1. 旋转矩阵计算如下：

$$R_B^A = R(z,90^\circ)R(x,60^\circ)R(z,60^\circ)$$

$$=\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ 0 & \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.

1） 齐次变换矩阵的旋转部分是一个 3×3 的旋转矩阵 R，其列向量是单位向量，并且满足正交性，其中：

$$\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{r_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

根据正交性有：

$$\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} = 0, \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_3} = 0, |\mathbf{r_1}| = 1$$

解得：

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \ or \quad \mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

取坐标系为右手系，则第一列元素为：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

2） 根据旋转运动：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求得旋转角和旋转轴为：

$$\theta = arctg(\frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1}) = arctg(\frac{\sqrt{1+1+1}}{0+0+0-1}) = 120^\circ$$

$$f_x = \frac{o_z - a_y}{2sin\theta} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f_y = \frac{a_x - n_z}{2sin\theta} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f_z=\frac{n_y-o_x}{2sin\theta}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即：

$$\theta=60^\circ,\quad f=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$$

3） 将 $p^A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\end{bmatrix}^T$ 增广为 $p^{A'}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 1\end{bmatrix}^T$ ，则：

$$p^{B'}=T_B^A p^{A'}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$p^B=\begin{bmatrix}6 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

3. R 为正交矩阵，满足：

$$R^T=R^{-1}$$

则有：

$$\det(R\cdot R^T)=\det(R\cdot R^{-1})=\det(I)=1$$

因为 $\det R=\det R^T$ ，有：

$$\det(R\cdot R^T)=\det R\cdot\det R^T=(\det R)^2=1$$

由于坐标系为右手系， $\det R=1$

4.

1） 将第一行数据分别代入“rotx”“roty”“rotz”函数和“eul2rotm”函数有：

$$rotx(30^\circ)=\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0\\ 0 & 0.8660 & -0.5000\\ 0 & 0.5000 & 0.8660\end{bmatrix}$$

$$roty(20^\circ)=\begin{bmatrix}0.9397 & 0 & 0.3420\\ 0 & 1.0000 & 0\\ -0.3420 & 0 & 0.9397\end{bmatrix}$$

$$rotz(10^\circ)=\begin{bmatrix}0.9848 & -0.1736 & 0\\ 0.1736 & 0.9848 & 0\\ 0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{eul2rotm}([\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}],\text{'ZYX'})=\begin{bmatrix}0.9254 & 0.0180 & 0.3785\\ 0.1632 & 0.8826 & -0.4410\\ -0.3420 & 0.4698 & 0.8138\end{bmatrix}$$

经计算有：

$$\begin{bmatrix}0.9848 & -0.1736 & 0\\ 0.1736 & 0.9848 & 0\\ 0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.9397 & 0 & 0.3420\\ 0 & 1.0000 & 0\\ -0.3420 & 0 & 0.9397\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0\\ 0 & 0.8660 & -0.5000\\ 0 & 0.5000 & 0.8660\end{bmatrix}$$

$$=rotz(10^\circ)\cdot roty(20^\circ)\cdot rotx(30^\circ)=\begin{bmatrix}0.9254 & 0.0180 & 0.3785\\ 0.1632 & 0.8826 & -0.4410\\ -0.3420 & 0.4698 & 0.8138\end{bmatrix}=\mathrm{eul2rotm}([\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}],\text{'ZYX'})$$

即，“eul2rotm”函数绕动轴旋转，并有：

$$eul2rotm([\alpha,\beta,\gamma],'ZYX')=rotz(\alpha)\cdot roty(\beta)\cdot rotx(\gamma)$$

2） 旋转矩阵-欧拉角反解程序：程序 Rhw2_4_main.m

$$R=R(z,\ \alpha)\cdot R(y,\ \beta)\cdot R(x,\ \gamma)$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma\end{bmatrix}$$

利用第一列和第三行进行反解计算，得到旋转矩阵-欧拉角反解程序。

代入第一行数据计算，反解程序的反解结果、“rotm2eul”函数的反解结果、原参数均相同；

代入第二行数据计算，反解程序的反解结果与原参数相同，“rotm2eul”函数的反解结果在α、γ角上与原参数不同。

结果不同原因在于当β接近90°时，会出现奇异性，导致自由度的丢失，从而影响“rotm2eul”函数的反解结果。

5. 程序 Rhw2_5_main.m

用示例齐次矩阵测试结果相同，程序运算时间为 0.001481 秒，inv 函数运算时间为 0.019464 秒，自定义程序方法明显快于 inv 函数。