Appunti

VG

December 2022

Indice

1 Funzionale generatore

Partiamo dal caso semplice di una teoria di campo scalare neutro auto-interagente e definiamo le quantità che ci saranno utili in generale.

Consideriamo allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) = \mathcal{L}_0 - V(\phi)$$

Si ha che la funzione di correlazione ad n punti è

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \left\langle \Omega \middle| T\{\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)\} \middle| \Omega \right\rangle = \frac{\int D\phi\, e^{i\int d^4x\mathcal{L}(x)}\phi(x_1)\dots\phi(x_n)}{\int D\phi\, e^{i\int d^4x\mathcal{L}(x)}}$$

Def 1.1 (Funzionale generatore)**.** E' conveniente definire il funzionale generatore

$$Z[J] = \int D\phi\, e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}(x)+J(x)\phi(x))}$$

da cui risulta che

$$G_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{(-i)^n}{Z[0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\, Z[J]\bigg|_{J=0}$$

Possiamo poi sviluppare il funzionale generatore in potenze dell'interazione $V(\phi)$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\phi\, e^{-i\int d^4x\, V(\phi)} e^{i\int d^4x\, (\mathcal{L}_0(x)+J(x)\phi(x))} \\ &= e^{-i\int d^4x\, V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\int d^4x\, V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right)^n Z_0[J] \end{aligned}$$

dove si è usato che

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \phi(x)Z[J]$$

$Z_0[J]$ è poi il funzionale generatore della teoria libera, che essendo un integrale di tipo gaussiano può essere facilmente calcolato. Possiamo infatti integrare per parti l'esponente ed ottenere

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int D\phi\, \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, \phi(x)(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) + i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right) \\ &= \int D\phi\, \exp\left(-\frac{i}{2} d^4x d^4y\, \phi(x)K(x,y)\phi(y) + i\int d^4x J(x)\phi(x)\right) \end{aligned}$$

con $K(x,y) \equiv \delta^4(x-y)(\Box_x + m^2)$. Usando ora i risultati per gli integrali gaussiani otteniamo che

$$Z_0[J] = \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{A}{2\pi}\right)}} e^{\frac{i}{2}J^t K^{-1} J}$$

Ex 1.1. Calcoliamo il propagatore per la teoria di un campo scalare neutro libero

$$G_2(x,y) \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \frac{(-i)^2}{Z_0[J]}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\, Z[J]\bigg|_{J=0}$$

Calcoliamo ora la derivata in notazione discreta $J(x) \to J_i$

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{\frac{i}{2}J_m (K^{-1})_{mn} J_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z_0[J]}{\partial J_i} = \frac{1}{2}\left((iK^{-1})_{in}J_n + J_m(iK^{-1})_{mi}\right) Z_0[J] = (iK^{-1})_{in}J_n Z_0[J]$$

dove abbiamo usato il fatto che se K è simmetrica allora anche K^{-1} lo è. Quindi

$$G_2(x,y) = -iK^{-1}(x,y)$$

con K^{-1} definito nel modo seguente

$$(\Box_x + m^2)K^{-1}(x,y) = \delta^4(x-y)$$

La seguente equazione si può risolvere passando in trasformata di Fourier ed usando la prescrizione $i\epsilon$. Otteniamo così che

$$\tilde{K}^{-1}(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}$$

2 Path integral per campi fermionici

2.1 Algebra di Grassmann

Delle variabili $\eta_1,\ldots,\eta_N$ generano un'algebra di Grassmann se

$$\{\eta_i,\eta_j\} = 0 \quad \forall i,j$$

In particolare si osserva che $\eta_i^2 = 0$.

2.1.1 Regole di integrazione per variabili di Grassmann

Prop 2.1.

$$\int d\eta_i = 0 \qquad \int d\eta_i \, \eta_i = 1$$

con

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = 0 \qquad \forall i, j$$

Il più generale elemento $f(\eta)$ di un'algebra di Grassmann è del tipo

$$f(\eta) = f_0 + \eta_i f_i + \eta_i \eta_j f_{ij} + \cdots + \eta_N \ldots \eta_1 f_{1 \ldots N}$$

Allora

$$\int \prod_i d\eta_i \, f(\eta) = f_{1 \ldots N}$$

Prop 2.2. *L'integrazione così definita gode dell'invarianza per traslazioni*

$$\int \prod_i d\eta_i \, f(\eta + a) = \int \prod_i d\eta_i' \, f(\eta') = f_{1 \ldots N}$$

Ex 2.1 (Integrale gaussiano fermionico)**.** Consideriamo un set di variabili di Grassmann del tipo

$$\{\eta_1, \ldots, \eta_N, \eta_{N+1}, \ldots, \eta_{2N}\} = \{\psi_1, \ldots, \psi_N, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_N\}$$

E vogliamo calcolare

$$I(A) \equiv \int [d\bar{\psi} d\psi] \, e^{-\bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j}$$

dove

$$[d\bar{\psi} d\psi] = \prod_i d\bar{\psi}_i d\psi_i$$

e A invertibile. Si trova allora che

$$I(A) = \det A$$

Ex 2.2 (Funzionale generatore fermionico)**.** Consideriamo il seguente funzionale generatore

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \int [d\bar{\psi} d\psi] \, e^{-\bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j + \bar{\psi}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \psi_i}$$

dove le sorgenti $\rho, \bar{\rho}$ sono anch'esse variabili di Grassmann anticommutanti con le $\psi, \bar{\psi}$.

Svolgendo l'integrale si trova che

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det A e^{\bar{\rho}_i (A^{-1})_{ij} \rho_j}$$

2.1.2 Regole di derivazione per le variabili di Grassmann

1. Se $f(\eta)$ non dipende da η_i allora
$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta) = f(\eta) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_i} = 0$$

2. Se η_i compare una sola volta in un certo prodotto di termini, allora
$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} (\eta_i R) = R$$
$$(L \eta_i) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_i} = L$$

Utilizzando le nozioni di derivata destra e sinistra appena introdotte possiamo definire le funzioni di correlazioni fermioniche

$$\left\langle \psi_{i_1} \ldots \psi_{i_l} \bar{\psi}_{j_1} \ldots \bar{\psi}_{j_l} \right\rangle = \frac{1}{Z[0,0]} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_l}} Z[\rho, \bar{\rho}] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{j_1}} \cdots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{j_l}} \right]_{\rho = \bar{\rho} = 0}$$

Oss 2.1. Le funzioni di correlazione del tipo $\left\langle \psi_{i_1} \ldots \psi_{i_l} \bar{\psi}_{j_1} \ldots \bar{\psi}_{j_q} \right\rangle$ con $l \neq q$ si annullano

3 Rottura spontanea di simmetria

Def 3.1 (Rottura spontanea di simmetria (SSB))**.** La SSB si verifica quando l'azione ha una certa simmetria, ma la teoria ha una famiglia di vuoti degeneri che trasformano l'uno nell'altro sotto questa simmetria

Consideriamo l'esempio di un ferromagnete, per cui

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$$

L'azione è invariante sotto rotazioni spaziali.

Sopra T_c lo stato fondamentale è unico con magnetizzazione nulla; sotto T_c la magnetizzazione è $\neq 0$, quindi possiamo rompere la simmetria ruotando attorno l'asse di magnetizzazione.

La rottura spontanea di simmetria è dovuta al fatto che il sistema sceglie un vuoto tra quelli disponibili.

Oss 3.1. Una caratteristica della SSB è l'esistenza di un parametro d'ordine che ha un valore d'aspettazione non nullo sul vuoto.

Per il ferromagnete tale parametro è la magnetizzazione; per il caso di un potenziale a doppia buca

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - \eta^2)^2$$

tale parametro è

$$\frac{<\phi>}{\eta} = \pm 1$$

In ogni caso il parametro d'ordine è una quantità <u>non</u> invariante sotto la simmetria.
Vediamo come questo si traduce nel caso dei gruppi di Lie.

Sia

$$U = \exp(i\theta^a T^a)$$

Se il vuoto è invariante:

$$U |0\rangle = |0\rangle$$

quindi

$$T^a |0\rangle = 0 \quad \forall a$$

Altrimenti

$$\exists a \quad t.c. \quad T^a |0\rangle \neq 0$$

Nel caso di un ferromagnete, se la magnetizzazione è lungo z, allora $J_z |0\rangle = 0$, ma

$$J_x |0\rangle \neq 0 \qquad J_y |0\rangle \neq 0$$

Nel caso di una doppia buca, considerando ϕ complesso ($V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\phi|^2 - \eta^2)^2$), abbiamo un set continuo di minimi

$$\phi = \eta e^{i\alpha}$$

con

$$<|\phi|>= \eta \qquad <\alpha>= \ arbitrario$$

La lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

è invariante sotto $U(1)$, mentre la SSB fissa un minimo, cioè $<\alpha>= \alpha_0$ che possiamo prendere WLOG pari a 0. Quindi

$$<\phi>= \eta$$

Studiamo ora lo spettro della teoria dopo la SSB, cioè sviluppando per piccole oscillazioni. Scriviamo

$$\phi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi(x) + i\psi(x)\right)$$

con χ, ψ reali.

Il set di vuoti è allora un cerchio di raggio η, χ è una fluttuazione nella direzione ortogonale alla varietà dei vuoti, mentre ψ è una fluttuazione tangenziale.

Quindi $\eta + i\psi$ è un altro vuoto per ψ infinitesimo, quindi un piccolo spostamento lungo ψ non costa energia. Possiamo perciò associare a ψ un modo massless, analogamente associamo a χ un modo massivo.

Per vederlo algebricamente basta sostituire la nuova parametrizzazione di ϕ nella lagrangiana.

In generale vale il teorema di Goldstone che afferma la seguente proposizione.

Teo 3.1 (Goldstone)**.** *Data una teoria Lorentz invariante, se una simmetria globale continua viene rotta spontaneamente, allora espandendo attorno al vuoto appare una particella massless per ogni generatore che rompe la simmetria ($T^a |0\rangle \neq 0$). Tale particella è detta Bosone di Goldstone.*

Prop 3.1. *La dimensione della varietà dei vuoti è pari al numero di generatori che rompono la simmetria.*

Introduciamo ora anche un campo di gauge A_μ. Allora la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - V(\phi)$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

Se parametrizziamo il campo come

$$\phi(x) = (\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x))e^{i\alpha(x)}$$

possiamo porre $\alpha = 0$ tramite trasformazioni di gauge.
Sostituendo infine nella lagrangiana otteniamo un campo di gauge massivo.
L'equazione del moto è poi

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = 0$$

detta equazione di Proca. Contraendo poi con ∂_ν ed usando il fatto che $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, m_A^2 \neq 0$ otteniamo

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

cioè

$$(\Box^2 + m_A^2)A^\nu = 0$$

L'equazione di Proca descrive allore un bosone di gauge massivo.
Possiamo ora decomporre A_μ in $0 \oplus 1$. Espandendo A_μ in onde piane

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \longrightarrow k_\mu \epsilon^\mu(k) = 0$$

che elimina la componente con vettore di polarizzazione $\epsilon_\mu(k) \sim k_\mu$ poichè per questa avremmo

$$k_\mu \epsilon^\mu \sim k^2 = m_A^2 \neq 0$$

Nel sistema a riposo (che esiste poichè $m_A^2 \neq 0$)

$$k_\mu = m_A^2(1, 0, 0, 0)$$

quindi abbiamo eliminato la parte scalare di A_μ che è allora una particella a spin 1.

Teo 3.2 (Goldstone)**.** *La rottura di una simmetria locale non produce allora bosoni di Goldstone, ma fa sì che i campi di gauge acquistino massa*

In questo caso ϕ è detto *campo di Higgs* ed il meccanismo che produce un bosone di gauge massivo è detto *meccanismo di Higgs.*

Oss 3.2. I gradi di libertà prima e dopo la SSB sono conservati

La SSB è realizzata in natura da fenomeni quali la superconduttività.

4 Gruppi di Lie

Ricordiamo che $U(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$, mentre $SU(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ a determinante 1.

Oss 4.1. Una matrice $U(N)$ si può scrivere come una matrice $SU(N)$ con una fase, cioè

$$U(N) = SU(N) \otimes U(1)$$

Ricordiamo inoltre la notazione esponenziale, per cui una matrice U $N \times N$ si può scrivere come

$$U = e^A \left(\equiv \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n!} A^n \right)$$

Prop 4.1. *U unitaria* $\Rightarrow A^\dagger = -A$*, cioè* A *anti-hermitiana*

Dimostrazione.

$$U^\dagger = e^{A^\dagger}, U^{-1} = e^{-A}$$

U unitaria $\Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

□

Possiamo allora ridefinire

$$U = e^{iH}$$

con H hermitiana ($H^\dagger = H$).
Se poi $U \in SU(N)$ allora

$$\det U = \det e^A = e^{\operatorname{tr} A} = e^{i \operatorname{tr} H} = 1$$

cioè

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} H = 0$$

La dimensione di $SU(N)$ è allora data dalla dimensione dello spazio delle matrici hermitiane a traccia nulla, cioè

$$\dim SU(N) = N^2 - 1$$

Analogamente

$$\dim U(N) = N^2$$

Quindi possiamo scrivere una generica matrice hermitiana a traccia nulla H come

$$H = \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a F_a$$

con $\{F_a\}$ base dello spazio.

Allora

$$U = \exp(i\theta_a F_a) \equiv U(\theta)$$

dove i θ_a sono detti parametri del gruppo e gli F_a sono detti generatori del gruppo.

4.1 Algebra di Lie

Si può vedere che i generatori del gruppo di Lie soddisfano le regole di commutazione

$$[F_a, F_b] = i c_{ab}^c F_c$$

dove gli c_{ab}^c sono parametri reali e vengono chimati costanti di struttura del gruppo.

Idea.

$$U_1 U_2 = U_3 \in SU(N)$$

Svolgendo l'operazione si ottiene il risultato

Con questa struttura si dice che i generatori del gruppo formano un'algebra di Lie (spazio vettoriale, spazio tangente)

Prop 4.2. *Per definizione*

$$c_{ab}^c = -c_{ba}^c$$

Tramite un'opportuna scelta dei generatori possiamo rendere le costanti di struttura completamente antisimmetriche in tutti e 3 gli indici.

Teo 4.1. *Se i generatori sono hermitiani allora esiste una base per l'algebra di Lie*

$$\tilde{F}_a = L_{ab} F_b$$

con L_{ab} matrice $(N^2-1)\times(N^2-1)$ reale ed invertibile, tale che

$$[\tilde{F}_a, \tilde{F}_b] = i\tilde{c}_{ab}^c \tilde{F}_c$$

con $\tilde{c}_{ab}^c$ antisimmetrici in $\{a, b, c\}$.

Inoltre vale che

$$\mathrm{tr}\Big[\tilde{F}_a\tilde{F}_b\Big] = \lambda\delta_{ab}, \qquad \lambda > 0$$

Dimostrazione. Definiamo

$$g_{ab} \equiv \mathrm{tr}[F_a F_b]$$

che è una matrice reale, simmetrica e definita positiva, cioè una forma quadratica.

Possiamo allora diagonalizzarla con matrici ortogonali

$$F'_a = O_{ab} F_b$$

Allora

$$g'_{ab} = \mathrm{tr}[F'_a F'_b] = (OgO^t)_{ab} = \lambda_a \delta_{ab}. \qquad \lambda_a > 0$$

Posso poi riscalare ponendo

$$\tilde{F}_a = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} F'_a$$

ed ottengo

$$\tilde{g} = \lambda \mathbb{1}, \qquad \lambda > 0$$

Con questa scelta le costanti di struttura risultano completamente antisimmetriche

$$[\tilde{F}_a, \tilde{F}_b] = i\tilde{c}_{ab}^c \tilde{F}_c$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_{ab}^c = \frac{1}{i\lambda}\,\mathrm{tr}\Big([\tilde{F}_a, \tilde{F}_b]\tilde{F}_c\Big)$$

usando $\tilde{g}_{ab} = \lambda\delta_{ab}$. Da cui la tesi usando la ciclicità della traccia.

□

Di seguito useremo la notazione per cui

$$\tilde{c}_{ab}^c = f_{abc} \qquad \tilde{F}_a = F_a$$

e fisseremo $\lambda = \frac{1}{2}$ per cui

$$\mathrm{tr}(F_a F_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

Oss 4.2 (Rango)**.** [. . .]

Def 4.1 (Operatore di Casimir)**.** Si dice operatore di Casimir un polinomio di generatori C t.c. commuta con tutti i generatori dell'algebra, cioè

$$[C, F_a] = 0, \qquad \forall a$$

Ex 4.1. Per $SU(N)$

$$F^{(2)} = \sum_{a=1}^{N^2-1} F_a^2$$

è il Casimir quadratico.

Def 4.2 (Rango)**.** Si dice rango dell'algebra di Lie il numero massimo di generatori che commutano tra loro, cioè sono simultaneamente diagonalizzabili.

Il rango è inoltre la dimensione della sotto algebra di Cartan.

Teo 4.2 (Racah)**.** *Il rango di $SU(N)$ è $N-1$ ed è uguale al numero di operatori di Casimir funzionalmente indipendenti.*

4.2 Rappresentazioni di $SU(N)$

Def 4.3. Dato un gruppo G con elementi g, si dice rappresentazione del gruppo un omomorfismo tra gli elementi del gruppo e lo spazio delle applicazioni lineari $GL(\mathbb{C}^n)$ che preserva l'operazione di gruppo.

Quindi R è una rappresentazione se

$$g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow R(g_1)R(g_2) = R(g_3)$$

In questo caso $\mathbb{C}^n$ è lo spazio base della rappresentazione ed n è la dimensione.

Analogamente la rappresentazione di un'algebra di Lie è un omomorfismo tra i generatori e gli elementi di $GL(\mathbb{C}^n)$ che preserva la struttura dell'algebra, cioè

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c \Rightarrow [F_a^{(r)}, F_b^{(r)}] = i f_{abc} F_c^{(r)}$$

dove $F_a^{(r)}$ è il generatore nella rappresentazione r.

Oss 4.3. Se la dimensione della rappresentazione è $d(r)$ allora le matrici sono $d(r) \times d(r)$

Indicheremo con f la rappresentazione fondamentale.

Un esempio di rappresentazione che useremo in seguito è la rappresentazione aggiunta che ha dimensione $d(r) = N^2 - 1$ e

$$(F_a^{(agg)})_{bc} = -i f_{abc}$$

Prop 4.3 (Identità di Jacobi)**.**

$$Cycl_{abc}([F_a, [F_b, F_c]]) = 0$$

Dalla identità di Jacobi per i generatori se ne ricava una per le costanti di struttura del gruppo

$$Cycl_{abc}(f_{aed} f_{bce}) = 0$$

che possiamo riscrivere in termini della rappresentazione aggiunta, cioè come

$$[F_a^{(agg)}, F_b^{(agg)}] = i f_{abc} F_c^{(agg)}$$

che dimostra che l'aggiunta è effettivamente una rappresentazione.

Oss 4.4. La rappresentazione aggiunta è ancora hermitiana

Def 4.4. Una rappresentazione si dice riducibile se $\exists V' \subseteq V = \mathbb{C}^n$ sottospazio vettoriale t.c.

$$R(g)V' \subseteq V' \qquad \forall g \in G$$

In termini di matrici questo implica che possiamo ridurre $R(g)$ a blocchi.

Ex 4.2. Sia $n' = \dim V'$, allora prendendo come base autovettori di V' (più altro)

$$R(g) = \begin{bmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

dove R_1 è una matrice $n' \times n'$. Se accade che anche $S = 0$ allora R si dice completamente riducibile. In questo caso scriveremo

$$R = R_1 \oplus R_2$$

Se invece $\nexists V'$ invariante allora R si dice irriducibile.

Lemma 4.1 (Lemma di Schur)**.** *Sia R una rappresentazione irriducibile di un gruppo G e sia T un operatore lineare t.c.*

$$[T, R(g)] = \qquad \forall g \in G$$

allora

$$T = \lambda \mathbb{1} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

In particolare possiamo prendere come T i Casimir.

Teo 4.3. *La rappresentazione aggiunta di $SU(N)$ è irriducibile.*

Teo 4.4. *Presa r rappresentazione di $SU(N)$ con generatori $F_a^{(r)}$, si ha che*

$$g_{ab}^{(r)} = \operatorname{tr}\left[F_a^{(r)} F_b^{(r)}\right] = T_R^{(r)} \delta_{ab}$$

con $T_R^{(r)}$ detto indice di Dynkin della rappresentazione r.

Dimostrazione. Fissiamo una certa rappresentazione r ed omettiamo per semplicità l'apice che specifica la rappresentazione utilizzata. Definiamo

$$h_{abc} = \operatorname{tr}\left([F_a, F_b] F_c\right)$$

Allora

$$h_{abc} = i f_{abn} \operatorname{tr}[F_n F_c] = i f_{abn} g_{nc} = -h_{acb}$$

Quindi

$$i f_{abn} g_{nc} = -i f_{acn} g_{nb}$$

ma g è simmetrico, quindi

$$g_{cn}(-i f_{anb}) = -i f_{acn} g_{nb}$$

$$\Rightarrow g F_a^{(agg)} = F_a^{(agg)} g$$

cioè g commuta conn tutti i generatori dell'aggiunta, allora per il lemma di Schur g è un multiplo dell'identità. □

Prop 4.4. *Se r è irriducibile allora*

$$T_R^{(r)} = \frac{1}{N^2 - 1} d(r) C_F^{(r)}$$

con $F_{(r)}^{(2)} = C_F^{(r)} \mathbb{1}_{d(r) \times d(r)}$

Dimostrazione. Vedi esercizi. □

Ex 4.3. Per la rappresentazione fondamentale $T_R = \frac{1}{2}, d(f) = N$ quindi $C_F = \frac{N^2-1}{N}$.

Nel caso della rappresentazione aggiunta $d(agg) = N^2 - 1$, quindi $T_R = C_F (= N)$ (vedi esercizi).

Prop 4.5 (Relazione di completezza per i generatori nella rappresentazione fondamentale)**.**

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (F_a)_{ij} (F_a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

Dimostrazione. Vedi esercizi □

4.3 Rappresentazioni di $SU(2)$

Vediamo ora il caso specifico delle rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$.

Siano T_a i generatori, allora

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c$$

Riscriviamo l'algebra in termini di operatori di salita e discesa

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2$$

In questo modo

$$\begin{aligned}[T_3, T_\pm] &= \pm T_\pm \\ [T_+, T_-] &= 2T_3\end{aligned}$$

Prendiamo poi come set completo di operatori commutanti $T^{(2)}, T_3$ con

$$T^{(2)} = \sum_a T_a^2 = \frac{1}{2}\{T_1, T_2\} + T_3^2$$

Gli autostati simultanei verrano indicati con

$$|t, t_3\rangle$$

e

$$\begin{aligned}T^{(2)}|t, t_3\rangle &= t(t+1)|t, t_3\rangle \\ T_3|t, t_3\rangle &= t_3|t, t_3\rangle \\ T_\pm|t, t_3\rangle &= \sqrt{t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1)}\,|t, t_3 \pm 1\rangle\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}t &\in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\} \\ t_3 &\in \{-t, -t+1, \dots, t-1, t\}\end{aligned}$$

I $2t+1$ stati $|t, t_3\rangle$ per un dato t costituiscono la base dello spazio vettoriale su cui agisce la rappresentazione irriducibile di dimensione $2t+1$.

Tale rappresentazione è detta di spin t e può essere rappresentata mediante diagramma di tipo peso

[Inserire diagrammi]

4.4 Rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$

Riscriviamo come nel caso di $SU(2)$ l'algebra in termini di operatori di salita e discesa.

Osserviamo che $SU(3)$ ha rango 2, quindi ha 2 Casimir indipendenti, quello quadratico e quello cubico

$$F^{(2)} = \sum_{a=1}^{N^2-1} F_a^2, \quad G^{(3)} = \frac{2}{3}d_{abc}F_aF_bF_c$$

con d_{abc} tensore completamente simmetrico di $SU(3)$.

Osserviamo poi che l'anticommutatore di due generatori nella fondamentale è ancora una matrice hermitiana $n \times n$, per cui, fissata la rappresentazione f

$$\{F_a, F_b\} = k_{ab}\mathbb{1}^{1} + d_{abc}F_c$$

Tracciando l'anticommutatore si trova che

$$k_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{N}.$$

Proiettando, invece, si trova che

$$d_{abc} = 2\,\mathrm{tr}[\{F_a, F_b\}F_c]$$

[1] Perchè non è a traccia nulla

Oss 4.5. d_{abc} per $SU(2)$ è zero, infatti non abbiamo un Casimir cubico per $SU(2)$.

Un insieme completo di operatori commutanti è

$$F^{(2)}, G^{(3)}, T^{(2)}, Y, T_3$$

dove

$$T_3 = F_3, Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

Riscriviamo ora l'algebra.

Siano

$$T_\pm = F_1 \pm iF_2, \quad U_\pm = F_4 \pm iF_5, \quad V_\pm = F_6 \pm iF_7$$

da cui

$$\begin{array}{lll} [T_3, T_\pm] = \pm T_\pm & [Y, T_\pm] = 0 & [T_+, T_-] = 2T_3 \\ [T_3, U_\pm] = \mp \frac{1}{2} U_\pm & [Y, U_\pm] = U_\pm & [U_+, U_-] = \frac{3}{2} Y - T_3 = 2U_3 \\ [T_3, V_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm & [Y, V_\pm] = \pm V_\pm & [V_+, V_-] = \frac{3}{2} Y + T_3 = 2V_3 \end{array}$$

Ogni riga definisce rispettivamente il sottogruppo chiuso di T-spin, U-spin e V-spin.

[Metodo grafico]

4.5 Rappresentazione complessa coniugata

Consideriamo una rappresentazione r

Prop 4.6.

$$U_1^{(r)} U_2^{(r)} = U_3^{(r)} \Rightarrow U_1^{(r)^*} U_2^{(r)^*} = U_3^{(r)^*}$$

Possiamo allora definire una rappresentazione r^*. In termini di generatori, se

$$U^{(r)} = \exp\Big(i\epsilon_a F_a^{(r)}\Big) \qquad \epsilon_a \in \mathbb{R}$$

allora

$$U^{(r)^*} = \exp\Big(-i\epsilon_a F_a^{(r)*}\Big) = \exp\Big(i\epsilon_a F_a^{(r^*)}\Big)$$

quindi

$$F_a^{(r^*)} = -F_a^{(r)*}$$

Prop 4.7.

$$[F_a^{(r)}, F_b^{(r)}] = if_{abc} F_c^{(r)} \Rightarrow [F_a^{(r*)}, F_b^{(r*)}] = if_{abc} F_c^{(r*)}$$

Le due rappresentazioni sono distinte? r, r^* non sono distinte se sono legate da una relazione di equivalenza:

Def 4.5. r^* è equivalente ad r se esiste S matrice $d(r) \times d(r)$ [2] invertibile t.c.

$$U^{(r^*)}(\epsilon) = SU^{(r)}(\epsilon)S^{-1} \qquad \forall \epsilon$$

ovvero

$$F_a^{(r^*)}(\epsilon) = SF_a^{(r)}(\epsilon)S^{-1} \qquad \forall a$$

In tal caso r si dice reale.

Prop 4.8. *Tutte le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono reali.*

Ad esempio la rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ è $F_a = \frac{\sigma_a}{2}$, allora

$$F_a^{(f^*)} = -F_a^* = -\frac{\sigma_a}{2} = \sigma_2 F_a \sigma_2 \qquad S = \sigma_2 = \sigma_2^{-1}$$

Prop 4.9. *La rappresentazione aggiunta di $SU(N)$ è sempre reale*

[2] $d(r) = d(r^*)$

Dimostrazione.
$$(F_a^{(agg)})_{bc} = -if_{abc}, \qquad f_{abc} \in \mathbb{R}$$
$$(F_a^{(agg^*)})_{bc} = -(F_a^{(agg)})^*_{bc} = -(-if_{abc}) = -if_{abc} = (F_a^{(agg)})_{bc} \qquad \forall a, b, c$$

□

Teo 4.5. *Se una data rappresentazione r di $SU(N)$ è reale, allora tutti i suoi generatori devono avere autovalori in coppie di segno opposto, cioè se λ è autovalore anche $-\lambda$ deve esserlo.*

Dimostrazione. $SU(N)$ è compatto quindi ogni sua rappresentazione è equivalente ad una rappresentazione unitaria, cioè una rappresentazione in cui i generatori sono hermitiani.

WLOG consideriamo allora F_a hermitiani: $F_a^{(r)^\dagger} = F_a^{(r)}$

Poichè r reale per ipotesi $\exists S$ invertibile t.c.
$$F_a^{(r^*)} = SF_a^{(r)}S^{-1} = -F_a^{(r)*}$$
Detto $|\lambda\rangle$ autovettore di $F_a^{(r)}$ con autovalore λ si ha che $\lambda \in \mathbb{R}$ per hermitianità, inoltre
$$F_a^{(r)^*}S\,|\lambda\rangle = -(SF_a^{(r)}S^{-1})S\,|\lambda\rangle = -SF_a^{(r)}\,|\lambda\rangle = -\lambda S\,|\lambda\rangle$$
Prendendone il complesso coniugato
$$F_a^{(r)}(S\,|\lambda\rangle)^* = -\lambda(S\,|\lambda\rangle)^*$$
che ci dice che anche $-\lambda$ è autovalore di $F_a^{(r)}$.

□

Oss 4.6.
$$|\lambda\rangle \neq 0 \Rightarrow S\,|\lambda\rangle \neq 0$$
Poichè S è invertibile.

Cor 4.1. *La rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ non è reale, cioè 3 e 3^* non sono equivalenti.*

Dimostrazione.
$$F_8 = \frac{\lambda_8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$
che non ha autovalori in coppie di segno opposto.

□

In generale per $SU(3)$ si ha che $(p, q)^* = (q, p)$.

4.6 Metodo tensoriale

Vediamo ora il metodo tensoriale per la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$. Siano U le matrici nella rappresentazione fondamentale.

Def 4.6 (Vettori controvarianti e covarianti)**.** Un vettore q si dice controvariante di $SU(N)$ se sotto una trasformazione del gruppo
$$q^i \to U^i_j q^j$$
Se poi prendiamo il complesso coniugato $\bar{q}_i \equiv (q^i)^*$, allora
$$\bar{q}_i \to \bar{q}'_i = (U_{ij})^*\bar{q}_j = (U^\dagger)^j_i \bar{q}_j$$
In questo caso $\bar{q}$ si dice vettore covariante di $SU(N)$.

Possiamo estendere tale definizione e definire un tensore di rango (p, q) di $SU(N)$ $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ con
$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \to T'^{\,i_1\dots i_p}_{\,j_1\dots j_q} = U^{i_1}_{\alpha_1}\dots U^{i_p}_{\alpha_p}(U^\dagger)^{\beta_1}_{j_1}\dots(U^\dagger)^{\beta_q}_{j_q}T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}$$
Quindi un vettore controvariante trasforma secondo la rappresentazione fondamentale N di $SU(N)$, un vettore covariante trasforma secondo N^* ed un tensore (p, q) trasforma come
$$\underbrace{N \otimes \dots \otimes N}_{p} \otimes \underbrace{N^* \otimes \dots \otimes N^*}_{q} = N^p \otimes (N^*)^q$$

4.7 Tensori di $SU(3)$

Un tensore T di rango (p, q) di $SU(3)$ si dice riducibile se mediante una contrazione con un tensore invariante $(\delta_{ij}, \epsilon_{ijk})$ del tipo

$$\begin{aligned}
T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, \delta^{j_b}_{i_a} &\to (p-1, q-1) \\
T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, \epsilon^{i_{p+1} j_b j_{b'}} &\to (p+1, q-2) \\
T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, \epsilon_{j_{q+1} i_b i_{b'}} &\to (p-2, q+1)
\end{aligned}$$

si ottiene un tensore T' non nullo con rango più basso $(p' + q' < p + q)$.

Se ciò non è possibile il tensore T è irriducibile.

Prop 4.10. *Il numero di componenti indipendenti di un tensore irriducibile di rango (p, q) è*

$$d(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

Teo 4.6. *Dato un generico tensore T di rango (p, q) e dette $\phi_1, \dots, \phi_d$ le sue componenti linearmente indipendenti, sotto $SU(3)$ esse trasformeranno come*

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_d \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix}$$

con V matrice $d \times d$ che costituirà una rappresentazione d-dimensionale di $SU(3)$.

Prop 4.11. *T irriducibile $\Rightarrow$ V irriducibile.*

T riducibile $\Rightarrow$ V riducibile.

Prop 4.12. *I tensori $\delta^j_i, \epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk}$ sono tensori riducibili, ma essendo invarianti ad 1 componente rappresentano tutti la rappresentazione irriducibile $1 = (0, 0)$.*

Prop 4.13. *La decomposizione di un tensore riducibile come somma diretta di tensori irriducibili è una proprietà invariante sotto trasformazioni del gruppo.*

Ex 4.4. Vediamo a titolo d'esempio la decomposizione di un generico tensore T^{ij} in parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \\
&= S^{ij} \qquad\qquad\quad + A^{ij}
\end{aligned}$$

con

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$$

tensore irriducibile $(2, 0)$, 6 componenti.

$$A^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$$

tensore asimmetrico con 3 componenti equivalente a

$$\bar{q}_k = \epsilon_{ijk} T^{ij} = \epsilon_{ijk}(S^{ij} + A^{ij}) = \epsilon_{ijk} A^{ij}$$

Infatti

$$\epsilon^{ijk} \bar{q}_k = \epsilon^{ijk} \epsilon_{\alpha\beta k} T^{\alpha\beta} = (\delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha) T^{\alpha\beta} = T^{ij} - T^{ji} = 2A^{ij}$$

da cui

$$A^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{q}_k$$

Possiamo allora riscrivere

$$T^{ij} = S^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{q}_k$$

che equivale alla decomposizione

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

Oss 4.7.

$$S'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta S^{\alpha\beta} \Rightarrow S'^{\,ij} = S'^{\,ji}$$

$$A'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta A^{\alpha\beta} \Rightarrow A'^{\,ij} = -A'^{\,ji}$$

quindi

$$T'^{\,ij} = U^i_\alpha U^j_\beta T^{\alpha\beta} = S'^{\,ij} + A'^{\,ij}$$

cioè viene ancora decomposto come T^{ij} come asserito in una proposizione precedente.

Prop 4.14. *Un tensore irriducibile* $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ *sarà*

- *completamente simmetrico negli indici* $\{i_1,\dots,i_p\}$
- *completamente simmetrico negli indici* $\{j_1,\dots,j_q\}$
- *a traccia nulla*

Ex 4.5. Un altro esempio di decomposizione utile di rappresentazione è quello che riguarda il tensore il tensore T^i_j

$$\begin{aligned} T^i_j &= (T^i_j - \frac{1}{3}T^k_k\delta^i_j) + \frac{1}{3}T^k_k\delta^i_j \\ &= \tilde{T}^i_j \qquad\qquad\quad + T^k_k\delta^i_j \end{aligned}$$

che corrisponde alla decomposizione

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

Oss 4.8. Il tensore irriducibile (q,p) trasforma come il complesso coniugato del tensore irriducibile (p,q).

5 QED

La lagrangiana della QED risulta essere

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi}_{\mathcal{L}_F} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_G}$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Possiamo poi espandere $\mathcal{L}_F$ come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \mathcal{L}_0 \qquad\qquad\quad + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + (-q\bar{\psi}\not{A}\psi) \end{aligned}$$

Per trasformazioni di gauge $U(1)$ globali

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\frac{q}{e}\theta}\psi \qquad \theta \text{ c.te} \\ A_\mu &\to A_\mu \end{aligned}$$

sono invarianti $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_F, \mathcal{L}_G$, mentre per trasformazioni di gauge $U(1)$ locali

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

sono invarianti $\mathcal{L}_F, \mathcal{L}_G$.

In questo caso D_μ trasforma come ψ, infatti è detta derivata covariante

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) &= \left(\partial_\mu + iqA'_\mu(x)\right) e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\psi(x) \\ &= e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{q}{e}\partial_\mu\theta + iqA_\mu - i\frac{q}{e}\partial_\mu\theta\right)\psi(x) \\ &= e^{i\frac{q}{e}\theta(x)}D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

Oss 5.1 ($F_{\mu\nu}$ come commutatore delle derivate covarianti)**.**

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu]\psi = iq([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu])\psi \\ &= iq\left(\partial_\mu(A_\nu\psi) - A_\nu\partial_\mu\psi + A_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu(A_\mu\psi)\right) \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu\psi + A_\nu\partial_\mu\psi - A_\nu\partial_\mu\psi - (\mu \leftrightarrow \nu)) \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi \\ &= iqF_{\mu\nu}\psi\end{aligned}$$

In questo caso il commutatore tra i campi di gauge è nullo perchè gli A_μ sono numeri.

5.1 Quantizzazione teorie di gauge

Se consideriamo una lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, il momento coniugato ad A_μ è

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -F_{0\mu}$$

Dalle relazioni di commutazione dovremmo avere

$$[A^\mu(x), \pi_\nu(y)] = i\delta^\mu_\nu\delta^4(x-y)$$

tuttavia $\pi_0 = 0$.

Per risolvere il problema dobbiamo fissare una gauge.

Ex 5.1 (Propagatore del fotone)**.** Vediamo fisicamente come si traduce questo problema e per farlo calcoliamo il propagatore del fotone o meglio mostriamo che non si può definire.

$$\begin{aligned}S[A] = \int\mathcal{L}[A] &= -\frac{1}{4}\int(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\int[(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)] \\ &= \frac{1}{2}\int A_\mu[g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu]A_\nu \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{A}_\mu(k)[-k^2g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu]\tilde{A}_\nu(k)\end{aligned}$$

L'operatore è singolare, infatti ha dei modi zero

$$[g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu]\partial_\nu\theta = 0\forall\theta$$

$\partial_\nu\theta$ è essenzialmente una trasformazione di gauge del campo nullo $A_\nu = 0$.

Non possiamo allora definire il propagatore del fotone.

6 Metodo di Faddeev-Popov

Per risolvere il problema si può usare il metodo di Faddeev-Popov. Consideriamo la funzione di partizione

$$Z = \int DA\, e^{i\int d^4x\,[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}]}$$

Oss 6.1 (Invarianza misura)**.** Osserviamo subito che sia la lagrangiana, sia la misura sono invarianti di gauge, in particolare per la misura si vede che sotto una trasformazione di gauge infinitesima si ha

$$A'^{\,a}_{\ \mu} = A^a_\mu - f_{abc}\theta^b(x)A^c_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)$$

per cui

$$DA' = DA\det N, \qquad N = \frac{\delta A'^{\,a}_{\ \mu}(x)}{\delta A^b_\nu(y)}$$

Allora

$$N = \delta^4(x-y)\delta^\nu_\mu \left[\delta_{ab} - f_{adc}\theta^d(x)\delta_{cb}\right] = \delta^4(x-y)\delta^\nu_\mu \left[\delta_{ab} + f_{acd}\theta^d(x)\delta_{cb}\right]$$

Utilizzando adesso che

$$\det(\mathbb{1} + L) = 1 + \operatorname{tr} L + \dots$$

e che

$$f_{aab} = 0$$

per asimmetria, si ha che

$$\det N = 1$$

quindi la misura è invariante di gauge.

Def 6.1 (Orbita di gauge)**.** Dato un campo di gauge A_μ definiamo orbita di gauge l'insieme dei campi A^U_μ che si ottengono da A_μ mediante trasformazione di gauge

$$A^U_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

Def 6.2 (Gauge fixing)**.** Definiamo condizione di gauge o gauge fixing una condizione del tipo

$$G^\mu A^{U,a}_\mu(x) = B^a(x)$$

che per una data orbita di gauge ammette un'unica soluzione U. [Inserire immagine gauge fixing!!]

Ex 6.1. Un esempio di gauge fixing è dato dalla scelta

$$G^\mu = \partial^\mu \qquad B^a = 0$$

Per introdurre il metodo di FP vediamo anzitutto il primo trucco di FP, cioè

$$1 = \Delta_G[A] \int DU\, \delta(G^\mu A^U_\mu - B)$$

dove DU è la misura invariante di Haar.

Def 6.3 (Misura left di Haar)**.** Dato un gruppo G con elementi g si dice che $d_L g$ è una misura left-invariante se

$$\int f(g_0 \cdot g)\, d_L g = \int f(g)\, d_L g \qquad \forall g_0 \in G$$

cioè se

$$d_L(g_0 \cdot g) = d_L(g) \qquad \forall g_0 \in G$$

Analogamente si definisce una misura right-invariante di Haar.

Nel caso di nostro interesse le due misure coincidono e si parla di misura di Haar.

Notiamo ora che $\Delta_G[A]$ è invariante di gauge, infatti

$$\begin{aligned}
\Delta_G[A^{U'}]^{-1} &= \int DU\, \delta(G^\mu (A^{U'}_\mu)^U - B) \\
&= \int DU\, \delta(G^\mu A^{U'U}_\mu - B) \\
&= \int DU\, \delta(G^\mu A^U_\mu - B) \\
&= \Delta_G[A]^{-1} \qquad\qquad \forall U' \in SU(N_c)
\end{aligned}$$

Utilizziamo questa relazione nella funzione di partizione

$$Z = \int DA\, e^{iS[A]} \Delta_G[A] \int DU\, \delta(G^\mu A^U_\mu - B)$$

Possiamo ora cambiare variabile di integrazione

$$A_\mu \to A^{U'}_\mu$$

che equivale ad usare l'invarianza di gauge e porre $U' = U^{-1}$, da cui

$$\begin{aligned} Z &= \int DA\, e^{iS[A]} \Delta_G[A] \delta(G^\mu A_\mu - B) \int DU \\ &= \tilde{Z} \int DU \end{aligned}$$

Abbiamo in questo modo isolato la divergenza della funzione di partizione.

Calcoliamo ora un'espressione esplicita per $\Delta_G[A]$

$$\begin{aligned} \Delta_G[A]^{-1} &= \int DU\, \delta(G^\mu A_\mu^U - B) \\ &= \int D\theta\, J[\theta] \delta(G^\mu A_\mu^{U(\theta)} - B) \\ &= \frac{J[\theta]}{\det \tilde{M}_G} \end{aligned}$$

con

$$(\tilde{M}_G(x,y))_{ab} = \left. \frac{\delta(G^\mu A_\mu^{U(\theta)a})}{\delta\theta_b(y)} \right|_{\theta=\bar{\theta}}$$

dove $\bar{\theta}$ è l'unica soluzione di

$$G^\mu A_\mu^{U(\theta)a} = B^a$$

Oss 6.2. Abbiamo alcune libertà sui termini di FP. Possiamo infatti porre $\theta = 0$ e $J[\theta] = 1$ così da ottenere

$$\tilde{Z} = \int DA\, \det \tilde{M}_G \delta(G^\mu A_\mu - B) e^{iS[A]}$$

Essendo $B^a(x)$ arbitrario e siccome $\tilde{Z}$ non dipende da B, possiamo dare una dinamica al campo in forma di termine lagrangiano aggiuntivo

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha}(B^a(x))^2 = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha}(G^\mu A_\mu^a)^2$$

Il termine aggiuntivo fissa la gauge.

7 QCD

7.1 Modello a quark di Gell-mann & Zweig

Si osserva che i mesoni più leggeri, con $J^p = 0^-, J^p = 1^-$, occupano entrambi ottetti e singoletti di $SU(3)$, mentre i barioni più leggeri, con $J^p = \frac{1}{2}^+, J^p = \frac{3}{2}^+$, occupano ottetti e decupletti di $SU(3)$. Tenendo inoltre presente che

$$\begin{gathered} 3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \\ 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \end{gathered}$$

G. & Z. proposero l'idea che mesoni e barioni fossero stati legati di costituenti fondamentali detti quarks e delle loro antiparticelle dette antiquarks, che occupano rispettivamente la rappresentazione 3 e 3^* di $SU(3)$.

In questo schema i mesoni risultano stati legati quark-antiquark con numero barionico $B = 0$; se si assume poi che i quark abbiano spin $\frac{1}{2}$ i mesoni risulteranno avere spin intero, in particolare, negli stati di momento angolare orbitale più basso ($L = 0$) si avrà $J = 0$ o $J = 1$.

I barioni, invece, risultano stati legati di 3 quarks (gli antibarioni di 3 antiquarks) con numero barionico $B = 1\,(B = -1)$, per cui assegniamo $B = \frac{1}{3}$ ai quarks e $B = -\frac{1}{3}$ agli antiquarks. Lo spin $\frac{1}{2}$ dei quarks implica poi spin semi-intero per i barioni: $J = \frac{1}{2}, J = \frac{2}{3}$ per gli stati con $L = 0$.

Ci sono poi 6 flavour

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

La prima riga ha carica elettrica $\frac{2}{3}$, la seconda $-\frac{1}{3}$.

7.1.1 Paradossi modello a quark

1. Perchè non si osservano quark isolati nè stati legati adronici come $qq, \dots$?
2. Ci sono problemi nel costruire le funzioni d'onda barioniche: lo stato Δ^{++}, ad esempio, è costituito da 3 quarks di tipo u in onda s, quindi con i 3 spin allineati

$$\left|\Delta^{++}, J=\frac{3}{2}\right\rangle = \left|u_{(1)}\uparrow, u_{(2)}\uparrow, u_{(3)}\uparrow\right\rangle_{l=0}$$

   Ma i 3 u sono fermioni identici, per cui avremmo una violazione della Fermi-Dirac.

Per risolvere 2. è stato proposto l'esistenza di un grado di libertà nascosto detto di colore a cui associamo il gruppo $SU(3)$

[Inserire schema flavour-colour]

Quindi

$$\left|\Delta^{++}, J=\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_{ijk}\left|u^i_{(1)}\uparrow, u^j_{(2)}\uparrow, u^k_{(3)}\uparrow\right\rangle_{l=0}$$

con $i=1,2,3$ indice di colore.

Tale stato risulta essere un singoletto di colore

$$u^i \to u'^{\,i} = U^i_j u^j, \qquad U^i_j \in SU(3)_{\text{colour}}$$

Inoltre per una data configurazione di flavour non si osservano partner mesonici con diversi numeri quantici di colore, quindi anche la funzione d'onda mesonica costituisce un singoletto di colore.

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|q^i\bar{q}_i\right\rangle$$

Invece stati del tipo $qq, \bar{q}\bar{q}, \dots$ non possono essere resi singoletti di colore in quanto nella decomposizione delle rappresentazioni non compare la 1

$$qq: 3_c \otimes 3_c = \bar{3}^*_c \oplus 6_c$$
$$\bar{q}\bar{q}: \bar{3}^*_c \otimes \bar{3}^*_c = 3_c \oplus \bar{6}^*_c$$

Per risolvere 1. si guarda agli esperimenti da cui segue il postulato del confinamento: *tutti gli stati adronici e le corrispondenti osservabili fisiche sono singoletti di colore.*

7.1.2 Jet adronici

[Vedi note]

7.2 Derivata covariante

Vogliamo rendere $SU(3)_{\text{colore}}$ il gruppo di gauge con cui costruire la derivata covariante, tuttavia lavoriamo nel caso generico di una teoria di gauge non abeliana $SU(N_c)$, dove N_c sono i campi di colore. Abbiamo allora che

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^{N_c} \bar{\psi}_i(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

con ψ vettore dei campi di colore.

Consideriamo ora una trasformazione di gauge non abeliana

$$\psi \to \psi' = U\psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger$$

con $U \in SU(N_c)$. Per trasformazioni locali $U = U(x)$ e

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu(U\psi) = U\partial_\mu\psi + \partial_\mu U\psi$$

quindi

$$i\bar{\psi}'\partial\!\!\!/\psi' = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + i\bar{\psi}(U^\dagger \partial\!\!\!/ U)\psi$$

Possiamo ora pensare di aggiungere un termine di accoppiamento minimale

$$\bar{\psi}\not{A}\psi$$

con $A_\mu = A^a_\mu T^a$, A^a_μ campi di gauge.

La lagrangiana fermionica trasformata risulta allora essere

$$\mathcal{L}'_F = \bar{\psi}'(i\not{\partial} - g\not{A}' - m)\psi' = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \bar{\psi}(iU^\dagger\not{\partial}U - gU^\dagger\not{A}'U))\psi$$

Se ora imponiamo che $\mathcal{L}'_F = \mathcal{L}_F$ si ha che

$$-g\not{A} = iU^\dagger\not{\partial}U - gU \dagger \not{A}'U$$

cioè

$$gU^\dagger\not{A}'U = iU^\dagger\not{\partial}U + g\not{A}$$

che in componenti si scrive

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger$$

Possiamo allora definire una derivata covariante

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + igA_\mu)\psi$$

che sotto gauge trasforma appunto in maniera covariante, cioè

$$D_\mu\psi \to UD_\mu\psi$$

In analogia a quanto fatto per la QED svolgiamo il commutatore delle derivate covarianti per trovare il tensore energia-impulso della teoria

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu])\psi \equiv igF_{\mu\nu}\psi$$

che in componenti si scrive

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T^a + ig[T^b, T^c]A^b_\mu A^c_\nu \\ &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)T^a \end{aligned}$$

Consideriamo ora una trasformazione di gauge infinitesima $U(x) = \exp(i\theta^a T^a) \simeq \mathbb{1} + i\theta^a T^a$, in questo caso

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \simeq (A^a_\mu - f_{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a)T^a$$

cioè

$$\delta A^a_\mu = A'_\mu - A_\mu = -f_{abc}\theta^b A^c_\mu \text{ [3]} - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$$

Il campo, invece, trasforma secondo la rappresentazione fondamentale di $SU(N_c)$

$$\psi' = U\psi \simeq (1 + i\theta^a T^a)\psi$$

$$\Rightarrow \delta\psi = \psi' - \psi = i\theta^a T^a\psi$$

Infine l'intensità di campo trasforma come

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= UF_{\mu\nu}U^\dagger = UT^aU^\dagger F^a_{\mu\nu} \\ &\simeq (1 + i\theta^b T^b)T^a(1 - i\theta^c T^c)F^a_{\mu\nu} \\ &= (T^a + i\theta^b[T^b, T^a])F^a_{\mu\nu} \\ &= (T^a - i\theta^b if_{abc}T^c)F^a_{\mu\nu} \\ &= T^a(F^a_{\mu\nu} + \theta^b f_{cba}F^c_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

cioè

$$\delta F^a_{\mu\nu} = F'^a_{\mu\nu} - F^a_{\mu\nu} = -f_{abc}\theta^b F^c_{\mu\nu}$$

[3] Indica che A^a_μ trasforma secondo la rappresentazione aggiunta di $SU(N_c)$

quindi il tensore dei campi trasforma secondo la rappresentazione aggiunta di $SU(N_c)$ anche per θ non costanti.

Risulta allora che $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}$ è invariante di gauge, infatti

$$\delta(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}) = 2F^{\mu\nu,a}\delta F^a_{\mu\nu} = -2\underbrace{f_{abc}}_{\text{asym}}\theta^b\underbrace{F^{\mu\nu,a}F^c_{\mu\nu}}_{\text{sym } a\leftrightarrow c} = 0$$

Inoltre usando

$$\mathrm{tr}[T_aT_b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

si ha che

$$F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} = 2\,\mathrm{tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$$

che è una quantità gauge invariante per ciclicità della traccia.

7.2.1 Trasporto parallelo

Def 7.1 (Trasporto parallelo)**.** Il Trasporto parallelo di un vettore $\psi \in V_x$ lungo una curva $C_{y\leftarrow x}$ da x ad y, definita come

$$C_{y\leftarrow x}:\ z^\mu(s),\ s\in[0,1]\ \text{t.c.}\ z^\mu(0)=x, z^\mu(1)=y$$

è un operatore (o matrice) $W(C_{y\leftarrow x}) \in SU(N_c)$ che opera una trasformazione da V_x a V_y

$$W(C_{y\leftarrow x}) : V_x \to V_y$$

Il vettore $\tilde{\psi} = W(C_{y\leftarrow x})\psi(x) \in V_y$ viene definito come il vettore $\psi(x)$ trasportato parallelamente.

I trasporti paralleli devono inoltre soddisfare le seguenti proprietà:

1. $W(\emptyset) = \mathbb{1}$, con $\emptyset$ curva di lunghezza nulla
2. $W(C_2 \circ C_1) = W(C_2)W(C_1)$
3. $W(-C) = W(C)^{-1}$
4. Sotto gauge locale

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to U(x)\psi(x)\\ \psi(y) &\to U(y)\psi(y)\end{aligned}$$

W trasforma come

$$W(C_{y\leftarrow x}) \to U(y)W(C_{y\leftarrow x})U(x)^{-1}$$

Consideriamo ora un percorso infinitesimo

$$C \equiv C_{x+dx\leftarrow x}$$

Al prim'ordine in dx il trasporto parallelo è

$$W(C) \simeq \exp(-igA_\mu(x)dx^\mu) \simeq 1 - igA_\mu dx^\mu$$

con $A_\mu(x) \in \mathfrak{su}(N_c)$ algebra del gruppo.

Determiniamo ora come trasforma il campo di gauge A_μ.

$$\begin{aligned}W'(C) = \mathbb{1} - igA'_\mu dx^\mu &= U(x+dx)W(C)U(x)^{-1} = U(x+dx)(\mathbb{1} - igA_\mu dx^\mu)U(x)^{-1}\\ &= U(x+dx)U(x)^{-1} - igU(x+dx)A_\mu U(x)^{-1}dx^\mu\end{aligned}$$

Espandendo ora al prim'ordine $U(x+dx)$ si ottiene

$$\begin{aligned}W'(C) &= (U(x) + \partial_\mu U(x)dx^\mu)U(x)^{-1} - igU(x)A_\mu U(x)^{-1}dx^\mu\\ &= \mathbb{1} - ig[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}]dx^\mu\end{aligned}$$

quindi

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U(x)^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U(x)^{-1}$$

Oss 7.1. Vale anche il viceversa, cioè se si assume la trasformazione dei campi si ottiene la 4.

Possiamo ora definire il differenziale covariante di $\psi(x)$

$$\begin{aligned} D\psi(x) &= W(C_{x\leftarrow x+dx})\psi(x+dx) - \psi(x) \\ &= W(C_{x+dx\leftarrow x})^{-1}\psi(x+dx) - \psi(x) \\ &= (1 + igA_\mu dx^\mu)\psi(x+dx) - \psi(x) \\ &= (\psi(x+dx) - \psi(x)) + +igA_\mu(x)\psi(x+dx)dx^\mu \\ &= (\partial_\mu\psi(x) + igA_\mu(x)\psi(x))dx^\mu = D_\mu\psi(x)dx^\mu \end{aligned}$$

Per costruzione il differenziale covariante trasforma in maniera covariante.

Assegnato ora il campo di gauge A_μ mostriamo come ricostruire il trasporto parallelo per una curva qualsiasi. Sia

$$C_\tau : z^\mu(s),\ s \in [0, \tau]$$

e facciamo variare il punto finale, cioè consideriamo $C_{\tau+d\tau}$. Poichè

$$z^\mu(\tau + d\tau) = z^\mu(\tau) + \frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}d\tau$$

possiamo scrivere usando 2.

$$W(C_{\tau+d\tau}) = W(C_{z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\leftarrow z})W(C_\tau) = (\mathbb{1} - igA_\mu(z(\tau))\frac{\mathrm{d}z^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}d\tau)W(C_\tau)$$

Quindi

$$W(C_{\tau+d\tau}) - W(C_\tau) = -igA_\mu\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}d\tau W(C_\tau)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}W(C_\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -igA_\mu\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}W(C_\tau)$$

Usando la chain rule si ha che

$$\frac{\mathrm{d}W(C_\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial W(C_\tau)}{\partial z^\mu}$$

da cui otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial}{\partial z^\mu} + igA_\mu\right]W(C_\tau) = 0$$

cioè

$$\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}D_\mu W(C_\tau) = 0$$

La soluzione dell'equazione con condizione al contorno $W(C_0) = \mathbb{1}$ è data dalla formula di Dyson

$$W(C_\tau) = P\exp\left(-ig\int_{C_\tau} A_\mu(z)dz^\mu\right)$$

con P path-ordering.