

# 动力学部分知识总结

written in markdown

主要的难点在于定理的推导（初学）和模型的建立（做题）

## 1. 动力学的基本定律

第一定律：惯性定律。不受力作用的质点，将保持静止或做匀速直线运动。

第二定律：力与加速度之间的关系定律。  $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$

第三定律：作用与反作用定律。两个物体间的作用力与反作用力总是大小相等、方向相反，沿着同一直线，且分别同时作用在这两个物体上。

运用动力学的第二定律可以得出质点运动的微分方程。

**tips:** 要区分质点的运动微分方程和质点的运动方程，质点的运动方程必须表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ，而质点的运动微分方程一般是由运动学第二定律得出的微分方程，不一定有解析解。

## 2. 动量与动量定理

### 1. 质点系的动量

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = m_c \mathbf{v}_c$$

常用的结论：转轴通过质心的物体的总动量为0。

### 2. 质点的动量定理

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{I}$$

### 3. 质点系的动量定理

$$\int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)}$$

一个后面证明会用到的结论：  $\sum m_i \mathbf{r}'_i = 0$ ， $\mathbf{r}'_i$  是相对于质心的矢径。

**证明：**  $\sum m_i \mathbf{r}'_i = \sum m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) = \sum m_i \mathbf{r}_i - \sum m_i \mathbf{r}_c = \mathbf{0}$

即相对质心矢径与质点系质点质量加权之和为0

## 3. 动量矩和动量矩定理

### 1. 质点的动量矩

$$M_o(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

### 2. 质点系的动量矩

$$\sum M_o(m_i \mathbf{v}_i) = M_o(m_c \mathbf{v}_c) + \sum M_c(m_i \mathbf{v}_i)$$

**推导方法：** 把每个矢径拆成相对矢径和质心的矢径，每个速度拆成质心的速度和相对质心的速度，得到四项，中间两项利用2中证明的等式消去，剩下的两项就是质心的动量矩和刚体相对质心的动量矩。

(这也是这两章大部分定理的推理思想)

### 3. 质点系的动量矩定理：

推导方法：对质点系的动量矩定理求导，注意叉乘运算的求导法则。

Q:叉乘的求导法则和乘法一样，为什么？

A:符合分配律运算的都符合乘法的求导法则

$$(\mathbf{a} + d\mathbf{a}) \times (\mathbf{b} + d\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + d\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times d\mathbf{b}$$

(忽略高阶小量)

#### 1. 对质心的动量矩定理：

$$\frac{dL_c}{dt} = M_c$$

#### 2. 对任意点的动量矩定理(没啥大用)

$$\frac{dL_o}{dt} = M_c + \mathbf{r}_c \times \sum \mathbf{F}_i^{(e)}$$

tips:

1. 在求解动量矩的过程中，一般要额外注意是对哪一个点求的动量矩，但若系统质心速度为0，对刚体中每一个点的动量矩都等于对质心的动量矩。
2. 一般做题都只使用对质心的动量矩定理，和质心运动定理一起使用，构成了**刚体平面运动微分方程**

## 4. 动能定理

动能定理的积分形式：

$$T_2 - T_1 = \sum W_i$$

两端同时对时间求导获得功率方程：

$$\frac{dT}{dt} = \sum P_i$$

列动能定理方程时容易踩的坑：

1. 忘记转动动能
2. 忘记力矩做功
3. 忘记乘系数0.5
4. 在涉及到复杂运动学时算错力的功（比如无滑动的滚动，有的位移存在倍数关系没有那么直观）

## 5. 达朗贝尔原理

主要注意的点：

1. 注意惯性力和惯性力矩的方向，应和加速度与角加速度反向。
2. 注意简化点，简化的点不同，惯性力的大小相同，惯性力矩的大小不同。这是由于惯性力和惯性力矩的本质是用来平衡合外力与合外力矩的物理量，合外力矩会随着简化点的改变而改变。
3. 惯性力和惯性力矩可以对整个系统求，也可以对系统中的各个部分分别求，效果是一样的。