

运筹学

• 简答题/概念题

• 标准型

目标函数MAX，约束条件是=，决策变量非负，资源系数大于0

• 可行基

• 大M法和两阶段法的思想步骤

大M法的思想步骤：

当约束条件含" $>$ "或" $=$ "

对约束条件加人工变量进行变形

为了使人工变量取值为零

且不影响目标函数的取值

所以需要对目标函数 $-M \times (\text{人工变量})$

其中 M 为充分大的正数

最后用单纯形法求解

第一阶段：求基本可行解

- ① 人工变量构成目标函数 LP^*
 - ② $Min \rightarrow Max$ 化标准形
 - ③ 单纯形法求解 LP^*
- 得最终单纯形表
- 找到基本可行解
(or 判断无解)
- 或者说，看人工变量是否为基变量
人工变量检验数 ≤ 0 $\begin{cases} =0 & \text{基变量} \\ <0 & \text{非基变量} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{有解} \\ \text{有基本可行解} \end{cases}$

第二阶段：利用已求出的初始基本可行解求最优解

- ① 利用已求出的初始基本可行解（最终单纯形表）
- 去掉最终单纯形表的人工变量列，将目标函数化为原问题目标函数
并相应改变决策变量系数
再继续用单纯形法求最优解

图二：两阶段法的思想步骤

• 七个计算

图与网络考两个题

• 线性规划和目标规划（√）

6.25要学到了这里

• 单纯形法求解（√）

- 基础类型（小于等于，+松弛变量类型）

完整解题步骤

- 化标准型+表解法，计算检验数+判断检验数判别解的情况，换基
- 大M法
- 人工变量法
- 两阶段法(考试概率小)

第一阶段:

$$\min W = x_6 + x_7$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 7) \end{cases}$$

松弛变量和剩余变量

人工变量

图一，区分哪个是人工变量

- 建模+求解练习 (√)
- 利用单纯形法求出的最终单纯形表，看它的取值
- 对偶理论 (√)
 - 判断使用对偶单纯形

2. 对偶单纯形法使用规则: 均

例: $\max Z = -x_1 - 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -16 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

① 目标函数 Max, 由非正系数构成目标函数

② 有单位矩阵

③ 至少有一个约束条件右端项为负

- 根据对偶问题写原问题
- 成本问题转化为定价问题
- 已知对偶问题最优解求原问题最优解
- 互补松弛性的应用
- 已知原问题最优解求对偶问题最优解
- 单纯形法的矩阵表示
- 对偶单纯形
- 实际练习题目

一般是用来和单纯形法结合用于解决原问题，不是解决对偶问题

- 灵敏度分析 (√)
 - 在灵敏度分析中何时使用对偶单纯形?

当 A, b, C 中某 1 个或多个发生变化时对以下两式的影响:

$$\begin{cases} b_i \geq 0 & \text{若存在 } < 0 \text{ 则用对偶单纯形} \\ C - C_0 B^{-1} A \leq 0 & \text{若存在 } > 0 \text{ 则用单纯形法} \end{cases}$$

在计算过程中

何时使用对偶单纯形 / 何时使用单纯形

在驻点

则非最优解, 也不为对偶问题的可行解

- 价值系数c变化
- 资源系数b变化

→ 使用 $B^{-1}b$ 前提: B^{-1} 不改变

∴ $B^{-1}b$ 变化

考虑 $B^{-1}b$ 变化后 2 种情况

→ $b' = B^{-1}b$ { b' 仍为 $b' \geq 0$ 最优基不变
且最优基为 $B^{-1}b$
 $b' < 0$ 则用对偶单纯形

• 技术系数A变化

技术系数A变——系数矩阵变，检验数变

(1) 由于技术上的突破，每单位产品B原料的需求量减少为2单位，这时是否需要改变生产计划？为什么？

解法分析：

A 变 $\begin{cases} B^{-1}b & \text{不变} \\ C - C_0 B^{-1}A & \text{受影响} \end{cases} \begin{cases} \leq 0 & \text{最优解不变} \\ \text{若存在元素} > 0, & \text{单纯形法迭代} \end{cases}$ ★

从矩阵角度来看：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]$$

假设 a_{1k} 变化，则 P_k 变化为 P'_k

∴ 受影响的检验数为 $\sigma_k = C_k - C_0 B^{-1} P'_k$ { $\sigma_k \leq 0$ 最优解不变
 $\sigma_k > 0$ 用单纯形迭代求解

原 $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 而 $P' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ∴ $Z'_2 = C_0 B^{-1} P'_2$

$$= (0 \ 5) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2$$

$\sigma'_2 = C_2 - Z'_2$

$$= 1 - 2 = -1 < 0$$

∴ 最优解不变，不需要改变生产计划

x_2 为非基变量
根据最终单纯形表

C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_1	3	1	0	0	1	-1
5	x_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
$C_j - Z_j$			0	-3	0	0	-1

Ca) B^{-1}

• 增加一个决策变量（计算检验数，看新增的这个决策变量的检验数是否小于0）

• 运输问题 (√)

• 搭建做题思路 (√)

• 产销问题建模 (√)

产销平衡条件下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j=1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

供>求条件下:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} < a_i, & i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j=1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

供<求条件下

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} < b_j, & j=1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

- 产销平衡
- 产大于销
- 产小于销
- 表上作业法 (√)
 - step1 确定初始可行解
 - 最小元素法\含退化情况的最小元素法
 - Vogel法
 - step2 求检验数判断是否为最优解
 - 闭合回路法
 - 位势法
 - step3 调整运量
 - 闭合回路法
 - step4 重复2、3, 直至最优解
- 灵敏度分析 (√)
- 产销不平衡问题——特殊情况!!!!!!

• 整数规划 (√)

- 整数规划/0-1整数规划 (二选一做决策的时候)
 - 这类建模解决什么问题, 使用场景
- 分支定界法和割平面法的算法思想 (√)

• 指派问题 (√)

6.28学到这里

- 指派问题建模

效率 max

目标函数 $\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$

约束条件 $s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$

- 指派问题求解

匈牙利算法

- 指派问题的非标准形式(+ 任务数不等于人数)

指派问题的非标准形式

1) 最大利润/产值问题

某车间有5个工厂, 5个机床, 每小时每个工厂操作不同机床的产值如下:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	11	16	14	12	15
A ₂	12	15	11	10	14
A ₃	11	13	17	15	12
A ₄	16	12	14	11	15
A ₅	10	15	17	14	12

Q: 建立利润最大的数学模型并求出最大产值

MAX $Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$

s.t. $\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$

Max \rightarrow min 原则

令矩阵 $B = (b_{ij})_{n \times n} = (M - C_{ij})_{n \times n}$, 则B为系数矩阵

的最小化指派问题和原最大化有相同最优解

- 图论 (√)

做题的时候切记把过程好好写一下

- 最短路 (√)

- Dijkstra算法

3. 最短路问题

题1. 求下图中 v_1 到 v_8 的最短距离及路线。

解: $T(v_2) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{12}] = \min[+\infty, 0 + 4] = 4$

$T(v_3) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{13}] = \min[+\infty, 0 + 5] = 5$

$T(v_4) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{14}] = \min[+\infty, 0 + 2] = 2$

v_4 点 P 标号: $P(v_4) = 2$

$T(v_5) = \min[T(v_2), P(v_2) + l_{25}] = \min[4, 3 + 6] = 4$

$T(v_6) = \min[T(v_3), P(v_3) + l_{36}] = \min[+\infty, 3 + 9] = 12$

$T(v_7) = \min[T(v_4), P(v_4) + l_{47}] = \min[5, 2 + 1] = 3$

$T(v_8) = \min[T(v_6), P(v_6) + l_{68}] = \min[+\infty, 3 + 9] = 12$

$T(v_8) = \min[T(v_7), P(v_7) + l_{78}] = \min[10, 3 + 3] = 6$

给 v_1 点 P 标号: $P(v_1) = 3$

$T(v_2) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{12}] = \min[4, 3 + 6] = 4$

$T(v_3) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{13}] = \min[+\infty, 3 + 3] = 6$

$T(v_4) = \min[T(v_1), P(v_1) + l_{14}] = \min[+\infty, 3 + 2] = 5$

$T(v_5) = \min[T(v_2), P(v_2) + l_{25}] = \min[4, 3 + 6] = 4$

$T(v_6) = \min[T(v_3), P(v_3) + l_{36}] = \min[+\infty, 3 + 9] = 12$

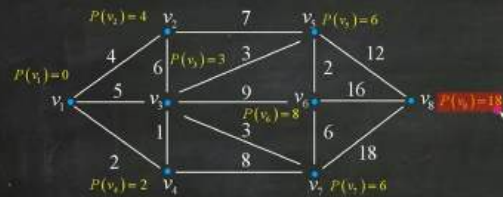
$T(v_7) = \min[T(v_4), P(v_4) + l_{47}] = \min[5, 2 + 1] = 3$

$T(v_8) = \min[T(v_6), P(v_6) + l_{68}] = \min[+\infty, 3 + 9] = 12$

$T(v_8) = \min[T(v_7), P(v_7) + l_{78}] = \min[10, 3 + 3] = 6$

3. 最短路问题

题1. 求下图从 v_1 到 v_8 的最短距离及路线。



给 v_2 点 P 标号: $P(v_2) = 4$

$T(v_2) = \min[T(v_1), P(v_2) + l_{12}] = \min[0, 4 + 7] = 6$

给 v_3 点 P 标号: $P(v_3) = 3$

$T(v_3) = \min[T(v_2), P(v_3) + l_{23}] = \min[6, 4 + 7] = 6$

给 v_4 点 P 标号: $P(v_4) = 2$

$T(v_4) = \min[T(v_3), P(v_4) + l_{34}] = \min[3, 6 + 2] = 5$

给 v_5 点 P 标号: $P(v_5) = 6$

$T(v_5) = \min[T(v_2), P(v_5) + l_{25}] = \min[6, 4 + 7] = 6$

给 v_6 点 P 标号: $P(v_6) = 8$

$T(v_6) = \min[T(v_3), P(v_6) + l_{36}] = \min[3, 6 + 2] = 5$

给 v_7 点 P 标号: $P(v_7) = 6$

$T(v_7) = \min[T(v_5), P(v_7) + l_{57}] = \min[6, 6 + 12] = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

$T(v_8) = \min[T(v_6), P(v_8) + l_{68}] = \min[8, 6 + 12] = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

给 v_8 点 P 标号: $P(v_8) = 18$

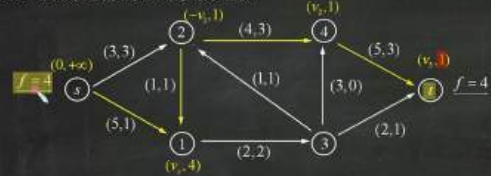
不适用于负权网络

- Ford算法 (√)

- 最大流问题 (√)

4. 最大流问题

题1. 求下图所示网络图的最大流, 最小截集。



解: v_1 标上 $(0, +\infty)$, 检查 v_2 :

(v_1, v_2) 上, $c_{12} = f_{12} = 3$, 不可标号;

(v_1, v_3) 上, $c_{13} = 5$, $f_{13} = 1$, $c_{13} > f_{13}$, 可标号;

则 v_3 标号为 $(v_1, l(v_3))$

$l(v_3) = \min[l(v_1), c_{13} - f_{13}] = \min[+\infty, 5 - 1] = 4$

检查 v_4 : (v_3, v_4) 上, $c_{34} = f_{34} = 2$, 不可标号

(v_1, v_2) 上, $f_{12} > 0$, 可标号, v_2 标号为 $(-v_1, l(v_2))$

$l(v_2) = \min[l(v_1), f_{21}] = \min[4, 1] = 1$

检查 v_4 : (v_2, v_4) 上, $c_{24} > f_{24}$, 可以标号, v_4 标号为 $(v_2, l(v_4))$

$l(v_4) = \min[l(v_2), c_{24} - f_{24}] = \min[1, 1] = 1$

检查 v_t : (v_4, t) 上, $c_{4t} > f_{4t}$, 可以标号, v_t 标号为 $(v_4, l(v_t))$

$l(v_t) = \min[l(v_4), c_{4t} - f_{4t}] = \min[1, 2] = 1$

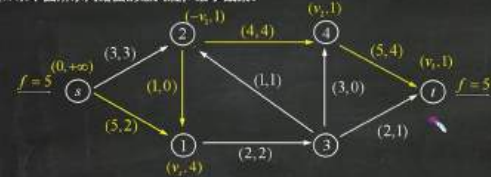
可标号原则:

正向弧: 容量 $c >$ 流量 f

反向弧: 流量 $f > 0$

4. 最大流问题

题1. 求下图所示网络图的最大流, 最小截集。



解: v_1 标上 $(0, +\infty)$, 检查 v_2 :

(v_1, v_2) 上, $c_{12} = f_{12} = 3$, 不可标号;

(v_1, v_3) 上, $c_{13} = 5$, $f_{13} = 2$, $c_{13} > f_{13}$, 可标号;

则 v_3 标号为 $(v_1, l(v_3))$

$l(v_3) = \min[l(v_1), c_{13} - f_{13}] = \min[+\infty, 5 - 2] = 3$

检查 v_4 : (v_3, v_4) 上, $c_{34} = f_{34} = 2$, 不可标号

(v_1, v_2) 上, $f_{12} > 0$, 可标号, v_2 标号为 $(-v_1, l(v_2))$

$l(v_2) = \min[l(v_1), f_{21}] = \min[4, 1] = 1$

检查 v_4 : (v_2, v_4) 上, $c_{24} > f_{24}$, 可以标号, v_4 标号为 $(v_2, l(v_4))$

$l(v_4) = \min[l(v_2), c_{24} - f_{24}] = \min[1, 1] = 1$

检查 v_t : (v_4, t) 上, $c_{4t} > f_{4t}$, 可以标号, v_t 标号为 $(v_4, l(v_t))$

$l(v_t) = \min[l(v_4), c_{4t} - f_{4t}] = \min[1, 2] = 1$

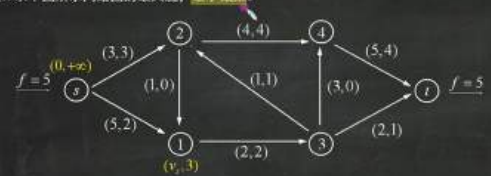
可标号原则:

正向弧: 容量 $c >$ 流量 f

反向弧: 流量 $f > 0$

4. 最大流问题

题1. 求下图所示网络图的最大流, 最小截集。



解: v_1 标上 $(0, +\infty)$, 检查 v_2 :

(v_1, v_2) 上, $c_{12} = f_{12} = 3$, 不可标号;

(v_1, v_3) 上, $c_{13} = 5$, $f_{13} = 2$, $c_{13} > f_{13}$, 可标号;

则 v_3 标号为 $(v_1, l(v_3))$

$l(v_3) = \min[l(v_1), c_{13} - f_{13}] = \min[+\infty, 5 - 2] = 3$

检查 v_4 : (v_3, v_4) 上, $c_{34} = f_{34} = 2$, 不可标号

(v_1, v_2) 上, $f_{12} > 0$, 可标号, v_2 标号为 $(-v_1, l(v_2))$

$l(v_2) = \min[l(v_1), f_{21}] = \min[4, 1] = 1$

检查 v_4 : (v_2, v_4) 上, $c_{24} > f_{24}$, 可以标号, v_4 标号为 $(v_2, l(v_4))$

$l(v_4) = \min[l(v_2), c_{24} - f_{24}] = \min[1, 1] = 1$

检查 v_t : (v_4, t) 上, $c_{4t} > f_{4t}$, 可以标号, v_t 标号为 $(v_4, l(v_t))$

$l(v_t) = \min[l(v_4), c_{4t} - f_{4t}] = \min[1, 2] = 1$

可标号原则:

正向弧: 容量 $c >$ 流量 f

反向弧: 流量 $f > 0$

最大流为 5

算法步骤

步骤1: 给出一个初始可行流 f 。

步骤2: 标号和检查, 寻找增广链的过程。

步骤3: 调整过程, 增大流量, 形成新的可行流 f' 。

步骤4: 写出最小截集 (V_s^*, \bar{V}_s^*) 和最大流 $f^* = \{f_{ij}^*\}$ 的流量 $v(f^*) = C(V_s^*, \bar{V}_s^*)$, 终止计算。

增广链: 正向弧中每一个弧为非饱和弧; 负向弧中每一个弧为非零流弧
可行流为最大流, 当且仅当不存在增广链

• 求解最小生成树 (n个节点, n-1条边) (√)

避圈法 (保留所有节点, 依次在不形成圈的前提下找权重最小的边)

破圈法 (保留所有节点和边, 依次从权重最大的边出发, 判断是否在圈中, 如果是则删除该边, 直到剩n-1条边)

矩阵法计算权重矩阵求最小生成树 (prim原理)

• 最大流最小费用模型

最小费用最大流算法

步骤1: 取零流为初始最小费用可行流, 记为 $f^{(0)}$ 。

步骤2: 若第k-1步得到最小费用可行流 $f^{(k-1)}$, 则构造一个新的赋权图 $D(f^{(k-1)})$, 在新的赋权图中寻求 $v_s \rightarrow v_t$ 的最短路。若不存在最短路, 则当前可行流 $f^{(k-1)}$ 已是最小费用最大流; 若存在最短路, 则在原网络D中得到一条相应的增广链 μ , 在 μ 上按最大流算法中的调整规则对 $f^{(k-1)}$ 调整, 调整量为 $\theta = \min \left\{ \min_{\mu^+} (c_{ij} - f_{ij}^{(k-1)}), \min_{\mu^-} (f_{ij}^{(k-1)}) \right\}$, 从而得到新的可行流 $f^{(k)}$ 。

再对 $f^{(k)}$ 重复上述过程直至不存在最短路。

考的少

• 网络计划 (√)

• 绘制网络计划图 (√)

• 时间参数的计算 (√)

在求出工序的最早开工、最晚开工、最早完工、最晚完工后:

总时差: 工序的最晚开工-工序的最早开工

单时差: 后面那个事项的最早时间-工序的最早完工

• 网络计划的优化 (√)

• 工期限定, 优化资源

• 资源限定, 优化工期

• 时间-费用优化

• 存储论 (√)

记得统一单位，易错！！！！最有可能考折扣问题

- 做题思路总结

- 绘制存储状态变化图
- 分析各项费用，建立费用函数
- 在总费用最低的目标下，求经济订货批量和订货周期

- 三种假设下的模型

- 不允许缺货，瞬时补充

(1) 平均库存量 (关键：确定平均库存量)

平均库存量 = $\frac{\text{库存量 (面积)}}{t} = \frac{\frac{1}{2}Rt^2}{t} = \frac{1}{2}Rt$


平均库存费 = $\frac{1}{2}C_1Rt$

(2) 平均订货费 = $\frac{C_3}{t}$

(3) 平均缺货费 = $\frac{KRt}{t} = KR$

平均总费用 = (1) + (2) + (3)

$C(t) = \frac{1}{2}C_1Rt + \frac{C_3}{t} + KR$



$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$

$R_0 = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}$

$C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R}$

- 允许缺货，瞬时补充 (分别对t和s求偏导，得到最优的订货周期和最优订货量)

二、建立存储费用函数模型

(1) 平均库存费

$$\text{平均库存量} = \frac{\frac{1}{2}t_1S}{t} = \frac{t_1S}{2t} = \frac{S^2}{2Rt}$$

$$\text{平均库存费} = \frac{C_1S^2}{2Rt} \quad \text{用相似三角形}$$

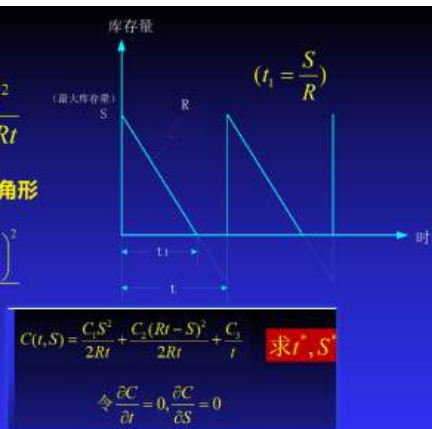
(2) 平均缺货费

$$\text{平均缺货量} = \frac{\frac{1}{2}R(t-t_1)^2}{t} = \frac{R\left(t-\frac{S}{R}\right)^2}{2t}$$

$$= \frac{(Rt-S)^2}{2Rt}$$

$$\text{平均缺货费} = \frac{C_2(Rt-S)^2}{2Rt}$$

$$(3) \text{ 平均订货费} = \frac{C_3}{t}$$



$$(4) \text{ 平均总费用} \quad C(t, S) = \frac{C_1S^2}{2Rt} + \frac{C_2(Rt-S)^2}{2Rt} + \frac{C_3}{t}$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$C(t^*, S^*) = \sqrt{2C_1C_3R} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$R^* = Rt^* = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

(3) 在 t^* 时间内最大缺货量 $= Rt^* - S^*$

$$= \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}} - \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2RC_1C_3}{C_2(C_1+C_2)}}$$

折扣

模型假设：订购量 Q 有单价折扣如下，其他条件同模型一

- ① 订购的货物在补充库存时立即到达，即瞬时补充；
- ② 货物不允许缺货；
- ③ 不同采购数量有不同的采购单价；
- ④ 每次及不同采购数量的订货费不变。

✓ 模型：平均总费用函数

$$C(t) = \frac{1}{2} C_1 R t + \frac{C_2}{t} + kR$$

由 $t = \frac{Q_i}{R}$

$$TC^{(i)} = \frac{1}{2} c_1 Q_i + \frac{c_2 R}{Q_i} + k_i R, i = 1, 2, \dots, n$$

✓ 求解：

(i) 求出忽略有数量折扣的经济订购批量 $\bar{Q} = \sqrt{\frac{2c_2 R}{c_1}}$ ，若 $Q_i \leq \bar{Q} < Q_{i+1}$ ，计算此时的

平均总费用为 $TC(\bar{Q}) = \frac{1}{2} c_1 \bar{Q} + \frac{c_2 R}{\bar{Q}} + k_0 R$ ； k_0 为EOQ所对应的单价

(ii) 计算 $TC^{(j)} = \frac{1}{2} c_1 Q_j + \frac{c_2 R}{Q_j} + k_j R, j = i+1, i+2, \dots, n$ ；

(iii) 若 $\min_{Q_i} \{TC(\bar{Q}), TC^{(i+1)}, TC^{(i+2)}, \dots, TC^{(n)}\} = TC^*$ ，则 TC^* 对应的批量为最小费

用订购批量 Q^* ，最小费用对应的订购周期 $t^* = Q^* / R$ 。

例3：某企业需要一种零部件，每天的需求量为100个。每个零部件每天的存储费为0.01元，订货费为36元。若订货量超过1000个（包括1000个），每个零部件的价格为10元，否则11元。问该企业应如何确定最佳订货量（最优订购策略）。

(1) 经济订货批量 $\bar{Q} = \sqrt{2C_2 R / C_1}$
 $= \sqrt{2 \times 36 \times 100 / 0.01} = 849$

(2) 因 $849 < \text{折扣批量} 1000$ ，计算两者费用

$$C(849) = \frac{1}{2} \times 0.01 \times 849 + \frac{36 \times 100}{849} + 11 \times 100 = 1108.49 \text{ (元)}$$

$$C(1000) = \frac{1}{2} \times 0.01 \times 1000 + \frac{36 \times 100}{1000} + 10 \times 100 = 1008.6 \text{ (元)}$$

(3) 因 $C(1000) < C(849)$ ，有 $Q^* = Q_0 = 1000$ (个)

(教材) 例 7.4 某小型航空公司每年需用航空快餐 20000 套，每次订货费为 36 元，年存储费为 4 元。

当采购量小于 500 套时，单价为 11 元；
 当采购量大于等于 500 套且小于 800 套时，单价为 10 元；
 当采购量大等于 800 套且小于 1200 时，单价为 9 元；
 当采购量大等于 1200 套，单价为 8 元。

$$k(Q) = \begin{cases} 11, & 1 \leq Q < 500 \\ 10, & 500 \leq Q < 800 \\ 9, & 800 \leq Q < 1200 \\ 8, & 1200 \leq Q \end{cases}$$

试计算最优采购量。

先计算忽略有数量折扣的经济订购批量 $\bar{Q} = \sqrt{\frac{2c_2 R}{c_1}} = 600$ (套)，

$$TC(\bar{Q}) = \frac{1}{2} c_1 \bar{Q} + \frac{c_2 R}{\bar{Q}} + k_0 R$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 600 + \frac{36 \times 20000}{600} + 10 \times 20000$$

$$= 202400 \text{ (元)}$$

再分别计算 $Q_2 = 800$ 和 $Q_3 = 1200$ 时的总成本，即

$$TC^{(2)} = \frac{1}{2} c_1 Q_2 + \frac{c_2 R}{Q_2} + k_2 R$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 800 + \frac{36 \times 20000}{800} + 9 \times 20000$$

$$= 182500 \text{ (元)}$$

$$\min \frac{1}{2} c_1 Q_3 + \frac{c_2 R}{Q_3} + k_3 R$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 1200 + \frac{36 \times 20000}{1200} + 8 \times 20000$$

$$= 163000 \text{ (元)}$$

最小费用订购批量 $Q^* = 1200$

● 决策论 (✓)

● 决策矩阵 (✓)

表 16-2

S _i		事件 E _j 可能的销量					
		0	10	20	30	40	
策 略	0	0	0	0	0	0	
	10	-10	50	50	50	50	
	20	-20	40	100	100	100	
	30	-30	30	90	150	150	
	40	-40	20	80	140	200	

每件收进产品利润是5元

可供选择的产量

这就是决策矩阵。根据决策矩阵中元素所示的含义不同，可称为收益矩阵、损失矩阵、风险矩阵、后悔值矩阵等。

- 5个不确定型决策 (√)

- 乐观主义：选择所有最好的结果中的最好的值

16.3.2 乐观主义(max max)决策准则

持乐观主义(max max)决策准则的决策者对待风险的态度与悲观主义者不同,当他面临情况不明的策略问题时,他绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会,以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策策略。决策者在分析收益矩阵各策略的“策略—事件”对的结果中选出最大者,记在表的最右列。再从该列数值中选择最大者,以它对应的策略为决策策略,见表 16-4。

表 16-4

S _i		事件 E _j					max
		0	10	20	30	40	
策 略	0	0	0	0	0	0	0
	10	-10	50	50	50	50	50
	20	-20	40	100	100	100	100
	30	-30	30	90	150	150	150
	40	-40	20	80	140	200	200 ← max

- 悲观主义：选择所有最坏的结果里面的最好的值

16.3.1 悲观主义(max min)决策准则

悲观主义决策准则亦称保守主义决策准则。当决策者面临着各事件的发生概率不清时,决策者考虑可能由于决策错误而造成重大经济损失。由于自己的经济实力比较脆弱,他在处理问题时就较谨慎。他分析各种最坏的可能结果,从中选择最好者,以它对应的策略为决策策略,用符号表示为 max min 决策准则。在收益矩阵中先从各策略所对应的可能发生的“策略—事件”对的结果中选出最小值,将它们列于表的最右列。再从此列的数值中选出最大者,以它对应的策略为决策者应选的决策策略。计算见表 16-3。

表 16-3

S _i		事件 E _j					min
		0	10	20	30	40	
策 略	0	0	0	0	0	0	0 ← max
	10	-10	50	90	50	50	-10
	20	-20	40	100	100	100	-20
	30	-30	30	90	150	150	-30
	40	-40	20	80	140	200	-40

根据 max min 决策准则有

$$\max(0, -10, -20, -30, -40) = 0$$

它对应的策略为 S₁, 即为决策者应选的策略。在这里是“什么也不生产”, 这结论似乎荒谬, 但在实际中表示先看一看, 以后再作决定。上述计算用公式表示为

$$S_i^* \rightarrow \max \min(a_{ij})$$

- 等可能性准则

各策略的收益期望值, 然后在所有这些期望值中选择最大者, 以它对应的策略为决策策略, 见表 16-5。然后按下式决定决策策略。

$$S_i^* \rightarrow \max\{E(S_i)\}$$

计算各策略收益期望值

表 16-5

S _i		事件 E _j					$E(S_i) = \sum_j p a_{ij}$
		0	10	20	30	40	
策 略	0	0	0	0	0	0	0
	10	-10	50	50	50	50	38 $\frac{190}{5}$
	20	-20	40	100	100	100	64
	30	-30	30	90	150	150	78
	40	-40	20	80	140	200	80 ← max

- 遗憾准则

最小机会损失决策准则亦称最小遗憾值决策准则或Savage 决策准则。首先将收益矩阵中各元素变换为每一“策略—事件”对的机会损失值(遗憾值,后悔值)。其含义是:当某一事件发生后,由于决策者没有选用收益最大的策略,而形成的损失值。若发生 k 事件,各策略的收益为 $a_{ik}, i=1,2,\dots,5$, 其中最大者为

$\text{EX}(A_{\text{每-}a_{\text{列}}})=1, \dots, 5$

当某一事件发生的时候 (每一列)

由于决策者没有选用收益最大的策略，而形成的损失值

S _i		事件 E _j					max
		0	10	20	30	40	
策	0	0	50	100	150	200	200
	10	10-100	0	50	100	150	150
	20	20	10	0	50	100	100
略	30	30	20	10	0	50	50
	40	40	30	20	10	0	40 ← min

$$S_i^* \rightarrow \min \max a'_{ij}$$

在每行所有遗憾值中最大的里面选择遗憾值最小的

$$\min(200, 150, 100, 50, 40) = 40 \rightarrow S_5$$

- 增加一个乐观系数 α**
- $a_{i_{\max}}, a_{i_{\min}}$ 分别表示第 i 个策略可能得到的最大收益值与最小收益值。设 $\alpha=1/3$, 将计算得的 H_i 值记在表 16-7 的右端。
- 然后选择
- $$S_i^* \rightarrow \max_i \{H_i\}$$
- 本例的决策策略为
- $$\max \{0, 10, 20, 30, 40\} = 40 \rightarrow S_5$$
- 表 16-7
- | | S_i | 事件 E_j | | | | H_i |
|--------|-------|----------|----|-----|-----|---|
| | | 0 | 20 | 30 | 40 | |
| 策
略 | 10 | -10 | 50 | 0 | 0 | $H_i = \frac{1}{3} \times 50 + \frac{2}{3} \times (-10) = 20$ |
| | 20 | -20 | 40 | 100 | 50 | |
| | 30 | -30 | 30 | 90 | 150 | |
| | 40 | -40 | 20 | 80 | 140 | |
| | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
- 最小收益 最大收益
- $40 \leftarrow \max$

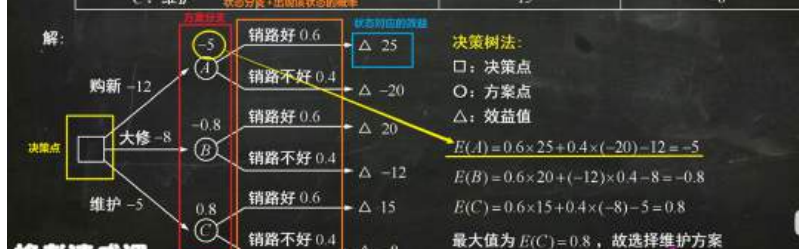
- 贝叶斯公式：若事件B（复杂现象）已经发生，利用贝叶斯公式可以计算由事件A（第i个原因）导致事件B发生的可能性

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum P(B_i)P(A | B_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- 画决策树 (✓)

题2. 某厂决定生产某种产品, 要对机器进行升级改造, 投入不同数额资金进行改造, 有三种方案: 购买新机, 大修和维护。根据经验, 销路好发生的概率为0.6, 不同方案效益值如下表, 请选择效益最大的方案。

	投资额	销路好 $p_1 = 0.6$	销路不好 $p_2 = 0.4$
A: 购买新机	12	25	-20
B: 大修	8	20	-12
C: 维护	5	15	-8



- 动态规划 (√)
- 排队论 (√)

6.29复习完