ЭЛЕКТРОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА
Модуль ЭЛЕКТРОТЕХНИКА
Раздел 2.1 Электрические цепи синусоидального тока

Никитина Мария Владимировна
mvnikitina@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2023

Содержание

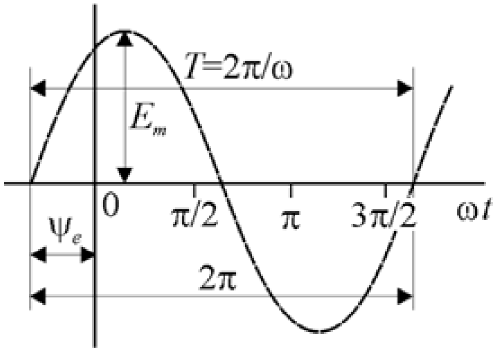
Основные понятия теории и законы электрических цепей синусоидального тока

Понятие ***синусоидальный ток*** относится ко всем периодическим токам, изменяющимся во времени по синусоидальному закону. Этот вид тока имеет по сравнению с постоянным целый ряд преимуществ, обусловивших его широкое распространение в технике. Производство, передача и преобразование электрической энергии наиболее удобно и экономично на переменном токе. Синусоидальные токи широко используются в радиоэлектронике, электромеханике. Бытовое электроснабжение также производится на переменном токе.

Синусоидальные величины математически описываются функцией вида:

$$a(t) = A_m \cdot Sin(\omega \cdot t + \psi),$$

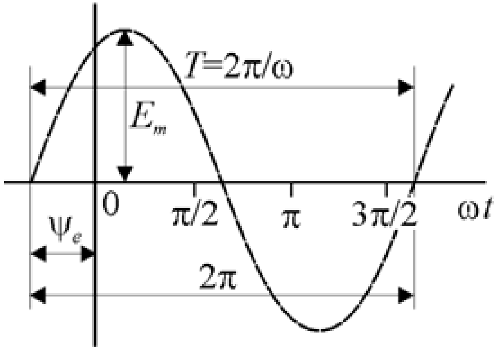
где $\omega = 2 \cdot \pi / T$ – ***угловая частота*** функции с ***периодом*** T.



Основные понятия теории и законы электрических цепей синусоидального тока

Значение функции в данный момент времени называется ***мгновенным значением*** [$a(t)$].
Максимальное значение функции называется ***амплитудой*** или ***амплитудным значением*** [A_m].

Аргумент синуса называется ***фазой*** [$\omega \cdot t + \psi$],
а его значение в момент начала отсчёта времени
t=0 – ***начальной фазой*** [ψ].



Величину, обратную периоду, называют ***частотой*** $f=1/T$.
Частота связана с угловой частотой отношением:

$$\omega=2 \cdot \pi \cdot f.$$

Промышленная сеть в РФ имеет частоту 50 Гц.

Основные понятия теории и законы электрических цепей синусоидального тока

На переменном токе вводится понятие ***действующего значения***, как эквивалента теплового действия тока.

По закону Джоуля-Ленца количество тепла, выделяющегося на участке электрической цепи с сопротивлением r в течение элементарного промежутка времени dt, если по нему протекает ток i, равно $i^2 \cdot r \cdot dt$. За период T переменного тока i на этом участке выделится $\int i^2 \cdot r \cdot dt$ джоулей. Обозначив через I постоянный ток, который за тот же промежуток времени T выделит в сопротивлении r столько же тепла, получим

$$I^2 \cdot r \cdot T = \int_0^T (i^2 \cdot r) dt \;\rightarrow\; I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}$$

Величина I называется ***действующим***, ***эффективным*** или ***среднеквадратичным*** значением переменного тока i, и определяется как

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot I_m$$

В общем случае ***действующее*** значение синусоидальной величины $a(t)$ определяется как $A = A_m/\sqrt{2} \approx 0{,}707 \cdot A_m$

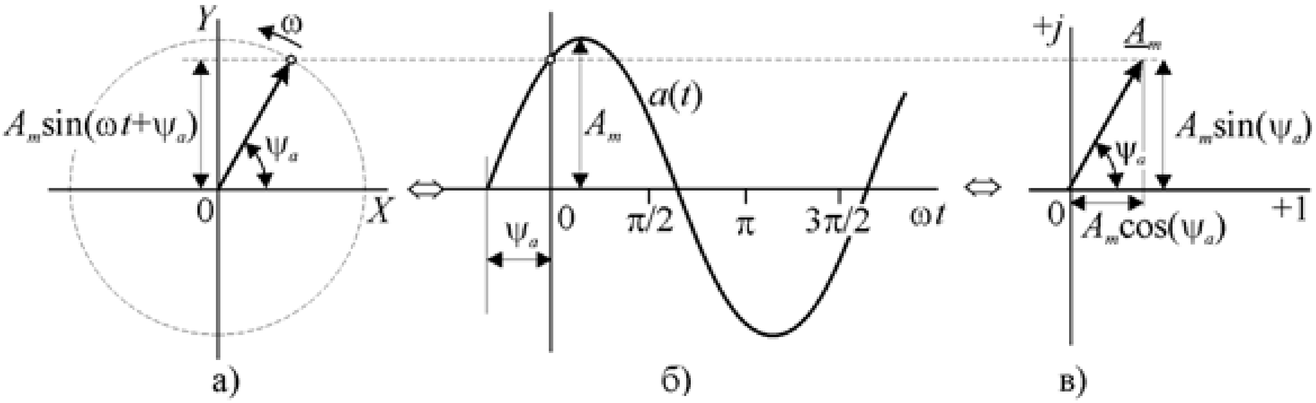
Основные понятия теории и законы электрических цепей синусоидального тока

Другой интегральной величиной, используемой в цепях переменного тока, является ***среднее значение***, определяемое как площадь, ограниченная линией функции и осью времени на протяжении периода.
Но для синусоидальных функций эта величина тождественно равна нулю, т.к. площади положительной и отрицательной полуволн равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому условились под средним значением понимать среднее значение функции за положительный полупериод, т.е.

$$A_{ср}=(2/T)\cdot\int a(t)dt=(2/\pi)\cdot A_m\approx 0{,}637\cdot A_m$$

Изображение синусоидальных функций векторами

Произвольная синусоидальная функция времени (рис.б) соответствует проекции на ось $0Y$ вектора с модулем равным амплитуде, вращающимся на плоскости $X0Y$ с постоянной угловой скоростью ω из начального положения, составляющего угол ψ с осью $0X$ (рис.а).
При анализе цепей, в которых все функции имеют одинаковую частоту, её можно исключить из параметров, ограничившись только амплитудой и начальной фазой. В этом случае векторы, изображающие синусоидальные функции будут неподвижными (рис.в).



Изображение синусоидальных функций векторами

Любая точка на комплексной плоскости или вектор, проведённый из начала координат в эту точку, соответствуют комплексному числу $\underline{A}_m = a + j \cdot b$, где *a* – координата вектора по оси вещественных чисел, а *b* – по оси мнимых чисел. Такая форма записи комплексного числа называется ***алгебраической формой***.

Представив вещественную и мнимую часть вектора через его длину и угол с осью вещественных чисел, получим ***тригонометрическую форму*** записи $\underline{A}_m = A_m \cdot Cos(\psi) + j \cdot A_m \cdot Sin(\psi)$ или, применяя формулу Эйллера $e^{j\psi} = Cos(\psi) + j \cdot Sin(\psi)$, осуществим переход к ***показательной форме*** записи $\underline{A}_m = A_m \cdot Cos(\psi) + j \cdot A_m \cdot Sin(\psi) = A_m \cdot e^{j\psi}$.

Комплексное число $\underline{A}_m = A_m \cdot Cos(\psi) + j \cdot A_m \cdot Sin(\psi)$, модуль которого равен амплитуде синусоидальной функции A_m, называется ***комплексной амплитудой***. Поскольку амплитуда и действующее значение синусоидальной функции связаны между собой константой, расчёт можно вести сразу для действующих значений, если использовать комплексные числа с соответствующим модулем $A = A_m/\sqrt{2}$. Число $\underline{A} = A \cdot Cos(\psi) + j \cdot A \cdot Sin(\psi)$ называется ***комплексным действующим значением*** или просто ***комплексным значением***.

Резистивный элемент

При протекании синусоидального тока $i(t)=I_m Sin(\omega t+\psi_i)$ по резистивному элементу на нём по закону Ома возникает падение напряжения:

$$u(t)=Ri(t)=RI_m Sin(\omega t+\psi_i)= U_m Sin(\omega t+\psi_u).$$

Т.е напряжение на резистивном элементе изменяется по синусоидальному закону с амплитудой $U_m=RI_m$ и начальной фазой равной начальной фазе тока $\psi_u=\psi_i$. Разделив обе части выражения для амплитуды на $\sqrt{2}$, получим соотношение для действующих значений тока и напряжения $U=RI$.

Представим ток и напряжение комплексными значениями:

$$\underline{I}_R=Ie^{j\psi_i},\ \underline{U}_R=Ue^{j\psi_u}.$$

Закон Ома в комплексной форме для R: $\underline{U}_R=R\underline{I}_R$ или $\underline{I}_R=\underline{U}_R/R$.

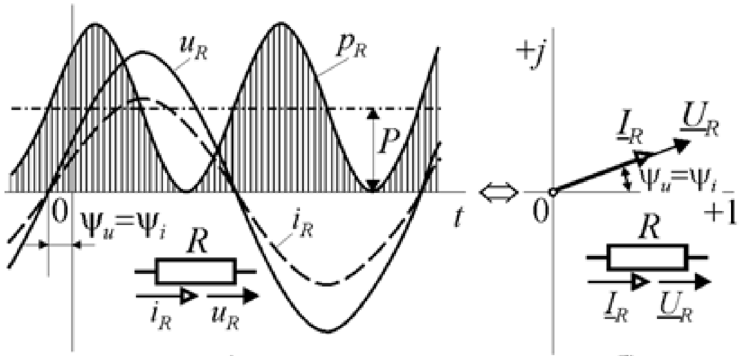
Мгновенная мощность, рассеиваемая на резистивном элементе равна:

$$p_R=u_R i_R=U_m Sin(\omega t+\psi_u)I_m Sin(\omega t+\psi_i)=UI(1–Cos(2\omega t)),$$

т.е. она изменяется во времени с двойной частотой и колеблется в пределах от нуля до $2UI$. В любой момент времени значения тока и напряжения имеют одинаковый знак, поэтому $p\geq 0$. Среднее за период значение мощности называется ***активной мощностью***

$$P=(1/T)\int p_R dt=UI=RI^2.$$

Резистивный элемент



а)   б)

На рисунках представлены графики мгновенных значений тока, напряжения и мощности, а также векторная диаграмма для резистивного элемента. Заштрихованная площадь соответствует *электрической энергии, необратимо преобразуемой резистивным элементом в неэлектрические виды энергии*.

Индуктивный элемент

Пусть через индуктивный элемент протекает ток $i_L(t)=I_m Sin(\omega t+\psi_i)$. Тогда его потокосцепление равно:

$$\Psi=Li_L=LI_m Sin(\omega t+\psi_i) = \Psi_m Sin(\omega t+\psi_i)$$

а ЭДС самоиндукции –

$$e_L(t) = -d\Psi/dt = -\omega LI_m Cos(\omega t+\psi_i).$$

Тогда напряжение на индуктивном элементе:

$$u_L(t) = -e_L(t) = \omega LI_m Cos(\omega t+\psi_i) = U_m Sin(\omega t+\psi_i+\pi/2) =U_m Sin(\omega t+\psi_u)$$

Отсюда, амплитуда и начальная фаза напряжения равны:

$$U_m=\omega LI_m,\ \psi_u = \psi_i+\pi/2.$$

Разделив выражение для амплитуды на $\sqrt{2}$, получим соотношение действующих значений напряжения и тока для индуктивного элемента $U = \omega LI = X_L I$, где $X_L=\omega L$ – величина, имеющая размерность сопротивления и называемая ***индуктивным сопротивлением***. Обратная величина $B_L=1/X_L=1/(\omega L)$ называется ***индуктивной проводимостью***.

Начальная фаза напряжения отличается от фазы тока на $+\pi/2$, т.е. ***ток в индуктивном элементе отстаёт по фазе от напряжения на 90°***.

Индуктивный элемент

Представим ток и напряжение комплексными значениями: $\underline{I}_L = Ie^{j\psi_i}$, $\underline{U}_L = Ue^{j\psi_u}$.

Тогда закон Ома в комплексной форме для L: $\underline{U}_L = \omega LI\, e^{j(\psi_i + \pi/2)} = \omega LI\, e^{j\psi_i}\, e^{j(\pi/2)} = j\omega L\underline{I}_L = jX_L\underline{I}_L$

Тогда ток в индуктивном элементе в комплексной форме равен: $\underline{I}_L = \underline{U}_L/(jX_L) = -jB_L\underline{U}_L$

Величины jX_L и $-jB_L$ называются ***комплексным индуктивным сопротивлением*** и ***комплексной индуктивной проводимостью***.

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивный элемент из внешней цепи:

$$p_L = u_L i_L = U_m Sin(\omega t + \psi_i + \pi/2) I_m Sin(\omega t + \psi_i) = UISin(2\omega t)$$

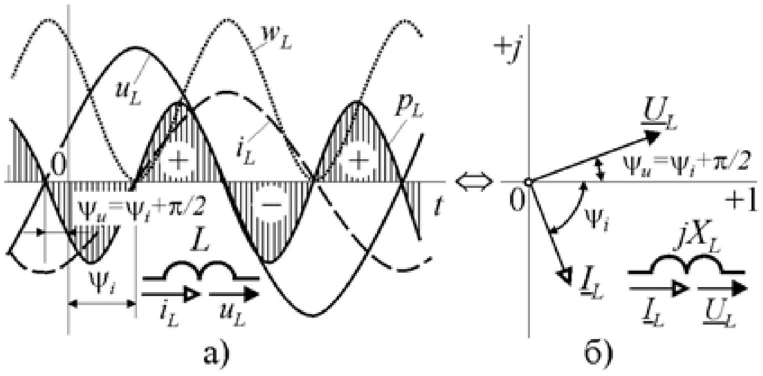
т.е. мгновенная мощность изменяется синусоидально с двойной частотой, поэтому её среднее значение за период равно нулю.

Энергия магнитного поля, соответствующая индуктивному элементу, равна:

$$w_L = Li_L^2/2 = (LI^2/2)(1 - Cos(2\omega t)),$$

т.е. она изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой от нуля до LI^2.

Индуктивный элемент



На рисунках представлены графики мгновенных значений тока, напряжения и мощности, а также векторная диаграмма для индуктивного элемента. *В L происходят непрерывные периодические колебания энергии, соответствующие её обмену между магнитным полем и внешней цепью без каких-либо потерь.*

Емкостной элемент

Если напряжение на выводах ёмкостного элемента изменяется синусоидально $u_C(t)=U_m Sin(\omega t+\psi_u)$, то ток в нём:

$$i_C = C\, du_C/dt = \omega CU_m Cos(\omega t+\psi_u) = \omega CU_m Sin(\omega t+\psi_u+\pi/2) = I_m Sin(\omega t+\psi_i)$$

т.е. ток в ёмкостном элементе изменяется по синусоидальному закону с амплитудой и начальной фазой:

$$I_m=\omega CU_m,\ \psi_i = \psi_u+\pi/2.$$

Разделив выражение для амплитуды на √2, получим соотношение действующих значений напряжения и тока :

$$I = \omega CU = B_C U$$

Величина $B_C=\omega C$, имеющая размерность проводимости, называется ***ёмкостной проводимостью***. Обратная величина $X_C= 1/B_C =1/\omega C$ называется ***ёмкостным сопротивлением***.

Начальная фаза тока отличается от фазы напряжения на +π/2, т.е. ***ток в ёмкостном элементе опережает по фазе напряжение на 90°***.

Емкостной элемент

Представим ток и напряжение комплексными значениями: $\underline{I}_C = Ie^{j\psi_i}$, $\underline{U}_C = Ue^{j\psi_u}$.

Тогда закон Ома в комплексной форме $\underline{I}_C = \omega CU e^{j(\psi_u + \pi/2)} = \omega CU e^{j\psi_u} e^{j(\pi/2)} = j\omega C\underline{U}_C = jB_C\underline{U}_C$

Падение напряжения на ёмкостном элементе: $\underline{U}_C = -jX_C\underline{I}_C = \underline{I}_C/(jB_C)$

Величины $-jX_C$ и jB_C называются ***комплексным ёмкостным сопротивлением*** и ***комплексной ёмкостной проводимостью***.

Мгновенная мощность, поступающая в ёмкостный элемент из внешней цепи

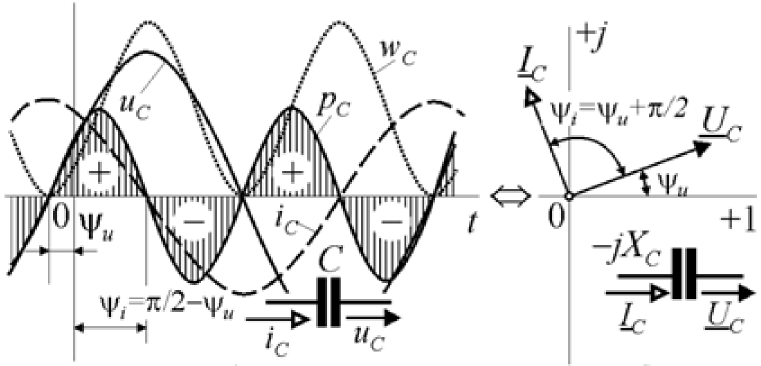
$$p_C = u_C i_C = U_m Sin(\omega t + \psi_u) I_m Sin(\omega t + \psi_u + \pi/2) = UISin(2\omega t).$$

Энергия электрического поля, соответствующая ёмкостному элементу, равна:

$$w_C = Cu_C^2/2 = (CU^2/2)(1 - Cos(2\omega t)),$$

и изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой от нуля до CU^2.

Емкостной элемент



а) б)

На рисунках представлены графики мгновенных значений тока, напряжения и мощности, а также векторная диаграмма для емкостного элемента. В емкостном элементе *происходят непрерывные периодические колебания энергии, соответствующие её обмену между электрическим полем и внешней цепью без каких-либо потерь*.

Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Рассмотрим произвольный *пассивный двухполюсник*. Напряжение и ток в точках подключения двухполюсника называются *входным напряжением и входным током*. Если эти величины представить в комплексной форме $\underline{U}=Ue^{j\psi_u}$ $\underline{I}=Ie^{j\psi_i}$, то их отношение будет комплексным числом, имеющим размерность сопротивления и называемым ***комплексным сопротивлением***

$$\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = (U / I)\, e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z\, e^{j\varphi}.$$

Модуль $Z=U/I$ комплексного сопротивления определяет соотношение между действующими (амплитудными) значениями напряжения и тока и называется ***полным сопротивлением***.

Аргумент комплексного сопротивления $\varphi=\psi_u-\psi_i$ определяет фазовое соотношением между напряжением и током, т.е. сдвиг фаз между ними. *Угол φ отсчитывается от вектора тока*. Тогда при опережающем напряжении сдвиг фаз будет $\varphi>0$, а при опережающем токе – $\varphi<0$.

Комплексное сопротивление можно представить также в алгебраической форме:

$$\underline{Z} = R + jX.$$

Вещественная часть комплексного сопротивления называется ***активным сопротивлением***, а мнимая – ***реактивным сопротивлением***.

Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Активное сопротивление всегда положительно, а реактивное может быть любого знака. Если составляющие комплексного сопротивления изобразить векторами на плоскости, то активное, реактивное и полное сопротивления образуют прямоугольный треугольник, называемый ***треугольником сопротивлений***. Для компонентов треугольника справедливы соотношения:

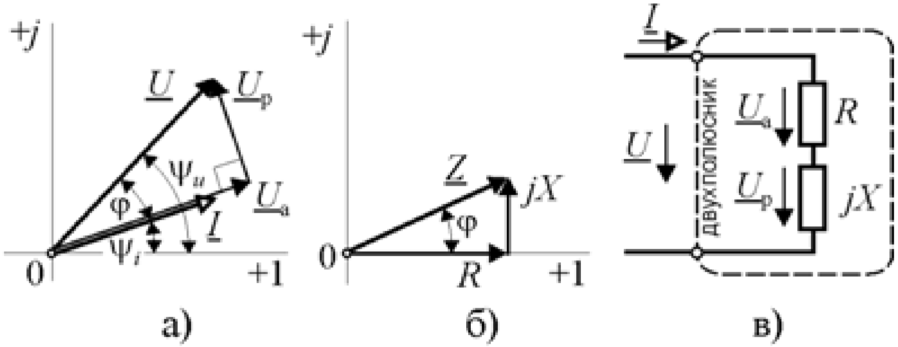
$$Z = \sqrt{(R^2+X^2)},\ \varphi = arctg\,(X / R).$$

Сдвиг фаз между током и напряжением на участке цепи определяется соотношением реактивного и активного сопротивлений.

При отсутствии активной составляющей фазовый сдвиг составляет +90° при индуктивном характере реактивного сопротивления и –90° при ёмкостном характере. Наличие активной составляющей определяет для фазового смещения секторы: $0<\varphi<+90°$ при активно-индуктивном характере комплексного сопротивления и $–90°<\varphi<0$ при активно-ёмкостном характере. При отсутствии реактивной составляющей комплексного сопротивления сдвиг фаз между током и напряжением отсутствует, т.е. $\varphi=0$.

Закон Ома. Пассивный двухполюсник

$\underline{U}=\underline{I}\cdot\underline{Z}=\underline{I}\cdot(R+jX)=\underline{I}\cdot R+j\underline{I}\cdot X=\underline{U}_a+\underline{U}_p$, т.е. комплексное напряжение на входе двухполюсника можно разделить на две составляющие ($\underline{U}_a=\underline{I}\cdot R$ совпадает по направлению с вектором тока и называется ***комплексным активным напряжением***, $\underline{U}_p=j\underline{I}\cdot X$ перпендикулярна току и называется ***комплексным реактивным напряжением*** (рис.а). $\underline{U}$, $\underline{U}_a$ и $\underline{U}_p$ составляют ***треугольник напряжений***.

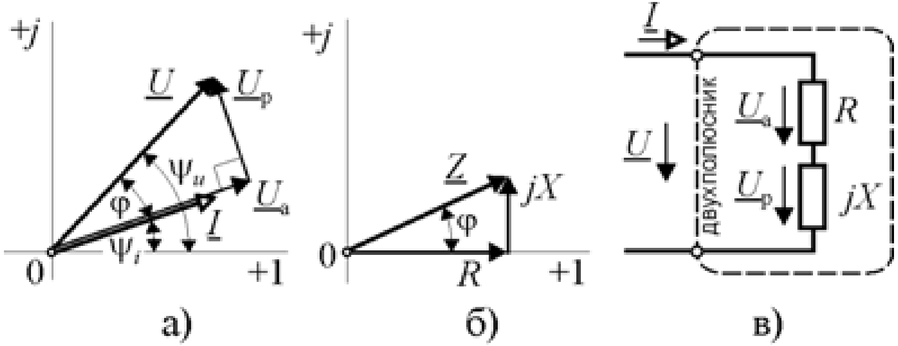


Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Для последовательной схемы замещения (рис.(в)) активная и реактивная составляющие напряжения

$$U_a = U \cdot Cos(\varphi),\ U_p = U \cdot Sin(\varphi) \text{ или } U = \sqrt{(U_a^{\,2} + U_p^{\,2})},\ \varphi = arctg(U_p/U_a)$$

причём активное напряжение может быть только положительным, а знак реактивного напряжения определяется знаком фазового сдвига φ.



Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Соотношение между током и напряжением на входе двухполюсника можно определить с помощью понятия проводимости:

$$\underline{I}/\underline{U}=1/\underline{Z}=(I/U)\,e^{\,j(\psi_i-\psi_u)}=Ye^{-j\varphi}=\underline{Y}$$

где $\underline{Y}$ – ***комплексная проводимость***, $Y=1/Z=I/U$ – модуль комплексной проводимости или ***полная проводимость***.

Представим комплексную проводимость в алгебраической форме

$$\underline{Y}=1/\underline{Z}=1/(R+jX)=R/(R^2+X^2)-jX/(R^2+X^2)=G-jB.$$

Вещественная часть комплексной проводимости G называется ***активной проводимостью***, а мнимая B – ***реактивной***.

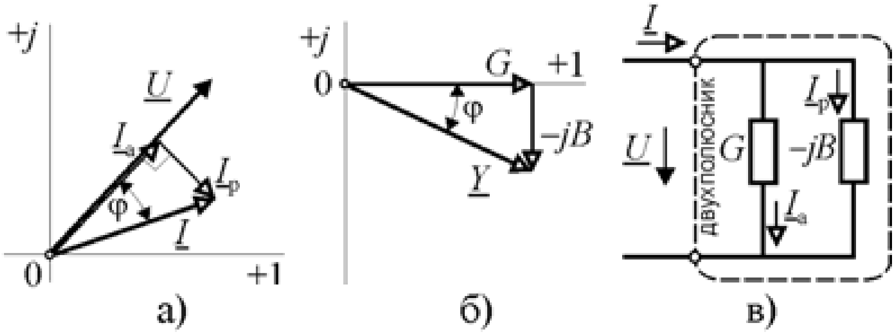
Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Комплексная проводимость и её составляющие образуют на комплексной плоскости прямоугольный треугольник, называемый ***треугольником проводимостей*** (рис.(б)). Для компонентов этого треугольника справедливы соотношения:

$$Y = \sqrt{(G^2 + B^2)},\ \varphi = arctg\,(B/G).$$

Составляющие комплексного сопротивления можно определить через составляющие комплексной проводимости

$$R=G/(G^2+B^2)=G/Y^2,\ X=B/(G^2+B^2)=B/Y^2$$



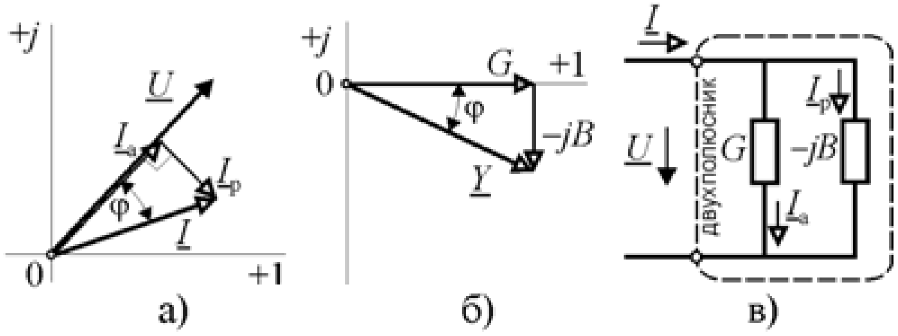
Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Для параллельной схемы замещения (рис.(в)) активная и реактивная составляющие тока

$$I_a=I\cdot Cos(\varphi),\ I_p=I\cdot Sin(\varphi) \text{ или } I=\sqrt{(I_a^2+I_p^2)},\ \varphi=arctg(I_p/I_a)$$

причём активный ток может быть только положительным, а знак реактивного тока определяется знаком фазового сдвига φ.

$\underline{I}$, $\underline{I}_a$ и $\underline{I}_p$ составляют ***треугольник токов***.



Закон Ома. Пассивный двухполюсник

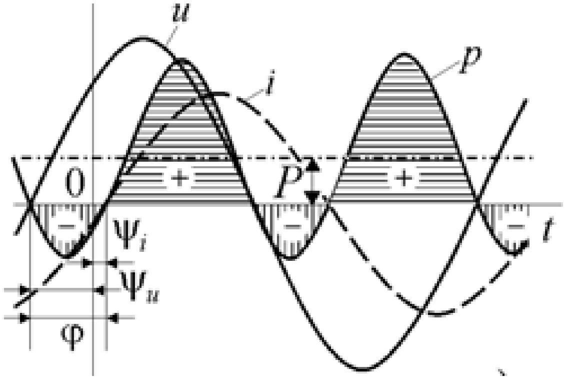
В общем случае ток $i(t)=I_m Sin(\omega t+\psi_i)$ и напряжение $u(t)=U_m Sin(\omega t+\psi_u)$ на входе двухполюсника смещены по фазе друг относительно друга на некоторый угол φ.

Пусть $i(t)=I_m Sin(\omega t+\psi_i)$ и $u(t)=U_m Sin(\omega t+\psi_u)$. Скорость поступления энергии в двухполюсник в каждый момент времени или, что то же самое, ***мгновенное значение мощности*** равно:

$$p=ui= U_m Sin(\omega t+\psi_u)\, I_m Sin(\omega t+\psi_i) = UI\, Cos(\varphi) - UI\, Cos(2\omega t - \varphi).$$

Из полученного выражения следует, что мощность имеет постоянную составляющую $UICos(\varphi)$ и переменную $UICos(2\omega t - \varphi)$, изменяющуюся с двойной частотой.

Положительная мощность соответствует поступлению энергии из внешней цепи в двухполюсник, а отрицательная – возврату энергии во внешнюю цепь.



Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Баланс поступающей и возвращаемой энергии соответствует среднему за период значению мощности или ***активной мощности***:

$$P=(1/T)\int p dt= UICos(\varphi) =UI_a=U_aI=RI^2=GU^2.$$

Активная мощность – это мощность, которая преобразуется в двухполюснике в тепловую или другие виды неэлектрической энергии, т.е. в большинстве случаев это полезная мощность. Активный ток и активное напряжение соответствуют той части тока или напряжения, которая расходуется на преобразование энергии в двухполюснике.

Все технические устройства рассчитываются на работу в определённом (номинальном) режиме. Проводники рассчитываются на определённый ток, изоляция на определённое напряжение. Поэтому мощность, приводимая в технических данных и определяющая массогабаритные показатели и стоимость изделия, соответствует произведению действующих значений тока и напряжения и называется ***полной*** или ***кажущейся*** мощностью $S=UI$.

Полная мощность не имеет физического смысла, но её можно определить как максимально возможную активную мощность, т.е. активную мощность при $Cos(\varphi)=1$. Размерность полной мощности вольт-ампер [ВА].

Закон Ома. Пассивный двухполюсник

Отношение активной мощности к полной называют ***коэффициентом мощности***:

$$Cos(\varphi)=P/S.$$

Для лучшего использования оборудование должно работать с возможно более высоким коэффициентом мощности.

Помимо преобразования двухполюсник постоянно обменивается энергией с внешней цепью. Интенсивность этого обмена характеризуют понятием ***реактивной мощности***:

$$Q=UI\,Sin(\varphi)=UI_p=U_pI=XI^2=BU^2$$

Взаимосвязь активной, полной и реактивной мощности:

$$S=\sqrt{(P^2+Q^2)},\ tg(\varphi)=Q/P$$

Эти выражения соответствуют сторонам прямоугольного треугольника, называемого ***треугольником мощностей*** и подобного треугольникам сопротивлений, проводимостей, токов и напряжений.

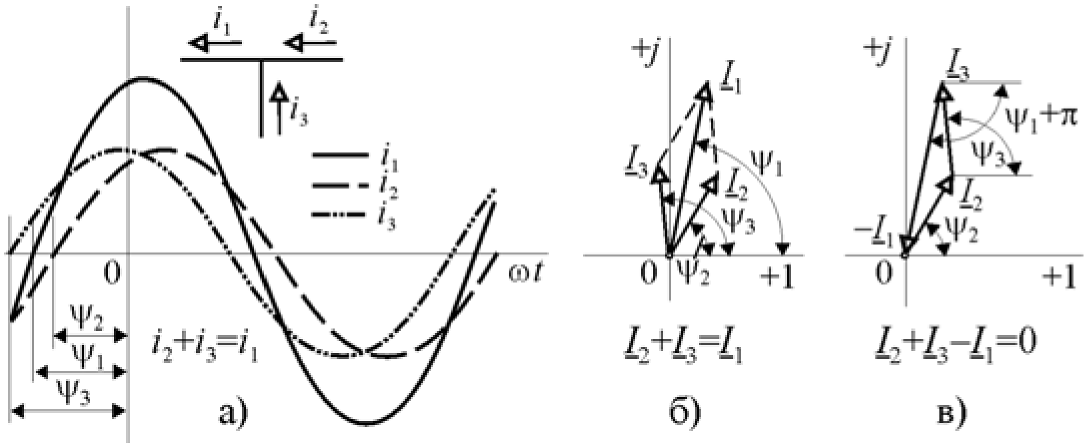
Представим треугольник комплексным числом:

$$\underline{S}=P+jQ=UICos(\varphi)+jUISin(\varphi)=UIe^{j\varphi}=\underline{U}\cdot\underline{I}^*$$

где $\underline{S}$ – ***комплексная мощность*** или ***комплекс мощности*** двухполюсника; $\underline{I}^*$– комплексное сопряжённое значение тока. Модуль комплекса мощности равен ***полной мощности*** $S=|\underline{S}|=UI$.

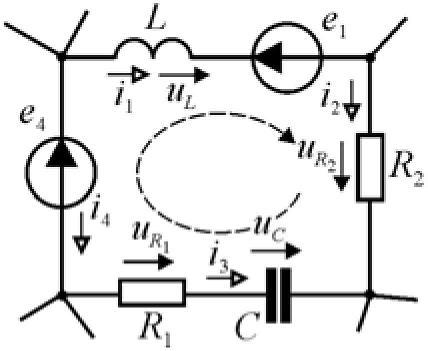
Законы Кирхгофа

Получаемый как следствие принципа непрерывности электрического тока первый закон Кирхгофа, справедлив для мгновенных значений токов в узлах, и формулируется как: ***алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узлах цепи равна нулю*** $\sum \pm i_k = 0$ или в комплексной форме $\sum \pm \underline{I}_k = 0$.



Законы Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа, как одна из форм закона сохранения энергии, справедлив для любого момента времени, т.е. ***алгебраическая сумма напряжений на всех элементах замкнутого контура электрической цепи в любой момент времени равна алгебраической сумме ЭДС источников, действующих в контуре***: $\sum\pm u_k=\sum\pm e_n$ или в комплексной форме $\sum\pm \underline{U}_k=\sum\pm \underline{E}_n$.



$$u_L+u_{R_2}-u_C-u_{R_1}=-e_1+e_4$$

$$\Downarrow$$

$$L\frac{di_1}{dt}+R_2i_2-\frac{1}{C}\int i_3\,dt-R_1i_3=-e_1+e_4$$

$$\underline{U}_L+\underline{U}_{R_2}-\underline{U}_C-\underline{U}_{R_1}=-\underline{E}_1+\underline{E}_4$$

$$\Downarrow$$

$$jX_L\underline{I}_1+R_2\underline{I}_2+jX_C\underline{I}_3-R_1\underline{I}_3=-\underline{E}_1+\underline{E}_4$$

Вместо заключения

Все законы и методы расчета цепей постоянного тока могут быть применены для цепей синусоидального тока, если пассивные элементы цепи заменить их комплексными сопротивлениями, а источники энергии – их комплексными амплитудами (или комплексными действующими значениями).

Например, для определения эквивалентного комплексного сопротивления последовательно соединенных R, L и C достаточно сложить комплексные сопротивления указанных элементов, т.е.

$$\underline{Z} = \underline{z}_R + \underline{z}_L + \underline{z}_C = R + jX_L - jX_C = R + j\omega L - j/(\omega C).$$

Спасибо
за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY

Никитина Мария Владимировна,
mvnikitina@itmo.ru