Calcolo delle variazioni

Lezioni di Gobbino 17/18

2 agosto 2021

Capitolo 1

Lezione 14

Teorema 1 (Le funzioni di Sobolev sono le primitive della loro derivata debole)**.** Sia $u \in W^{1,p}((a,b))$ e sia $v \in L^p((a,b))$ la sua derivata debole. Poniamo

$$U(x) := \int_a^x v(t)\,dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora $u(x) = U(x) + c$ per q.o. $x \in (a,b)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ una qualunque funzione test, allora

$$\int_a^b \dot{\varphi}(x)U(x)\,dx = \int_a^b \dot{\varphi}(x)dx \int_a^x v(t)dt = \iint_T \dot{\varphi}(x)v(t)dxdt$$

con T triangolo normale rispetto all'asse x

$$= \int_a^b dt \int_t^b dx\dot{\varphi}(x)v(t)$$

per Fubini-Tonelli.

$$= \int_a^b v(t)dt \int_t^b \dot{\varphi}(x)dx = -\int_a^b v(t)\varphi(t)dt$$

perchè $\varphi(b) = 0$

$$= \int_a^b u(x)\dot{\varphi}(x)dx$$

Guardando il primo e l'ultimo termine, per il lemma DBR si ha la tesi. □

Teorema 2. $W \subseteq H$

Dimostrazione. Prendo $u \in W^{1,p}((a,b))$ nel senso dell'integrazione per parti e faccio vedere che posso approssimarla nel senso H.

Sia $v \in L^p((a,b))$ la derivata debole di u. Approssimo v in L^p con funzioni $v_n \in C^\infty$ (volendo anche a supporto compatto) e pongo

$$u_n(x) = \int_a^x v_n(t)dt$$

Osservo che $u_n \in C^\infty((a,b))$ (non necessariamente a supporto compatto), inoltre $u_n' = v_n \to v$ in L^p per ipotesi e $u_n \to \int_a^x v(t)dt$ in L^p per convergenza dominata. Ma $\int_a^x v(t)dt = u(x) + c$ per il teorema precedente, quindi $u_n(x) - c$ sono le approssimanti richieste. □

Osservazione 1. Si possono definire le funzioni di Sobolev come le primitive delle funzioni in L^p.

Teorema 3 (Hoelderianità delle funzioni di Sobolev)**.** Sia p>1, sia q l'esponente coniugato ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e sia $u \in W^{1,p}((a,b))$, allora

$$u \in C^{\frac{1}{q}}((a,b))$$

cioè u è $\frac{1}{q}$-Hoelderiana e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq ||\dot{u}||_{L^p}|y-x|^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in (a,b)$$

con $\dot{u}$ derivata debole.
In particolare u è continua[1].

Dimostrazione. Sappiamo già che u è la primitiva della sua derivata debole, quindi

$$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y \dot{u}(t)dt| \leq \int_x^y |\underbrace{\dot{u}(t)|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{1}_{\in L^q}$$

$$\leq \left(\int_x^y |\dot{u}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_x^y 1^q\right)^{\frac{1}{q}} = ||\dot{u}||_{L^p}|y-x|^{\frac{1}{q}}$$

□

Teorema 4 (Ascoli-Arzelà)**.** Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni e supponiamo che

- Equi-limitate: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$
- Equi-continuità: $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$ $\exists \delta > 0$ t.c. $y \in [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)$ vale $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.

[1]Vale solo in dimensione 1

Allora esiste una sotto-successione che converge uniformemente, cioè $\exists n_k$ successione crescente di interi ed esiste $f_\infty : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{n_k}(x) \to f_\infty(x)$$

uniformemente in $[a, b]$.

Teorema 5 (A-A variante metrica)**.** Siano $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi metrici. Supponiamo che

- Compattezza ad x fisso: $\forall x \in \mathbb{X}\ \exists K_x \subset \mathbb{Y}$ compatto, t.c. $f_n(x) \in K_x\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Equi-continuità: come sopra
- $\mathbb{X}$ compatto

Allora esiste una $f_{n_k} \to f_\infty(x)$ uniformemente in $\mathbb{X}$.

Osservazione 2. Se non assumiamo $\mathbb{X}$ compatto, ma solo unione numerabile di compatti, allora la tesi diventa convergenza uniforme su compatti.

Torniamo al caso $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se so che le f_n sono equi α-Hoelderiane, cioè $\exists \alpha \in (0, 1)\ \exists H \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(y) - f_n(x)| \leq H|y - x|^\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in (a, b)^2$ allora è gratis l'equi-continuità.
Torniamo alla definizione H, sappiamo che

- $u_n \to u$ in L^p
- $\dot{u}_n \to v$ in L^p

allora deduciamo che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$||u_n||_{L^p} \leq M \qquad ||\dot{u}_n||_{L^p} \leq M$$

Dalla seconda segue che le $\{u_n\}$ sono equi-$\frac{1}{q}$-Hoelderiane quindi ho equi-continuità, allora controllo le oscillazioni, mentre dalla prima ho un controllo sulle funzioni in almeno un punto

$$\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M^p$$

quindi per il teorema della media integrale

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (a, b) \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M^p}{b - a} \equiv M_1$$

da cui $|u_n(x_n)| \leq M_1$. Mettendo insieme limitatezza in un punto e controllo delle oscillazioni deduco una limitatezza globale

$$|u_n(x)| = |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)| \leq M_1 + M|x - x_n|^{\frac{1}{q}} \leq M_1 + M(b - a)^{\frac{1}{q}}$$

Ho così le ipotesi di Ascoli-Arzelà.
Quindi

Proprietà 1. Se $u_n \to u$ in L^p, $\dot{u}_n \to v$ in L^p, allora

$$u_{n_k} \to u$$

uniformemente

Osservazione 3. Per il lemma della sotto-sotto tutta la successione u_n tende ad u uniformemente.

Questo è un altro modo di concludere che il limite è continuo (limite uniforme di continue) e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq ||\dot{u}||_{L^p}|y - x|^{\frac{1}{q}}$$

Definizione 1 (Definizione di Sobolev tramite rapporto incrementale)**.** Una funzione sta in $W^{1,p}$ se il rapporto incrementale $R_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ converge in L^p. Ciò a cui converge è la derivata debole.