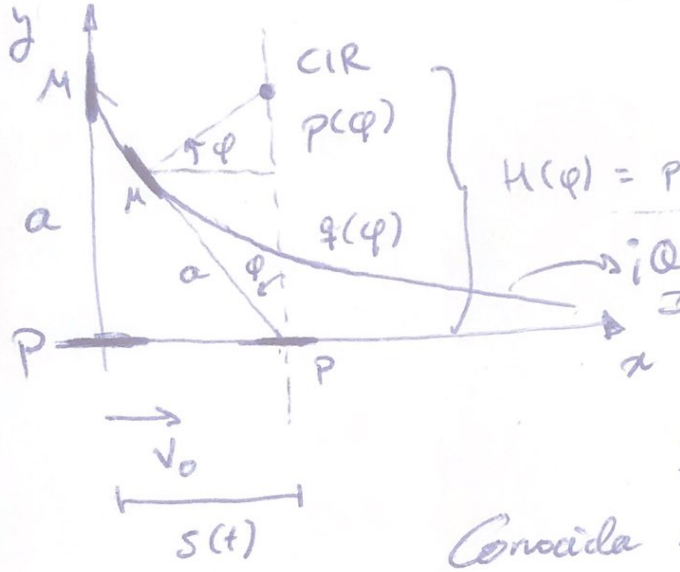
UNA INTEGRAL ELEGANTE ESCONDIDA EN UNA BICICLETA

No slip!



$H(\varphi) = p(\varphi) + q(\varphi)$

¡QUEREMOS LAS ECUACIONES DE ESTA CURVA!

ESTRATEGIA

Conocida la velocidad de P (V_0) calcularemos distancia $H(\varphi)$ al CIR para encontrar ecuación diferencial que nos de $\varphi(t)$.

COORDENADAS DE M

$$\left.\begin{aligned} x_M &= s(t) - a\sin\varphi(t) \\ y_M &= a\cos\varphi(t) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{2 ECUACIONES} \\ \text{4 VARIABLES} \end{array}$$

USANDO EL CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

VELOCIDAD ANGULAR × DISTANCIA CIR = VELOCIDAD LINEAL

$$\boxed{\dot\varphi H(\varphi) = V_0} \rightarrow \dot\varphi\left(a \ldots\right) = V_0$$

EXPRESIÓN DE $H(\varphi)$

$$H(\varphi) = p(\varphi) + q(\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} q(\varphi) &= a\cos\varphi \\ p(\varphi) &= a\sin\varphi\tan\varphi \end{aligned}\right\} \boxed{H(\varphi) = a(\cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi)}$$

SOLUCIÓN DE $\varphi(t)$

TIEMPO ADIMENSIONAL

$$\hat{t} = \frac{V_0}{a} t$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) H(\varphi) = V_0$$

$$a(\cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi)\, d\varphi = V_0 dt$$

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi)\, d\varphi = d\hat{t}$$

CONDICIÓN INICIAL

$$\varphi(0) = 0$$

INTEGRAMOS...

$$\int \cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi\, d\varphi = \hat{t} + C_1$$

$$\int \cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)$$ (TAX SYMPY!)

DETERMINAMOS C_1

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0 + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

EXPRESIÓN FINAL $\varphi(t)$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) = \hat{t} \rightarrow \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = e^{2\hat{t}}$$

$$\rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{2\hat{t}}-1}{e^{2\hat{t}}+1}\cdot\left(\frac{e^{-\hat{t}}}{e^{-\hat{t}}}\right) \rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{\hat{t}} - e^{-\hat{t}}}{e^{\hat{t}} + e^{-\hat{t}}}$$

$$\rightarrow \sin\varphi = \tanh(\hat{t}) \rightarrow \boxed{\varphi(t) = \sin^{-1}\left(\tanh(\hat{t})\right)}$$

VOLVEMOS A LAS COORDENADAS DE M...

$$\left.\begin{aligned} x_M &= s(t) - a\sin\varphi(t) \\ y_M &= a\cos\varphi(t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_M &= v_0 t - a\sin\varphi \\ y_M &= a\cos\varphi \end{aligned}$$

TIEMPO ADIMENSIONAL

$$\hat{t} = \frac{v_0}{a} t$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_M}{a} &= \hat{t} - \sin\varphi \\ \frac{y_M}{a} &= \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \hat{x}_M &= \hat{t} - \sin\varphi \\ \hat{y}_M &= \cos\varphi \end{aligned}$$

EXPRESIÓN $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \sin^{-1}\left(\tanh(\hat{t})\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}_M &= \hat{t} - \tanh(\hat{t}) \\ \hat{y}_M &= \sqrt{1 - \tanh^2(\hat{t})} \end{aligned}}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA CURVA!!

PODEMOS ELIMINAR $\hat{t}$ PARA TENER UNA CURVA CERRADA.

$$\hat{y}_M^2 = 1 - \tanh^2\hat{t} \rightarrow \hat{t} = \tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - \hat{y}_M^2}\right)$$

$$\boxed{\hat{x}_M = \tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - y_M^2}\right) - \sqrt{1 - y_M^2}}$$

NO PENSABAS QUE ESTA CURVA SE ESCONDIESE EN TU BICI, EH? :)

■