Task 1

1） 1、2 关节为旋转关节，3 关节为平移关节，如图 1-1 建立 MDH 坐标系，相关参数标注在图中。

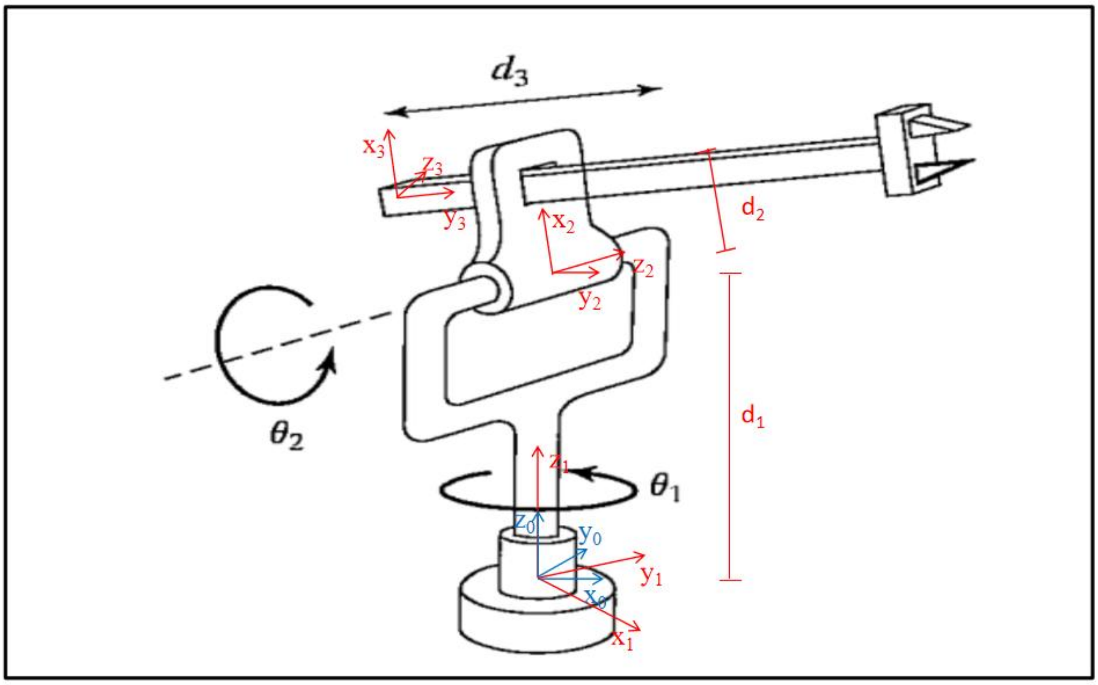

图 1-1 三连杆 RRP 机器人坐标系图

相关参数表格如下：

参数 \ 杆件	1	2	3
θ	θ_1	θ_2	0
d	0	d_1	$-d_3$
α	-90°	0	0
a	0	d_2	0

2） 根据连杆变换通式，

$$^{i-1}T_i = Rot(X_i,\alpha_{i-1})Trans(X_i,\alpha_{i-1})Rot(Z_i,\theta_i)Trans(Z_i,d_i)$$

计算得 DH 矩阵如下：

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{1}T_{2}=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & d_2\cos\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & d_2\sin\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_{3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

机构末端位姿用 DH 矩阵表示为：

$$
{}^{0}T_{3}={}^{0}T_{1}\cdot{}^{1}T_{2}\cdot{}^{2}T_{3}=\begin{bmatrix}c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & c_1d_2c_2+s_1(d_3-d_1)\\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & s_1d_2c_2+c_1(d_1-d_3)\\ -s_2 & -c_2 & 0 & -d_2s_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

3） 相关参数中 θ_1、θ_2、d_3 为变量，d_1、d_2 为定值。

由 DH 矩阵第三列有：

$$
a_x=-\sin\theta_1,\quad a_y=\cos\theta_1
$$

由此解得θ_1是唯一确定的。

分别由 DH 矩阵第一、第二列的第三行有：

$$
n_z=-\sin\theta_2,\quad o_z=-\cos\theta_2
$$

由此解得θ_2是唯一确定的。

将解得的θ_1、θ_2再代入第四列中有：

$$
\cos\theta_1\cos\theta_2 d_2+\sin\theta_1\left(d_3-d_1\right)=p_x
$$
$$
\sin\theta_1\cos\theta_2 d_2+\cos\theta_1\left(d_1-d_3\right)=p_y
$$

可以解得：

$$
d_3=\frac{p_x-cos\theta_1 cos\theta_2 d_2}{\sin\theta_1}+d_1=\frac{sin\theta_1 cos\theta_2 d_2-p_y}{cos\theta_1}+d_1
$$

此时 d_3 也是唯一确定的。

因此，若末端在机构的工作区间内，逆向运动学可以求出唯一的解；若末端不在机构的工作区间内，则无解。

Task 2

1） 所有关节均为旋转关节，如图 2-1 建立 MDH 坐标系。

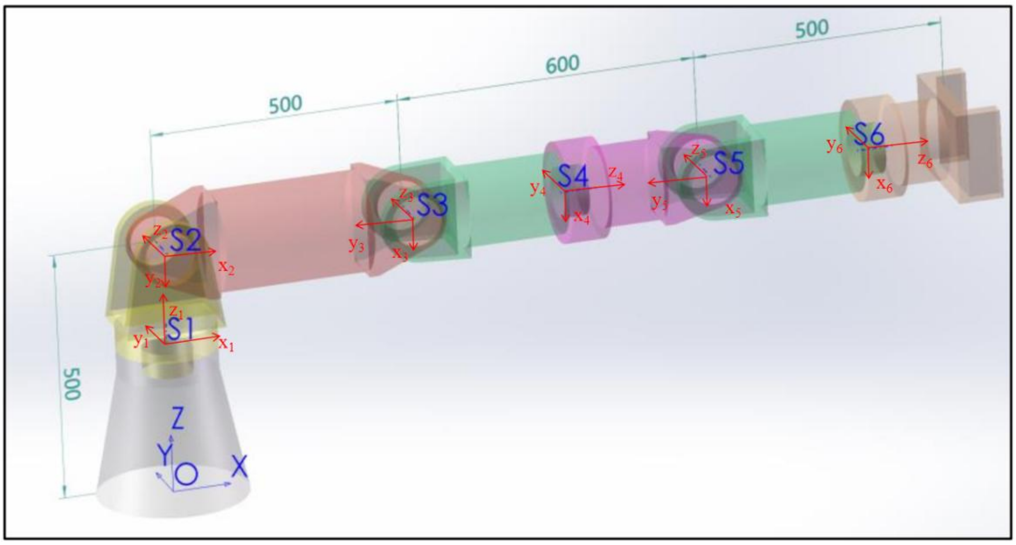

图 2-1 6R 机械臂 MDH 坐标系

参数表格如下：

杆件 / 参数	1	2	3	4	5	6
θ	θ_1	θ_2	θ_3+90°	θ_4	θ_5	θ_6
d	l_0	0	0	l_3	0	l_5
α	-90°	0	90°	-90°	90°	0
a	0	500	0	0	0	0

2） 根据连杆变换通式，

$$^{i-1}T_i = Rot(X_i,\alpha_{i-1})Trans(X_i,\alpha_{i-1})Rot(Z_i,\theta_i)Trans(Z_i,d_i)$$

计算得 DH 矩阵如下：

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$
{}^{2}T_{3}=\begin{bmatrix} -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 500 \\ \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^{3}T_{4}=\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{4}T_{5}=\begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^{5}T_{6}=\begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_5 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

末端位姿为:

$$
{}^{0}T_{6}={}^{0}T_{1}\cdot{}^{1}T_{2}\cdot{}^{2}T_{3}\cdot{}^{3}T_{4}\cdot{}^{4}T_{5}\cdot{}^{5}T_{6}
$$

3) 程序 Rhw3_3_main.m

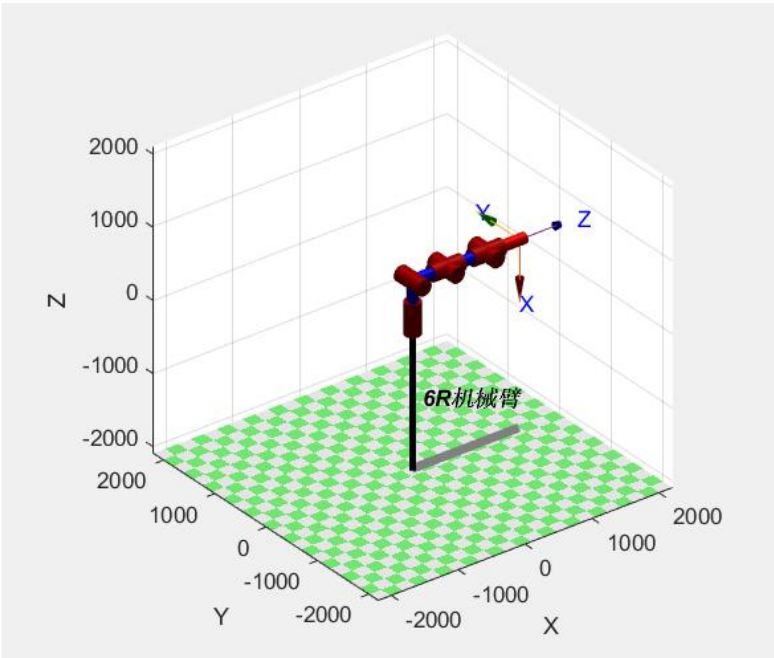

图 2-2 程序建立机构的运动学模型示意图

由图中可以看出关节 S1，S4，S6 的 Z 轴方向始终沿杆长方向，即其关节角度不影响前后两个关节原点之间的距离，在构建时可以取 l_0=500，l_3=600，l_5=500，建立的机构的运动学模型如图 2-2 所示，满足θ_i=0 时的要求。

4) 程序 Rhw3_4_main_m

$$
A_1^{-1}\cdot T^{6}=A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5\cdot A_6
$$

分别取等式左右边矩阵第三行有：

$$-s_1n_y+c_1n_y=s_4c_5c_6+c_4s_6 \tag{2.1}$$

$$-s_1o_x+c_1o_y=-s_4c_5s_6+c_4c_6 \tag{2.2}$$

$$-s_1a_x+c_1a_y=s_4s_5 \tag{2.3}$$

$$-s_1p_x+c_1p_y=500s_4s_5 \tag{2.4}$$

由式(2.3)与式(2.4)可以解出：

$$\theta_1=-arctan\frac{p_y-500a_y}{500a_x-p_y},\quad \pi-arctan\frac{p_y-500a_y}{500a_x-p_y}$$

代入其余式中有：

$$\theta_4=\arctan\left(\frac{\cos\theta_6\cdot K_1-\sin\theta_6\cdot K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}},\cos\theta_6\cdot K_2+\sin\theta_6\cdot K_1\right)$$

$$\theta_5=\arccos\left(\sqrt{K_1^2+K_2^2}\right)$$

$$\theta_6=-\arctan\left(\frac{K_2}{K_1}\right)\pm\arccos\left(\frac{K_3}{\sqrt{1-K_1^2-K_2^2}}\right)$$

其中：

$$K_1=n_y\left(\cos\theta_1-\sin\theta_1\right)$$

$$K_2=-\sin\theta_1\cdot o_x+\cos\theta_1\cdot o_y$$

$$K_3=-\sin\theta_1\cdot a_x+\cos\theta_1\cdot a_y$$

代入其他式中可以解得：

$$\theta_3=\arcsin\frac{s_1a_x-a_1a_y}{\sqrt{c_5^2+s_5^2c_4^2}}+\arctan\frac{c_4s_5}{c_5}$$

$$\theta_2=\arcsin\frac{s_3c_4s_5+c_3c_5}{\sqrt{a_z^2+(c_1a_x+s_1a_y)^2}}+\arctan\frac{c_1a_x+s_1a_y}{a_z}$$

共有 2×2=4 组解。

代入

$$T=\begin{bmatrix} -0.2357 & -0.9120 & -0.3358 & 42.18 \\ 0.8894 & -0.3417 & 0.3037 & -0.7691 \\ -0.3918 & -0.2271 & 0.8916 & 1892.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以解得：

$$\theta_1=-0.628,\quad 2.513$$

$$\theta_2=- \qquad -$$

将这四组解分别代入可以求出其他关节角度。

用不同的初始矩阵代入程序中可以解出以下四组解：

[-0.6283 -0.7855 -0.9424 2.9845 0.3142 -0.4713]
[2.5133 -1.3212 -0.9424 -0.0527 1.1609 -0.5997]
[-0.6283 -0.7855 -0.9424 -0.1571 -0.3142 2.6703]
[2.5133 -1.3212 -0.9424 3.0889 -1.1609 2.5418]

与预期结果相符。