Calcolo delle variazioni

Lezioni di Gobbino 17/18

21 aprile 2021

Capitolo 1

Lezione 1

Il calcolo delle variazioni consiste nello studio di problemi di minimo.
In particolar modo, abbiamo un insieme $\mathbb{X}$ ed una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e vogliamo trovare $\min\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$.
Ci sono 4 metodi di approccio al problema:
1.**Metodo indiretto** 2.**Metodo diretto**
3.**Rilassamento** 4.**Gamma-convergenza**

Esempio 1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = x^2 - 4x$$

Metodo indiretto: $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 2 \Rightarrow min = f(2) = -4$

Proviamo adesso a dimostrare che $f(x)$ è sempre $\leq$ di -4 [1].

$$x^2 - 4x \geq -4 \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0$$

che è vero, inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x = 2$.
Metodo diretto: dimostriamo che il minimo esiste, ad esempio usando il teorema di Weierstrass generalizzato:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ continua e } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \textit{il minimo esiste}$$

Ora che so che esiste posso vedere dove $f'(x) = 0$.

Esempio 2. Cerchiamo $\min\{(x^2-2)^2|x \in \mathbb{Q}\}$
In questo caso il minimo non esiste. Possiamo perciò chiederci: chi è l'inf? Come sono fatte le successioni "minimizzanti"?
L'inf è 0 e le succ. min. hanno una sottosuccessione che tende a $\pm\sqrt{2}$.

[1] Questa è la vera dimostrazione

Rilassamento: Con questo metodo rilassiamo le condizioni imposte dal problema e per farlo possiamo procedere in due modi: 1.Estendo f ad un ambiente più vasto;
2.Cambio la funzione in modo che il minimo abbia più probabilità di esistere.

Esempio 3. Consideriamo una famiglia di problemi di minimo:

$$m_n := min\{e^{x^2} + atg(x) + nsin^2(x)|x \in \mathbb{R}^n\}$$

e chiediamoci:
a cosa tende m_n quando $n \to \infty$?
a cosa tendono i punti di minimo quando $n \to \infty$?
Ci aspettiamo che $m_n \to m_\infty := min\{e^{x^2} + atg(x)|x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Per rispondere a queste domande usiamo la gamma convergenza.

Definizione 1. Generalemente $\mathbb{X}$ sarà uno spazio di funzioni. Chiameremo allora

$$F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

Funzionale

Esempio 4.

$$F(u) = \int_2^4 (\dot{u}^2 + sin(u))\, dx$$

Un particolare tipo di funzionali sono poi quelli **integrali**

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x))\, dx$$

con $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
In generale scriveremo $L(x, s, p)$ dette Lagrangiane.
Altre generalizzazioni possibili sono:

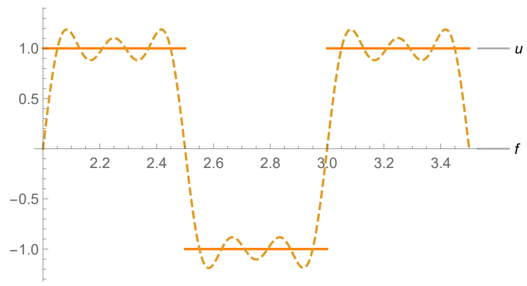
$$F(u) := \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots)dx$$

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dots)dx$$

Osservazione 1. Problemi più complicati sono del tipo:
1.Più variabili in partenza
2.Più variabili in partenza e arrivo (caso vettoriale)

Esempio 5 (Classico)**.** Data f(x) trovare

$$min\{\int_a^b \dot{u}^2 + (u - f)^2\, dx|u \in C^1([a, b])\}$$

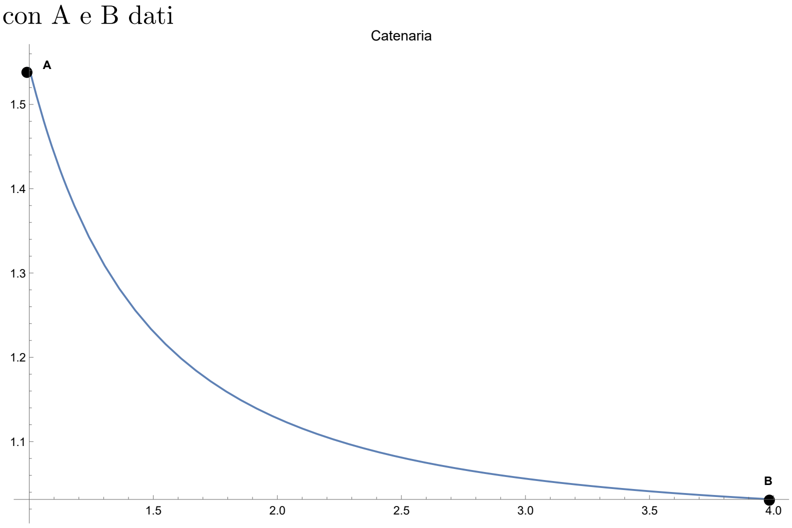


con f che può essere ad esempio il segnale di un cellulare.

Esempio 6 (Classico)**.**

$$min\{\int_a^b (\dot{u}^2 + u)dx | u(a) = A, u(b) = B, u \in C^1([a, b])\}$$

con A e B dati



Capitolo 2

Lezione 2

La variazione prima di un funzionale è l'analogo della derivata prima per una funzione.

Definizione 2. Consideriamo un insieme $\mathbb{X}$ ed $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di minimo e siano $\delta > 0, \gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{X}$ t.c. $\gamma(0) = x_0$. Posso considerare la funzione composta

$$\varphi(t) := F(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$$

con minimo in t=0.
Pongo allora $\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$([1]).
$\delta F(x_0, \gamma)$ è detto **Variazione prima del funzionale F lungo una curva** γ.

Osservazione 2. La definizione è valida $\forall x_0$, anche non di minimo, e $\forall$ curva $\gamma : \gamma(0) = x_0$ purchè $\varphi'(0)$ esista.

Lemma 1. Se $x_0 \in argmin^2\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$, allora

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0$$

quando esiste.

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento[3] V.
In particolare

$$\forall u \in \mathbb{X}, \forall v \in V \ \ si \ ha \ che \ u + v \in \mathbb{X}$$

[1] Posto che esista
[2] $x \in \mathbb{X}$ t.c. f(x) è un minimo
[3] traslato che passa per l'origine, detto anche giacitura

In questo caso, dati $u_0 \in \mathbb{X}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ posso considerare la curva

$$t \to u_0 + tv : \textit{retta per } u_0 \textit{ con direzione } v$$

e calcolare

$$\delta F(u_0, v) :=^{4} \lim_{t\to 0} \frac{F(u_0+tv) - F(u_0)}{t}$$

Esempio 7. Consideriamo 3 funzionali

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2(x)dx \qquad G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|dx \qquad H(u) = \int_a^b \sqrt{|\dot{u}(x)|}dx$$

con $\mathbb{X} = \{u \in C^1([a,b]) | u(a) = A, u(b) = B\}$

Osservazione 3. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V = \{v \in C^1([a,b]) | v(a) = v(b) = 0\}$$

Metodo indiretto:

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v})^2\, dx = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b 2t\dot{u}\dot{v} + \int_a^b t^2\dot{v}^2$$

$$\Rightarrow \delta F(u,v) := \varphi'(0) \overset{5}{=} 2\int_a^b \dot{u}\dot{v}$$

Questa è detta **Prima forma integrale della variazione prima**.
Integriamo adesso per parti:

$$\varphi'(0) = 2[\dot{u}v]_a^b - 2\int_a^b \ddot{u}v = \underbrace{2(u(b)v(b) - u(a)v(a))}_{0} - 2\int_a^b \ddot{u}v = -2\int_a^b \ddot{u}v$$

Questa, invece, è detta **Seconda forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 4. Abbiamo usato $\ddot{u}$ che non è detto esista, ma tanto siamo ancora nella parte preliminare e non devo necessariamente essere formale.

Allora se u_0 è un punto di minimo

$$\int_a^b \dot{u}_0\dot{v} = 0 \qquad \forall v \in V$$

e se u fosse C^2

$$\int_a^b \ddot{u}_0 v = 0 \qquad \forall v \in V$$

[4]"derivata direzionale" o "alla Gateaux"

Dalla seconda sembra ragionevole dedurre che

$$\ddot{u}_0(x) \equiv 0 \Rightarrow u_0(x) = retta\ A \to B$$

Forniamo adesso la dimostrazione rigorosa:
Sia $u_0(x)$ la retta e sia $w(x)$ un qualunque altro elemento di $\mathbb{X}$. Allora

$$v = w - u_0 \in V$$

quindi si annulla in a e b.

$$F(w) = F(u_0+v) = \int_a^b (\dot{u}_0+\dot{v})^2 = \underbrace{\int_a^b \dot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2\underbrace{\int_a^b \dot{u}_0\dot{v}}_{0^6} + \underbrace{\int_a^b \dot{v}^2}_{\geq 0} \geq F(u_0) \qquad w(x)$$

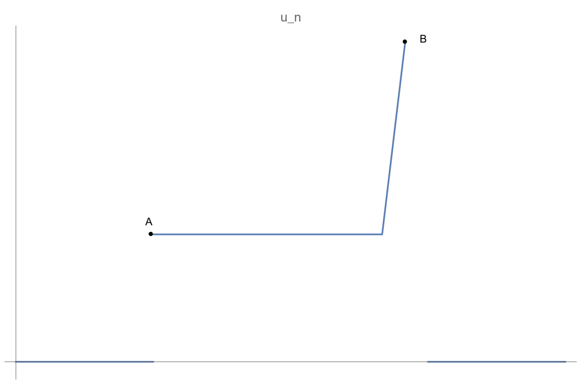
Abbiamo così dimostrato che $F(w) \geq F(u_0)$ e vale l'uguale $\iff \int_a^b \dot{v}^2 = 0 \iff \dot{v}(x) = 0 \iff v(x) = c.te$, ma $v(a) = v(b) = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow w(x))u_0(x)$.
Quindi la retta è l'unico punto di minimo

$$\ddot{u}_0(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Quest'ultima equazione è detta **Forma differenziale di ELE** [7].

Passiamo adesso al funzionale H.
Dico che $infH = 0$ e non è minimo a meno del caso banale A = B.
Infatti

$$H(u_n) = \int_{b-1/n}^b |\dot{u}_n(x)|^2\, dx = \int_{b-1/n}^b |(B-A)n|^{1/2}\, dx = |B-A|^{1/2}\sqrt{n}\frac{1}{n} \to 0 \qquad per\ n \to \infty$$



Osservazione 5. Non sarebbe C^1, ma fare un piccolo raccordo derivabile conta

[7] Equazioni di Eulero-Lagrange

davvero poco.

Osservazione 6. Fare l'inf in C^1, C^{27}, C^∞ o C^1 a tratti è sempre la stessa cosa, a patto che la Lagrangiana sia continua.

Con il funzionale $G(u)$ abbiamo che il minimo esiste e i punti di minimo sono tutte le monotone.
Supponiamo WLOG B>A. Allora

$$\int_a^b |\dot{u}(x)|\,dx \geq |\int_a^b \dot{u}(x)\,dx| = u(b) - u(a) = B - A \qquad \forall u$$

L'uguaglianza vale se e solo se $\dot{u}$ ha segno costante.

Osservazione 7. Lagrangiana:

- Strettamente convessa in p $\rightarrow$ BUONO
- Non convessa $\rightarrow$ GUAI IN VISTA
- Convessa, ma non strettamente $\rightarrow$ RISCHI UNICITA' E REGOLARITA'

Capitolo 3

Lezione 3

Lemma 2 (Fondamentale del calcolo delle variazioni (FLCV))**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty([a, b])$$

Allora

$$f(x) \equiv 0 \quad in\ [a, b]$$

Definizione 3 (Funzioni a supporto compatto)**.** $C_c^\infty([a, b])$ implica che $\exists [c, d] \subset (a, b)$ t.c. $v(x) = 0$ fuori da $[c, d]$ (supporto compatto)

Vediamo due dimostrazioni per questo teorema

Dimostrazione 1 (Per assurdo). Supponiamo f non identicamente nulla, allora WLOG $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) > 0$ (altrimenti prendo -f).
Allora per continuità $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \forall x \in B(x_0, \delta$.
Prendo ora $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

$$v(x) = {}^{1} \begin{cases} v(x) = 1 & x \in B(x_0, \delta) \\ v(x) = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO □

Dimostrazione 2 (Per approssimazione).

[1] La C^∞-tizzo

Idea 1. Se

$$\int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad v \in C^0$$

Supponendo vero questo, prendiamo

$$v(x) \equiv f(x) \Rightarrow \int_a^b f^2(x) = 0 \iff {}^2 f(x) = 0$$

Fatto di approssimazione: $\forall v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, esiste una successione di funzioni $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.
1. $\exists M$ t.c. $|v_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b]$ (poichè v continua)
2. $v_n(x) \overset{u}{\to} v(x)$ sui compatti $K \subset (a,b)$
Questo basta per concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(x)f(x)\,dx = \int_a^b v(x)f(x)\,dx$$

Fisso $\epsilon > 0$ e ho convergenza degli integrali in $[a+\epsilon, b-\epsilon]$. Gli integrali in $[a, a+\epsilon], [b-\epsilon, b]$ si stimano per equilimitatezza.

Osservazione 8 (Generalizzazioni). Possiamo adesso chiederci per quali classi di funzioni V vale il lemma?
1. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo $\forall v \in Span\{v\}$.
2. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo sulla chiusura di V rispetto alla convergenza uniforme sui compatti contenuti in $[a,b] \setminus \{\text{numero finito di punti}\}$. (si dimostra per approssimazione).

Il lemma allora funziona per tutti gli spazi t.c. $\overline{Span\{v\}} = C^0$.

Lemma 3 (Du Bois-Reymond (DBR))**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)) \text{ t.c. } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

Allora

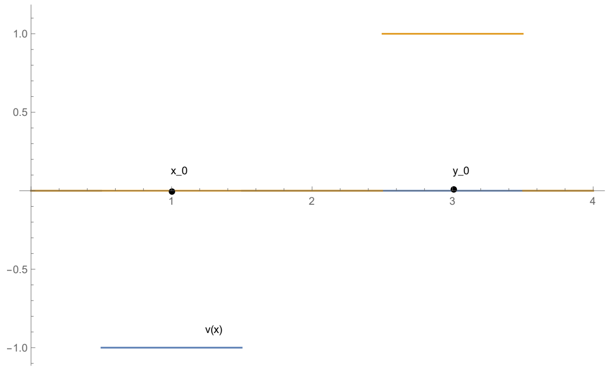
$$f(x) \equiv \text{ c.te} \qquad \text{in } [a,b]$$

Dimostrazione 3 (Per assurdo).

Idea 2. Se f soddisfa l'ipotesi allora anche $f(x) + c$ la verifica $\forall c \in \mathbb{R}$

Sia f non costante, allora WLOG $\exists x_0, y_0$ t.c. $f(x_0) < f(y_0)$.
A meno di aggiungere una costante, posso assumere $f(x_0) = -f(y_0)$.
Considero allora v del tipo

[2] Integriamo una funzione sempre positiva



dove v è simmetrica.

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO □

Dimostrazione 4 (Per approssimazione). Si dimostra che ogni funzione $v \in C^0$ a media nulla si può approssimare con funzioni $v \in C_c^\infty((a,b))$ a media nulla e quindi

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ con } \int_a^b v(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C^0 \text{ con } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

A questo punto prendo $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_a^b (f(x)+c)\,dx = 0$ e uso $v(x) = f(x)+c$. Ottengo quindi che $f(x)+c \equiv 0 \Rightarrow f(x)$ è costante. □

Anche in questo caso posso usare classi più ristrette di funzioni.

Esempio 8.

$$min\{\int_0^2 \dot{u}^2\,dx | \underbrace{u(0)=0, u(2)=5, \int_0^2 u(x)\,dx = 7\}}_{\mathbb{X}}$$

Osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V := \{v \in C^1([0,2]) | v(0)=0, v(2)=0, \int_0^2 v(x)\,dx = 0\}$$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ calcolo

$$F(u+tv) = F(u) + 2t\int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2\int_0^2 \dot{v}^2 \Rightarrow \delta F(u,v) = \lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = 2\int_0^2 \dot{u}\dot{v}$$

Integrando per parti e supponendo $u \in C^2$ troviamo

$$\delta F(u,v) = -2\int_0^2 \ddot{u}v$$

Quindi se u è un punto di minimo deve verificare

$$\int_0^2 \ddot{u}v = 0$$

$$\forall v \in C^1([0,2]) \text{ t.c. } \int_0^2 v(x) = 0, v(0) = v(2) = 0$$

Possiamo allora applicare il lemma DBR e quindi $\ddot{u}$ = costante $\Rightarrow u(x) = ax^2 + bx + c$.
Imponendo le 3 condizioni trovo poi a,b,c.
Una volta trovato il punto di minimo faccio la dimostrazione con la disuguaglianza.

Lemma 4 (DBR altro enunciato)**.**

$$\int_a^b f(x)\dot{v}(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora

$$f(x) \equiv \text{ c.te in } [a,b]$$

Dimostrazione 5. Basta osservare che le funzioni $\dot{v}$ con $v \in C_c^\infty((a,b))$ sono tutte e sole le $w \in C_c^\infty$ a media nulla (l'integrale è ka differenza tra i valori agli estremi).

Esempio 9.

1. $\int_a^b fv = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$ t.c. $\int_a^b v = 2017$
2. $\int_a^b f\ddot{v} = 0 \quad v \in C_c^\infty$

1. $f = 0$, la dimostrazione è analoga a quella per v a media nulla
2. $f(x)$ è una funzione affine del tipo $ax + b$