

一、平面 2R 机械臂

1) 该机构末端位姿为:

$$p = [x \quad y \quad \phi]^T$$

其中,

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2$$

将 $l_1 = 2, l_2 = 1$ 代入有:

$$x = 2 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = 2 \sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2$$

对 x 、 y 和 ϕ 分别求全微分有:

$$\dot{x} = \dot{\theta}_1 2 \sin \theta_1 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) = [-2 \sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_1 + [-\sin(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y} = 2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) = [2 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$

该机构的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 2 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

该矩阵为 3×2 矩阵, 矩阵的秩为 2; 当机械臂处于奇异位形, 矩阵的部分行线性相关, 秩降为 1。

2) [程序 Rhw1_2_main.m](#)

计算得到 $q = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}^T$ 时，

机构的末端位姿为：

$$p = [2.2321 \quad 1.8660 \quad 1.0472]^T$$

Jacobian 矩阵为：

$$J = \begin{bmatrix} -1.8660 & -0.8660 \\ 2.2321 & 0.5000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

3) [程序 Rhw1_3_main.m](#)

$$p = [2.2321 \quad 1.8660 \quad 1.0472]^T$$

作为输入进行测试，得到输出：

$$q = [0.5236 \quad 0.5235]^T$$

与预期结果相符合。

4) [程序 Rhw1_4_main.m](#)

关节轨迹与末端轨迹图如下：

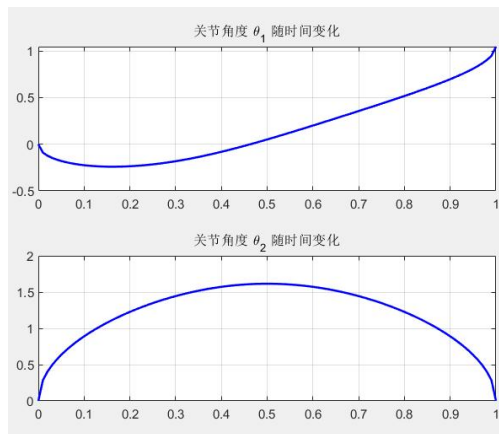


图 1 关节轨迹图

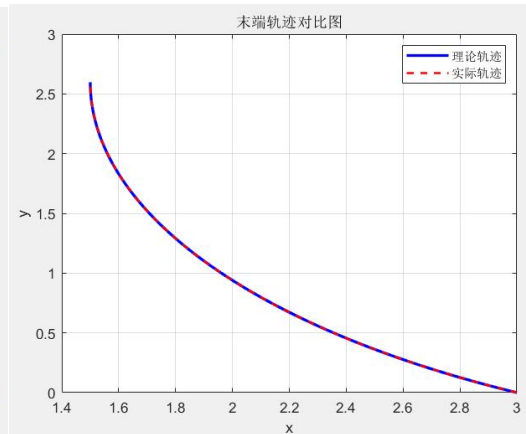


图 2 末端轨迹图