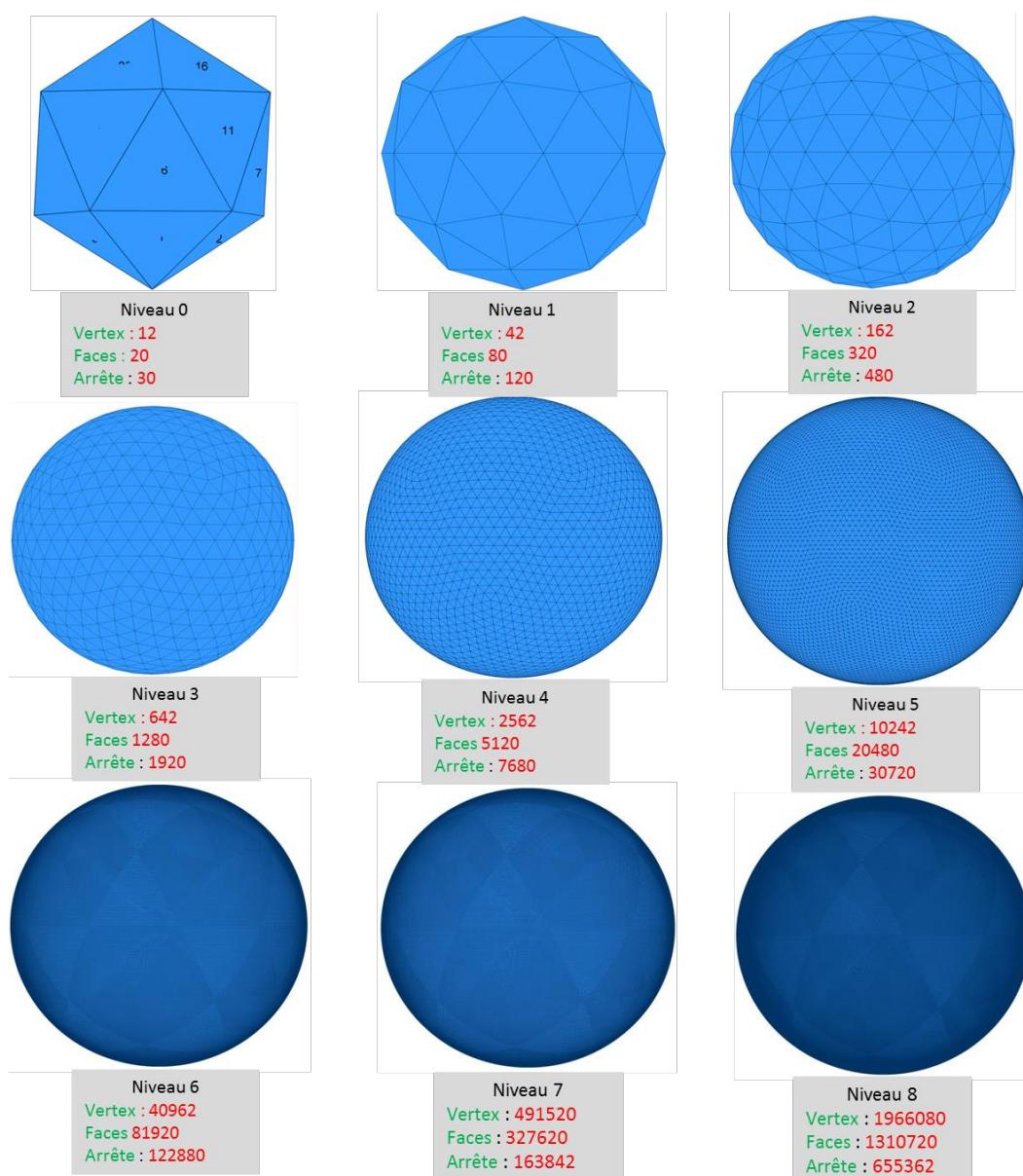


Figure 4.4: Huit premiers niveaux de raffinement d'un maillage triangulaire d'un icosaèdre

La tessellation icosaédrale hiérarchique des faces triangulaires montre que les triangles deviennent de plus en plus petits. Les triangles résultants sont quasi-équilatéraux et homogènes sur l'ensemble de la surface du globe. Ces triangles ne sont pas parfaitement équilatéraux à cause de la géométrie sphérique des triangles. En effet, suite à la subdivision d'une face, le triangle intérieur va être plus sphérique et équilatéral 'fat' comparativement aux autres triangles générés de la même face père. Cependant, la différence entre les triangles de la structure hiérarchique est négligeable surtout pour les niveaux de détail plus fins. Cette propriété est importante pour représenter les données géo-spatiales dans différentes résolutions avec un minimum de déformation. Avec le raffinement récursif des faces de l'icosaèdre, nous obtenons une multiplication dans les éléments de la structure triangulaire. Cette multiplicité dans le nombre des éléments doit vérifier la formule d'Euler :  $S + F - A = 2$ . Avec S : le nombre des sommets A : le nombre des arêtes et F : le nombre des faces.

Niveau	Nombre des vertex(S)	Nombre des faces(F)	Nombre des arêtes(A)	Superficie de chaque cellule( $\text{km}^2$ )	Formule d'Euler
1	42	80	120	5,917,970.00	✓
2	162	320	480	1,562,701.00	✓
3	642	1280	1920	397,778.50	✓
4	2562	5120	7680	97,415.14	✓
5	10242	20480	30720	24,353.78	✓
6	40962	81920	122880	4,058.964	✓
7	163842	327620	491520	1,556.532	✓
8	655362	1310720	1966080	470.8398	✓
9	1146882	6717440	7864320	117.3041	✓
10	9011202	22446080	31457280	29.3869	✓

Tableau 4.1: Relation d'Euler entre les éléments de base de la tessellation

Le nombre des éléments de la tessellation triangulaire vérifie la formule d'Euler dans les différents niveaux de subdivision (nous avons pris jusqu'au le dixième niveau). En outre, le nombre des éléments dans chaque niveau est défini en fonction des éléments de l'icosaèdre de base ( $E_0, V_0, F_0$ ), avec  $E_0=30$ ,  $V_0=12$  et  $F_0=20$ .

- $E_n = 4^n * E_0$
- $V_n = 4^n * (V_0 - 2) + 2$

$$- F_n = 4^n * F_0$$

La figure suivante résume les principales étapes de l'algorithme développé pour créer la structure hiérarchique sur la base de la subdivision récursive des faces de l'icosaèdre:

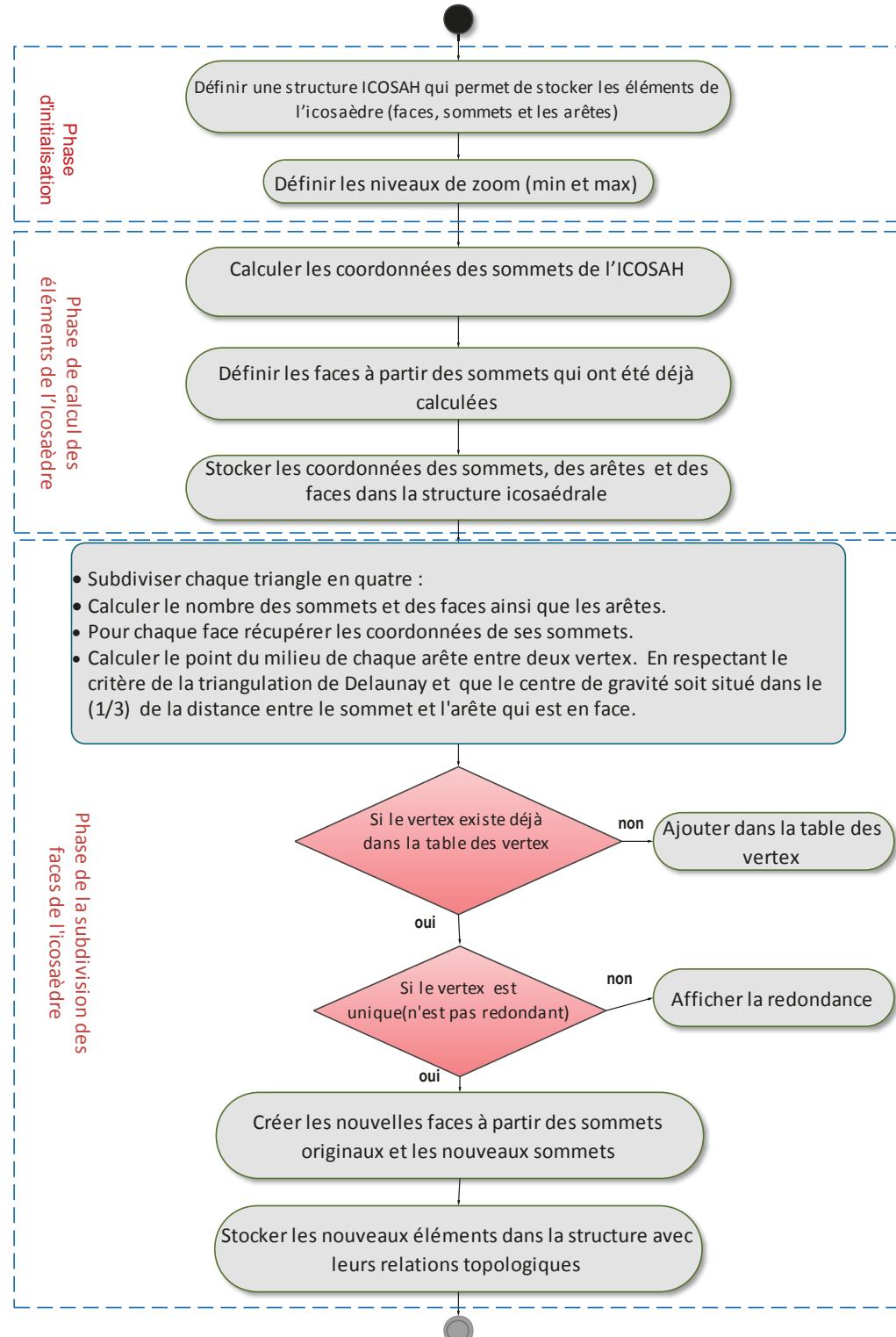


Figure 4.5: Étapes de la création d'une structure hiérarchique icosaédrale

#### 4.1.2. Projection des données géo-spatiales sur l'icosaèdre

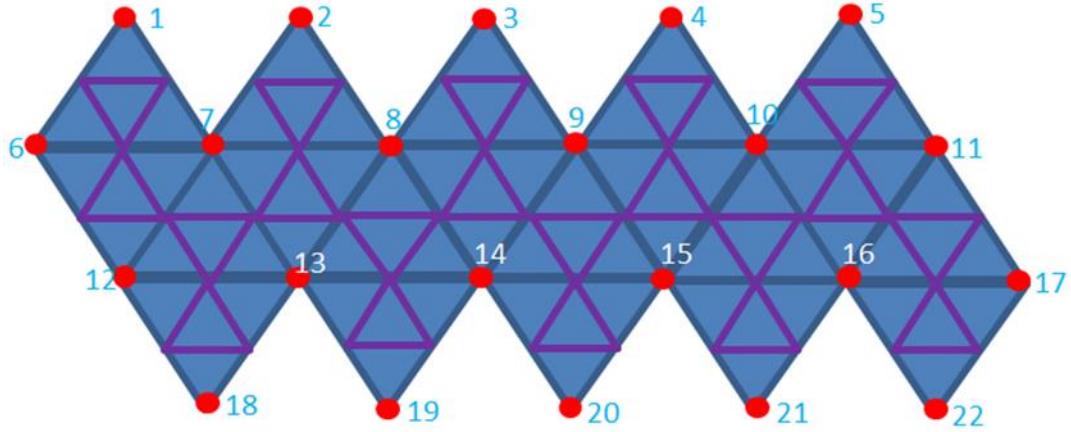
Grâce aux propriétés intéressantes de la tessellation icosaédrale hiérarchique, particulièrement l'homogénéité et l'uniformité des cellules tout en couvrant la totalité du globe, elle est utilisée dans plusieurs phénomènes comme la modélisation du climat[Thuburn, 1997] et la gestion de l'environnement[Goodchild & Yang, 1992]. Ce type de maillage offre une meilleure structure de visualisation globale multi-niveaux des données géo-spatiales[Wenbin & Xuesheng]. Dans le cadre de notre recherche, cette structure icosaédrale servira également à projeter les données spatiales. Cette projection consiste à établir la correspondance entre un triangle sur la sphère et la région correspondante sur la surface du globe (ex. l'image raster). C'est-à-dire, on veut avoir les coordonnées géographiques de chaque pixel de l'image raster dans le système de coordonnées de l'icosaèdre afin de pouvoir faire le lien entre les deux structures (image raster /icosaèdre).

Il est important de définir une méthode de projection permettant de mettre la correspondance entre deux objets différents. L'image est une matrice définie par un système de coordonnées local plane (2D) de m lignes et de n colonnes et l'icosaèdre est défini dans un système 3D de coordonnées géocentriques (x, y, z). Afin de projeter l'image raster sur les faces de l'icosaèdre, nous avons procédé comme suit :

- Orienter l'icosaèdre en tenant compte la position des sommets par rapport au globe en mettant le pôle Nord sur l'axe des Z de l'icosaèdre;
- Calculer les coordonnées des sommets de l'icosaèdre dans le système local de l'image (ligne/colonne) en utilisant une matrice de référence R. La matrice de référence s'est donnée par : [nombre des cellules/degré lat\_limit lon\_limit];
- Construire les nouvelles faces obtenues par les coordonnées des vertex de l'icosaèdre sur l'image.
- Établir la correspondance entre les faces de l'icosaèdre et celle de l'image en tenant compte l'orientation de ces faces. Pour établir cette correspondance entre l'image raster et les faces de l'icosaèdre, nous avons utilisé l'algorithme qui a été montré dans la section 3.3.3.

Afin de projeter les données raster sur les faces de l'icosaèdre dans les différents niveaux hiérarchiques, nous avons utilisé la méthode proposée par Larsen [2012]. Il a

subdivisé chaque face de l'icosaèdre en quatre faces, ensuite il a calculé les coordonnées des nouveaux vertex dans le système image dans un niveau correspondent aux coordonnées de l'icosaèdre (coordonnées cartésiennes) dans le même niveau. Ensuite on utilise le même processus pour projeter les données raster sur les nouvelles faces en utilisant l'algorithme montré dans la section 3.3.3.



Cette méthode de subdivision a été adoptée dans tous les niveaux de détails. L'algorithme que nous avons développé ne peut pas accéder à différentes images satellitaires pour différentes résolutions. C'est-à-dire, le système développé ne peut pas gérer plusieurs données raster qui ont différentes résolutions.

La figure suivante montre le résultat de la projection de l'image raster sur les faces de l'icosaèdre dans les différents niveaux de subdivision.

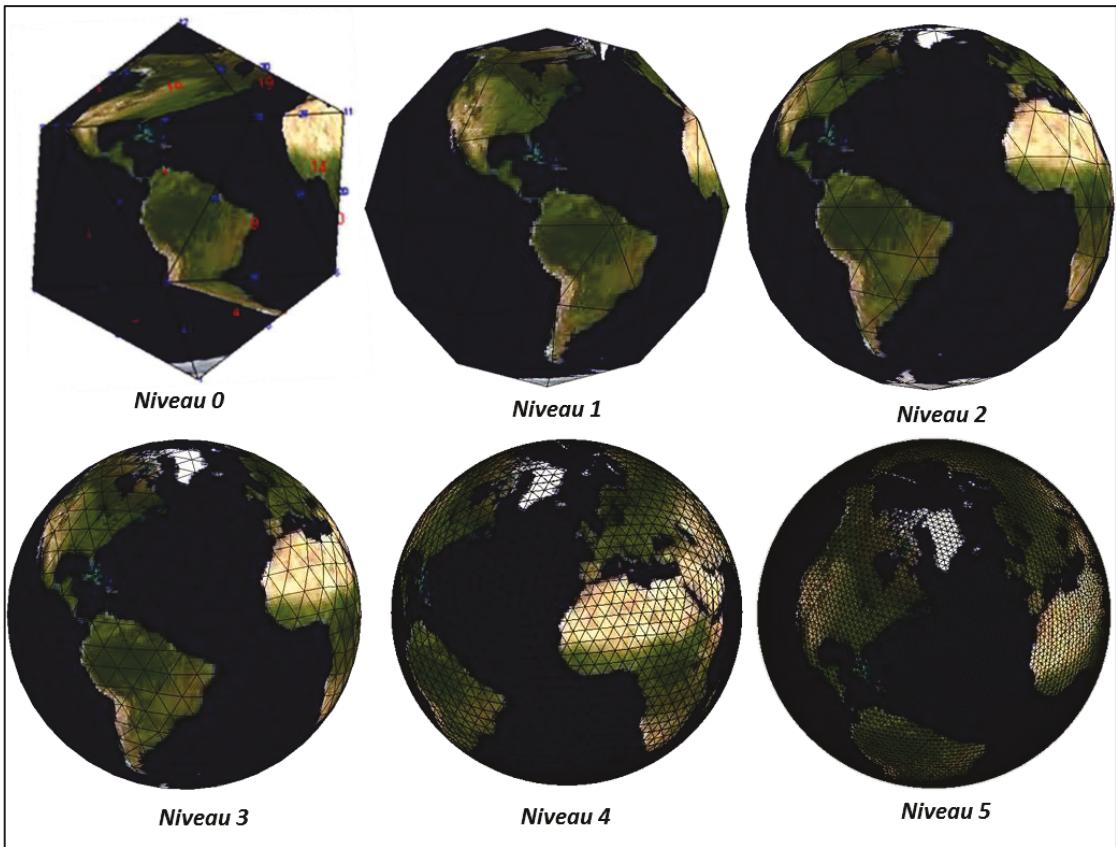


Figure 4.6: Projection des données raster su les faces de l'icosaèdre en multi-niveaux

#### 4.1.3. Algorithme de dépliage de la structure hiérarchique icosaédrale

Les cartes issues de la projection polyédrale comme celle de Dymaxion sont conçues à partir de la projection du globe sur les faces d'un polyèdre qui sont par la suite dépliées et aplatis sur un plan. De même, dans le cadre de ce travail, nous avons besoin de déplier notre structure obtenue dans la première sous-section pour établir des cartes polyédrales.

Après la définition de la structure icosaédrale, nous procémons à calculer le vecteur normal de chaque face. Le dépliage d'une structure géométrique 3D nécessite à choisir la face de base de dépliage afin de projeter toutes les faces par rapport à cette face. Ce dépliage se base sur la matrice d'adjacence qui permet d'avoir le graphe de connexité qui montre les relations topologiques entre les faces. Ensuite, nous faisons un calcul des chemins de dépliage sur la base de l'arbre couvrant défini par l'algorithme approprié. Dans la structure icosaédrale, la matrice d'adjacence correspond au tableau qui stocke les relations topologiques entre les faces. Par exemple, le tableau des arêtes communes

entre les faces décrit le lien entre les coordonnées vertex afin d'extraire les relations topologiques en fonction de la position de la face. À partir de la face de base de dépliage, nous procédons à calculer l'arbre couvrant de la structure dans le but de déterminer les chemins de dépliage. L'utilisation de l'algorithme de parcourt d'un graphe BFS permet de maintenir les faces voisines autour la face de base, puisque tous les poids sont unitaires, il cherche le voisinage suivant la largeur. Par contre, avec l'algorithme DFS la recherche se fait suivant la profondeur où le traitement des faces commence par la dernière face. Cette approche n'est pas appropriée dans la cartographie locale.

L'algorithme BFS commence par un nœud source, ensuite il traite les voisins à ce nœud. Il utilise une file dans laquelle il prend le premier nœud et met les nœuds successeurs à la fin de la file. Les étapes de cet algorithme sont présentées dans la section 2.5.3.1.

Le résultat de cet algorithme est un arbre hiérarchique du graphe  $G$  qui représente la structure icosaédrale. Dans cet arbre, chaque nœud correspond au centre d'une face de la structure et les branches représentent les chemins de dépliage ( $P_i$ ). Dans la structure de base de l'icosaèdre, nous distinguons 20 noeuds et six chemins différents dont chaque chemin est composé de plusieurs faces adjacentes qui sont définies en fonction de la face racine. Par exemple, lorsqu'on choisit la face  $f_1$  comme une face de base les chemins de dépliage calculés par l'algorithme BFS sont stockés dans la structure sous la forme suivante :  $P_1 [1 ; 2 ; 3 ; 8 ; 13 ; 18]$  ;  $P_2 [1 ; 2 ; 7 ; 12 ; 17]$  ;  $P_3 [1 ; 5 ; 4 ; 9]$  ;  $P_4 [1 ; 5 ; 10 ; 14 ; 19]$  ;  $P_5 [1 ; 6 ; 11 ; 16]$  ;  $P_6 [1 ; 6 ; 15 ; 20]$ .

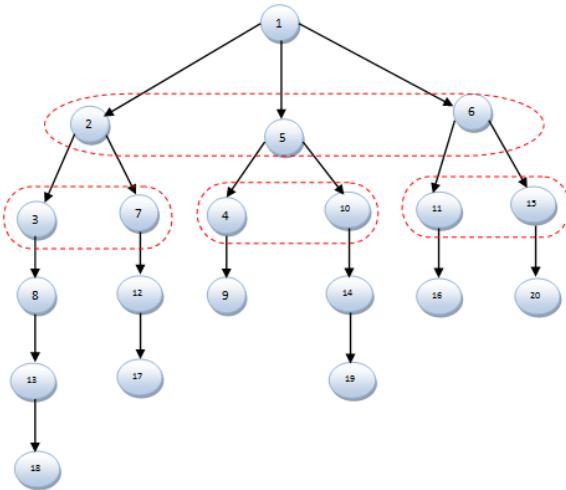
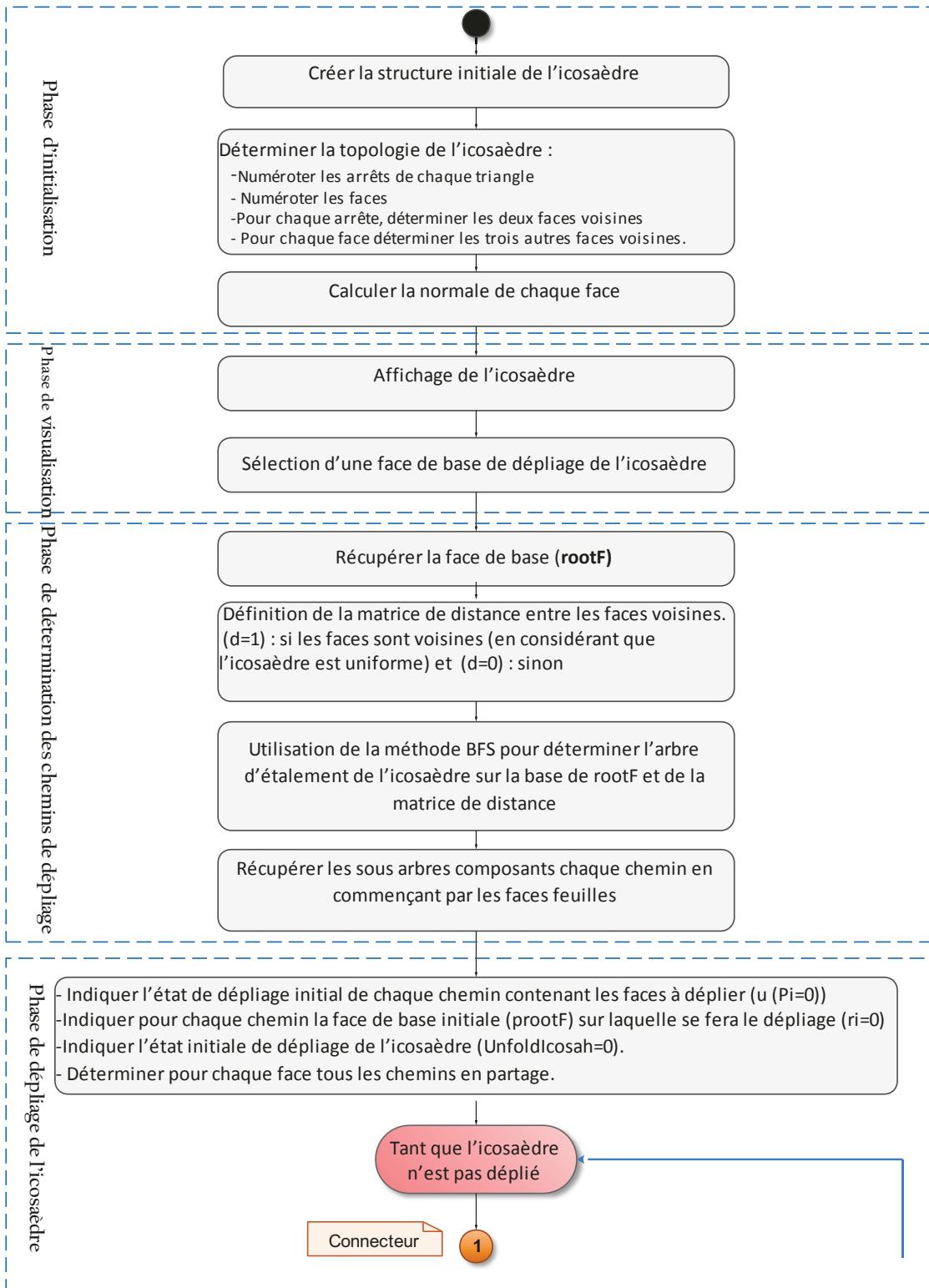


Figure 4.7: Arbre quaternaire calculé par l'algorithme BFS

Il existe une face racine dans chaque chemin dans lequel les faces successeurs doivent être projetées par rapport à cette face. Le dépliage des faces nécessite le calcul de la normale pour chaque face, ainsi la détermination des voisins de chaque face. La détermination de la relation de voisinage permet de trouver les chemins qui partagent la même face. Pour mettre une face dans le même plan qu'une autre nécessite à calculer la matrice de transformation des coordonnées des vertex de la face à projeter vers le plan de la face de base. Le dépliage se fait dans chaque chemin dans le sens des faces feuilles vers la face de base. Le nombre des chemins qui partagent la même face devient important dans les niveaux plus détaillés. Par exemple, dans le niveau de base (avec 20 faces), les chemins qui partagent la même face (à l'exception de la face de base) sont deux comme la face 5 (voir Figure 4.7), ce nombre est important dans les niveaux détaillés. Afin de s'assurer que le dépliage est complet dans les chemins qui partagent la même face, il est nécessaire que tous les chemins soient dépliés par rapport à la face commune avant de continuer le dépliage.

Nous avons subdivisé le processus de dépliage en trois phases : la première dite d'initialisation consiste à sélectionner une face de l'icosaèdre qui est considéré comme une région d'intérêt, la deuxième phase dite de traitement est dédiée au calcul des chemins de dépliage et la matrice de transformation des coordonnées des vertex pour projeter les faces. La dernière phase dite de dépliage consiste à projeter les faces dans chaque chemin par rapport au plan de la face racine. Les étapes de dépliage de la structure sont illustrées dans l'organigramme ci-dessous.

Nous avons subdivisé le processus de dépliage en trois phases : la première est dite ‘d’initialisation’, qui consiste à sélectionner une face de l’icosaèdre qui est considérée comme une région d’intérêt. La deuxième phase dite de traitement est dédiée au calcul des chemins de dépliage et la matrice de ‘transformation’ dont l’objectif est de calculer les coordonnées des vertex de la face à projeter par rapport à la face précédente. La dernière phase dite ‘de dépliage’, qui consiste à projeter les faces dans chaque chemin par rapport au plan de la face racine (Figure 4.8). Ces étapes de dépliage de la structure sont illustrées dans l’organigramme ci-dessous.



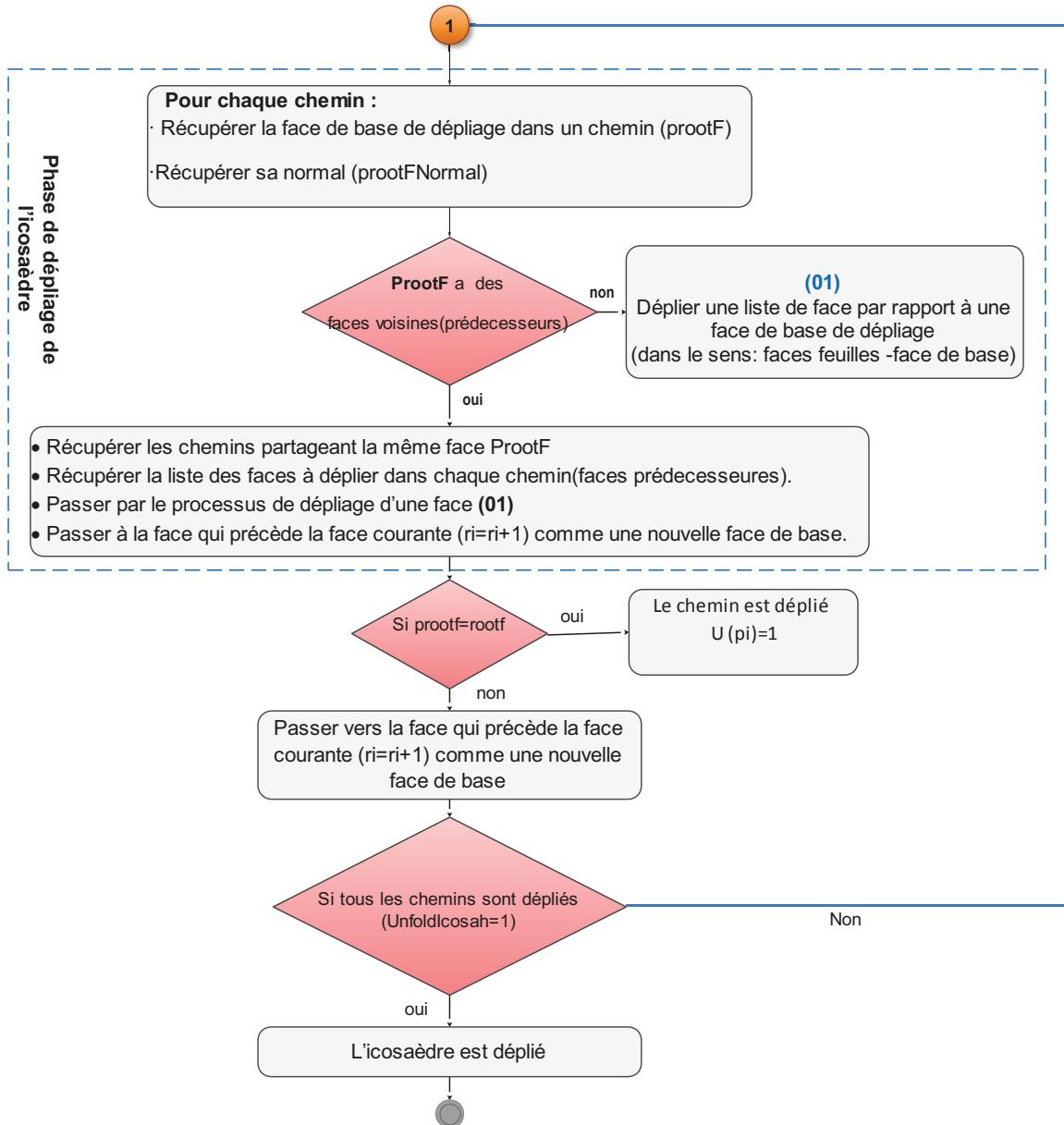


Figure 4.8: Organigramme présentant les phases de dépliage de l'icosaèdre

L'organigramme ci-dessous illustre les détails du processus de dépliage d'une face par rapport à la face de base de dépliage.

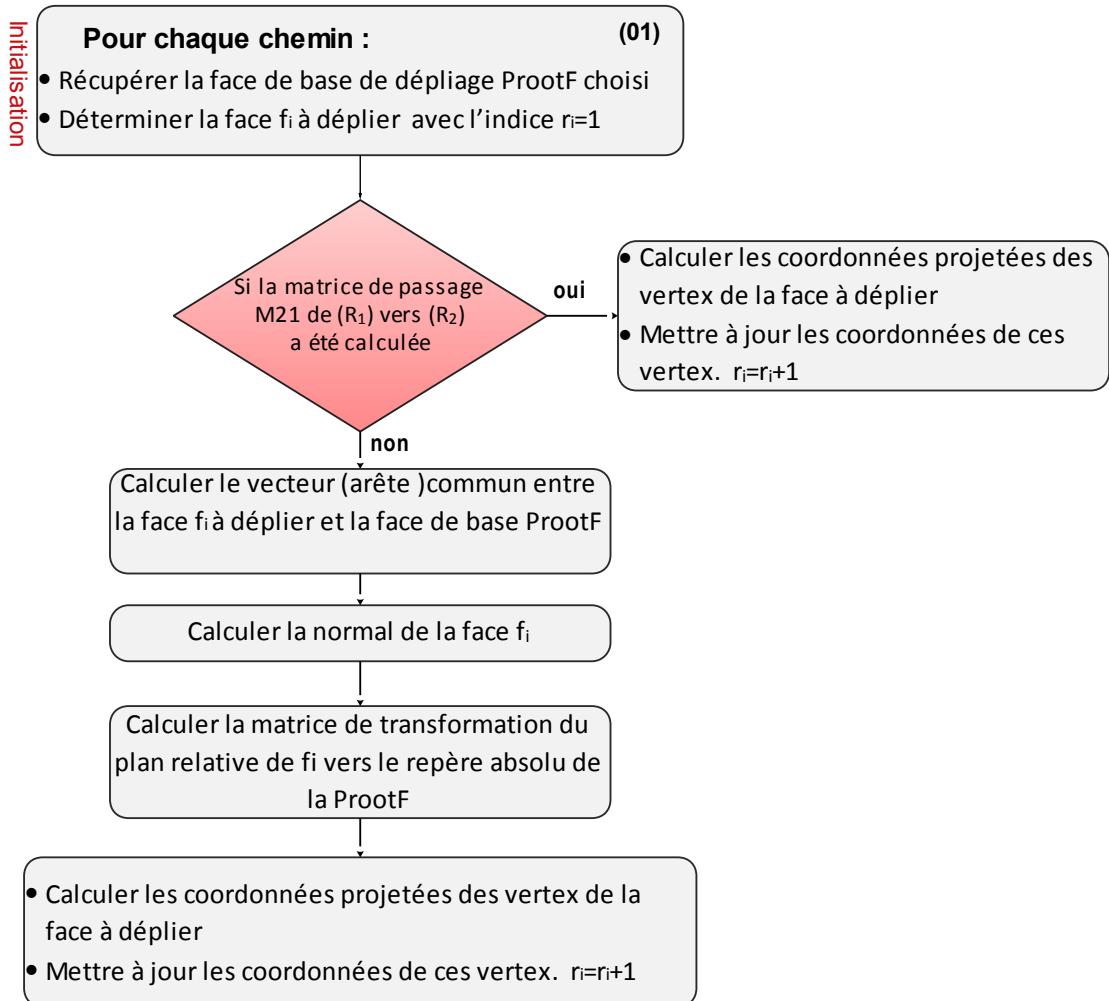


Figure 4.9: Processus de dépliage d'une face dans la structure icosaèdre

La Figure 4.10 présente les résultats de dépliage du globe icosaédral dans les trois premiers niveaux de subdivision. Les résultats montrent que le nombre des interruptions augmente avec le niveau de subdivision, par contre, l'espacement entre les chemins de dépliage diminue. Visuellement, les triangles sont géométriquement uniformes, identiques et quasi-équilatéraux dans les différents niveaux de subdivision.

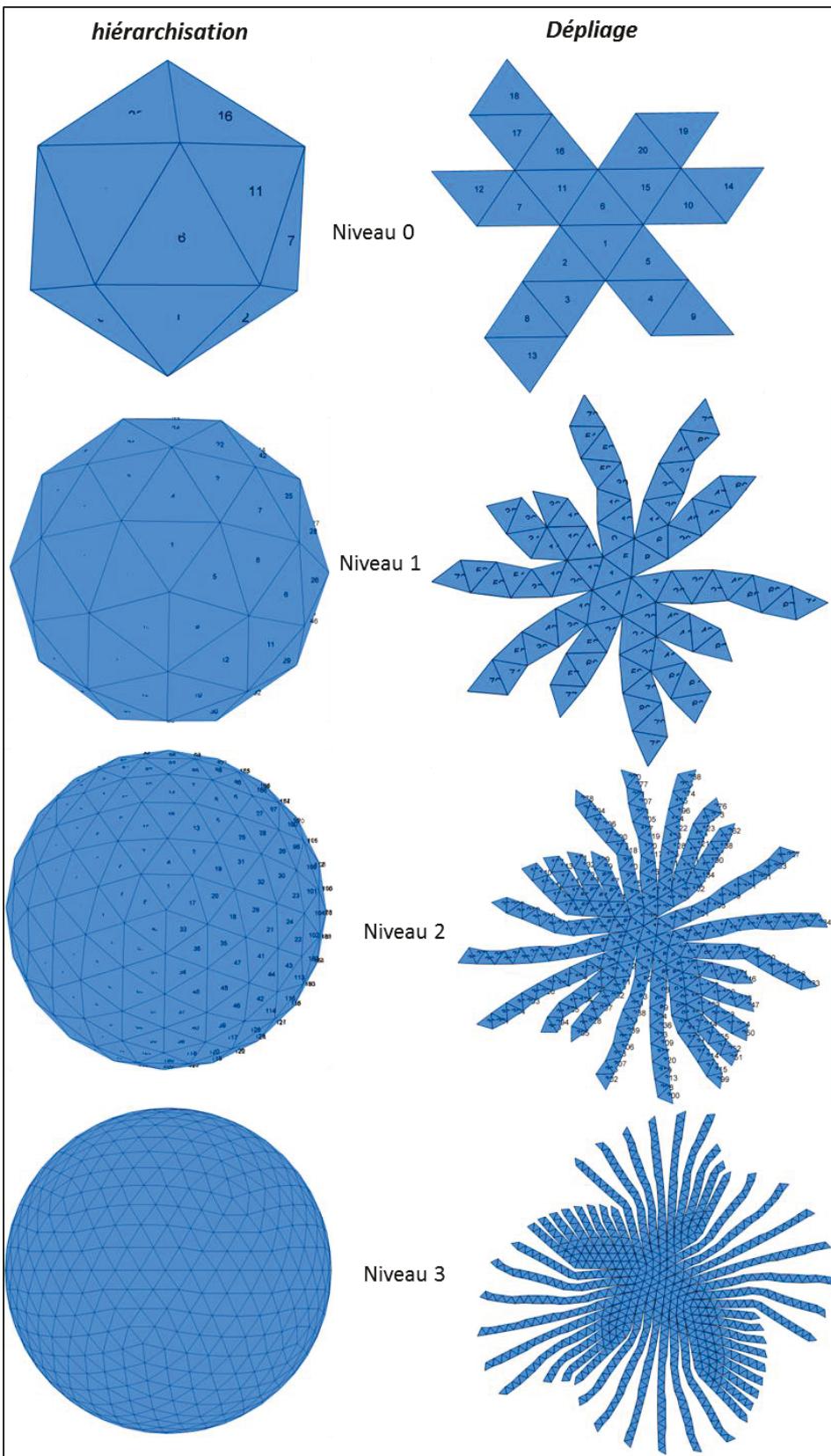


Figure 4.10: Résultats de dépliage de l'icosaèdre dans quatre niveaux

#### 4.1.4. Dépliage de la structure icosaédrale avec la texture

Après avoir terminé la projection des données raster sur les faces de l'icosaèdre dans les différents niveaux de subdivision et dans le but d'établir des cartes polyédrales, nous avons procédé au dépliage de la structure obtenue sur un plan. Le processus de dépliage du maillage triangulaire avec texture reste le même, car la texture sera dépliée automatiquement avec chaque triangle représentant une portion du globe. La Figure 4.11 montre le résultat de cette projection pour les trois premiers niveaux hiérarchiques.

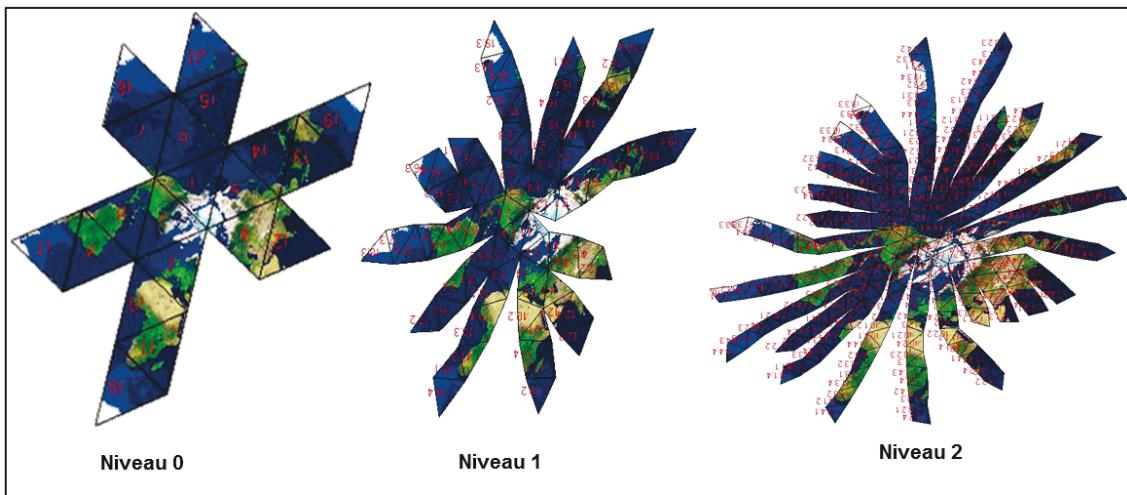


Figure 4.11: Dépliage multi-niveaux de l'icosaèdre

Avec la subdivision récursive des faces, nous obtenons des cartes qui montrent plusieurs interruptions dans les continents autour de la face sélectionnée. Le nombre des chemins de dépliage augmente d'un niveau à un autre avec un facteur de 2. Par exemple, dans le niveau 0 le nombre des branches égal à 6, dans le niveau 1 égal à 12 et dans le niveau 3 le nombre est 24. Le rayon de conservation des surfaces (rayon d'un cercle où les interruptions sont négligeables) autour du point d'intérêt est assez petit dans les niveaux de subdivision à petites échelles avec la méthode BFS. La surface préservée (ne subis pas des interruptions) dans le niveau de base est d'environ 4000 km, par contre, elle diminue un petit peu dans les niveaux à grandes échelles. Dans les autres niveaux (ex. 1 et 2, la superficie est d'environ 3000 km). Ceci nécessite la gestion des interruptions dans la carte résultante en minimisant au maximum les interruptions autour du point d'intérêt.

#### 4.1.5. Gestion des interruptions dans la projection icosaédrale

Comme nous avons évoqué dans les chapitres précédents, les interruptions induites par les projections polyédriques représentent un problème majeur. Donc, pour remédier à ce problème, il faut définir les endroits où les déchirures sont non souhaitables et les autres endroits où ces déchirures sont acceptables. Ainsi, il est nécessaire de gérer le dépliage en attribuant des poids aux arêtes du graphe représentant la structure icosaédrale. Pour ce faire, on attribut des poids plus faibles pour les régions où on veut préserver la continuité et des poids plus forts pour les régions à moindre intérêt (où les déchirures sont tolérables).

Dans cette partie nous présentons les résultats de l'implémentation de la gestion des interruptions avec l'utilisation des poids variables. La solution consiste à manipuler les interruptions autour de la région choisie en utilisant l'algorithme de calcul des plus courts chemins Dijkstra. Les plus courts chemins calculés permettent de définir les chemins de dépliage dans la structure icosaédrale. Dans l'algorithme BFS, la matrice d'adjacence utilisée est une matrice unitaire (Tableau 4.2). Les faces qui sont adjacentes comme la face f1 avec la face f2, f5 et f6, l'élément de la matrice en croisement entre ces faces vont prendre la valeur 1 et la valeur 0 pour les autres.

	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10
f1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
f2	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
f3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
f4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
f5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
f6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
f8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
f9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
f10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tableau 4.2: Matrice d'adjacence unitaire pour 10 faces de l'icosaèdre

Cette fois on veut garder le maximum des faces qui sont autour de point d'intérêt collées ensemble. C'est-à-dire on veut gérer les déchirures en utilisant la pondération basée sur la distance par rapport à la zone d'intérêt et les relations topologiques entre les faces. Cependant, l'algorithme BFS considère que tous les poids sont égaux. Quant à l'algorithme Dijkstra, il permet d'assigner des poids autres que 1. Dans notre cas, nous avons considéré les poids comme les distances entre les centres des faces adjacentes

(qui partagent la même arête). Par conséquent, les poids faibles sont attribués aux arêtes qui relient les faces à proximité de la face de racine. Les poids les plus élevés sont attribués aux arêtes qui relient les faces qui sont loin par rapport au champ de vision de l'utilisateur (région d'intérêt) et qui vont subir des interruptions. Le découpage peut se faire également selon le type des objets de la surface du globe comme les continents et les océans. Dans ce cas les poids ne sont pas liés à la distance, mais liés au type de l'objet lui-même (océan ou terre).

Dans cet algorithme, les éléments de la matrice d'adjacence sont les faces qui partagent une même arête et le poids correspond à chaque arête. Dans ce cas, la matrice d'adjacence est de dimension  $4*30$ , donc il stocke seulement les faces qui sont voisines. Par exemple, le tableau ci-dessous montre la matrice d'adjacence en considérant que la face de base est la face 1. Pour charger les poids dans la matrice d'adjacence, on attribut au début des poids égaux pour toutes les arêtes qui relient les faces adjacentes. On obtient une configuration équivalente à la configuration obtenue par la méthode BFS, après on commence à changer manuellement les poids dans la matrice qui définit les faces qui partagent la même arête générée par l'algorithme et stockée dans la structure icosaèdre. Les poids sont changés en fonction de l'objectif de l'utilisateur (distance ou le type de l'objet).

Par exemple, les poids entre la face 1 et ses faces voisines: 2,5 et 6, les poids sont 2,5 et 3 successivement. Ces poids sont faibles, afin de garder ces faces collées ensemble.

ID_Arête	Face 1	Face2	Poids
1	5	1	5
2	1	2	2
3	2	3	3
4	3	4	4
5	4	5	30
6	6	1	3
7	5	14	2
8	15	6	8
9	14	15	30
10	8	2	10
11	6	7	20
12	7	8	2
13	10	3	13
14	8	9	14
15	9	10	30
16	12	4	16
17	10	11	2
18	11	12	30
19	12	13	2
20	13	14	20
21	16	7	30
22	15	20	30
23	20	16	30
24	17	9	2
25	16	17	2
26	18	11	26
27	17	18	3
28	19	13	28
29	18	19	30
30	19	20	30

Tableau 4.3: Matrice d'adjacence en utilisant des poids différents

Les procédures de dépliage dans le cas d'un graphe pondéré consistent à :

1. Créer la matrice d'adjacence qui comporte les distances entre les faces adjacentes qui partagent une arête. Il y a deux façons pour remplir la matrice soit d'une manière semi-automatique ou manuelle. La méthode semi-automatique consiste à attribuer les poids automatiquement et d'une manière séquentielle selon le nombre des arêtes. Par exemple, pour le niveau de base, les poids généreront une série des chiffres de 1 à 30 (qui représentent le nombre des arêtes communes entre deux faces).
2. Changer les poids générés automatiquement, en attribuant des poids plus faibles pour les régions qui nous voulons les préservés et des poids plus élevés pour les régions qui vont subir des interruptions. Cette méthode d'attribution des poids n'est pas la plus appropriée pour les niveaux plus fins, car le nombre des arêtes communes entre chaque deux faces devient important. Les éléments de la matrice d'adjacence varient selon le niveau de détail et le point d'intérêt choisi.

Par exemple, la matrice a une dimension de  $20*4$  pour le niveau de base (niveau 0) et une dimension de  $120*4$  pour le niveau 1.

3. Calculer le graphe non directionnel pondéré afin que l'algorithme Dijkstra puisse chercher des plus courts chemins dans le graphe.
4. Construire l'arbre couvrant en utilisant les chemins les plus courts calculés.
5. Inverser les chemins pour commencer le dépliage par les feuilles de l'arbre (les faces les plus lointaines par rapport à la face de base) dans chaque chemin.

Dans le cas des chemins qui partagent la même face, il faut déplier toutes les faces par rapport à la face de base simultanément. Dans la Figure 4.12, les deux sous-chemins  $\{4, 8, 10\}$  et  $\{9, 12\}$  partagent la même face 5. Le dépliage de ces chemins doit se faire par rapport à la face 5. Avant le dépliage de la face 5, les deux sous chemins doivent être dépliés simultanément par rapport à cette face.

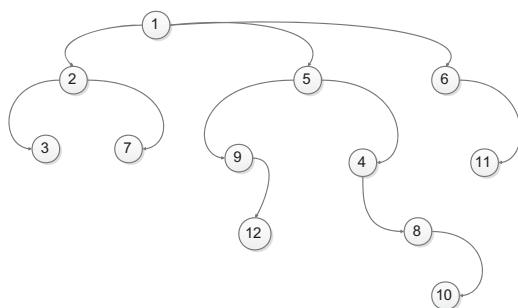


Figure 4.12:Calcule des chemins de dépliage (cas d'une face qui partage plusieurs chemins)

La Figure 4.13présente le résultat du dépliage pondéré de l'icosaèdre en utilisant l'algorithme permettant de gérer les interruptions. La face de base est sélectionnée par l'utilisateur; sur la base de cette face, l'algorithme calcule les différents chemins de dépliage selon la relation topologique définie par la matrice d'adjacence. Le champ de vision est défini par un rectangle représentant les régions autour du point d'intérêt où la continuité est préservée.

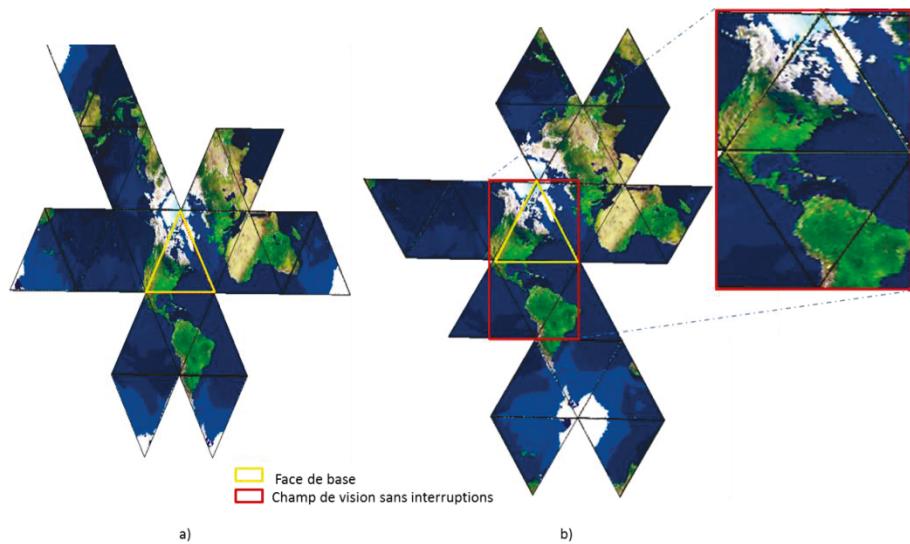


Figure 4.13: Dépliage de l'icosaèdre. a) poids sont égaux. b) poids sont différents

La comparaison des résultats montre que certains continents comme l'Asie présentent des interruptions avec le premier algorithme dont les poids sont égaux. Par contre, les ruptures sont moindres suivant le deuxième algorithme. En outre, le deuxième algorithme maintient le voisinage autour de la face de base. Les interruptions sont néanmoins remarquables entre les faces présentant des angles importants au sein de l'icosaèdre pour le niveau de base.

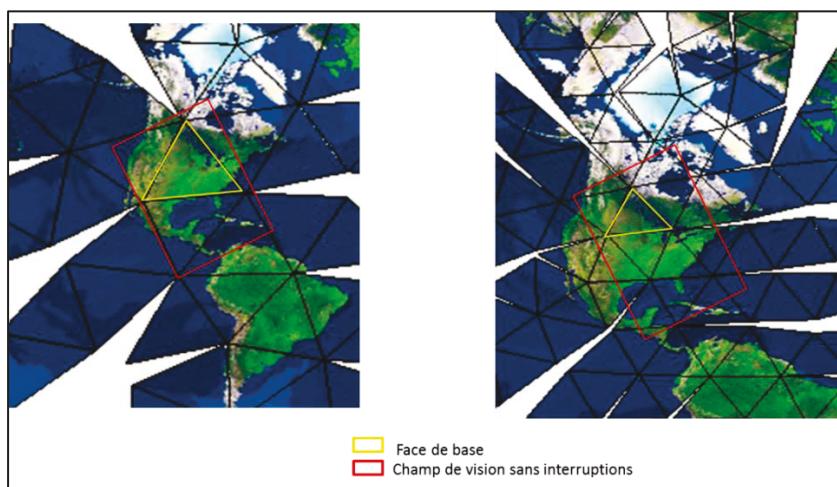


Figure 4.14: Dépliage avec pondération a) niveau 1. b) niveau 2

Les interruptions autour du point d'intérêt dans le niveau 2 sont moindres par rapport au niveau 1. Les interruptions existent au sein de chaque hexagone (regroupement de six triangles qui partagent les mêmes vertex), il n'y a donc aucun hexagone qui soit exempt

d'interruption; ces interruptions au sein de chaque hexagone doivent être minimisées dans les régions proches de la zone d'intérêt.

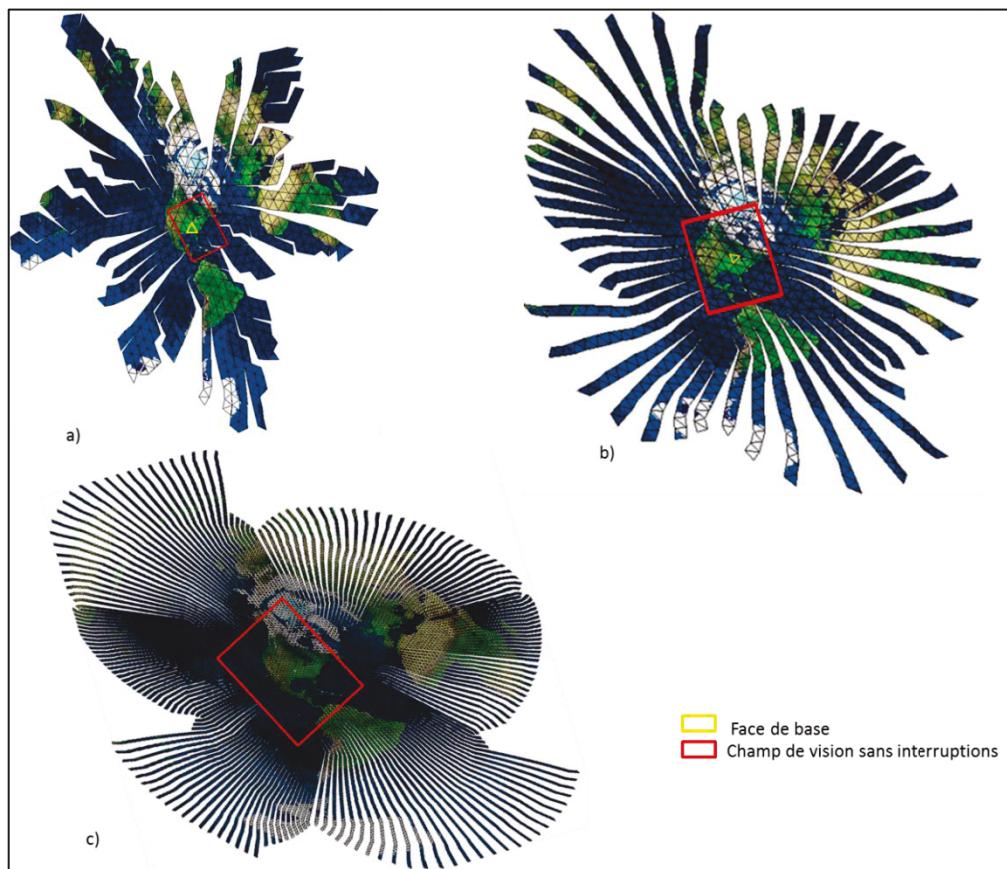


Figure 4.15: Dépliage avec pondération a) niveau 3. b) niveau 4. c)niveau 5

Pour bien présenter la gestion des interruptions dans les différents niveaux hiérarchiques, nous avons pris un exemple d'une région surfacique (ex. Australie). La figure ci-dessous montre le résultat de dépliage avec pondération dans les différents niveaux hiérarchiques.

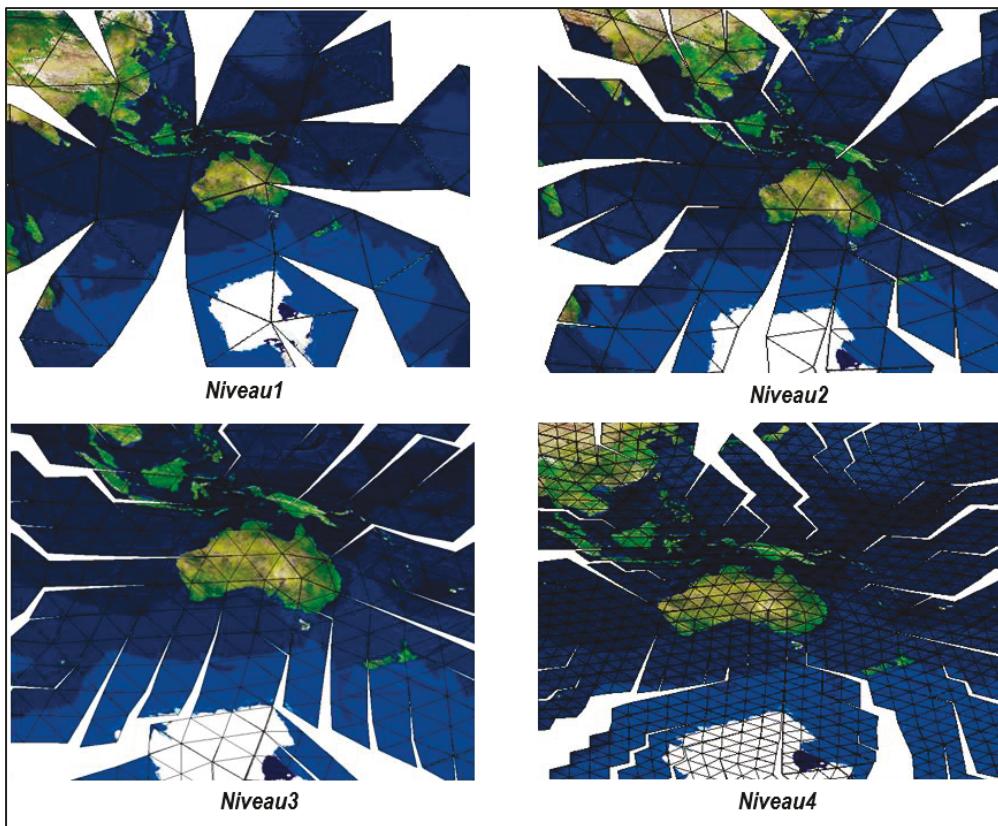


Figure 4.16: Gestion des interruptions en plusieurs échelles (cas d'une entité surfacique)

Selon les résultats obtenus précédemment, nous avons conclu que dans les niveaux hiérarchiques plus fins, le nombre des interruptions devient important, par contre, les écarts entre les chemins deviennent très étroits. Par conséquent, la surface maintenue qui est autour de points d'intérêt devient plus large.

Dans la figure suivante, nous avons présenté le potentiel de la solution dans la préservation des continents (selon le type d'objet). Pour ce faire, nous avons attribué des poids plus faibles aux segments reliant les faces voisines contenant les continents et des poids plus forts aux segments reliant les faces voisines contenant les océans.

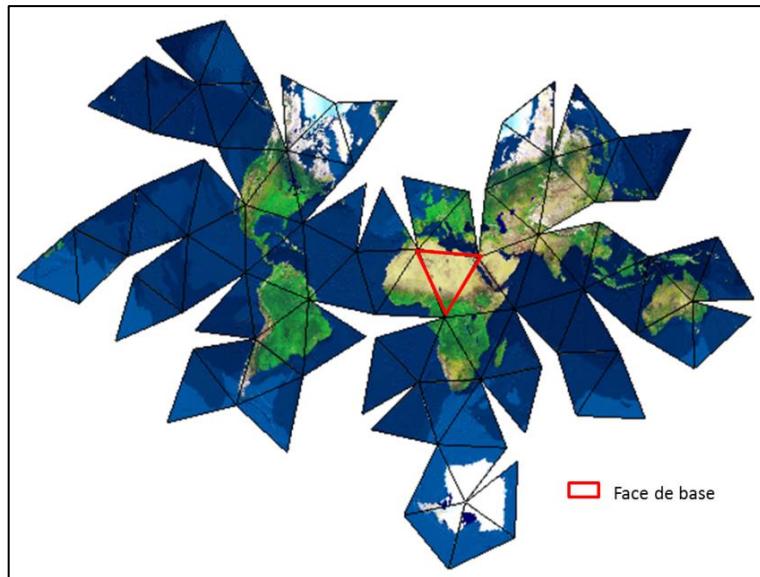


Figure 4.17: Préservation des continents par le dépliage pondéré (niveau 1)

Cette configuration montre que les poids sont attribués aux continents; la configuration obtenue ne fait pas partie de notre objectif recherché. Pour maintenir les surfaces selon le type d'objet (on ne tient pas compte de la région d'intérêt), il est suggéré d'utiliser l'algorithme de calcul l'arbre couvrant minimal. Dans l'algorithme de «calcul de l'arbre couvrant minimal» comme l'algorithme Prim, les arêtes reliant les centres des cellules sont sélectionnées en fonction du poids total qui devra être minimum pour chaque chemin. Par contre, pour l'algorithme utilisant le plus court chemin, les chemins sont définis en fonction du poids minimum par rapport à la face de base.

Selon les résultats de dépliage des différents niveaux hiérarchiques, nous pouvons conclure que l'utilisation d'une pondération des arêtes reliant les centres des cellules voisines dans l'algorithme de calcul des plus courts chemins permet de gérer ces interruptions et d'avoir un minimum d'interruptions autour de points d'intérêt.

## 4.2. Élaboration d'une approche de validation

Généralement, l'évaluation d'une méthode de projection cartographique est basée sur la mesure de la distorsion dans les distances, les surfaces, les angles et l'échelle. Dans notre travail, nous avons calculé certaines propriétés des tuiles dans les différents niveaux hiérarchiques. Ensuite, nous avons fait une étude comparative avec la projection WMP.

#### 4.2.1. Évaluation de la performance de la grille de la tessellation

Cette section consiste à examiner la performance de l'approche dans les différents niveaux hiérarchiques. Pour évaluer un système de tessellation de la surface du globe, un ensemble des critères sont présentés par Kimerling *et al.* [1999]. Ces critères sont utilisés par Gregory *et al.* [2008] pour évaluer la performance de quatre systèmes de tessellations sur le globe. Ils sont basés sur des méthodes de projections (Fuller-Gray, Snyder, gnomonique) et la méthode QTM pour le partitionnement direct sur la sphère. La majorité de ces critères sont basés sur des mesures géométriques et des relations topologiques entre les cellules.

Dans notre évaluation, nous favorisons certains critères par rapport aux autres selon les objectifs que nous voulons atteindre. Ces critères sont les suivants :

- 1) Les cellules doivent couvrir la totalité du globe sans chevauchement;
- 2) Les cellules doivent être homogènes et ont la même forme;
- 3) Les cellules ont la même topologie (le même nombre des sommets et des arêtes).
- 4) Le maillage ne doit pas présenter des écarts entre les tuiles.
- 5) Les aires des cellules doivent être égales;
- 6) Les arêtes des cellules sont droites dans certaines projections;
- 7) Les cellules sont compactes c'est-à-dire, les points de référence (centre des cellules) qui sont à l'intérieur d'une cellule doivent être semblables et proches les uns des autres que possible [Kimerling *et al.*, 1999]. Elles doivent satisfaire la première loi de Wald Tobler en 1970 en géographie « *tout est lié à tout le reste, mais les choses proches sont plus liées que les choses éloignées* ». Par conséquent, une grande valeur de la compacité assure que tous les points dans une cellule sont proches les uns des autres.
- 8) Les points de référence et les cellules dans les différentes résolutions qui constituent le système de grille forment une hiérarchie et représente un haut degré de régularité.
- 9) Le milieu d'un arc reliant deux cellules adjacentes coïncide avec le milieu de l'arête entre les deux cellules
- 10) Une cellule de surface contient seulement un point de référence de la grille.

- 11) Les points de référence de la grille sont au maximum centraux dans les cellules de surface.
- 12) Les points de référence de la grille sont à égale distance de leurs voisins.
- 13) Les points de référence de la grille et les cellules surfaciques présentent des régularités et d'autres propriétés qui devraient fournir un système d'indexation efficace.
- 14) Le système de grille a une relation simple avec le système basé sur le quadrillage latitudes et les longitudes.

Pour évaluer notre système de tessellation basé sur un icosaèdre, nous avons utilisé quelques critères qui sont liés à notre problématique.

L'analyse de notre tessellation obtenue montre que les cellules ont la même forme, la même topologie et ne chevauchent pas dans tous les niveaux de subdivision. En outre, le maillage ne présente pas des écarts entre les cellules. Ce qui montre que les quatre premiers critères sont vérifiés. Pour les autres critères, nous avons effectué des mesures statistiques (métriques) comme la mesure de la superficie, la compacité, l'isotropie et la distance intercellule comme il est expliqué par Gregory *et al.* [2008].

#### *4.2.1.1. La mesure de la superficie*

Nous avons calculé les propriétés métriques des faces de l'icosaèdre dans les différents niveaux de subdivision. Le calcul des propriétés se fait sur une sphère de rayon de 6378,1 km. Le Tableau 4.4 présente le calcul de la moyenne et l'écart type de la superficie. Ce calcul permet de déterminer le niveau de la subdivision dans lequel les déformations seront minimales d'une part, et d'autre part, il permet de déterminer à quel niveau les tuiles montrent une meilleure égalité des surfaces.

Niveau	nombre des cellules	longueur de l'arête (km)	Surface moyenne (km <sup>2</sup> )	Écart type de la surface (km <sup>2</sup> )
L0	20	6,698.90	12,604,000.00	0.012*10 <sup>-15</sup>
L1	80	3,937.278	5, 917,970.00	0.0114
L2	320	2,069.938	1, 562,701.00	0.0033
L3	1280	1,048.667	397,778.50	0.0008
L4	5120	526.2446	97,415.14	0.0002
L5	20480	263.1223	24,353.78	4.4* 10 <sup>-5</sup>
L6	81920	131.8797	4,058.964	1.1* 10 <sup>-5</sup>
L7	327680	65.93985	1,556.532	2.8*10 <sup>-6</sup>
L8	1310720	32.93807	470.8398	6.9*10 <sup>-7</sup>
L9	5242880	16.46904	117.3041	1.7*10 <sup>-7</sup>
L10	20971520	8.237703	29.3869	4.3*10 <sup>-8</sup>
L11	83886080	4.117259	7.3404	1.1*10 <sup>-8</sup>
L12	335544320	2.058630	1.8351	2.7*10 <sup>-9</sup>
L13	1342177280	1.029314	0.4588	6.8*10 <sup>-10</sup>
L14	5368709120	0.514573	0.1147	1.6*10 <sup>-10</sup>
L15	21474836480	0.257330	0.0287	4.2*10 <sup>-11</sup>
L16	85899345920	0.128664	0.0072	1.06*10 <sup>-11</sup>
L17	343597383680	0.064332	0.0018	2.65*10 <sup>-12</sup>
L18	1374389534720	0.032166	4.4802 <sup>e</sup> -04	6.63*10 <sup>-13</sup>
L19	5497558138880	0.016083	1.1200 <sup>e</sup> -04	1.65*10 <sup>-13</sup>
L20	21990232555520	0.008041	2.7998 <sup>e</sup> -05	4.14*10 <sup>-14</sup>
L21	87960930222080	0.004021	6.9977 <sup>e</sup> -06	1.03*10 <sup>-14</sup>
L22	351843720888320	0.002010	1.7494 <sup>e</sup> -06	2.6*10 <sup>-15</sup>
L23	1407374883553280	0.00100	4.3301 <sup>e</sup> -07	6.5*10 <sup>-16</sup>
L24	5629499534213120	0.00050	1.0825 <sup>e</sup> -07	1.62*10 <sup>-16</sup>
L25	2251799813685248	0.00025	2.7063 <sup>e</sup> -08	4.05*10 <sup>-17</sup>
L26	9007199254740992	0.00012	6.2354 <sup>e</sup> -09	1.01*10 <sup>-17</sup>
L27	36028797018963968	0.00006	1.5588 <sup>e</sup> -09	2.53*10 <sup>-18</sup>
L28	144115188075855872	0.00003	3.8971 <sup>e</sup> -10	6.33*10 <sup>-19</sup>

Tableau 4.4: Propriétés intrinsèques de la tessellation triangulaire hiérarchique

La superficie d'une cellule dans le cas de Bing Maps dans le niveau le plus fin (23) égale à  $3.4969 \text{ cm}^2$ , dans le cas de notre système, la superficie qui est plus proche égale à  $3.879 \text{ cm}^2$  qui correspond au niveau 28.

L'analyse des résultats obtenus montre que l'écart type de superficie décroît avec le raffinement du maillage et devient négligeable à partir du 10<sup>ème</sup> niveau, car la variation de la superficie dans ce niveau est inférieure à  $1 \text{ m}^2$  (en considérant que les distorsions liées à la surface sont négligeables avec cet ordre). À cet effet, les cellules sont quasi-homogènes avec des aires égales.

La figure ci-dessous montre la variation de l'écart type de la superficie des cellules en fonction de la surface moyenne sur une échelle logarithmique. Ce graphe montre que l'écart de la superficie par rapport à la moyenne est devenu minimal dans les dix premiers niveaux de subdivision. Le choix des dix premiers niveaux est lié aux longueurs des arêtes des triangles dans les différents niveaux de récursivité. Pour le niveau 10, la longueur de l'arête est inférieure à 10 km, qui on le considère comme un seuil maximal où la distorsion liée à la courbure terrestre soit négligeable.

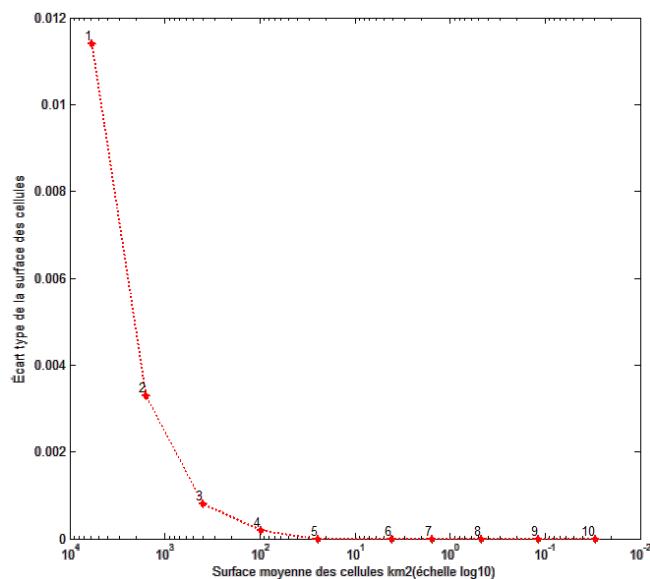


Figure 4.18: Variation logarithmique de l'écart type de la superficie des cellules en multi-niveau

La courbe montre que l'écart type de la superficie des cellules dans les niveaux plus fins (à partir du niveau 10) est proche de zéro; c'est-à-dire que la superficie de chaque

triangle se rapproche vers la moyenne de tous les triangles. Par conséquent, les triangles sont quasi-homogènes à partir de 10<sup>ième</sup> niveau.

#### *4.2.1.2. Mesure de la distance inter-vertex et l'aire d'estimation d'un vertex*

En plus les calculs statistiques métriques effectués au paravent, nous avons procédé à calculer deux paramètres importants dans la même structure hiérarchique. La distance inter-vertex correspond à la distance moyenne entre un vertex et les vertex voisins qui sont connectés par une même arête; par contre, l'aire d'un vertex correspond à la surface définie par le carré de la distance moyenne entre un vertex et ses sommets voisins dans la tessellation de la sphère. Ces deux facteurs permettent de voir si notre tessellation est de surfaces égales. Dans la mesure de distance inter-vertex, le calcul se fait sur la base des relations topologiques entre les faces. La mesure de distance inter-vertex consiste à déterminer les faces qui partagent le même vertex, puis on calcule la distance entre les vertex et ses voisins (partagent la même arête). Pour avoir si les surfaces des cellules sont préservées, nous avons calculé la déviation maximale de la distance inter-vertex et la déviation maximale des aires autour des vertex.

Le Tableau 4.5 montre le taux de variation maximale de la distance entre un vertex et ses voisins dans chaque niveau de subdivision. Le taux de variation monte puis se stabilise, il passe de 8% dans le premier niveau vers 16% dans le 5<sup>ième</sup> niveau et il se stabilise à partir du niveau 6. La courbe de la variation de la distance inter-cellule monte puis stabilise, car les segments reliant les centres des cellules qui représentent les arêtes des hexagones et des pentagones dans le maillage deviennent uniformes dans les niveaux plus détaillés. À partir de 5<sup>e</sup> niveau, les cellules hexagonales et pentagonales (formées par le regroupement des triangles adjacents) deviennent uniformes et homogènes (en arêtes et en angles intérieurs).

Niveau	Distance_min(km)	Distance_max(km)	Écart type (km)
0	3435,8803	9629,767	0.0642
1	1741,1943	1892,824	0.0801
2	879,198	980,4969	0.1033
3	440,2361	516,051	0.1469
4	220,4366	261,8481	0.1581
5	110,2183	131,2426	0.1602
6	54,7906	65,6213	0.1636
7	27,3953	32,4921	0.1636
8	13,69765	16,24605	0.1636
9	6,371	8,123025	0.1636
10	3,1855	4,064698	0.1636

Tableau 4.5: Calcul de la déviation maximale de la distance inter-vertex

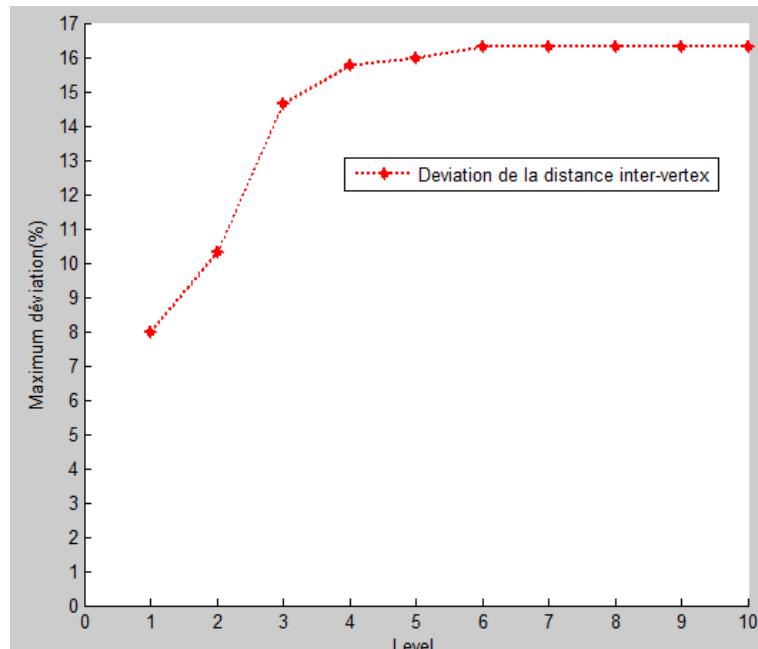


Figure 4.19: Variation maximale de la distance inter-vertex dans les 10 premiers niveaux

La zone d'estimation d'un vertex est la surface d'un cercle centré à un vertex et un rayon égal à la distance moyenne par rapport aux vertex voisins. Dans le maillage icosaédral, chaque sommet est un centre d'un hexagone ou d'un pentagone donc chaque vertex aura cinq ou six voisins. Le Tableau 4.6présente le calcul de la déviation entre la plus grande surface et la plus petite surface dans un niveau de subdivision.

<i>Niveau</i>	<i>Min_Surface</i>	<i>Max_surface</i>	<i>Variation maximale des surfaces</i>	<i>Variation (%)</i>
<b>1</b>	0.2346	0.2773	0.154	15.4
<b>2</b>	0.0598	0.0744	0.196	19.6
<b>3</b>	0.0150	0.0206	0.271	27.1
<b>4</b>	0.0038	0.0053	0.296	29.6
<b>5</b>	0.00094	0.0013	0.298	29.8
<b>6</b>	0.00023	0.00032	0.299	29.9
<b>7</b>	0.00012	0.00017	0.30	30
<b>8</b>	$5.8 \times 10^{-5}$	$8.28 \times 10^{-5}$	0.30	30

Tableau 4.6: Calcul de la déviation maximale de la zone d'estimation d'un vertex

La représentation graphique de la variation de l'aire de la zone d'estimation des vertex montre une croissance dans les trois premiers niveaux ensuite, la courbe se stabilise à partir du quatrième niveau. Dans les quatre premiers niveaux, la variation des aires des cellules par rapport à la moyenne est importante dans les quatre premiers niveaux et devient de plus en plus faible à partir du cinquième niveau. Dans la structure la variation maximale des aires des cellules hexagonales et pentagonales est autour de 30 %. La croissance dans la variation de la surface est due à la transformation des triangles plats vers des triangles sphériques donc, les superficies deviennent plus grandes. La variation des aires des surfaces devient minimale avec le raffinement du maillage à cause du globe icosaédral qui se rapproche de plus en plus à la forme sphérique du globe. À partir de cette analyse, nous pouvons conclure que la tessellation de la sphère dans les niveaux hiérarchiques plus fins conserve les aires des surfaces.

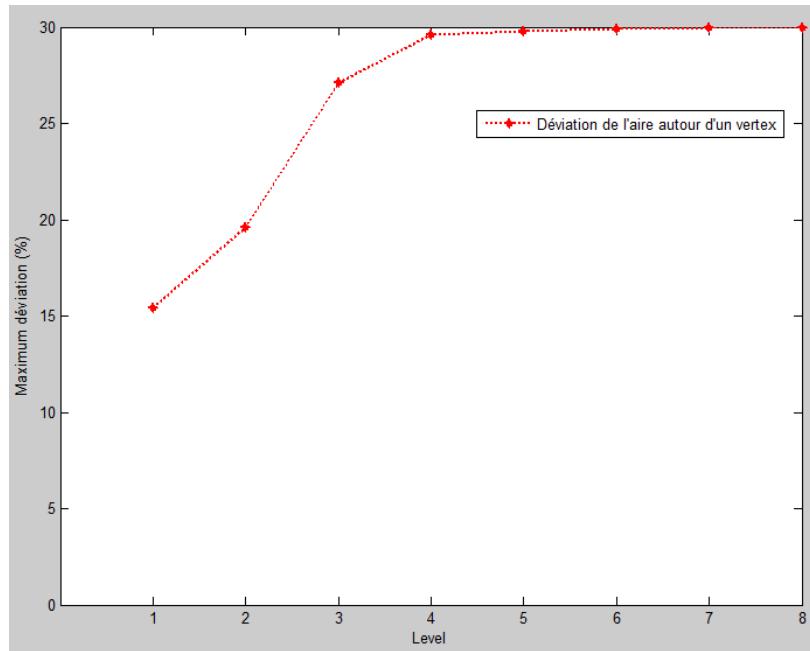


Figure 4.20: Variation de la déviation de l'aire d'estimation des vertex(aires de chaque cellule pentagonale ou hexagonale)

#### 4.2.1.3. Calcul de l'isotropie

L'isotropie donne une idée sur la variation d'un phénomène dans l'espace en fonction de la direction. Dans la tessellation de la sphère, le calcul de ce facteur joue un rôle important pour évaluer l'uniformité et la régularité de la grille. Notre tessellation est composée de l'ensemble des triangles qui forment des hexagones et des pentagones. Pour avoir un hexagone régulier, les arêtes doivent être égales et les angles de chaque coin doivent être égaux à  $60^\circ$ . Par conséquent, nous avons effectué deux mesures :

- L'écart type normalisé de la longueur moyenne des arêtes de chaque cellule qui est donné par la relation :

$$\sigma_l = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} (l_i - l_{mean})^2 / N_s} / l_{mean} \quad [\text{Miura \& Kimoto, 2005}]$$

Où :  $N_s$  : le nombre des vertex autour de chaque vertex,  $l_{mean}$ : la longueur moyen des arêtes de chaque cellule hexagonale ou pentagonale.

- L'écart type normalisé de l'angle intérieur au niveau de chaque vertex :

$$\sigma_\theta = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} \left( \theta_i - \frac{(N_s-2)\pi}{N_s} \right)^2 / N_s} / N_s \quad [\text{Miura \& Kimoto, 2005}]$$

Où :  $\theta_i$  : l'angle interieur de chaque cellule pentagonale ou hexagonale.

Ces mesures permettent de voir la distribution de la déviation standard de la longueur des arêtes et des angles de la grille utilisée sur la totalité de la sphère. Le résultat de distribution dans les différents niveaux de subdivision est représenté dans la figure suivante.

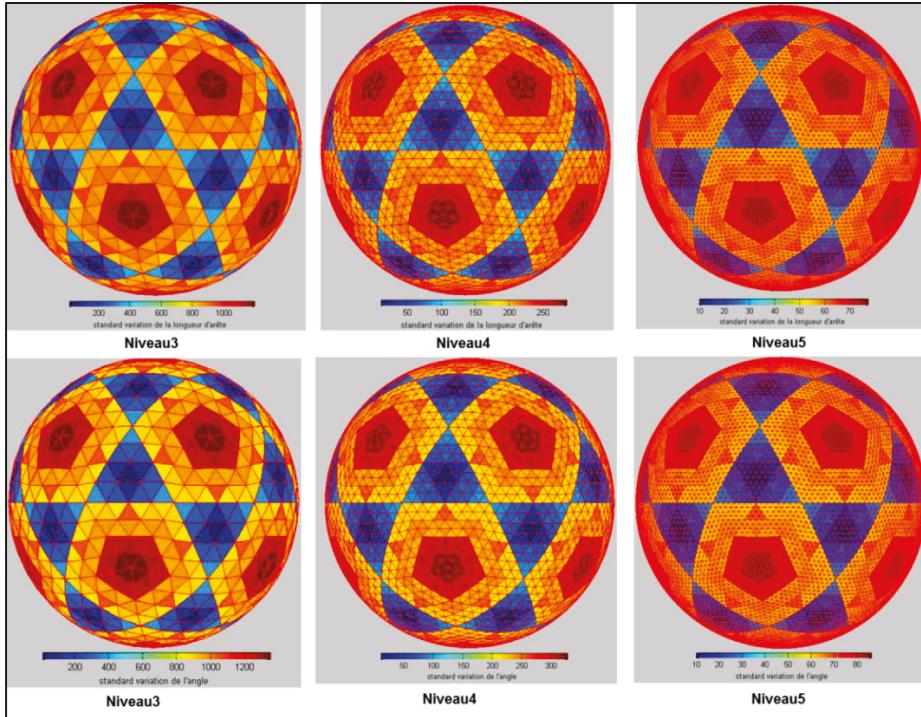


Figure 4.21: Représentation graphique de la standard déviation de la longueur des arêtes et des angles dans le tessellation icosaédrale

L'écart type de la variation de la longueur des arêtes et des angles dans les différents niveaux varie d'un niveau à un autre. Les triangles de la couleur bleue représentent le minimum de l'écart des angles intérieurs et des longueurs d'arêtes par rapport à la moyenne. Les triangles qui sont en rouge représentent un maximum de déviation des angles intérieurs et des arêtes dans chaque cellule par rapport à la moyenne globale de toutes les cellules. L'écart type de la longueur d'arête varie dans le même triangle, cette variation est liée à géométrie sphérique des triangles. Selon les deux figures, les variations grandes sont liées aux cellules pentagonales, et les variations faibles sont liées aux cellules hexagonales qui sont formées par le regroupement d'un ensemble des triangles qui partagent le même vertex. Cette variation diminue avec les niveaux de subdivision donc, les triangles sont uniformes et les nœuds sont distribués régulièrement dans toutes les directions sur la sphère pour les niveaux plus fins.

#### 4.2.2. Évaluation de la projection de l’icosaèdre sur un plan

La plupart des projections cartographiques provoquent une distorsion des distances, des angles et des surfaces. Ces distorsions varient d’une projection à une autre et d’une zone à une autre sur le la carte avec la même projection.

Dans l’évaluation de l’approche de projection de l’icosaèdre sur un plan nous avons fait une étude analytique et comparative par rapport à la projection WMP utilisée par la plupart des services de cartographie Web et aussi par rapport à la projection stéréographique qui est la seule projection en perspective la plus appropriée pour la cartographie de l’arctique [Skopeliti & Tsoulous, 2013]. Nous avons utilisé comme facteur de comparaison la mesure des surfaces

La mesure de distorsion dans les aires des surfaces autour du point d’intérêt a été utilisée comme paramètre de comparaison de la performance de la projection icosaédrale. À cet effet, nous avons effectué des mesures de la surface de l’Afrique, le Groenland et l’Amérique du Sud obtenues à partir des aires projetées dans la projection icosaédrale que nous comparons à celles obtenues dans la projection WMP. Pour calculer la superficie de chaque continent dans l’approche icosaédrale, nous avons calculé le nombre des triangles inclus dans chaque continent multiplié par la superficie de chaque triangle dans le niveau de base. La comparaison des aires obtenues à partir de ces deux projections avec la superficie réelle des continents permet d’évaluer le niveau de performance de notre projection en matière de préservation des surfaces.

Le Tableau 4.7 montre que le rapport des superficies entre l’Afrique et le Groenland, l’Amérique du Sud et le Groenland dans l’approche icosaèdre est plus proche de la réalité par rapport à la projection du WMP. Donc, les distorsions des surfaces dans l’approche icosaédrale sont moins par rapport à la projection WMP.

Région		Rapport des superficies		
		Approche icosaédrale	Projection WMP	Réel (encyclopédie Larousse <sup>1</sup> )
Afrique	Groenland	<b>13,7</b>	3,86	13,86
Amérique de Sud	Groenland	<b>8,10</b>	2,3	9,37

Tableau 4.7: Évaluation de l'approche selon la préservation des aires des surfaces

Dans cette section, nous avons fait la comparaison pour le niveau de base, à cause du temps qui n'est suffisant pour faire d'autres comparaisons. À cet effet, nous recommandons de faire d'autres comparaisons dans des niveaux plus fins.

#### 4.2.3. Évaluation de temps de traitement et de calcul

Les cartes sur le Web sont un excellent moyen pour visualiser les données spatiales. Cependant, l'interactivité des cartes pour la navigation dans les meilleurs délais présente un défi[Sabo, 2007]. Cette interactivité est caractérisée par le temps de réponse d'un système de visualisation des données géo-spatiales aux requêtes des utilisateurs. Le délai de réponse doit être minime est acceptable. Plusieurs études montrent que le temps d'attente sur le Web ne doit pas dépasser les 10 secondes sinon l'utilisateur quittera la page[Sabo, 2007]. En outre, toutes les opérations de calcul doivent se faire d'une manière automatique et dans quelques secondes.

Notre système n'est pas optimisé au point où les calculs se font dans quelques secondes. Afin d'améliorer la solution en vue de mieux manipuler les données et de générer une configuration optimale dans un bref délai, l'amélioration doit s'effectuer au niveau des deux aspects : la hiérarchisation et le dépliage. Il est donc nécessaire de développer une stratégie basée sur la gestion des tuiles dans les différents niveaux en utilisant une approche d'indexation spatiale.

### 4.3. Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter de manière détaillée l'implémentation de l'approche que nous avons proposée et l'analyse des résultats obtenus. Nous avons partagé les résultats en deux grandes parties: la conception de la grille polyédrale et le dépliage de cette structure sur un plan.Dans un premier temps, nous avons présenté les procédures

---

<sup>1</sup><http://www.larousse.fr/encyclopedie/>

algorithmiques que nous avons adoptées dans la phase de la hiérarchisation. Le résultat de l'implémentation de cette partie est un globe polyédral hiérarchique qui se rapproche à la forme sphérique de la terre suivant les niveaux hiérarchiques de subdivision. La propriété la plus attrayante de cette structure est la forme triangulaire des faces qui sont quasi-équilatéraux dont leurs vertex sont situés sur la sphère. La structure hiérarchique est considérée comme la plateforme pour la représentation des données géo-spatiales en multirésolution. Dans la deuxième partie de l'implémentation, l'algorithme développé permet de produire des cartes correspondantes à chaque niveau hiérarchique. Les cartes obtenues montrent plusieurs interruptions autour du point d'intérêt de l'utilisateur. Pour combler ces interruptions et regrouper le maximum des surfaces autour du point d'intérêt, nous avons implémenté un deuxième algorithme de dépliage permettant de gérer les interruptions. Les résultats de cet algorithme sont intéressants en vue de l'étendue maintenue par rapport au premier algorithme. Les cartes résultantes montrent que l'algorithme proposé permet de gérer et d'éliminer localement les interruptions de façon dynamique.

Selon les résultats de l'analyse des propriétés de la tessellation, il ressort que l'approche proposée est efficace et permet de supporter des systèmes de projections qui minimisent les déformations surfaciques, forme ou la distance. La solution proposée permet d'avoir une meilleure cartographie locale tout en tenant compte de l'effet des interruptions. En outre, cette solution a l'avantage d'être utilisée pour tout endroit sur le globe. Cependant, la solution proposée nécessite beaucoup d'améliorations en vue d'optimiser le temps de traitement et de l'interactivité qui reste assez long. À cet effet, nous suggérons d'optimiser le processus de dépliage. Cet aspect de recherche hors des objectifs de ce mémoire qui présente une solution aux problèmes de déformation due aux projections cartographiques utilisées dans le Web. Malheureusement, nous n'avons pas pu atteindre cet objectif, car le système de projection n'a pas été implémenté. Dans le futur, des investigations plus importantes seront nécessaires afin d'implémenter le système de projection qui utilisera cette tessellation afin de minimiser les distorsions dans les produits de cartographie Web.



# **Chapitre 5: Conclusions et perspectives**

Dans ce chapitre, nous allons évaluer l'accomplissement de nos objectifs formulés dans le chapitre 1 de ce mémoire. Également, nous présenterons des propositions ainsi que des perspectives pour des travaux futurs relatifs à ce travail de recherche.

Nous avons décrit dans le chapitre 3 les critères exhaustifs d'une méthode de projection permettant de minimiser les déformations dans la cartographie Web. Nous avons conclu que la méthode de projection qui répond au mieux à ces critères est la projection polyédrale. Nous avons également souligné que l'icosaèdre est la structure la plus adaptée par rapport aux autres types de polyèdre grâce à ses propriétés intrinsèques.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté les résultats de l'implémentation de l'algorithme de la génération de la structure hiérarchique et l'algorithme de dépliage. Cette implémentation a été faite pour la structure icosaédrale dans les différents niveaux hiérarchiques.

## **5.1. Retour sur les objectifs**

L'objectif principal de notre travail était de proposer une approche de projection permettant de minimiser les distorsions cartographiques engendrées par la projection WMP dans les régions du Nord. La solution proposée a été présentée au chapitre 3; cette solution suit une démarche subdivisée en 3 grandes phases :

- La première phase consiste de la conception d'une tessellation icosaédrale hiérarchique permettant de construire une structure polyédrique générée à partir de la subdivision des faces de l'icosaèdre.
- La seconde phase consiste à définir le système de projection locale qui pourra être utilisé afin de projeter les données géospatiales sur les faces triangulaires de notre tessellation icosaédrique. Nous avons implanté le premier algorithme qui permet de projeter les données raster sur les faces de l'icosaèdre, mais on n'a

pas implémenter le deuxième algorithme, car le temps alloué pour nos travaux de maîtrise ne nous a pas permis d'implémenter complètement le système que nous proposons; son implémentation devra faire l'objet des travaux futurs.

- La troisième phase consiste à élaborer un algorithme de dépliage dynamique pour déplier la structure sur un plan avec un minimum d'interruptions autour d'une zone d'intérêt. Cet algorithme permet également de gérer les interruptions en fonction de poids alloués aux arêtes du graphe représentant la structure icosaédrique.
- La quatrième phase consiste à évaluer le système de tessellation icosaédrale hiérarchique en calculant certains paramètres pour voir si cette tessellation peut servir dans la conception d'un système de projection icosaédrale hiérarchique capable de minimiser les distorsions. Ainsi que nous avons évalué notre système par rapport à WMP, cette évaluation est basée sur la mesure des superficies et qui montre que le système développé minimise mieux les déformations.

Il a été question de modéliser la surface du globe à partir de la création d'une structure icosaédrale hiérarchique en subdivisant les faces de l'icosaèdre à différents niveaux de subdivision. Nous avons ensuite procédé au dépliage de la structure résultante sur un plan en vue d'analyser la performance des deux algorithmes (algorithme de conception de la structure hiérarchique et l'algorithme de dépliage). Pour gérer efficacement les interruptions sur les cartes résultantes, nous avons développé un algorithme basé sur les relations topologiques des triangles et la variation des poids entre les cellules voisines.

L'algorithme développé pour gérer les interruptions utilise une matrice de poids qui est définie en fonction des relations topologiques entre les faces dans la structure icosaédrale. Le programme génère une matrice avec des poids égaux et les poids varient en fonction de la région choisie. L'algorithme maintient le voisinage autour du point d'intérêt; toutefois, il est nécessaire de gérer les interruptions pour maintenir le maximum des surfaces en utilisant la procédure de la pondération des arêtes.

Notre système développé peut être appliqué à n'importe quel endroit sur le globe, contrairement aux systèmes standards qui sont plus utilisés dans certaines régions que d'autres (ex. la projection azimutale est plus utilisée dans les régions polaires). En outre, l'approche icosaédrale offre un système consistant "Seamless"; ce qui n'est pas

respecté par d'autres systèmes comme l'approche de projection composite. Cette dernière combine plusieurs types de projections qui ne sont pas cohérentes. D'une part, certaines projections utilisées sont conformes et d'autres sont équivalentes.

La solution proposée dans le cadre de ce mémoire de maîtrise montre plusieurs caractéristiques intéressantes que ce soit au niveau de la grille hiérarchique ou de la configuration obtenue par le dépliage. Au niveau de la grille générée, les cellules sont homogènes et uniformes dans les différents niveaux hiérarchiques. En outre, les cellules sont équilatérales et ne se chevauchent pas. Nous pouvons considérer que le niveau 10 est le niveau à partir duquel on peut considérer que les distorsions sont négligeables. Concernant le dépliage de la structure sur un plan, les interruptions sont toujours existantes dans tous les niveaux hiérarchiques, mais avec des degrés variables. Ils sont minimes proche du point d'intérêt, ainsi que dans les niveaux hiérarchiques plus détaillés.

L'évaluation de l'approche par rapport à la projection WMP montre que les régions riveraines des pôles sont étirées comme le Groenland qui devient plus grand que celle dans la réalité. Par contre, l'approche icosaédrale préserve les surfaces dans les zones qui ne subissent pas des interruptions malgré que certaines zones soient lointaines par rapport à la zone d'intérêt. Dans cette évaluation, nous avons mesuré des surfaces à une échelle plus globale, car notre système utilise une seule image qui a été projetée sur les faces d'un icosaèdre de base. Il est recommandé d'utiliser d'autres images avec d'autres résolutions pour faire la comparaison avec des objets à grandes échelles (ex. pays, ville, quartier, etc.). Ainsi que, l'évaluation peut être effectuée avec des données vectorielles en utilisant le deuxième algorithme après la projection de ces données sur les faces de l'icosaèdre. L'évaluation se fait sur la base de la comparaison de la mesure de la superficie, la distance et la forme des objets dans les différents niveaux de détails.

Les résultats obtenus dans le cadre du présent mémoire montrent un fort potentiel pour contribuer significativement au développement de nouvelles approches de projection sans distorsion pour la cartographie Web.

## 5.2. Perspectives et travaux futurs

Ce travail ouvre plusieurs nouveaux volets de recherche dans le but d'améliorer des projections de cartographie Web. Nous suggérons de pousser la recherche dans le futur

pour implémenter le système de projection proposé afin de projeter la surface du globe sur leurs faces avec un minimum de distorsion en utilisant la projection gnomonique. Aussi, notre approche a été développée dans l'environnement Matlab qui est très adapté aux calculs mathématiques, mais qui n'est pas très performant dans l'aspect de visualisation et de graphisme. Ainsi, il serait judicieux d'utiliser la bibliothèque OpenGL<sup>1</sup>(*Open Graphics Library*) qui contient plusieurs fonctions permettant de représenter mieux la structure icosaédrale que nous avons développée avec de haute performance de graphisme.

Également, et pour simplifier le problème dans notre système, nous avons utilisé la sphère comme un modèle de la surface du globe. Cependant, l'ellipsoïde est le modèle qui est le plus proche à la forme réelle de la terre. Or, les calculs sur la surface de l'ellipsoïde sont beaucoup plus complexes comparativement à la sphère. Par conséquent, nous suggérons d'utiliser le modèle ellipsoïdique à la place du modèle sphérique pour développer un système qui offre des résultats meilleurs en termes de distorsions.

L'étude comparative présentée dans ce mémoire entre le système de projection développé et le système de projection WMP est partielle (basée sur la mesure des superficies). Elle nécessite une analyse plus approfondie surtout sur des niveaux plus détaillés. À cet effet, il est recommandé de comparer le système développé avec d'autres systèmes afin de présenter les avantages du système. En plus de la comparaison basée sur des données raster, il est nécessaire d'implémenter le deuxième algorithme de projection locale pour comparer les objets dans différentes échelles selon la forme et la superficie afin de présenter le potentiel du système développé.

En vue des interruptions présentées dans les cartes produites par le système icosaédral qui sont différentes par rapport aux autres cartes traditionnelles, l'utilisation de ce type de cartes non-continues est non intuitive. De ce fait, il est nécessaire d'améliorer la performance de ce système afin de faciliter son utilisation et d'augmenter l'accessibilité au grand public. En outre, la structuration des données utilisées dans le système est un élément important pour augmenter la performance de système. Il est nécessaire d'améliorer la méthode d'indexation et le stockage des données dans la structure.

---

<sup>1</sup><https://www.opengl.org/>

Étant donné que le système de projection proposé est destiné à la cartographie web, avec objectif principal de fournir aux utilisateurs une cartographie optimale répondant à leurs requêtes, il est nécessaire de développer une approche d’attribution automatique des poids. Afin de gérer les interruptions après le déploiement dans le système Myriahedral, nous pouvons regrouper les cellules en fonction de tessellation objets sémantiques (océan, continent) à différents niveaux de détail (pays, ville, quartier, etc.) ou en fonction de la région d'intérêt.



# BIBLIOGRAPHIE

- Alborzi, H. & Samet, H. (2000). Augmenting SAND with a spherical data model. International Conference on Discrete Global Grids, Santa Barbara, CA.
- Bartholdi III , J. J. & Goldsman, P. (2004). "Multiresolution Indexing of Triangulated Irregular Networks." IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics10(4).
- Battersby, S. E., et al. (2014). Implications of Web Mercator and Its Use in Online Mapping. Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization. 49: 85-101.
- Belo, E. (2013). génération et gestion des tuiles cartographique. Campo Camp.
- Bischoff, S., et al. (2000). "Towards Hardware Implementation Of Loop Subdivision." In Proceedings of the ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS workshop on Graphics hardware: 41-50.
- Bucher, B. (1997). "La carte à la carte sur le web." (193): 37-47.
- Catmull, E. & Clark, J. (1978). "Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes." Computer-aided design10(6): 350-355.
- Chen, J., et al. (2003). "An algorithm for the generation of Voronoi diagrams on the sphere based on QTM." Photogrammetric engineering and remote sensing69(1): 79-90.
- Cloche, et al. (1983). Spatially referenced methods of processing raster and vector data. Image and Vision Computing. 1: 211–220.
- Cox, S. L. (2011). Tools Menu. UVMapper.
- Crouch, J., et al. (2010) Source Unfolding Algorithm. math.arizona.edu
- Delmelle , E. M. (2001). map projection properties: considerations for small-scale gis applications. Buffalo, University of New York
- Demaine, E. D. & O'Rourke, J. (2007). Geometric Folding Algorithms, Cambridge University Press.
- Doo , D. & Sabin, M. (1978). "Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points." Computer-Aided Design10(6): 356–360.
- Dürer, A. (1538). Underweysung des Messung mit dem Zirckel und Richtscheit.
- Dutton, G. (1984). "Geodesic modeling of planetary relief." Cartographica21(2&3): 188-207.

- Dutton, G. (1989). "Modeling locational uncertainty via hierarchical tessellation." Accuracy of spatial databases**140**: 125 -140.
- Dutton, G. (1996). "Encoding and handling geospatial data with hierarchical triangular meshes." Inetnational Symposium on Spatial Data.
- Dutton, G. (1997). "Digital map generalization using a hierarchical coordinate system." Auto Carto.
- Dutton, G. (1999). A hierarchical coordinate system for geoprocessing and cartography. Lecture Notes in Earth Sciences. **79**: 1-18.
- Erika E. Harrison, E. E. (2012). Equal Area Spherical Subdivision. Calgary , Alberta, University of Calgary
- Fekete, G. (1990). Rendering and managing spherical data with sphere quadtrees. Proceedings of the 1st conference on Visualization'90 IEEE Computer Society Press.
- Fekete, G. & Treinish, L. (1990). Sphere quadtrees: A new data structure to support the visualization of spherically distributed data. SPIE, Santa Clara, International Society for Optics and Photonics.
- Finn, D. L. (2001). Geometric Modelling: Doo-Sabin and Catmull-Clark Surfaces. Geometric Modelling: Theoretical and Computational Basis Towards Advanced CAD applications, International Federation for Information Processing.
- Fisher, I. & Miller, O., M (1944). World Maps and Globes, Essential Books.
- Fuhrmann, S. (2009) Loop subdivision surface. wikipedia.org
- Fuller, R. B. (1975). Synergetics. New York, MacMillan.
- Fuller, R. B. (1982). Synergetics: Explorations dans la géométrie de la pensée. New York, Macmillan.
- Furuti , C. A. (2004) World Map on an Icosahedron.
- Girin, I. (2014). Development of a multi-projection approach for global web map visualization. Toronto, Ontario, York University.
- Godsalve, C. (2008). Quadtrees on the Sphere.
- Goodchild, M. (1994). Geographical grid models for environmental monitoring and analysis across the globe(panel session). Proceedings of GIS/LIS'94 Conference, , Phoenix, Arizona.
- Goodchild, M. F., et al. (1991). Spatial Data Representation and Basic Operations for a Triangular Hierarchical Data Structure.
- Goodshild, M. F. & Yang, S. (1992). "A hierarchical spatial data structure for global geographic information systems." Graphical Models and Image Processing**54**(1): 31-44.

- Gregory, M. J., et al. (2008). "A comparison of intercell metrics on discrete global grid systems." *Computers, Environment and Urban Systems* **32**(3): 188-203.
- Hart, G. W. (1998) Piero della Francesca's Polyhedra. *Virtual Polyhedra: The Encyclopedia of Polyhedra*
- Holden, A. (1971). *Shapes, Space, and Symmetry*. New York, Columbia University Press.
- Horwood (2011) Web Map Caching and Tiling. *Improved Global Web Map Visualization Project*
- Jenny, B. (2012). "Adaptive Composite Map Projections." *IEEE Transactions On Visualization And Computer Graphics* **18**(12): 2575-2582.
- Jones, K. (2011). "Communicating perceived geospatial data quality of 3D objects in virtual globes."
- Khuller, S., et al. (1995). Balancing Minimum Spanning Trees and Shortest-Path Trees. *Algorithmica*, **14**: 305-321.
- Kimerling, J. A., et al. (1999). "Comparing geometrical properties of global grids." *Cartography and Geographic Information Science* **26**(4): 271-288.
- Kimerling, J. A. & White, D. (1995). *The role of cartography in designing a global sampling framework for environmental monitoring*. Proceedings of the 16th International Cartographic Conference, Barcelona, Spain.
- Lanquetin, S., et al. (2002). Deux algorithmes d'intersection des surfaces de subdivision. *XVèmes Journées de l'Association Française*. Lyon, Université de Bourgogne.
- Larsen, K. (2012). Coredumping.com.
- Le Bot, C. (2006) Théorie des graphes.
- Lee & Samet (2000). "Navigation dans le triangle maillages mis en œuvre quadtree linéaire." *ACM Transactions on Graphics* **19**(2): 79-121.
- Lee, M. & Samet, H. (1998). "Traversing the Triangle Elements of an Icosahedral Spherical Representation in Constant-Time." 22-33.
- Liu, W. & Tai, K. (2002). *Computational Geometric Modeling and Unfolding of 3-D Folded Structures*. 28th Design Automation Conference, Montreal, Quebec, Canada.
- Loeckel, A. J. & Schmid, S. (2002). *Caching techniques for high-performance Web Map Services*. International Conference on Geographic Information Science, Avignon.
- Loop, C. (1987). Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles, M.S. Mathematics thesis, University of Utah, University of Utah.

- Lucier, B. (2006). Unfolding and Reconstructing Polyhedra. Waterloo, Ontario, Canada, University of Waterloo.
- Lukatella, H. (1989). Hipparchus data structure: Points, lines and regions in a spherical Voronoi grid. Baltimore. **9**: 164-170.
- Ma, T., et al. (2009). "A discrete square global grid system based on the parallels plane projection." International Journal of Geographical Information Science**23**(10): 1297–1313.
- Mainville, A. (2011). Project Meeting "GEOIDE SSII 109".
- Mark, D. M. & Lauzon, J. P. (1985). Approaches for Quadtree based Geographic Information Systems at Continental or Global Scales. AutoCarto 7 Proceedings. Washington D.C: 355-364.
- McClendon, B. (2011). La cartographie crée des emplois et contribue à la croissance économique mondiale.
- Miller, J. R. & Gaskins, T. (2009). "Computations on an Ellipsoid for GIS." Computer-Aided Design and Applications**6**(4): 575-583.
- Miura, H. & Kimoto, M. (2005). "A Comparison of Grid Quality of Optimized Spherical Hexagonal–Pentagonal Geodesic Grids." Monthly Weather Review**133**(10): 2817-2833.
- Mostafavi, M. A. (2002). development of a global dynamic data structure. Québec, Université Laval.
- Mulcahy, K. A. (1997) Map Projections And Spatial Referencing. The university of Maine
- Nationalatlas (2013) Map Projections: From Spherical Earth to Flat Map. nationalatlas.gov
- NGA (2014). Implementation Practice Web Mercator Map Projection, Office of Géomatics
- O'Rourke (2008). Unfolding Polyhedra, Dept. Comput. Sci., Smith College, Northampton, MA 01063, USA.
- Otoo, E. J. & Zhu, H. (1993). "Indexing on spherical surfaces using semi-quadtrees." Advances in Spatial Databases--Second International**692**: 510-529.
- Paillé, P. (2007). "La méthodologie de recherche dans un contexte de recherche professionnalisaante : douze devis méthodologiques exemplaires." Recherches qualitatives**27**(2): 133-151.
- Peter, R. C. (1997). Polyhedra. Cambridge, British, Cambridge University Press.
- Plummer, M. (2008) A String Based Morton Order Spatial Index. spatial.maine.edu

- Popko, E. S. (2012 ). Divided Spheres: Geodesics and the Orderly Subdivision of the Sphere, A K Peters/CRC Press.
- Přidal, M. P. & Žabička, P. (2008). Tiles as an approach to on-line publishing of scanned old maps, vedute and other historical documents. e-Perimetron. **3**: 10-21.
- Raskin, R. G. & Fellow, V. (1994). Spatial Analysis on the Sphere. California, University of California, Santa Barbara.
- Roche, D. S. (2014) Graph Search. <http://www.usna.edu/>
- Rompkey, B. & Cohchrane, M. (2009). the control of the Canadian Arctic waters- Role of the Canadian Coast Guard.
- Sabo, M. N. (2007). Intégration des algorithmes de généralisation et des patrons géométriques pour la création des objets auto-généralisants (sgo) afin d'améliorer la généralisation. Québec, Université Laval.
- Sahr, et al. (2003). "Geodesic discrete global grid systems." Cartography and Geographic Information Science**30**(2): 121-134.
- Sahr, K. & White, D. (1998). Discrete Global Grid Systems, Computing Science and Statistics.
- Sammari, H., et al. (2014). Développement d'une méthode d'automate cellulaire basé sur une tessellation irrégulière et hiérarchique pour la simulation des processus spatiotemporels. Québec, Univerité Laval.
- Sample, J. T. & loup, E. (2010). Tile-Based Geospatial Information Systems, Principles and Practices, Springer Science+Business Media, LLC 2010.
- Schmidt, M. & Weiser, P. (2012). Web Mapping Services: Development and Trends. Online Maps with APIs and WebServices. New York Dordrecht London, Springer Heidelberg: 13-22.
- Schwartz, J. (2013) Bing Maps Tile System. MSDN
- Skopeliti, A. & Tsoulous, L. (2013). Choosing a Suitable Projection for Navigation in the Arctic. Marine Geodesy. **36**: 234-259.
- Snyder (1993). Flattening the Earth, Two thousand years of map projections.
- Snyder, J. P. (1987). Map Projections: A Working Manual. United States Geological Survey Professional Paper 1453. U.S. Government Printing Office. Washington, Washington D.C.
- Snyder, J. P. (1992). "An Equal-Area Map Projection For Polyhedral Globes." Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization**29**(1): 10-21.

- Song, L., et al. (2002). Developing an Equal Area Global Grid by Small Circle Subdivision. Santa Barbara, CA, USA, In M. Goodchild and A. J. Kimerling (Eds).
- Surveillance, H. (2004). Using the Alberta Health and Wellness (AHW) lookup file to aggregate data to different geographic boundaries. Edmonton, Alberta, Alberta Health and Wellness.
- Tai, et al. (2004). Unfolding and flat layout design of non-manifold 3D folded structures. Computer-Aided Design and Applications. **1**: 439-447.
- Tétreault, J. & al, e. (2012). "The Case for a Marine Cadastre to help affirm Canada's sovereignty in the Arctic and enable integrated Marine Spatial Planning."
- Thuburn, J. (1997). "A PV-Based Shallow-Water Model on a Hexagonal-Icosahedral Grid." Monthly Weather Review**125**(9): 2328-2347.
- Tobler & Chen (1986). "A Quadtree for Global Information Storage." Geographical Analysis**18**(4).
- Trinajstić, N., et al. (1994). Bull. Chem Technol. Macedonia. **13**: 61–68.
- Weisstein, E. Gnomonic Projection. WolframMathworld.
- Wen, Y., et al. (2004). "L curve for spherical triangle region quadtrees." Science in China Ser. E Engineering & Materials Science**47**(3): 265-280.
- Wenbin, S. & Xuesheng, Z. "An visualization model of global images based on QTM."
- White (2000). "Global Grids from Recursive Diamond Subdivisions of the Surface of an Octahedron or Icosahedron." Environmental Monitoring and Assessment**64**(1): 93-103.
- White, et al. (1998). "Comparing area and shape distortion on polyhedral based recursive partitions of the sphere." International -Journal of Geographical Information Science**12**(8): 805-827.
- White, et al. (1992). "Cartographic and geometric components of a global sampling design for environment monitoring." Cartography & GeographicalInformation Systems**19**(1): 5-22.
- Wickman, F. E., et al. (1974). "A system of domains for global sampling problems." Geografiska Annaler.Series A, Physical Geography**56**(3/4): 201-212.
- Wijk, J. V. (2008). "Unfolding the Earth: Myriahedral Projections." Cartographic Journal**45**(4): 32–42.
- Williamson, D. L. (1968). "Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid." Tellus**20**(4): 642-653.
- Worboys, M. F. & Duckham, M. (2004). GIS: a computing perspective, CRC press.

Zinn, N. (2010). Web Mercator, Non-Conformal, Non-Mercator.