Exercice 1 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x$

"Quand on dérive une puissance, la puissance tombe devant et perd un degré."

$f'(x) = 5 \cdot 3x^4 - 3 \cdot 2x^2 + 3$

$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 3$

$g(x) = \cos(x) + 4\ln(x) - 3\sqrt{x}$

Si on peut se ramener à une notation en puissance, alors on le fait (ici réécrire la racine sous forme de puissance).

$g(x) = \cos x + 4\ln x - 3x^{\frac{1}{2}}$

On peut dériver :

$g'(x) = -\sin x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{2} \cdot 3x^{-\frac{1}{2}}$

Si on le souhaite on peut revenir à une notation "racine de" :

$g'(x) = -\sin x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$h(x) = e^x - \dfrac{3}{2x^2} + \sin^2(x)$

Si on peut se ramener à une notation en puissance, alors on le fait.

$h(x) = e^x - \dfrac{3}{2}x^{-2} + \sin^2(x)$

$h'(x) = e^x - (-2) \cdot \dfrac{3}{2}x^{-3} + 2\cos x \, \sin x$

$h'(x) = e^x + \dfrac{3}{x^3} + 2\cos x \, \sin x$

$i(x) = (4x+2)^2$

Au choix : soit on dérive directement, soit on développe l'expression puis on la dérive.

En dérivant directement :

$i'(x) = 2 \cdot 4 \cdot (4x+2)$

$i'(x) = 16(2x+1)$

Ou, si on préfère développer d'abord :

$i(x) = 16x^2 + 16x + 4$

$i'(x) = 2 \cdot 16x + 16$

$i'(x) = 16(2x+1)$

Exercice 2 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

On doit donner “une” primitive, donc une seule fonction suffit. On peut dériver la fonction obtenue pour être sûr que l'on ne s'est pas trompé.

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x$

Quand on primitive une puissance, on sait qu'elle va gagner un degré. On écrit donc cette nouvelle puissance, puis on la dérive pour voir par quel facteur multiplicatif il faut compenser. Par exemple x^5 deviendra x^6, donc pour compenser le 6 qui “tombe devant” quand on dérive, il faut diviser par 6.

$$F(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^6 - \frac{1}{4} \cdot 2x^4 + \frac{1}{2} \cdot 3x^2$$

$$F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2}$$

On peut dériver cette fonction pour vérifier le résultat :

$$F'(x) = \frac{6}{2}x^5 - \frac{4}{2}x^3 + 2 \cdot \frac{3}{2}x = 3x^5 - 2x^3 + 3x$$

On a bien $F'(x) = f(x)$. Cette étape ne sera pas faite pour les prochaines réponses, mais pensez y.

$g(x) = \cos(x) + 4\ln(x) - 3\sqrt{x}$

Comme pour l'exercice 1, si on peut se ramener à une notation en puissance, alors on le fait.

$$g(x) = \cos x + 4\ln x - 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$G(x) = \sin x + 4(x\ln x - x) - \frac{2}{3} \cdot 3x^{\frac{3}{2}}$$

$$G(x) = \sin x + 4(x\ln x - x) - 2x\sqrt{x}$$

$$h(x) = e^x - \frac{3}{2x^2} + \sin^2(x)$$

$$h(x) = e^x - \frac{3}{2}x^{-2} + \sin^2(x)$$

D'après le formulaire trigonométrique, on a :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$H(x) = e^x - \left(\frac{1}{-1}\right) \cdot \frac{3}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$H(x) = e^x + \frac{3}{2x} + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$i(x) = (4x + 2)^2$

$$i(x) = 16x^2 + 16x + 4$$

$$I(x) = \frac{16x^3}{3} + 8x^2 + 4x$$

Exercice 3 :

En utilisant la définition de la fonction tangente :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\},\ \tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

Posons $u : \theta \mapsto \sin\theta$ et $v : \theta \mapsto \cos\theta$.

On a $u' : \theta \mapsto \cos\theta$ et $v' : \theta \mapsto -\sin\theta$.

v ne s'annule pas sur l'intervalle en question donc le quotient de ces deux fonctions est dérivable sur cet intervalle, et on a :

$$tan'(\theta) = \frac{u'(\theta)v(\theta) - u(\theta)v'(\theta)}{v^2(\theta)} = \frac{\cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot (-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}$$

$$tan'(\theta) = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1 + \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2$$

On retrouve bien :

$$tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

Exercice 4 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

En remarquant que f est un produit de deux fonctions $u : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto \cos x$, on a :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^x \cos(x) + e^x \cdot (-\sin(x))$$

$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{4x^3 + 2x}$$

Cette fonction est un quotient de deux fonctions $u : x \mapsto \ln x$ et $v : x \mapsto 4x^3 + 2x$, on a :

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\frac{1}{x}(4x^3 + 2x) - \ln(x)\left(12x^2 + 2\right)}{(4x^3 + 2x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^2 + 2 - \ln(x)\left(12x^2 + 2\right)}{(4x^3 + 2x)^2}$$

Une manière de simplifier cette expression :

$$g'(x) = \frac{4x^2(1 - 3\ln(x)) + 2(1 - \ln(x))}{(4x^3 + 2x)^2}$$

$$h(x) = \tan\left(5x^2 + 2\right)$$

En remarquant que h est une composition de deux fonctions $u : x \mapsto 5x^2 + 2$ et $v : x \mapsto \tan x$, on a :

$h'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \cdot v' \circ u(x)$

$h'(x) = 10x\left(1 + \tan^2\left(5x^2 + 2\right)\right)$

Exercice 5 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

Les trois fonctions suivantes étant des produits de fonction, nous allons utiliser la technique d'intégration par parties (IPP). La question étant de donner "les" primitives, il ne faudra pas oublier d'ajouter une constante de $\mathbb{R}$ au résultat. À nouveau, on pourra dériver la fonction obtenue pour vérifier qu'on ne s'est pas trompé.

$f : x \mapsto xe^x$

Posons $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$. Nous cherchons à éliminer le x afin de se retrouver avec une exponentielle seule, donc on va vouloir dériver u et intégrer v. Notons V une primitive de v, nous pouvons prendre $V : x \mapsto e^x$.

$$\int f(x)dx = \int u(x)v(x)dx = u(x)V(x) - \int u'(x)V(x)dx$$

$$\int f(x)dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

Finalement, les primitives de f sont les fonctions :

$F : x \mapsto e^x(x-1) + C,\ C \in \mathbb{R}$

$g : x \mapsto \ln(x)$

Puisque nous ne connaissons pas la primitive de $\ln x$ (la trouver est le but de la question...), on va faire apparaître un produit de fonction pour utiliser l'IPP. Cette question sert à introduire la technique de "multiplier par 1" pour faire apparaître un produit de fonctions, et donc pouvoir utiliser l'IPP qui permet de dériver la fonction qui nous pose problème et d'intégrer 1. Posons donc $u : x \mapsto \ln x$ et $v : x \mapsto 1$. Notons V une primitive de v, nous pouvons prendre $V : x \mapsto x$.

$$\int g(x)dx = \int u(x)v(x)dx = u(x)V(x) - \int u'(x)V(x)dx$$

$$\int g(x)dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x\ln(x) - \int 1 dx = x\ln(x) - x$$

Finalement, toutes les primitives de la fonction en question sont les fonctions :

$G : x \mapsto x(\ln(x) - 1) + C,\ C \in \mathbb{R}$

$h : x \mapsto e^{2x}\cos(x)$

Cette question permet d'introduire la notion "d'IPP en chaîne" jusqu'à retomber sur le membre de gauche. On pourra alors avec une manipulation de l'égalité obtenue trouver le résultat. On a envie d'utiliser cette technique quand on voit un produit d'une exponentielle par un cosinus (ou un sinus) car on sait que l'exponentielle ne bougera pas et que dériver un cosinus (ou un sinus) nous fait retomber sur lui-même au bout d'un moment.

Posons $u : x \mapsto e^{2x}$ et $v : x \mapsto \cos x$. Nous pouvons très bien primitiver l'une ou l'autre de ces fonctions car on connaît une primitive de chacune d'entre elles. Il est plus judicieux ici de vouloir dériver u plutôt que de l'intégrer car l'intégrer nous ferait apparaître des divisions par

2, alors que la dériver ferait apparaître des multiplications par 2. Notons donc V une primitive de v. $V : x \mapsto \sin x$.

$$\int h(x)dx = \int u(x)v(x)dx = u(x)V(x) - \int u'(x)V(x)dx$$

En remplaçant h par son expression dans le membre de gauche :

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin(x) - \int 2e^{2x}\sin(x)dx = e^{2x}\sin(x) - 2\int e^{2x}\sin(x)dx$$

On veut refaire apparaître une intégrale d'une exponentielle multipliée par un cosinus dans le membre de droite, donc on continue d'utiliser l'IPP pour l'intégrale du membre de droite. On continue de dériver l'exponentielle et cette fois ci on intègre le sinus :

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin(x) - 2\left(e^{2x}(-\cos(x)) - \int 2e^{2x}(-\cos(x))dx\right)$$

En simplifiant un peu et en transformant les double - en + et les triple - en - :

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 4\int e^{2x}\cos(x)dx$$

Comme prévu, nous avons fait apparaître le membre de gauche dans le membre de droite, on va donc pouvoir isoler l'intégrale en question pour obtenir le résultat.

$$\int e^{2x}\cos x dx + 4\int e^{2x}\cos(x)dx = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x)$$

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x)$$

Finalement :

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x)}{5} = \frac{e^{2x}(\sin(x) + 2\cos(x))}{5}$$

Toutes les primitives de la fonction h sont les fonctions :

$$H : x \mapsto \frac{e^{2x}(\sin(x) + 2\cos(x))}{5} + C, C \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 :

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lorsqu'on réalise un raisonnement par récurrence, on peut suivre ce protocole qui permet à coup sûr de ne pas écrire n'importe quoi :

Étape 1 : "Notons P_n la propriété "...." (que l'on souhaite démontrer)."

Étape 2 : "Montrons que P_0 (ou P_1 si on nous demande de montrer quelque chose sur $\mathbb{N}^*$) est vraie."

Étape 3 : "**Fixons** $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie (uniquement pour ce n fixé donc !) et montrons que P_{n+1} est vraie."

Étape 4 : "Ainsi, par récurrence, P_n vraie $\forall n$."

Appliquons donc cette méthode pour cet exercice :
Notons P_n la propriété suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons que P_0 est vraie. D'un côté, on a une somme d'aucun terme, qui vaut donc par défaut 0. De l'autre, on a :

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

P_0 est donc bien vraie.
Dans le cadre de cet exercice, nous allons montrer à la main que P_1 et P_2 sont vraies aussi, mais ce n'est pas nécessaire. On le fait pour pouvoir comprendre ce qu'il se passe avec une somme dans laquelle il y a des termes.

Pour $n = 1$, on a d'une part :

$$\sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1$$

et d'autre part :

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

P_1 est donc bien vraie.

Pour $n = 2$, on a d'une part :

$$\sum_{k=0}^{2} k = 0 + 1 + 2 = 3$$

et d'autre part :

$$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

P_2 est donc bien vraie.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. Ecrivons donc P_{n+1} :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = 0 + 1 + \ldots + n + n + 1 = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1$$

Puisqu'on a supposé P_n vraie, on peut remplacer la somme qu'on a fait apparaître dans le membre de droite par ce à quoi elle est égale d'après la propriété P_n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

Développons le membre de droite :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

Nous venons de développer le membre gauche de P_{n+1}. Regardons maintenant son membre de droite :

$$\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

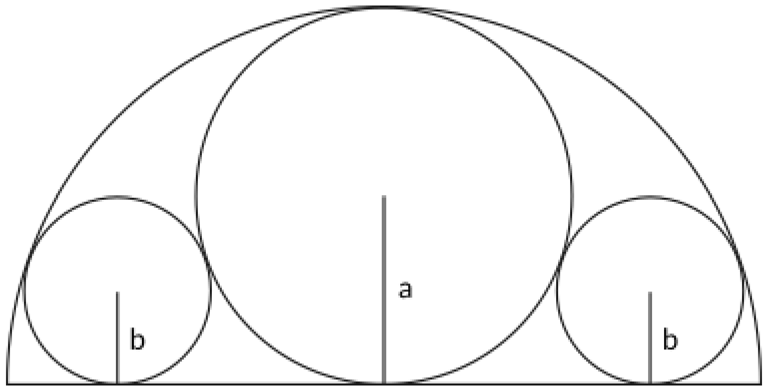
Nous venons de montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

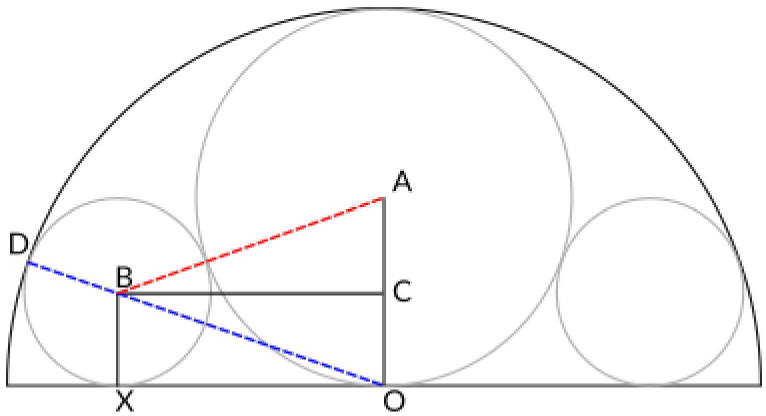
P_{n+1} est donc vraie lorsqu'on suppose P_n vraie, et puisqu'on a également montré que P_0 est vraie, on a par récurrence P_n vraie $\forall n$.

Problème 1 :

Trois cercles sont inscrits dans un demi-cercle. Montrer que $a = 2b$.



Pour résoudre ce problème, il faut qu'on arrive à établir des relations entre a et b avec la seule chose qu'on ait à disposition ici, à savoir des cercles. La figure obtenue ci-dessous a été obtenue en traçant les traits les plus logiques possible faisant intervenir les rayons des trois cercles et du demi cercle.



Dans cette figure, on a :

$OA = a$

$OC = XB = b$

$CA = a - b$

$BA = b + a$

$OD = 2a$

$OB = 2a - b$

OD vaut $2a = 2OA$ car c'est un rayon du demi-cercle.

Nous avons fait apparaître deux triangles rectangles ABC et BCO, tous deux rectangles en C. Notons $x = BC = OX$. D'après le théorème de Pythagore dans ABC, nous avons

$BC^2 + CA^2 = BA^2$ donc :

$x^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$

Et en isolant x^2 :

$x^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right) = 4ab$

En appliquant le théorème de Pythagore dans BCO, nous avons :

$BC^2 + CO^2 = BO^2$ donc :

$x^2 + b^2 = (2a-b)^2$

Et en isolant x^2:
$x^2 = (2a - b)^2 - b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 - b^2 = 4a^2 - 4ab$
En regroupant nos deux résultats :
$x^2 = 4ab = 4a^2 - 4ab$, d'où $8ab = 4a^2$. Puisque a est non nul (le problème n'existerait même pas si c'était le cas), on obtient en divisant par a de chaque côté :
$8b = 4a$, donc, en simplifiant, on vient de montrer que $a = 2b$.

Problème 2 :

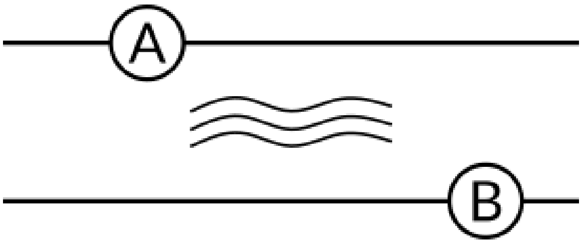
$99!$ est-il plus grand ou plus petit que 50^{99} ?
Ce problème nous donne très peu d'informations de base. La chose la plus raisonnable que l'on puisse faire, c'est faire apparaître 50 dans $99!$ pour essayer de voir émerger une solution.
$99! = 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
Ensuite, on peut se demander pourquoi l'énoncé nous donne ces deux chiffres en particulier, et pas 99 et 300 par exemple. C'est qu'il y a certainement quelque chose à utiliser dans leur relation. 50 est “au milieu” de $99!$ car c'est quasiment la moitié de 99. On peut donc partir de part et d'autre de 50 pour écrire $99!$
$99! = (50 + 49)(50 + 48) \cdot \ldots \cdot (50 + 1) \cdot 50 \cdot (50 - 1) \cdot \ldots \cdot (50 - 48)(50 - 49)$
En écrivant ceci, on reconnaît la 3e identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, donc on peut tenter de réécrire $99!$ avec cette formule :
$99! = (50^2 - 49^2)(50^2 - 48^2) \cdot \ldots \cdot (50^2 - 1^2) \cdot 50$
Le problème nous demande de comparer $99!$ et 50^{99}. On remarque que le membre de droite est une multiplication de 50 par 49 termes qui sont tous inférieurs ou égaux à 50^2.
$99! = (50^2 - 49^2)(50^2 - 48^2) \cdot \ldots \cdot (50^2 - 1^2) \cdot 50 < 50^2 \cdot 50^2 \cdot \ldots \cdot 50$
Combien y a t'il de termes dans le membre de droite ? et bien il y en a 49 qui sont au carré, plus le dernier 50 tout seul.
$99! = (50^2 - 49^2)(50^2 - 48^2) \cdot \ldots \cdot (50^2 - 1^2) \cdot 50 < (50^2)^{49} \cdot 50$
$(50^2)^{49} \cdot 50 = 50^{2 \cdot 49} \cdot 50 = 50^{98} \cdot 50 = 50^{99}$
Finalement, on vient de montrer que $99! < 50^{99}$.

Problème 3 :

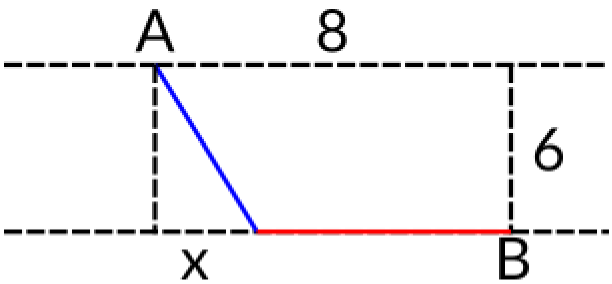
Deux usines sont situées de part et d'autre d'une route fluviale. L'usine A est située au kilomètre n°2 de cette route, et l'usine B au kilomètre n°10. La largeur du fleuve est de 6 km.
L'entreprise souhaite relier A et B via une route et elle vous confie la responsabilité d'établir un devis.
Le devis doit comprendre le tracé de la route ainsi que son prix.

Les tarifs de construction sont les suivants :
Coût d'un pont : 40 000 € / km
Coût d'une route terrestre : 20 000 € / km

Vous remporterez l'appel d'offre si votre devis est le moins cher. Quel devis proposez vous à l'entreprise ?



Il s'agit ici de trouver le prix minimum de la route. Pour cela en mathématiques on utilise la dérivation, elle permet de trouver les extremums d'une fonction. On va donc chercher à exprimer une fonction nous donnant le prix de la route en fonction du tracé. Étant donné la configuration géographique des usines, le trajet le moins cher est forcément un trajet qui passe sur l'eau (il faut traverser le fleuve) et potentiellement sur la terre. La variable de notre fonction devra représenter "à quel point" la route est plutôt un pont ou plutôt une route terrestre. La route finale ressemblera à ça :



Ce sont deux segments qui se suivent, n'importe quelle autre configuration serait plus chère (par exemple des courbes, qui sont toujours plus longues que des lignes droites dans un plan dans lequel on cherche à relier deux points). Si on fait le choix de prendre $x = 8$ par exemple, la route proposée sera uniquement un pont reliant A et B et sera donc la plus directe possible, mais potentiellement plus chère car le coût d'un pont est plus élevé. A l'inverse, si on prend $x = 0$, le trajet sur l'eau sera le plus court possible mais la route totale sera plus longue.
Le théorème de Pythagore et les valeurs de l'énoncé nous donnent la longueur de chacun de ces segments (le pont et la route terrestre). Pour le pont, la longueur vaut $\sqrt{x^2+6^2}$ et pour la route, la longueur vaut simplement $8-x$. Notons P le coût par kilomètre d'un pont et R le coût par kilomètre d'une route terrestre, nous avons donc le prix total de cette route en fonction de x :

$$F(x) = P\sqrt{x^2+6^2} + R(8-x)$$

Etudions les variations de F :

$$F'(x) = \frac{Px}{\sqrt{x^2+36}} - R$$

F' s'annule lorsque :

$$F'(x) = 0 \iff \frac{Px}{\sqrt{x^2+36}} - R = 0$$

$$F'(x)=0 \iff Px=R\sqrt{x^2+36}$$
$$F'(x)=0 \iff P^2x^2=R^2\left(x^2+36\right)$$
$$F'(x)=0 \iff P^2x^2-R^2x^2=36R^2$$
$$F'(x)=0 \iff x^2\left(P^2-R^2\right)=36R^2$$

Dans le cas où $P=R$, il apparaît directement que la route la plus courte est une diagonale reliant A et B puisqu'on ne ferait aucune économie en rallongeant la route pour passer par la terre. On peut donc diviser par P^2-R^2 dans les autres cas.

$$F'(x)=0 \iff x^2=\frac{36R^2}{P^2-R^2}$$
$$F'(x)=0 \iff x=\pm\sqrt{\frac{36R^2}{P^2-R^2}}=\pm\frac{6\,|R|}{\sqrt{P^2-R^2}}$$

$|R|=R$ car R est positif.

Puisqu'on regarde uniquement les valeurs de x comprises entre 0 et 8, on peut écrire le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{6R}{\sqrt{P^2-R^2}}$	8
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$\vert\vert$	$\nearrow$

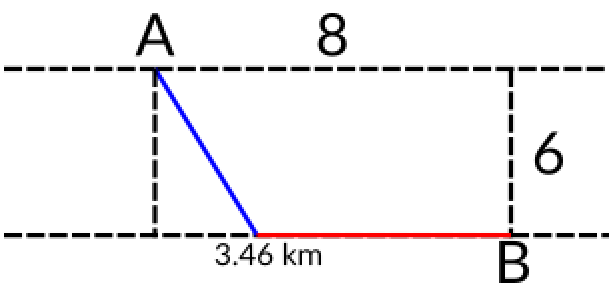
Le prix de la route sera donc minimal pour :

$$x=\frac{6R}{\sqrt{P^2-R^2}}$$

On peut calculer numériquement ce résultat, on peut aussi remarquer que l'énoncé nous donne $P=2R$ et dans ce cas :

$$x=\frac{6R}{\sqrt{(2R)^2-R^2}}=\frac{6R}{\sqrt{4R^2-R^2}}=\frac{6R}{\sqrt{3R^2}}=\frac{6R}{|R|\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\simeq 3.46$$

Ainsi, le devis final propose la route suivante :



Pour un prix de :

$$F\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\simeq 367\,846\,€$$