Конспект по математическому анализу

Содержание

1 Неопределенный интеграл **2**
1.1 Общие определения и обозначения . . . 2
1.2 Основные свойства неопределенного интеграла на промежутке $\langle a, b\rangle$ . . . 2
1.3 Методы интегрирования. . . . 3
1.4 Таблица интегралов . . . 3

2 Элементарные функции **4**
2.1 Общие определения . . . 4
2.2 Теоремы, ценность которых в доказательствах . . . 4
2.3 Продолжение доказательства теоремы 1 . . . 6

3 Рационализируемые интегралы **7**
3.1 Классы рационализируемых интегралов . . . 8
3.2 Отступление об алгебраических кривых . . . 8
3.3 Ебу, опять отступление о разных примерах . . . 9

4 Определенный интеграл (Римана) **10**
4.1 Критерий Дарбу . . . 12
4.2 Следствия из критерия Дарбу . . . 13
4.3 Основные свойста определенных интегралов . . . 13
4.4 Теорема о среднем для интеграла . . . 15

5 Связь определенных и неопределенных интегралов **16**
5.1 Формула Ньютона-Лейбница . . . 17
5.2 . . . 17

6 Геометрические приложения **17**
6.1 Мера Жордана . . . 18

1 Неопределенный интеграл

1.1 Общие определения и обозначения

Определение 1. *Поднмножество M действительных чисел называется промежутком, если $M = [a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ или (a, b). (если скобка круглая то там может быть и $\pm\infty$) Обозначается промежуток от a до b как $\langle a, b\rangle$.*

Определение 2. *Функция $F(x)$ называется первообразной для функции f на промежутке M, если*

$$F' = f \ \forall x \in M.$$

Замечание Если a или b не принадлежит промежутку $\langle a, b\rangle$, то $F'(a)$ или $F'(b)$ определяется как односторонняя производная.

Утверждение 1. *Если F первообразная для f на промежутке M, то $F + c(= const)$ – тоже первообразная f на промежутке M.*

Доказательство. Достаточно использовать то, что $(f + g)' = f' + g'$. □

Утверждение 2. *Если F_1, F_2 – первообразные для f на промежутке M, то $F_1 - F_2 = c$ для какого-то произвольного действительного c.*

Доказательство. Предположим, что $H = F_1 - F_2$ В таком случае, $H' = 0$ на промежутке M. Пусть $x_1, x_2 \in M$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1)$. Поскольку $H'(c) = 0$, то мы видим, что значение H во всех точках совпадает. □

Определение 3. *Операция перехода от f к ее первообразной F называется интегрированием. Совокупность всех первообразных от f называется неопределенным интегралом и обозначается как $\int f(x)dx$ (M обычно не указано, предполагается, что это область определения функции).*

Примеры

1. $\displaystyle\int xdx = \left\{\frac{x^2}{2} + c \mid c = const\right\} = \frac{x^2}{2} + c$ (В первообразной принято писать ту же переменную, что и у подинтегральной функции).
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, где $c = const$. Вообще говоря, функция разбивается на два промежутка с разными константами, поскольку в нуле она не определена и получается вообще вот такое: $\ln(x) + c_1$ при $x > 0$, и $\ln(-x) + c_2$ при $x < 0$.

Замечание. Внутри интеграла работают стандартные дифференциальные обозначения:

$$\int dg(x) = \int g'(x)dx.$$

1.2 Основные свойства неопределенного интеграла на промежутке $\langle a, b\rangle$

1. $\int f'(x)dx = f(x)$ – по определению.
2. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + c$.
3. Линейность интеграла. Пусть существуют интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$. В таком случае, для любых действительных чисел a, b справедливо следующее равенство:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

1.3 Методы интегрирования.

Метод замены переменной.

Утверждение 3. *Пусть $f(x)$ имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную, а $\phi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha, \beta\rangle$ существует интеграл*

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(\phi(t))d\phi(t)$$

Данное утверждение напрямую следует из дифференцирования сложной функции и объясняет, зачем в интеграле пишут dx. В некоторых источниках его опускают, однако для удобства записи лучше не забывать.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}(t)dt$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int \operatorname{tg}(t)dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}dt = \int \frac{-d\cos t}{\cos t} = -\int \frac{d\cos t}{\cos t} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + c,$$

   где $x = \cos t$

2. Найти интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$ на области определения функции.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)] = \int \sqrt{1-\sin t^2}d\sin t =$$

$$= \int |\cos t|\cos t dt = (\cos t)^2 dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = [t = \arcsin x] = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Утверждение 4. *Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$ функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы существует $\int u'(x)v(x)dx$. Тогда существует*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Утверждение становится очевидным, если проинтегрировать тождество $(uv)' - u'v = v'u$.

1.4 Таблица интегралов

Далее, все интегралы берутся на области определения функции, которая стоит справа.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, если $\alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (отдельные константы при $x > 0$ и $x < 0$)
3. $\int a^x dx = \left(\int e^{\ln ax}dx\right) = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$

9. $\displaystyle\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

11. (Высокий логарифм) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

12. (Длинный логарифм) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}+1\right) - \ln\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\right)\right)$

2 Элементарные функции

2.1 Общие определения

Определение 4. *Элементарные функции – функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из следующих основных элементарных функций:*

- *степенная функция с любым действительным показателем;*
- *показательная и логарифмическая функции;*
- *тригонометрические и обратные тригонометрические функции,*

и которые определены на каком-то открытом подмножестве $\mathbb{R}$.

Пример: $\sin x^{\cos x}$.

- Если функция является элементарной, тогда она непрерывна на своей области определения.
- Дифференцирование сохраняет класс элементарных функций.
- А интегрирование не всегда. (Примеры: $\int e^{x^2}dx$, $\int e^{-x^2}dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$; $\int \frac{e^x}{x}dx$; $\int \sin(x^2)$, $\int \cos(x^2)$; $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, $\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\ln x}$)

2.2 Теоремы, ценность которых в доказательствах

Определение 5. *Рациональная функция – функция вида* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* P, Q *– многочлены (*Q *не тождественный 0). Будем считать, что у* P *и* Q *нет общих делителей, а старший коэффициент* Q *равен 1. Дробь* $\frac{P}{Q}$ *– правильная, если* $\deg P < \deg Q$.

Обозначения: $\mathbb{K}$ – поле;
$\mathbb{K}[x]$ – множество всех многочленов от x над полем $\mathbb{K}$;
$\mathbb{K}(x)$ – множество всех рациональных функций над полем $\mathbb{K}$.

Теорема 1. *Если* $f \in \mathbb{R}(x)$, *то* f *интегрируема в элементарных функциях.*

Замечание Если $f = \dfrac{P}{Q}$ – неправильная, то поделим с остатком $P = Q\cdot S + R$, $\deg R < \deg Q$. Тогда $f = \dfrac{Q\cdot S + R}{Q} = S + \dfrac{R}{Q}$, где $\dfrac{R}{Q}$ – правильная.

В силу замечания, достаточно доказать теорему для правильных дробей.

Разложение дробей в сумму простейших:

Напоминание: ОТА: Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Следствие 1. *Если* $Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, *то* $Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_z)^{k_z}$.

Следствие 2. *Если* $Q = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, *тогда имеется разложение* $Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_u x+\gamma_u)^{l_u}$.

Доказательство. $Q \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

$$Q = \prod_{i=1}^{t}(x-\alpha_i)^{k_i},\ \alpha_i \in \mathbb{C}$$

□

Лемма 1. *Если* $Q(\alpha) = 0$, *то* $Q(\overline{\alpha}) = 0$

Доказательство. Сопрягаем $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ □

Говоря умными словами, сопряжение – это автоморфизм поля комплексных чисел.

Лемма 2. *Кратности корня* α *и* $\overline{\alpha}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности кратность α меньше и равна k. Тогда достаточно применить лемму 1 к k-й производной многочлена $Q(x)$. □

Определение 6. *Рациональные функции вида* $\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$ *или дроби вида* $\dfrac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$, *где все коэффициенты действительные, дискриминант квадратичного выражения меньше нуля,* $n > 0$ *называются простейшими дробями*

Здесь мы можем рассматривать дроби с коэффициентами в любом поле. Теорема будет следовать из двух утверждений:

Теорема 2. *Любую рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших рациональных функций.*

Утверждение 5. *Простейшие дроби интегрируемы в элементарных функциях*

Утверждение 6. *Любая правильная рациональная фукнция разлагается в виде суммы простейших, а именно если* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *где* $q(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-x_i)^{k_i} \cdot \prod_{t=1}^{l}(x^2+\beta_t x+\gamma_t)^{m_t}$, *то*

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \ldots + \frac{M_{1m_1}x+N_{1m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}} + \ldots$$

Все коэффициенты подбираются методом неопределенных коэффициентов.

Лемма 3. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная дробь и пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$ *– корень знаменателя кратности* k *(то есть* $Q(x) = (x-\alpha)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$*).*

Тогда имеет место следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-\alpha)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

где $A \in \mathbb{R}$, *а вторая дробь – правильная.*

Доказательство. Для произвольного A имеем, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \frac{P(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{Q(x)}.$$

Независимо от A, это правильная дробь. В целях подобрать A так, чтобы в полученной дроби сократился множитель $(x-\alpha)$. Для этого нужно подобрать α таким образом, чтобы α являлся корнем числителя, то есть, чтобы $P(\alpha) - A \cdot \widetilde{Q}(\alpha) = 0$. Это действительно осуществимо, так как $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$ по определению $\widetilde{Q}$. □

Лемма 4. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная дробь и пусть* δ *(невещественный) комплексный корень* $Q(x)$ *кратности* l *(то есть* $Q(x) = (x^2+\beta x+\gamma)^l \cdot \widetilde{Q}(x)$*, где* $(x^2+\beta x+\gamma) = (x-\delta)(x-\overline{\delta})$*,* $\widetilde{Q}(\delta) \neq 0$*,* $\widetilde{Q}(\overline{\delta}) \neq 0$*). Тогда имеется разложение:*

$$\frac{P}{Q} = \frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^l} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^{l-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Доказательство. Распишем

$$\frac{P}{Q} - \frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^l} = \frac{P(x)-(Mx+N)\cdot\widetilde{Q}(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^l \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Это правильная дробь, теперь необходимо подобрать M и N так, чтобы числитель делился на $(x^2+\beta x+\gamma)$. Для этого δ должен быть корнем числителя, тогда $\overline{\delta}$ автоматически будет корнем. Итак, это равносильно тому, что

$$P(\delta) - (M\delta+N)\cdot\widetilde{Q}(\delta) = 0.$$

Известно, что $\widetilde{Q}(\delta) \neq 0$. В таком случае,

$$M\delta + N = \frac{P(\delta)}{\widetilde{Q}(\delta)}.$$

Слева записано какое-то комплексное число, это, в свою очередь, то же самое, что два равенства на вещественные числа (отдельно на вещественную и мнимую части). Пусть $\delta = \delta_1 + i\delta_2$. Тогда $M\delta_1 + N + i(M\delta_2) = \dfrac{P(\delta)}{\widetilde{Q}(\delta)}$. Отсюда

$$M = \operatorname{Im}\frac{P(\delta)}{\delta_2\cdot\widetilde{Q}(\delta)}; \quad N = \operatorname{Re}\frac{P(\delta)}{\widetilde{Q}(\delta)} - M\delta_1.$$

□

Отщепляя простейшие дроби от $\dfrac{P}{Q}$ по лемме 3 и лемме 4, получаем разложение в сумму простейших дробей. (Завершение доказательства теоремы 2.)

пизда пойду кофе сделаю и приду

Предлагаю эти комментарии не убирать для истории:)

Я родился :) Ну нахуй такие контроши блять, я нахуй ничего не успеваю Да нормальная кр, ты чего Так, давайте я снчала на бумаге напишу, а потом отформачу если будет нужно в техе Окс

коля чекни тг. да норм кр вы чего это просто мы ебаны коля)))))) ну времени не хватает Да бля, нормас, только я поебланил чуток(

го параллельно писать с колей ято не успеем, потом дополнишь. кстати крусорами вообще-то видно кто пишет, мы гении Ок Юля, вдвоем го, Арслан потом дополнит

2.3 Продолжение доказательства теоремы 1

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = \left[\begin{array}{r} A\cdot\ln|x-\alpha| + C, \text{ если } k=1 \\ \dfrac{1}{1-k}\cdot\dfrac{A}{(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ если } k>1 \end{array}\right.$$

Осталось показать, как интегрировать следующее выражение:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^k},$$

где дискриминант знаменателя меньше нуля. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$(x^2+\beta x+\gamma) = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right).$$

В таком случае, получим, что

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx = [x+\frac{\beta}{2}=y, dx=dy] = \int \frac{My+N_0}{(y^2+a^2)^k}dy = [\frac{y}{a}=t, dy=adt] = \int \frac{\widetilde{M}t+\widetilde{N}}{(t^2+1)^k}dt.$$

Получится выражение вида

$$\int \frac{\widetilde{M}t+\widetilde{N}}{(t^2+1)^k}dt = \int \frac{\widetilde{M}tdt}{(t^2+1)^k} + \int \frac{\widetilde{N}dt}{(t^2+1)^k}.$$

- $t^2+1=u, tdt=\frac{du}{2}$, тогда первый интеграл равен

$$\frac{\widetilde{M}}{2}\int \frac{du}{u^k} = \frac{\widetilde{M}}{2(-k+1)u^{k-1}} + C.$$

- Для вычисления второго интеграла введем следующий интеграл: $J_k(t) = \int \frac{dt}{(1+t)^k}$. Заметим, что $J_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C$. Далее,

$$J_k(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^k} = [u=\frac{1}{(t^2+1)^k}, v=t] = \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int t\cdot d\Big(\frac{1}{(t^2+1)^k}\Big) = \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2dt}{(t^2+1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\cdot J_k(t) - 2k\cdot J_{k+1}(t).$$

Выразив отсюда $J_{k+1}(t)$ через $J_k(t)$, получим, что

$$J_{k+1}(t) = \frac{1}{2k}\Big((2k-1)J_k(t) + \frac{t}{(t^2+1)^k}\Big).$$

Отсюда по индукции следует, что $J_k(t)$ – элементарная функция. Таким образом, теорема 1 об интегрировании рациональной функции в элементарные доказана.

затехаем сос лайдов короче ну давай так наверное, хуй с ним.

3 Рационализируемые интегралы

Определение 7. *Пусть $x_1,\dots,x_k$ переменные и пусть $a_* \in \mathbb{R}$. Выражение*

$$P(x_1,\dots,x_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k\in M} a_{i_1,\dots,i_k}x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k},$$

где $M \subset \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ и $|M| < \infty$, называется многочленом от нескольких переменных $x_1,\dots,x_k$.

$\deg P = \max(i_1+\ldots+i_k)$

Множество всех многочленов: $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_k]$.
Рациональная функция от нескольких переменных – отношение двух многочленов.
Множество рациональных функций: $\mathbb{R}(x_1,\dots,x_k)$.

Определение 8. *Интеграл, который элементарной заменой переменной сводится к интегралу от рациональной функции, называется рационализируемым интегралом.*

3.1 Классы рационализируемых интегралов

Утверждение 7. *Пусть* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$. *Тогда* $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ *– рационализируемый.*

Доказательство. Если $ad-bc=0$, то $\dfrac{ax+b}{cx+d} = const$.

Будем считать $ad-bc \neq 0$. Введем замену

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Тогда $x = \dfrac{dt^k - b}{a - ct^k} = f(t) \in \mathbb{R}(t)$, $dx = f'(t)dt$. Следовательно, $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(f(t),t)f'(t)dt$ – рациональная функция. □

Утверждение 8. *Пусть* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$. *Тогда* $\int R(\cos x, \sin x)dx$ *– рационализируемый.*

Доказательство. **Универсальная тригонометрическая замена:**

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Тогда $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Следовательно, $\displaystyle\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$ – рациональная функция. □

Утверждение 9. *Пусть* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$. *Тогда* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ *– рационализируемый.*

Доказательство. **Метод "Подстановки Эйлера":**

Случай $a=0$ относится к Утверждению 7. Поэтому далее считаем $a \neq 0$.

Положим $u = x$, $v = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Тогда u, v связаны соотношением $v^2 = au^2+bu+c$. На плоскости (u,v) оно задает квадрику. Об этом ниже.

3.2 Отступление об алгебраических кривых

Определение 9. *Пусть* $P(u,v) \in \mathbb{R}[u,v]$ *многочлен степени* k. *Тогда* $\Gamma_p = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | P(u,v) = 0\}$ *- называется алгебраической кривой* k*-того порядка.*

Если $k=2$, то такую кривую называют "квадрика"("коника"), а если $k=3$, то "кубика".

Примеры

- $v = u^2$ – парабола.
- $u^2+v^2=1$ – окружность.
- $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ – эллипс.
- $uv = 1$ – гипербола.
- $u^2 - v^2 = 1$ – также гипербола, только ее асимптоты – это прямые $y = \pm x$.

Определение 10. *Пусть* Γ_p *- алгебраическая кривая. Выражения* $u = \phi(t), v = \psi(t)$ *называются параметризацией кривой* Γ_p*, если хотя бы одно из них не равно константе и* ψ, ϕ *непрерывны (Арслан, про непрерывность вроде как было у тебя маленькими буквами, так что пересмотри потом пожалуйста, Да, тут все верно, он про непрерывность позже добавил, хотя не очень понимаю для чего они должны быть непрерывными) и* $P(u(t), v(t)) = 0$. *Если* $\phi, \psi \in \mathbb{R}(t)$, *то параметризация называется рациональной.*

Пример: $x = \cos t, y = \sin t-$ нерациональная параметризация окружности.

Теорема 3. *У невырожденной квадратичной кривой второго порядка есть рациональная параметризация.*

Доказательство. Пусть $(u_0.v_0) \in \Gamma_p$. Проведем через нее прямую с угловым коэффициентом t. В таком случае, данную прямую можно задать следующим уравнением:

$$l_t = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (v - v_0) = t(u - u_0)\}.$$

Найдем точку пересечения $\Gamma_p \cap l_t$:

$$\begin{cases} P(u, v) = 0 & (1) \\ v = v_0 + t(u - u_0) & (2) \end{cases}$$

Подставив (2) в (1) получим квадратное уравнение относительно u:

$$a_2(t)u^2 + a_1(t)u_1 + a_0(t) = 0, a_i \in \mathbb{R}[t].$$

(Невырожденность верна при том условии, что $a_2(t)$ не является тождественным нулём, то есть не равна 0 при всех t. (Арслан, тут тоже вопросик к невырожденности. Поправил.)) Понятно, что u_0 является решением данной сисстемы уравнений, поэтому по теореме Виета найдем второй корень:

$$u_2(t) = \frac{-a_1(t)}{a_2(t)} - u_0 \in \mathbb{R}(t)$$

$$v_2(t) = v_0 + t(u_2(t) - u_0) \in \mathbb{R}(t).$$

В таком случае получается, что $P(u(t), v_2(t)) = 0$, а это и есть рациональная параметризация. Более того, выше приведен алгоритм, как ее находить.

□

Вернемся к утверждению 9. Имеем, что

$$u = x, v^2 = ax^2 + bx + c.$$

Как было доказано выше, существует рациональная параметризация, то есть $u = \phi(t), v = \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$. Поскольку $u = x$, то $dx = \phi'(t)dt$. В таком случае

$$\int R(u, v)dx = \int R(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)dt.$$

□

Privet, напиши сюда какое-то вступление чтоб чуток было

3.3 Ебу, опять отступление о разных примерах

Пример: Попробуем параметризовать единичную окружность. Применим метод, описанный в доказательстве теоремы 3. Возьмем на окружности точку $(-1, 0)$ и проведем какую-то прямую с коэффициентом t. В таком случае, $y = t(x - 1)$ – уравнение "переменной прямой". Теперь найдем вторую точку пересечения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ y = t(x - 1) & (2) \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x^2 + t^2(x^2 + 2x + 1) = 1$, откуда

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0.$$

Один корень известен, он равен -1 и не зависит от t. Тогда по теореме Виета найдем второй корень:

$$x_2 = -\frac{2t^2}{1 + t^2} - x_1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Заметим, что x_2 зависит от t рационально. Теперь найдем y_2:

$$y_2 = t(x_2 + 1) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

В таком случае, рациональная параметризация окружности такова:

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \ \ y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Данная параметризация напоминает универсальную тригонометрическую замену. В качестве t здесь выступает $\operatorname{tg} \beta$, где $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Замечание 1: Если мы занимаемся интегрированием тригонометрических выражений, то мы просто интегрируем функцию по окружности, чтобы это ни значило (надо пометить, что это цитата Айзенберга, поскольку не особо ебу четкий смысл фразы этой) пока заебись успеваем, кажется лучше щас, так как потом идз ебучие да техать со слайдов это минут 40 времени, но можно и сейчас Фига ты быстро умеешь техать конечно да..

Замечание 2: Если в рац. параметризацию подставить рациональное t, то получится точка с рациональными координатами на окружности. И, наоборот, любая рациональная точка окружности получается таким образом.

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{1 + t^2} \end{cases}$$

Таким образом, если подставить $t = \frac{m}{n}$, то получится классификация Пифагоровых троек, то есть классификация целых решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$. Обобщая рассуждение, доказательство Великой теоремы Ферма сводится к поиску рациональных точек на кривой $x^k + y^k = 1$ при $k \geq 3$. Но рациональных параметризаций у кривых порядка $k \geq 3$ нет.

4 Определенный интеграл (Римана)

Определение 11. *Разбиение τ отрезка $[a, b]$ называется произвольное конечное подмножество его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ $(n = n_\tau)$. Точки x_i отсортированы в порядке возрастания.*

кста, а будем картинки как-то накидывать?
фоточки из тетрадки в клеточку, или скрины слайдов с лекций))) хаха, звучит забавно
Подотрезки $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ называются отрезками разбиения. Величины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – их длины. Мелкость или диаметр разбиения $|\tau| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Определение 12. *Будем говорить, что разбиение τ' называется разбиением или измельчением разбиения τ (обозначается $\tau' \prec \tau$), если $\tau' \supseteq \tau$.*

Основные свойства

- Образуют ЧУМ, то есть если $\tau_1 \prec \tau_2$ и $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.
- $\forall \tau_1, \tau_2 \ \exists \tau_3 : \tau_3 \prec \tau_1$ и $\tau_3 \prec \tau_2$. Также очевидно в силу того, что мы можем взять все точки из τ_1 и из τ_2. Дальше какая-то неясная хуета... ну типа очевидно. Оставим это упражнение ина совести читателя.

Определение 13. *Размеченное разбиение – это пара (τ, c), где τ – разбиение $[a, b]$, $c = \{c_1, c_2, ...c_n\}, c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.*

Определение 14. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Интегральная сумма Римана:*

$$S_{\tau,c}(f) = \sum_{i=1}^{n_\tau} f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

n_τ – число отрезков в разбиении τ.

Проще говоря, это площади маленьких прямоугольников под графиком, с точностью до знака.

Сори, что за мной правишь, а то не шарю за дизайн как ты(блин ахаха, просто предираюсь, дизайн 2021 чисто школа дизайна ниу вшэ и артемий лебедев сасат

Определение 15. *Предел $I = \lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,c}(f)$, если он существует называется определенным интегралом Римана от f на $[a, b]$ и обозначается*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

а f называется интегрируемой по Риману.

Распишем предел $I = \lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,c}(f)$ по определению:

$$\forall\varepsilon\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall\tau,\ |\tau| < \delta \text{ и } \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i] : |S_{\tau,c}(f) - I| < \varepsilon. \quad (1)$$

Теорема 4 (необходимое условие интегрируемости)**.** *Если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть f не ограничена. Если τ – разбиение $[a, b]$, то существует k, для которого f не ограничена на $[x_{k-1}, x_k]$. Далее подберем $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такое, что $f(c_k)$ сколь угодно большое (в силу неограниченности). Тогда

$$S_{\tau,c}(f) = f(c_k)\Delta x_k + \sum_{i\neq k} f(c_i)\Delta x_i$$

противоречит условию (1). □

Этого условия не достаточно.

Пример: Рассмотрим в качестве примера функцию Дирихле:

$$\begin{cases} f(x) = 1, \text{ если } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0, \text{ если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

В любом отрезке есть как рациональное число, так и иррациональное. Если взять все c_i рациаональными, а потом наоборот, то получится два разных результата, то есть предела не существует.

Далее будем считать, что f ограничена на $[a, b]$.

Определение 16. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ – разбиение на $[a, b]$.*

Рассмотрим

- $M_i(f) = \sup_{c\in[x_{i-1},x_i]} f(c)$, $m_i(f) = \inf_{c\in[x_{i-1},x_i]} f(c)$.
- $w_i(f) = M_i(f) - m_i(f)$ *– колебание на i-ом отрезке разбиения.*
- $\overline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i$ *– верхняя интегральная сумма Дорбу*
- $\underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i$ *– нижняя интегральная сумма Дорбу*

Замечание 1: $\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i$.

Замечание 2: Для любой разметки $c = \{c_i\}$, где $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, выполнено

$$\underline{S}_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq \overline{S}_\tau(f),$$

так как $m_i(f) \leq f(c_i) \leq M_i(f)$ (умножим на $\delta x_i > 0$ и просуммировать по i).

4.1 Критерий Дарбу

Теорема 5 (критерий интегрируемости функции на отрезке, критерий Дарбу)**.** *f интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда выполнено условие Дарбу:*

$$\lim_{|\tau|\to 0}(\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f)) = 0$$

То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \tau,\ |\tau| < \delta$:

$$|\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau| < \varepsilon$$

Ну что народ, погнали нахой. Потом там какие-то символы нахуярим

Доказательство. Докажем $\Rightarrow$. Пусть существует $\lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,c}(f) = I$. Идея состоит в том, чтобы сначала брать в качестве c_i брать точки максимума на Δx_i, а затем брать минимальные (но тут не все так норм, поскольку максимума или минимума может не быть) Из того, что существует предел равный I, следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0}\overline{S}_\tau(f) = I = \lim_{|\tau|\to 0}\underline{S}_\tau(f),$$

следовательно предел разности равен нулю.

А теперь само доказательство. Для фиксированного разбиения τ можно подобрать такие $c_i, \widetilde{c_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ так чтобы $m_i(f) \le f(c_i) \le f(\widetilde{c_i}) \le M_i(f)$ и при этом

$$f(\widetilde{c_i}) - f(c_i) \ge \frac{1}{2}(M_i(f) - m_i(f)) \tag{2}$$

$$A = \{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

$$M_i(f) = \sup A,\ m_i(f) = \inf A,\ w_i = M_i(f) - m_i(f)$$

- $w_i = 0$ Тогда можно выбрать любые две точки отрезка, и все будет хорошо.
- $w_i > 0$ подберем $\widetilde{a}$ из A так, что $M_i(f) - \dfrac{w_i}{4} \le \widetilde{a} \le M_i(f)$. Аналогично подберем точку, которая близка к инфимуму, тогда получится как раз требуемая оценка Так как оба числа принадлежат A, то существуют такие $c_i, \widetilde{c_i}$

По условию фукнция интегрируема, то есть определен предел $\lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,\widetilde{c}}(f) = I = \lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,c}(f)$.

Воспользуемся оценкой (2) и получим,

$$0 \le \overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau = \sum_{i=1}^{n_\tau} \Delta x_i (M_i(f) - m_i(f)) \le 2\sum_{i=1}^{n_\tau} \Delta x_i (f(\widetilde{c_i}) - f(c_i)) = 2(S_{\tau,\widetilde{c}}(f) - S_{\tau,c}(f)) \to 0.$$

Получаем, что $\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) \to 0$ по лемме о миллиционерах (сотрудниках полиции).

Лемма 5. *Если $\tau_1 \prec \tau_2$, то $\underline{S}_{\tau_1}(f) \ge \underline{S}_{\tau_2}(f)$ и $\overline{S}_{\tau_1}(f) \le \overline{S}_{\tau_2}(f)$.*

Доказательство. Если мы посмотрим на нижние суммы бля τ_2, то при добавлении какой-то точки, наш "столбик"епта масло разбивается на две части, и тем больше по площади будет разбиение (епта, неблагодарное дело (цитаты Айзенберга голубые)). Более строго, $M \subseteq N$ влечет $\inf_{x\in M} f(x) \ge \inf_{x\in N} f(x)$, в то же время $\sup_{x\in M} f(x) \le \sup_{x\in N} f(x)$. ☐

Лемма 6. *Любая нижняя интегральная сумма Дарбу не превосходит любой верхней интегральной суммы Дарбу, то есть $\forall \tau_1, \tau_2$ выполнено $\underline{S}_{\tau_1}(f) \le \overline{S}_{\tau_2}(f)$.*

Доказательство. Подберем $\tau_3 \prec \tau_1, \tau_2$. Имеем

$$\underline{S}_{\tau_1} \le \underline{S}_{\tau_3}(f) \le \overline{S}_{\tau_3} \le \overline{S}_{\tau_2}(f).$$

☐

Докажем $\Leftarrow$. Рассмотрим числовые множества:

$$A = \{\underline{S}_\tau(f) | \tau \text{ разбиение } [a,b]\}, \quad B = \{\overline{S}_\tau(f)\}$$

Из Леммы 6 следует, что $\forall y \in A, z \in B : y \leq z$. Из аксиомы непрерывности $\mathbb{R}$ следует, что $\exists I \in \mathbb{R}$:

$$\forall y \in A y \leq I \text{ и } \forall z \in B z \geq I.$$

Дано, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} (\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f)) = 0.$$

Это значит, что $\sup A = \inf B = I$. Отсюда следует:

- Единственность числа I.
- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \tau, |\tau| < \sigma : |\overline{S}_\tau - I| < \varepsilon$ и $|\underline{S}_\tau(f) - I| < \varepsilon$.

С другой стороны, $\underline{S}_\tau \leq S_{\tau,c}(f) \leq \overline{S}_\tau$.
Следовательно, $S_{\tau,c}(f) \to I$ при $|\tau| \to 0$. Таким образом, доказано, что функция f интегрируема. □

4.2 Следствия из критерия Дарбу

Теорема 6. *Если f определена и монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию теоремы и для определенности монотонно не убывает. Тогда

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n_\tau} \Delta x_i \cdot (M_i(f) - m_i(f)) = \sum_{i=1}^{n_\tau} \Delta x_i \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{n_\tau} |\tau| \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) = |\tau| \cdot (f(b) - f(a))$$

Это стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Значит f интегрируема. □

Теорема 7. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора из непрерывности f на $[a,b]$ следует равномерная непрерывность на $[a,b]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall [c,d] \subseteq [a,b], d - c < \delta, \text{колебание } f \text{ на } [c,d] \text{ меньше } \varepsilon.$$

В частности, для разбиения τ отрезка $[a,b]$ с мелкостью τ имеем

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n_\tau} \Delta x_i \cdot (M_i(f) - m_i(f)) \leq= \sum_{i=1}^{n_\tau} \varepsilon \cdot \Delta x_i = \varepsilon \cdot (b-a) \to 0.$$

□

ебать я тормоз просто пиздец

4.3 Основные свойста определенных интегралов

Будем считать, что $f \in R([a,b])$ или $f \in R[a,b]$, если функция интегрируема на $[a,b]$.

Свойства:

1. $\int_a^b 1 \, dx = b - a$
2. Если $f \in R[a,b]$, то функция также интегрируема на любом подотрезке.
3. Аддитивность интеграла относительно отрезка интегрирования. Пусть $a < c < b$ и допустим, что f определена на $[a,b]$ и $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$ и интеграл суммы равен сумме интегралов, то есть
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Линейность интеграла относительно подинтегральной функции. Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b]$. Тогда $\lambda f + \mu g \in R[a,b]$ и
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b g dx.$$

5. Если $f, g \in R[a,b]$, то $f \cdot g \in R[a,b]$.

   Доказательство. Пусть F – функция и $\Delta F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. Есть формула
$$\Delta(fg)(x_0) = \Delta f(x_0) g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) g(x_0)$$
   (формула относительно f и g не симметрична).

   Пусть $[c,d] \in [a,b]$. Тогда
$$\omega(fg, [c,d]) \leq \sup_{[c,d]} |g| \cdot \omega(f, [c,d]) + \sup_{[c,d]} |f| \cdot \omega(g, [c,d]).$$

   Пусть $\sup_{[c,d]} |g|$ и $\sup_{[c,d]} |f|$ ограничены числом A, тогда
$$\sum_{i=1}^{n_\tau} \omega_i(fg) \Delta x_i \leq A \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i + A \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} \omega_i(g) \Delta x_i \to 0.$$
   □

6. Если $f \in R[a,b]$ и $\inf_{[a,b]} f > 0$, то $\frac{1}{f} \in \mathbb{R}[a,b]$.

   Доказательство. $\omega_i \left(\frac{1}{f} \right)$ оценивается через $\omega_i(f)$ □

7. Монотонность операции интегрирования. Пусть есть $f, g \in R[a,b]$, и $f \leq g$ на $[a,b]$. В таком случае соответствующее неравенство есть и для интегралов: $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ (операция перехода к пределу монотонна).

8. Если $f \in R[a,b]$, то и $|f| \in R[a,b]$ и
$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx. \tag{3}$$

   Доказательство. Интегрируемость можно вывести через критерий Дарбу, поскольку $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$.

   Неравенство (3) получается предельным переходом из неравенсвта для интегральных сумм и следующего неравенства для конечных сумм:
$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$
   □

9. Если $f \in R[a,b]$ и f^* отличается от f значениями в конечном числе точек. Тогда
$$\int_a^b f^* dx = \int_a^b f dx.$$

Замечание: [рисунок] $\int_a^b f dx$ – "площадь под графиком".

Еще замечание (дополнение к свойству монотонности): Если $f \geq 0$, на $[a, b]$ и непрерывна на данном отрезке и $\exists\, c \in [a, b] : f(c) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Естественно проще понять все с картинки, я приводить формальное доказательство не буду На данный момент конспект имеет чуть большее количество строчек как мое идз

4.4 Теорема о среднем для интеграла

Теорема 8 (первая теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть $f, g \in R[a, b]$, и допустим, что $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$ и пусть g не меняет знак на $[a, b]$ (может быть нулем).*

1. *В таком случае $\exists \mu \in [m, M]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

2. *При дополнительном условии непрерывности f на $[a, b]$ выполнено $\exists\, c \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для определенности счиатем, что $g \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда $m \leq f(x) \leq M$. Следовательно, $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$ на $[a, b]$. Возьмем от всех частей неравенства интеграл (в силу свойства 5): Значит (по свойству 7 знаки сохранятся)

$$m \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx = M \cdot \int_a^b g(x)dx \tag{4}$$

Рассмотрим два случая:

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Берем произвольный μ.

2. $\int_a^b f(x)dx > 0$. Поделим (4) на $\int_a^b g(x)dx$:

$$m \leq \frac{\int_a^b fgdx}{\int_a^b gdx} \leq M.$$

Тогда берем $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Тнужно как-то написать что этов орая часть теоремы где была перваяф прсото начало похуй

Если f непрерывна, то возьмем $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$. По теореме о промежуточном значении $\exists\, c \in [a, b] : f(c) = \mu$, где $\mu \in [m, M]$ (μ из первого пункта теоремы). Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

□

Следствие: Пусть f непрерывна на отрекзке $[a, b]$ ($f \in C[a, b]$), тогда $\exists\, c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Для доказательства положим $g(x) \equiv 1$ в теореме 8. охуенно, что мы делаем конспект, перечитывать совсем не помешает прекрасное решение

Теорема 9 (вторая теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть f монотонна на отрезке $[a, b]$ (мб не строго), а g интегрируема по Риману, тогда существует точка c, принадлежащая отрезку $[a, b]$ такая, что выполнено тождество*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

5 Связь определенных и неопределенных интегралов

Определение 17. *Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда (x сменим на t, коллизия имен, все дела)*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in (a,b]$$

называют интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.

Аналогично

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a,b)$$

называют интегралом с переменным нижним пределом интегрирования.

Утверждение 10. *Если $f \in R[a,b]$, то $F, G \in C(a,b)$.*

Соглашение:

- Если f определена в точке a, то
$$\int_a^a f(x) = 0.$$
- Если $a > b$, то
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

  Прелести:

  – $\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$
  $$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_b^c f dx.$$

  – Теорема 8 верна для любых a, b (необязательно следить за знаками вовсе).

Теорема 10. *Пусть $f \in [a,b]$ и $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$.*

Тогда F, G дифференцируемы на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = -f(x)$.

Доказательство. По определению производной

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$

Продолжаем по теореме 8 для $c \in [x, x+\Delta x]$ (или $[x+\Delta x, x]$):

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

Теперь для $G(x)$ поступим хитрее:

$$F(x) + G(x) = \left(\int_a^x + \int_x^b\right) f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = const.$$

Если такое выражение продифферницировать по x, то получится, что $F'(x) + G'(x) = 0$ откуда и следует

$$G'(x) = -F'(x) = -f(x).$$

Такое и в школе было у многих □

Следствие: Пусть $f \in C\langle a,b\rangle$. Тогда у f на $\langle a,b\rangle$ есть первообразная.

Доказательство. $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, где $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Тогда надо проверить, что $F'(x) = f(x)$. □

5.1 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 11 (основная теорема интегрального исчисления, Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть* $f \in C[a,b]$ *и* Φ *– ее первообразная. Тогда имеет место следующая формула:*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

(независимо от того, что больше: a или b).

Доказательство. По предыдущему следствию: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для f. Значит $F(x) = \Phi(x) + C$. Тогда

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C,$$

$$\int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C = 0 \Rightarrow C = -\Phi(a).$$

□

за нами следит какой-то аноним он не может тутписать ахахаха, можем кибербуллить хахахахаххаха

Обозначения: $\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$, $\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b$

приует

вот она, счастливая жизнь, когда бдзшки подряд идут

5.2

Теорема 12 (замена переменной)**.** *Пусть* $\varphi, \varphi' \in C[\alpha,\beta]$, *а* f *непрерывна на* $\varphi([\alpha,\beta])$

Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть Φ – первообразная для f на $\varphi([\alpha,\beta])$. Тогда возьмем композицию функций $\Phi(\varphi)$. Эта композиция будет первообразной для $f(\varphi) \cdot \varphi'$ на $[\alpha,\beta]$ Применив формулу Ньютона-Лейбница дважды, получим, что

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

□

Теорема 13 (интегрирование по частям)**.** *Пусть* $u, v, u', v' \in C[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{5}$$

Доказательство. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, сведем к утверждению 4 об интегрировании по частям для неопределенных интегралов. никаких вроде бы нет подводных камней □

Определение 18. *Функция* f *называется непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$ *если существует какое-то разбиение* $[a,b]$ $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_s < b$ *такое, что* f *дифференцируема на каждом отдельном отрезке* $[a,c_1],[c_1,c_2],\ldots$ *(и* f' *непрерывна на них) и при этом* f *непрерывна на* $[a,b]$.

Замечание: Если u, v непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то формула (5) все еще верна.

6 Геометрические приложения

Куда идем: определенный интеграл – площадь фигуры под графиком

6.1 Мера Жордана

Давайте еще одну, правильно

Другими словами, мера Жордана – n-мерный объем подмножеств в $\mathbb{R}^n$. В основном, рассматриваем $n = 1, 2, 3$.

Определение 19. $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, d_n] \subset \mathbb{R}^n$ *– прямоугольный параллелепипед. Иными словами,* $\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \forall\ i\ a_i \leq x_i \leq b_i\}$.

Свойство: Если Δ, Δ' – параллелепипеды, то $\Delta \cap \Delta'$ – тоже параллелепипед или $\varnothing$.

Определение 20. *Элементарная прямоугольная фигура – это объединение конечного числа прямоугольных параллелепипедов.*

Определим меру Жордана для прямоугольных фигур, исходя из правил:

1. Величину $\mu(\Delta) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ будем называть объемом фигуры.
2. Формула включений-исключений:

$$\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) - \mu(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

   Отсюда следует общая комбинаторная для объемов n параллелепипедов:

$$\mu(\cup_{i=1}^{s}\Delta_i) = \sum_{i\in[s]}\mu(\Delta_i) - \sum_{\{i,j\}\in[s]}\mu(\Delta_i \cap \Delta_j) + \sum_{\{i,j,k\}\in[s]}\mu(\Delta_i \cap \Delta_j \cap \Delta_k) - \ldots.$$

   Не буду обосновывать, там корректно. Почему все так - можете подумать.

Однако наша вселенная состоит не только из квадратиков и прямоугольничков, но еще и из более сложных фигур.

Определение 21. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченное подмножество (то есть лежит в некотором прямоугольном параллелепипеде). Положим*

$$\overline{\mu}(E) = \inf_{E\subseteq A}\mu(A),$$

где A *- прямоугольная фигура.*

Аналогично,

$$\underline{\mu}(E) = \sup_{E\subseteq A}\mu(A),$$

A *– прямоугольная фигура.*

Если $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$*, то* E *называется измеримым по Жордану (при* $n = 2$ *называется квадрируемым, при* $n = 3$ *- кубируемым), а* $\mu(E) = \overline{\mu}(E)$ *называется мерой Жордана* E*.*

Свойства

1. Для параллелепипедов и прямоугольных фигур μ совпадает с раннее определенным.
2. Монотонность меры. Если $E \subseteq E'$ измеримы, то $\mu(E) \leq \mu(E')$.
3. Аддитивность меры. Если E, E' измеримы и не пересекаются, то $\mu(E \cup E') = \mu(E) + \mu(E')$.
4. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – движение пространства (преобразование, сохраняющее расстояния между точками). Если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то $F(E)$ тоже измеримо и $\mu(F(E)) = \mu(E)$.
5. **Свойство звездочка, как мазь:** Вообще говоря, если A – матрица порядка n, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $F(x) = Ax$, то если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то $F(E)$ тоже измеримо и $\mu(F(E)) = \mu(E) \cdot |\det A|$.

Определение 22. *Пусть* f_1, f_2 *– функции на* $[a, b]$ *и* $f_2(x) \geq f_1(x)\ \forall\ x \in [a, b]$*. Тогда фигура (подмножество)*

$$\phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

называется криволинейной трапецией.

Утверждение 11. *Если $f_1, f_2 \in R[a,b]$, то ϕ квадрируема и $\mu(\phi) = S_\phi$ равна*

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Доказательство. Докажем в случае $f_1(x) \equiv 0$. Доказательство начнем с рисунка. (он ведь у всех есть) Требуется, чтобы площадь под графиком была равна $\int_a^b f_2(x)dx$. Вспомним, что

$$\int_a^b f_2(x)dx = \inf_\tau \overline{S}_\tau(f_2) = \sup_\tau \underline{S}_\tau(f_2)$$

Заметим, что верхние интегральные суммы $\overline{S}_\tau(f_2)$ – это площадь (мера Жордана) элементарной прямоугольной фигуры, которая содержит криволинейную трапецию ϕ.

Аналогично, $\underline{S}_\tau(f_2)$ – это площадь (мера Жордана) элементарной прямоугольной фигуры, которая содержится в ϕ.

Если $f_1 \not\equiv 0$, то можно описать вокруг ϕ разницу прямоугольных фигур, соответствующих $\overline{S}_\tau(f_2)$ и $\underline{S}_\tau(f_1)$, а также можно вписать в ϕ разницу прямоугольных фигур, соответствующих $\underline{S}_\tau(f_2)$ и $\overline{S}_\tau(f_1)$. Разницу площадей $\overline{S}_\tau(f_2) - \underline{S}_\tau(f_1)$ и $\underline{S}_\tau(f_2) - \overline{S}_\tau(f_1)$ можно сделать меньше ε.

□