Calcolo delle variazioni

Lezioni di Gobbino 17/18

2 agosto 2021

Capitolo 1

Lezione 1

Il calcolo delle variazioni consiste nello studio di problemi di minimo.
In particolar modo, abbiamo un insieme $\mathbb{X}$ ed una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e vogliamo trovare $\min\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$.
Ci sono 4 metodi di approccio al problema:
1.**Metodo indiretto** 2.**Metodo diretto**
3.**Rilassamento** 4.**Gamma-convergenza**

Esempio 1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = x^2 - 4x$$

Metodo indiretto: $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 2 \Rightarrow min = f(2) = -4$

Proviamo adesso a dimostrare che $f(x)$ è sempre $\leq$ di -4 [1].

$$x^2 - 4x \geq -4 \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0$$

che è vero, inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x = 2$.
Metodo diretto: dimostriamo che il minimo esiste, ad esempio usando il teorema di Weierstrass generalizzato:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{continua e} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \textit{il minimo esiste}$$

Ora che so che esiste posso vedere dove $f'(x) = 0$.

Esempio 2. Cerchiamo $\min\{(x^2 - 2)^2 | x \in \mathbb{Q}\}$
In questo caso il minimo non esiste. Possiamo perciò chiederci: chi è l'inf? Come sono fatte le successioni "minimizzanti"?
L'inf è 0 e le succ. min. hanno una sottosuccessione che tende a $\pm\sqrt{2}$.

[1] Questa è la vera dimostrazione

Rilassamento: Con questo metodo rilassiamo le condizioni imposte dal problema e per farlo possiamo procedere in due modi: 1.Estendo f ad un ambiente più vasto;
2.Cambio la funzione in modo che il minimo abbia più probabilità di esistere.

Esempio 3. Consideriamo una famiglia di problemi di minimo:

$$m_n := min\{e^{x^2} + atg(x) + nsin^2(x)|x \in \mathbb{R}^n\}$$

e chiediamoci:
a cosa tende m_n quando $n \to \infty$?
a cosa tendono i punti di minimo quando $n \to \infty$?
Ci aspettiamo che $m_n \to m_\infty := min\{e^{x^2} + atg(x)|x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Per rispondere a queste domande usiamo la gamma convergenza.

Definizione 1. Generalemente $\mathbb{X}$ sarà uno spazio di funzioni. Chiameremo allora

$$F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

Funzionale

Esempio 4.

$$F(u) = \int_2^4 (\dot{u}^2 + sin(u))\, dx$$

Un particolare tipo di funzionali sono poi quelli **integrali**

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x))\, dx$$

con $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
In generale scriveremo $L(x, s, p)$ dette Lagrangiane.
Altre generalizzazioni possibili sono:

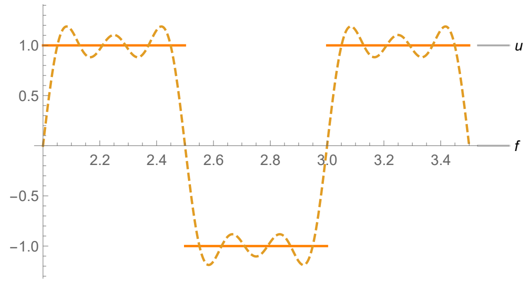
$$F(u) := \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots)dx$$

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dots)dx$$

Osservazione 1. Problemi più complicati sono del tipo:
1.Più variabili in partenza
2.Più variabili in partenza e arrivo (caso vettoriale)

Esempio 5 (Classico)**.** Data f(x) trovare

$$min\{\int_a^b \dot{u}^2 + (u - f)^2\, dx|u \in C^1([a, b])\}$$

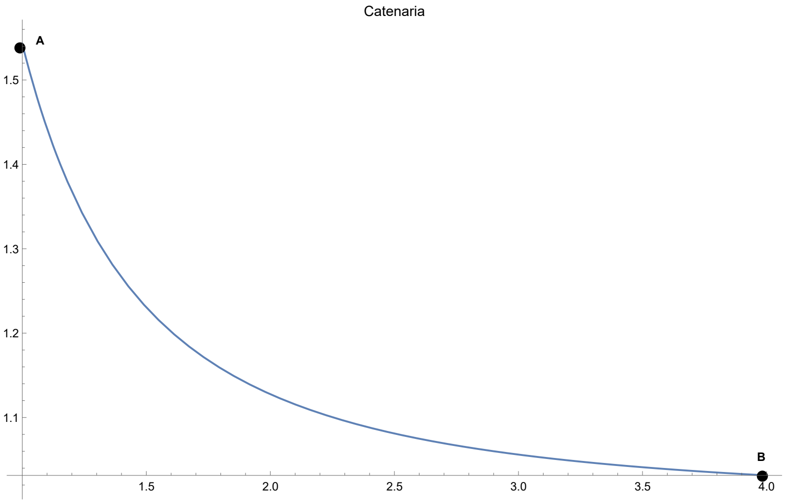


con f che può essere ad esempio il segnale di un cellulare.

Esempio 6 (Classico)**.**

$$min\{\int_a^b (\dot{u}^2 + u)dx | u(a) = A, u(b) = B, u \in C^1([a, b])\}$$

con A e B dati



Capitolo 2

Lezione 2

La variazione prima di un funzionale è l'analogo della derivata prima per una funzione.

Definizione 2. Consideriamo un insieme $\mathbb{X}$ ed $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di minimo e siano $\delta > 0, \gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{X}$ t.c. $\gamma(0) = x_0$. Posso considerare la funzione composta

$$\varphi(t) := F(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$$

con minimo in t=0.
Pongo allora $\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$([1]).
$\delta F(x_0, \gamma)$ è detto **Variazione prima del funzionale F lungo una curva** γ.

Osservazione 2. La definizione è valida $\forall x_0$, anche non di minimo, e $\forall$ curva $\gamma : \gamma(0) = x_0$ purchè $\varphi'(0)$ esista.

Lemma 1. Se $x_0 \in argmin$[2]$\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$, allora

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0$$

quando esiste.

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento[3] V.
In particolare

$$\forall u \in \mathbb{X}, \forall v \in V \ \textit{si ha che} \ u + v \in \mathbb{X}$$

[1] Posto che esista
[2] $x \in \mathbb{X}$ t.c. f(x) è un minimo
[3] traslato che passa per l'origine, detto anche giacitura

In questo caso, dati $u_0 \in \mathbb{X}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ posso considerare la curva

$$t \to u_0 + tv : \textit{retta per } u_0 \textit{ con direzione } v$$

e calcolare

$$\delta F(u_0, v) := {}^4 \lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t}$$

Esempio 7. Consideriamo 3 funzionali

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2(x)dx \qquad G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|dx \qquad H(u) = \int_a^b \sqrt{|\dot{u}(x)|}dx$$

con $\mathbb{X} = \{u \in C^1([a, b])|u(a) = A, u(b) = B\}$

Osservazione 3. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V = \{v \in C^1([a, b])|v(a) = v(b) = 0\}$$

Metodo indiretto:

$$\varphi(t) = F(u + tv) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v})^2 \, dx = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b 2t\dot{u}\dot{v} + \int_a^b t^2\dot{v}^2$$

$$\Rightarrow \delta F(u, v) := \varphi'(0) \overset{5}{=} 2 \int_a^b \dot{u}\dot{v}$$

Questa è detta **Prima forma integrale della variazione prima**.
Integriamo adesso per parti:

$$\varphi'(0) = 2[\dot{u}v]_a^b - 2\int_a^b \ddot{u}v = \underbrace{2(u(b)v(b) - u(a)v(a))}_{0} - 2\int_a^b \ddot{u}v = -2\int_a^b \ddot{u}v$$

Questa, invece, è detta **Seconda forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 4. Abbiamo usato $\ddot{u}$ che non è detto esista, ma tanto siamo ancora nella parte preliminare e non devo necessariamente essere formale.

Allora se u_0 è un punto di minimo

$$\int_a^b \dot{u}_0\dot{v} = 0 \qquad \forall v \in V$$

e se u fosse C^2

$$\int_a^b \ddot{u}_0 v = 0 \qquad \forall v \in V$$

[4] "derivata direzionale" o "alla Gateaux"

Dalla seconda sembra ragionevole dedurre che

$$\ddot{u}_0(x) \equiv 0 \Rightarrow u_0(x) = retta\ A \to B$$

Forniamo adesso la dimostrazione rigorosa:
Sia $u_0(x)$ la retta e sia $w(x)$ un qualunque altro elemento di $\mathbb{X}$. Allora

$$v = w - u_0 \in V$$

quindi si annulla in a e b.

$$F(w) = F(u_0+v) = \int_a^b (\dot{u}_0+\dot{v})^2 = \underbrace{\int_a^b \dot{u}_0^2}_{F(u_0)} + \underbrace{2\int_a^b \dot{u}_0\dot{v}}_{0^6} + \underbrace{\int_a^b \dot{v}^2}_{\geq 0} \geq F(u_0) \qquad w(x)$$

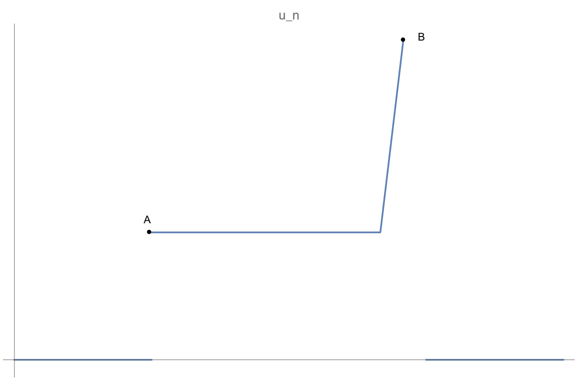
Abbiamo così dimostrato che $F(w) \geq F(u_0)$ e vale l'uguale $\iff \int_a^b \dot{v}^2 = 0 \iff \dot{v}(x) = 0 \iff v(x) = c.te$, ma $v(a) = v(b) = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow w(x)u_0(x)$.
Quindi la retta è l'unico punto di minimo

$$\ddot{u}_0(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Quest'ultima equazione è detta **Forma differenziale di ELE** [7].

Passiamo adesso al funzionale H.
Dico che $infH = 0$ e non è minimo a meno del caso banale A = B.
Infatti

$$H(u_n) = \int_{b-1/n}^b |\dot{u}_n(x)|^2\,dx = \int_{b-1/n}^b |(B-A)n|^{1/2}\,dx = |B-A|^{1/2}\sqrt{n}\frac{1}{n} \to 0 \qquad per\ n \to \infty$$



Osservazione 5. Non sarebbe C^1, ma fare un piccolo raccordo derivabile conta

[7]Equazioni di Eulero-Lagrange

davvero poco.

Osservazione 6. Fare l'inf in C^1, C^{27}, C^∞ o C^1 a tratti è sempre la stessa cosa, a patto che la Lagrangiana sia continua.

Con il funzionale $G(u)$ abbiamo che il minimo esiste e i punti di minimo sono tutte le monotone.
Supponiamo WLOG B>A. Allora

$$\int_a^b |\dot{u}(x)|\, dx \geq |\int_a^b \dot{u}(x)\, dx| = u(b) - u(a) = B - A \qquad \forall u$$

L'uguaglianza vale se e solo se $\dot{u}$ ha segno costante.

Osservazione 7. Lagrangiana:

- Strettamente convessa in p $\to$ BUONO
- Non convessa $\to$ GUAI IN VISTA
- Convessa, ma non strettamente $\to$ RISCHI UNICITA' E REGOLARITA'

Capitolo 3

Lezione 3

Lemma 2 (Fondamentale del calcolo delle variazioni (FLCV))**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty([a,b])$$

Allora

$$f(x) \equiv 0 \quad in\ [a,b]$$

Definizione 3 (Funzioni a supporto compatto)**.** $C_c^\infty([a,b])$ implica che $\exists [c,d] \subset (a,b)$ t.c. $v(x) = 0$ fuori da $[c,d]$ (supporto compatto)

Vediamo due dimostrazioni per questo teorema

Dimostrazione 1 (Per assurdo). Supponiamo f non identicamente nulla, allora WLOG $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) > 0$ (altrimenti prendo -f).
Allora per continuità $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \forall x \in B(x_0, \delta$.
Prendo ora $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

$$v(x) =^{1} \begin{cases} v(x) = 1 & x \in B(x_0,\delta) \\ v(x) = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO ☐

Dimostrazione 2 (Per approssimazione).

[1] La C^∞-tizzo

Idea 1. Se

$$\int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad v \in C^0$$

Supponendo vero questo, prendiamo

$$v(x) \equiv f(x) \Rightarrow \int_a^b f^2(x) = 0 \iff {}^2 f(x) = 0$$

Fatto di approssimazione: $\forall v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, esiste una successione di funzioni $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.
1. $\exists M$ t.c. $|v_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b]$ (poichè v continua)
2. $v_n(x) \xrightarrow{u} v(x)$ sui compatti $K \subset (a,b)$
Questo basta per concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(x)f(x)\,dx = \int_a^b v(x)f(x)\,dx$$

Fisso $\epsilon > 0$ e ho convergenza degli integrali in $[a+\epsilon, b-\epsilon]$. Gli integrali in $[a, a+\epsilon], [b-\epsilon, b]$ si stimano per equilimitatezza.

Osservazione 8 (Generalizzazioni). Possiamo adesso chiederci per quali classi di funzioni V vale il lemma?
1. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo $\forall v \in Span\{v\}$.
2. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo sulla chiusura di V rispetto alla convergenza uniforme sui compatti contenuti in $[a,b] \setminus \{$numero finito di punti$\}$. (si dimostra per approssimazione).

Il lemma allora funziona per tutti gli spazi t.c. $\overline{Span\{v\}} = C^0$.

Lemma 3 (Du Bois-Reymond (DBR))**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)) \text{ t.c. } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

Allora

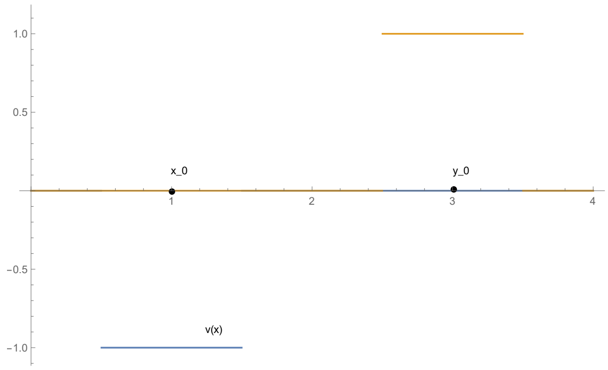
$$f(x) \equiv \text{ c.te} \qquad \text{in } [a,b]$$

Dimostrazione 3 (Per assurdo).

Idea 2. Se f soddisfa l'ipotesi allora anche $f(x) + c$ la verifica $\forall c \in \mathbb{R}$

Sia f non costante, allora WLOG $\exists x_0, y_0$ t.c. $f(x_0) < f(y_0)$.
A meno di aggiungere una costante, posso assumere $f(x_0) = -f(y_0)$.
Considero allora v del tipo

[2] Integriamo una funzione sempre positiva



dove v è simmetrica.

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO $\square$

Dimostrazione 4 (Per approssimazione). Si dimostra che ogni funzione $v \in C^0$ a media nulla si può approssimare con funzioni $v \in C_c^\infty((a,b))$ a media nulla e quindi

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ con } \int_a^b v(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C^0 \text{ con } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

A questo punto prendo $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_a^b (f(x)+c)\,dx = 0$ e uso $v(x) = f(x) + c$. Ottengo quindi che $f(x) + c \equiv 0 \Rightarrow f(x)$ è costante. $\square$

Anche in questo caso posso usare classi più ristrette di funzioni.

Esempio 8.

$$min\{\int_0^2 \dot{u}^2\,dx | \underbrace{u(0) = 0, u(2) = 5, \int_0^2 u(x)\,dx = 7\}}_{\mathbb{X}}$$

Osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V := \{v \in C^1([0,2]) | v(0) = 0, v(2) = 0, \int_0^2 v(x)\,dx = 0\}$$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ calcolo

$$F(u+tv) = F(u) + 2t\int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2\int_0^2 \dot{v}^2 \Rightarrow \delta F(u,v) = \lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 2\int_0^2 \dot{u}\dot{v}$$

Integrando per parti e supponendo $u \in C^2$ troviamo

$$\delta F(u,v) = -2\int_0^2 \ddot{u}v$$

Quindi se u è un punto di minimo deve verificare

$$\int_0^2 \ddot{u}v = 0$$

$$\forall v \in C^1([0,2]) \text{ t.c. } \int_0^2 v(x) = 0, v(0) = v(2) = 0$$

Possiamo allora applicare il lemma DBR e quindi $\ddot{u}$ = costante $\Rightarrow u(x) = ax^2 + bx + c$.
Imponendo le 3 condizioni trovo poi a,b,c.
Una volta trovato il punto di minimo faccio la dimostrazione con la disuguaglianza.

Lemma 4 (DBR altro enunciato)**.**

$$\int_a^b f(x)\dot{v}(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora

$$f(x) \equiv \text{ c.te in } [a,b]$$

Dimostrazione 5. Basta osservare che le funzioni $\dot{v}$ con $v \in C_c^\infty((a,b))$ sono tutte e sole le $w \in C_c^\infty$ a media nulla (l'integrale è ka differenza tra i valori agli estremi).

Esempio 9.

1. $\int_a^b fv = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$ t.c. $\int_a^b v = 2017$
2. $\int_a^b f\ddot{v} = 0 \quad v \in C_c^\infty$

1. $f = 0$, la dimostrazione è analoga a quella per v a media nulla
2. $f(x)$ è una funzione affine del tipo $ax + b$

Osservazione 9. Stiamo con questi lemmi cercando l'ortogonale in $L^2([a,b])$ di un certo sottoinsieme V.

Capitolo 4

Lezione 4

In questo capitolo studiamo la nascita delle condizioni al bordo (BC).

Esempio 10.

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 + u^2 \, dx$$

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = A, u(1) = B\}$$

$$F(u + tv) = \int_0^1 (\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u + tv) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + u^2 + 2tuv + t^2v^2)$$

$$\Rightarrow \delta F(u,v) = 2 \int (\dot{u}\dot{v} + uv) \qquad \textbf{1° forma integrale}$$

Integrando, poi, per parti otteniamo

$$\delta F(u,v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u)v \qquad \textbf{2° forma integrale}$$

Osservazione 10. Ricordiamo che i termini di bordo sono nulli poichè $v(0) = v(1) = 0$

Se u è un punto di minimo, allora per FLCV

$$-\ddot{u} + u \equiv 0 \Rightarrow \underbrace{\ddot{u} = u}_{ELE}, \qquad \underbrace{u(0) = A, u(1) = B}_{\text{DBC, Dirichlet Boundary Condition}}$$

Esempio 11. Consideriamo la stessa $F(u)$, ma adesso $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = A\}$
In questo caso $V = \{v \in C^1([0,1]) | v(0) = 0\}$
Allora

$$\delta F(u,v) = 2 \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + uv$$

Integrando per parti allora otteniamo

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) + [\dot{u}v]_0^1 \tag{4.1}$$
$$= 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + u(1)v(1) \tag{4.2}$$

In questo caso la seconda forma integrale contiene un termine di bordo.
Se u è un punto di minimo, allora questa è 0 $\forall v \in V$. Procedo in due fasi:
1. Mi limito a considerare le v che verificano anche $v(1) = 0$. Ottengo quindi la stessa equazione del primo esempio $\ddot{u} = u$.
2. Adesso l'equazione diventa

$$\dot{u}(1)\dot{v}(1) = 0$$

allora basta prendere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ per ottenere che $\dot{u}(1) = 0$
Alla fine si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{u} = u, & ELE \\ u(0) = A, & DBC \\ \dot{u}(1) = 0, & NBC, \text{ Neumann boundary condition} \end{cases}$$

Si conclude poi sempre mediante disuguaglianza.

Esempio 12. Stessa $F(u)$, $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1])\}$. Nascono in questo caso le due Neumann agli estremi:

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio 13. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = u(1)$. In questo caso $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale quindi $V = \mathbb{X}$.

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + 2\dot{u}(1)v(1) - 2\dot{u}(0)v(0) \tag{4.3}$$
$$= 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + 2v(0)(\dot{u}(1) - \dot{u}(0)) \tag{4.4}$$

Nella prima fase pongo $\ddot{u} = u$, mentre nella seconda prendo v con $v(0) = v(1) \neq$

0 ed ottengo $\dot{u}(1) = \dot{u}(0)$. Devo allora risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

Le ultime due condizioni sono dette **PBC, Periodic BC**

Esempio 14. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = u(1)+5\} \Rightarrow V = \{v \in C^1([0,1]) | v(0) = v(1)\}$
Con lo stesso conto di prima troviamo che $\dot{u}(1) = \dot{u}(0)$ e quindi

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \\ u(0) = u(1) + 5 \end{cases}$$

Esempio 15. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(\frac{1}{2}) = A\} \Rightarrow V = \{v \in C^1([0,1]) | v(\frac{1}{2}) = 0\}$
Quindi

$$\frac{1}{2}\delta F(u,v) = \int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + \dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0)$$

Nella prima fase uso v con $v(0) = v(1) = 0$ oltre a $v(\frac{1}{2}) = 0$. Allora per FLCV $\ddot{u} = u$.
Dalla seconda fase ottengo poi, come NBC, $\dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$.Ottengo quindi

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

che sono in generale troppe condizioni.
Si verificano quindi due casi:
1. C'è la soluzione e con la disuguaglianza posso mostrare che è un minimo;
2. Le condizioni sono incompatibili e quindi il minimo non esiste. Ci possiamo quindi chiedere chi sia l'inf.
Per rispondere a questa domanda risolvo i problemi separatamente

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

Accade dunque che in $\frac{1}{2}$ non si incollano C^1.

Osservazione 11. Se fosse stato $F(u) = \int \ddot{u}^2 + u^2$, allora ELE di ordine 4, cioè il grado di ELE è sempre il doppio dell'ordine di derivazione.

Osservazione 12. Se nel problema iniziale metto $\dot{u}(0) = 3$ ottengo come sempre che $\ddot{u} = u$ e che

$$\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 3$$

quindi non esiste il minimo, ma più in generale se $F(u)$ dipende da u e $\dot{u}$ non posso mettere condizioni su $\dot{u}$.

Capitolo 5

Lezione 5

5.1 Equazione di Eulero-Lagrange

Sia

$$F(u) = \int_a^b L(x, \dot{u}, \ddot{u})\, dx$$

con

$$L : \underbrace{[a, b]}_{\ni x} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\ni s} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\ni p} \to \mathbb{R}$$

Data $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ e data $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $v(a) = v(b) = 0$ posso definire

$$\psi(t) := F(u + tv) = \int_a^b L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\, dx$$

e porre

$$\delta F(u, v) := \psi'(0)$$

Teorema 1 (Integrali dipendenti da parametro)**.** Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $\delta > 0$, sia

$$f : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \qquad x \in [a, b], t \in (-\delta, \delta)$$

Poniamo

$$\psi(t) := \int_a^b f(x, t)\, dx$$

Allora

1. Se $f(x, t)$ è continua in $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora $\psi(t)$ è continua in $(-\delta, \delta)$;

2. Se $f_t(x, t)$ è continua in $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora ψ è derivabile e $\psi'(t) = \int_a^b f_t(x, t)\, dx$. Cioè la derivata dell'integrale è l'integrale della

derivata.

Utilizzando il teorema otteniamo che

$$\psi'(t) = \int_a^b L_s(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})v + L_p(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\dot{v}\, dx$$

da cui

$$\delta F(u, v) = \psi'(0) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]\, dx$$

che è quella che avevamo chiamato la **Prima forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 13. Abbiamo utilizzato come ipotesi che $L \in C^1$ in s e p, $u \in C^1, v \in C^1$. Non abbiamo ancora utilizzato $v(a) = v(b) = 0$, che useremo per la seconda forma.

Integrando poi per parti il secondo termine troviamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}\, dx = [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^b - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]'v\, dx$$

Se $v(a) = v(b) = 0$, il termine di bordo si annulla e troviamo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u}) - L_p'(x, u, \dot{u})]v\, dx$$

detta **Seconda forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 14. Qui utilizziamo $L \in C^2, u \in C^2, v \in C^1$ e $v(a) = v(b) = 0$.

Se u è un punto di minimo (tra quelli che hanno lo stesso dato al bordo), allora la $\delta F(u, v) = 0\ \forall v \in V$. Allora utilizzando il lemma fondamentale ottengo che

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})$$

ELE in forma differenziale.

Osservazione 15 (Condizione di Neumann in generale).

$$u \in argmin\{F(u) | \underbrace{u \in C^1([a, b]), u(a) = A}_{\mathbb{X}}\}$$

Se c'è abbastanza regolarità, usando solo v con $v(a) = v(b) = 0$ ritroviamo ELE come sopra.

Integrando per parti la prima forma troviamo

$$0 = \delta F(u,v) = \int_a^b \underbrace{[(L_p(x,u,\dot{u}))' - L_s(x,u,\dot{u})]}_{\text{0 per ELE}} v\,dx + [L_p(x,u,\dot{u})v]_a^b$$

$$\Rightarrow L_p(b,u(b),\dot{u}(b))v(b) - L_p(a,u(a),\dot{u}(a))v(a) = 0$$

adesso posso mettere $v(a) = 0$, ma $v(b)$ può essere 1, quindi si ha una condizione su L_p in un estremo.

$$L_p(x,u,\dot{u}) = 0 \qquad \text{nell'estremo considerato è detta NBC generale}$$

Osservazione 16. L'equazione ELE

$$[L_p(x,u,\dot{u})]' = L_s(x,u,\dot{u})$$

espansa diventa

$$L_{px}(x,u,\dot{u}) + L_{ps}(x,u,\dot{u})\dot{u} + L_{pp}(x,u,\dot{u})\ddot{u} = L_s(x,u,\dot{u})$$

che si può scrivere in forma normale e quindi soddisfa il teorema di Cauchy-Lipschitz se

$$L_{pp}(x,u,\dot{u}) \neq 0 \qquad \forall x \in [a.b]$$

5.1.1 ELE in forma DBR

Scrivo la prima forma integrale, introduco la funzione

$$\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt$$

e osservo che

$$\int_a^b L_s(x,u,\dot{u})v = [\hat{L}(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \hat{L}(x)\dot{v}(x)\,dx$$

Il termine di bordo si annulla e ottengo

$$\delta F(u,v) = \int_a^b [\hat{L}(x) + L_p(x,u,\dot{u})]\dot{v}\,dx$$

Se u è un punto di minimo/massimo, allora dal lemma DBR otteniamo che

$$L_p(x,u,\dot{u}) = c + \int_a^x L_s(t,u(s),\dot{u}(s))\,ds \qquad \text{ELE-DBR}^1$$

[1]serve meno regolarità in L ed u

5.1.2 ELE in forma ERDMANN

Consideriamo il caso in cui la Lagrangiana non dipenda da x.

$$(L_p(u, \dot{u}))' = L_s(u, \dot{u})$$

Moltiplico a destra e sinistra per $\dot{u}$ ed ottengo

$$(L_p(u, \dot{u}))'\dot{u} = L_s(u, \dot{u})\dot{u}$$
$$\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' - L_p(u, \dot{u})\ddot{u} = L_s(u, \dot{u})\dot{u}$$
$$\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' = L_s(u, \dot{u})\dot{u} + L_p(u, \dot{u})\ddot{u}$$
$$\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' = (L(u, \dot{u}))'$$

e quindi

$$L_p(u, \dot{u})\dot{u} = L(u, \dot{u}) + c$$

questa è detta equazione **ELE-Erdmann**.

Osservazione 17. Questa è un'equazione differenziale di ordine 1.

Osservazione 18. ELE classica ed ELE Erdmann <u>non</u> sono equivalenti, ma

u soddisfa ELE classica $\Rightarrow$ u soddisfa ELE-Erdmann

u soddisfa ELE-Erdmann $\Rightarrow$ u soddisfa ELE classica nei punti $x \in [a, b]$ t.c. $\dot{u}(x) \neq 0$[2]

Osservazione 19 (Piccola generalizzazione). Consideriamo il caso in cui F dipenda da più derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)})\, dx \tag{5.1}$$
$$= \int_a^b L(x, s, p_1, \dots, p_k) \tag{5.2}$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_s(\dots)v + L_{p_1}(\dots)\dot{v} + \dots + L_{p_k}(\dots)v^{(k)}$$

Integrando per parti e supponendo v abbastanza nulla al bordo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s - (L_{p_1})' + (L_{p_2})'' + \dots]v\, dx$$

[2]Basta fare i passaggi al contrario

Quindi se u è un punto di min/max dal FLCV troviamo

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{dx^i}L_{p_i}(x,u,\dot{u},\ldots,u^k) = L_s(x,u,\dot{u},u^k)$$

che è la ELE per dipendenza da più derivate.

Capitolo 6

Lezione 6

6.1 Come dimostrare che u è un minimo di F

Alcune strategie possibili:

1. Convessità
2. Lemma trivial
3. Calibrazioni
4. Campi di Weierstrass

6.1.1 Convessità

Da analisi 1 sappiamo che: se $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e $x_0 \in (c, d)$, allora esiste una costante $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in [c, d]$$

In generale basta prendere $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$.
Da analisi 2 sappiamo che: se $f(x, y)$ è convessa e se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, allora esistono $m_1 \in \mathbb{R}, m_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) \quad \forall (x, y) \in \text{Dominio}$$

Teorema 2. Consideriamo adesso $F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u})\, dx$ con DBC.
Supponiamo che:

1. Ci sia abbastanza regolarità

2. $u_0(x)$ sia soluzione di ELE con DBC

3. $\forall x \in [a,b]$ la funzione $(s,p) \to L(x,s,p)$ è convessa come funzione di due variabili.

Allora u_0 è un punto di minimo per il problema con le DBC.

Dimostrazione 6. Prendo un qualunque altro competitore w e pongo $v(x) := w(x) - u(x)$ ed osservo che $v(a) = v(b) = 0$. Scrivo che

$$F(w) = F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, \dot{u_0} + \dot{v})\, dx$$

Dopodichè dalla convessità e regolarità di L ottengo la disuguaglianza

$$L(x, s + s_1, p + p_1) \geq L(x, s, p) + L_s(x, s, p)s_1 + L_p(x, s, p)p_1$$

Prendendo poi $s = u_0, s_1 = v, p = \dot{u}_0, p_1 = \dot{v}$ si ha che

$$F(w) \geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) + \underbrace{L_s(x, u, \dot{u}_0)v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0)\dot{v}}_{=0 \text{ per la prima forma integrale di ELE}}$$

$$\Rightarrow F(w) \geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u_0}) = F(u_0) \quad \square$$

Osservazione 20. Abbiamo in realtà usato solo che u_0 risolve la prima forma integrale di ELE, che richiede meno regolarità su L. Inoltre, se L fosse strettamente convessa in (s,p), allora la disuguaglianza di analisi 2 è stretta se $(x,y) \neq (x_0, y_0)$, da cui l'unico modo per avere uguaglianza è che v e $\dot{v}$ siano nulle, cioè $v(x) \equiv 0$. Quindi u_0 è l'unico punto di minimo.

Esempio 16.

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}(x))^4\, dx$$

e minimizzo con $u(0) = 0, u(1) = 5$. Allora

$$L(x,s,p) = p^4 \Rightarrow [L_p(x,s,p)]' = L_s(x,s,p) \Rightarrow (4\dot{u}^3)' = 0 \Rightarrow \dot{u} = c.te \Rightarrow u = \text{retta}$$

Per l'enunciato precedente, la retta è l'unico punto di minimo; tuttavia se non pensiamo alla convessità è meno evidente:

$$F(w) = F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u}+\dot{v})^4 = \int_0^1 (\underbrace{\dot{u}^4}_{=F(u)} + \overbrace{4\dot{u}^3\dot{v}}^{=0 \text{ integrando per parti ed usando ELE}} + \underbrace{6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4}_{\geq \text{ ma non del tutto evidente}}$$

Lemma 5 (Lemma trivial)**.** Sia $\mathbb{X}$ un insieme, e siano $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che

1. $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}$

2. $x_0 \in \mathbb{X}$ è punto di minimo di G

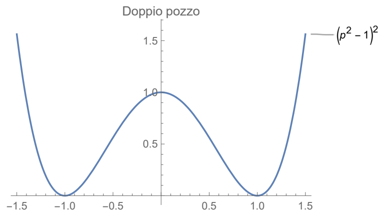
3. $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è punto di minimo per F.

Dimostrazione 7.

$$\forall x \in \mathbb{X} \text{ vale: } F(x) \underbrace{\geq}_{1} G(x) \underbrace{\geq}_{2} G(x_0) \underbrace{=}_{3} F(x_0) \quad \square$$

Esempio 17. Consideriamo il funzionale $F(u) = \int_o^2 (\dot{u}^2 - 1)^2 \, dx$ e l'insieme $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) | u(0) = 1, u(2) = 7\}$. In questo caso la Lagrangiana non è convessa in p come si evince dalla figura



.
Supponiamo adesso che la retta $u_0(x) := 1 + 3x$ sia l'unico punto di minimo e troviamo la G giusta.
Idea: convessifico L. Considero

$$\hat{L}(p) = \begin{cases} L(p) & |p| \geq 1 \\ 0 & |p| \leq 1 \end{cases}$$

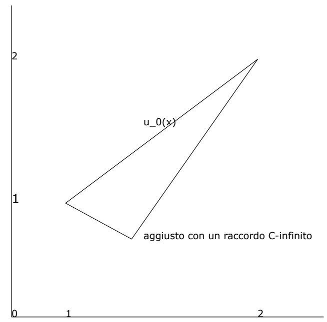
ed osservo che $\hat{L}$ è convessa. Pongo

$$G(u) := \int_0^2 \hat{L}(\dot{u}) \, dx$$

e verifico le ipotesi.
(1) segue da $L \geq \hat{L}$; (2) segue dalla convessità di $\hat{L}$, quindi u_0 è punto di minimo per G; (3) segue dal fatto che $L(3) = \hat{L}(3)$. Da questo segue che u_0 è punto di minimo per F. Inoltre G ha come unico minimo u_0, in quanto $\hat{L}$ strettamente convessa in un intorno di $p = 3$, quindi u_0 è l'unico punto di minimo di G.

Osservazione 21. Cosa succede nell'esempio se $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = 1, u(1) = 2\}$?
In questo caso la retta $u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ non è punto di minimo, anzi il minimo

non esiste e l'inf è 0.



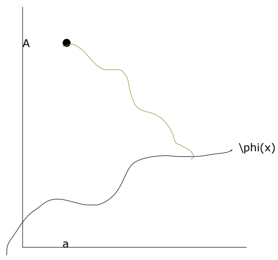
Minimizziamo adesso $F(u) = \int_0^2 [(\dot{u}^2 - 1)^2 + \underbrace{(u - 1 - \frac{1}{2}x)^2}_{\text{in questo caso pago se mi allontano da } u_0(x)}]$.

L'inf resta 0.

Capitolo 7

Lezione 7

7.1 Transversality and Point-to-Curve problems



Definizione 4 (Point to curve problem)**.** Sia dato un punto $(a, A) \in \mathbb{R}^2$ e sia data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideriamo

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u})\, dx$$

Voglio minimizzare F(u) tra tutte le coppie (u, b) tali che

$$u \in C^1([a, b]), u(a) = A, u(b) = \varphi(b)$$

l'ultima condizione implica che il punto terminale sia sul grafico di $\phi(x)$.

Osservazione 22. Può essere che b non sia la prima intersezione.

Vogliamo trovare l'equazione di Eulero-Lagrange in questo caso.

Teorema 3 (Transversality condition)**.** Se $L \in C^2, \varphi \in C^2$ e (u_0, x_0) minimizza, allora

$$[L_p(x, u_0, \dot{u}_0)]' = L_s(x, u_0, \dot{u}_0) \qquad \forall x \in (a, x_0) : \text{solita ELE}$$

$$u_0(a) = A : \text{solita DBC}$$

$$L_p(x, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))[\dot{u}_0(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)] = L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))]$$

L'ultima condizione è detta **transversality**.

Osservazione 23. Se φ fosse una retta verticale (ma non lo può essere poichè deve essere funzione di x), verrebbe $\dot{\varphi}(x_0) = \infty$ da cui la classica NBC $L_p(x, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0)) = 0$

Dimostrazione 8. Consideriamo una funzione u(x) ed un punto x_0. Consideriamo poi $u + tv$ per una opportuna v(x) che intersecherà $\varphi(x)$. Sia x(t) il punto d'intersezione tra v e φ.
Esistenza ed unicità di x(t) è una questione di teorema delle funzioni implicite, cioè considero

$$\Phi(x, t) := u(x) + tv(x) - \varphi(x)$$

ed osservo che $\varphi(x_0, 0) = 0$ e spero che per $t \in (-\delta, \delta)$ io possa ricavare x in funzione di t.

$$\Phi_t(x, t) = v(x) \quad \Phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t\dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x) \Rightarrow \Phi_x(x_0, 0) = \dot{u}(x_0) + \dot{\varphi}(x_0)$$

Se $\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0) \neq 0$, allora posso ricavare. A questo punto pongo

$$\psi(t) := \int_a^{x(t)} L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\, dx \Rightarrow \psi'(0) = 0^1.$$

Quindi

$$\psi'(t) = \int_a^{x(t)} L_t + L(x(t), u(x(t)) + tv(x(t)), \dots)\dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]\, dx + L(x_0, u(x_0), \dots)\dot{x}(0)$$

$$= \int_a^{x_0} [L_s - L_p']v + [L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]_a^{x_0} + L(x_0, u(x_0), \dots)\dot{x}(0)$$

Dal teorema delle funzioni implicite ricavo che

$$\dot{x}(t) = -\frac{\Phi_t(x(t), t)}{\Phi_x(x(t), t)} \rightsquigarrow \dot{x}(0) = -\frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \varphi(x_0)}$$

Sostituendo

$$\psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s - L_p']v + L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\dot{v}(x_0) + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))(-\frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \varphi(x_0)})$$

[1] Punto di minimo

Adesso utilizzo funzioni v t.c. $v(x_0) = 0$ e da FLCV deduco ELE in (a, x_0).
Scelgo poi v con $v(x_0) = 1$ e ottengo

$$L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) = \frac{L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))}{\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)}$$

Moltiplicando ho la transversality.
Passo 2: Supponiamo $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.
Geometricamente questo significa che l'attacco è "smooth". Uso allora, come competitore, anzichè $u + tv$, la u "allungata".

$$\psi(t) := \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0}^{x_0+t} L(x, \varphi, \dot{\varphi})$$

$$\psi'(t) = L(x_0 + t, \varphi(x_0 + t), \dot{\varphi}(x_0 + t))$$

$$\Rightarrow \psi'(0) = L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) = L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

Osservazione 24. Non posso dire che $\psi'(0) = 0$ poichè ψ è definita solo per $t \geq 0$.

Posso dire solo che $\psi'(0) \geq 0$ da cui $L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \geq 0$.
Passo 3: cerco di "accorciare" la u.
inserire immagine minuto 31
In questo caso $\psi(t)$ = funzionale calcolato sulla u accorciata:

$$\psi(t) \int_a^{x_0-2t} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l, \dot{l})$$

con l: equazione della retta di raccordo

$$\Rightarrow \psi(t) = \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) - \int_{x_0-2t}^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l, \dot{l})$$

Il primo termine è costante, quindi quando derivo sparisce.
La derivata del secondo termine è

$$-2L(x_0 - 2t, u(x_0 - 2t), \dot{u}(x_0 - 2t))$$

Perciò quando metto t = 0 ottengo $-2L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)$.
Per derivare l'ultimo termine posso scrivere l'equazione di l come retta passante per due punti, oppure osservo che per il teorema della media integrale vale

$$\int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l(x), \dot{l}(x)) = tL(x(t), l(x(t)), \dot{l}(x(t)))$$

Dividendo per t e passando al limite per $t \to 0$, la derivata del terzo termine è

$$L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

poichè $x_0 - 2t \leq x(t) \leq x_0 - t$ e $l(x(t)) \in [u(x_0 - 2t, u(x_0 - t))]$. Per passare al limite $\dot{l}(x(t)) \to \dot{u}(x_0)$ serve che $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.
In conclusione

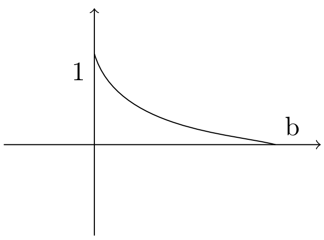
$$\psi'(t) = -L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \geq 0 \quad \text{per } t \geq 0$$

Questo completa la dimostrazione anche nel caso in cui $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$. $\square$

Esempio 18.

$$F(u, b) = \int_0^b (\dot{u}^2 + u^2)\, dx$$

e prendiamo come DBC $u(0) = 1, \varphi(x) \equiv 0$.



Esiste il minimo?

ELE:

$$L_p' = L_s \Rightarrow (2\dot{u})' = 2u \Rightarrow \ddot{u} = u \Rightarrow u(x) = acosh(x) + bsinh(x)$$

Da $u(0) = 1$ ottengo che

$$u(x) = cosh(x) + bsinh(x)$$

Impongo adesso la transversality

$$L_p(x, u, \dot{u})(\dot{u} - \dot{\varphi}) = L(x, u, \dot{u}) \quad \text{in } x_0$$

$$\Rightarrow 2\dot{u}(\dot{u} - 0) = \dot{u}^2 + u^2 \Rightarrow \dot{u}^2 = u^2$$

Nel punto di contatto vale $u(x_0) = 0$, quindi $\dot{u}(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x_0) = 0 \\ \dot{u}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzione, in quanto implicherebbe

$$b = -\frac{sinh(x_0)}{cosh(x_0)} = -\frac{cosh(x_0)}{sinh(x_0)} \Rightarrow sinh^2(x_0) = cosh^2(x_0) \rightarrow \text{impossibile}$$

Capitolo 8

Lezione 8

8.1 Road map metodo indiretto

1. Determino condizioni necessarie: ELE + BC
2. Spero di essere capace di risolverle
3. Spero di riuscire a dimostrare che le soluzioni sono minimi via convessità o via funzionale ausiliario

8.2 In quale classe ambientare i problemi?

$$F(u) = \int_a^b L(x, \dot{u}, \ddot{u})$$

Sia L continua in (x,s,p). Supponiamo di avere DBC (ma cambia poco se non ci sono). I possibili ambienti per il problema sono:

1. $u \in C^1$
2. $u \in C^\infty$
3. $u \in C^1$ a tratti

Teorema 4. L'inf di F(u) nelle tre classi è lo stesso.

Dimostrazione 9. E' facile conseguenza di un lemma di approssimazione.
Ogni funzione C^1 a tratti si può approssimare con una successione u_n di funzioni C^∞, dove si intende che

$$u_n \to u \text{ unif in } [a, b]$$

$\dot{u}_n \to \dot{u}$ unif sui compatti contenìuti in $[a, b] \setminus \{$ punti di discontinuità della derivata prima $\}$

$$\exists M \in \mathbb{R}\; t.c.\; |\dot{u}_n(x)| \leq M \;\forall x \in [a, b] \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio 19. Data $f : [a.b] \to \mathbb{R}$, risolvere

$$min\{\int_a^b \dot{u}^2 + (u-f)^2 | u \in C^1([a,b])\}$$

ELE: $(L_p)' = L_s \rightsquigarrow \ddot{u} = u - f$ che per molte classi di f si sa risolvere esplicitamente.
In ogni caso, per ogni f continua, esiste una famiglia a due parametri di soluzioni:

$$u(x) = a\cosh(x) + b\sinh(x) + \bar{u}(x)$$

con $\bar{u}(x)$ soluzione qualunque dell'eq. non omogenea. Nascono così le NBC: $L_p = 0$ al bordo, quindi $\dot{u}(a) = \dot{u}(b) = 0$.
Questo sistema ha quindi un'unica soluzione ed essa è un punto di minimo perchè $L(x,s,p) = p^2 + (s - f(x))^2$ è strettamente convessa nella coppia (s,p) e quindi la matrice Hessiana è definita positiva.

Proprietà 1 (Proprietà qualitativa della soluzione)**.**

$$max\{u(x)|x \in [a,b]\} \leq max\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

$$min\{u(x)|x \in [a,b]\} \geq min\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

Variazionale. Usiamo il solito argomento di troncamento: al minimo $u_0(x)$ non conviene andare sopra $f(x)$ perchè se tronco "risparmio" su $\dot{u}^2$ e su $(u-f)^2$.
In altre parole, supponiamo esista $x_0 \in (a,b)$ t.c. $u(x_0) > max(f(x))$.
Siano $x_1 < x_0 < x_2$ t.c. $u(x_1) = max(f(x))$ e $u(x_2) = max(f(x))$, allora

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{fuori da } [x_1, x_2] \\ max(f) & \text{in } [x_1, x_2] \end{cases}$$

Allora $F(\bar{u}) < F(u)$ con $\bar{u}$ ammissibile poichè C^1 a tratti.
Se x_1, x_2 in qualche modo non esistono posso prendere $x_1 = a, x_2 = b$ □

Osservazione 25. Prendere $\bar{u}(x) := min\{u(x), maxf\}$ è pericoloso perchè non è detto che sia C^1 a tratti.

Esempio 20.

$$min\{\int_{-1}^1 \dot{u}^4 + u | u(-1) = u(1) = 0\}$$

ELE: $(L_p)' = L_s \Rightarrow (4\dot{u}^3)' = 1 \Rightarrow 12\dot{u}^2\ddot{u} = 1$
Si risolve ponendo $\dot{u} = v$.

Oppure osserviamo che la Lagrangiana è autonoma $\rightsquigarrow$ ELE in forma Erdmann.

$$L_p(x, u, \dot{u})\dot{u} = c + L(x, u, \dot{u})$$

$$4\dot{u}^3\dot{u} = c + \dot{u}^4 + u$$

$$\dot{u} = \pm\sqrt[4]{\frac{u}{3} + c}$$

Per concludere osserviamo che u risolve ELE anche in una forma molto debole (prima forma integrale) e che $L(x, s, p) = p^4 - s$ è convessa nella coppia (s,p) anche se non strettamente.

Osservazione 26. Il minimo in questione è C^1 ma non C^2; risolve ELE nella forma $(4\dot{u}^3)' = 1$, ma non nella forma $12\dot{u}^2\ddot{u} = 1$. Questo è dovuto al fatto che L_{pp} si annulla.

Capitolo 9

Lezione 9

9.1 Metodo diretto

Vogliamo dimostrare l'esistenza del minimo (ci muoveremo su spazi di Hilbert, metrici o dotati di nozione di convergenza), non necessariamente trovarlo.

Definizione 5 (Nozione di convergenza)**.** Dato un insieme $\mathbb{X}$, una nozione di convergenza è *dichiarare le successioni convergenti ed i relativi limiti.* Più formalmente, detto

$$S_{eq}(\mathbb{X}) = \{\text{successioni in } \mathbb{X}\} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}\}$$

Una nozione di convergenza è un sottoinsieme qualunque di $S_{eq} \times \mathbb{X}$

Osservazione 27. Il sottoinsieme può essere di qualunque tipo:

- Successioni costanti che tendono ad altro
- Successioni che hanno infiniti limiti
- Successioni convergenti con sottosuccessioni che tendono ad altro

Definizione 6 (Insieme compatto)**.** Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{X}$ di dice compatto (per successioni) se ogni successioni a valori in K ammette almeno una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

Definizione 7. Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ si dice

- <u>Continua</u> se per ogni successione $x_n \to x_\infty$ in $\mathbb{X}$ vale $f(x_n) \to f(x_\infty)$
- <u>Semicontinua inferiormente</u> se per ogni successione $x_n \to x_\infty$ in $\mathbb{X}$ vale

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

. Analogamente si definiscono le semicontinue superiormente.

Teorema 5 (Weierstrass)**.** Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Supponiamo $\mathbb{X}$ compatto ed f SCI rispetto alla stessa nozione di convergenza. Allora f ammette minimo.

Dimostrazione. Poniamo $I := inf\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$ che esiste necessariamente in $\mathbb{R} \cap \{-\infty\}$. Per un lemma di analisi 1 $\exists \{y_n\} \subseteq f(\mathbb{X})$ t.c. $y_n \to I$. Per definizione di immagine $\exists \{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ t.c. $y_n = f(x_n)$. Poichè $\mathbb{X}$ è compatto $\exists x_{n_k} \to x_\infty$. Allora

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k\to\infty} y_{n_k} = lim_{n\to\infty} y_n = I$$

perchè y_n ha limite. Allora $f(x_\infty) = I \in \mathbb{R}$ □

Osservazione 28. Le due richieste del teorema sono antitetiche.

- Se ho tante successioni convergenti, allora è facile trovare $\mathbb{X}$ compatto, ma difficile trovare f SCI
- Se ho poche successioni convergenti, è facile trovare f SCI, ma difficile trovare $\mathbb{X}$ compatto.

Definizione 8 (Funzione coerciva)**.** Una $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ si dice coerciva se $\exists K \subseteq \mathbb{X}$ compatto t.c. $inf\{f(x)|x \in K\} = inf\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$

Corollario 1. Se $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ è coerciva e SCI, allora esiste il minimo.

Dimostrazione 10.

$$\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x) =^1 \inf_{x\in K} f(x) =^2 \min_{x\in K} f(x)$$

1. Per coercitività
2. Per Weierstrass

Corollario 2. Se $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ è SCI ed esiste un sottolivello contenuto in un compatto e non vuoto, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R}\, \exists K \subseteq \mathbb{X} \text{ compatto } : \varnothing \neq \{x \in \mathbb{X} | f(x) \leq M\} \subseteq K$$

Allora esiste il minimo

Dimostrazione. Uso il corollario precedente con questo K □

Corollario 3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SCI e tale che

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo

Dimostrazione 11. Tutti i sottolivelli sono chiusi e limitati e quindi contenuti in un compatto.

9.2 Spazi di Hilbert

Definizione 9 (Spazio di Hilbert)**.** Uno spazio di Hilbert H è uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare definito positivo $<\cdot,\cdot>$ da cui deriva una norma $|x| = \sqrt{<x,x>}$ da cui deriva infine una distanza $(d(x,y) = |x-y|)$rispetto allora quale H diventa uno spazio metrico completo.

Osservazione 29. Dalla metrica segue una nozione di convergenza:

$$x_n \to x_\infty \iff |x_n - x_\infty| \to 0$$

Definizione 10 (Spazio separabile)**.** Uno spazio di Hilbert si dice separabile se esiste $D \subseteq H$ denso e numerabile.

Definizione 11 (Base ortonormale)**.** Un sottoinsieme $\{e_n\} \subseteq H$ si dice base hilbertiana o base ortonormale se

$$<e_i, e_j> = \delta_{ij}$$

$$Span\{e_n\} \text{ è denso in } H$$

Teorema 6. Se H è un Hilbert separabile allora ammette almeno una (ma in realtà infinite) base ortonormale

Definizione 12 (Componente di un vettore)**.** Dato un vettore $v \in H$ ed una base ortonormale $\{e_n\}$ allora

$$v_k := <v, e_k>$$

si dice componente di v rispetto ad e_k

Proprietà 2. Sia H un Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$. Allora le componenti hanno le seguenti proprietà

- $$|v|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} <v, e_n>^2$$

- $$<v, w> = \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n$$

Teorema 7. Se H ammette una base ortonormale allora c'è una corrispondenza biunivoca tra i $v \in H$ e le successioni $\{v_n\}$ di numeri reali a quadrato sommabile, posso cioè identificare ogni vettore con le sue componenti (oppure, posso vedere ogni Hilbert separabile come $\mathbb{R}^\infty$).

Proprietà 3. Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale in H e sia $\{v_n\}$ una successione di numeri reali. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ converge in H} \iff \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$$

Dimostrazione 12. Sia

$$S_n = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n \ \textit{vettore}$$

$$\hat{S}_n = v_1^2 + \cdots + v_n^2 \ \textit{numero}$$

Dati due interi m>n vale

$$|S_m - S_n|^2 = |v_{n+1}e_{n+1} + \cdots + v_m e_m|^2 = \text{ per ortonormalità } = v_{n+1}^2 + \cdots + v_m^2 = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Di conseguenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ converge in H} \iff \{S_n\} \text{ è di Cauchy in H}$$

$$\iff \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \text{ converge in } \mathbb{R}$$

Capitolo 10

Lezione 10

10.1 Convergenza forte e debole negli spazi di Hilbert

Definizione 13 (Convergenza forte)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, diciamo che

$$x_n \to x_\infty$$

se

$$|x_n - x_\infty|| \to 0$$

Proprietà 4. La norma è continua rispetto alla convergenza forte, cioè

$$x_n \to x_\infty \Rightarrow ||x_n|| \to ||x_\infty||$$

Dimostrazione.

$$\big|\, ||x_n|| - ||x_\infty|| \,\big| \leq ||x_n - x_\infty||$$

per disuguaglianza triangolare. □

Osservazione 30. Se H ha dimensione infinita allora le palle chiuse non sono compatte.

Dimostrazione. Suppniamo esista una base ortonormale $\{e_n\}$ infinita, osserviamo che $\{e_n\}$ è una successione di vettori contenuti nella palla di centro 0 e raggio 1 e non ammette sottosuccessioni convergenti, infatti

$$||e_i - e_j|| = \sqrt{2} \text{ se } i \neq j$$

e quindi nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy. □

Ci sono allora troppi pochi compatti e conviene dunque cambiare la nozione di convergenza.

Definizione 14 (Convergenza debole)**.** Sia H un Hilbert. Diciamo che

$$x_n \rightharpoonup x_\infty$$

se

$$< v, x_n > \to < v, x_\infty > \forall v \in H$$

Proprietà 5. Se $x_n \rightharpoonup x_\infty, y_n \rightharpoonup y_\infty$ allora

$$x_n + y_n \rightharpoonup x_\infty + y_\infty, \lambda x_n \rightharpoonup \lambda x_\infty$$

Proprietà 6. Se $x_n \to x_\infty$ allora $x_n \rightharpoonup x_\infty$

Dimostrazione.

$$\Big| < x_n, v > - < x_\infty, v > \Big| = \Big| < x_n - x_\infty, v > \Big| \leq \underbrace{||x_n - x_\infty||}_{\to 0 \text{ per ipotesi}} ||v||$$

□

Osservazione 31. Se H ha dimensione infinita allora esistono successioni che convergono debolmente ma non fortemente. Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale, dico che

$$e_n \rightharpoonup 0$$

Verifichiamo che $< e_n, v > \to 0 \forall v \in H$, ma $< e_n, v >= v_n \to 0$ per condizione necessaria di convergenza della serie $\sum v_n^2 < \infty$. Tuttavia questa successione non converge fortemente al vettore nullo.

Osservazione 32. Se $x_n \rightharpoonup x_\infty$ allora le componenti di x_n rispetto ad una base ortonormale convergono alle corrispondenti componenti di x_∞

$$(x_n)_k =< x_n, e_k > \to < x_\infty, e_k >= (x_infty)_k$$

Tuttavia se $x_n \rightharpoonup x_infty$ non è detto che $||x_n|| \to ||x_\infty||$ (la norma non è debolmente convergente).

Esempio 21. $e_n \rightharpoonup 0$, ma $||e_n|| = 1 \not to 0$.

Teorema 8 (La norma è SCI)**.** Se $x_n \rightharpoonup x_\infty$ allora

$$\liminf_{n \to \infty} ||x_n|| \geq ||x_\infty||$$

Dimostrazione. $||x_n||^2 = ||(x_n - X_\infty) + x_\infty||^2 = ||x_n - x_\infty||^2 + ||x_\infty||^2 + 2 < x_n - x_\infty, x_\infty > \geq ||x_\infty||^2 + 2 < x_n - x_\infty, x_\infty >$
ma $2 < x_n - x_\infty, x_\infty > \to 0$ per convergenza debole, allora

$$\liminf ||x_n||^2 \geq \liminf(||x_\infty||^2 + 2 < x_n - x_\infty, x_\infty >) = ||x_\infty||^2$$

□

Osservazione 33.

$$||x_n||^2 = \underbrace{< x_n, e_1 >^2}_{\downarrow} + < x_n, e_2 >^2 + \cdots + < x_n, e_k >^2 + \ldots$$
$$< x_\infty, e_1 >^2 + < x_\infty, e_2 >^2 + \cdots + < x_\infty, e_k >^2 + \cdots = ||x_\infty||^2$$

NO! Non si scambiano limiti e serie.

Osservazione 34. In un Hilbert (separabile)[1] le palle chiuse sono debolmente compatte, cioè data una successione $\{v_n\} \subseteq H$ t.c. $||v_n||^2 \leq M$ allora esiste $\{n_k\}$ di interi crescenti ed esiste $v_\infty \in H$ t.c.

$$v_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$$

Dimostrazione. Passo 1: (procedimento diagonale) Considero una base ortonormale $\{e_k\}$. Considero $< v_n, e_1 >$ che sono una successione di numeri limitata

$$| < v_n, e_1 > | \leq ||v_n|| \leq \sqrt{M}$$

. Quindi ammette una sottosuccessione convergente, sia essa indicizzata da $\mathbb{N}_1$. Considero adesso $< v_n, e_2$ con $n \in \mathbb{N}_1$, anch'essa limitata e quindi ammette una sottosuccessione convergente, indicizzata da $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1$ e così via.
Ottengo quindi insiemi di indici $\mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \ldots$ tali che in $\mathbb{N}_k$ vale

$$< v_n, e_k > \to \alpha_k$$

. Scegliendo una successione n_k crescente di indici con $n_k \in \mathbb{N}_k$ otteniamo che

$$\lim_{k \to \infty} < v_{n_k}, e_i > = \alpha_i \ \forall i \in \mathbb{N}$$

.

Passo 2: Sospetto che il limite debole sia il vettore v_∞ che ha gli α_i come componenti.

[1]Non necessario per il teorema, ma necessario per la dimostrazione usata

Devo accertarmi che

$$v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

ha senso, cioè che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$$

converge, cioè le sue somme parziali sono limitate

$$M^2 \geq ||v_n||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} < v_n, e_i >^2 \geq \sum_{i=1}^{k} < v_n, e_i >^2$$

Essendo una somma finita passo al limite ottenendo

$$M^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$$

Resta da dimostrare che $< v_{nk}, w > \to < v_\infty, w > \ \forall w \in H$.

Passo 3: La relazione precedente è vera se w è combinazione lineare finita degli e_k.

$$w = w_1 e_1 + \cdots + w_m e_m$$

allora

$$< v_{n_k}, w > = w_1 < v_{n_k}, e_1 > + \cdots + w_m < v_{n_k}, e_m > \to w_1 \alpha_1 + \cdots + w_m \alpha_m = < v_\infty, w >$$

Passo 4: La relazione vale per un w qualunque.
Sia dato un w qualunque, fisso $\epsilon > 0$, esiste $w_\epsilon \in H$ tale che $||w - w_\epsilon|| \leq \epsilon$ e tale che w_ϵ ha solo un numero fissato di componenti (basta troncare la serie che definisce w). Allora

$$\begin{aligned} \Big| < v_{n_k}, w > - < v_\infty, w > \Big| \leq & \Big| < v_{n_k}, w > - < v_{n_k}, w_\epsilon > \Big|^1 + \\ & \Big| < v_{n_k}, w_\epsilon > - < v_\infty, w_\epsilon > \Big|^2 + \\ & \Big| < v_\infty, w_\epsilon > - < v_\infty, w > \Big|^3 \end{aligned}$$

dove

$$^1 = | < v_{n_k}, w_\epsilon - w > | \leq ||v_{n_k}|| \epsilon \leq \sqrt{M} \epsilon$$

$^2 \to 0$ per $k \to \infty$ per via del passo 3, quindi è $\leq \epsilon$ se k è abbastanza grande

$$^{3} = \big| < v_\infty, w_\epsilon - w > \big| \le ||v_\infty||\epsilon$$

Allora $\forall \epsilon > 0$ se k è abbastanza grande vale

$$\Big| < v_{n_k}, w > - < v_\infty, w > \Big| \le \epsilon$$

che è proprio la definizione di limite. $\square$

Capitolo 11

Lezione 11

Le proprietà definite nella lezione precedente per i due tipi di convergenza valgono anche se lo spazio di Hilbert non è separabile, tuttavia nelle nostre dimostrazioni lo considereremo tale per semplificarle.
Ci chiediamo adesso sotto quali ipotesi $< v_n, w_n > \to < v_\infty, w_\infty >$?
$v_n \rightharpoonup v_\infty, w_n \rightharpoonup w_\infty$ non basta, infatti

$$v_n = w_n = e_n(\textit{base ortonormale}) \Rightarrow < v_n, w_n >= 1, \quad v_\infty = w_\infty = 0$$

Se, però, $v_n \rightharpoonup v_\infty, w_n \to w_\infty$ allora vale l'ipotesi.

Proprietà 7 (Teorema di scambio per prodotti scalari)**.** Supponiamo che

$$v_n \rightharpoonup v_\infty$$

$$w_n \to w_\infty$$

$$\{v_n\} \textit{ limitata, cioè } \exists M \in \mathbb{R} : ||v_n|| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$< v_n, w_n > \to < v_\infty, w_\infty >$$

Dimostrazione.

$$| < v_n, w_n > - < v_\infty, w_\infty > | \leq | < v_n, w_n > - < v_n, w_\infty > | + | < v_n, w_\infty > - < v_\infty, w_\infty >$$

Osserviamo adesso che

$$| < v_n, w_n - w_\infty| \leq ||v_n|| \cdot ||w_n - w_\infty|| \leq M||w_n - w_\infty|| \to 0$$

Analogamente per l'altro termine. Quindi

$$| < v_n, w_n > - < v_\infty, w_\infty > | \to 0$$

$\square$

Quando poi verifico la convergenza debole, è necessario farlo per ogni elemento dello spazio di Hilbert?

Proprietà 8. Sia $\{v_n\} \subseteq H$ una successione limitata. Sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme tale che $\bar{Span}(W) = H$ dove la chiusura è presa rispetto alla convergenza forte (**Ipotesi di Span denso forte**).
Se adesso $< v_n, w > \to < v_\infty, w > \forall w \in W$ allora

$$v_n \rightharpoonup v_\infty$$

.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che se l'ipotesi di convergenza allora vale la stessa $\forall w \in Span(W)$. Posso allora supporre WLOG che W sia un sottospazio vettoriale. Resta da dimostrare che se vale l'ipotesi di convergenza, allora essa vale $\forall w \in \bar{W}$.
Sia $w \in \bar{W}$, devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$

$$| < v_n, w > - < v_\infty, w > | \leq \varepsilon$$

definitivamente in n.
Scelgo $w_\varepsilon \in W$ t.c. $||w - w_\varepsilon|| \leq \varepsilon$, allora $| < v_n, w > - < v_\infty, w > | \leq | < v_n, w > - < v_n, w_\varepsilon > | + | v_n, w_\epsilon > - < v_\infty, w_\varepsilon > | + | < v_\infty, w_\varepsilon > - < v_\infty, w > |$
Il primo termine

$$| < v_n, w - w_\varepsilon > || \leq ||v_n|| \cdot ||w - w_\varepsilon|| \leq M||w - w_\varepsilon|| \leq \varepsilon$$

con M limitazione su $||v_n||$.
Il secondo

$$| < v_n - v_\infty, w_\varepsilon > | \leq \varepsilon$$

per n abbastanza grande poichè $w_\varepsilon \in W$
Ed infine il terzo

$$| < v_\infty, w_\varepsilon > - < v_\infty, w > | \leq ||v_\infty|| \cdot ||w - w_\varepsilon|| \leq \varepsilon$$

perchè $||v_\infty|| \leq M$ per compattezza debole delle palle e SCI della norma. $\square$

Osservazione 35. Se sapessi che $v_\infty \in W$ potrei scrivere

$$\underbrace{< v_n, v_\infty >}_{\leq M||v_\infty||} \to < v_\infty, v_\infty >= ||v_\infty||^2$$

altrimenti posso fare un discorso di approssimazione
Prendo $v_\varepsilon \in W$ t.c. $||v_\infty - v_\varepsilon|| \leq \varepsilon$ e scrivo

$$\begin{aligned} < v_\infty, v_\infty > &= \lim_{n\to\infty} < v_\infty, v_\infty - v_\varepsilon > + < v_n, v_\varepsilon > \\ &= \lim_{n\to\infty} < v_\infty, v_\infty - v_\varepsilon > + < v_n, v_\infty > - < v_n, v_\infty - v_\varepsilon > \\ &\leq ||v_\infty||\varepsilon + M||v_\infty|| + M\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $\forall\varepsilon > 0$ vale $||v_\infty||^2 \leq M||v_\infty|| + M\varepsilon + ||v_\infty|\ \varepsilon$, basta allora prendere $\varepsilon = 0$ ed ho la tesi.
Abbiamo così dimostrato che $||v_\infty|| \leq M$ senza passare dal teorema.

Corollario 4. Un sottoinsieme W con questa è proprietà è la base ortonormale. Quindi la convergenza debole di una successione LIMITATA basta testarla su una base ortonormale.

Osservazione 36. Vediamo un controesempio nel caso in cui la successione non fosse limitata. Prendiamo $v_n = ne_n$. Allora $< v_n, e_k >= 0 \forall n \geq k$, quindi tutte le componenti tendono a 0, ma $v_n \not\rightharpoonup 0$, infatti basta prendere

$$w := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$$

allora $< v_n, w >= 1 \neq < 0, w >$. w è ben definito perchè la serie di $\frac{1}{k^2}$ converge.

Allora la convergenza delle componenti garantisce la convergenza debole se so già che la successione è limitata.

Teorema 9. Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$ allora v_n è limitata

Per la dimostrazione serva il lemma di Baire.

Idea. Pongo $H_k := \{w \in H : | < v_n, w > | \leq k\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. H_k è chiuso e

$$H = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k$$

inoltre $< v_n, w >$ converge e quindi è limitata.
Quando uno spazio è unione di chiusi, per Baire, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $Int(H_{k_0}) \neq \emptyset$. Diciamo che $H_{k_0} \supseteq B_{r_0}(w_0)$. A meno di cambiare il raggio, poi $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ t.c.

$H_{k_1} \supseteq B_{r_0}(0)$. Prendo infatti v con $||v|| \leq r_0$ e osservo che

$$| < v_n, v > | \leq | < v_n, (-)w_0 > | + | < v_n, v + w_0 > |$$

Il primo termine è limitato indipendentemente da v poichè successione convergente, mentre il secondo è $\leq k_0$ perchè $w_0 + v \in B_{r_0}(w_0)$.
Allora $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $H_{k_2} \supseteq B_1(0)$ per omotetia dal caso precedente,
Infine sappiamo che $| < v_n, v > | \leq k_2 \; \forall v \in B_1(0)$, allora uso

$$v := \frac{v_n}{||v_n||} \Rightarrow ||v_n|| \leq k_2$$

$\square$

Capitolo 12

Lezione 12

Vediamo adesso tre teoremi di convergenza considerando la misura di Lebesgue

Teorema 10 (Beppo Levi o di convergenza monotona). Siano $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che

$$f_n(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_n \ \textit{misurabili secondo Lebesgue}$$

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \ \forall x \in (a,b) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\int_a^b \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

Se le funzioni sono negative e decrescenti allora vale la versione con il minimo.

Teorema 11 (Lemma di Fatou). Siano $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ supponiamo che

$$f_n(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_n \ \textit{misurabili secondo Lebesgue}$$

Allora

$$\int_a^b \left(\liminf_{n \to \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Teorema 12 (Lebesgue o di convergenza dominata). Siano $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$f_n \ \textit{misurabili secondo Lebesgue}$$

$$f_n(x) \to f_\infty(x) \forall x \in (a,b) \ \textit{convergenza puntuale}$$

$$\exists g : (a,b) \to \mathbb{R} \ \textit{integrabile t.c.} \ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in (a,b) \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora
$$\int_a^b f_\infty(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Definizione 15 (Spazi di Lebesgue o L^p)**.** Per ogni $p \geq 1$ si pone

$$L^p((a,b)) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \ misurabili t.c. \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

Proprietà 9 (Proprietà spazi L^p)**.**

- $L^p((a,b))$ è uno spazio vettoriale
- La quantità
$$||f||_{L^p((a,b))} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
è una norma
- Rispetto alla norma lo spazio L^p diventa metrico completo e quindi di Banach
- Nel caso p=2 è un Hilbert con prodotto scalare
$$< f, g >:= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Proprietà 10 (Disuguaglianza di Holder, versione base)**.** Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p \geq 1, q \geq 1)$, $f \in L^p((a,b)), g \in L^p((a,b))$ allora

$$f \cdot g \in L^1((a,b))$$

e vale
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Idea. Posso assumere che gli integrali al RHS siano 1 per omogeneità, basta allroa dimostrare che LHS è minore di 1 tramite disuguaglianza di Young che segue dalla convessità. □

Osservazione 37 (Disuguaglianza di Young)*.*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q$$

con$f(x) = a, g(x) = b$.

Proprietà 11 (Disuguaglianza di Holder, a più specie)**.** Se

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{p}_i = 1 \ f_i \in L^{p_i}$$

allora

$$||f_1 \dots f_k||_{L^1} \leq ||f_1||_{L^{p_1}} \dots ||f_k||_{L^{p_k}}$$

Proprietà 12 (Disuguaglianza di Holder, a più specie II)**.** Se

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p}_i = \frac{1}{r} \; f_i \in L^{p_i}$$

allora

$$||f_1 \dots f_k||_{L^r} \leq ||f_1||_{L^{p_1}} \dots ||f_k||_{L^{p_k}}$$

Dimostrazione. Basta considerare

$$f_1^r, \dots, f_k^r$$

□

Teorema 13 (Teorema di approssimazione)**.** Siano $p \geq 1, f \in L^p((a,b))$, allora esiste una successione

$$\{f_n\} \subseteq C^0((a,b))$$

ma anche

$$\{f_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$$

tale che

$$f_n \to f \;\; in \;\; L^p((a,b))$$

$$f_n \to f \;\; in \; maniera \; puntuale \; dominata \; in \; L^p$$

Teorema 14 (FLCV, versione Lebesgue)**.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R} \in L^2((a,b))$. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = 0 \; \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora $f(x) = 0$ q.o. (quasi ovunque) in (a,b).

Per approssimazione. Considero una successione $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ che approssima $f(x)$ come detto sopra. Allora

$$\int_a^b f(x)v_n(x)dx = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Vorremo dire che questo converge a

$$\int_a^b f(x)v_n(x)dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

Per passare al limite serve la convergenza dominata.
Per ipotesi sappiamo che $v_n(x) \to f(x)$ puntualmente e che $v_n(x) \leq g(x)$ con $g(x) \in L^2$, allora

$$|f_n(x)v_n(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \in L^1$$

per Holder. Allora possiamo passare al limite. $\square$

Osservazione 38 (FLCV rivisitato). L'ipotesi è equivalente a dire che nello spazio di Hilbert L^2 la funzione f è ortogonale ad un sottospazio vettoriale denso.

Osservazione 39. $L^2((a,b))$, così come gli altri L^p è separabile. Un denso numerabile sono le combinazioni lineari finite a coefficienti razionali di funzioni caratteristiche di intervalli con estremi razionali.

Osservazione 40. $L^2((a,b))$ ammette infite basi ortonormali. Ad esempio, in $L^2((0,\pi))$ una base ortonormale è

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$$

Di conseguenza la successione

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) \rightharpoonup 0$$

in $L^2((0,\pi))$.

Capitolo 13

Lezione 13

Definizione 16 (Spazi di Sobolev, definizione W)**.** Sia $p \geq 1, p \in \mathbb{R}$ e sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Si dice che $u \in W^{1,p}((a, b))$ e che v è la sua derivata debole se

$$u \in L^p((a, b)), v \in L^p((a, b))$$

e vale la "formula di integrazione per parti"

$$\int_a^b u(x)\dot{\phi}(x) = -\int_a^b v(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty((a, b))$$

In questo caso si scrive $v = \dot{u}$.

Proprietà 13.

1. La derivata debole, se esiste è unica.
2. $W^{1,p}((a, b))$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione

$$u \in W^{1,p}((a, b)) \to \dot{u} \in L^p((a, b))$$

è lineare.

3. Se $u \in C^1([a, b]) \Rightarrow u \in W^{1,p}((a, b))$ e la derivata debole è la derivata normale (Consistenza con il caso classico 1)
4. Se $u \in L^p((a, b)), v = \dot{u} \in C^0((a, b))$ allora $u \in C^1$ e $v = \dot{u}$ derivata vera (Consistenza con il caso classico 2)

Dimostrazione.

1. Supponiamo che v_1, v_2 vadano bene, allora

$$\int_a^b u(x)\dot{\phi}(x)dx = -\int_a^b v_1(x)\phi(x)dx = -\int_a^b v_2(x)\phi(x)dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b (v_1(x) - v_2(x))\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in C_c^\infty((a, b))$$

allora per FLCV variante Sobolev, $v_1(x) \equiv v_2(x)$ q.o.

2. Dimostrazione non necessaria.

3. Dimostrazione mediante formula di integrazione per parti

4. Sia $U(x)$ la primitiva di $v(x)$. Per la formula classica di integrazione per parti,

$$\int_a^b U(x)\dot{\phi}(x)dx = -\int_a^b v(x)\phi(x)dx = \int_a^b u(x)\dot{\phi}(x)dx$$

Allora
$$\int_a^b (U(x) - u(x))\dot{\phi}(x)dx = 0$$
Allora per il lemma DBR $u(x) = U(x) + c$ e quindi $u(x) \in C^1((a,b))$

□

Esempio 22. Esistono funzioni $u \in W^{1,p}((a,b)) \setminus C^1((a,b))$. Prendiamo ad esempio
$$u(x) = |cos(x)| \in W^{1,p}((0,\pi))\ \forall p \geq 1$$

e la sua derivata debole è

$$v(x) = \begin{cases} -sin(x) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ sin(x) & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Dimostrazione. Data una qualunque $\phi \in C_c^\infty((0,\pi))$ vale

$$\int_0^\pi u(x)\dot{\phi}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\dot{\phi}(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-cos(x))\dot{\phi}(x)dx$$

ed adesso posso integrare per parti normalmente.

$$\begin{aligned} \cdots = & \big[cos(x)\phi(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-sin(x))\phi(x)dx + \\ & \big[-cos(x)\phi(x)\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (sin(x))\phi(x)dx \\ = & \underbrace{cos(\frac{\pi}{2})\phi(\frac{\pi}{2}) - cos(\frac{\pi}{2})\phi(\frac{\pi}{2})}_{\text{Si annullerebbe indipendetemente dagli estremi}} - \int_0^\pi v(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

□

Osservazione 41. In modo del tutto analogo posso verificare che tutte le funzioni continue C^1 a tratti sono in $W^{1,p}((a,b))\ \forall p \geq 1, p \in \mathbb{R}$.

Osservazione 42. Esistono $u \in L^p((a,b)) \setminus W^{1,p}((a,b))$, ad esempio la Theta di Heaviside.

Dimostrazione. Supponiamo che $\Theta \in W^{1,p}((-1,1))$ e sia v la sua derivata debole, allora

$$-\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x) = \int_{-1}^{1} \Theta(x)\dot{\phi(x)} = \int_{0}^{1} \dot{\phi(x)} = \phi(1) - \phi(0) = -\phi(0)$$

poichè la ϕ è a supporto compatto. Allora

$$\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x) = \phi(0) \quad \forall \phi \in C_\infty^c((-1,1))$$

ma questo è assurdo perchè posso considerare una successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

allora dovrei avere

$$\int_{-1}^{1} v(x)\phi_n(x) = \phi(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ma LHS tende a 0 per n che va ad infinito, quindi il ragionamento è assurdo. □

Definizione 17 (Spazi di Sobolev, definizione H)**.** Sia $p \geq 1$ un reale e sia $(a,b) \in \mathbb{R}$ un intervallo. Siano

$$u \in L^p((a,b)) \; v \in L^p((a,b))$$

dico che $u \in H^{1,p}((a,b))$ e v è la sua derivata debole se esiste una successione di funzioni

$$\{u_n\} \subseteq C^1((a,b))^1$$

tale che

- $u_n \to u$ in $L^p((a,b))$
- $u_n' \to v$ in $L^p((a,b))$

Osservazione 43 (Variante definizione H). Consideriamo lo spazio $C^1((a,b))$ munito della metrica

$$d(f,g) := ||f-g||_{L^p((a,b))} + ||f'-g'||_{L^p((a,b))}$$

[1]O anche $C^\infty((a,b))$ senza supporto compatto

Allora posso definire $H^{1,p}((a,b))$ come completamento di $C^1((a,b))$ rispetto a questa distanza (analogamente per $C^\infty((a,b))$

Proprietà 14. 1. Unicità derivata debole

2. Linearità

3. Consistenza con il caso classico

Esempio 23. Dimostriamo che

$$u(x) = |\cos(x)| \in H^{1,p}((0,\pi))$$

Poniamo $u_n(x) = \sqrt{\cos^2(x) + \frac{1}{n}} \in C^\infty((0,\pi))$ e vediamo che

$u_n(x) \to u(x)$ puntualmente e con dominazione, quindi in $L^p((0,\pi))\ \forall p \geq 1$

$$u_n'(x) = \frac{-\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x) + \frac{1}{n}}} \to \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}(-\sin(x))$$

puntualmente per $x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ con dominazione, quindi in ogni L^p.

Teorema 15. $H \subseteq W$

Dimostrazione. Siano u_n le approssimanti, sia $v \in C_c^\infty((a,b))$, allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_a^b u_n(x)\dot{\phi}(x) = -\int_a^b \dot{u_n}(x)\phi(x)$$

LHS tende a $\int_a^b u(x)\dot{\phi}(x)$, mentre il RHS tende a $-\int_a^b v(x)\phi(x)$, allora $u \in W^{1,p}((a,b))$ e v è la sua derivata debole. □

Questo teorema sistema tutte le proprietà della definizione di H non dimostrate.

Teorema 16 (Caso p=2)**.** Sia $\{u_n\} \subseteq W^{1,2}((a,b))$ e siano $\dot{u_n}$ le rispettive derivate deboli. Supponiamo che

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ debole in } L^2((a,b))$$

$$\dot{u_n} \rightharpoonup v_\infty \text{ debole in } L^2((a,b))$$

Allora $u_\infty \in W^{1,2}((a,b))$ e $v_\infty = \dot{u}_\infty$

Dimostrazione.

$$\int_a^b u_n(x)\dot{\phi}(x) = -\int_a^b \dot{u_n}(x)\phi(x)$$

il LHS tende a $\int_a^b u_\infty(x)\dot{\phi}(x)$ mentre il RHS $-\int_a^b \dot{u_\infty}(x)\phi(x)$. □

Capitolo 14

Lezione 14

Teorema 17 (Le funzioni di Sobolev sono le primitive della loro derivata debole)**.** Sia $u \in W^{1,p}((a,b))$ e sia $v \in L^p((a,b))$ la sua derivata debole. Poniamo

$$U(x) := \int_a^x v(t)\, dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora $u(x) = U(x) + c$ per q.o. $x \in (a,b)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ una qualunque funzione test, allora

$$\int_a^b \dot{\varphi}(x) U(x)\, dx = \int_a^b \dot{\varphi}(x) dx \int_a^x v(t) dt = \iint_T \dot{\varphi}(x) v(t) dx dt$$

con T triangolo normale rispetto all'asse x

$$= \int_a^b dt \int_t^b dx \dot{\varphi}(x) v(t)$$

per Fubini-Tonelli.

$$= \int_a^b v(t) dt \int_t^b \dot{\varphi}(x) dx = -\int_a^b v(t)\varphi(t) dt$$

perchè $\varphi(b) = 0$

$$= \int_a^b u(x)\dot{\varphi}(x) dx$$

Guardando il primo e l'ultimo termine, per il lemma DBR si ha la tesi. □

Teorema 18. $W \subseteq H$

Dimostrazione. Prendo $u \in W^{1,p}((a,b))$ nel senso dell'integrazione per parti e faccio vedere che posso approssimarla nel senso H.

Sia $v \in L^p((a,b))$ la derivata debole di u. Approssimo v in L^p con funzioni $v_n \in C^\infty$ (volendo anche a supporto compatto) e pongo

$$u_n(x) = \int_a^x v_n(t)dt$$

Osservo che $u_n \in C^\infty((a,b))$ (non necessariamente a supporto compatto), inoltre $u_n' = v_n \to v$ in L^p per ipotesi e $u_n \to \int_a^x v(t)dt$ in L^p per convergenza dominata. Ma $\int_a^x v(t)dt = u(x) + c$ per il teorema precedente, quindi $u_n(x) - c$ sono le approssimanti richieste. □

Osservazione 44. Si possono definire le funzioni di Sobolev come le primitive delle funzioni in L^p.

Teorema 19 (Hoelderianità delle funzioni di Sobolev)**.** Sia p>1, sia q l'esponente coniugato ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e sia $u \in W^{1,p}((a,b))$, allora

$$u \in C^{\frac{1}{q}}((a,b))$$

cioè u è $\frac{1}{q}$-Hoelderiana e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq ||\dot{u}||_{L^p}|y-x|^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in (a,b)$$

con $\dot{u}$ derivata debole.
In particolare u è continua[1].

Dimostrazione. Sappiamo già che u è la primitiva della sua derivata debole, quindi

$$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y \dot{u}(t)dt| \leq \int_x^y |\underbrace{\dot{u}(t))}_{\in L^p} \cdot \underbrace{1}_{\in L^q}$$

$$\leq \left(\int_x^y |\dot{u}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_x^y 1^q\right)^{\frac{1}{q}} = ||\dot{u}||_{L^p}|y-x|^{\frac{1}{q}}$$

□

Teorema 20 (Ascoli-Arzelà)**.** Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni e supponiamo che

- Equi-limitate: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(x)| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$
- Equi-continuità: $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b] \ \exists \delta > 0$ t.c. $y \in [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)$ vale $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.

[1]Vale solo in dimensione 1

Allora esiste una sotto-successione che converge uniformemente, cioè $\exists n_k$ successione crescente di interi ed esiste $f_\infty : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{n_k}(x) \to f_\infty(x)$$

uniformemente in $[a,b]$.

Teorema 21 (A-A variante metrica)**.** Siano $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi metrici. Supponiamo che

- Compattezza ad x fisso: $\forall x \in \mathbb{X}\ \exists K_x \subset \mathbb{Y}$ compatto, t.c. $f_n(x) \in K_x\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Equi-continuità: come sopra
- $\mathbb{X}$ compatto

Allora esiste una $f_{n_k} \to f_\infty(x)$ uniformemente in $\mathbb{X}$.

Osservazione 45. Se non assumiamo $\mathbb{X}$ compatto, ma solo unione numerabile di compatti, allora la tesi diventa convergenza uniforme su compatti.

Torniamo al caso $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se so che le f_n sono equi α-Hoelderiane, cioè $\exists \alpha \in (0,1)\ \exists H \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(y) - f_n(x)| \leq H|y-x|^\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in (a,b)^2$ allora è gratis l'equi-continuità.
Torniamo alla definizione H, sappiamo che

- $u_n \to u$ in L^p
- $\dot{u}_n \to v$ in L^p

allora deduciamo che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$||u_n||_{L^p} \leq M \qquad ||\dot{u}_n||_{L^p} \leq M$$

Dalla seconda segue che le $\{u_n\}$ sono equi-$\frac{1}{q}$-Hoelderiane quindi ho equi-continuità, allora controllo le oscillazioni, mentre dalla prima ho un controllo sulle funzioni in almeno un punto

$$\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M^p$$

quindi per il teorema della media integrale

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (a,b) \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M^p}{b-a} \equiv M_1$$

da cui $|u_n(x_n)| \leq M_1$. Mettendo insieme limitatezza in un punto e controllo delle oscillazioni deduco una limitatezza globale

$$|u_n(x)| = |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)| \leq M_1 + M|x - x_n|^{\frac{1}{q}} \leq M_1 + M(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

Ho così le ipotesi di Ascoli-Arzelà.
Quindi

Proprietà 15. Se $u_n \to u$ in L^p, $\dot{u}_n \to v$ in L^p, allora

$$u_{n_k} \to u$$

uniformemente

Osservazione 46. Per il lemma della sotto-sotto tutta la successione u_n tende ad u uniformemente.

Questo è un altro modo di concludere che il limite è continuo (limite uniforme di continue) e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq ||\dot{u}||_{L^p} |y - x|^{\frac{1}{q}}$$

Definizione 18 (Definizione di Sobolev tramite rapporto incrementale)**.** Una funzione sta in $W^{1,p}$ se il rapporto incrementale $R_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ converge in L^p. Ciò a cui converge è la derivata debole.