Les exercices commencent en page 2.

Rappels divers :

Si f est une fonction définie sur , I alors nous avons les relations suivantes :

f	f'	I
$x \mapsto C, C \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}\ si\ n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}^*\ sinon$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit f la fonction définie par :
$f : x \mapsto u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z})$
Alors f est dérivable sur I et nous avons :
$f' = n \cdot u^{n-1}u'$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors leur produit est dérivable sur I et nous avons :
$(uv)' = u'v + v'u$
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et que le dénominateur ne s'annule pas sur I, alors leur quotient est dérivable sur I et nous avons :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur $J \supset f(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et nous avons :
$(v \circ u)' = u' \cdot (v' \circ u)$

Formule d'intégration par partie pour une primitive :
$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Formule d'intégration par partie pour une intégrale :
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice 1 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x$

$g(x) = \cos(x) + 4\ln(x) - 3\sqrt{x}$

$h(x) = e^x - \dfrac{3}{2x^2} + \sin^2(x)$

$i(x) = (4x+2)^2$

Exercice 2 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x$

$g(x) = \cos(x) + 4\ln(x) - 3\sqrt{x}$

$h(x) = e^x - \dfrac{3}{2x^2} + \sin^2(x)$

$i(x) = (4x+2)^2$

Exercice 3 :

En utilisant la définition de la fonction tangente :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

Exercice 4 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = e^x \cos(x)$

$g(x) = \dfrac{\ln(x)}{4x^3 + 2x}$

$h(x) = \tan\left(5x^2 + 2\right)$

Exercice 5 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto xe^x$

$g : x \mapsto \ln(x)$

$h : x \mapsto e^{2x} \cos(x)$

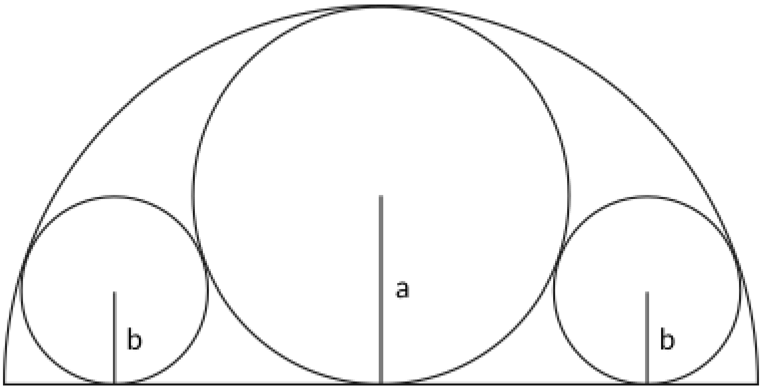
Exercice 6 :

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Problème 1 :

Trois cercles sont inscrits dans un demi-cercle. Montrer que $a = 2b$.



Problème 2 :

$99!$ est-il plus grand ou plus petit que 50^{99} ?

Problème 3 :

Deux usines sont situées de part et d'autre d'une route fluviale. L'usine A est située au kilomètre n°2 de cette route, et l'usine B au kilomètre n°10. La largeur du fleuve est de 6 km. L'entreprise souhaite relier A et B via une route et elle vous confie la responsabilité d'établir un devis.
Le devis doit comprendre le tracé de la route ainsi que son prix.

Les tarifs de construction sont les suivants :
Coût d'un pont : 40 000 € / km
Coût d'une route terrestre : 20 000 € / km

Vous remporterez l'appel d'offre si votre devis est le moins cher. Quel devis proposez vous à l'entreprise ?