

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**  
**Кафедра вычислительной математики**

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ МЕТОДА ОТРАЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ СЛАУ  
НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ**

Курсовая работа

Горбунова Надира Эльшановича  
студента 3 курса,  
специальность «прикладная  
математика»

Научный руководитель:  
ассистент кафедры  
вычислительной математики  
А.В. Воробьёв

Минск, 2022

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....</b>	<b>4</b>
1.1 Системы линейных алгебраических уравнений .....	4
1.2 Метод Гаусса (с выбором главного элемента по столбцу) .....	4
1.3 Метод отражений (Хаусхолдера) .....	6
<b>Глава 2 СРАВНЕНИЕ РАБОТЫ МЕТОДОВ НА СЛУЧАЙНЫХ ЗАДАЧАХ .....</b>	<b>11</b>
2.1 Генерация случайных тестов .....	11
2.2 Сравнение времени работы методов .....	11
2.3 Сравнение точности методов.....	12
<b>Глава 3 СРАВНЕНИЕ РАБОТЫ МЕТОДОВ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ .....</b>	<b>13</b>
3.1 Сравнение времени работы на специальных задачах .....	13
3.2 Сравнение точности методов на специальной задаче .....	14
3.3 Сравнение влияния величины константы специальных матриц на точность метода Гаусса .....	15
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>17</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>18</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра, численные методы – раздел вычислительной математики, посвященный математическому описанию и исследованию процессов численного решения задач линейной алгебры.

Одной из важнейших задач линейной алгебры является решение системы линейных алгебраических уравнений.

На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей математической задачи не удастся. Это происходит потому, что искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или других известных функциях. Поэтому важное значение приобрели численные методы, особенно в связи с возрастанием роли математических методов в различных областях науки и техники и с появлением высокопроизводительных ЭВМ.

В ходе работы были реализованы метод Гаусса (с выбором главного элемента по столбцу) и метод отражений. Произведено сравнение работы этих методов решения СЛАУ. Сравнения производились на случайно сгенерированных матрицах, а также на специальных задачах.

# Глава 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Системы линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

где  $A$  –  $n \times n$  – матрица коэффициентов системы,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – вектор-столбец неизвестных,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  – заданный вектор-столбец правых частей (свободных членов).

Если к матрице  $A$  приписать справа столбец свободных членов, то получившаяся матрица называется расширенной.

Общий вид СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$m$ - количество уравнений,  $n$  – количество переменных.

Решение СЛАУ – совокупность  $n$  чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , таких что их соответствующая постановка вместо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в систему обращает все ее уравнения в тождества.

## 1.2 Метод Гаусса (с выбором главного элемента по столбцу)

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных из уравнений системы и приведении исходную матрицу к легко разрешимой системе с верхней треугольной матрице.

На первом шаге выбирается уравнение и некоторое неизвестное в этом уравнении, считая, что коэффициент при выбранном неизвестном отличен от нуля. Предположим, что выбрано первое уравнение и первое неизвестное ( $x_1$ ). Разделив на  $a_{11}$  уравнение, преобразуем его к виду:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = g_1, (1.1)$$

где 
$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2, 3, \dots, n; g_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

После этого исключим неизвестное  $x_1$  из всех остальных уравнений системы. Для этого умножим уравнение (1.1) на величину  $a_{i1}$  и вычтем из  $i$ -го уравнения системы. В итоге получим систему

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = g_1 \\ a_{22,1}x_2 + \dots + a_{2n,1}x_n = b_{2,1} \\ a_{32,1}x_2 + \dots + a_{3n,1}x_n = b_{3,1} \\ \dots \\ a_{n2,1}x_2 + \dots + a_{nn,1}x_n = b_{n,1} \end{cases}$$

$$a_{ij,1} = a_{ij} - a_{i1}c_{1j},$$

$$i, j = \overline{2, n},$$

$$b_{i,1} = b_i - a_{i1}g_1,$$

В последних  $n-1$  уравнениях полученной системы не содержится неизвестное  $x_1$ .

Этот процесс можно повторять до тех пор, пока не будут исчерпаны все уравнения системы. Тогда после окончания описанного процесса исходная матрица будет преобразована к виду

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = g_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = g_2 \\ \dots \\ x_{n-1} + c_{n-1n}x_n = g_{n-1} \\ x_n = g_n \end{cases}$$

Матрица данной системы имеет треугольный вид и, следовательно, решение системы легко может быть найдено. Для этого из последнего уравнения получаем значение  $x_n$ , подставляя его в предыдущее уравнение, находим  $x_{n-1}$  и т.д.

$$\begin{cases} x_n = g_n \\ x_k = g_k - c_{kk+1}x_{k+1} - \dots - c_{kn}x_n, \quad k = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Преобразование изначальной системы к треугольному виду называют **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение неизвестных – **обратным ходом**.

Выбор главного элемента по столбцу подразумевает, что в качестве главного на  $k$ -ом шаге метода Гаусса выбирается максимальный по модулю элемент  $k$ -го столбца. Таким образом метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге проводится соответствующая перенумерация уравнений.

### 1.3 Метод отражений (Хаусхолдера)

Определим **матрицу отражения** (матрицу Хаусхолдера) следующим образом:

$$V = E - 2\omega\omega^T$$

Где  $\omega$  – вектор-столбец единичной длины в сферической норме (т.е.  $(\omega, \omega) = \omega^T \omega = 1$ ).

Матрица отражений обладает следующими свойствами:

- 1) Матрица  $V$  – симметричная.

$$V_{ij} = \delta_{ij} - 2\omega_i\omega_j = V_{ji} \quad (1.3.1)$$

- 2) Матрица  $V$  – ортогональная.

$$VV^T = (E - 2\omega\omega^T) \cdot (E - 2\omega\omega^T) = E - 2E\omega\omega^T - 2\omega\omega^TE + 4\omega(\omega^T\omega)\omega^T = E - 4\omega\omega^T + 4\omega\omega^T = E$$

- 3) Матрица  $V$  оставляет без изменения любой вектор, ортогональный вектору  $\omega$ , т.е. если  $(x, \omega) = \omega^T x = 0$ , то  $Vx = x$ .

- 4) Матрица  $V$  переводит в противоположный любой вектор, коллинеарный вектору  $\omega$ , т.е. если  $x = \lambda\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  то  $Vx = -x$ .

Действительно,

$$Vx = x - 2\omega\omega^T x = \lambda\omega - 2\omega\omega^T \lambda\omega = \lambda\omega - 2\lambda\omega(\omega\omega^T) = -\lambda\omega = -x$$

Решим теперь задачу о том, как с помощью матрицы отражения вида (1.3.1) перевести произвольный ненулевой вектор  $s$  в заданный вектор  $e$  единичной длины, т.е. как определить матрицу  $V$  и число  $\alpha$ , чтобы имело место равенство

$$Vs = \alpha e.$$

Используя (1.3.1), получаем:

$$(E - 2\omega\omega^T)s = \alpha e$$

Отсюда очевидным образом следует равенство

$$s - \alpha e = 2\omega\omega^T s = 2\omega(\omega^T s) = 2(\omega, s)\omega \quad (1.3.2)$$

т.е.

$$\omega = k(s - \alpha e), \text{ где } k = \frac{1}{2(s, \omega)}, \quad (1.3.3)$$

Таким образом, искомый вектор  $\omega$  коллинеарен вектору  $s - \alpha e$ . Подставляя (1.3.2) в (1.3.3), будем иметь:

$$s - \alpha e = 2(s, k(s - \alpha e))k(s - \alpha e)$$

или

$$s - \alpha e = 2k^2(s, s - \alpha e)(s - \alpha e).$$

Последнее равенство равносильно равенству

$$[2k^2(s, s - \alpha e) - 1](s - \alpha e) = 0$$

и, следовательно,

$$2k^2(s, s - \alpha e) - 1 = 0$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\sqrt{2(s, s - \alpha e)}}.$$

Поскольку векторы  $s$  и  $e$  заданы, то осталось задать числовой параметр  $\alpha$ . Сделаем это таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$(s, s - \alpha e) > 0$$

Очевидно, условию удовлетворяет

$$\alpha = \sqrt{(s, s)}.$$

Действительно, тогда

$$\begin{aligned} (s, s - \alpha e) &= (s, s) - \sqrt{(s, s)}(s, e) \geq \\ &\geq [\text{неравенство Коши – Буняковского: } (s, e) \leq \sqrt{(s, s)}\sqrt{(e, e)}] \geq \\ &\geq (s, s) - \sqrt{(s, s)}\sqrt{(s, s)}\sqrt{(e, e)} = 0 \end{aligned}$$

При этом знак равенства имеет место лишь в случае, когда  $s = \lambda e$ .

Таким образом, чтобы матрица отражения  $V$ , задаваемая формулой (1.3.1), удовлетворяла условию  $Vs = \alpha e$ , в котором  $s$  и  $e$  – заданные векторы, необходимо положить

$$\begin{aligned}\omega &= k(s - \alpha e), \\ \alpha &= \sqrt{(s, s)} \\ k &= \frac{1}{\sqrt{2(s, s - \alpha e)}}\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

Теперь задача разложения произвольной невырожденной матрицы  $A$  в произведение ортогональной и верхней треугольной может быть решена следующим образом (схема метода отражений):

1-ый этап:

Используя формулы (1.3.4), образуем матрицу отражений  $V_1$  по векторам  $s_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})^T$  и  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ . Умножив исходную систему слева на матрицу  $V_1$ , получим систему

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \tag{1.3.5}$$

где в матрице  $A^{(1)} = V_1 A$  все поддиагональные элементы первого столбца равны нулю, а формулы для вычисления всех остальных ее элементов  $a_{ij,1}$ , а также элементов вектора  $b^{(1)} = V_1 b$  ( $b_{i,1}$ ) имеют вид

$$a_{11,1} = \alpha_1;$$

$$a_{ij,1} = a_{ij} - 2(c_j, \omega_1)\omega_{i,1}, i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n;$$

$$b_{i,1} = b_i - 2(b, \omega_1)\omega_{i,1}, i = 1, \dots, n$$

(здесь  $c_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$  и  $(c_j, \omega_1) = \sum_{p=1}^n c_{pj}\omega_{p,1}$ ) и непосредственно следуют из (1.3.1).

На втором этапе аналогично образуем матрицу  $V_2$  по векторам

$s_2 = (0, a_{22,1}, \dots, a_{n2,1})^T$  и  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ . Умножив (1.3.5) слева на матрицу  $V_2$ , перейдем к системе

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

в матрице  $A^{(2)}$  первая строка которой совпадает с первой строкой матрицы  $A^{(1)}$  (поскольку матрица  $V_2$ - блочно-диагональная и первый блок размера  $1 \times 1$  – единичная матрица) и все под диагональные элементы второго столбца равны нулю. Полные формулы пересчета будут иметь вид



$$a_{1j,2} = a_{1j,1}, j = 1, \dots, n;$$

$$a_{22,2} = \alpha_2;$$

$$a_{ij,2} = a_{ij,1} - 2 \left( c_j^{(1)}, \omega_2 \right) \omega_{i,2}, i = 2, \dots, n; j = 3, \dots, n;$$

$$b_{i,2} = b_{i,1} - 2 \left( b^{(1)}, \omega_2 \right) \omega_{i,2}, i = 2, \dots, n.$$

(аналогично здесь  $c_j^{(1)} = (a_{1j,1}, \dots, a_{nj,1})^T$  и  $\left( c_j^{(1)}, \omega_2 \right) = \sum_{p=2}^n c_{pj}^{(1)} \omega_{p,2}$ . Обратим внимание: суммирование здесь проводится в пределах от 2 до  $n$ , а не от единицы, как на первом этапе. Это происходит потому, что у вектора  $\omega_2$  первая компонента равна нулю. Поэтому иногда и у вектора  $c_j^{(1)}$  первую компоненту также полагают равной нулю).

По аналогии с описанным выше преобразование  $k$ -го этапа осуществляется с помощью матрицы отражение  $V_k$ , образованной по векторам

$s_k = (0, \dots, 0, a_{kk,k-1}, \dots, a_{nk,k-1})^T$  и  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (у последнего единственная отличная от нуля компонента стоит на  $k$ -м месте) и приводят при любом  $1 \leq k \leq n - 1$  к системе

$$A^{(k)}x = b^{(k)},$$

где

$$a_{ij,k} = a_{ij,k-1}, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n;$$

$$a_{kk,k} = \alpha_k;$$

$$a_{ik,k} = 0, i = k + 1, \dots, n;$$

$$a_{ij,k} = a_{ij,k-1} - 2 \left( c_j^{(k+1)}, \omega_k \right) \omega_{i,k}, i = k, \dots, n; j = k + 1, \dots, n;$$

$$b_{i,k} = b_{i,k-1} - 2 \left( b^{(k-1)}, \omega_k \right) \omega_{i,k}, i = k + 1, \dots, n.$$

Как и выше, здесь  $c_j^{(k-1)} = (a_{1k,k-1}, \dots, a_{nk,k-1})^T$  и

$$\left( c_j^{(k-1)}, \omega_k \right) = \sum_{p=k}^n c_{pj}^{(k-1)} \omega_{p,k}$$

После выполнения  $n-1$  этапов будем иметь систему

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)},$$

матрица которой – верхняя треугольная. Далее остается для нахождения неизвестных выполнить обратный ход, аналогичный обратному ходу метода Гаусса.

## Глава 2 СРАВНЕНИЕ РАБОТЫ МЕТОДОВ НА СЛУЧАЙНЫХ ЗАДАЧАХ

### 2.1 Генерация случайных тестов

Функция генерации случайных тестов создает матрицу  $A$  заданной размерности, заполненную случайными значениями. После этого генерируется вектор-столбец  $x_0$ , так же со случайными значениями.

Умножив матрицу  $A$  на вектор  $x_0$  получаем вектор-столбец свободных членов  $b$ .

В последствии мы будем передавать методам матрицу  $A$  и вектор-столбец  $b$ , тем самым будет найден вектор-столбец решений метода  $x_1$ .

### 2.2 Сравнение времени работы методов

Построим график зависимости времени работы методов от размерности матрицы  $A$ . Размерность возьмем от 100 до 1000 с шагом 50.

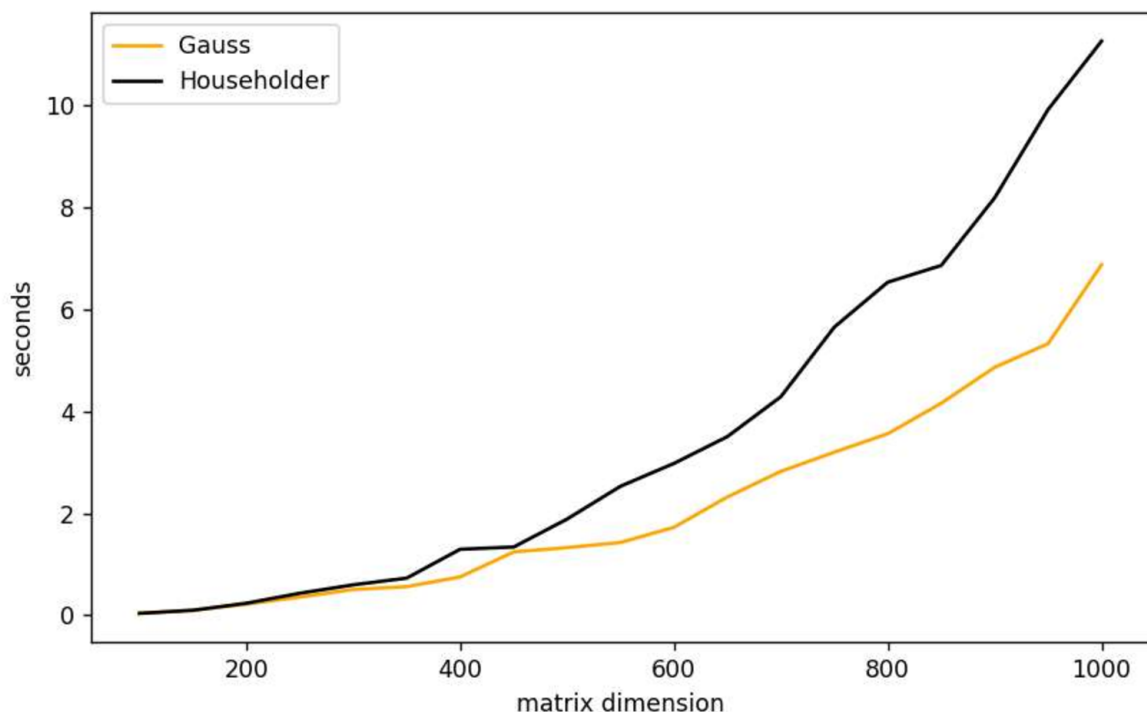


Рисунок 2.2.1 – зависимость времени работы метода от размерности матрицы  $A$

Исходя из графика видим, что метод Гаусса работает быстрее, чем метод отражений. Так получается, потому что метод Гаусса имеет  $\frac{n^3}{3}$  операций, а метод отражений  $\frac{4n^3}{3}$ . По этой причине метод Хаусхолдера уступает методу Гаусса в скорости работы.

## 2.3 Сравнение точности методов

Построим график зависимости нормы вектора невязки метода от размерности матрицы А. Промежуток размерности возьмем от 100 до 1000 с шагом 50.

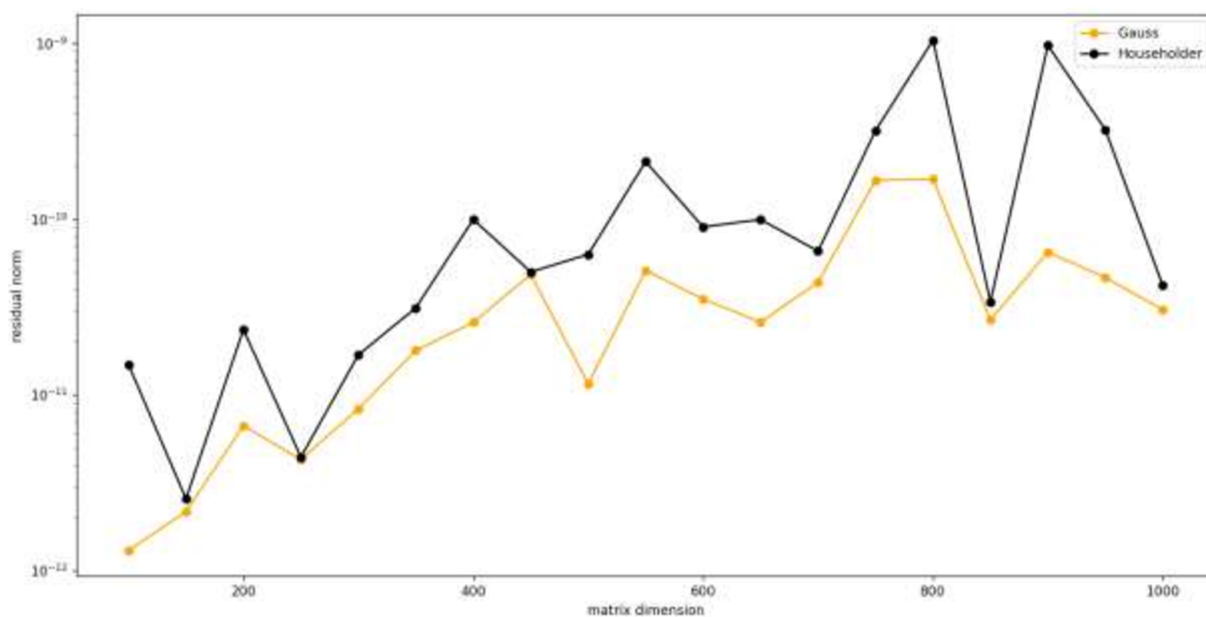


Рисунок 2.3.1 – график зависимости нормы вектора невязки метода от размерности матрицы А.

Видим, что невязка метода Гаусса меньше погрешности метода отражений. Так же заметим, что погрешность обоих методов не превышает  $10^{-8}$ .

## Глава 3 СРАВНЕНИЕ РАБОТЫ МЕТОДОВ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Специальной задачей мы называем задачу Вилкинсона, в которой матрица  $A$  имеет вид:

$$Ax = b, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -c & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -c & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -c & -c & -c & -c & -c & 1 \end{pmatrix}, 0 \leq c \leq 1$$

### 3.1 Сравнение времени работы на специальных задачах

Теперь посмотрим на время работы методов на специальных задачах. Строим график. Константу возьмем  $c = 0.99$ . Размерность специальной матрицы от 100 до 1000 с шагом 50.

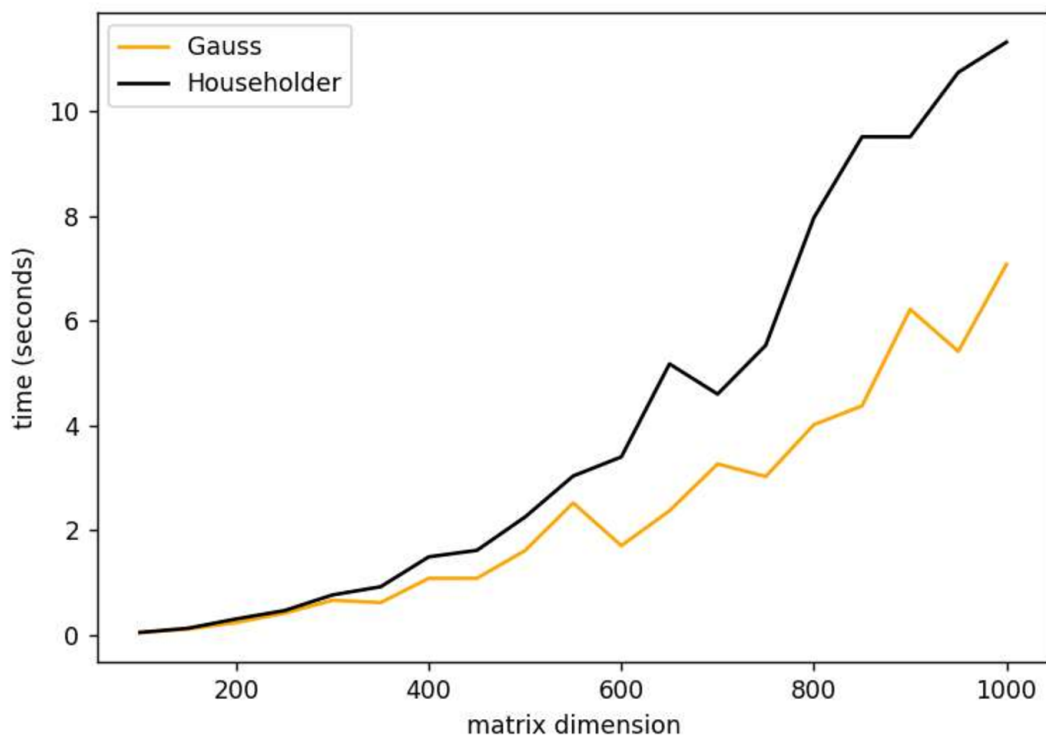


Рисунок 3.1.1 – график зависимости времени работы методов от размерности матрицы  $A$  на специальных задачах

Можем видеть, что специальная задача никак не повлияла на время работы методов. Метод Гаусса все так же справляется быстрее метода отражений.

### 3.2 Сравнение точности методов на специальной задаче

Проведем сравнение точности методов на специальных задачах при  $c = 0.99$  на разных размерностях специальной матрицы. Размерность рассмотрим от 100 до 500 с шагом 20.

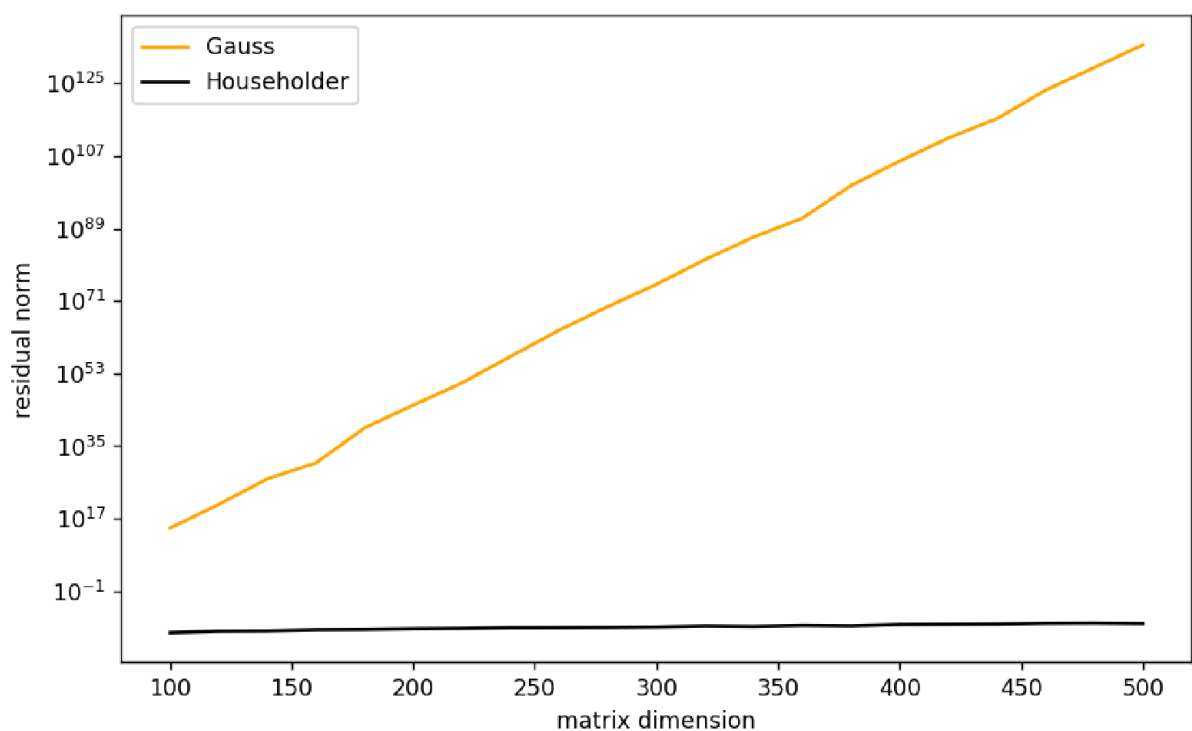


Рисунок 3.2.1 – график зависимости нормы вектора невязок от размерности специальной матрицы

Наблюдаем, что метод отражений имеет нормальную точность, норма невязки не превышает  $10^{-8}$ . Однако метод Гаусса работает совершенно некорректно, нормы векторов невязок огромные, то есть найденное решение не являются правильными.

Такая точность метода Гаусса связана с тем, что в процессе работы метод Гаусса меняет исходную матрицу, что приводит к повышению числа обусловленности матриц и на выходе мы получаем неверный ответ.

Ортогональные методы обрабатывают правильно на специальных задачах, за счет того, что число обусловленности матриц не меняется.

### 3.3 Сравнение влияния величины константы специальных матриц на точность метода Гаусса

Построим график зависимости величины константы  $0 \leq c \leq 1$  специальных матриц на норму вектора невязки метода Гаусса. Возьмем величину константы от 0 до 1 с шагом 0.05. Размерность матриц возьмем равным 200.

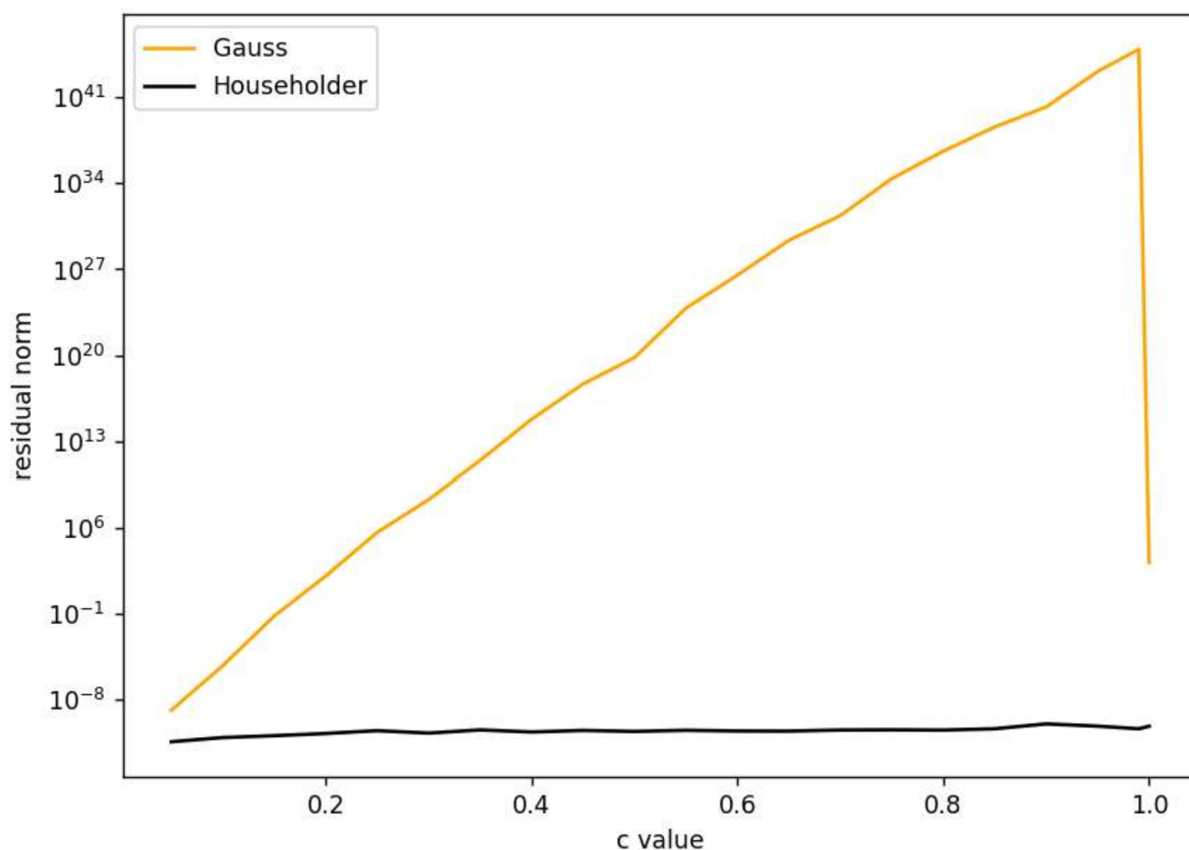


Рисунок 3.3.1 – график зависимости нормы вектора невязок от величины константы специальных матриц

С ростом величины константы наблюдается падение точности метода Гаусса.

Исходя из теории максимальный фактор роста погрешности достигается при  $c = 1$ , однако в ходе работы над проектом было обнаружено, что при этом значении точность резко повышается.

Посмотрим на число обусловленности матрицы полученной после работы метода Гаусса и нормы невязок:

c value	cond after Gauss	residual norm Gauss
0	11987.5	0
0.05	2.67853e+07	1.31379e-09
0.1	1.54321e+11	8.60731e-06
0.15	2.30919e+14	0.0140674
0.2	1.41138e+21	171.132
0.25	9.24307e+26	533889
0.3	2.11049e+32	3.59897e+08
0.35	1.39221e+38	4.45616e+11
0.4	3.87165e+44	9.68474e+14
0.45	3.52021e+50	2.00252e+17
0.5	4.4169e+58	3.04881e+20
0.55	4.68054e+62	4.66657e+23
0.6	1.15515e+66	6.26406e+25
0.65	3.43034e+74	2.00614e+29
0.7	1.54508e+76	2.85773e+30
0.75	2.08478e+87	6.0307e+33
0.8	1.7998e+92	4.07478e+36
0.85	7.6502e+80	1.56013e+39
0.9	1.48375e+96	5.67462e+39
0.95	8.47316e+100	3.2173e+42
0.99	2.71802e+106	1.7673e+45
1	2.21121e+103	1304.6

Рисунок 3.3.2 – таблица зависимости числа обусловленности матрицы и невязки работы метода Гаусса

Видим, что резкого падения числа обусловленности при  $c = 1$  не наблюдается, однако норма вектора невязок очень мала по сравнению с предыдущими значениями, что связано с маленьким накоплением погрешности при вычислениях, так как происходит много обнулений значений матрицы.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы были реализованы метод Гаусса и метод отражений решения систем линейных алгебраических уравнений. Было проведено сравнения этих методов на случайно сгенерированных задачах, а также на специальных задачах Вилкинсона. Сравнения проводились по времени работы методов, точности. Проведен анализ зависимости константы специальных матриц на точность методов. Сравнение сопровождалось графиками и таблицами.

На случайных задачах метод Гаусса оказался лучше, как во времени работы, так и в точности. Однако на специальных задачах метод Гаусса выдает некорректные решения, исходя из этого на задачах Вилкинсона он не применим.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репников В.И прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений / В.И Репников // вычислительные методы алгебры. – Минск, 2012. – Р. 5- С. 9-48
2. N.J. Higham and D.J. Higham, Large growth factors in Gaussian elimination with pivoting, SIAM J. Matrix Analysis and Appl., 10 (1989), pp. 155-164.
3. Вычислительные методы алгебры и оценивания : учебное пособие / И. В. Семушин. — Ульяновск : УлГТУ, 2011. — 366 с.