1. a) 均匀先验分布等价于 Beta(1.1)

∴参数为 $\alpha_0=1$, $\beta_0=1$

b) 后验次培分布参数 α_1, β_1

由观察到4次正性 6次负性

记正性结果数 $Z=4$. 试验总数 $n=10$

则 $\alpha_1=\alpha_0+Z=1+4=5$ $\beta_1=\beta_0+n-Z=1+10-4=7$

∴后验次培分布为 Beta(5.7)

c) 先验分布下 p 的期望值

$$E(p)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{1}{1+1}=0.5$$

d) 样本中正性结果的比例为: $\frac{4}{10}=0.4$

e) $L=p^4(1-p)^6$ $\ln L=4\ln p+6\ln(1-p)$

令 $f(p)=4\ln p+6\ln(1-p)$ $f'(p)=\frac{4}{p}-\frac{6}{1-p}$

令 $f'(p)=0 \Rightarrow p=0.4$

$f(p)$ 在 $(0, \frac{2}{5})$ 单调递增，$(\frac{2}{5}, 1)$ 单调递减

$\therefore \ln L_{max} = f(p)_{max} = f(\frac{2}{5}) = 4\ln\frac{2}{5} + 6\ln\frac{3}{5}$

$\therefore \hat{p}_{MLE} = \frac{2}{5} = 0.4$

f) 后验分布 Beta(5,7) 的期望值

$$E(p)_{post} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1} = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}$$

表示为加权平均形式

$$E(p)_{post} = \frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0+\beta_0+n} E(p) + \frac{n}{\alpha_0+\beta_0+n} \cdot \hat{p}_{MLE}$$

$$= \frac{1+1}{1+1+10} \times 0.5 + \frac{10}{1+1+10} \times 0.4 = \frac{5}{12}$$

2. a) H_0: $p(D|H_0) = (\frac{1}{2})^{20}(\frac{1}{2})^{30} = (\frac{1}{2})^{50} \approx 8.88 \times 10^{-16}$

H_1: $p(D|H_1) = (\frac{2}{5})^{20}(\frac{3}{5})^{30} \approx 2.43 \times 10^{-15}$

H_2: $p(D|H_2) = \int_0^1 p^{20}(1-p)^{30}dp = \frac{\Gamma(21)\Gamma(31)}{\Gamma(52)} = \frac{20!30!}{51!} \approx 4.16 \times 10^{-16}$

b) $BF_{01} = \frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)} = 0.3651 > \frac{1}{3}$

$BF_{02} = \frac{P(D|H_0)}{P(D|H_2)} = 2.1348 < 3$

$BF_{12} = \frac{P(D|H_1)}{P(D|H_2)} = 5.8425 > 3$

c) 根据贝叶斯因子大小：

① H_0与H_1之间，没有把握接受任意一个

② H_0与H_2之间，没有把握接受任意一个

③ H_1与H_2有把握接受H_1

d) 需要在H_0与H_1之间接受一个假设

假设一共需要N次接受H_1

$P(D|H_0) = (\frac{1}{2})^N$　　$P(D|H_1) = (\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}N}(\frac{3}{5})^{\frac{3}{5}N}$

$BF_{10} = \frac{P(D|H_1)}{P(D|H_0)} = \frac{(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}N}(\frac{3}{5})^{\frac{3}{5}N}}{(\frac{1}{2})^N} > 3$

∵ N为正整数

∴ N≥55

∴ 还需要额外进行5次伯努利试验