



ЭЛЕКТРОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Модуль ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Раздел 2.2 Резонанс в электрических цепях синусоидального тока

Никитина Мария Владимировна
mvnikitina@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2023

Содержание

Резонанс

Условие резонанса напряжений (РН)

Резонансная частота (РН)

Характеристическое сопротивление

Добротность

Особенности режима резонанса напряжений

Коэффициент усиления напряжения

Суммарная энергия (РН)

Частотные характеристики (РН)

Параллельный резонансный контур

Условие резонанса токов (РТ)

Резонансная частота (РТ)

Особенности режима резонанса токов

Частотные характеристики проводимостей (РТ)

Частотные характеристики токов (РТ)

Частотная характеристика фазового сдвига (РТ)



Резонансом называется режим пассивного двухполюсника, содержащего индуктивные и ёмкостные элементы, при котором его входное реактивное сопротивление равно нулю ($X_0=0$). Следовательно, при резонансе ток и напряжение на входе двухполюсника имеют нулевой сдвиг фаз ($\varphi_0=0$).

Явление резонанса широко используется в технике, но может также вызывать нежелательные эффекты, приводящие к выходу из строя оборудования.

Простейший двухполюсник, в котором возможен режим резонанса, должен содержать один индуктивный элемент и один ёмкостный. Эти элементы можно включить в одну ветвь, т.е. последовательно (**резонанс напряжений**), или в параллельные ветви (**резонанс токов**).



Резонанс напряжений

Пусть резистивный, индуктивный и емкостной элементы соединены последовательно и к ним приложено напряжение

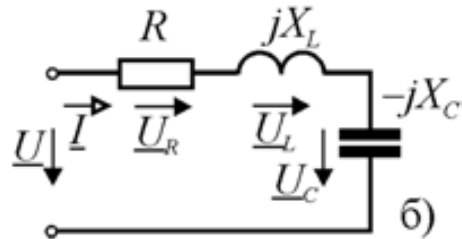
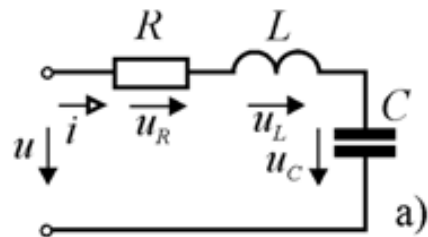
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

Тогда сумма падений напряжения на элементах цепи в каждый момент времени будет равна:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

или с учетом закона Ома в комплексной форме:

$$\underline{U} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} - jX_C\underline{I} = \underline{I}(R + j(X_L - X_C)) = \underline{I}(R + j(\omega L - 1/(\omega C))).$$



Резонанс напряжений

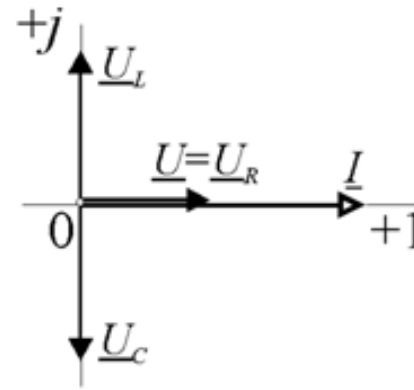
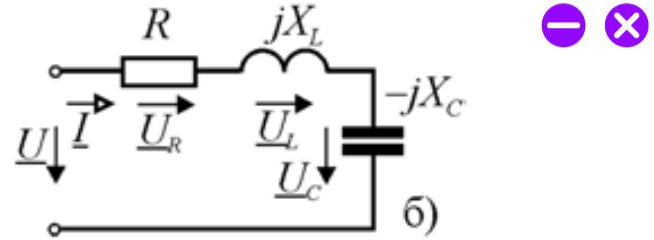
Резонанс в этой цепи возникает, если

$$X = X_L - X_C = 0$$

$$\text{или } X_L = X_C$$

$$\text{или } \omega L = 1/(\omega C).$$

В этом случае противоположные по фазе напряжения на индуктивном и ёмкостном сопротивлении равны $\underline{U}_L = \underline{U}_C$ и компенсируют друг друга. Поэтому резонанс в последовательной цепи называют *резонансом напряжений*.



Резонанс напряжений

Условие резонанса $X=0$ можно выполнить тремя способами: изменением частоты питания ω , индуктивности L или ёмкости C .



Частота, при которой наступает режим резонанса или *резонансная частота*:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$$

Индуктивное и ёмкостное сопротивления при резонансе равны:

$$\rho = X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 \cdot L = 1/(\omega_0 \cdot C) = \sqrt{L/C}$$

Эта величина называется *характеристическим сопротивлением*.

Отношение характеристического сопротивления к активному сопротивлению называется *добротностью* резонансного контура:

$$Q = \rho/R.$$

Характерные особенности резонанса напряжений:

1) Так как реактивное сопротивление последовательного контура в режиме резонанса равно нулю, то его полное сопротивление минимально и равно активному сопротивлению:

$$Z_0 = \sqrt{(R^2 + X^2)}|_{X=0} = R.$$

Вследствие этого **входной ток при резонансе максимален** и ограничен только активным сопротивлением контура $I_0 = U/Z_0 = U/R$. По максимуму тока можно обнаружить режим резонанса.

2) В режиме резонанса напряжения на отдельных элементах контура составляют:

$$U_{R0} = RI_0, U_{L0} = X_{L0}I_0, U_{C0} = X_{C0}I_0.$$

Отсюда следует, что и входное напряжение контура

$$\underline{U} = U_{R0} + j(U_{L0} - U_{C0}) = U_{R0}$$

становится равным напряжению на резистивном элементе.

При этом индуктивное и ёмкостное сопротивления могут быть больше активного $X_{L0} = X_{C0} > R$.

Тогда напряжения на реактивных элементах будут больше входного напряжения.



Коэффициент усиления напряжения равен добротности контура



$$Q = U_{L0}/U_{R0} = U_{C0}/U_{R0} = X_{L0}/R = X_{C0}/R = \rho/R.$$

В радиотехнических устройствах добротность резонансного контура составляет 200...500.

3) Активная мощность

$$P = RI_0^2,$$

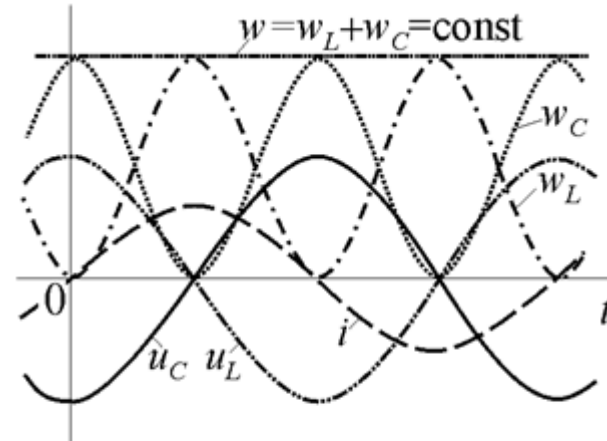
потребляемая контуром при резонансе максимальна, т.к. максимален ток. Реактивные мощности индуктивного и ёмкостного элементов равны

$$X_{L0}I_0^2 = X_{C0}I_0^2$$

и превышают активную мощность в Q раз (если $Q > 1$).

Резонанс напряжений

При резонансе происходит периодический процесс обмена энергией между магнитным и электрическим полем, но суммарная энергия полей остаётся постоянной и определяется индуктивностью и ёмкостью контура. При этом источник питания поставляет в контур только энергию, идущую на покрытие тепловых потерь в резисторе, и совершенно не участвует в процессе её обмена между полями.

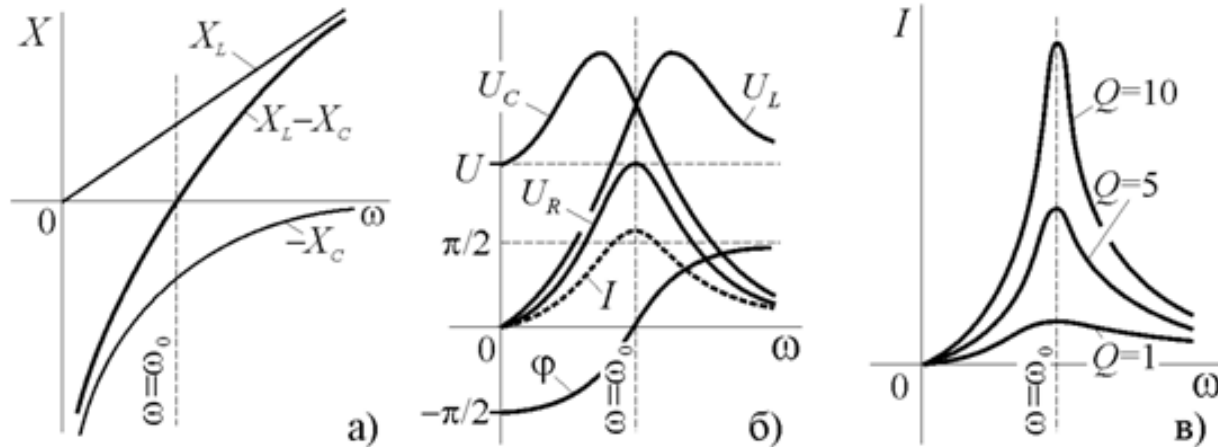


$$w = w_L + w_C = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \text{const}$$



Резонанс напряжений

Для технических приложений важно знать свойства резонансного контура в некотором диапазоне частот. Зависимость параметров электрической цепи от частоты входного напряжения или тока называется *частотной характеристикой*.



Резонанс токов

Параллельное включение катушки индуктивности и конденсатора соответствует схеме на рисунке.

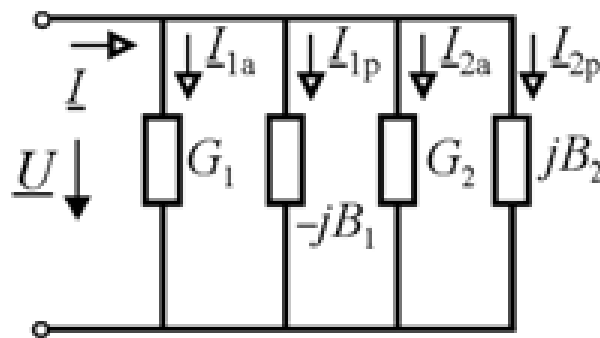
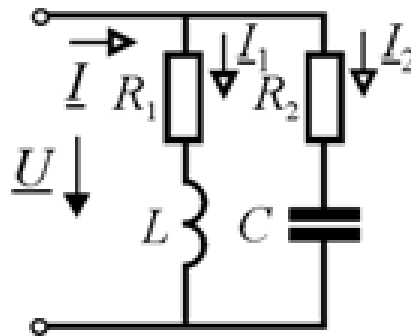
Тепловые потери в катушке и конденсаторе соответствуют мощности, рассеиваемой на резистивных элементах R_1 и R_2 .

Представленная схема носит название *параллельный резонансный контур с потерями*.

Условием резонанса для представленного резонансного контура является равенство нулю эквивалентной реактивной проводимости

$$B = B_1 - B_2,$$

где B_1 и B_2 – эквивалентные реактивные проводимости ветвей.

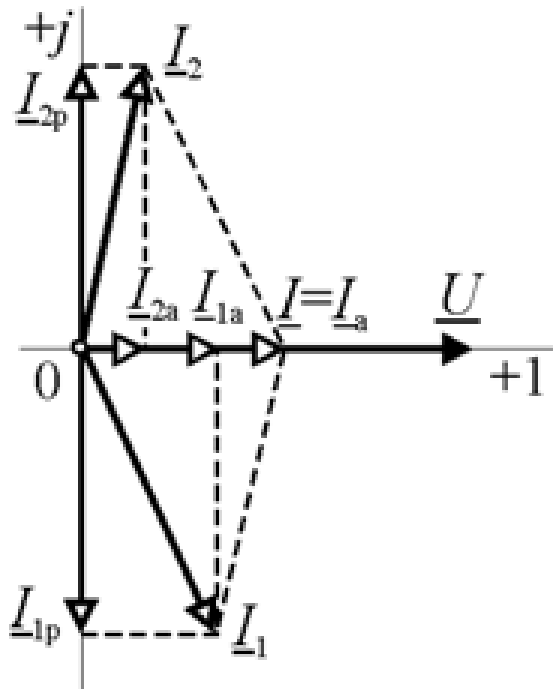


Резонанс токов

При $B_1=B_2$ противоположные по фазе реактивные токи ветвей компенсируются, поэтому резонанс в параллельном контуре называется **резонансом токов**. В результате компенсации реактивных токов входной ток является суммой активных составляющих токов в ветвях.

Если $B_1 \gg G_1$ и $B_2 \gg G_2$ (т.е. $X_1 \gg R_1$ и $X_2 \gg R_2$), то $I_{1p} \gg I_{1a}$ и $I_{2p} \gg I_{2a}$, следовательно, $I_1 \gg I$ и $I_2 \gg I$, т.е. токи в ветвях значительно больше входного тока.

Свойство усиления тока является важнейшей особенностью резонанса токов. Степень его проявления непосредственно связана с величиной потерь в элементах цепи.



Резонанс токов

При отсутствии потерь (т.е. при $R_1=0$ и $R_2=0$) активные составляющие токов в ветвях отсутствуют и входной ток контура равен нулю.

Полная проводимость контура

$$Y = \sqrt{((G_1 + G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2)}$$

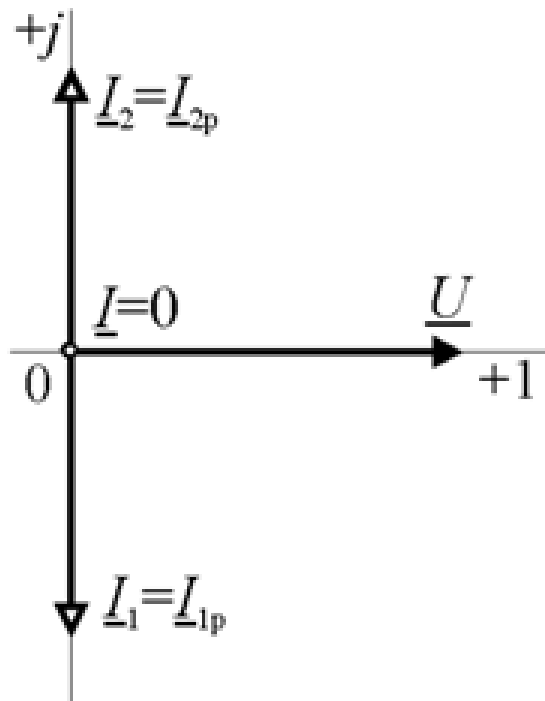
В режиме резонанса $B_1 = B_2$, тогда

$$Y_0 = G_1 + G_2 \approx \min,$$

откуда следует, что

$$Z_0 = 1/Y_0 \approx \max.$$

Минимум суммарной активной проводимости ветвей не соответствует частоте резонанса, поэтому минимум полной проводимости несколько смещён относительно резонансной частоты.



Резонанс токов

Реактивные мощности ветвей контура в режиме резонанса одинаковы и имеют разные знаки $Q_1=B_1U^2, Q_2=B_2U^2$. Это значит, что при резонансе токов между катушкой индуктивности и конденсатором происходит периодический обмен энергией без участия источника питания, мощность которого расходуется только на покрытие потерь энергии в активных сопротивлениях.

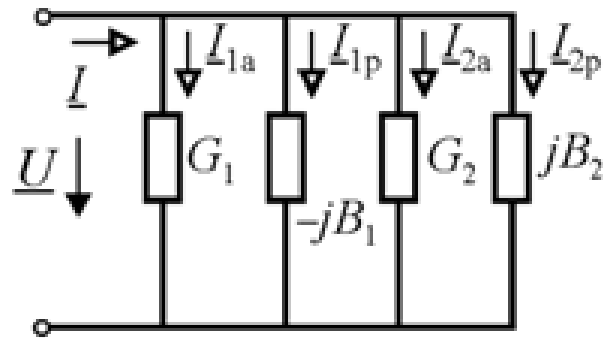
Раскроем реактивные проводимости через параметры исходной схемы

$$B_1 = \omega_{0i}L/(R_1^2+(\omega_{0i}L)^2),$$
$$B_2 = (1/\omega_{0i}C)/(R_1^2+(1/\omega_{0i}C)^2)$$

где ω_{0i} – резонансная частота.

Приравнявая B_1 и B_2 получим *резонансную частоту*

$$\omega_{0i} = \omega_0 \sqrt{((\rho^2 - R_1^2)/(\rho^2 - R_2^2))}$$



Особенности режима резонанса токов:



1) Резонансная частота зависит не только от параметров реактивных элементов контура, но и от активных сопротивлений R_1 и R_2 . Поэтому, в отличие от последовательного контура, резонанс в цепи можно создать вариацией пяти параметров. Причём, изменением индуктивности или ёмкости в контуре можно создать два резонансных режима.

2) Резонанс возможен только в том случае, если **оба** активных сопротивления больше или меньше ρ .

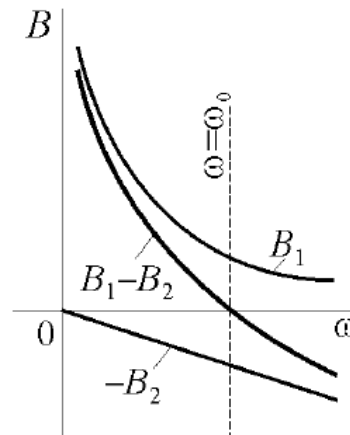
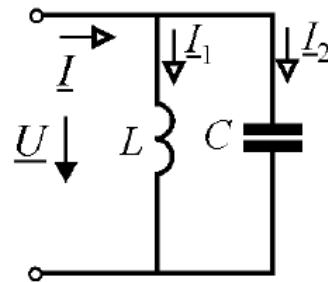
3) Если $R_1=R_2=\rho$, то сдвиг фаз между током и напряжением на входе контура равен нулю при **любой** частоте.

4) При $R_1 \ll \rho$ и $R_2 \ll \rho$ $\omega_{0i} \approx \omega_0$

Резонанс токов

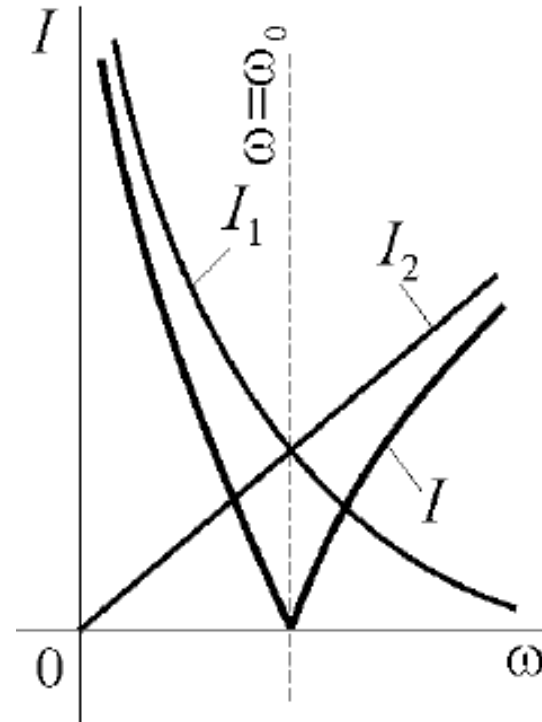
Анализ частотных характеристик обычно проводят для идеального параллельного контура (т.е. при $R_1=0$ и $R_2=0$).

В этом случае $B_1=1/(\omega L)$; $B_2=\omega C$; $B=B_1-B_2$. Частотные характеристики проводимостей представлены на рис. При частотах ниже резонансной эквивалентная проводимость $B>0$ имеет индуктивный характер. При возрастании частоты в диапазоне от ω_0 до ∞ $B<0$, т.е. имеет ёмкостный характер.



Резонансные кривые идеального контура без потерь для токов в ветвях и входного тока при условии $U=const$ показаны на рис.

В реальном контуре активная проводимость отлична от нуля при любой частоте, поэтому входной ток не обращается в нуль.





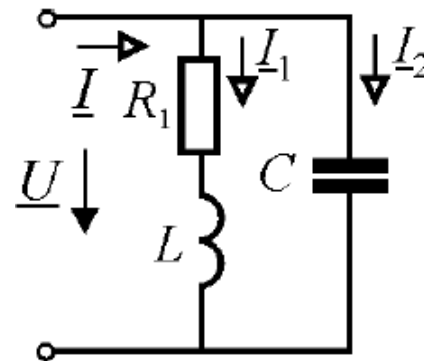
Обычно потери в конденсаторе существенно меньше потерь в катушке. В этом случае $R_2 \approx 0$ и схема замещения цепи примет вид рис.

Резонансная частота такого контура

$$\omega_{0i} = \omega_0 \sqrt{1 - (R_1/\rho)^2}$$

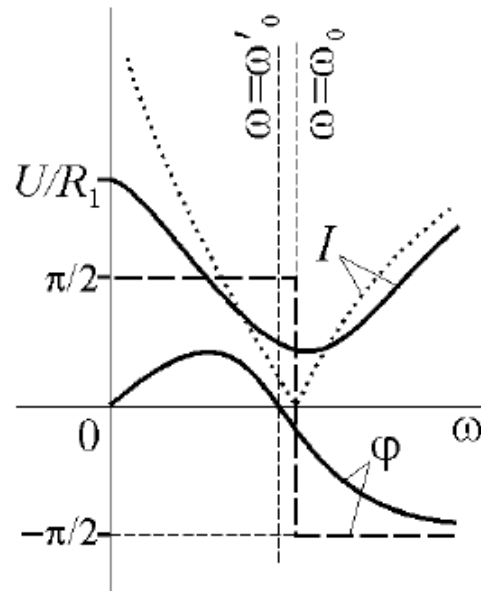
ниже частоты идеального контура.

Из полученного выражения следует, что резонанс в такой цепи возможен только, если $Q = \rho/R_1 > 1$.



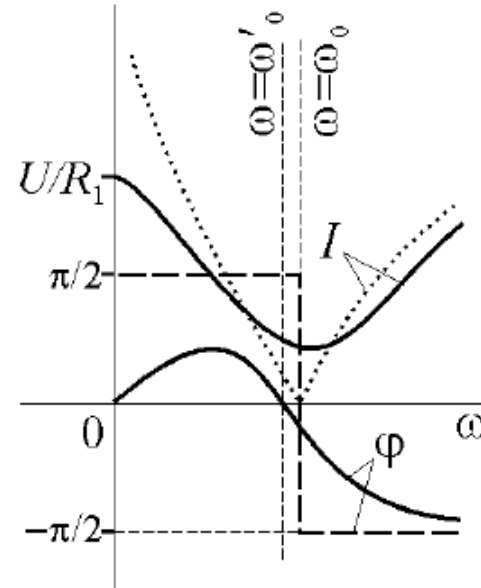
На данном рис. изображены частотные характеристики выходного тока и фазового сдвига для идеального контура и контура с $R_2=0$.

При нулевой частоте ток реального контура ограничен активным сопротивлением катушки R_1 . Минимум тока имеет конечное значение и смещён относительно точки резонанса. Значение минимума и его смещение зависят от добротности контура Q .



Частотная характеристика фазового сдвига входного тока и напряжения имеет максимум в области частот ниже резонансной, степень выраженности которого зависит от добротности.

По мере снижения добротности максимальное значение уменьшается и при $Q=1$ исчезает максимум и точка пересечения характеристики с осью абсцисс, т.е. точка резонанса.



И в заключении...



Частотные свойства последовательного и параллельного резонансных контуров во многом противоположны. Последовательный контур в режиме резонанса обладает малым входным сопротивлением, а параллельный – большим. При низких частотах реактивное сопротивление последовательного контура имеет ёмкостный характер, а параллельного – индуктивный. В последовательном контуре при резонансе наблюдается усиление напряжения на реактивных элементах, а в параллельном – тока в них. Всё это позволяет использовать явление резонанса в различных контурах и сочетаниях контуров для эффективной обработки сигналов, выделяя или подавляя в них заданные частоты или диапазоны частот.

Спасибо за внимание!

ITMO *re than a*
UNIVERSITY

Никитина Мария Владимировна,
mvnikitina@itmo.ru

