Appunti

VG

December 2022

1 Rottura spontanea di simmetria

Def 1.1 (Rottura spontanea di simmetria (SSB))**.** La SSB si verifica quando l'azione ha una certa simmetria, ma la teoria ha una famiglia di vuoti degeneri che trasformano l'uno nell'altro sotto questa simmetria

Consideriamo l'esempio di un ferromagnete, per cui

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$$

L'azione è invariante sotto rotazioni spaziali.

Sopra T_c lo stato fondamentale è unico con magnetizzazione nulla; sotto T_c la magnetizzazione è $\neq 0$, quindi possiamo rompere la simmetria ruotando attorno l'asse di magnetizzazione.

La rottura spontanea di simmetria è dovuta al fatto che il sistema sceglie un vuoto tra quelli disponibili.

Oss 1.1. Una caratteristica della SSB è l'esistenza di un parametro d'ordine che ha un valore d'aspettazione non nullo sul vuoto.

Per il ferromagnete tale parametro è la magnetizzazione; per il caso di un potenziale a doppia buca

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - \eta^2)^2$$

tale parametro è

$$\frac{<\phi>}{\eta} = \pm 1$$

In ogni caso il parametro d'ordine è una quantità <u>non</u> invariante sotto la simmetria.
Vediamo come questo si traduce nel caso dei gruppi di Lie.

Sia

$$U = \exp(i\theta^a T^a)$$

Se il vuoto è invariante:

$$U|0\rangle = |0\rangle$$

quindi

$$T^a|0\rangle = 0 \quad \forall a$$

Altrimenti

$$\exists a \quad t.c. \quad T^a|0\rangle \neq 0$$

Nel caso di un ferromagnete, se la magnetizzazione è lungo z, allora $J_z|0\rangle = 0$, ma

$$J_x|0\rangle \neq 0 \qquad J_y|0\rangle \neq 0$$

Nel caso di una doppia buca, considerando ϕ complesso ($V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\phi|^2 - \eta^2)^2$), abbiamo un set continuo di minimi

$$\phi = \eta e^{i\alpha}$$

con

$$<|\phi|>= \eta \qquad <\alpha>= \ arbitrario$$

La lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

è invariante sotto $U(1)$, mentre la SSB fissa un minimo, cioè $<\alpha>=\alpha_0$ che possiamo prendere WLOG pari a 0. Quindi

$$<\phi>=\eta$$

Studiamo ora lo spettro della teoria dopo la SSB, cioè sviluppando per piccole oscillazioni. Scriviamo

$$\phi(x)=\eta+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi(x)+i\psi(x)\right)$$

con χ,ψ reali.

Il set di vuoti è allora un cerchio di raggio η, χ è una fluttuazione nella direzione ortogonale alla varietà dei vuoti, mentre ψ è una fluttuazione tangenziale.

Quindi $\eta+i\psi$ è un altro vuoto per ψ infinitesimo, quindi un piccolo spostamento lungo ψ non costa energia. Possiamo perciò associare a ψ un modo massless, analogamente associamo a χ un modo massivo.

Per vederlo algebricamente basta sostituire la nuova parametrizzazione di ϕ nella lagrangiana.

In generale vale il teorema di Goldstone che afferma la seguente proposizione.

Teo 1.1 (Goldstone)**.** *Data una teoria Lorentz invariante, se una simmetria globale continua viene rotta spontaneamente, allora espandendo attorno al vuoto appare una particella massless per ogni generatore che rompe la simmetria ($T^a\left|0\right\rangle\neq 0$). Tale particella è detta Bosone di Goldstone.*

Prop 1.1. *La dimensione della varietà dei vuoti è pari al numero di generatori che rompono la simmetria.*

Introduciamo ora anche un campo di gauge A_μ. Allora la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi-V(\phi)$$

con

$$D_\mu=\partial_\mu+iqA_\mu$$

Se parametrizziamo il campo come

$$\phi(x)=(\eta+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x))e^{i\alpha(x)}$$

possiamo porre $\alpha=0$ tramite trasformazioni di gauge.
Sostituendo infine nella lagrangiana otteniamo un campo di gauge massivo.
L'equazione del moto è poi

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}+m_A^2A^\nu=0$$

detta equazione di Proca. Contraendo poi con ∂_ν ed usando il fatto che $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=0, m_A^2\neq 0$ otteniamo

$$\partial_\mu A^\mu=0$$

cioè

$$(\Box^2+m_A^2)A^\nu=0$$

L'equazione di Proca descrive allore un bosone di gauge massivo.
Possiamo ora decomporre A_μ in $0\oplus 1$. Espandendo A_μ in onde piane

$$\partial_\mu A^\mu=0\longrightarrow k_\mu\epsilon^\mu(k)=0$$

che elimina la componente con vettore di polarizzazione $\epsilon_\mu(k)\sim k_\mu$ poichè per questa avremmo

$$k_\mu\epsilon^\mu\sim k^2=m_A^2\neq 0$$

Nel sistema a riposo (che esiste poichè $m_A^2\neq 0$)

$$k_\mu=m_A^2(1,0,0,0)$$

quindi abbiamo eliminato la parte scalare di A_μ che è allora una particella a spin 1.

Teo 1.2 (Goldstone)**.** *La rottura di una simmetria locale non produce allora bosoni di Goldstone, ma fa sì che i campi di gauge acquistino massa*

In questo caso ϕ è detto *campo di Higgs* ed il meccanismo che produce un bosone di gauge massivo è detto *meccanismo di Higgs.*

Oss 1.2. I gradi di libertà prima e dopo la SSB sono conservati

La SSB è realizzata in natura da fenomeni quali la superconduttività.

2 Gruppi di Lie

Ricordiamo che $U(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$, mentre $SU(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ a determinante 1.

Oss 2.1. Una matrice $U(N)$ si può scrivere come una matrice $SU(N)$ con una fase, cioè

$$U(N) = SU(N) \otimes U(1)$$

Ricordiamo inoltre la notazione esponenziale, per cui una matrice U $N \times N$ si può scrivere come

$$U = e^A \left(\equiv \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n!} A^n \right)$$

Prop 2.1. *U unitaria* $\Rightarrow A^\dagger = -A$, *cioè* A *anti-hermitiana*

Dimostrazione.

$$U^\dagger = e^{A^\dagger}, U^{-1} = e^{-A}$$

U unitaria $\Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

□

Possiamo allora ridefinire

$$U = e^{iH}$$

con H hermitiana ($H^\dagger = H$).
Se poi $U \in SU(N)$ allora

$$\det U = \det e^A = e^{\operatorname{tr} A} = e^{i \operatorname{tr} H} = 1$$

cioè

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} H = 0$$

La dimensione di $SU(N)$ è allora data dalla dimensione dello spazio delle matrici hermitiane a traccia nulla, cioè

$$\dim SU(N) = N^2 - 1$$

Analogamente

$$\dim U(N) = N^2$$

Quindi possiamo scrivere una generica matrice hermitiana a traccia nulla H come

$$H = \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a F_a$$

con $\{F_a\}$ base dello spazio.

Allora

$$U = \exp(i\theta_a F_a) \equiv U(\theta)$$

dove i θ_a sono detti parametri del gruppo e gli F_a sono detti generatori del gruppo.

2.1 Algebra di Lie

Si può vedere che i generatori del gruppo di Lie soddisfano le regole di commutazione

$$[F_a, F_b] = i c_{ab}^c F_c$$

dove gli c_{ab}^c sono parametri reali e vengono chimati costanti di struttura del gruppo.

Idea.

$$U_1 U_2 = U_3 \in SU(N)$$

Svolgendo l'operazione si ottiene il risultato

Con questa struttura si dice che i generatori del gruppo formano un'algebra di Lie (spazio vettoriale, spazio tangente)

Prop 2.2. *Per definizione*

$$c_{ab}^{c} = -c_{ba}^{c}$$

Tramite un'opportuna scelta dei generatori possiamo rendere le costanti di struttura completamente antisimmetriche in tutti e 3 gli indici.

Teo 2.1. *Se i generatori sono hermitiani allora esiste una base per l'algebra di Lie*

$$\tilde{F}_a = L_{ab} F_b$$

con L_{ab} matrice $(N^2-1)\times(N^2-1)$ reale ed invertibile, tale che

$$[\tilde{F}_a, \tilde{F}_b] = i\tilde{c}_{ab}^{c} \tilde{F}_c$$

con $\tilde{c}_{ab}^{c}$ antisimmetrici in $\{a, b, c\}$.

Inoltre vale che

$$\mathrm{tr}\Big[\tilde{F}_a \tilde{F}_b\Big] = \lambda \delta_{ab}, \qquad \lambda > 0$$

Dimostrazione. Definiamo

$$g_{ab} \equiv \mathrm{tr}[F_a F_b]$$

che è una matrice reale, simmetrica e definita positiva, cioè una forma quadratica.

Possiamo allora diagonalizzarla con matrici ortogonali

$$F_a' = O_{ab} F_b$$

Allora

$$g_{ab}' = \mathrm{tr}[F_a' F_b'] = (OgO^t)_{ab} = \lambda_a \delta_{ab}. \qquad \lambda_a > 0$$

Posso poi riscalare ponendo

$$\tilde{F}_a = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} F_a'$$

ed ottengo

$$\tilde{g} = \lambda \mathbb{1}, \qquad \lambda > 0$$

Con questa scelta le costanti di struttura risultano completamente antisimmetriche

$$[\tilde{F}_a, \tilde{F}_b] = i\tilde{c}_{ab}^{c} \tilde{F}_c$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_{ab}^{c} = \frac{1}{i\lambda} \mathrm{tr}\Big([\tilde{F}_a, \tilde{F}_b]\tilde{F}_c\Big)$$

usando $\tilde{g}_{ab} = \lambda \delta_{ab}$. Da cui la tesi usando la ciclicità della traccia.

□

Di seguito useremo la notazione per cui

$$\tilde{c}_{ab}^{c} = f_{abc} \qquad \tilde{F}_a = F_a$$

e fisseremo $\lambda = \frac{1}{2}$ per cui

$$\mathrm{tr}(F_a F_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

Oss 2.2 (Rango)**.** [...]

Def 2.1 (Operatore di Casimir)**.** Si dice operatore di Casimir un polinomio di generatori C t.c. commuta con tutti i generatori dell'algebra, cioè

$$[C, F_a] = 0, \qquad \forall a$$

Ex 2.1. Per $SU(N)$

$$F^{(2)} = \sum_{a=1}^{N^2-1} F_a^2$$

è il Casimir quadratico.

Def 2.2 (Rango)**.** Si dice rango dell'algebra di Lie il numero massimo di generatori che commutano tra loro, cioè sono simultaneamente diagonalizzabili.

Il rango è inoltre la dimensione della sotto algebra di Cartan.

Teo 2.2 (Racah)**.** *Il rango di $SU(N)$ è $N-1$ ed è uguale al numero di operatori di Casimir funzionalmente indipendenti.*

2.2 Rappresentazioni di $SU(N)$

Def 2.3. Dato un gruppo G con elementi g, si dice rappresentazione del gruppo un omomorfismo tra gli elementi del gruppo e lo spazio delle applicazioni lineari $GL(\mathbb{C}^n)$ che preserva l'operazione di gruppo.

Quindi R è una rappresentazione se

$$g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow R(g_1)R(g_2) = R(g_3)$$

In questo caso $\mathbb{C}^n$ è lo spazio base della rappresentazione ed n è la dimensione.

Analogamente la rappresentazione di un'algebra di Lie è un omomorfismo tra i generatori e gli elementi di $GL(\mathbb{C}^n)$ che preserva la struttura dell'algebra, cioè

$$[F_a, F_b] = if_{abc}F_c \Rightarrow [F_a^{(r)}, F_b^{(r)}] = if_{abc}F_c^{(r)}$$

dove $F_a^{(r)}$ è il generatore nella rappresentazione r.

Oss 2.3. Se la dimensione della rappresentazione è $d(r)$ allora le matrici sono $d(r) \times d(r)$

Indicheremo con f la rappresentazione fondamentale.

Un esempio di rappresentazione che useremo in seguito è la rappresentazione aggiunta che ha dimensione $d(r) = N^2 - 1$ e

$$(F_a^{(agg)})_{bc} = -if_{abc}$$

Prop 2.3 (Identità di Jacobi)**.**

$$Cycl_{abc}([F_a, [F_b, F_c]]) = 0$$

Dalla identità di Jacobi per i generatori se ne ricava una per le costanti di struttura del gruppo

$$Cycl_{abc}(f_{aed}f_{bce}) = 0$$

che possiamo riscrivere in termini della rappresentazione aggiunta, cioè come

$$[F_a^{(agg)}, F_b^{(agg)}] = if_{abc}F_c^{(agg)}$$

che dimostra che l'aggiunta è effettivamente una rappresentazione.

Oss 2.4. La rappresentazione aggiunta è ancora hermitiana

Def 2.4. Una rappresentazione si dice riducibile se $\exists V' \subseteq V = \mathbb{C}^n$ sottospazio vettoriale t.c.

$$R(g)V' \subseteq V' \qquad \forall g \in G$$

In termini di matrici questo implica che possiamo ridurre $R(g)$ a blocchi.

Ex 2.2. Sia $n' = \dim V'$, allora prendendo come base autovettori di V' (più altro)

$$R(g) = \begin{bmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

dove R_1 è una matrice $n' \times n'$. Se accade che anche $S = 0$ allora R si dice completamente riducibile. In questo caso scriveremo

$$R = R_1 \oplus R_2$$

Se invece $\nexists V'$ invariante allora R si dice irriducibile.

Lemma 2.1 (Lemma di Schur)**.** *Sia R una rappresentazione irriducibile di un gruppo G e sia T un operatore lineare t.c.*

$$[T, R(g)] = \qquad \forall g \in G$$

allora

$$T = \lambda \mathbb{1} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

In particolare possiamo prendere come T i Casimir.

Teo 2.3. *La rappresentazione aggiunta di $SU(N)$ è irriducibile.*

Teo 2.4. *Presa r rappresentazione di $SU(N)$ con generatori $F_a^{(r)}$, si ha che*

$$g_{ab}^{(r)} = \mathrm{tr}\left[F_a^{(r)} F_b^{(r)}\right] = T_R^{(r)} \delta_{ab}$$

con $T_R^{(r)}$ detto indice di Dynkin della rappresentazione r.

Dimostrazione. Fissiamo una certa rappresentazione r ed omettiamo per semplicità l'apice che specifica la rappresentazione utilizzata. Definiamo

$$h_{abc} = \mathrm{tr}\left([F_a, F_b] F_c\right)$$

Allora

$$h_{abc} = i f_{abn} \, \mathrm{tr}[F_n F_c] = i f_{abn} g_{nc} = -h_{acb}$$

Quindi

$$i f_{abn} g_{nc} = -i f_{acn} g_{nb}$$

ma g è simmetrico, quindi

$$g_{cn}(-i f_{anb}) = -i f_{acn} g_{nb}$$

$$\Rightarrow g F_a^{(agg)} = F_a^{(agg)} g$$

cioè g commuta conn tutti i generatori dell'aggiunta, allora per il lemma di Schur g è un multiplo dell'identità.

□

Prop 2.4. *Se r è irriducibile allora*

$$T_R^{(r)} = \frac{1}{N^2 - 1} d(r) C_F^{(r)}$$

con $F_{(r)}^{(2)} = C_F^{(r)} \mathbb{1}_{d(r) \times d(r)}$

Dimostrazione. Vedi esercizi.

□

Ex 2.3. Per la rappresentazione fondamentale $T_R = \frac{1}{2}, d(f) = N$ quindi $C_F = \frac{N^2-1}{N}$.

Nel caso della rappresentazione aggiunta $d(agg) = N^2 - 1$, quindi $T_R = C_F (= N)$ (vedi esercizi).

Prop 2.5 (Relazione di completezza per i generatori nella rappresentazione fondamentale)**.**

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (F_a)_{ij} (F_a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

Dimostrazione. Vedi esercizi

□

2.3 Rappresentazioni di $SU(2)$

Vediamo ora il caso specifico delle rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$.

Siano T_a i generatori, allora

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c$$

Riscriviamo l'algebra in termini di operatori di salita e discesa

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2$$

In questo modo

$$\begin{aligned}[T_3, T_\pm] &= \pm T_\pm \\ [T_+, T_-] &= 2T_3\end{aligned}$$

Prendiamo poi come set completo di operatori commutanti $T^{(2)}, T_3$ con

$$T^{(2)} = \sum_a T_a^2 = \frac{1}{2}\{T_1, T_2\} + T_3^2$$

Gli autostati simultanei verrano indicati con

$$|t, t_3\rangle$$

e

$$\begin{aligned}T^{(2)}|t, t_3\rangle &= t(t+1)|t, t_3\rangle \\ T_3|t, t_3\rangle &= t_3|t, t_3\rangle \\ T_\pm|t, t_3\rangle &= \sqrt{t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1)}\,|t, t_3 \pm 1\rangle\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}t &\in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\} \\ t_3 &\in \{-t, -t+1, \dots, t-1, t\}\end{aligned}$$

I $2t + 1$ stati $|t, t_3\rangle$ per un dato t costituiscono la base dello spazio vettoriale su cui agisce la rappresentazione irriducibile di dimensione $2t + 1$.

Tale rappresentazione è detta di spin t e può essere rappresentata mediante diagramma di tipo peso

[Inserire diagrammi]

2.4 Rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$

Riscriviamo come nel caso di $SU(2)$ l'algebra in termini di operatori di salita e discesa.

Osserviamo che $SU(3)$ ha rango 2, quindi ha 2 Casimir indipendenti, quello quadratico e quello cubico

$$F^{(2)} = \sum_{a=1}^{N^2-1} F_a^2, \quad G^{(3)} = \frac{2}{3}d_{abc}F_aF_bF_c$$

con d_{abc} tensore completamente simmetrico di $SU(3)$.

Osserviamo poi che l'anticommutatore di due generatori nella fondamentale è ancora una matrice hermitiana $n \times n$, per cui, fissata la rappresentazione f

$$\{F_a, F_b\} = k_{ab}\mathbb{1}^{1} + d_{abc}F_c$$

Tracciando l'anticommutatore si trova che

$$k_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{N}.$$

Proiettando, invece, si trova che

$$d_{abc} = 2\,\mathrm{tr}[\{F_a, F_b\}F_c]$$

[1]Perchè non è a traccia nulla

Oss 2.5. d_{abc} per $SU(2)$ è zero, infatti non abbiamo un Casimir cubico per $SU(2)$.

Un insieme completo di operatori commutanti è

$$F^{(2)}, G^{(3)}, T^{(2)}, Y, T_3$$

dove

$$T_3 = F_3, Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

Riscriviamo ora l'algebra.

Siano

$$T_\pm = F_1 \pm iF_2, \quad U_\pm = F_4 \pm iF_5, \quad V_\pm = F_6 \pm iF_7$$

da cui

$$\begin{array}{lll}
[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm & [Y, T_\pm] = 0 & [T_+, T_-] = 2T_3 \\
[T_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2} U_\pm & [Y, U_\pm] = U_\pm & [U_+, U_-] = \frac{3}{2} Y - T_3 = 2U_3 \\
[T_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2} V_\pm & [Y, V_\pm] = \pm V_\pm & [V_+, V_-] = \frac{3}{2} Y + T_3 = 2V_3
\end{array}$$

Ogni riga definisce rispettivamente il sottogruppo chiuso di T-spin, U-spin e V-spin.

[Metodo grafico]

2.5 Rappresentazione complessa coniugata

Consideriamo una rappresentazione r

Prop 2.6.

$$U_1^{(r)} U_2^{(r)} = U_3^{(r)} \Rightarrow U_1^{(r)^*} U_2^{(r)^*} = U_3^{(r)^*}$$

Possiamo allora definire una rappresentazione r^*. In termini di generatori, se

$$U^{(r)} = \exp\Big(i\epsilon_a F_a^{(r)}\Big) \qquad \epsilon_a \in \mathbb{R}$$

allora

$$U^{(r)^*} = \exp\Big(-i\epsilon_a F_a^{(r)*}\Big) = \exp\Big(i\epsilon_a F_a^{(r^*)}\Big)$$

quindi

$$F_a^{(r^*)} = -F_a^{(r)*}$$

Prop 2.7.

$$[F_a^{(r)}, F_b^{(r)}] = if_{abc} F_c^{(r)} \Rightarrow [F_a^{(r*)}, F_b^{(r*)}] = if_{abc} F_c^{(r*)}$$

Le due rappresentazioni sono distinte? r, r^* non sono distinte se sono legate da una relazione di equivalenza:

Def 2.5. r^* è equivalente ad r se esiste S matrice $d(r) \times d(r)$ [2] invertibile t.c.

$$U^{(r^*)}(\epsilon) = S U^{(r)}(\epsilon) S^{-1} \qquad \forall \epsilon$$

ovvero

$$F_a^{(r^*)}(\epsilon) = S F_a^{(r)}(\epsilon) S^{-1} \qquad \forall a$$

In tal caso r si dice reale.

Prop 2.8. *Tutte le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono reali.*

Ad esempio la rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ è $F_a = \frac{\sigma_a}{2}$, allora

$$F_a^{(f^*)} = -F_a^* = -\frac{\sigma_a}{2} = \sigma_2 F_a \sigma_2 \qquad S = \sigma_2 = \sigma_2^{-1}$$

Prop 2.9. *La rappresentazione aggiunta di $SU(N)$ è sempre reale*

[2] $d(r) = d(r^*)$

Dimostrazione.

$$(F_a^{(agg)})_{bc} = -if_{abc}, \qquad f_{abc} \in \mathbb{R}$$

$$(F_a^{(agg^*)})_{bc} = -(F_a^{(agg)})^*_{bc} = -(-if_{abc}) = -if_{abc} = (F_a^{(agg)})_{bc} \qquad \forall a, b, c$$

□

Teo 2.5. *Se una data rappresentazione r di $SU(N)$ è reale, allora tutti i suoi generatori devono avere autovalori in coppie di segno opposto, cioè se λ è autovalore anche $-\lambda$ deve esserlo.*

Dimostrazione. $SU(N)$ è compatto quindi ogni sua rappresentazione è equivalente ad una rappresentazione unitaria, cioè una rappresentazione in cui i generatori sono hermitiani.

WLOG consideriamo allora F_a hermitiani: $F_a^{(r)^\dagger} = F_a^{(r)}$

Poichè r reale per ipotesi $\exists S$ invertibile t.c.

$$F_a^{(r^*)} = SF_a^{(r)}S^{-1} = -F_a^{(r)*}$$

Detto $|\lambda\rangle$ autovettore di $F_a^{(r)}$ con autovalore λ si ha che $\lambda \in \mathbb{R}$ per hermitianità, inoltre

$$F_a^{(r)^*} S|\lambda\rangle = -(SF_a^{(r)}S^{-1})S|\lambda\rangle = -SF_a^{(r)}|\lambda\rangle = -\lambda S|\lambda\rangle$$

Prendendone il complesso coniugato

$$F_a^{(r)}(S|\lambda\rangle)^* = -\lambda(S|\lambda\rangle)^*$$

che ci dice che anche $-\lambda$ è autovalore di $F_a^{(r)}$.

□

Oss 2.6.

$$|\lambda\rangle \neq 0 \Rightarrow S|\lambda\rangle \neq 0$$

Poichè S è invertibile.

Cor 2.1. *La rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ non è reale, cioè 3 e 3^* non sono equivalenti.*

Dimostrazione.

$$F_8 = \frac{\lambda_8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

che non ha autovalori in coppie di segno opposto.

□

In generale per $SU(3)$ si ha che $(p, q)^* = (q, p)$.

2.6 Metodo tensoriale

Vediamo ora il metodo tensoriale per la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$. Siano U le matrici nella rappresentazione fondamentale.

Def 2.6 (Vettori controvarianti e covarianti)**.** Un vettore q si dice controvariante di $SU(N)$ se sotto una trasformazione del gruppo

$$q^i \to U^i_j q^j$$

Se poi prendiamo il complesso coniugato $\bar{q}_i \equiv (q^i)^*$, allora

$$\bar{q}_i \to \bar{q}'_i = (U_{ij})^* \bar{q}_j = (U^\dagger)^j_i \bar{q}_j$$

In questo caso $\bar{q}$ si dice vettore covariante di $SU(N)$.

Possiamo estendere tale definizione e definire un tensore di rango (p, q) di $SU(N)$ $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ con

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \to T'^{\,i_1 \dots i_p}_{\,j_1 \dots j_q} = U^{i_1}_{\alpha_1} \dots U^{i_p}_{\alpha_p} (U^\dagger)^{\beta_1}_{j_1} \dots (U^\dagger)^{\beta_q}_{j_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$$

Quindi un vettore controvariante trasforma secondo la rappresentazione fondamentale N di $SU(N)$, un vettore covariante trasforma secondo N^* ed un tensore (p, q) trasforma come

$$\underbrace{N \otimes \dots \otimes N}_{p} \otimes \underbrace{N^* \otimes \dots \otimes N^*}_{q} = N^p \otimes (N^*)^q$$

2.7 Tensori di $SU(3)$

Un tensore T di rango (p, q) di $SU(3)$ si dice riducibile se mediante una contrazione con un tensore invariante $(\delta_{ij}, \epsilon_{ijk})$ del tipo

$$\begin{aligned} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \, \delta^{j_b}_{i_a} &\to (p-1, q-1) \\ T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \, \epsilon^{i_{p+1} j_b j_{b'}} &\to (p+1, q-2) \\ T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \, \epsilon_{j_{q+1} i_b i_{b'}} &\to (p-2, q+1) \end{aligned}$$

si ottiene un tensore T' non nullo con rango più basso $(p' + q' < p + q)$.

Se ciò non è possibile il tensore T è irriducibile.

Prop 2.10. *Il numero di componenti indipendenti di un tensore irriducibile di rango (p, q) è*

$$d(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

Teo 2.6. *Dato un generico tensore T di rango (p, q) e dette $\phi_1, \ldots, \phi_d$ le sue componenti linearmente indipendenti, sotto $SU(3)$ esse trasformeranno come*

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_d \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix}$$

con V matrice $d \times d$ che costituirà una rappresentazione d-dimensionale di $SU(3)$.

Prop 2.11. *T irriducibile $\Rightarrow$ V irriducibile.*

T riducibile $\Rightarrow$ V riducibile.

Prop 2.12. *I tensori $\delta^j_i, \epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk}$ sono tensori riducibili, ma essendo invarianti ad 1 componente rappresentano tutti la rappresentazione irriducibile $1 = (0, 0)$.*

Prop 2.13. *La decomposizione di un tensore riducibile come somma diretta di tensori irriducibili è una proprietà invariante sotto trasformazioni del gruppo.*

Ex 2.4. Vediamo a titolo d'esempio la decomposizione di un generico tensore T^{ij} in parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \\ &= S^{ij} \qquad\qquad\quad + A^{ij} \end{aligned}$$

con

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$$

tensore irriducibile $(2, 0)$, 6 componenti.

$$A^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$$

tensore asimmetrico con 3 componenti equivalente a

$$\bar{q}_k = \epsilon_{ijk} T^{ij} = \epsilon_{ijk}(S^{ij} + A^{ij}) = \epsilon_{ijk} A^{ij}$$

Infatti

$$\epsilon^{ijk} \bar{q}_k = \epsilon^{ijk} \epsilon_{\alpha\beta k} T^{\alpha\beta} = (\delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha) T^{\alpha\beta} = T^{ij} - T^{ji} = 2A^{ij}$$

da cui

$$A^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{q}_k$$

Possiamo allora riscrivere

$$T^{ij} = S^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{q}_k$$

che equivale alla decomposizione

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

Oss 2.7.

$$S'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta S^{\alpha\beta} \Rightarrow S'^{\,ij} = S'^{\,ji}$$

$$A'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta A^{\alpha\beta} \Rightarrow A'^{\,ij} = -A'^{\,ji}$$

quindi

$$T'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta T^{\alpha\beta} = S'^{\,ij} + A'^{\,ij}$$

cioè viene ancora decomposto come T^{ij} come asserito in una proposizione precedente.

Prop 2.14. *Un tensore irriducibile* $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ *sarà*

- *completamente simmetrico negli indici* $\{i_1,\dots,i_p\}$
- *completamente simmetrico negli indici* $\{j_1,\dots,j_q\}$
- *a traccia nulla*

Ex 2.5. Un altro esempio di decomposizione utile di rappresentazione è quello che riguarda il tensore il tensore T^i_j

$$\begin{aligned} T^i_j &= (T^i_j - \frac{1}{3}T^k_k\delta^i_j) + \frac{1}{3}T^k_k\delta^i_j \\ &= \tilde{T}^i_j \qquad\qquad\quad + T^k_k\delta^i_j \end{aligned}$$

che corrisponde alla decomposizione

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

Oss 2.8. Il tensore irriducibile (q,p) trasforma come il complesso coniugato del tensore irriducibile (p,q).

3 QCD

3.1 Modello a quark di Gell-mann & Zweig

Si osserva che i mesoni più leggeri, con $J^p = 0^-, J^p = 1^-$, occupano entrambi ottetti e singoletti di $SU(3)$, mentre i barioni più leggeri, con $J^p = \frac{1}{2}^+, J^p = \frac{3}{2}^+$, occupano ottetti e decupletti di $SU(3)$. Tenendo inoltre presente che

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$
$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

G. & Z. proposero l'idea che mesoni e barioni fossero stati legati di costituenti fondamentali detti quarks e delle loro antiparticelle dette antiquarks, che occupano rispettivamente la rappresentazione 3 e 3^* di $SU(3)$.

In questo schema i mesoni risultano stati legati quark-antiquark con numero barionico $B = 0$; se si assume poi che i quark abbiano spin $\frac{1}{2}$ i mesoni risulteranno avere spin intero, in particolare, negli stati di momento angolare orbitale più basso ($L = 0$) si avrà $J = 0$ o $J = 1$.

I barioni, invece, risultano stati legati di 3 quarks (gli antibarioni di 3 antiquarks) con numero barionico $B = 1\,(B = -1)$, per cui assegniamo $B = \frac{1}{3}$ ai quarks e $B = -\frac{1}{3}$ agli antiquarks. Lo spin $\frac{1}{2}$ dei quarks implica poi spin semi-intero per i barioni: $J = \frac{1}{2}, J = \frac{2}{3}$ per gli stati con $L = 0$.

Ci sono poi 6 flavour

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

La prima riga ha carica elettrica $\frac{2}{3}$, la seconda $-\frac{1}{3}$.

3.1.1 Paradossi modello a quark

1. Perchè non si osservano quark isolati nè stati legati adronici come $qq, \dots$?
2. Ci sono problemi nel costruire le funzioni d'onda barioniche: lo stato Δ^{++}, ad esempio, è costituito da 3 quarks di tipo u in onda s, quindi con i 3 spin allineati

$$\left|\Delta^{++}, J = \frac{3}{2}\right\rangle = \left|u_{(1)}\uparrow, u_{(2)}\uparrow, u_{(3)}\uparrow\right\rangle_{l=0}$$

   Ma i 3 u sono fermioni identici, per cui avremmo una violazione della Fermi-Dirac.

Per risolvere 2. è stato proposto l'esistenza di un grado di libertà nascosto detto di colore a cui associamo il gruppo $SU(3)$

[Inserire schema flavour-colour]

Quindi

$$\left|\Delta^{++}, J = \frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_{ijk}\left|u^i_{(1)} \uparrow, u^j_{(2)} \uparrow, u^k_{(3)} \uparrow\right\rangle_{l=0}$$

con $i = 1, 2, 3$ indice di colore.

Tale stato risulta essere un singoletto di colore

$$u^i \to u'\,^i = U^i_j u^j, \qquad U^i_j \in SU(3)_{\text{colour}}$$

Inoltre per una data configurazione di flavour non si osservano partner mesonici con diversi numeri quantici di colore, quindi anche la funzione d'onda mesonica costituisce un singoletto di colore.

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|q^i \bar{q}_i\right\rangle$$

Invece stati del tipo $qq, \bar{q}\bar{q}, \dots$ non possono essere resi singoletti di colore in quanto nella decomposizione delle rappresentazioni non compare la 1

$$\begin{aligned} qq &: 3_c \otimes 3_c = \bar{3}^*_c \oplus 6_c \\ \bar{q}\bar{q} &: \bar{3}^*_c \otimes \bar{3}^*_c = 3_c \oplus \bar{6}^*_c \end{aligned}$$

Per risolvere 1. si guarda agli esperimenti da cui segue il postulato del confinamento: *tutti gli stati adronici e le corrispondenti osservabili fisiche sono singoletti di colore.*

3.1.2 Jet adronici

[Vedi note]

3.2 Derivata covariante

Vogliamo rendere $SU(3)_{\text{colore}}$ il gruppo di gauge con cui costruire la derivata covariante.

4 QED

La lagrangiana della QED risulta essere

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi}_{\mathcal{L}_F} \underbrace{- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_G}$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Possiamo poi espandere $\mathcal{L}_F$ come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \mathcal{L}_0 \qquad\qquad + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + (-q\bar{\psi}\not{A}\psi) \end{aligned}$$

Per trasformazioni di gauge $U(1)$ globali

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\frac{q}{e}\theta}\psi \qquad \theta \text{ c.te} \\ A_\mu &\to A_\mu \end{aligned}$$

sono invarianti $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_F, \mathcal{L}_G$, mentre per trasformazioni di gauge $U(1)$ locali

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

sono invarianti $\mathcal{L}_F, \mathcal{L}_G$.

In questo caso D_μ trasforma come ψ, infatti è detta derivata covariante

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) &= \left(\partial_\mu + iqA'_\mu(x)\right) e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\psi(x) \\ &= e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{q}{e}\partial_\mu\theta + iqA_\mu - i\frac{q}{e}\partial_\mu\theta\right)\psi(x) \\ &= e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

Oss 4.1 ($F_{\mu\nu}$ come commutatore delle derivate covarianti)**.**

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu]\psi = iq([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu])\psi \\ &= \end{aligned}$$