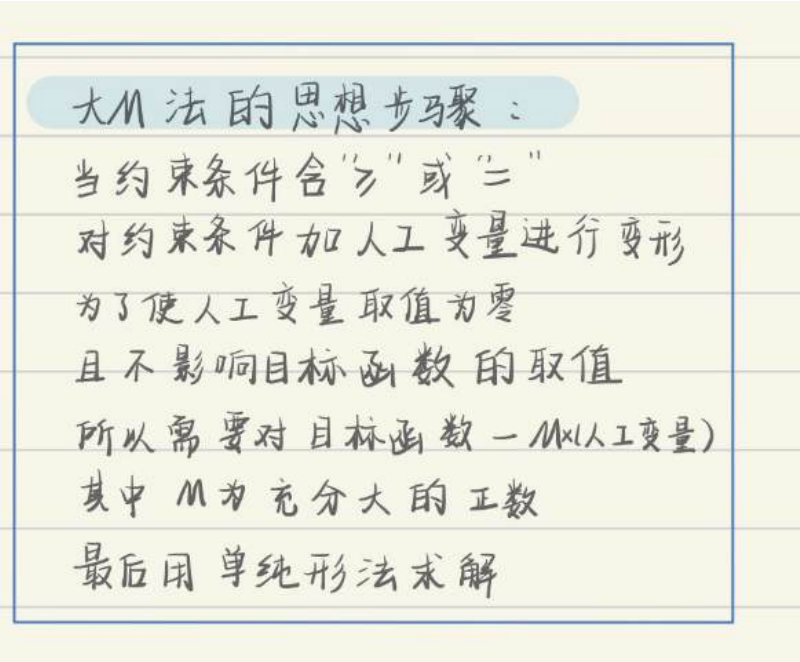
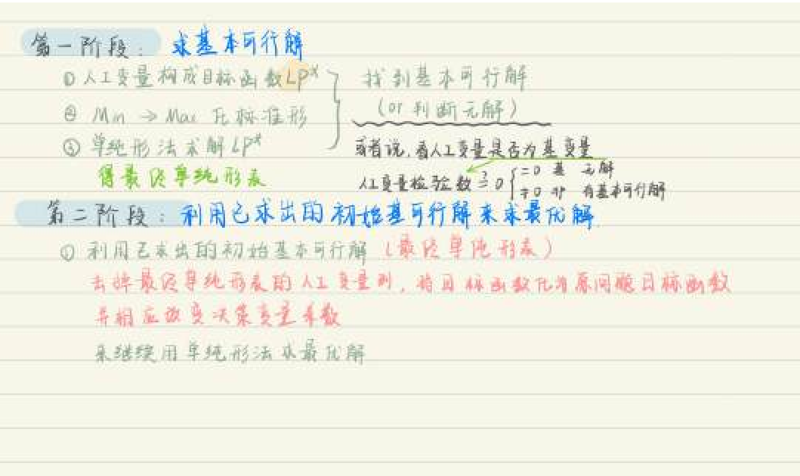
运筹学

- 简答题/概念题
  - 标准型
    > 目标函数MAX，约束条件是=，决策变量非负，资源系数大于0
  - 可行基
  - 大M法和两阶段法的思想步骤

    大M法的思想步骤：
    当约束条件含"≥"或"="
    对约束条件加人工变量进行变形
    为了使人工变量取值为零
    且不影响目标函数的取值
    所以需要对目标函数 − M×(人工变量)
    其中 M为充分大的正数
    最后用单纯形法求解

    第一阶段：求基本可行解
    ① 人工变量构成目标函数LP^*
    ② Min → Max 化标准形
    ③ 单纯形法求解LP^*
    得最优单纯形表
    找到基本可行解
    (or 判断无解)
    或者说，看人工变量是否为基变量
    人工变量检验数≥0 =0 基 无解 ≠0 非 有基本可行解
    第二阶段：利用已求出的初始基可行解来求最优解
    ① 利用已求出的初始基本可行解（最优单纯形表）
    去掉最优单纯形表的人工变量列，将目标函数化为原问题目标函数
    并相应改变决策变量系数
    来继续用单纯形法求最优解

    图二：两阶段法的思想步骤
- 七个计算
  > 图与网络考两个题
  - 线性规划和目标规划（√）
    > 6.25要学到了这里
    - 单纯形法求解（√）
      - 基础类型（小于等于，+松弛变量类型）

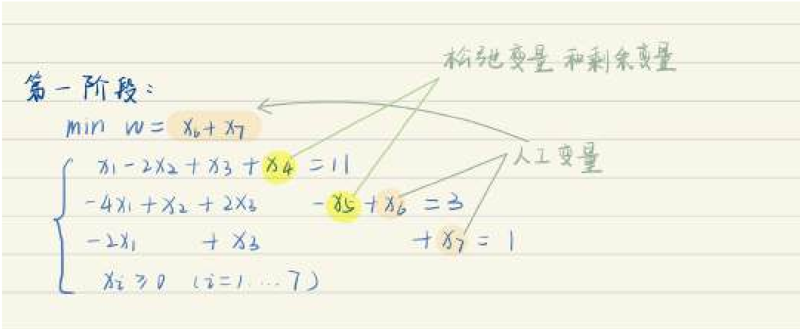
完整解题步骤

- 化标准型+表解法，计算检验数+判断检验数判别解的情况，换基

- 大M法

  人工变量法

- 两阶段法(考试概率小)

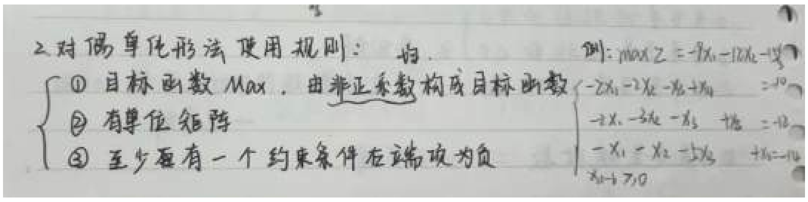
  

  图一，区分哪个是人工变量

- 建模+求解练习 （√）
- 利用单纯形法求出的最终单纯形表，看它的取值

对偶理论 （√）

- 判断使用对偶单纯形

- 根据对偶问题写原问题

  成本问题转化为定价问题

- 已知对偶问题最优解求原问题最优解

  互补松弛性的应用

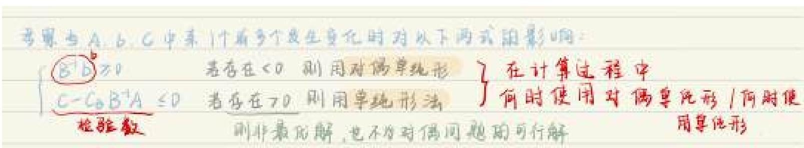
- 已知原问题最优解求对偶问题最优解
- 单纯形法的矩阵表示
- 对偶单纯形

  一般是用来和单纯形法结合用于解决原问题，不是解决对偶问题

- 实际练习题目

灵敏度分析（√）

- 在灵敏度分析中何时使用对偶单纯形?

- 价值系数c变化
- 资源系数b变化

→ 使用 $B^{-1}b$ 前提：B^{-1} 不改变

∴ $B^{-1}b$ 变化

考虑 $B^{-1}b$ 变化后 2 种情况

→ $b' = B^{-1}b$
- b' 仍为 $b' \geq 0$ 最优基不变，且最优基为 $B^{-1}b$
- $b' < 0$ 则用对偶单纯形

- 技术系数A变化

技术系数 A 变——系数矩阵变，检验数变

(4) 由于技术上的突破，每单位产品 B 原料的需求量减少为 2 单元，这时是否需要改变生产计划？为什么？

解法分析：

A 变，则在最优基 B 下
- $B^{-1}b$ 不变
- $C - C_B B^{-1} A$ 受影响
  - ≤ 0 最优解不变
  - 若存在元素 >0，单纯形法迭代

从矩阵角度来看：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_n]$$

假设 a_{ik} 变化，则 P_k 变化为 P_k'

∴ 受影响的检验数为 $\sigma_k' = C_k - \underbrace{C_B B^{-1} P_k'}_{Z_k'}$
- $\sigma_k \leq 0$ 最优解不变
- $\sigma_k > 0$ 用单纯形迭代求解

原 $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 而 $P' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

x_2 为非基变量

根据最终单纯形表

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	15	3	-1	0	1	-1
5	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
$C_j - Z_j$			0	-3	0	0	-1

C_B　B^{-1}

$$\therefore Z_2' = C_B B^{-1} P_2' = (0\ 5)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\sigma_2' = C_2 - Z_2' = 1 - 2 = -1 < 0$$

∴ 最优解不变，不需要改变生产计划

- 增加一个决策变量（计算检验数，看新增的这个决策变量的检验数是否小于0）

- 运输问题（√）
  - 搭建做题思路（√）
  - 产销问题建模（√）

产销平衡条件下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

        供>求条件下：

        $$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

        $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}<a_i, & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geq 0, & i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\cdots n\end{cases}$$

        供<求条件下

        $$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

        $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}<b_j, & j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geq 0, & i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\cdots n\end{cases}$$

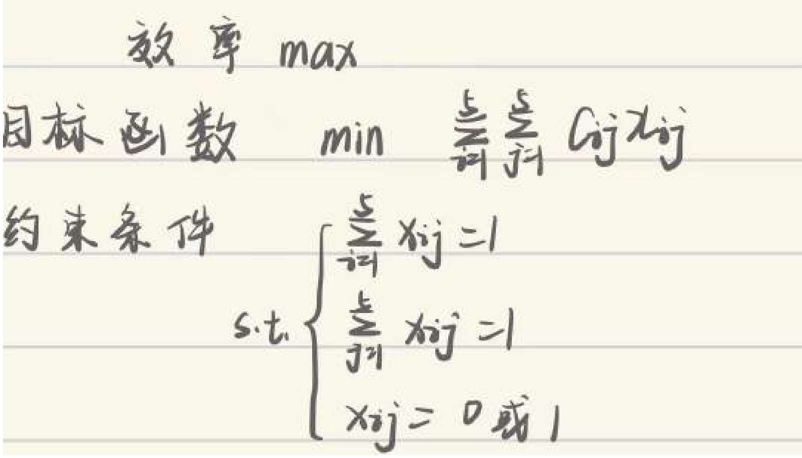
        - 产销平衡
        - 产大于销
        - 产小于销
    - 表上作业法（√）
        - step1 确定初始可行解
            - 最小元素法\含退化情况的最小元素法
            - Vogel法
        - step2 求检验数判断是否为最优解
            - 闭合回路法
            - 位势法
        - step3 调整运量
            - 闭合回路法
        - step4 重复2、3，直至最优解
    - 灵敏度分析（√）
    - 产销不平衡问题——特殊情况！！！！！！
- 整数规划（√）
    - 整数规划/0-1整数规划（二选一做决策的时候）

        > 这类建模解决什么问题，使用场景

    - 分支定界法和割平面法的算法思想（√）
- 指派问题（√）

    > 6.28学到这里

- 指派问题建模



- 指派问题求解

  匈牙利算法

- 指派问题的非标准形式(+ 任务数不等于人数)

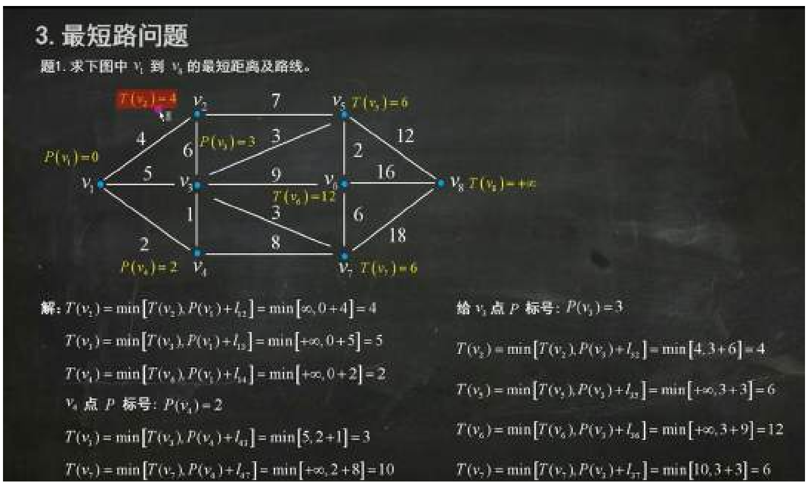
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	11	16	14	12	15
A_2	12	15	11	10	14
A_3	11	13	17	15	12
A_4	16	12	14	11	15
A_5	10	15	17	14	12

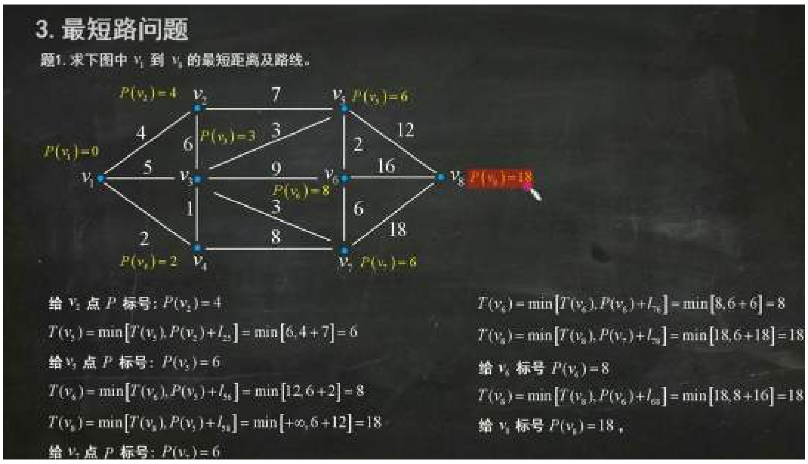
- 图论 （√）

  做题的时候切记把过程好好写一下

  - 最短路 （√）

    - Dijkstra算法

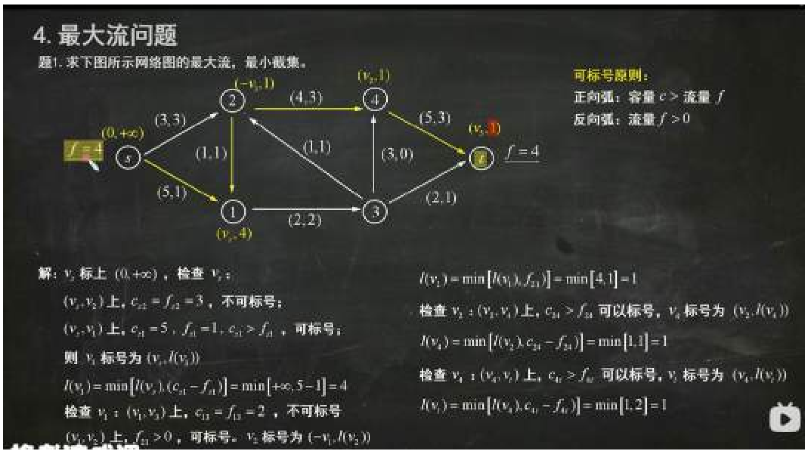


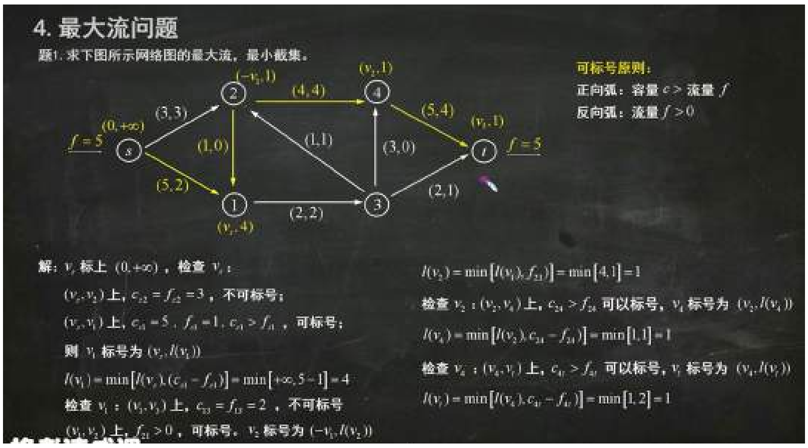


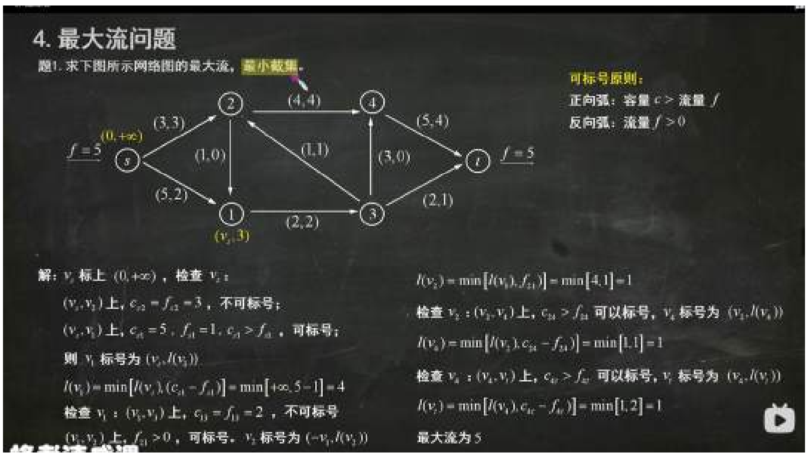
不适用于负权网络

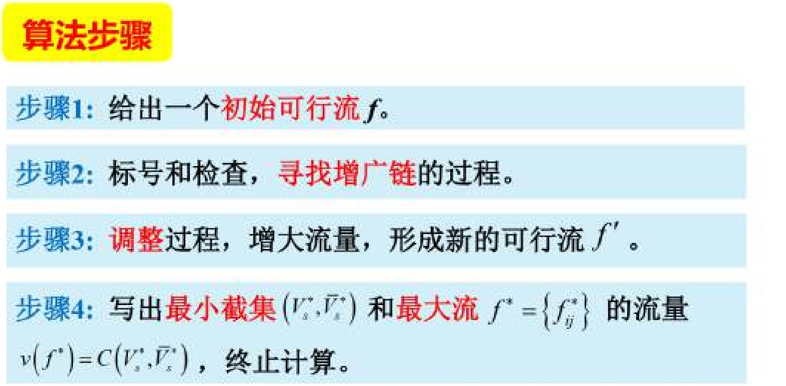
- Ford算法 （√）

- 最大流问题 （√）







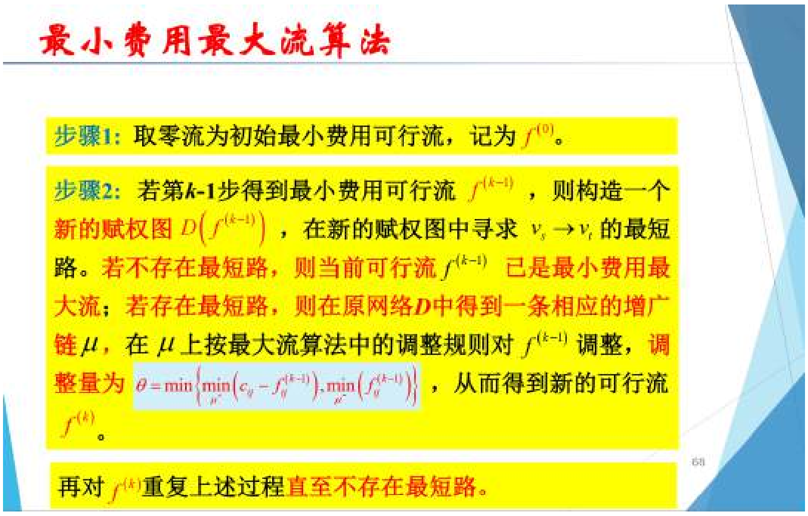


增广链：正向弧中每一个弧为非饱和弧；负向弧中每一个弧为非零流弧
可行流为最大流，当且仅当不存在增广链

- 求解最小生成树（n个节点，n-1条边）（√）

  避圈法（保留所有节点，依次在不形成圈的前提下找权重最小的边）
  破圈法（保留所有节点和边，依次从权重最大的边出发，判断是否在圈中，如果是则删除该边，直到剩n-1条边）
  矩阵法计算权重矩阵求最小生成树（prim原理）

- 最大流最小费用模型

  考的少

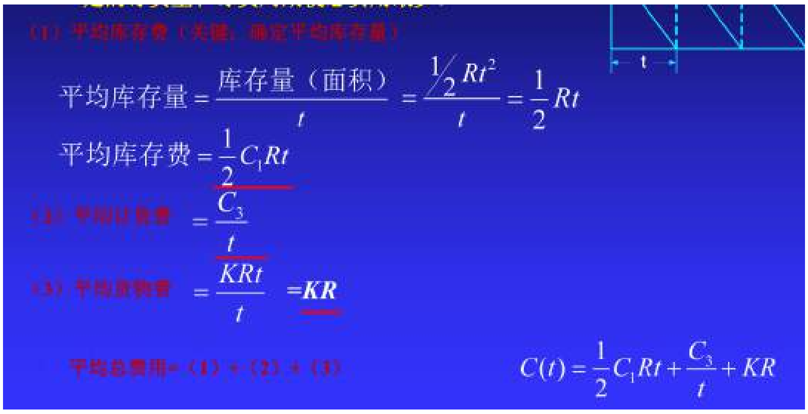
- 网络计划（√）
  - 绘制网络计划图（√）
  - 时间参数的计算（√）

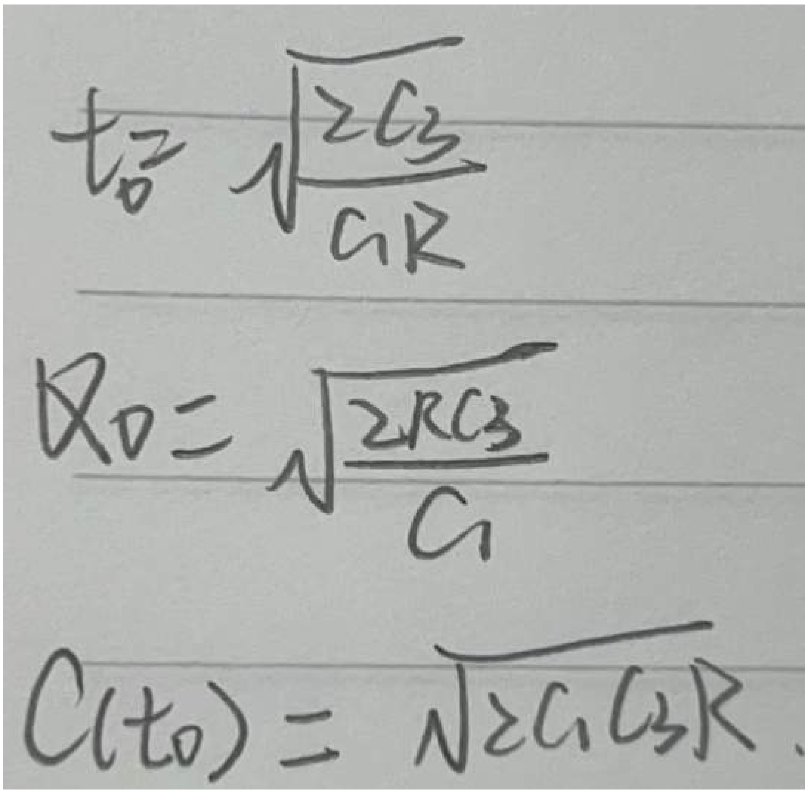
    在求出工序的最早开工、最晚开工、最早完工、最晚完工后：
    总时差：工序的最晚开工-工序的最早开工
    单时差：后面那个事项的最早时间-工序的最早完工

  - 网络计划的优化（√）
    - 工期限定，优化资源
    - 资源限定，优化工期
    - 时间-费用优化
- 存储论（√）

记得统一单位，易错！！！！！最有可能考折扣问题

- 做题思路总结
  - 绘制存储状态变化图
  - 分析各项费用，建立费用函数
  - 在总费用最低的目标下，求经济订货批量和订货周期
- 三种假设下的模型
  - 不允许缺货，瞬时补充





  - 允许缺货，瞬时补充（分别对t和S求偏导，得到最优的订货周期和最优订货量）

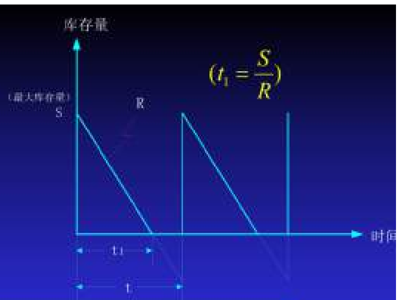
二、建立存储费用函数模型

（1）平均库存费

$$\text{平均库存量}=\frac{\frac{1}{2}t_1S}{t}=\frac{t_1S}{2t}=\frac{S^2}{2Rt}$$

$$\text{平均库存费}=\frac{C_1S^2}{2Rt}$$

用相似三角形



（2）平均缺货费

$$\text{平均缺货量}=\frac{\frac{1}{2}R(t-t_1)^2}{t}=\frac{R\left(t-\frac{S}{R}\right)^2}{2t}$$

$$=\frac{(Rt-S)^2}{2Rt}$$

$$\text{平均缺货费}=\frac{C_2(Rt-S)^2}{2Rt}$$

$$C(t,S)=\frac{C_1S^2}{2Rt}+\frac{C_2(Rt-S)^2}{2Rt}+\frac{C_3}{t}$$

求t^*, S^*

$$\text{令}\ \frac{\partial C}{\partial t}=0,\ \frac{\partial C}{\partial S}=0$$

（3）平均订货费 $=\frac{C_3}{t}$

（4）平均总费用 $C(t,S)=\frac{C_1S^2}{2Rt}+\frac{C_2(Rt-S)^2}{2Rt}+\frac{C_3}{t}$

$$t^*=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

$$S^*=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$C(t^*,S^*)=\sqrt{2C_1C_3R}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$Q^*=Rt^*=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

(3) 在t^*时间内最大缺货量 $=Rt^*-S^*$

$$=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}-\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2RC_1C_3}{C_2(C_1+C_2)}}$$

- 折扣

模型假设：订购量 Q 有单价折扣如下，其他条件同模型一

①订购的货物在补充库存时立即到达，即瞬时补充；
②货物不允许缺货；
③不同采购数量有不同的采购单价；
④每次及不同采购数量的订货费不变。

✓ 模型：平均总费用函数

$C(t)=\frac{1}{2}C_1Rt+\frac{C_3}{t}+KR$

由 $t=\frac{Q_i}{R}$

$$TC^{(i)}=\frac{1}{2}c_1Q_i+\frac{c_3R}{Q_i}+k_iR, i=1,2,\cdots,n$$

✓ 求解：

(i) 求出忽略有数量折扣的经济订购批量 $\tilde{Q}=\sqrt{\frac{2c_3R}{c_1}}$，若 $Q_i\le\tilde{Q}<Q_{i+1}$，计算此时的平均总费用为 $TC(\tilde{Q})=\frac{1}{2}c_1\tilde{Q}+\frac{c_3R}{\tilde{Q}}+k_0R$；　k_0为EOQ所对应的单价

(ii) 计算 $TC^{(j)}=\frac{1}{2}c_1Q_j+\frac{c_3R}{Q_j}+k_jR$，$j=i+1,i+2,\cdots,n$；

(iii) 若 $\min\limits_{\tilde{Q},Q_j}\left\{TC(\tilde{Q}),TC^{(i+1)},TC^{(i+2)},\cdots,TC^{(n)}\right\}=TC^*$，则 TC^* 对应的批量为最小费用订购批量 Q^*，最小费用对应的订购周期 $t^*=Q^*/R$。

例3：某企业需要一种零部件，每天的需求量为100个。每个零部件每天的存储费为0.01元，订货费为36元。若订货量超过1000个（包括1000个），每个零部件的价格为10元，否则11元。问该企业应如何确定最佳订货量（最优采购策略）。

(1) 经济订货批量 $\tilde{Q}=\sqrt{2C_3R/C_1}$

$$=\sqrt{2\times36\times100/0.01}=849$$

(2) 因849 < 折扣批量1000，计算两者费用

$$C(849)=\frac{1}{2}\times0.01\times849+\frac{36\times100}{849}+11\times100=1108.49(元)$$

$$C(1000)=\frac{1}{2}\times0.01\times1000+\frac{36\times100}{1000}+10\times100=1008.6(元)$$

(3) 因$C(1000)<C(849)$，有 $Q^*=Q_0=1000$(个)

（教材）例 7.4 某小型航空公司每年需用航空快餐 20000 套，每次订货费为 36 元，年存储费为 4 元。

当采购量小于 500 套时，单价为 11 元；

当采购量大等于 500 套且小于 800 套时，单价为 10 元；

当采购量大等于 800 套且小于 1200 时，单价为 9 元；

当采购量大等于 1200 套，单价为 8 元。

试计算最优采购量。

$$k(Q)=\begin{cases}11, & 1\le Q<500\\ 10\ k1, & 500\le Q<800\\ 9,k2, & 800\le Q<1200\\ 8,k3, & 1200\le Q\end{cases}$$

先计算忽略有数量折扣的经济订购批量 $\tilde{Q}=\sqrt{\frac{2c_3R}{c_1}}=600$（套），

$$TC(\tilde{Q})=\frac{1}{2}c_1\tilde{Q}+\frac{c_3R}{\tilde{Q}}+k_0R$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times600+\frac{36\times20000}{600}+10\times20000$$

$=202400$（元）

再分别计算 $Q_2=800$ 和 $Q_3=1200$ 时的总成本，即

$$TC^{(2)}=\frac{1}{2}c_1Q_2+\frac{c_3R}{Q_2}+k_2R$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times800+\frac{36\times20000}{800}+9\times20000$$

$=182500$（元）

min $=\frac{1}{2}c_1Q_3+\frac{c_3R}{Q_3}+k_3R$

$$=\frac{1}{2}\times4\times1200+\frac{36\times20000}{1200}+8\times20000$$

$=163000$（元）

最小费用订购批量 Q^*=1200

- 决策论（√）
  - 决策矩阵 （√）

表 16-2

S_i 每件收储产品利润是5元	事件 E_j 可能的销量 0	10	20	30	40
策略 0	0	0	0	0	0
10	−10	50	50	50	50
20	−20	40	100	100	100
30	−30	30	90	150	150
40	−40	20	80	140	200

可供选择的产量

这就是决策矩阵。根据决策矩阵中元素所示的含义不同，可称为收益矩阵、损失矩阵、风险矩阵、后悔值矩阵等

- 5个不确定型决策（√）
  - 乐观主义：选择所有最好的结果中的最好的值

16.3.2 乐观主义(max max)决策准则

持乐观主义(max max)决策准则的决策者对待风险的态度与悲观主义者不同，当他面临情况不明的策略问题时，他绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策策略。决策者在分析收益矩阵各策略的“策略—事件”对的结果中选出最大者，记在表的最右列。再从该列数值中选择最大者，以它对应的策略为决策策略，见表16-4。

表 16-4

	S_i	事件 E_j 0	10	20	30	40	max
策	0	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50	50
	20	−20	40	100	100	100	100
略	30	−30	30	90	150	150	150
	40	−40	20	80	140	200	200←max

  - 悲观主义：选择所有最坏的结果里面的最好的值

16.3.1 悲观主义(max min)决策准则

悲观主义决策准则亦称保守主义决策准则，当决策者面临着各事件的发生概率不清时，决策者考虑可能由于决策错误而造成重大经济损失。由于自己的经济实力比较脆弱，他在处理问题时就较谨慎。他分析各种最坏的可能结果，从中选择最好者，以它对应的策略为决策策略，用符号表示为 max min 决策准则。在收益矩阵中先从各策略所对应的可能发生的“策略—事件”对的结果中选出最小值，将它们列于表的最右列。再从此列的数值中选出最大者，以它对应的策略为决策者应选的决策策略。计算见表16-3。

表 16-3

	S_i	事件 E_j 0	10	20	30	40	min
策	0	0	0	0	0	0	0←max
	10	−10	50	50	50	50	−10
	20	−20	40	100	100	100	−20
略	30	−30	30	90	150	150	−30
	40	−40	20	80	140	200	−40

根据 max min 决策准则有

$$\max(0,-10,-20,-30,-40)=0$$

它对应的策略为 S_1，即为决策者应选的策略。在这里是“什么也不生产”，这结论似乎荒谬，但在实际中表示先看一看，以后再作决定。上述计算用公式表示为

$$S_k^* \to \max\min(a_{ij})$$

  - 等可能性准则

各策略的收益期望值，然后在所有这些期望值中选择最大者，以它对应的策略为决策策略，见表16-5。然后按下式决定决策策略。

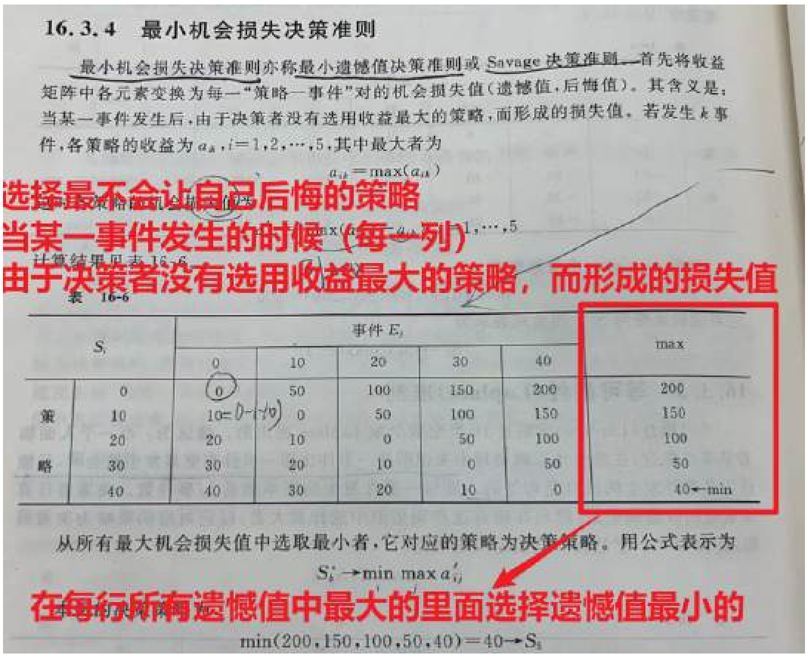
$$S_k^* \to \max\{E(S_i)\}$$

计算各策略收益期望值

表 16-5

	S_i	事件 E_j 0	10	20	30	40	$E(S_i)=\sum_j pa_{ij}$
策	0	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50	38 ≈ $\frac{190}{5}$
	20	−20	40	100	100	100	64
略	30	−30	30	90	150	150	78
	40	−40	20	80	140	200	80←max

  - 遗憾准则



16.3.4 最小机会损失决策准则

最小机会损失决策准则亦称最小遗憾值决策准则或 Savage 决策准则。首先将收益矩阵中各元素变换为每一“策略—事件”对的机会损失值（遗憾值，后悔值）。其含义是：当某一事件发生后，由于决策者没有选用收益最大的策略，而形成的损失值。若发生 k 事件，各策略的收益为 a_{ik}，$i=1,2,\cdots,5$，其中最大者为

$$a_{lk}=\max(a_{ik})$$

选择最不会让自己后悔的策略

当某一事件发生的时候（每一列）

由于决策者没有选用收益最大的策略，而形成的损失值

表 16-6

S_i	事件 E_j 0	10	20	30	40	max
策略 0	0	50	100	150	200	200
10	10=0-(-10)	0	50	100	150	150
20	20	10	0	50	100	100
30	30	20	10	0	50	50
40	40	30	20	10	0	40←min

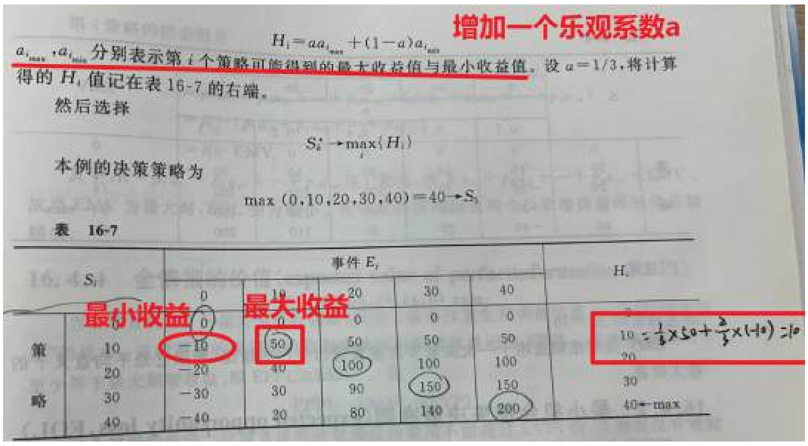
从所有最大机会损失值中选取最小者，它对应的策略为决策策略。用公式表示为

$$S_k^* \to \min \max a'_{ij}$$

在每行所有遗憾值中最大的里面选择遗憾值最小的

$$\min(200,150,100,50,40)=40\to S_5$$

- 折中准则



增加一个乐观系数a

$$H_i=\alpha a_{i_{\max}}+(1-\alpha)a_{i_{\min}}$$

$a_{i_{\max}}$，$a_{i_{\min}}$ 分别表示第 i 个策略可能得到的最大收益值与最小收益值。设 $\alpha=1/3$，将计算得的 H_i 值记在表 16-7 的右端。

然后选择

$$S_k^* \to \max_i \{H_i\}$$

本例的决策策略为

$$\max(0,10,20,30,40)=40\to S_5$$

表 16-7

S_i	事件 E_j 0	10	20	30	40	H_i
策略 0	0	0	0	0	0	0
10	-10	50	50	50	50	$10=\frac{1}{3}\times 50+\frac{2}{3}\times(-10)=10$
20	-20	40	100	100	100	20
30	-30	30	90	150	150	30
40	-40	20	80	140	200	40←max

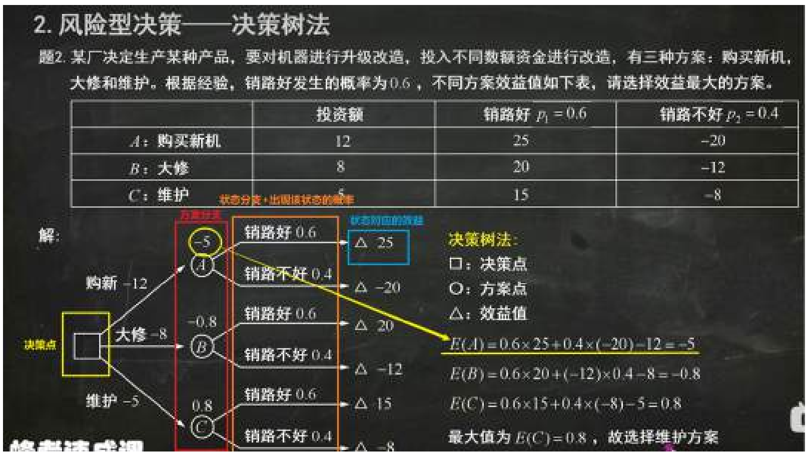
最小收益

最大收益

- 贝叶斯修正概率（√）
  - 贝叶斯公式：若事件B（复杂现象）已经发生，利用贝叶斯公式可以计算由事件A（第i个原因）导致事件B发生的可能性

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum P(B_i)P(A \mid B_i)} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

- 画决策树（√）



> - 动态规划（√）
> - 排队论（√）
>
> > 6.29复习完