

Análise Matmática II

Engenharia Informática Curso-Europeu

Atividade 01- Métodos Numéricos para EDO/PVI

Ano letivo – 2021/2022

Grupo:

Bruno Guimar: a2021137345@isec.pt

Carolina Veloso: a2021140780@isec.pt

Luís Duarte: a2021137789@isec.pt

Docente:

Arménio Correia: armenioc@isec.pt

**Índice**

1. **Introdução**
   1. Enunciado e interpretação do trabalho
   2. Definição de PVI
   3. Definição de EDO
2. **Métodos Numéricos para a resolução de um PVI**
   1. Método de Euler
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   2. Método de Euler Melhorado ou Modificado
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   3. Método de RK2
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   4. Método de RK4
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   5. Função ODE45 do Matlab
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   6. Método do Ponto Médio
      1. Fórmula
      2. Algortimo e Função
3. **Exemplos de aplicação e testes**
   1. Exercício 3 do teste do Farol
      1. PVI- Equação diferencial de 1ª ordem e Condições iniciais
      2. Exemplos de Output, GUI com o gráfico e a tabela
   2. Problemas de aplicação
      1. Modelação Matemática do problema
      2. Resolução através da aplicação criada
   3. Exercício 2b) do teste do Farol
4. **Conclusão**
5. **Introdução**
   1. **Interpretação do trabalho**

Os métodos numéricos são extremamente úteis na resolução de muitos problemas físicos, e surgem como alternativa para a obtenção de resultados que quase sempre não podem ser obtidos por procedimentos analíticos. De entre os métodos numéricos utilizados na resolução de equações diferenciais, destacam-se os Métodos de Euler e de Euler Melhorado e Runge-Kutta pela facilidade na obtenção de aproximações das suas versões, diferenciando dos métodos cujo desenvolvimento parte da expansão em série de Taylor.

* 1. **Definição de PVI**

Um problema de valor inicial é uma equação diferencial acompanhada pelo valor da função a determinar num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial.

A Equação Diferencial Ordinária ou EDO para abreviar [𝑦′ = 𝑓(𝑡, 𝑦)] não determina apenas uma função solução, pois especifica apenas o declive [𝑦′(𝑡)] da função solução em cada ponto, não especificando o valor [𝑦(𝑡)] para qualquer ponto. Sendo assim, existem infinitas funções que satisfazem a EDO. logo é necessário que os dados do problema indiquem [𝑦(𝑡0) = 𝑦0] , o que determina a solução única da EDO. É por isto que se designa por Problema de Valor Inicial (PVI).

Text

Description automatically generated

1. **Métodos Numéricos para a resolução de um PVI** 
   1. **Método de Euler**

O Método de Euler consiste em eliminar os termos de ordem maior ou igual a dois. Prevendo a solução através da extrapolação ao longo de uma linha reta cujo declive é [𝑓(𝑡𝑘, 𝑦𝑘)]. Este é um método simples porque depende apenas da informação num único ponto t para podermos avançar para o próximo.

* + 1. **Fórmulas**

Text, letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y = N\_Euler(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;

t(1) = a;

y(1) = y0;

for i=1:n

y(i+1) = y(i)+h\*f(t(i),y(i));

t(i+1) = t(i)+h;

end

* 1. **Método de Euler Melhorado ou Modificado**

O método de Euler melhorado foi criado pois o método de Euler normal tem uma precisão pequena, ou seja, tem uma aplicação mais reduzida, sendo assim o método de Euler consegue obter soluções com boa qualidade quando forem requeridos mais passos.

* + 1. **Fórmulas**

Text, letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y=N\_EulerM(f,a,b,n,y0)

h=(b-a)/n;

t=a:h:b;

y=zeros(1,n+1);

y(1)=y0;

for i=1:n

y(i+1)=y(i)+h\*f(t(i),y(i));

end

* 1. **Método de Runge-Kutta 2 (RK2)**

O Método de Runge-Kutta da segunda ordem é o Método de Euler melhorado, com uma melhor estimativa da derivada da função. Neste caso a estimativa da derivada baseia-se numa avaliação da função em mais pontos do intervalo [𝑡𝑛, 𝑡𝑛+1]

* + 1. **Fórmulas**

Text, letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y=N\_Rk2(f,a,b,n,y0)

h=(b-a)/n;

t=a:h:b;

y=zeros(1,n+1);

y(1)=y0;

for i=1:n

k1=h\*f(t(i),y(i));

k2=h\*f(t(i+1),y(i)+k1);

y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;

end

* 1. **Método de Runge-Kutta 4 (RK4)**

O método RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de h5, enquanto o erro total acumulado tem ordem h4.

* + 1. **Fórmulas**

A picture containing letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y = N\_Rk4(f, a, b, n, y0)

h = (b-a)/n;

t(1) = a;

y(1) = y0;

for i=1:n,

K1 = h \* feval(f, t(i), y(i));

K2 = h \* feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) \* K1);

K3 = h \* feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) \* K2);

K4 = h \* feval(f, t(i) + h, y(i) + K3);

y(i+1) = y(i) + ((1/6) \* (K1 + (2\*K2) + (2\*K3) + K4));

t(i+1) = t(i) + h;

end

* 1. **Método ODE45**

ODE45 é uma função do MATLAB, que resolve equações diferenciais. É uma função de média precisão, usada principalmente para equações não rígidas. ODE45 tem a seguinte forma:

**ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0)**

Sendo:

𝑜𝑑𝑒𝑓𝑢𝑛 – função para resolver,

𝑡𝑠𝑝𝑎𝑛 – intervalo de integração,

𝑦0 – condição inicial.

A função ODE45 devolve dois vetores: 𝑦 – Vetor das soluções;

t- Vetor dos pontos de avaliação

Cada linha em *y* corresponde à solução no valor devolvido na linha correspondente de *t*.

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y = mn\_ode45(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;

t = a:h:b;

[t,y] = ode45(f,t,y0);

* 1. **Método do Ponto Médio**

O método do ponto médio calcula a variação percentual dividindo a variação pelo ponto médio(ou média) dos níveis inicial e final.

* + 1. **Fórmula**

Text

Description automatically generated with low confidence

* + 1. **Algoritmo e Função**

function y = MPM(f,a,b,n,y0)

h= (b-a)/n;

t = a:h:b;

y = zeros(1, n+1);

y(1) = y0;

for i=1:n

k1 = 0.5 \* f(t(i), y(i));

y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, y(i) + hk1);

y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, 0.5(y(i) + y(i+1)));

1. **Exemplos de aplicação e teste dos métodos**
   1. **Exercício 3 do teste Farol**

b)

Table

Description automatically generated

c) Figura 4, porque tem o mesmo número de iterações do PVI (n=3). Ainda o intervalo deste PVI é de [0,1.5] o que mais uma vez corresponde à fugura 4. A figura 5 tem uma condição inicial de y0=0.25 o que não corresponde ao PVI dado, sendo que este tem um y0=2.

d) PVI = y’ = -2ty y0=0.25 t∈[-1.5,1.5]

e) (C)

Chart, line chart

Description automatically generated

3.1.1. Arménio

3.1.2.

EulerGraphical user interface

Description automatically generated

RK2

Table

Description automatically generatedChart, line chart

Description automatically generated

d)

Chart, line chart

Description automatically generated

* 1. **Problemas de aplicação do livro**

Text, letter

Description automatically generated

m\*dv/dt = mg – kv^2 ⬄ dv/dt = 𝑔 – (kv^2)/m ⬄ dv/dt = 32 - (0.125v^2)/5

𝑣(0) = 0, 𝑣(5) =?

ℎ = 1 ⇒ 𝑛 = (𝑏 − 𝑎)/ℎ ⇔

Chart

Description automatically generated 𝑛 = (5-0)/1 ⇔ 𝑛 =5

Usando o método RK4, com ℎ = 1, temos 𝑣(5) ≅ 143.1251

Table

Description automatically generated

a)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **T(das)** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **𝐴(𝑜𝑏𝑠𝑒𝑟𝑣𝑒𝑑)** | **2.78** | **13.53** | **36.30** | **47.50** | **49.40** |
| **𝑅𝐾2** | 1.6232 | 9.6855 | 32.0861 | 44.9223 | 48.1758 |
| **𝑅𝐾4** | 1.9288 | 12.5007 | 36.4618 | 47.2349 | 48.9965 |

Graphical user interface, chart

Description automatically generatedb)

* 1. **Exercício 2b) do Teste Farol**

1. **Conclusão**

A utilização de equações diferenciais ordinárias (EDO) é frequente na descrição de fenómenos narurais. Existindo vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, no entanto nem sempre comseguimos encontrar a sua solução. Por isso, os métods numéricos são úteis para conseguirmos encontrar uma solução aproximada.

Os métodos ao serem utilizados por computadores levam a uma maior precisão e qualidade no estudo das equações diferenciais, pois conseguimos criar tabelas e gráficos que nos possibilitam fazer um estudo mais detalhado dos dados. Neste trabalho, utilizamos o MATLAB e realizamos uma comparação dos diferentes métodos numéricos como por exemplo o de Euler, Euler Melhorado ou Modificado, RK2, RK4 e ainda o do Ponto Médio, usamos ainda a função do matlab ODE45. Com os diferentes exercícios que resolvemos conseguimos entender as vantagens e desvantagens da cada método, sendo alguns mais precisos do que outros mostrando assim diferentes e por vezes melhores resultados para as EDO, sendo o ODE45 que aparenta um erro de precisão menor em relação ao valor exato.

Assim, os métodos apresentados neste trabalho são métodos de implementação simples e reproduzem soluções eficientes para diversos problemas envolvendo equações diferenciais.

**Referências**

<https://moodle.isec.pt/moodle/mod/assign/view.php?id=187210>

<https://www.ime.unicamp.br/~pulino/MS211/MatLab/pvi.htm>