

Análise Matmática II

Engenharia Informática Curso-Europeu

Atividade 01- Métodos Numéricos para EDO/PVI

Ano letivo – 2021/2022

Grupo:

Bruno Guimar: a2021137345@isec.pt

Carolina Veloso: a2021140780@isec.pt

Luís Duarte: a2021137789@isec.pt

Docente:

Arménio Correia: armenioc@isec.pt

**Índice**

1. **Introdução**
   1. Enunciado e interpretação do trabalho
   2. Definição de PVI e de EDO
2. **Métodos Numéricos para a resolução de um PVI**
   1. Método de Euler
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   2. Método de Euler Melhorado ou Modificado
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   3. Método de RK2
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   4. Método de RK4
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   5. Função ODE45 do Matlab
      1. Fórmula
      2. Algoritmo e Função
   6. Método do Ponto Médio
      1. Fórmula
      2. Algortimo e Função
3. **Exemplos de aplicação e testes**
   1. Exercício 3 do teste do Farol
      1. PVI- Equação diferencial de 1ª ordem e Condições iniciais
      2. Exemplos de Output, GUI com o gráfico e a tabela
   2. Problemas de aplicação
      1. Modelação Matemática do problema
      2. Resolução através da aplicação criada
   3. Exercício 2b) do teste do Farol
4. **Conclusão**
5. **Introdução**
   1. **Interpretação do trabalho**

Os métodos numéricos são extremamente úteis na resolução de muitos problemas físicos, e surgem como alternativa para a obtenção de resultados que quase sempre não podem ser obtidos por procedimentos analíticos. De entre os métodos numéricos utilizados na resolução de equações diferenciais, destacam-se os Métodos de Euler e de Euler Melhorado e Runge-Kutta pela facilidade na obtenção de aproximações das suas versões, diferenciando dos métodos cujo desenvolvimento parte da expansão em série de Taylor.

* 1. **Definição de PVI e de EDO**

Um problema de valor inicial é uma equação diferencial acompanhada pelo valor da função a determinar num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial.

A Equação Diferencial Ordinária ou EDO para abreviar [𝑦′ = 𝑓(𝑡, 𝑦)] não determina apenas uma função solução, pois especifica apenas o declive [𝑦′(𝑡)] da função solução em cada ponto, não especificando o valor [𝑦(𝑡)] para qualquer ponto. Sendo assim, existem infinitas funções que satisfazem a EDO. logo é necessário que os dados do problema indiquem [𝑦(𝑡0) = 𝑦0] , o que determina a solução única da EDO. É por isto que se designa por Problema de Valor Inicial (PVI).

Text

Description automatically generated

1. **Métodos Numéricos para a resolução de um PVI** 
   1. **Método de Euler**

O Método de Euler consiste em eliminar os termos de ordem maior ou igual a dois. Prevendo a solução através da extrapolação ao longo de uma linha reta cujo declive é [𝑓(𝑡𝑘, 𝑦𝑘)]. Este é um método simples porque depende apenas da informação num único ponto t para podermos avançar para o próximo.

* + 1. Text, letter

       Description automatically generated**Fórmulas**
    2. **Algoritmo e Função**

Parâmetros de entrada:

f - Função da equação diferencial -> f(t,y)

a - Limite esquerdo do intervalo

b - Limite direito do intervalo

n - Numero de iterações

y0 - Valor inicial do PVI (condição)

function y = MEuler(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;

t(1) = a;

y(1) = y0;

for i=1:n

y(i+1) = y(i)+h\*f(t(i),y(i));

t(i+1) = t(i)+h;

end

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

* 1. **Método de Euler Melhorado ou Modificado**

O método de Euler melhorado foi criado pois o método de Euler normal tem uma precisão pequena, ou seja, tem uma aplicação mais reduzida, sendo assim o método de Euler Melhorado consegue obter soluções com boa qualidade quando forem requeridos mais passos.

* + 1. **Fórmulas**

Text, letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

**Text, letter

Description automatically generated**

function y=MEulerM(f,a,b,n,y0)

h=(b-a)/n;

t=a:h:b;

y=zeros(1,n+1);

y(1)=y0;

for i=1:n

y(i+1)=y(i)+h\*f(t(i),y(i));

end

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

* 1. **Método de Runge-Kutta 2 (RK2)**

O Método de Runge-Kutta da segunda ordem é o Método de Euler melhorado, com uma melhor estimativa da derivada da função. Neste caso a estimativa da derivada baseia-se numa avaliação da função em mais pontos do intervalo [𝑡𝑛, 𝑡𝑛+1]

* + 1. **Fórmulas**

Text, letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

**Text, letter

Description automatically generated**

function y=MRK2(f,a,b,n,y0)

h=(b-a)/n;

t=a:h:b;

y=zeros(1,n+1);

y(1)=y0;

for i=1:n

k1=h\*f(t(i),y(i));

k2=h\*f(t(i+1),y(i)+k1);

y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;

end

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

* 1. **Método de Runge-Kutta 4 (RK4)**

O método RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de h5, enquanto o erro total acumulado tem ordem h4.

* + 1. **Fórmulas**

A picture containing letter

Description automatically generated

* + 1. **Algoritmo e Função**

**Text, letter

Description automatically generated**

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

function y = MRK4(f, a, b, n, y0)

h = (b-a)/n;

t(1) = a;

y(1) = y0;

for i=1:n,

K1 = h \* feval(f, t(i), y(i));

K2 = h \* feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) \* K1);

K3 = h \* feval(f, t(i) + (h/2), y(i) + (1/2) \* K2);

K4 = h \* feval(f, t(i) + h, y(i) + K3);

y(i+1) = y(i) + ((1/6) \* (K1 + (2\*K2) + (2\*K3) + K4));

t(i+1) = t(i) + h;

end

* 1. **Método ODE45**

ODE45 é uma função do MATLAB, que resolve equações diferenciais. É uma função de média precisão, usada principalmente para equações não rígidas. ODE45 tem a seguinte forma:

**ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0)**

Sendo:

𝑜𝑑𝑒𝑓𝑢𝑛 – função para resolver,

𝑡𝑠𝑝𝑎𝑛 – intervalo de integração,

𝑦0 – condição inicial.

A função ODE45 devolve dois vetores: 𝑦 – Vetor das soluções;

t- Vetor dos pontos de avaliação

Cada linha em *y* corresponde à solução no valor devolvido na linha correspondente de *t*.

* + 1. **Algoritmo e Função**

**Text, letter

Description automatically generated**

function y = MOde45(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;

t = a:h:b;

[t,y] = ode45(f,t,y0);

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

* 1. **Método do Ponto Médio**

O método do ponto médio calcula a variação percentual dividindo a variação pelo ponto médio(ou média) dos níveis inicial e final.

* + 1. **Fórmula**

Text

Description automatically generated with low confidence

* + 1. **Algoritmo e Função**

**Text, letter

Description automatically generated**

function y = MPM(f,a,b,n,y0)

h= (b-a)/n;

t = a:h:b;

y = zeros(1, n+1);

y(1) = y0;

for i=1:n

k1 = 0.5 \* f(t(i), y(i));

y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, y(i) + hk1);

y(i+1) = y(i) + hf(t(i) + h/2, 0.5(y(i) + y(i+1)));

Parâmetros de saída:

y- Vetor das funções aproximadas

1. **Exemplos de aplicação e teste dos métodos**
   1. **Exercício 3 do teste Farol**

3.1.1.

Text, letter

Description automatically generateda)

Table

Description automatically generatedb)

c) Figura 4, porque tem o mesmo número de iterações do PVI (n=3). Ainda o intervalo deste PVI é de [0,1.5] o que mais uma vez corresponde à fugura 4. A figura 5 tem uma condição inicial de y0=0.25 o que não corresponde ao PVI dado, sendo que este tem um y0=2.

d) PVI = y’ = -2ty y0=0.25 t∈[-1.5,1.5]

e) (C)

Chart, line chart

Description automatically generated

3.1.2.

EulerGraphical user interface

Description automatically generated

RK2

Table

Description automatically generatedChart, line chart

Description automatically generated

d)

Chart, line chart

Description automatically generated

* 1. **Problemas de aplicação do livro**

Text, letter

Description automatically generated

m\*dv/dt = mg – kv^2 ⬄ dv/dt = 𝑔 – (kv^2)/m ⬄ dv/dt = 32 - (0.125v^2)/5

𝑣(0) = 0, 𝑣(5) =?

ℎ = 1 ⇒ 𝑛 = (𝑏 − 𝑎)/ℎ ⇔

Chart

Description automatically generated 𝑛 = (5-0)/1 ⇔ 𝑛 =5

Usando o método RK4, com ℎ = 1, temos 𝑣(5) ≅ 143.1251

Table

Description automatically generated

a)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **T(das)** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **𝐴(𝑜𝑏𝑠𝑒𝑟𝑣𝑒𝑑)** | **2.78** | **13.53** | **36.30** | **47.50** | **49.40** |
| **𝑅𝐾2** | 1.6232 | 9.6855 | 32.0861 | 44.9223 | 48.1758 |
| **𝑅𝐾4** | 1.9288 | 12.5007 | 36.4618 | 47.2349 | 48.9965 |

Graphical user interface, chart

Description automatically generatedb)

* 1. **Exercício 2b) do Teste Farol**
     1. Schematic, timeline

        Description automatically generated

Timeline

Description automatically generated

1. **Conclusão**

A utilização de equações diferenciais ordinárias (EDO) é frequente na descrição de fenómenos narurais. Existindo vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, no entanto nem sempre comseguimos encontrar a sua solução. Por isso, os métodos numéricos são úteis para conseguirmos encontrar uma solução aproximada.

Os métodos ao serem utilizados por computadores levam a uma maior precisão e qualidade no estudo das equações diferenciais, pois conseguimos criar tabelas e gráficos que nos possibilitam fazer um estudo mais detalhado dos dados. Neste trabalho, utilizamos o MATLAB e realizamos uma comparação dos diferentes métodos numéricos como por exemplo o de Euler, Euler Melhorado ou Modificado, RK2, RK4 e ainda o do Ponto Médio, usamos ainda a função do matlab ODE45. Com os diferentes exercícios que resolvemos conseguimos entender as vantagens e desvantagens da cada método, sendo alguns mais precisos do que outros mostrando assim diferentes e por vezes melhores resultados para as EDO, sendo o ODE45 que aparenta um erro de precisão menor em relação ao valor exato, ao contrário do que esperaríamos.

Assim, os métodos apresentados neste trabalho são métodos de implementação simples e reproduzem soluções eficientes para diversos problemas envolvendo equações diferenciais.

**Referências**

Data da primeira consulta: 13/04/2022

<https://moodle.isec.pt/moodle/mod/assign/view.php?id=187210>

<https://www.ime.unicamp.br/~pulino/MS211/MatLab/pvi.htm>