Calcolo delle variazioni

Lezioni di Gobbino 17/18

28 aprile 2021

Capitolo 1

Lezione 1

Il calcolo delle variazioni consiste nello studio di problemi di minimo.
In particolar modo, abbiamo un insieme $\mathbb{X}$ ed una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e vogliamo trovare $\min\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$.
Ci sono 4 metodi di approccio al problema:
1.**Metodo indiretto** 2.**Metodo diretto**
3.**Rilassamento** 4.**Gamma-convergenza**

Esempio 1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = x^2 - 4x$$

Metodo indiretto: $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 2 \Rightarrow min = f(2) = -4$

Proviamo adesso a dimostrare che $f(x)$ è sempre $\leq$ di -4 [1].

$$x^2 - 4x \geq -4 \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0$$

che è vero, inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x = 2$.
Metodo diretto: dimostriamo che il minimo esiste, ad esempio usando il teorema di Weierstrass generalizzato:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; continua \; e \; \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow il \; minimo \; esiste$$

Ora che so che esiste posso vedere dove $f'(x) = 0$.

Esempio 2. Cerchiamo $\min\{(x^2-2)^2|x \in \mathbb{Q}\}$
In questo caso il minimo non esiste. Possiamo perciò chiederci: chi è l'inf? Come sono fatte le successioni "minimizzanti"?
L'inf è 0 e le succ. min. hanno una sottosuccessione che tende a $\pm\sqrt{2}$.

[1] Questa è la vera dimostrazione

Rilassamento: Con questo metodo rilassiamo le condizioni imposte dal problema e per farlo possiamo procedere in due modi: 1.Estendo f ad un ambiente più vasto;
2.Cambio la funzione in modo che il minimo abbia più probabilità di esistere.

Esempio 3. Consideriamo una famiglia di problemi di minimo:

$$m_n := min\{e^{x^2} + atg(x) + nsin^2(x)|x \in \mathbb{R}^n\}$$

e chiediamoci:
a cosa tende m_n quando $n \to \infty$?
a cosa tendono i punti di minimo quando $n \to \infty$?
Ci aspettiamo che $m_n \to m_\infty := min\{e^{x^2} + atg(x)|x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Per rispondere a queste domande usiamo la gamma convergenza.

Definizione 1. Generalemente $\mathbb{X}$ sarà uno spazio di funzioni. Chiameremo allora

$$F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

Funzionale

Esempio 4.

$$F(u) = \int_2^4 (\dot{u}^2 + sin(u))\, dx$$

Un particolare tipo di funzionali sono poi quelli **integrali**

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x))\, dx$$

con $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
In generale scriveremo $L(x, s, p)$ dette Lagrangiane.
Altre generalizzazioni possibili sono:

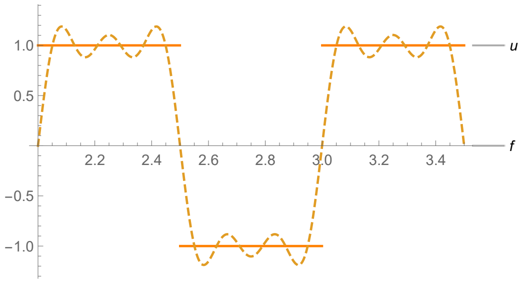
$$F(u) := \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots)dx$$

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dots)dx$$

Osservazione 1. Problemi più complicati sono del tipo:
1.Più variabili in partenza
2.Più variabili in partenza e arrivo (caso vettoriale)

Esempio 5 (Classico)**.** Data f(x) trovare

$$min\{\int_a^b \dot{u}^2 + (u - f)^2\, dx | u \in C^1([a, b])\}$$

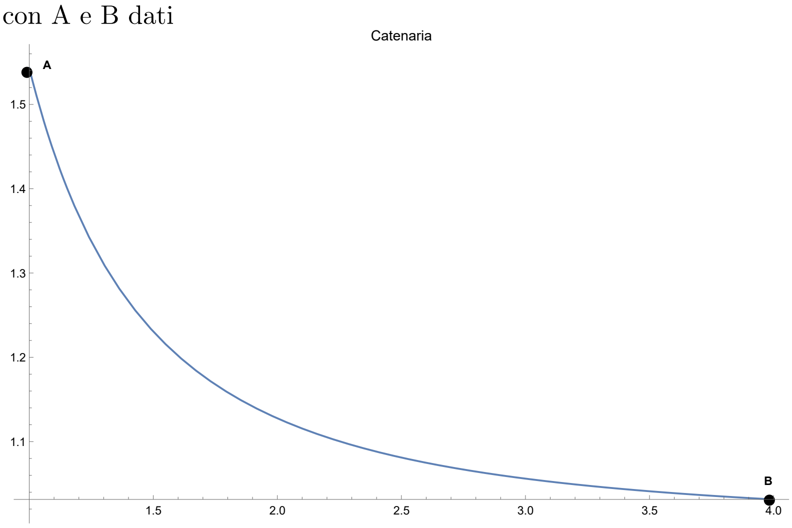


con f che può essere ad esempio il segnale di un cellulare.

Esempio 6 (Classico)**.**

$$min\{\int_a^b (\dot{u}^2 + u)dx | u(a) = A, u(b) = B, u \in C^1([a, b])\}$$

con A e B dati



Capitolo 2

Lezione 2

La variazione prima di un funzionale è l'analogo della derivata prima per una funzione.

Definizione 2. Consideriamo un insieme $\mathbb{X}$ ed $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di minimo e siano $\delta > 0, \gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{X}$ t.c. $\gamma(0) = x_0$. Posso considerare la funzione composta

$$\varphi(t) := F(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$$

con minimo in t=0.
Pongo allora $\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$([1]).
$\delta F(x_0, \gamma)$ è detto **Variazione prima del funzionale F lungo una curva** γ.

Osservazione 2. La definizione è valida $\forall x_0$, anche non di minimo, e $\forall$ curva $\gamma : \gamma(0) = x_0$ purchè $\varphi'(0)$ esista.

Lemma 1. Se $x_0 \in argmin^2\{f(x)|x \in \mathbb{X}\}$, allora

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0$$

quando esiste.

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento[3] V.
In particolare

$$\forall u \in \mathbb{X}, \forall v \in V \ \ si\ ha\ che\ u + v \in \mathbb{X}$$

[1] Posto che esista
[2] $x \in \mathbb{X}$ t.c. f(x) è un minimo
[3] traslato che passa per l'origine, detto anche giacitura

In questo caso, dati $u_0 \in \mathbb{X}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ posso considerare la curva

$$t \to u_0 + tv : \textit{retta per } u_0 \textit{ con direzione } v$$

e calcolare

$$\delta F(u_0, v) :=^{4} \lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t}$$

Esempio 7. Consideriamo 3 funzionali

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2(x)dx \qquad G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|dx \qquad H(u) = \int_a^b \sqrt{|\dot{u}(x)|}dx$$

con $\mathbb{X} = \{u \in C^1([a,b]) | u(a) = A, u(b) = B\}$

Osservazione 3. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V = \{v \in C^1([a,b]) | v(a) = v(b) = 0\}$$

Metodo indiretto:

$$\varphi(t) = F(u + tv) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v})^2 \, dx = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b 2t\dot{u}\dot{v} + \int_a^b t^2\dot{v}^2$$

$$\Rightarrow \delta F(u, v) := \varphi'(0) \overset{5}{=} 2 \int_a^b \dot{u}\dot{v}$$

Questa è detta **Prima forma integrale della variazione prima**.
Integriamo adesso per parti:

$$\varphi'(0) = 2[\dot{u}v]_a^b - 2\int_a^b \ddot{u}v = \underbrace{2(u(b)v(b) - u(a)v(a))}_{0} - 2\int_a^b \ddot{u}v = -2\int_a^b \ddot{u}v$$

Questa, invece, è detta **Seconda forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 4. Abbiamo usato $\ddot{u}$ che non è detto esista, ma tanto siamo ancora nella parte preliminare e non devo necessariamente essere formale.

Allora se u_0 è un punto di minimo

$$\int_a^b \dot{u}_0\dot{v} = 0 \qquad \forall v \in V$$

e se u fosse C^2

$$\int_a^b \ddot{u}_0 v = 0 \qquad \forall v \in V$$

[4] "derivata direzionale" o "alla Gateaux"

Dalla seconda sembra ragionevole dedurre che

$$\ddot{u}_0(x) \equiv 0 \Rightarrow u_0(x) = retta\ A \to B$$

Forniamo adesso la dimostrazione rigorosa:
Sia $u_0(x)$ la retta e sia $w(x)$ un qualunque altro elemento di $\mathbb{X}$. Allora

$$v = w - u_0 \in V$$

quindi si annulla in a e b.

$$F(w) = F(u_0+v) = \int_a^b (\dot{u}_0+\dot{v})^2 = \underbrace{\int_a^b \dot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2\underbrace{\int_a^b \dot{u}_0\dot{v}}_{0^6} + \underbrace{\int_a^b \dot{v}^2}_{\geq 0} \geq F(u_0) \qquad w(x)$$

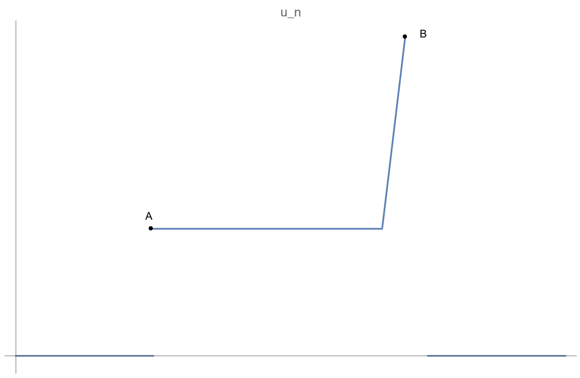
Abbiamo così dimostrato che $F(w) \geq F(u_0)$ e vale l'uguale $\iff \int_a^b \dot{v}^2 = 0 \iff \dot{v}(x) = 0 \iff v(x) = c.te$, ma $v(a) = v(b) = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow w(x))u_0(x)$.
Quindi la retta è l'unico punto di minimo

$$\ddot{u}_0(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Quest'ultima equazione è detta **Forma differenziale di ELE** [7].

Passiamo adesso al funzionale H.
Dico che $infH = 0$ e non è minimo a meno del caso banale A = B.
Infatti

$$H(u_n) = \int_{b-1/n}^b |\dot{u}_n(x)|^2\, dx = \int_{b-1/n}^b |(B-A)n|^{1/2}\, dx = |B-A|^{1/2}\sqrt{n}\frac{1}{n} \to 0 \qquad per\ n \to \infty$$



Osservazione 5. Non sarebbe C^1, ma fare un piccolo raccordo derivabile conta

[7] Equazioni di Eulero-Lagrange

davvero poco.

Osservazione 6. Fare l'inf in C^1, C^{27}, C^∞ o C^1 a tratti è sempre la stessa cosa, a patto che la Lagrangiana sia continua.

Con il funzionale $G(u)$ abbiamo che il minimo esiste e i punti di minimo sono tutte le monotone.
Supponiamo WLOG B>A. Allora

$$\int_a^b |\dot{u}(x)|\, dx \geq |\int_a^b \dot{u}(x)\, dx| = u(b) - u(a) = B - A \qquad \forall u$$

L'uguaglianza vale se e solo se $\dot{u}$ ha segno costante.

Osservazione 7. Lagrangiana:

- Strettamente convessa in p $\rightarrow$ BUONO
- Non convessa $\rightarrow$ GUAI IN VISTA
- Convessa, ma non strettamente $\rightarrow$ RISCHI UNICITA' E REGOLARITA'

Capitolo 3

Lezione 3

Lemma 2 (Fondamentale del calcolo delle variazioni (FLCV))**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty([a, b])$$

Allora

$$f(x) \equiv 0 \quad in\ [a, b]$$

Definizione 3 (Funzioni a supporto compatto)**.** $C_c^\infty([a, b])$ implica che $\exists[c, d] \subset (a, b)$ t.c. $v(x) = 0$ fuori da $[c, d]$ (supporto compatto)

Vediamo due dimostrazioni per questo teorema

Dimostrazione 1 (Per assurdo). Supponiamo f non identicamente nulla, allora WLOG $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) > 0$ (altrimenti prendo -f).
Allora per continuità $\exists\delta > 0$ t.c. $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)\forall x \in B(x_0, \delta$.
Prendo ora $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

$$v(x) =^1 \begin{cases} v(x) = 1 & x \in B(x_0, \delta) \\ v(x) = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO □

Dimostrazione 2 (Per approssimazione).

[1] La C^∞-tizzo

Idea 1. Se

$$\int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)v(x) = 0 \quad v \in C^0$$

Supponendo vero questo, prendiamo

$$v(x) \equiv f(x) \Rightarrow \int_a^b f^2(x) = 0 \iff {}^2 f(x) = 0$$

Fatto di approssimazione: $\forall v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, esiste una successione di funzioni $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.
1. $\exists M$ t.c. $|v_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b]$ (poichè v continua)
2. $v_n(x) \overset{u}{\to} v(x)$ sui compatti $K \subset (a,b)$
Questo basta per concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(x)f(x)\,dx = \int_a^b v(x)f(x)\,dx$$

Fisso $\epsilon > 0$ e ho convergenza degli integrali in $[a+\epsilon, b-\epsilon]$. Gli integrali in $[a, a+\epsilon], [b-\epsilon, b]$ si stimano per equilimitatezza.

Osservazione 8 (Generalizzazioni). Possiamo adesso chiederci per quali classi di funzioni V vale il lemma?
1. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo $\forall v \in Span\{v\}$.
2. Se l'integrale è nullo $\forall v \in V$, allora è nullo sulla chiusura di V rispetto alla convergenza uniforme sui compatti contenuti in $[a,b] \setminus \{$numero finito di punti$\}$. (si dimostra per approssimazione).

Il lemma allora funziona per tutti gli spazi t.c. $\overline{Span\{v\}} = C^0$.

Lemma 3 (Du Bois-Reymond (DBR))**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)) \text{ t.c. } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

Allora

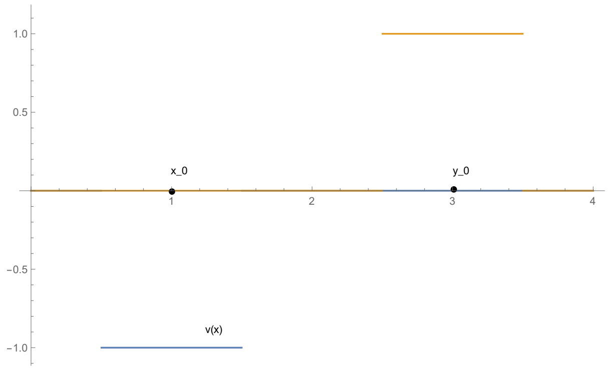
$$f(x) \equiv \text{ c.te} \qquad \text{in } [a,b]$$

Dimostrazione 3 (Per assurdo).

Idea 2. Se f soddisfa l'ipotesi allora anche $f(x) + c$ la verifica $\forall c \in \mathbb{R}$

Sia f non costante, allora WLOG $\exists x_0, y_0$ t.c. $f(x_0) < f(y_0)$.
A meno di aggiungere una costante, posso assumere $f(x_0) = -f(y_0)$.
Considero allora v del tipo

[2] Integriamo una funzione sempre positiva



dove v è simmetrica.

Allora

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx > 0$$

ASSURDO $\square$

Dimostrazione 4 (Per approssimazione). Si dimostra che ogni funzione $v \in C^0$ a media nulla si può approssimare con funzioni $v \in C_c^\infty((a,b))$ a media nulla e quindi

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ con } \int_a^b v(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C^0 \text{ con } \int_a^b v(x)\,dx = 0$$

A questo punto prendo $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_a^b (f(x)+c)\,dx = 0$ e uso $v(x) = f(x) + c$. Ottengo quindi che $f(x) + c \equiv 0 \Rightarrow f(x)$ è costante. $\square$

Anche in questo caso posso usare classi più ristrette di funzioni.

Esempio 8.

$$min\{\int_0^2 \dot{u}^2\,dx| \underbrace{u(0) = 0, u(2) = 5, \int_0^2 u(x)\,dx = 7\}}_{\mathbb{X}}$$

Osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$V := \{v \in C^1([0,2])|v(0) = 0, v(2) = 0, \int_0^2 v(x)\,dx = 0\}$$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ calcolo

$$F(u+tv) = F(u)+2t\int_0^2 \dot{u}\dot{v}+t^2\int_0^2 \dot{v}^2 \Rightarrow \delta F(u,v) = \lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = 2\int_0^2 \dot{u}\dot{v}$$

Integrando per parti e supponendo $u \in C^2$ troviamo

$$\delta F(u,v) = -2\int_0^2 \ddot{u}v$$

Quindi se u è un punto di minimo deve verificare

$$\int_0^2 \ddot{u}v = 0$$

$$\forall v \in C^1([0,2]) \text{ t.c. } \int_0^2 v(x) = 0, v(0) = v(2) = 0$$

Possiamo allora applicare il lemma DBR e quindi $\ddot{u}$ = costante $\Rightarrow u(x) = ax^2 + bx + c$.
Imponendo le 3 condizioni trovo poi a,b,c.
Una volta trovato il punto di minimo faccio la dimostrazione con la disuguaglianza.

Lemma 4 (DBR altro enunciato)**.**

$$\int_a^b f(x)\dot{v}(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora

$$f(x) \equiv \text{ c.te in } [a,b]$$

Dimostrazione 5. Basta osservare che le funzioni $\dot{v}$ con $v \in C_c^\infty((a,b))$ sono tutte e sole le $w \in C_c^\infty$ a media nulla (l'integrale è ka differenza tra i valori agli estremi).

Esempio 9.

1. $\int_a^b fv = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$ t.c. $\int_a^b v = 2017$
2. $\int_a^b f\ddot{v} = 0 \quad v \in C_c^\infty$

1. $f = 0$, la dimostrazione è analoga a quella per v a media nulla
2. $f(x)$ è una funzione affine del tipo $ax + b$

Osservazione 9. Stiamo con questi lemmi cercando l'ortogonale in $L^2([a,b])$ di un certo sottoinsieme V.

Capitolo 4

Lezione 4

In questo capitolo studiamo la nascita delle condizioni al bordo (BC).

Esempio 10.

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 + u^2 \, dx$$

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = A, u(1) = B\}$$

$$F(u+tv) = \int_0^1 (\dot{u}+t\dot{v})^2 + (u+tv) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + u^2 + 2tuv + t^2v^2)$$

$$\Rightarrow \delta F(u,v) = 2\int (\dot{u}\dot{v} + uv) \qquad \textbf{1° forma integrale}$$

Integrando, poi, per parti otteniamo

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) = 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v \qquad \textbf{2° forma integrale}$$

Osservazione 10. Ricordiamo che i termini di bordo sono nulli poichè $v(0) = v(1) = 0$

Se u è un punto di minimo, allora per FLCV

$$-\ddot{u} + u \equiv 0 \Rightarrow \underbrace{\ddot{u} = u}_{ELE}, \qquad \underbrace{u(0) = A, u(1) = B}_{\text{DBC, Dirichlet Boundary Condition}}$$

Esempio 11. Consideriamo la stessa $F(u)$, ma adesso $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = A\}$
In questo caso $V = \{v \in C^1([0,1]) | v(0) = 0\}$
Allora

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + uv$$

Integrando per parti allora otteniamo

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) + [\dot{u}v]_0^1 \tag{4.1}$$

$$= 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + u(1)v(1) \tag{4.2}$$

In questo caso la seconda forma integrale contiene un termine di bordo.
Se u è un punto di minimo, allora questa è 0 $\forall v \in V$. Procedo in due fasi:
1. Mi limito a considerare le v che verificano anche $v(1) = 0$. Ottengo quindi la stessa equazione del primo esempio $\ddot{u} = u$.
2. Adesso l'equazione diventa

$$\dot{u}(1)\dot{v}(1) = 0$$

allora basta prendere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ per ottenere che $\dot{u}(1) = 0$
Alla fine si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{u} = u, & ELE \\ u(0) = A, & DBC \\ \dot{u}(1) = 0, & NBC, \text{ Neumann boundary condition} \end{cases}$$

Si conclude poi sempre mediante disuguaglianza.

Esempio 12. Stessa $F(u)$, $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1])\}$. Nascono in questo caso le due Neumann agli estremi:

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio 13. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1])|u(0) = u(1)$. In questo caso $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale quindi $V = \mathbb{X}$.

$$\delta F(u,v) = 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + 2\dot{u}(1)v(1) - 2\dot{u}(0)v(0) \tag{4.3}$$

$$= 2\int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + 2v(0)(\dot{u}(1) - \dot{u}(0)) \tag{4.4}$$

Nella prima fase pongo $\ddot{u} = u$, mentre nella seconda prendo v con $v(0) = v(1) \neq$

0 ed ottengo $\dot{u}(1) = \dot{u}(0)$. Devo allora risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

Le ultime due condizioni sono dette **PBC, Periodic BC**

Esempio 14. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = u(1)+5\} \Rightarrow V = \{v \in C^1([0,1]) | v(0) = v(1)\}$
Con lo stesso conto di prima troviamo che $\dot{u}(1) = \dot{u}(0)$ e quindi

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \\ u(0) = u(1) + 5 \end{cases}$$

Esempio 15. $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(\frac{1}{2}) = A\} \Rightarrow V = \{v \in C^1([0,1]) | v(\frac{1}{2}) = 0\}$
Quindi

$$\frac{1}{2}\delta F(u,v) = \int_0^1 (-\ddot{u} + u)v + \dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0)$$

Nella prima fase uso v con $v(0) = v(1) = 0$ oltre a $v(\frac{1}{2}) = 0$. Allora per FLCV $\ddot{u} = u$.
Dalla seconda fase ottengo poi, come NBC, $\dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$.Ottengo quindi

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

che sono in generale troppe condizioni.
Si verificano quindi due casi:
1. C'è la soluzione e con la disuguaglianza posso mostrare che è un minimo;
2. Le condizioni sono incompatibili e quindi il minimo non esiste. Ci possiamo quindi chiedere chi sia l'inf.
Per rispondere a questa domanda risolvo i problemi separatamente

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

Accade dunque che in $\frac{1}{2}$ non si incollano C^1.

Osservazione 11. Se fosse stato $F(u) = \int \ddot{u}^2 + u^2$, allora ELE di ordine 4, cioè il grado di ELE è sempre il doppio dell'ordine di derivazione.

Osservazione 12. Se nel problema iniziale metto $\dot{u}(0) = 3$ ottengo come sempre che $\ddot{u} = u$ e che

$$\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 3$$

quindi non esiste il minimo, ma più in generale se $F(u)$ dipende da u e $\dot{u}$ non posso mettere condizioni su $\dot{u}$.

Capitolo 5

Lezione 5

5.1 Equazione di Eulero-Lagrange

Sia

$$F(u) = \int_a^b L(x, \dot{u}, \ddot{u})\, dx$$

con

$$L : \underbrace{[a, b]}_{\ni x} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\ni s} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\ni p} \to \mathbb{R}$$

Data $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ e data $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $v(a) = v(b) = 0$ posso definire

$$\psi(t) := F(u + tv) = \int_a^b L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\, dx$$

e porre

$$\delta F(u, v) := \psi'(0)$$

Teorema 1 (Integrali dipendenti da parametro)**.** Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $\delta > 0$, sia

$$f : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \qquad x \in [a, b], t \in (-\delta, \delta)$$

Poniamo

$$\psi(t) := \int_a^b f(x, t)\, dx$$

Allora

1. Se $f(x, t)$ è continua in $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora $\psi(t)$ è continua in $(-\delta, \delta)$;

2. Se $f_t(x, t)$ è continua in $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora ψ è derivabile e $\psi'(t) = \int_a^b f_t(x, t)\, dx$. Cioè la derivata dell'integrale è l'integrale della

derivata.

Utilizzando il teorema otteniamo che

$$\psi'(t) = \int_a^b L_s(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})v + L_p(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\dot{v}\, dx$$

da cui

$$\delta F(u, v) = \psi'(0) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]\, dx$$

che è quella che avevamo chiamato la **Prima forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 13. Abbiamo utilizzato come ipotesi che $L \in C^1$ in s e p, $u \in C^1, v \in C^1$. Non abbiamo ancora utilizzato $v(a) = v(b) = 0$, che useremo per la seconda forma.

Integrando poi per parti il secondo termine troviamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}\, dx = [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^b - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]' v\, dx$$

Se $v(a) = v(b) = 0$, il termine di bordo si annulla e troviamo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u}) - L_p'(x, u, \dot{u})] v\, dx$$

detta **Seconda forma integrale della variazione prima**.

Osservazione 14. Qui utilizziamo $L \in C^2, u \in C^2, v \in C^1$ e $v(a) = v(b) = 0$.

Se u è un punto di minimo (tra quelli che hanno lo stesso dato al bordo), allora la $\delta F(u, v) = 0\ \forall v \in V$. Allora utilizzando il lemma fondamentale ottengo che

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})$$

ELE in forma differenziale.

Osservazione 15 (Condizione di Neumann in generale).

$$u \in argmin\{F(u) | \underbrace{u \in C^1([a, b]), u(a) = A}_{\mathbb{X}}\}$$

Se c'è abbastanza regolarità, usando solo v con $v(a) = v(b) = 0$ ritroviamo ELE come sopra.

Integrando per parti la prima forma troviamo

$$0 = \delta F(u,v) = \int_a^b \underbrace{[(L_p(x,u,\dot{u}))' - L_s(x,u,\dot{u})]}_{0 \text{ per ELE}} v\,dx + [L_p(x,u,\dot{u})v]_a^b$$

$$\Rightarrow L_p(b,u(b),\dot{u}(b))v(b) - L_p(a,u(a),\dot{u}(a))v(a) = 0$$

adesso posso mettere $v(a) = 0$, ma $v(b)$ può essere 1, quindi si ha una condizione su L_p in un estremo.

$$L_p(x,u,\dot{u}) = 0 \qquad \text{nell'estremo considerato è detta NBC generale}$$

Osservazione 16. L'equazione ELE

$$[L_p(x,u,\dot{u})]' = L_s(x,u,\dot{u})$$

espansa diventa

$$L_{px}(x,u,\dot{u}) + L_{ps}(x,u,\dot{u})\dot{u} + L_{pp}(x,u,\dot{u})\ddot{u} = L_s(x,u,\dot{u})$$

che si può scrivere in forma normale e quindi soddisfa il teorema di Cauchy-Lipschitz se

$$L_{pp}(x,u,\dot{u}) \neq 0 \qquad \forall x \in [a.b]$$

5.1.1 ELE in forma DBR

Scrivo la prima forma integrale, introduco la funzione

$$\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt$$

e osservo che

$$\int_a^b L_s(x,u,\dot{u})v = [\hat{L}(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \hat{L}(x)\dot{v}(x)\,dx$$

Il termine di bordo si annulla e ottengo

$$\delta F(u,v) = \int_a^b [\hat{L}(x) + L_p(x,u,\dot{u})]\dot{v}\,dx$$

Se u è un punto di minimo/massimo, allora dal lemma DBR otteniamo che

$$L_p(x,u,\dot{u}) = c + \int_a^x L_s(t,u(s),\dot{u}(s))\,ds \qquad \text{ELE-DBR}^1$$

[1]serve meno regolarità in L ed u

5.1.2 ELE in forma ERDMANN

Consideriamo il caso in cui la Lagrangiana non dipenda da x.

$$(L_p(u, \dot{u}))' = L_s(u, \dot{u})$$

Moltiplico a destra e sinistra per $\dot{u}$ ed ottengo

$$\begin{aligned}
(L_p(u, \dot{u}))'\dot{u} &= L_s(u, \dot{u})\dot{u} \\
\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' - L_p(u, \dot{u})\ddot{u} &= L_s(u, \dot{u})\dot{u} \\
\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' &= L_s(u, \dot{u})\dot{u} + L_p(u, \dot{u})\ddot{u} \\
\Rightarrow (L_p(u, \dot{u})\dot{u})' &= (L(u, \dot{u}))'
\end{aligned}$$

e quindi

$$L_p(u, \dot{u})\dot{u} = L(u, \dot{u}) + c$$

questa è detta equazione **ELE-Erdmann**.

Osservazione 17. Questa è un'equazione differenziale di ordine 1.

Osservazione 18. ELE classica ed ELE Erdmann <u>non</u> sono equivalenti, ma

u soddisfa ELE classica $\Rightarrow$ u soddisfa ELE-Erdmann

u soddisfa ELE-Erdmann $\Rightarrow$ u soddisfa ELE classica nei punti $x \in [a, b]$ t.c. $\dot{u}(x) \neq 0$[2]

Osservazione 19 (Piccola generalizzazione). Consideriamo il caso in cui F dipenda da più derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)})\, dx \tag{5.1}$$

$$= \int_a^b L(x, s, p_1, \dots, p_k) \tag{5.2}$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_s(\dots)v + L_{p_1}(\dots)\dot{v} + \dots + L_{p_k}(\dots)v^{(k)}$$

Integrando per parti e supponendo v abbastanza nulla al bordo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s - (L_{p_1})' + (L_{p_2})'' + \dots]v\, dx$$

[2]Basta fare i passaggi al contrario

Quindi se u è un punto di min/max dal FLCV troviamo

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{d^i}{dx^i}L_{p_i}(x,u,\dot{u},\dots,u^k)=L_s(x,u,\dot{u},u^k)$$

che è la ELE per dipendenza da più derivate.

Capitolo 6

Lezione 6

6.1 Come dimostrare che u è un minimo di F

Alcune strategie possibili:

1. Convessità
2. Lemma trivial
3. Calibrazioni
4. Campi di Weierstrass

6.1.1 Convessità

Da analisi 1 sappiamo che: se $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e $x_0 \in (c, d)$, allora esiste una costante $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in [c, d]$$

In generale basta prendere $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$.
Da analisi 2 sappiamo che: se $f(x, y)$ è convessa e se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, allora esistono $m_1 \in \mathbb{R}, m_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) \quad \forall (x, y) \in \text{Dominio}$$

Teorema 2. Consideriamo adesso $F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u})\, dx$ con DBC.
Supponiamo che:

1. Ci sia abbastanza regolarità

2. $u_0(x)$ sia soluzione di ELE con DBC

3. $\forall x \in [a,b]$ la funzione $(s,p) \to L(x,s,p)$ è convessa come funzione di due variabili.

Allora u_0 è un punto di minimo per il problema con le DBC.

Dimostrazione 6. Prendo un qualunque altro competitore w e pongo $v(x) := w(x) - u(x)$ ed osservo che $v(a) = v(b) = 0$. Scrivo che

$$F(w) = F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, \dot{u_0} + \dot{v})\, dx$$

Dopodichè dalla convessità e regolarità di L ottengo la disuguaglianza

$$L(x, s + s_1, p + p_1) \geq L(x, s, p) + L_s(x, s, p)s_1 + L_p(x, s, p)p_1$$

Prendendo poi $s = u_0, s_1 = v, p = \dot{u}_0, p_1 = \dot{v}$ si ha che

$$F(w) \geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) + \underbrace{L_s(x, u, \dot{u}_0)v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0)\dot{v}}_{\text{=0 per la prima forma integrale di ELE}}$$

$$\Rightarrow F(w) \geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u_0}) = F(u_0) \quad \Box$$

Osservazione 20. Abbiamo in realtà usato solo che u_0 risolve la prima forma integrale di ELE, che richiede meno regolarità su L. Inoltre, se L fosse strettamente convessa in (s,p), allora la disuguaglianza di analisi 2 è stretta se $(x,y) \neq (x_0, y_0)$, da cui l'unico modo per avere uguaglianza è che v e $\dot{v}$ siano nulle, cioè $v(x) \equiv 0$. Quindi u_0 è l'unico punto di minimo.

Esempio 16.

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}(x))^4\, dx$$

e minimizzo con $u(0) = 0, u(1) = 5$. Allora

$$L(x,s,p) = p^4 \Rightarrow [L_p(x,s,p)]' = L_s(x,s,p) \Rightarrow (4\dot{u}^3)' = 0 \Rightarrow \dot{u} = c.te \Rightarrow u = \text{retta}$$

Per l'enunciato precedente, la retta è l'unico punto di minimo; tuttavia se non pensiamo alla convessità è meno evidente:

$$F(w) = F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u}+\dot{v})^4 = \int_0^1 (\underbrace{\dot{u}^4}_{=F(u)} + \overbrace{4\dot{u}^3\dot{v}}^{\text{=0 integrando per parti ed usando ELE}} + \underbrace{6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4}_{\geq \text{ ma non del tutto evidente}}$$

Lemma 5 (Lemma trivial)**.** Sia $\mathbb{X}$ un insieme, e siano $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che

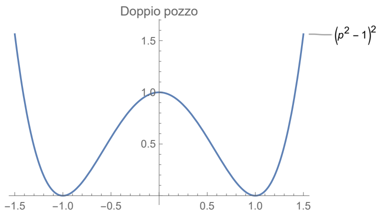
1. $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}$
2. $x_0 \in \mathbb{X}$ è punto di minimo di G
3. $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è punto di minimo per F.

Dimostrazione 7.

$$\forall x \in \mathbb{X} \text{ vale: } F(x) \underbrace{\geq}_{1} G(x) \underbrace{\geq}_{2} G(x_0) \underbrace{=}_{3} F(x_0) \quad \square$$

Esempio 17. Consideriamo il funzionale $F(u) = \int_o^2 (\dot{u}^2 - 1)^2 \, dx$ e l'insieme $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) | u(0) = 1, u(2) = 7\}$. In questo caso la Lagrangiana non è convessa in p come si evince dalla figura



.
Supponiamo adesso che la retta $u_0(x) := 1 + 3x$ sia l'unico punto di minimo e troviamo la G giusta.
Idea: convessifico L. Considero

$$\hat{L}(p) = \begin{cases} L(p) & |p| \geq 1 \\ 0 & |p| \leq 1 \end{cases}$$

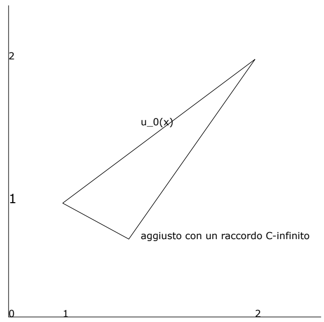
ed osservo che $\hat{L}$ è convessa. Pongo

$$G(u) := \int_0^2 \hat{L}(\dot{u}) \, dx$$

e verifico le ipotesi.
(1) segue da $L \geq \hat{L}$; (2) segue dalla convessità di $\hat{L}$, quindi u_0 è punto di minimo per G; (3) segue dal fatto che $L(3) = \hat{L}(3)$. Da questo segue che u_0 è punto di minimo per F. Inoltre G ha come unico minimo u_0, in quanto $\hat{L}$ strettamente convessa in un intorno di $p = 3$, quindi u_0 è l'unico punto di minimo di G.

Osservazione 21. Cosa succede nell'esempio se $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) | u(0) = 1, u(1) = 2\}$?
In questo caso la retta $u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ non è punto di minimo, anzi il minimo

non esiste e l'inf è 0.



Minimizziamo adesso $F(u) = \int_0^2 [(\dot{u}^2 - 1)^2 + \underbrace{(u - 1 - \frac{1}{2}x)^2}_{\text{in questo caso pago se mi allontano da } u_0(x)}]$.

L'inf resta 0.

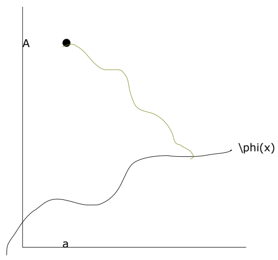
Capitolo 7

Lezione 7

7.1 Transversality and Point-to-Curve problems

Definizione 4 (Point to curve problem)**.** Sia dato un punto $(a, A) \in \mathbb{R}^2$ e sia data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideriamo

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u})\, dx$$



Voglio minimizzare F(u) tra tutte le coppie (u, b) tali che

$$u \in C^1([a, b]), u(a) = A, u(b) = \varphi(b)$$

l'ultima condizione implica che il punto terminale sia sul grafico di $\phi(x)$.

Osservazione 22. Può essere che b non sia la prima intersezione.

Vogliamo trovare l'equazione di Eulero-Lagrange in questo caso.

Teorema 3 (Transversality condition)**.** Se $L \in C^2, \varphi \in C^2$ e (u_0, x_0) minimizza, allora

$$[L_p(x, u_0, \dot{u}_0)]' = L_s(x, u_0, \dot{u}_0) \qquad \forall x \in (a, x_0) : \text{ solita ELE}$$

$$u_0(a) = A : \text{solita DBC}$$

$$L_p(x, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))[\dot{u}_0(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)] = L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))]$$

L'ultima condizione è detta **transversality**.

Osservazione 23. Se φ fosse una retta verticale (ma non lo può essere poichè deve essere funzione di x), verrebbe $\dot{\varphi}(x_0) = \infty$ da cui la classica NBC $L_p(x, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0)) = 0$

Dimostrazione 8. Consideriamo una funzione u(x) ed un punto x_0. Consideriamo poi $u + tv$ per una opportuna v(x) che intersecherà $\varphi(x)$. Sia x(t) il punto d'intersezione tra v e φ.
Esistenza ed unicità di x(t) è una questione di teorema delle funzioni implicite, cioè considero

$$\Phi(x, t) := u(x) + tv(x) - \varphi(x)$$

ed osservo che $\varphi(x_0, 0) = 0$ e spero che per $t \in (-\delta, \delta)$ io possa ricavare x in funzione di t.

$$\Phi_t(x, t) = v(x) \quad \Phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t\dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x) \Rightarrow \Phi_x(x_0, 0) = \dot{u}(x_0) + \dot{\varphi}(x_0)$$

Se $\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0) \neq 0$, allora posso ricavare. A questo punto pongo

$$\psi(t) := \int_a^{x(t)} L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v})\, dx \Rightarrow \psi'(0) = 0^1.$$

Quindi

$$\psi'(t) = \int_a^{x(t)} L_t + L(x(t), u(x(t)) + tv(x(t)), \dots)\dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]\, dx + L(x_0, u(x_0), \dots)\dot{x}(0)$$

$$= \int_a^{x_0} [L_s - L_p']v + [L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}]_a^{x_0} + L(x_0, u(x_0), \dots)\dot{x}(0)$$

Dal teorema delle funzioni implicite ricavo che

$$\dot{x}(t) = -\frac{\Phi_t(x(t), t)}{\Phi_x(x(t), t)} \rightsquigarrow \dot{x}(0) = -\frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \varphi(x_0)}$$

Sostituendo

$$\psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s - L_p']v + L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\dot{v}(x_0) + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))(-\frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \varphi(x_0)})$$

[1] Punto di minimo

Adesso utilizzo funzioni v t.c. $v(x_0) = 0$ e da FLCV deduco ELE in (a, x_0).
Scelgo poi v con $v(x_0) = 1$ e ottengo

$$L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) = \frac{L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))}{\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)}$$

Moltiplicando ho la transversality.
Passo 2: Supponiamo $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.
Geometricamente questo significa che l'attacco è "smooth". Uso allora, come competitore, anzichè $u + tv$, la u "allungata".

$$\psi(t) := \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0}^{x_0+t} L(x, \varphi, \dot{\varphi})$$

$$\psi'(t) = L(x_0 + t, \varphi(x_0 + t), \dot{\varphi}(x_0 + t))$$

$$\Rightarrow \psi'(0) = L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) = L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

Osservazione 24. Non posso dire che $\psi'(0) = 0$ poichè ψ è definita solo per $t \geq 0$.

Posso dire solo che $\psi'(0) \geq 0$ da cui $L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \geq 0$.
Passo 3: cerco di "accorciare" la u.
inserire immagine minuto 31
In questo caso $\psi(t)$ = funzionale calcolato sulla u accorciata:

$$\psi(t) \int_a^{x_0-2t} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l, \dot{l})$$

con l: equazione della retta di raccordo

$$\Rightarrow \psi(t) = \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) - \int_{x_0-2t}^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l, \dot{l})$$

Il primo termine è costante, quindi quando derivo sparisce.
La derivata del secondo termine è

$$-2L(x_0 - 2t, u(x_0 - 2t), \dot{u}(x_0 - 2t))$$

Perciò quando metto t $= 0$ ottengo $-2L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)$.
Per derivare l'ultimo termine posso scrivere l'equazione di l come retta passante per due punti, oppure osservo che per il teorema della media integrale vale

$$\int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, l(x), \dot{l}(x)) = tL(x(t), l(x(t)), \dot{l}(x(t)))$$

Dividendo per t e passando al limite per $t \to 0$, la derivata del terzo termine è

$$L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

poichè $x_0 - 2t \le x(t) \le x_0 - t$ e $l(x(t)) \in [u(x_0 - 2t, u(x_0 - t))]$. Per passare al limite $\dot{l}(x(t)) \to \dot{u}(x_0)$ serve che $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.
In conclusione

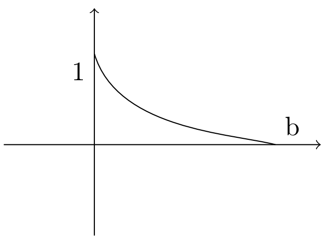
$$\psi'(t) = -L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \ge 0 \quad \text{per } t \ge 0$$

Questo completa la dimostrazione anche nel caso in cui $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$. $\square$

Esempio 18.

$$F(u,b) = \int_0^b (\dot{u}^2 + u^2)\, dx$$

e prendiamo come DBC $u(0) = 1, \varphi(x) \equiv 0$.



Esiste il minimo?

ELE:

$$L_p' = L_s \Rightarrow (2\dot{u})' = 2u \Rightarrow \ddot{u} = u \Rightarrow u(x) = acosh(x) + bsinh(x)$$

Da $u(0) = 1$ ottengo che

$$u(x) = cosh(x) + bsinh(x)$$

Impongo adesso la transversality

$$L_p(x, u, \dot{u})(\dot{u} - \dot{\varphi}) = L(x, u, \dot{u}) \quad \text{in } x_0$$

$$\Rightarrow 2\dot{u}(\dot{u} - 0) = \dot{u}^2 + u^2 \Rightarrow \dot{u}^2 = u^2$$

Nel punto di contatto vale $u(x_0) = 0$, quindi $\dot{u}(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x_0) = 0 \\ \dot{u}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzione, in quanto implicherebbe

$$b = -\frac{sinh(x_0)}{cosh(x_0)} = -\frac{cosh(x_0)}{sinh(x_0)} \Rightarrow sinh^2(x_0) = cosh^2(x_0) \rightarrow \text{impossibile}$$