Análise Matmática II

Engenharia Informática Curso-Europeu

Atividade 01- Métodos Numéricos para EDO/PVI

Ano letivo – 2021/2022

Grupo:

Bruno Guimar: a2021137345@isec.pt

Carolina Veloso: a2021140780@isec.pt

Luís Duarte: a2021137789@isec.pt

Docente:

Arménio Correia: armenioc@isec.pt

Índice

1. Introdução

1.1. Interpretação do trabalho

Os métodos numéricos são extremamente úteis na resolução de muitos problemas físicos, e surgem como alternativa para a obtenção de resultados que quase sempre não podem ser obtidos por procedimentos analíticos. De entre os métodos numéricos utilizados na resolução de equações diferenciais, destacam-se os Métodos de Euler e de Euler Melhorado e Runge-Kutta pela facilidade na obtenção de aproximações das suas versões, diferenciando dos métodos cujo desenvolvimento parte da expansão em série de Taylor.

1.2. Definição de PVI e de EDO

Um problema de valor inicial é uma equação diferencial acompanhada pelo valor da função a determinar num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial.

A Equação Diferencial Ordinária ou EDO para abreviar $[y' = f(t, y)]$ não determina apenas uma função solução, pois especifica apenas o declive $[y'(t)]$ da função solução em cada ponto, não especificando o valor $[y(t)]$ para qualquer ponto. Sendo assim, existem infinitas funções que satisfazem a EDO. logo é necessário que os dados do problema indiquem $[y(t_0) = y_0]$, o que determina a solução única da EDO. É por isto que se designa por Problema de Valor Inicial (PVI).

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ t \in [a,b] \\ y(a) = y0 \end{cases}$$

2. Métodos Numéricos para a resolução de um PVI

2.1. Método de Euler

O Método de Euler consiste em eliminar os termos de ordem maior ou igual a dois. Prevendo a solução através da extrapolação ao longo de uma linha reta cujo declive é $[f(t_k, y_k)]$. Este é um método simples porque depende apenas da informação num único ponto t para podermos avançar para o próximo.

2.1.1. Fórmulas

Método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1$$

2.1.2. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

```
function y = MEuler(f,a,b,n,y0)

    h = (b-a)/n;
    t(1) = a;

    y(1) = y0;

    for i=1:n
        y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));
        t(i+1) = t(i)+h;
    end
```

2.2. Método de Euler Melhorado ou Modificado

O método de Euler melhorado foi criado pois o método de Euler normal tem uma precisão pequena, ou seja, tem uma aplicação mais reduzida, sendo assim o método de Euler Melhorado consegue obter soluções com boa qualidade quando forem requeridos mais passos.

2.2.1. Fórmulas

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$ (Método de Euler)

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y^*_{n+1})}{2}$$ (Método de Euler melhorado)

2.2.2. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

```
function y=MEulerM(f,a,b,n,y0)
    h=(b-a)/n;
    t=a:h:b;
    y=zeros(1,n+1);
    y(1)=y0;
    for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
    end
```

2.3. Método de Runge-Kutta 2 (RK2)

O Método de Runge-Kutta da segunda ordem é o Método de Euler melhorado, com uma melhor estimativa da derivada da função. Neste caso a estimativa da derivada baseia-se numa avaliação da função em mais pontos do intervalo $[t_n, t_n+1]$

2.3.1. Fórmulas

Método de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2)

$$k_1 = hf(t_i, y_i); \;\; k_2 = hf(t_{i+1}, y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1$$

2.3.2. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

```
function y=MRK2(f,a,b,n,y0)
    h=(b-a)/n;
    t=a:h:b;
    y=zeros(1,n+1);
    y(1)=y0;
    for i=1:n
        k1=h*f(t(i),y(i));
k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
    end
```

2.4. Método de Runge-Kutta 4 (RK4)

O método RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de h^5, enquanto o erro total acumulado tem ordem h^4.

2.4.1. Fórmulas

Método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4)

$$k_1 = hf(t_i, y_i);\ \ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1);\ \ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2);\ \ k_4 = hf(t_{i+1}, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\ \ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

2.4.2. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

```
function y = MRK4(f, a, b, n, y0)
        h = (b-a)/n;
        t(1) = a;
        y(1) = y0;

for i=1:n,
        K1 = h * feval(f, t(i), y(i));
        K2 = h * feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) * K1);
        K3 = h * feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) * K2);
        K4 = h * feval(f, t(i) + h, y(i) + K3);

        y(i+1) = y(i) + ((1/6) * (K1 + (2*K2) + (2*K3) + K4));
        t(i+1) = t(i) + h;
end
```

2.5. Método ODE45

ODE45 é uma função do MATLAB, que resolve equações diferenciais. É uma função de média precisão, usada principalmente para equações não rígidas. ODE45 tem a seguinte forma:

ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0)

Sendo:

$odefun$ – função para resolver,

$tspan$ – intervalo de integração,

$y0$ – condição inicial.

A função ODE45 devolve dois vetores:

y – Vetor das soluções;

t- Vetor dos pontos de avaliação

Cada linha em y corresponde à solução no valor devolvido na linha correspondente de t.

2.5.1. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

```
function y = MOde45(f,a,b,n,y0)
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
[t,y] = ode45(f,t,y0);
```

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

2.6. Método do Ponto Médio

O método do ponto médio calcula a variação percentual dividindo a variação pelo ponto médio(ou média) dos níveis inicial e final.

2.6.1. Fórmula

PM Explícito: $\boxed{y_{i+1} = y_i + h * f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h * k1)}$

PM Implícito: $\boxed{y_{i+1} = y_i + h * f(t_i + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}))}$

2.6.2. Algoritmo e Função

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)
a - Limite esquerdo do intervalo
b - Limite direito do intervalo
n - Numero de iterações
y0 - Valor inicial do PVI (condição)

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

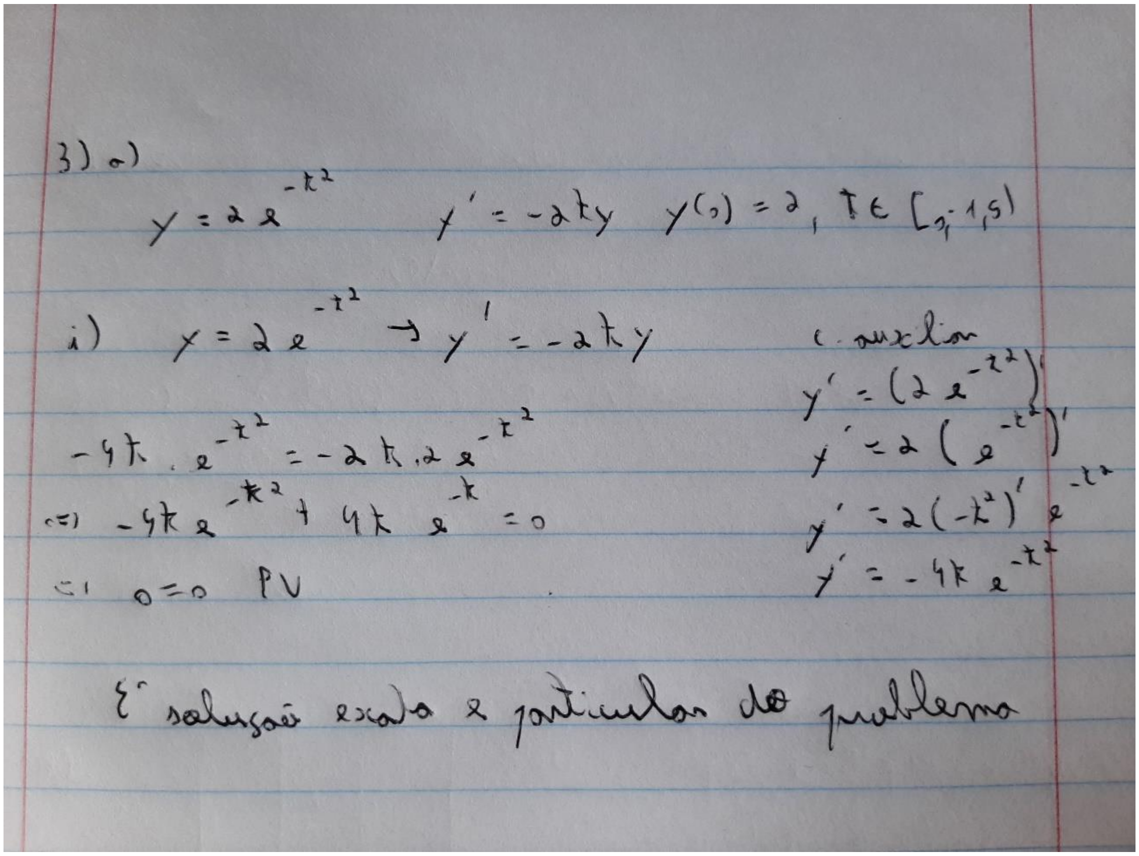
```
function y = MPM(f,a,b,n,y0)
h= (b-a)/n;
t = a:h:b;
 y = zeros(1, n+1);
 y(1) = y0;
 for i=1:n
 k1 = 0.5 * f(t(i), y(i));
y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, y(i) + hk1);
y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, 0.5(y(i) + y(i+1)));
```

3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1. Exercício 3 do teste Farol

3.1.1.

a)



3) a)

$y = 2e^{-t^2}$ $\quad y' = -2ty \quad y(0) = 2, \; t \in [0; 1,5]$

i) $y = 2e^{-t^2} \rightarrow y' = -2ty$

c. auxiliar

$y' = (2e^{-t^2})'$

$y' = 2(e^{-t^2})'$

$y' = 2(-t^2)' e^{-t^2}$

$y' = -4t e^{-t^2}$

$-4t \cdot e^{-t^2} = -2t \cdot 2e^{-t^2}$

$\Leftrightarrow -4t e^{-t^2} + 4t e^{-t} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ PV

É solução exata e particular do problema

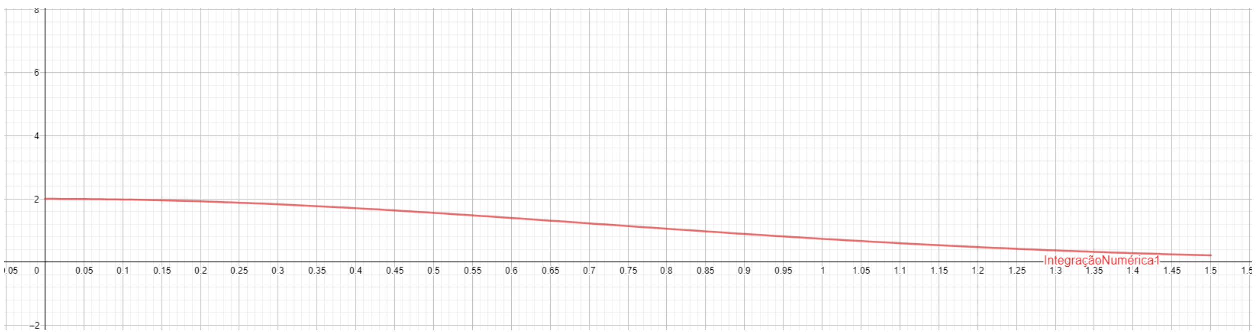
b)

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7358	1	0.75	0.2642	0.0142
3	1.5	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

c) Figura 4, porque tem o mesmo número de iterações do PVI (n=3). Ainda o intervalo deste PVI é de [0,1.5] o que mais uma vez corresponde à fugura 4. A figura 5 tem uma condição inicial de y0=0.25 o que não corresponde ao PVI dado, sendo que este tem um y0=2.

d) PVI = y' = -2ty   y0=0.25   t∈[-1.5,1.5]

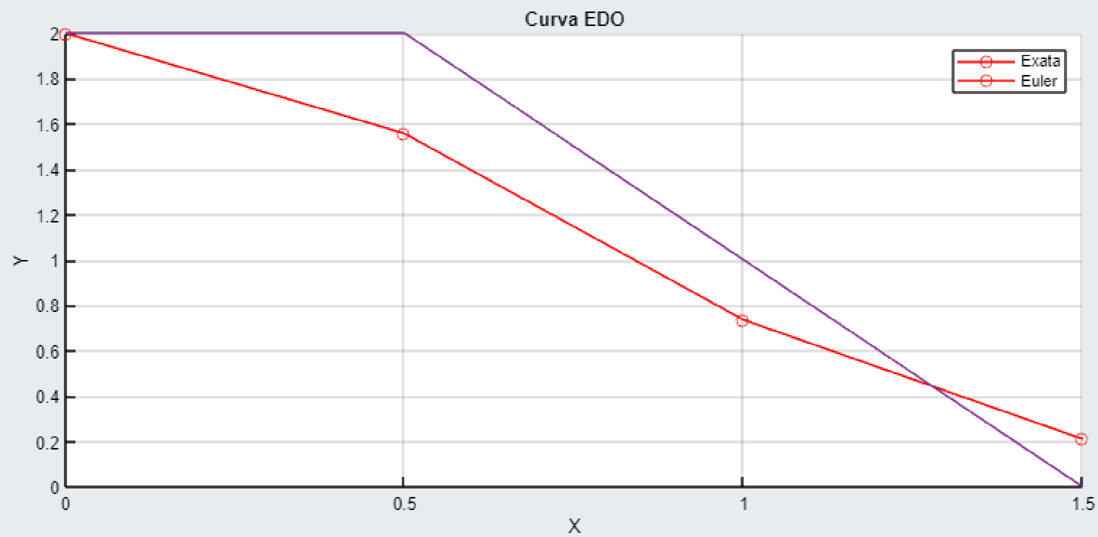
e) (C)



IntegraçãoNumérica1 = NSolveODE({-2 x y}, 0, {2}, 1.5)

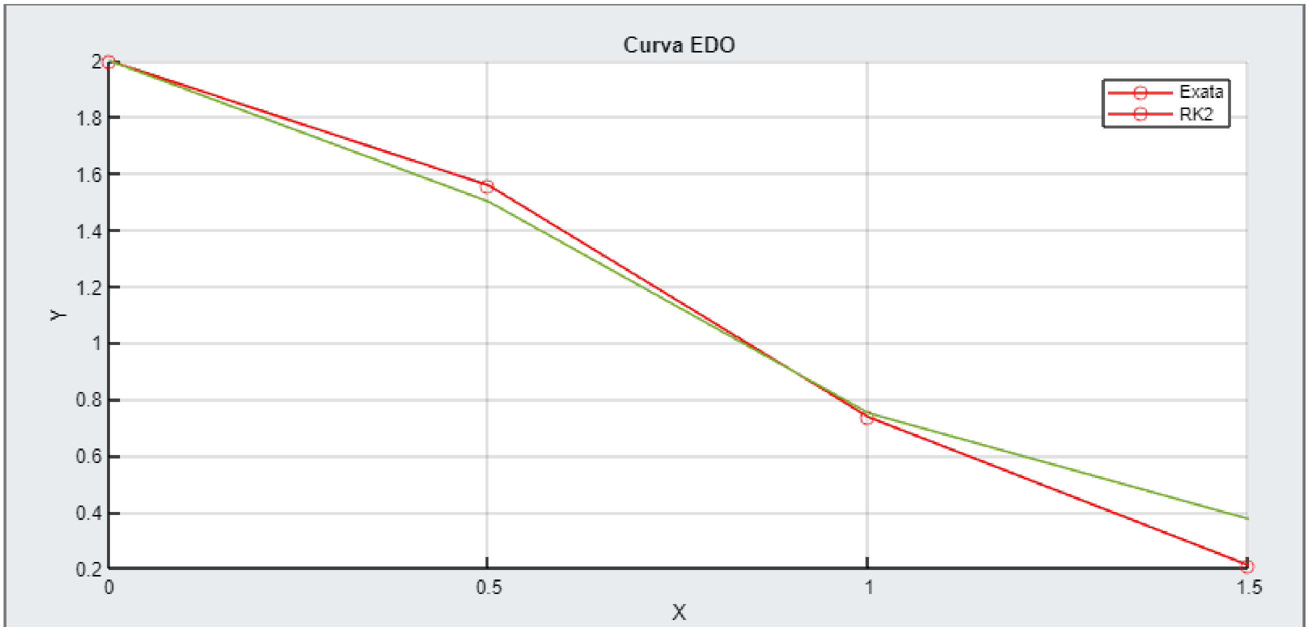
3.1.2.

Euler



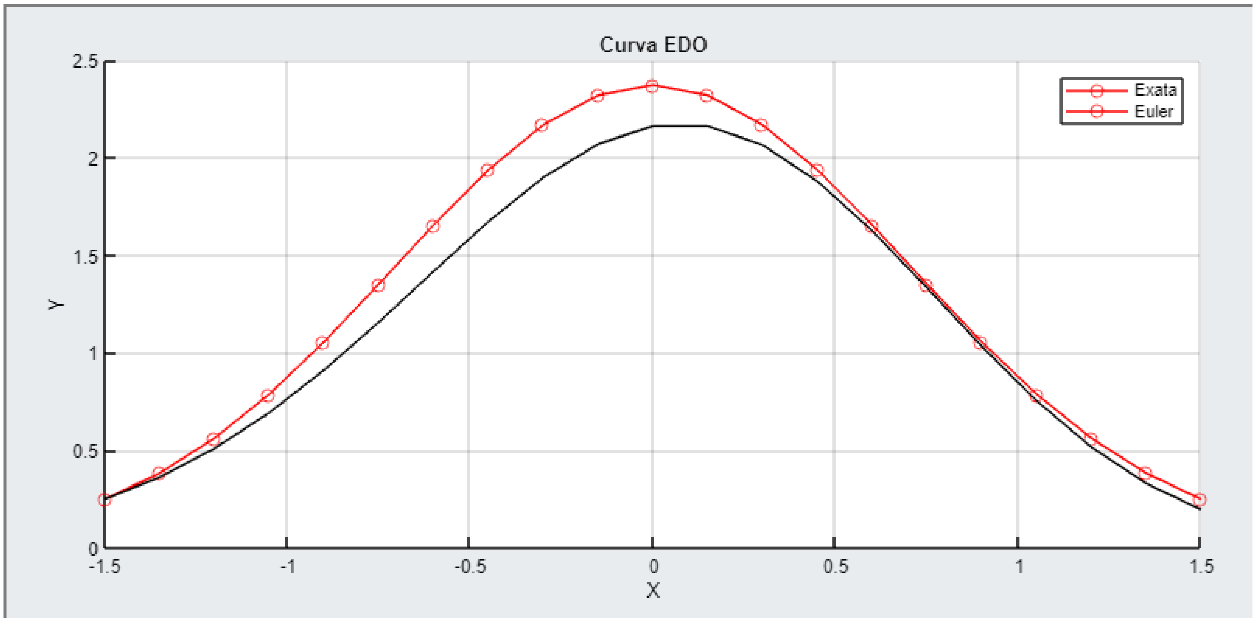
t	Exata	Euler	erroEuler
0	2.0000	2	0
0.5000	1.5576	2	0.4424
1.0000	0.7358	1	0.2642
1.5000	0.2108	0	0.2108

RK2



t	Exata	RK2	erroRK2
0	2.0000	2.0000	0
0.5000	1.5576	1.5000	0.0576
1.0000	0.7358	0.7500	0.0142
1.5000	0.2108	0.3750	0.1642

d)



3.2. Problemas de aplicação do livro

1. If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a height h is determined from

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

Let $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs, and $g = 32\ ft/s^2$.

(a) Use the Runge-Kutta method with $h = 1$ to find an approximation to the velocity of the falling mass at $t = 5$ s.

(b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem.

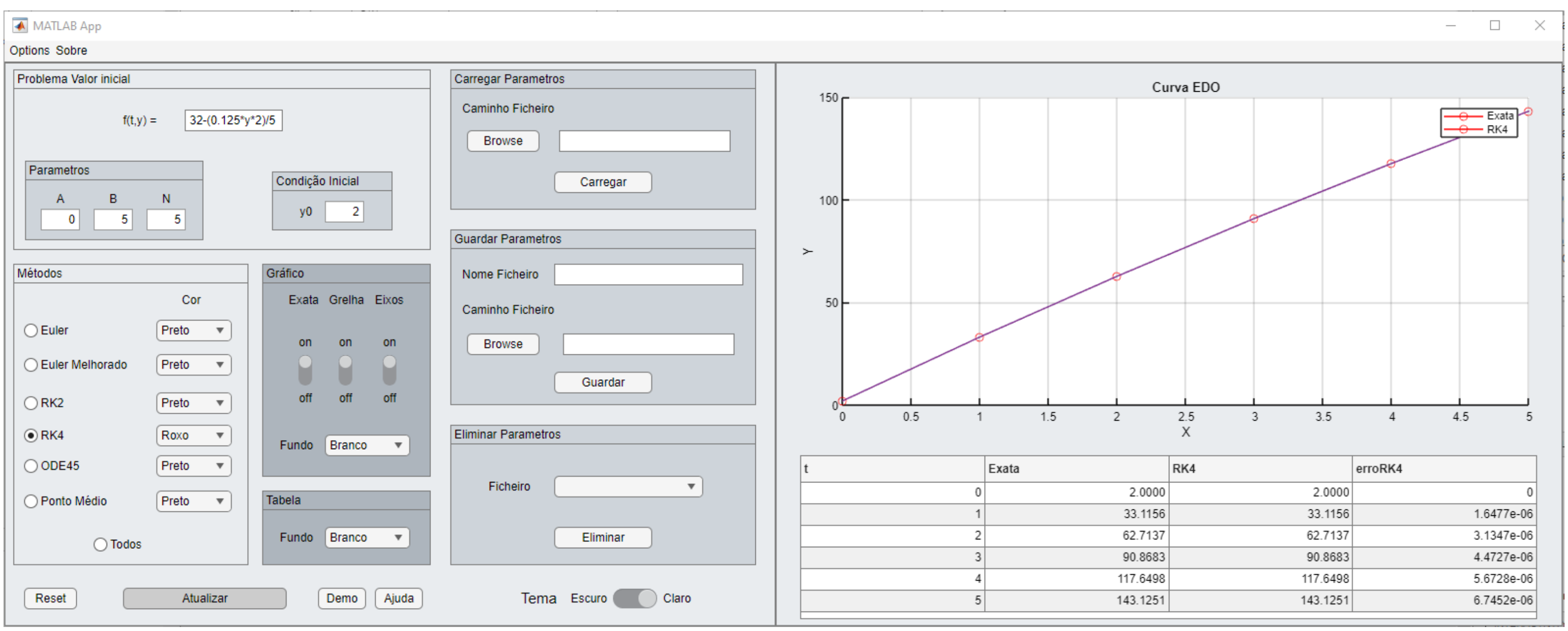
(c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and find the true value $v(5)$.

m*dv/dt = mg – kv^2 ⇔ dv/dt = g – (kv^2)/m ⇔ dv/dt = 32 - (0.125v^2)/5

$v(0) = 0$, $v(5) = ?$

$h = 1 \Rightarrow n = (b - a)/h$ ⇔

$n = (5\text{-}0)/1 \Leftrightarrow n = 5$



Usando o método RK4, com $h = 1$, temos $v(5) \cong 143.1251$

2. A mathematical model for the area A (in cm^2) that a colony of bacteria (B. forbiddenkeyworddendroides) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suppose that the initial area is $0.24\,cm^2$.

(a) Use the Runge-Kutta method with $h = 0.5$ to complete the following table.

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$					

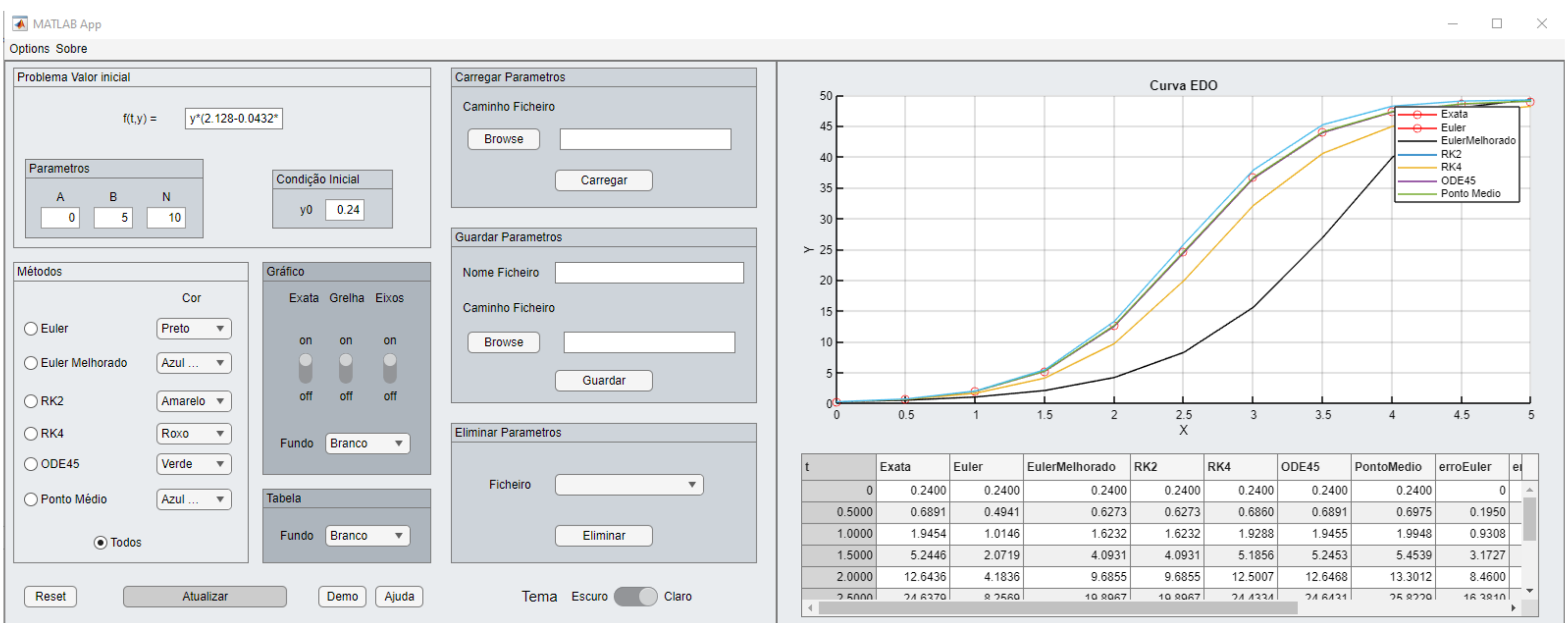
(b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem. Estimate the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$ from the graph.

(c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and compute the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$.

a)

T(das)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{A(observed)}$	**2.78**	**13.53**	**36.30**	**47.50**	**49.40**
$\boldsymbol{RK2}$	1.6232	9.6855	32.0861	44.9223	48.1758
$\boldsymbol{RK4}$	1.9288	12.5007	36.4618	47.2349	48.9965

b)



3.3. Exercício 2b) do Teste Farol

3.3.1.

Ex 2 b)

e – força electromotriz: $e = const$? $e = e(t)$?

i – intensidade: $i = const$? $i(t)$?

R – resistencia, $R = 10$ (const)

L – indutancia, $L = 0.5$ (const)

EDO: $e = Ri + L\frac{di}{dt}$, $i(t) = ?$

pressuposto

-> $e = e(t) = 3\sin(2t)$ -> logo é dependente de t

-> condição inicial: $i(0) = 6$

Validar se: $i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$ é solução particular da EDO

$3\sin(2t) = 10i + 0.5\frac{di}{dt}$, $i(0) = 6$

usando $i(t)$ dado calcular:

1º: $\frac{di}{dt} = ?$

2º: $10i + 0.5\frac{di}{dt}$?

-> $i'(t) = \left(\frac{609}{101}e - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t\right)' = \frac{609}{101}(-20)e^{-20t}$
$- \frac{60}{101}\cos(2t) - \frac{6}{101}\sin(2t) = -\frac{12180}{101}e^{-20t} - \frac{60}{101}\cos(2t)$
$- \frac{6}{101}\sin(2t)$

-> $0.5\frac{di}{dt} = -\frac{6090}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\cos(2t) - \frac{3}{101}\sin(2t)$

-> $10i + 0.5\frac{di}{dt} = 10\times\left(\frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t\right)$
$- \frac{6090}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\cos(2t) - \frac{3}{101}\sin(2t)$
$= 101 e^{-20t} - \frac{300}{101}\sin-(2t) + \frac{30}{101}\cos(2t) - \frac{6090}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\cos(2t)$
$- \frac{3}{101}\sin(2t)$

$= -\frac{303}{101}\sin(2t) = -3\sin(2t)$

$i(t)$ não é solução particular da EDO porque
$3\sin(2t) \neq 10i + 0.5\frac{di}{dt}$

4. Conclusão

A utilização de equações diferenciais ordinárias (EDO) é frequente na descrição de fenómenos narurais. Existindo vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, no entanto nem sempre comseguimos encontrar a sua solução. Por isso, os métodos numéricos são úteis para conseguirmos encontrar uma solução aproximada.

Os métodos ao serem utilizados por computadores levam a uma maior precisão e qualidade no estudo das equações diferenciais, pois conseguimos criar tabelas e gráficos que nos possibilitam fazer um estudo mais detalhado dos dados. Neste trabalho, utilizamos o MATLAB e realizamos uma comparação dos diferentes métodos numéricos como por exemplo o de Euler, Euler Melhorado ou Modificado, RK2, RK4 e ainda o do Ponto Médio, usamos ainda a função do matlab ODE45. Com os diferentes exercícios que resolvemos conseguimos entender as vantagens e desvantagens da cada método, sendo alguns mais precisos do que outros mostrando assim diferentes e por vezes melhores resultados para as EDO, sendo o ODE45 que aparenta um erro de precisão menor em relação ao valor exato, ao contrário do que esperaríamos.

Assim, os métodos apresentados neste trabalho são métodos de implementação simples e reproduzem soluções eficientes para diversos problemas envolvendo equações diferenciais.

Referências

Data da primeira consulta: 13/04/2022
https://moodle.isec.pt/moodle/mod/assign/view.php?id=187210
https://www.ime.unicamp.br/~pulino/MS211/MatLab/pvi.htm