# Лабораторная работа №1

# Решение уравнения c одной переменной

Рассмотрим уравнение относительно переменной

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.1) |

где функция  определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале .

Всякое значение переменной , обращающее функцию  в нуль, , называется корнем уравнения (1.1), а способ нахождения этого значения  ‑ способом решения данного уравнения.

**Задание 1**

Сделать отделение корней: графически и по программе (точность ). Индивидуальные задания приведены в таблице 1.

**Задание 2**

2. Провести уточнение корней методом половинного деления.

В качестве начального приближения выберем значение , являющееся серединой указанного интервала. Затем проводим исследование функции  на концах отрезков  и . Выбирается тот отрезок, у которого значение функции на концах имеет противоположные знаки. Обозначим выбранный отрезок . Далее аналогично выполняются следующие шаги итерационного процесса, в результате которых последовательно формируются отрезки разбиения ,  При этом выполняется условие . Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие . Точность  принять равной .

**Задание 3**

3. Сделать уточнение корней методом простой итерации.

Пусть корни уравнения  отделены и отрезок  содержит единственный корень уравнения. Для построения итерационной процедуры приведем уравнение (1.1) к следующему виду:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.2) |

где функция  является дифференцируемой на всем отрезке , и для любого значения  такого, что , модуль производной . Графически решение уравнения (1.2) соответствует пересечению двух линий – прямой  и некоторой в общем случае кривой . Функцию  можно подобрать различным образом, в частности, в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.3) |

где коэффициент  находится из следующего условия , которое должно выполняться для всех , то есть . В простейшем случае выбирают  Последнее условие гарантирует сходимость итерационной последовательности  к корню . Условием окончания итерационной процедуры будем считать выполнение неравенства

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.4) |

где .

Сделать уточнение корней методом хорд (X) или касательных (K) в таблице 1) с заданной точностью .

Расчетная формула для уточнения корней в методе хорд имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

для метода касательных расчетная формула записывается следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Значение  для метода хорд и начальная точка для метода касательных выбираются из условия одинакового знака функции и ее второй производной в этой точке, что определяется выполнением неравенства .

В результате выполнения итерационной процедуры с использованием приведенных формул может быть получена последовательность приближенных значений корня. Процесс вычислений заканчивается при выполнении условия  (). В каждом из рассмотренных выше случаев требуется вывести на печать количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

Примерный вариант выполнения лабораторной работы № 1 на MathCad

Задание 1. Определение, построение таблиц значений и графиков функций и отделение корней уравнения .

Отделяем корни графически. Для этого по графику функции, определяем приближенные значения аргумента , при которых график пересекает линию  (рисунок 1.1).

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 1.1 |

Как следует из рисунка 1.1, график функции три раза пересекает линию . Приближенные значения корней составляют , , .

Задание 1. Вычисление корней методом половинного деления.

Для нахождения первого корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,125 |
|  | -2,1875 |
|  | -2,21875 |
|  | -2,203125 |
|  | -2,1953125 |
|  | -2,19140625 |
|  | -2,1894531255 |
|  | -2,1904296875 |
|  | -2,19091796875 |
|  | -2,191162109375 |
|  | -2,1910400390625 |
|  | -2,19110107421875 |
|  | -2,191131591796875 |
|  | -2,19111633300778125 |
|  | -2,1911087036132812 |
|  | -2,1911048889160156 |

Для нахождения второго корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,125 |
|  | -0,1875 |
|  | -0,15625 |
|  | -0,140625 |
|  | -0,1328125 |
|  | -0,12890625 |
|  | -0,126953125 |
|  | -0,1259765625 |
|  | -0,12548828125 |
|  | -0,125732421875 |
|  | -0,1256103515625 |
|  | -0,12554931640625 |
|  | -0,125518798828125 |
|  | -0,1255035400390625 |
|  | -0,12549591064453125 |
|  | -0,12549209594726562 |

Для нахождения третьего корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,375 |
|  | 2,3125 |
|  | 2,34375 |
|  | 2,359375 |
|  | 2,3671875 |
|  | 2,36328125 |
|  | 2,361328125 |
|  | 2,3603515625 |
|  | 2,36083984375 |
|  | 2,361083984375 |
|  | 2,3609619140625 |
|  | 2,36102294921875 |
|  | 2,361053466796875 |
|  | 2,3610382080078125 |
|  | 2,3610305786132812 |
|  | 2,361034393310547 |

Задание 2. Решение с использованием операторов ***Given*, *Find***.

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Набрать ключевое слово ***Given***. На следующей строке записать уравнение , используя знак  из опции «Булева алгебра». Ниже с использованием символа  определить оператор, например, в виде  и выполнить вычисление. Результат будет представлен в виде .

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Далее повторить выполнение всех операций. Результат будет представлен в виде .

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Далее повторить выполнение всех операций. Результат будет представлен в виде .

Задание 3. Символьное решение.

Определить правую часть уравнения как функцию . Вызвать на панели инструментов опцию «Символьные преобразования с ключевыми словами» и вызвать оператор **solve.** Слева от оператора набрать . Провести вычисление. Результат будет представлен в виде .

Задание 3.

3.1. Решение уравнения методом итераций

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

где в простейшем случае .

Нахождение первого корня.

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Получаем следующие значения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,5 |
|  | -2,2195231486397593 |
|  | -2,1963223954888482 |
|  | -2,192104070421848 |
|  | -2,1912959674142773 |
|  | -2,191397049595025 |
|  | -2,191109434543963 |
|  | -2,191103568678981 |
|  | -2,191102431903273 |
|  | -2,1911022115988916 |
|  | -2,1911021689043286 |

Нахождение второго корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | -0,07845500449770815 |
|  | -0,13561715524872475 |
|  | -0,12337501838300889 |
|  | -0,1259401537446686 |
|  | -0,12539975441324874 |
|  | -0,12551347558843193 |
|  | -0,125489538616165 |
|  | -0,1254945768207251 |
|  | -0,1254935163788699 |
|  | -0,12549373958030427 |

Нахождение третьего корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,5 |
|  | 2,3664337287336752 |
|  | 2,36145549551998176 |
|  | 2,3610662172725605 |
|  | 2,3610352191507564 |
|  | 2,36103274331328 |
|  | 2,3610325455410415 |
|  | 2,361032529742644 |
|  | 2,3610325284806395 |
|  | 2,361032528379828 |
|  | 2,361032528371775 |

3.2. Решение уравнения методом хорд

Нахождение первого корня.

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,5 |
|  | 0 |
|  | -0,8870487883371184 |
|  | -6,904932451101041 |
|  | -1,555716403755966 |
|  | -2,0804576825020002 |
|  | -2,1777676128742627 |
|  | -2,189594290126664 |
|  | -2,1909329536186384 |
|  | -2,1910831878338706 |
|  | -2,1911000318931557 |

Нахождение второго корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | 0 |
|  | -0,13322297272829486 |
|  | -0,12490401177193457 |
|  | -0,12553812746852155 |
|  | -0,12549035047614265 |
|  | -0,1254939534028401 |
|  | -0,12549368171953773 |
|  | -0,12549370220626868 |
|  | -0,12549370066143321 |
|  | -0,1254937007779241 |

Нахождение третьего корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,5 |
|  | 0 |
|  | 0,8870487883371184 |
|  | 2,157879663208658 |
|  | 2,3510869949338793 |
|  | 2,360605266079522 |
|  | 2,3610142902331575 |
|  | 2,3610317500712155 |
|  | 2,361032495158061 |
|  | 2,3610325269537507 |
|  | 2,361025283684945 |

3.3. Решение уравнения методом касательных

Для нахождения первого корня задаем начальное значение, например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде



Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -3,0 |
|  | -2,2879959689741596 |
|  | -2,1947712333977556 |
|  | -2.1911081170993763 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |

Для нахождения второго корня задаем начальное значение . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | -0,07845500449770815 |
|  | -0.125337003812367 |
|  | -0,12549369843928063 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |

Для нахождения третьего корня задаем начальное значение . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 1,5 |
|  | 3,711869292412005 |
|  | 2.2704234639701384 |
|  | 2,364162395033791 |
|  | 2,364103581632058 |
|  | 2,3610325283747198 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| N | Метод | Уравнение |
| 1 | K |  |
| 2 | К |  |
| 3 | Х |  |
| 4 | К |  |
| 5 | Х |  |
| 6 | К |  |
| 7 | Х |  |
| 8 | K |  |
| 9 | X |  |
| 10 | K |  |

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте этапы решения уравнения с одной неизвестной.

2. Приведите способы отделения корней.

3. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?

4. Дайте словесное описание алгоритма метода половинного деления при решении уравнения.

5. Необходимые условия сходимости метода половинного деления при решении уравнения.

6. Сформулируйте условие окончания счета метода простой итерации. Какова погрешность метода.

7. Дайте словесное описание алгоритма метода хорд. Графическое представление метода. Как производится вычисление погрешности.

8. Дайте словесное описание алгоритма метода касательных (Ньютона). Графическое представление метода. Сформулируйте условие выбора начальной точки.

# Лабораторная работа №2

# Тема: Решение систем линейных уравнений

Методы решения систем линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений, приведенную в развернутой

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.1) |

или в матричной форме

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.2) |

где

|  |  |
| --- | --- |
| , , . |  |

Методы решения систем линейных уравнений можно разделить на две основные группы: прямые методы и итерационные. Прямые методы дают точное решение за конечное число операций. К таким методам относятся, например, методы Крамера и Гаусса. Итерационные методы дают решение системы уравнений как предел последовательных приближений при увеличении числа выполняемых итераций. Для итерационных методов необходимо выполнение условий сходимости и дополнительных преобразований, связанных с преобразованием системы в эквивалентную ей.

**Задание 1**

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Варианты заданий приведены в таблице 2.

Комментарий. Контроль выполняемых вычислений является важным элементом решения любой вычислительной задачи. Для контроля правильности выполняемых операций для прямого хода пользуются контрольными суммами, которые представляют собой суммы коэффициентов при неизвестных и свободного члена для каждого уравнения заданной системы.

Для контроля вычислений в основной части схемы единственного деления (столбцы коэффициентов при неизвестных и свободных членов) над контрольными суммами выполняют те же действия, что и над остальными элементами той же строки. При отсутствии вычислительных ошибок контрольная сумма для каждой строки в пределах влияниях погрешностей округления и их накопления должна совпадать со строчной суммой - вторым столбцом контроля. Строчные суммы представляют собой суммы всех элементов из основной части этой строки.

**Задание 2**

Решить систему линейных уравнений (2.1) методом простой итерации. Предполагается в дальнейшем, что матрица  системы уравнений квадратная и невырожденная, т.е. ее определитель не равен нулю.

Предварительно приведем систему (2.2) к итерационному виду:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.3) |

Для произвольного начального вектора итерационный процесс

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

сходится, если выполнено одно из условий [2]

|  |  |
| --- | --- |
| а) , | (2.4) |

|  |  |
| --- | --- |
| б) , | (2.5) |

|  |  |
| --- | --- |
| в) . | (2.6) |

Процесс вычислений заканчиваем при выполнении условия

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.7) |

где  () − одна из метрик, определяемая левой частью условий (2.4)-(2.6), по которой может быть установлена сходимость,  − заданная точность, например, .

**Задание 3**

Решить систему уравнений (2.1) методом Зейделя.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что после нахождения какого-то значения решения на следующем шаге его используют для отыскания следующего приближения (значения на следующей итерации). Вычисления ведутся по формуле

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2.8) |

Каждое из условий (2.4)-(2.6) является достаточным для сходимости итерационного процесса по методу Зейделя. Практически же удобнее использовать следующее преобразование системы уравнений (2.2). После умножения обеих частей матричного уравнения (2.2) на транспонированную матрицу , получим эквивалентную ей систему

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

где  и . Далее, поделив каждое уравнение системы на , приведем систему к виду (2.8). Подобное преобразование также гарантирует сходимость итерационного процесса.

Ниже приведен примерный вариант выполнения лабораторной работы

Пример. Решите систему уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

1. Символьное решение систем уравнений

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями приведен ниже. Здесь знак = ‑ знак логического равенства.

Первым пунктом определяем совместность системы уравнений. Для этого определяем ранги матрицы  системы уравнений и расширенной матрицы системы уравнений 

, 

с использованием оператора , . Так как ранги матриц равны, то в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли система имеет решение.

Вторым пунктом находим определитель матрицы : . Следовательно, система имеет единственное решение.

Решение системы уравнений с использованием операторов ***Given*, *Find*.**

Набираем оператор ***Given*** и набираем систему уравнений в следующем виде







После этого набираем оператор  и получаем решение

.

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений как матричное уравнение .

Порядок выполнения задания.

Вначале выполняются два этапа, описанных выше, для проверки совместности системы уравнений и единственности ее решения.

Устанавливается режим автоматических вычислений.

Вводится матрица системы и матрицу-столбец правых частей системы уравнений.

Вычисляется решение системы по формуле  . Поучаем

.

Правильность решения проверяется путем непосредственного умножения матрицы системы  на вектор-столбец решения  в результате должен получиться вектор-столбец 

.

Найдите решение системы с помощью функции ***lsolve*** и сравните результаты.

Для решения набираем матрицу  и вектор-столбец . Набираем оператор

.

3. Решение линейной системы методом Гаусса

Комментарии. Функция  формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы  справа столбца правых частей . Функция  приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, представляющему собой расширение единичной матрицы и столбца свободных членов



Выполняя прямой и обратный ходы исключения, используемого в методе Гаусса. Последний столбец содержит решение системы исходной системы уравнений.

4. Решение системы методом Крамера.

Порядок выполнения работы при решении системы указанным методом.

Вначале выполняются два этапа, описанных выше, для проверки совместности системы уравнений и единственности ее решения.

Вычисляется определитель матрицы . Формируется  путем замены первого столбца матрицы  вектор-столбцом свободных членов . Вычисляется определитель матрицы .

Далее формируется матрица  заменой второго столбца матрицы  вектор-столбцом . Вычисляем определитель матрицы .

Далее повторяются указанные операции, и задается матрица  заменой третьего столбца матрицы  вектор-столбцом . Вычисляется определитель матрицы .

Определяем решение системы линейных уравнений следующим образом .

, ,

, , ,

, , ,

, , ,

, , , , , .

5.Решение системы линейных алгебраических уравнение методом простых итераций

Порядок выполнения задания.

Введите матрицы  и , определяющие систему уравнений.

Преобразуйте исходную систему  к виду ,

где , если , , .

Схема последовательных итераций имеет вид

, .

В качестве нулевого приближения  выбирается вектор-столбец .

Задайте количество необходимое количество итераций. Вычислите последовательные приближения.



, 

Матрица и вектор-столбец для итерационной процедуры имеют вид , .

Последовательные значения вектора  для 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X**= |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 2 | 1,92 | 1,907 | 1,907 | 1,907 | 1,907 |
| 1 | 3 | 3,19 | 3,188 | 3,189 | 3,189 | 3,189 |
| 2 | 5 | 4,92 | 4,917 | 4,917 | 4,917 | 4,917 |

.

6. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Порядок выполнения задания.

Введите матрицы  и , определяющие систему уравнений.

Преобразуйте систему уравнений  к виду , к виду .

Определите нулевое приближение решения.

Задайте количество необходимое число итераций.

Вычислите последовательные приближения.



, 

, ,

, , .

, , .

Определим итерационную процедуру следующим образом

, , , .

Последовательные значения вектора  для 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X**= |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 1,92 | 2 | 1,907 | 1,907 | 1,907 |
| 3 | 3 | 3,19 | 3 | 3,189 | 3,188 | 3,188 |
| 5 | 5 | 4,92 | 5 | 4,917 | 4,917 | 4,917 |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № варианта |  |  |  |  |
| 1 | 0.35  0.12  - 0.13 | 0.12  0.71  0.15 | - 0.13  0.15  0.63 | 0.10  0.26  0.38 |
| 2 | 0.71  0.10  - 0.10 | 0.10  0.34  0.64 | 0.12  - 0.04  0.56 | 0.29  0.32  - 0.10 |
| 3 | 0.34  - 0.04  0.06 | - 0.04  0.44  0.56 | 0.10  - 0.12  0.39 | 0.33  - 0.05  0.28 |
| 4 | 0.10  - 0.04  - 0.43 | - 0.04  0.34  0.05 | - 0.63  0.05  0.13 | - 0.15  0.31  0.37 |
| 5 | 0.63  0.05  0.15 | 0.05  0.34  0.10 | 0.15  0.10  0.71 | 0.34  0.32  0.42 |
| 6 | 1.20  - 0.50  - 0.30 | - 0.20  1.70  0.10 | 0.30  - 1.60  - 1.50 | - 0.60  0.30  0.40 |
| 7 | 0.30  - 0.10  - 1.50 | 1.20  - 0.20  - 0.30 | - 0.20  1.60  0.10 | - 0.60  0.30  0.70 |
| 8 | 0.20  0.58  0.05 | 0.44  - 0.29  0.34 | 0.91  0.05  0.10 | 0.74  0.02  0.32 |
| 9 | 6.36  7.42  1.77 | 1.75  19.03  0.42 | 1.0  1.75  6.36 | 41.70  49.49  27.67 |
| 10 | 3.11  - 1.65  0.60 | - 1.66  3.15  0.78 | - 0.60  - 0.78  - 2.97 | - 0.92  2.57  1.65 |

**Контрольные вопросы**

1. К какому типу решения систем линейных уравнений ‑ прямому или итерационному ‑ относится метод Гаусса?

2. В чем заключается выполнение операций прямого и обратного хода в схеме единственного деления?

3. Как организуется контроль над вычислениями при выполнении операций прямого и обратного хода?

4. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?

5. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении систем линейных уравнений?

6. Как условия сходимости связаны с выбором метрики пространства?

7. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?

**Лабораторная работа №3**

# Тема: Интерполирование функций

Пусть функция  задана таблично, либо ее вычисление требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию  на какую-либо функцию , так, чтобы отклонение  от  было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции , а функция  – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений  и  в конечном числе точках  (), т. е.

|  |  |
| --- | --- |
| , , . | (3.1) |

В указанном случае, когда ищется приближение функции на некотором конечном интервале, нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки , ,…,, ‑ узлами интерполяции.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента . В этом случае шаг, с которым задаются табличные значения функции  равен  () является величиной постоянной. Для таких случаев построение интерполяционных формул как и вычисление по этим формулам заметно упрощается.

Интерполяционным многочленом Лагранжа второго порядка называется многочлен вида

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.2) |

**Задание 1**

По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа (3.2) и построить график Исходные данные берутся из таблицы 3.1.

Tаблица 3.1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 1 | 7 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 3 | 0 | 2 | 3 | -1 | -4 | 2 |
| 4 | 7 | 9 | 13 | 2 | -2 | 3 |
| 5 | -3 | -1 | 3 | 7 | -1 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 4 | -3 | -7 | 2 |
| 7 | -2 | -1 | 2 | 4 | 9 | 1 |
| 8 | 2 | 4 | 5 | 9 | -3 | 6 |
| 9 | -4 | -2 | 0 | 2 | 8 | 5 |
| 10 | -1 | 1.5 | 3 | 4 | -7 | 1 |
| 11 | 2 | 4 | 7 | -1 | -6 | 3 |
| 12 | -9 | -7 | -4 | 3 | -3 | 4 |
| 13 | 0 | 1 | 4 | 7 | -1 | 8 |
| 14 | 8 | 5 | 0 | 9 | 2 | 4 |
| 15 | -7 | -5 | -4 | 4 | -4 | 5 |

**Задание 2**

Интерполяционным многочленом Лагранжа порядка  называется многочлен, определяемый следующим выражением

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.3) |

Для погрешности  приближения функции  с использованием данного многочлена Лагранжа выполняется неравенство

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (3.4) |

где .

Вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента  с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа порядка  и оценить погрешность интерполяции. Для выполнения задания исходные данные и вид функции берутся из таблицы 3.2, 3.3 или 3.4.

Таблица 3.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | Значение, *а* | № таблицы |
| 1 | -2 | 3.3 |
| 2 | 3.77 | 3.4 |
| 3 | 0.55 | 3.3 |
| 4 | 4.83 | 3.4 |
| 5 | 3.5 | 3.3 |
| 6 | 5.1 | 3.4 |
| 7 | 1.75 | 3.3 |
| 8 | 4.2 | 3.4 |
| 9 | -1.55 | 3.3 |
| 10 | 6.76 | 3.4 |

Таблица 3.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3.2 | -0.8 | 0.4 | 2.8 | 4.0 | 6.4 | 7.6 |
|  | -1.94 | -0.61 | 0.31 | 1.81 | 2.09 | 1.47 | 0.68 |

Таблица 3.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1.3 | 2.1 | 3.7 | 4.5 | 6.1 | 7.7 | 8.5 |
|  | 1.777 | 4.563 | 13.84 | 20.39 | 37.34 | 59.41 | 72.4 |

Таблица 3.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 |
|  | 0.995 | 0.988 | 0.980 | 0.969 | 0.955 | 0.939 | 0.921 |

Таблица 3.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|  | 0.605 | 0.644 | 0.681 | 0.71 | 0.75 | 0.783 | 0.813 |

**Задание 3.**

Первой интерполяционной формулой Ньютона называется многочлен вида

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.5) |

где .

Ошибка интерполяции функции на интервале  определяется следующим выражением

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.6) |

где  ‑ некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы , () и .

Уплотнить часть таблицы, содержащей заданные на отрезке  значения функции с использованием интерполяционного многочлена Ньютона (3.5) и оценить погрешность интерполяции  на основе формулы (3.6). Таблицу 3.7, содержащую конечные разности просчитать вручную на отрезке  с шагом . Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 3.5, 3.6 и 3.8.

Соотношение (3.5) используется, если вычисляемое значение функции связано с переменной, лежащей ближе к началу отрезка . В том случае, когда вычисляемое значение функции связано с переменной, лежащей ближе к концу отрезка , применяют вторую формулу Ньютона – интерполирование назад на основе формулы (3.6).



где  и .

Таблица 3.7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Таблица 3.8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  | № таблицы |
| 1 | 0.65 | 0.80 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |
| 2 | 0.25 | 0.40 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 3 | 0.75 | 0.90 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |
| 4 | 0.70 | 0.85 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 5 | 0.80 | 0.95 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 6 | 0.1 | 0.25 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 7 | 0.15 | 0.3 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 8 | 0.7 | 0.85 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 9 | 0.2 | 0.35 | 0.05 | 0.01 | 3.5 |
| 10 | 0.80 | 0.95 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |

Ниже приведен примерный фрагмент выполнения лабораторной работы. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка, проходящий через точки: , , , , , .

Требуемый многочлен имеет вид

,

который после преобразования принимает следующую форму

.

Ниже приведен график рассматриваемого интерполяционного полинома.

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 3.1 |

**Контрольные вопросы**

1. В чем заключается особенность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?

2. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?

3. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?

4. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?

5. В чем особенности этих двух способов интерполяции?

6. Как производится оценка погрешности метода интерполяции многочленом Лагранжа?

7. Как используется метод интерполирования для уточнения таблиц функций?

8. В чем отличие между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона при интерполяции на отрезке?

# Лабораторная работа №4

# Тема: Численное интегрирование

Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  заменяется на отрезке  интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа . Это позволяет с учетом изученных в предыдущей лабораторной работе свойств интерполирующего многочлена записать для интеграла приближенное равенство

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.1) |

При записи формулы (4.1), предполагается, что отрезок  разбит на  частей точками (узлами) , выбор которых осуществляется также, как и при построении многочлена . Для равноотстоящих узлов , где , , 

При замене интерполяционного полинома Лагранжа кусочно-постоянной функцией может быть получена формула трапеций, которая имеет следующий вид

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.2) |

где  − значения функции в узлах интерполяции ().

При использовании метода трапеций для оценки погрешности метода интегрирования по формуле (4.2) получаем следующее соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.3) |

где , .

Во многих случаях более точный результат получается при использовании формулы Симпсона (формулы парабол), основанной на квадратичном приближении интегрируемой функции между узлами интерполяции:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.4) |

Для формулы Симпсона оценка погрешности определяется следующим соотношением:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4.5) |

где , .

**Задание 1**

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  с использованием метода трапеций с шагом  и . Сравнить результаты. Оценить точность по формуле (4.3). Сравнить результаты. Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | Функция |  |  |
| 1 |  | 0 | 1 |
| 2 |  | 1 | 2 |
| 3 |  | 1 | 2 |
| 4 |  | 2 | 3 |
| 5 |  | 0 | 1 |
| 6 |  | 1 | 2 |
| 7 |  | 1.2 | 2.2 |
| 8 |  | 1 | 2 |
| 9 |  | 2 | 3 |
| 10 |  | 3 | 4 |

**Задание 2**

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  по формуле Симпсона методом повторного счета с точностью . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

Примерный фрагмент выполнения лабораторной работы. При выборе тестового примера необходимо выбирать функцию, интеграл которой может быть вычислен аналитически. Полученное при этом значение позволяет оценить точность различных методов численного иньтегрирования.

Вычислить интеграл от заданной функции на отрезке  по формуле трапеций и формуле Симпсона. Сравнить получаемы е результаты.

|  |  |
| --- | --- |
| , , . | (4.6) |

Задаем число узлов разбиения  и определяем . Вычисляем значения функции в узлах сетки

, , .

Получаемое значение интеграла по формуле трапеций

,

Получаемое значение интеграла по формуле Симпсона

.

Результаты вычислений интеграла (4.6) с использованием обеих формул приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 4 | 0,073 | 0,186 |
| 6 | 0,069 | 0,065 |
| 8 | 0,067 | 0,065 |
| 10 | 0,067 | 0,065 |

Точное (аналитически вычисленное значение интеграла) равно 0,065.

# Контрольные вопросы

1. Какие преимущества имеет использование формулы парабол по сравнению с использованием формулы трапеций? Следствием чего являются эти преимущества?

2. Верны ли формулы (4.2), (4.4) для случая неравномерного расположения узлов?

3. В каких случаях использование приближенных формул трапеций и парабол дает точные результаты?

4. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?

5. Каким способом (на основе каких формул) можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?

6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?

# Лабораторная работа №5

# Тема: Численное решение дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.1) |

в котором  есть производная функции 

Требуется найти на отрезке  решение , удовлетворяющее начальному условию

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.2) |

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности решения выполнены. Для решения используем метод Эйлера (метод первого порядка точности) и метод Рунге-Кутта (метод четвертого порядка точности) с шагом *h* и *2h*. Необходимо отметить, что получаемые на основе указанных методов решения могут сильно различаться, ввиду того, что метод Эйлера, имеющий только первый порядок точности, используется, как правило, только для оценочных расчетов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутта  определена в работе [2].

В соответствии с используемыми методами решение на -м шаге (значение функции ) определяется выражениями

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.3) |

для метода Эйлера

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.4) |

для метода Рунге-Кута четвертого порядка.

В формулах (5.3) и (5.4)

, ,

, .

Погрешность представления решения определяется выражением

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.5) |

В выражениях (5.3)-(5.5)  ‑ шаг разбиения отрезка .

**Задание 1**

Написать программу решения дифференциального уравнения  методом Эйлера на отрезке  с шагом *h* и *2h* и начальным условием . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5. Сравнить полученные результаты решения.

**Задание 2**

Написать программу решения дифференциального уравнения  
 методом Рунге-Кутта на отрезке  с шагом *h* и *2h* и начальным условием . Оценить погрешность полученных решений формуле (5.5). Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5.

Примерный фрагмент выполнения лабораторной работы

Выполнить задание 1 при следующих условиях

, , ,  .

Находим число точек, в которых определяется решение дифференциального уравнения, по формуле . В примере число точек равно 10.

Определяем цикл по переменной .

Переменную  определяем следующим выражением .

Начальное значение решения определяем как .

Значение искомого решения при  определяем следующей формулой

.

Ниже приведены значения и полученное решение 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* |
|  | 2,0 | 1,0 |
|  | 2,1 | 1,1 |
|  | 2,2 | 1,196 |
|  | 2,3 | 1,287 |
|  | 2,4 | 1,372 |
|  | 2,5 | 1,451 |
|  | 2,6 | 1,524 |
|  | 2,7 | 1,589 |
|  | 2,8 | 1,647 |
|  | 2,9 | 1,699 |
|  | 3,0 | 1,744 |

2. Выполнить задание 2 при следующих условиях

, , ,  .

Находим число точек, в которых определяется решение дифференциального уравнения, по формуле . В примере число точек равно 10.

Определяем цикл по переменной .

Переменную  определяем следующим выражением .

Начальное значение решения определяем как .

Значение искомого решения при  определяем следующей формулой

.

Ниже приведены значения и полученное решение 

, , ,

, .

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* |
|  | 2,0 | 1,0 |
|  | 2,1 | 1,097 |
|  | 2,2 | 1,189 |
|  | 2,3 | 1,277 |
|  | 2,4 | 1,361 |
|  | 2,5 | 1,441 |
|  | 2,6 | 1,518 |
|  | 2,7 | 1,593 |
|  | 2,8 | 1,665 |
|  | 2,9 | 1,735 |
|  | 3,0 | 1,802 |

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | Функция |  |  |  |  |
| 1 |  | 2 | 3 | 1 | 0.1 |
| 2 |  | 3 | 4 | 1 | 0.1 |
| 3 |  | 0 | 1 | 2 | 0.1 |
| 4 |  | 2 | 3 | 1 | 0.1 |
| 5 |  | 1 | 2 | 1 | 0.1 |
| 6 |  | 0 | 1 | 1 | 0.1 |
| 7 |  | 0 | 1 | 2 | 0.1 |
| 8 |  | 0 | 1 | 1 | 0.1 |
| 9 |  | 2 | 3 | 2 | 0.1 |
| 10 |  | 0 | 1 | 3 | 0.1 |

**Контрольные вопросы**

1. Проверить выполнение условия теоремы существования и единственности решения для дифференциального уравнения.

2. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?

3. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения, полученное по по методу Эйлера?

4. Какой геометрический смысл имеет решение дифференциального уравнения методом Эйлера?

5. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутта?

6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта?

7. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчета?

# Лабораторная работа №6

# ТЕМА: Статистическая обработка опытных данных

При обработке результатов экспериментов получаемые результаты не позволяют, как правило, построить аналитические зависимости, описывающие полученные значения. В этих случаях, если необходимо найти зависимость между переменными  (параметрами проведения эксперимента) и функцией  (результатами эксперимента) используется статистическая обработка. Для функции, заданной таблично (заданы  значений опытных данных, полученных в результате какого-либо опыта), решается задача о нахождении функции, в некотором смысле наилучшим образом описывающую взаимосвязь между полученными данными. Одним из способов подбора такой (приближающей) функции является метод наименьших квадратов. Метод состоит в том, чтобы сумма квадратов отклонений значений искомой функции  и заданных таблично значений была наименьшей:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6.1) |

где  − -мерный вектор параметров искомой функции , элементами которого являются значения .

Следует подчеркнуть отличие рассматриваемой задачи от задачи интерполяции, рассмотренной в лабораторной работе № 3. При решении задачи интерполяции функция проходит через заданные точки внутри интервала. В рассматриваемой задаче функция может не проходить через точки, в которых заданы ее значения.

**Задание 1**

Построить методом наименьших квадратов две эмпирические зависимости: линейную и квадратичную.

В случае линейной функции эмпирическая зависимость имеет вид . В этом случае задача сводится к нахождению параметров  и  из системы линейных уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6.2) |

где

|  |  |
| --- | --- |
| , , , . | (6.3) |

В случае использования квадратичной зависимости  для статистической обработки результатов опыта задача сводится к нахождению параметров ,  и  из системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4) |

где , , , , , , .

По результатам найденных эмпирических зависимостей выбрать из двух функций наиболее подходящую. Для этого составить таблицу для подсчета суммы квадратов уклонений по формуле (6.1). Исходные данные взять из таблицы 6.

**Задание 2**

Составить программу для нахождения приближающих функций заданного типа с выводом значений их параметров и соответствующих им сумм квадратов уклонений. Выбрать в качестве приближающих функций следующие: , , . Провести линеаризацию. Определить для какого вида функции сумма квадратов уклонений является наименьшей.

Исходные данные помещены в таблице 6.

Примерный фрагмент выполнения задания 1 лабораторной работы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* |
|  | 0,1 | 1,1 |
|  | 0,4 | 1,8 |
|  | 0,2 | 1,4 |
|  | 0,6 | 2,1 |
|  | 0,3 | 1,8 |
|  | 0,5 | 1,6 |
|  | 0,7 | 2,2 |
|  | 0,8 | 1,5 |
|  | 0,9 | 2,3 |
|  | 1,0 | 2,2 |

При использовании линейной эмпирической зависимости воспользуемся формулами (6.2). В соответствии с исходными данными получаем

, , , .

На основе исходных данных получены значения , , ,  и сформирована система уравнений

.

Решение системы уравнений проводится одним из методов, изложенных в лабораторной работе №2.







Значение  равно 0,864

При использовании квадратичной аппроксимации получается система трех уравнений с тремя неизвестными вида (6.4). Коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются выражениями

, , , , , , .

На основе исходных данных получены значения , , , , , ,  и сформирована система уравнений

.

Решение системы уравнений, как и выше, проводится одним из методов, изложенных в лабораторной работе №2.







Значение  равно 0,866.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 |  | 0.5 | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.7 | 0.3 | 0.8 |
|  |  | 1.8 | 1.1 | 1.8 | 1.4 | 2.1 | 1.8 | 1.6 | 2.2 | 1.5 | 2.3 |
| 2 |  | 1.7 | 1.5 | 3.7 | 1.1 | 6.2 | 0.3 | 6.5 | 3.6 | 3.8 | 5.9 |
|  |  | 1.5 | 1.4 | 1.6 | 1.3 | 2.1 | 1.1 | 2.2 | 1.8 | 1.7 | 2.3 |
| 3 |  | 1.7 | 1.1 | 1.6 | 1.2 | 1.9 | 1.5 | 1.8 | 1.4 | 1.3 | 1.0 |
|  |  | 6.7 | 5.6 | 6.7 | 6.1 | 7.4 | 6.9 | 7.9 | 5.9 | 5.6 | 5.3 |
| 4 |  | 1.3 | 1.2 | 1.5 | 1.4 | 1.9 | 1.1 | 2.0 | 1.6 | 1.7 | 1.8 |
|  |  | 5.5 | 5.9 | 6.3 | 5.8 | 7.4 | 5.4 | 7.6 | 6.9 | 6.6 | 7.5 |
| 5 |  | 2.3 | 1.4 | 1.0 | 1.9 | 1.5 | 1.8 | 2.1 | 1.6 | 1.7 | 1.3 |
|  | 5.3 | 3.9 | 2.9 | 5.0 | 4.0 | 4.9 | 5.1 | 4.5 | 4.1 | 3.7 |
| 6 |  | 1.8 | 2.6 | 2.3 | 1.3 | 2.0 | 2.1 | 1.1 | 1.9 | 1.6 | 1.5 |
|  |  | 4.4 | 6.4 | 5.3 | 3.7 | 4.9 | 5.6 | 3.0 | 5.0 | 4.3 | 3.7 |
| 7 |  | 1.9 | 2.1 | 2.0 | 2.9 | 3.0 | 2.6 | 2.5 | 2.7 | 2.2 | 2.8 |
|  |  | 6.6 | 7.6 | 6.7 | 9.2 | 9.4 | 7.8 | 8.4 | 8.0 | 7.9 | 8.7 |
| 8 |  | 2.0 | 1.4 | 1.0 | 1.7 | 1.3 | 1.6 | 1.9 | 1.5 | 1.2 | 2.1 |
|  |  | 7.5 | 6.1 | 4.8 | 7.4 | 5.7 | 7.0 | 7.1 | 6.8 | 6.0 | 8.9 |
| 9 |  | 2.0 | 1.2 | 1.8 | 1.9 | 1.1 | 1.7 | 1.6 | 1.4 | 1.5 | 1.3 |
|  |  | 7.5 | 5.9 | 7.0 | 8.0 | 5.0 | 7.4 | 6.4 | 6.6 | 6.3 | 5.7 |
| 10 |  | 1.9 | 1.1 | 1.4 | 2.3 | 1.7 | 2.1 | 1.6 | 1.5 | 1.0 | 1.2 |
|  |  | 4.7 | 3.4 | 3.8 | 5.2 | 4.6 | 5.5 | 3.9 | 3.9 | 3.2 | 3.5 |

На рисунке 6.1 приведены линейная и квадратичная аппроксимации для представленного набора данных.

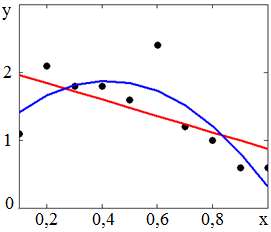


Рисунок 6.1 Аппроксимация с использованием линейной (красная) и квадратичной (синяя) функции

**Контрольные вопросы**

1. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов?

2. Чем отличается этот метод от метода интерполяции?

3. Каким образом сводится задача построения приближающих функций в виде различных элементарных функций к случаю линейной функции?

4. Может ли сумма квадратов уклонений для каких-либо приближающих функций быть равной нулю?

5. Какие элементарные функции используются в качестве приближающих функций?

6. Как найти параметры для линейной и квадратичной зависимости, используя метод наименьших квадратов?

**Лабораторная работа №7**

# Тема: Численное решение уравнений в частных производных

Рассмотрим в качестве примера смешанную задачу для уравнения теплопроводности. Требуется найти функцию , удовлетворяющую уравнению

|  |  |
| --- | --- |
| , | (7.1) |

начальному условию (значению функции в некоторых точках в начальный момент времени)

|  |  |
| --- | --- |
| , | (7.2) |

и краевым условиям

|  |  |
| --- | --- |
| . | (7.3) |

Задачу будем решать методом сеток (конечных разностей по каждой из переменных). В основе метода лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Ограничимся случаем двух независимых переменных. Пусть в плоскости  имеется некоторая область *G* с границей *Г*, как показано на рисунке 7.1.

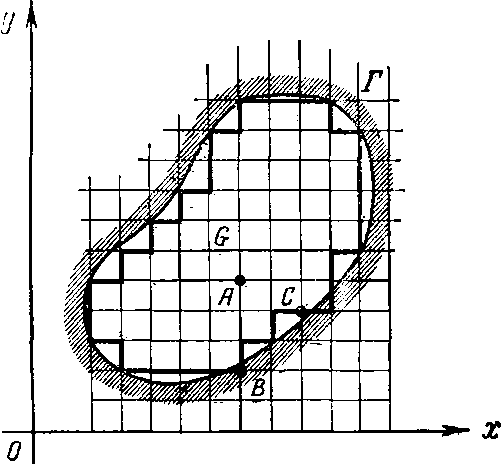


Рисунок 7.1 – Плоскость

Построим на плоскости два семейства параллельных прямых (так как две переменных):

, , , 

Точки пересечения этих прямых назовем узлами. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси  или  на расстояние, равное шагу сетки *h* или *l* соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области , соответствующей области задания функции вместе с ее границей, а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чем шаг, от границы *Г*. Узлы сетки, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются внутренними (узел *А*, рисунок 7.1). Оставшиеся из выделенных узлов называются граничными (узлы *В*, *С*).

Значения искомой функции  в узлах сетки будем обозначать через . В каждом внутреннем узле  заменим частные производные разностными отношениями:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

В граничных точках воспользуемся формулами вида

|  |  |
| --- | --- |
| , . |  |

Аналогично проведем замену частных производных второго порядка

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Сделанные замены частных производных соответствующими разностными отношениями позволяет перейти от дифференциального уравнения в частных производных (7.1) к разностному уравнению

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

После замены  и последующих преобразований получаем итерационное уравнение для вычисления значений функции во внутренних узлах

|  |  |
| --- | --- |
| . | (7.4) |

При выполнении условия  полученное разностное уравнение (7.4) является устойчивым [7]. Наиболее простой вид уравнение имеет при выборе значения . При таком выборе параметров разбиения уравнение (7.2) может быть записано в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (7.5) |

Пусть  – точное решение задачи (7.1)-(7.3). Тогда  – отклонение полученного по методу сеток решения от точного решения. Погрешность выполняемых вычислений может быть вычислена по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (7.6) |

где , при , .

**Задание 1**

Используя метод сеток, найти приближенное решение уравнения (7.1)-(7.3), удовлетворяющее условиям , ,  для ,  при , .

Полученное решение должно быть оформлено в виде таблицы 7.1 подсчитанной вручную.

Таблица 7.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.005 |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 0.010 |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 0.015 |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 0.020 |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 0.025 |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 0.03 |  |  |  |  |  |  |

Исходные данные заданы в таблице 7.2.

Таблица 7.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № варианта |  |  |  |
| 1 | 0.1 | 0.6 |  |
| 2 | 0 | 0.5 |  |
| 3 | 0.2 | 0.7 |  |
| 4 | 0 | 0.5 |  |
| 5 | 0.1 | 0.6 |  |
| 6 | 0.2 | 0.7 |  |
| 7 | 0 | 0.5 |  |
| 8 | 0.2 | 0.7 |  |
| 9 | 0 | 0.5 |  |
| 10 | 0.1 | 0.6 |  |

Оценить погрешность вычислений по формуле (7.6).

Пояснения. Значения  находим путем подстановки значения  в функцию . Например, для функции  значение при  равно . Значения  и  определяются краевыми условиями (в рассматриваемом примере нулевые). Далее последующие значения функции, например,  находим, используя формулу (7.5), т.е.  и т.д.

Примерный фрагмент выполнения лабораторной работы при следующих исходных данных

, , , , .

рассмотрен ниже:

, , .

, , , , .

Заполняем таблицу по результатам выполненных расчетов.

.

# Контрольные вопросы

1. В чем заключается идея решения дифференциальных уравнений по методу сеток?

2. Какие точки называются узлами области задания функции?

3. Что такое шаг сетки?

4. Какие узлы называются внутренними и какие узлы граничными?

5. Как перейти от дифференциального уравнения к разностному (на примере уравнения теплопроводности)?

6. Какое уравнение используется для вычисления значений функции текущего слоя?

7. Как вычислить отклонение значений точного решения от полученного приближенного решения по методу сеток?